Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Dissertação de Mestrado

Aplicações de Princípios Combinatórios em Topologia Geral

Dimi Rocha Rangel

Salvador-Bahia
Fevereiro de 2012

Aplicações de Princípios Combinatórios em Topologia Geral

Dimi Rocha Rangel

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Samuel Gomes da Silva.

Salvador-Bahia

Fevereiro de 2012

Rangel, Dimi Rocha.

Aplicações de Princípios Combinatórios em Topologia Geral / Dimi Rocha Rangel. – Salvador: UFBA, 2012.

76 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Samuel Gomes da Silva.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2012.

Referências bibliográficas.

1. Teoria dos conjuntos. 2. Teoria combinatória de conjuntos. 3. Topologia. I. Silva, Samuel Gomes da. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 510.22

: 515.122

Aplicações de Princípios Combinatórios em Topologia Geral

Dimi Rocha Rangel

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 27 de fevereiro de 2012.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Samuel Gomes da Silva (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Charles James Glyn Morgan
University College London

Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi
USP São Carlos

Aos meus familiares, meus amigos e minha doce Helena

Agradecimentos

Agradeço a meus familiares por todo apoio que me deram, sobretudo meus pais que sempre me incentivaram a ir mais longe nos estudos. Agradeço a Helena pela paciência e compreensão em todos os momentos que tive que abdicar de estar ao seu lado para cumprir obrigações acadêmicas.

Agradeço ao meu orientador, o Prof. Samuel Gomes da Silva, pela paciência e dedicação com que me orientou durante este trabalho, e também durante a minha graduação, pelo período em que fiz iniciação científica sob sua orientação.

Agradeço também aos professores do Grupo de Lógica, Conjuntos e Topologia, Andreas Brunner e Thierry Lobão, pela grande contribuição que deram para minha formação. Agradeço aos demais professores da pós-graduação pelo conhecimento muito bem transmitido nas matérias que fiz.

Agradeço ao prof. Charles Glyn Morgan pelas contribuições dadas por e-mail, contribuições essas que foram preciosas para a realização deste trabalho.

Agradeço às professoras Lúcia Renato Junqueira e Ofélia Teresa Alas e ao professor Leandro Fiorini Aurichi pela receptividade quando fui ao IME-USP apresentar um trabalho (que corresponde às subseções 1.3.3, 1.3.4 e 1.3.5 do capítulo 1 desta dissertação) nos seminários de Topologia Geral e Teoria dos Conjuntos do IME-USP. Agradeço a Benigno que pela estadia em sua morada em São Paulo.

Agradeço novamente aos professores Charles Glyn Morgan e Leandro Fiorini Aurichi por aceitar o convite para participar da banca examinadora da minha defesa.

Agradeço aos meus colegas de mestrado que sempre ajudaram uns aos outros em momentos de dificuldades nas matérias e pela boa companhia que foram também nos momentos de alegrias.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro concedido a mim durante todo o meu mestrado.

"Jamais saberás o que é bastante, se não souberes o que é mais que bastante"

William Blake

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo apresentar algumas aplicações de combinatória infinitária em Topologia Geral. Mais especificamente, iremos apresentar dois tipos de aplicações. O primeiro consiste em obter resultados no contexto de consistência e independência em Topologia Geral relacionando a existência de certos espaços topológicos com hipóteses sobre estruturas combinatórias. Estabelecidas estas relações, podemos utilizar resultados relativos a essas estruturas combinatórias para obter resultados em Topologia. O segundo tipo de aplicação consiste em utilizar asserções combinatórias para melhorar alguns resultados topológicos, os quais, no nosso caso, são resultados envolvendo a limitação do extent (em termos da densidade) de espaços topológicos com propriedades adicionais, que neste trabalho são a normalidade, a paracompacidade enumerável e a propriedade (a).

Palavras-chave: Funções cardinais; Famílias dominantes; Princípios diamante parametrizados; Normalidade; Paracompacidade enumerável; Propriedade (a).

Abstract

This work aims to present some applications of infinitary combinatorics in General Topology. More specifically, we will present two types of applications. The first is to obtain results in the context of consistency and independence in General Topology relating the existence of certain topological spaces with hypotheses about combinatorial structures. Established these relationships, we can use results for combinatorial structures to obtain results in topology. The second kind of application consists of the use of combinatorial claims to improve some topological results which, in our case, are results involving constraints of the extent (in terms of the density) of topological spaces with additional properties, which in this work are normality, countable paracompactness and property (a).

Keywords: Cardinal functions; Dominant families; Parametrized diamond principles; Normality; Countable paracompactness; Property (a).

Sumário

Introdução

Resultados de consistência em Topologia Geral são obtidos basicamente de duas maneiras: estabelecendo relações entre asserções topológicas e afirmações (geralmente asserções combinatórias cuja consistência já é conhecida – tais como *Hipótese do Contínuo*, *Axioma de Martin*, *Princípio Diamante*, etc.) ou construindo modelos da teoria dos conjuntos nos quais podemos verificar a veracidade de tais asserções.

O estudo de estruturas combinatórias está intimamente ligado às provas de consistência. Chamaremos de *estrutura combinatória*, genericamente, a determinadas famílias de conjuntos que são definidas em termos de *propriedades combinatórias*, que nada mais são que propriedades que são preservadas por bijeções. Note que, como tais famílias são definidas utilizando bijeções, o estudo de tais famílias está naturalmente associado a noções de cardinalidade e ao estudo de cardinais.

Tais estruturas foram amplamente estudadas durante o período chamado de Teoria dos Conjuntos Clássica, que vai desde os primeiros trabalhos de Cantor até a invenção do método de forcing, por Cohen, que marca o início da Teoria Moderna de Conjuntos. A introdução do método de forcing impulsionou um crescimento vertiginoso nas publicações de resultados de consistência, e a consistência da existência de diversas estruturas combinatórias – ou ainda a consistência da existência de diversas estruturas com propriedades especiais – foram assim demonstradas.

Uma *asserção combinatória*, ou *princípio combinatório* é uma afirmação sobre algumas estruturas combinatórias, ou, mais geralmente, uma afirmação envolvendo propriedades definidas combinatorialmente e que declare a validade de um certo fato.

Podemos destacar entre as principais estruturas combinatórias utilizadas para obtenção de resultados de consistência em matemática, as famílias almost disjoint e as famílias dominantes (cuja existência tem relação com grandes cardinais) e, dentre os princípios combinatórios, os princípios de predição (tais como o diamante).

O Princípio Diamante é o primeiro de vários princípios combinatórios conhecidos como *princípios de predição* (*guessing principles*). O Princípio Diamante declara a existência de uma sequência de comprimento ω_1 (denominada "sequência diamante") de subconjuntos A_α que é capaz de "predizer" qualquer subconjunto de ω_1 numa quantidade de tamanho “médio” (estacionário) de valores de α. (No caso, a noção de *médio* se refere ao filtro club, no sentido de que consideramos como sendo os conjuntos “grandes” aqueles que contém qualquer subconjunto ilimitado e fechado de ω_1. Um subconjunto de ω_1 é dito estacionário se intersectar qualquer conjunto club (fechado e ilimitado), e pode ser encarado como sendo um conjunto de tamanho *médio*. Essa noção de “conjunto médio” é análoga à de “conjunto de medida não-nula”, em Análise). O Princípio Diamante (que implica, trivialmente, a Hipótese do Contínuo) foi introduzido por Jensen, quando da construção de uma árvore de Souslin no modelo construtível de Gödel (ou seja, vale o Diamante no modelo construtível e o uso do Diamante permite a construção de uma árvore de Souslin nesse modelo). É interessante destacarmos que o Axioma de Martin implica que não existem árvores de Souslin, e, como ambos os princípios combinatórios citados (Axioma de Martin e Princípio Diamante) são consistentes (o Axioma de Martin pode ser obtido via forcing iterado, e o Princípio Diamante é válido no modelo construtível $\mathbf{L}$), temos então que a existência de árvores de Souslin (e, equivalentemente, de retas de Souslin – ordens totais, conexas na topologia da ordem, com subconjunto denso não-enumerável e que não possua famílias não-enumeráveis de abertos dois-a-dois disjuntos) é uma questão indecidível para a Teoria dos Conjuntos (ou seja, para a Matemática).

Recentemente (2004), J.T. Moore, M. Hrušák e M. Džamonja introduziram determinados princípios denominados “princípios diamante parametrizados”. Tais princípios tomam como parâmetros objetos de uma categoria introduzida por De Paiva e Vojtáš, e são introduzidos numa linguagem próxima ao chamado “Diamante Fraco” de Devlin e Shelah (em 1974, tais autores isolaram uma hipótese combinatória que eles demonstraram ser equivalente à hipótese conjuntista (de aritmética cardinal) $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$.).

Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

No primeiro capítulo serão apresentados, nas duas primeiras seções, alguns conceitos e fatos básicos de Teoria dos Conjuntos e Topologia Geral com a finalidade de fixar a notação. Depois, na seção de “Estruturas e princípios combinatórios” serão apresentados resultados não tão básicos quanto os das seções anteriores com o intuito de juntar ferramentas para serem aplicadas nos capítulos subsequentes.

O segundo capítulo começa com o Lema de Jones, um famoso resultado que serviu de motivação para a busca de resultados semelhantes para (a)-espaços – introduzidos por Matveev em [M97], que também foi quem demonstrou a validade de um análogo do Lema de Jones para (a)-espaços – e os espaços enumeravelmente paracompactos – para os quais também vale um resultado análogo ao Lema de Jones, demostrado por Fleissner em [F78]. Na segunda seção, anunciaremos alguns resultados que aparecerão nos capítulos 4 e 5.

No terceiro capítulo serão apresentadas caracterizações combinatórias das três propriedades topológicas destacadas no capítulo anterior para Ψ-espaços. Tais caracterizações são bastante interessantes porque estabelecem uma conexão entre Topologia e Combinatória Infinitária. Além disso, mais tarde, no capítulo 5, tais caracterizações serão úteis na aplicação dos princípios diamante parametrizados para obtenção de resultados relativos aos Ψ-espaços.

No quarto capítulo, apresentaremos resultados envolvendo famílias dominantes. Mais precisamente, exibiremos teoremas que relacionam a existência de certos espaços topológicos com a existência de famílias dominantes pequenas, cuja existência tem relação com grandes cardinais.

No quinto capítulo serão exibidas aplicações dos princípios diamante parametrizados, introduzidos no capítulo 1, para a obtenção de resultados mais fortes envolvendo limitações no extent de espaços separáveis bem como aplicações de tais princípios aos Ψ-espaços.

Finalmente, no apêndice, vamos mostrar uma versão do teorema 4.6 no contexto de propriedades topológicas relativas exemplificando a possibilidade de extensão dos resultados aqui expostos a tal contexto.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Teoria dos Conjuntos

Assumiremos que o leitor tem familiaridade com a teoria básica de estruturas ordenadas, como pré-ordens, ordens parciais, ordens totais e boas ordens. Também assumiremos conhecidas as definições de ordinais e cardinais, bem como os fatos básicos relativos a eles, incluindo aritméticas ordinal e cardinal.

Denotaremos ordinais e cardinais por letras gregas, em especial as letras α, β, γ, δ, ξ, ζ denotarão ordinais enquanto as letras κ, λ, μ, θ denotarão cardinais, salvo menção em contrário.

Suporemos conhecida também a hierarquia dos $\aleph$'s, porém utilizaremos predominantemente o símbolo ω (com os devidos sub-índices) , cujo uso é mais comum em topologia conjuntista. Assim, o primeiro ordinal/cardinal infinito será denotado por ω $(= \omega_0)$, o primeiro ordinal/cardinal não enumerável será denotado por ω_1, e assim por diante.

No restante desta seção definiremos mais alguns conceitos da Teoria dos Conjuntos e enunciaremos algumas propriedades dos objetos definidos, porém a maioria das demonstração será omitida pois fogem ao escopo deste trabalho. O objetivo desta seção é fixar a notação e apresentar alguns fatos básicos que usaremos ao longo deste trabalho relativos ao filtro *club*, à hierarquia Borel e ao princípio diamante.

Definição 1.1. Seja X um conjunto qualquer.

(a) Dizemos que um subconjunto $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é um *filtro sobre* X se $\mathcal{F}$ satisfaz os seguintes axiomas:

(i) $X \in \mathcal{F}$ e $\emptyset \notin \mathcal{F}$, (*ii*) se $a \in \mathcal{F}$ e $b \in \mathcal{F}$ então $a \cap b \in \mathcal{F}$,

(*iii*) se $a \in \mathcal{P}(X)$, $b \in \mathcal{F}$ e $b \subseteq a$, então $a \in \mathcal{F}$.

(*b*) Dizemos que um subconjunto $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é um *ideal sobre* X se $\mathcal{I}$ satisfaz os seguintes axiomas:

(*i*) $X \notin \mathcal{I}$ e $\emptyset \in \mathcal{I}$,

(*ii*) se $a \in \mathcal{I}$ e $b \in \mathcal{I}$ então $a \cup b \in \mathcal{I}$,

(*iii*) se $a \in \mathcal{P}(X)$, $b \in \mathcal{I}$ e $a \subseteq b$, então $a \in \mathcal{I}$. □

A seguir, um fato interessante estabelecendo uma relação entre filtros e ideais.

Fato 1.2. *Seja X um conjunto qualquer. Então:*

(*i*) *Dado um filtro $\mathcal{F}$ sobre X, o conjunto $\mathcal{F}^\star := \{A \subseteq X : X \setminus A \in \mathcal{F}\}$ é um ideal sobre X;*

(*ii*) *Dado um ideal $\mathcal{I}$ sobre X, o conjunto $\mathcal{I}^\star := \{A \subseteq X : X \setminus A \in \mathcal{I}\}$ é um filtro sobre X.*

Vamos agora nos prepara para definir o *filtro Club*.

Definição 1.3. Sejam X um conjunto de ordinais e $\alpha > 0$ um ordinal limite. Dizemos que α é um *ponto limite* de X se $\sup(X \cap \alpha) = \alpha$.

Se $X \subseteq \beta$, dizemos que o conjunto X é fechado em β se X contém todos os seus pontos limite menores que β. □

Definição 1.4. Seja κ cardinal infinito regular. Um subconjunto $C \subseteq \kappa$ é um *club* (do inglês *"***cl***osed and* **u**n**b***ounded"*, que significa *"fechado e ilimitado")* se é fechado e ilimitado em κ. □

Definição 1.5. Dizemos que um conjunto $S \subseteq \kappa$ é *estacionário* em κ se S intersecta todos os subconjuntos club de κ. □

Pode-se mostrar que o conjunto de todos os subconjuntos club de κ tem a p.i.f., i.e., todo coleção finita de subconjuntos club de κ tem intersecção não vazia.

Pode-se mostrar que através de um conjunto que tem a p.i.f. podemos gerar um filtro. Denotamos este filtro por $Club(\kappa)$.

Pode-se mostrar que um conjunto $S \subseteq \kappa$ é estacionário em κ se, e somente se o seu complementar pertence ao ideal dual do filtro $Club(\kappa)$, que por este fato é conhecido como o *ideal dos não estacionários.*

Este filtro tem propriedades bastante interessantes, como o lema que enunciaremos a seguir e o seu corolário. As demonstrações podem ser encontradas em [Jec03] ou [K80].

Note que o próximo resultado fortalece a *p.i.f.*.

Lema 1.6. *A intersecção de menos do que κ clubs de κ é club.* ■

Corolário 1.7. *O filtro $Club(\kappa)$ é κ-completo, i.e., a intersecção de menos do que κ elementos de $Club(\kappa)$ é ainda um elemento de $Club(\kappa)$.* ■

Podemos encarar filtros como um "conceito de maioria", já que engloba os principais conceitos de maioria existentes na matemática, a saber, os relacionados a medida, categoria e cardinalidade.

Os seguintes conjuntos formam filtros:

1. Os subconjuntos de medida total segundo uma medida regular;
2. Os subespaços de um espaço de Baire cujo complementar é um conjunto de primeira categoria;
3. Os subconjuntos de um conjunto de tamanho κ que têm tamanho menor que um cardinal $\lambda \leqslant \kappa$ fixado.

Uma pergunta pertinente é se o filtro $Club(\kappa)$ é um ultrafiltro. A resposta é não. Apesar de termos muitos resultados fortes sobre ultrafiltros, o conceito de maioria associado a eles é muito rígido, no sentido de que um dado conjunto é sempre "grande" (pertencente ao ultrafiltro) ou "pequeno" (pertencente ao seu ideal dual).

O conceito de maioria associado ao filtro *Club* é portanto mais flexível, admitindo a possibilidade de termos conjunto "médios" (os que não pertence nem ao filtro, nem ao seu ideal dual). Os conjuntos médios segundo o filtro *Club* são os estacionários que não contém nenhum club.

A seguir, temos alguns lemas simples que serão úteis ao longo do trabalho e servem para ilustrar o comportamento dos conjuntos estacionários.

Lema 1.8. *Se S é estacionário e A é* club*, então $S \cap A$ é estacionário.*

Demonstração: Seja B *club*.

$(S \cap A) \cap B = S \cap (A \cap B) \neq \emptyset$, pois $A \cap B$ é *club* e S é estacionário. ■

Lema 1.9. *Seja $S \subseteq \omega_1$. Então:*

$$S \text{ é estacionário} \iff \forall \alpha < \omega_1 \ S \setminus \alpha \text{ é estacionário.}$$

Demonstração: Seja $S \subseteq \omega_1$ estacionário. Então, como $S \setminus \alpha = S \cap [\alpha, \omega_1[$ e $[\alpha, \omega_1[$ é *club*, $S \setminus \alpha$ é estacionário.

Reciprocamente, se $\forall \alpha < \omega_1 \ S \setminus \alpha$ é estacionário, tome $\alpha = \emptyset$ e aí temos que S é estacionário. ■

Vamos agora definir um princípio combinatório bastante famoso que utiliza fortemente a noção de conjunto estacionário, o princípio $\diamondsuit$.

Definição 1.10. O princípio $\diamondsuit$ é a seguinte asserção:

$\diamondsuit \equiv$ *Existe uma sequência $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$, com $A_\alpha \subseteq \alpha$, para todo $\alpha < \omega_1$, tal que, para todo $A \subseteq \omega_1$, o conjunto $\{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ é estacionário.*

Chamaremos a sequência $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ dada por este princípio de *sequência* $\diamondsuit$ ou $\diamondsuit$-*sequência*. □

O princípio $\diamondsuit$, introduzido por Jensen, foi utilizado por ele para a construção de uma árvore de Suslin (veja [K80]). A consistência do $\diamondsuit$ foi obtida por Jensen mostrando a sua validade no modelo L dos conjuntos construtíveis.

Tal asserção é conhecida como um *princípio de predição*. Intuitivamente, podemos encarar o princípio $\diamondsuit$ como a postulação da existência de uma sequência capaz de predizer um subconjunto qualquer de ω_1 sem que tenhamos nenhuma informação sobre ele. Dado um subconjunto A de ω_1, a sequência $\diamondsuit$ prediz o conjunto A com uma taxa bem razoável de acertos pois acerta num conjunto estacionário.

Outra informação importante sobre o princípio $\diamondsuit$ é que ele é mais forte que a hipótese do contínuo, conforme a seguinte proposição:

Proposição 1.11. *O princípio $\diamondsuit$ implica a hipótese do Contínuo.*

Demonstração: Seja $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ uma sequência $\diamondsuit$ e fixe um subconjunto $A \subseteq \omega$ arbitrário.

Note que, como o conjunto $[\omega+1, \omega_1[$ é club, existe $\alpha > \omega$ tal que $A \cap \alpha = A_\alpha$. Mas A é um subconjunto de ω, logo $A \cap \alpha = A$.

Como o conjunto A foi tomado arbitrário, temos que todos os subconjuntos de ω estão na sequência $\diamondsuit$, ou seja, $\mathcal{P}(\omega) \subseteq \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, e assim, $2^\omega = |\mathcal{P}(\omega)| = \omega_1$, como queríamos demonstrar. ■

Definição 1.12. Uma *árvore* é um conjunto parcialmente ordenado $\langle T, < \rangle$ tal que, para todo elemento $x \in T$, o conjunto $\{y : y < x\}$ de todos os predecessores de x é bem ordenado por $<$.

Dada uma árvore $\langle T, < \rangle$, definimos o *nível* α de T como o conjunto de todos os elementos $x \in T$ tais que o conjunto dos predecessores de x tem tipo de ordem α, i.e., é isomorfo a α.

Um *ramo* é uma cadeia (i.e., um subconjunto totalmente ordenado) maximal segundo $<$. □

Em nosso trabalho, um tipo bem particular de árvore será bastante importante:

Definição 1.13. O conjunto de todas as sequências binárias definidas em ordinais enumeráveis ordenadas pela inclusão, que chamaremos aqui de *árvore binária* e denotaremos por ${}^{<\omega_1}2$, é definido da seguinte maneira:

$$ {}^{<\omega_1}2 = \bigcup_{\alpha<\omega_1} {}^{\alpha}2 $$

□

Podemos identificar os subconjuntos de ω_1 com as suas funções-característica que têm ω_1 como domínio. Tais funções característica podem se encaradas como os ramos da árvore binária.

Desta forma, obtemos uma reformulação do princípio $\diamondsuit$ que se aplica aos ramos da árvore binária

Definição 1.14. O princípio $\diamondsuit_{ar}$ é a seguinte asserção:

$\diamondsuit_{ar} \equiv$ *existe uma sequência $\langle f_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$, onde cada $f_\alpha \in {}^{\alpha}2$ tal que, para toda função $f : \omega_1 \longrightarrow 2$, o conjunto $\{\alpha < \omega_1 : f \restriction \alpha = f_\alpha\}$ é estacionário.*

□

Como o que ocorre é apenas uma identificação dos subconjuntos de ω_1 com os ramos da árvore binária ${}^{<\omega_1}2$, é imediato que os princípios $\diamondsuit$ e $\diamondsuit_{ar}$ são equivalentes.

Vamos agora introduzir alguns conceitos de teoria descritiva dos conjuntos, que serão importantes ao longo deste trabalho, na definição e nas aplicações dos princípios diamante parametrizados efetivos.

Definição 1.15. Um espaço topológico X é dito ser um *espaço polonês* se X é homeomorfo a um espaço métrico completo separável.

Sejam X um espaço polonês e $A \subseteq X$. Dizemos que A é um *conjunto Borel* se A pertence à menor σ-álgebra de subconjuntos de X que contém a topologia do espaço X. $\square$

Definição 1.16. Sejam X e Y dois subconjuntos Borel de espaços Borel possivelmente distintos. Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é dita ser *Borel* se, para todo conjunto Borel $Z \subseteq Y$, o conjunto $f^{-1}[Z]$ é um subconjunto Borel de X.

Diremos ainda que, uma função $F : {}^{<\omega_1}2 \longrightarrow A$ é dita ser Borel se é Borel nível por nível, i.e., se para todo $\alpha < \omega_1$, a função $F \restriction {}^{\alpha}2 : {}^{\alpha}2 \longrightarrow A$ é Borel. $\square$

1.2 Topologia Geral

A presente seção tem como objetivo introduzir os conceitos básicos de topologia geral que serão utilizados ao longo do trabalho, bem como fixar a notação que utilizaremos.

Primeiro, vamos definir os axiomas de separação que vão aparecer neste trabalho.

Definição 1.17. Seja X um espaço topológico.

(i) X é T_0 se, dados dois pontos de X distintos, existe um aberto que contém apenas um dos dois pontos.

(ii) X é T_1 se, dados dois pontos $x, y \in X$ distintos, existem abertos U, V tais que $x \in U$ e $x \notin V$ e $y \in V$ e $y \notin U$.

(iii) X é T_2, ou *Hausdorff*, se dados dois pontos distintos $x, y \in X$, existem abertos disjuntos U, V tais que $x \in U$ e $y \in V$.

(iv) X é T_3 se, dados um fechado $F \subseteq X$ e um ponto $x \notin F$, existem abertos disjuntos U, V tais que $x \in U$ e $F \subseteq V$. Se X é $T_3 + T_1$, dizemos que o espaço X é *regular*.

(*v*) X é $T_{3\frac{1}{2}}$ se, dados um fechado $F \subseteq X$ e um ponto $x \notin F$, existe uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$, para todo $y \in F$. Se X é $T_{3\frac{1}{2}} + T_1$, dizemos que o espaço X é *completamente regular*, ou *Tychonoff*.

(*vi*) X é T_4 se, para cada par de fechados disjuntos $F, G \subseteq X$ existem abertos disjuntos U, V tais que $F \subseteq U$ e $G \subseteq V$. Se X é $T_4 + T_1$, dizemos que o espaço X é *normal*.

Dentre todos estes axiomas, o que daremos maior importância é definido no item (*vi*), mais precisamente, a normalidade. Os demais terão importância porém não serão foco deste trabalho.

Dentre os principais conceitos que enfocaremos, a normalidade difere dos demais por não tratar de coberturas abertas.

O seguinte lema, de verificação imediata, nos dá uma caracterização da normalidade que será muito útil ao longo do trabalho.

Lema 1.18. *Um espaço topológico é T_4 se, e somente se, para subconjunto fechado $F \subseteq X$ e para todo aberto $V \supseteq F$, existe um aberto U tal que $F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.*

As outras duas principais propriedades topológicas que estudaremos neste trabalho são definidas através de coberturas abertas. Definiremos a seguir os principais conceitos relativos a coberturas abertas.

Definição 1.19. Seja X um espaço topológico.

(*i*) Uma coleção de abertos $\mathcal{U}$ é dita ser *cobertura de X por abertos* (ou simplesmente *cobertura de X*) se $\bigcup \mathcal{U} = X$.

(*ii*) Uma subcoleção $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ é chamada de *subcobertura* de $\mathcal{U}$ se $\mathcal{V}$ é uma também uma cobertura de X.

(*iii*) Dizemos que X é *(enumeravelmente) compacto* se toda cobertura aberta (enumerável) de X admite subcobertura finita.

(*iv*) Dizemos que X é um *espaço de Lindelöf* (ou simplesmente, *X é Lindelöf*) se toda cobertura aberta de X admite subcobertura enumerável. □

Note que todo espaço compacto é enumeravelmente compacto e Lindelöf e que, se um espaço é enumeravelmente compacto e Lindelöf, então é também compacto.

Uma noção associada à compacidade, que é na verdade uma versão mais fraca, é a pseudocompacidade.

Definição 1.20. Dizemos que um espaço topológico X é *pseudocompacto* se toda função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua é limitada. $\square$

Definição 1.21. Seja X um espaço topológico e $\mathcal{U}$ uma cobertura de X.

(i) Dizemos que uma coleção de abertos $\mathcal{V}$ é um *refinamento* da cobertura $\mathcal{U}$ se, dado um aberto $V \in \mathcal{V}$ existe um aberto $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U$.

(ii) Uma coleção $\mathcal{V}$ de abertos de X é dita ser *ponto finita* se, para todo ponto $x \in X$, apenas um número finito de abertos de $\mathcal{V}$ contém o ponto x.

(iii) Dizemos que uma coleção $\mathcal{V}$ de abertos de X é *localmente finita* se, para todo ponto $x \in X$ existe uma vizinhança U de x tal que o número de abertos de $\mathcal{V}$ que intersecta U é finito. $\square$

Estamos aptos agora a definir as propriedades *paracompacidade* e *metacompacidade*, bem como suas versões enumeráveis.

Definição 1.22. Seja X um espaço topológico.

(i) X é *(enumeravelmente) paracompacto* se toda cobertura (enumerável) de X por abertos admite um refinamento localmente finito.

(ii) X é *(enumeravelmente) metacompacto* se toda cobertura (enumerável) de X admite um refinamento ponto finito. $\square$

A paracompacidade foi introduzida pelo matemático francês J Dieudonné em 1944 como uma generalização dos espaços compactos, forte o suficiente para manter algumas propriedades importantes dos espaços compactos, como a existência de partições da unidade e, fraca o suficiente para abranger uma classe muito ampla de espaços topológicos, como por exemplo os espaços métricos, como mostrou A.H. Stone em 1947.

A metacompacidade aparece como um enfraquecimento da paracompacidade que ainda assim possui algumas boas propriedades.

Falemos um pouco agora de funções cardinais. Tal conceito simplifica bastante a nossa notação.

Uma *função cardinal* é uma função-classe que tem como domínio a classe de todos os espaços topológicos e como contra-domínio a classe de todos os cardinais. Para facilitar a nossa notação, definiremos três funções cardinais que serão amplamente utilizadas ao longo deste trabalho, a saber, *densidade*, *extent* e *grau de Lindelöf*.

Definição 1.23. Seja X um espaço topológico qualquer. Definimos:

(i) Densidade:

$$d(X) = \min\{|D| : D \subseteq X \text{ é denso em } X\} + \omega$$

(ii) Extent:

$$e(X) = \sup\{|F| : F \subseteq X \text{ é fechado e discreto}\} + \omega$$

(iii) Grau de Lindelöf:

$$L(X) = \min\{\kappa \geqslant \omega : \text{toda cobertura de } X \text{ tem subcobertura de tamanho } \kappa\}$$

□

Note que, no caso das funções $d(X)$ e $L(X)$, quando um espaço topológico o valor de qualquer uma dessas funções cardinais é igual a ω, temos nomes bem conhecidos para o espaço. Se $d(X) = \omega$, o espaço é dito ser separável. Se $L(X) = \omega$, o espaço é dito ser Lindelöf.

A última propriedade definida em termos de coberturas abertas que apresentaremos nesta seção é a propriedade (a), introduzida por Matveev no artigo [M97].

Antes, definiremos a estrela de um conjunto com relação a uma cobertura do espaço.

Definição 1.24. Sejam X um espaço topológico, $\mathcal{U}$ uma cobertura de X e $F \subseteq X$.

Definimos a *estrela de F com relação a $\mathcal{U}$*, denotada por $St(F,\mathcal{U})$, como

$$St(F,\mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : U \cap F \neq \emptyset\}$$

□

O conceito de estrela de um conjunto com relação a uma cobertura do espaço foi usado por Fleischman em 1970 (veja o exercício 3.12.23. (d) do livro [E89]), para obter a seguinte caracterização da compacidade enumerável para espaços Haussdorf:

Seja X um espaço T_2. X é enumeravelmente compacto se, e somente se, para toda cobertura aberta $\mathcal{U}$, existe $F \subseteq X$ finito tal que $St(F,\mathcal{U}) = X$.

Fazendo uma exigência um pouco mais forte obtemos uma nova classe de espaços, que é um enfraquecimento da compacidade enumerável, definida da seguinte maneira:

X é absolutamente enumeravelmente compacto (a.e.c.) se, para toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ e para todo denso $D \subseteq X$, existe $F \subseteq D$ finito tal que $St(F,\mathcal{U}) = X$.

Como para espaços enumeravelmente paracompactos as noções de “finito” e “fechado e discreto” coincidem, podemos isolar a propriedade (a) como “o que falta” para um espaço enumeravelmente compacto ser absolutamente enumeravelmente compacto.

Definição 1.25. Seja X um espaço topológico. X é um (a)-espaço (ou satisfaz a propriedade (a)) se, para toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X e para todo $D \subseteq X$ denso, existe $F \subseteq D$ fechado e discreto tal que $St(F,\mathcal{U}) = X$. □

É imediato que todo (a)-espaço enumeravelmente compacto é *a.e.c.*

1.3 Estruturas e Princípios Combinatórios

1.3.1 Famílias *almost disjoint* e Ψ-espaços

Definição 1.26. Seja $\mathcal{A}$ uma família de subconjuntos infinitos de ω (i.e., $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$). Dizemos que $\mathcal{A}$ é família *almost disjoint*, ou, de maneira abreviada, família *a.d.*, sse para cada par de elementos distintos de $\mathcal{A}$, a intersecção de tais elementos é finita. Quando a família *a.d.* é maximal no sentido da inclusão (i.e., se $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$ é família *a.d.* então $\mathcal{B} = \mathcal{A}$), chamamos de família *a.d. maximal* e abreviaremos por família *m.a.d.*.

Veremos agora alguns fatos básicos sobre famílias *a.d.*.

Proposição 1.27. *Se $\mathcal{A}$ é uma família a.d enumerável infinita, então $\mathcal{A}$ não é maximal.*

Demonstração: Seja $\{A_n : n < \omega\}$ enumeração de $\mathcal{A}$ e defina:

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{i<\omega} A_i$$

Tome agora, para cada $n < \omega$, $b_n \in B_n$ (tome, por exemplo, $b_n = minB_n$) e defina $B = \{b_n : n < \omega\}$

Note que $B \cap A_n \subseteq \{b_0, ..., b_n\}$, para todo $n < \omega$, logo $\mathcal{A} \cup \{B\}$ é família *a.d.*. ■

Fazendo uma aplicação canônica do Lema de Zorn, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 1.28. *Toda família a.d. está contida em uma família m.a.d..* ■

Proposição 1.29. *Existem famílias a.d. de tamanho κ para qualquer cardinal κ, $\omega \leqslant \kappa \leqslant \mathfrak{c}$.*

Demonstração: Dado κ, $\omega \leqslant \kappa \leqslant \mathfrak{c}$, vamos construir uma família *a.d.* de subconjuntos de $\mathbb{Q}$ de tamanho κ, o que é equivalente, por combinatória, a construir uma família *a.d.* de subconjuntos de ω de tamanho κ, pois o conjunto $\mathbb{Q}$ tem tamanho ω.

Considere um conjunto $A \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, com $|A| = \kappa$ e, para cada $x \in A$ fixe uma sequência de racionais $z_{x,n}$ tal que $z_{x,n} \longrightarrow x$. Defina ainda, para cada x, um conjunto $A_x = \{z_{x,n} : n \geqslant 1\}$ e $\mathcal{A} = \{A_x : x \in A\}$.

Note que, como para x e y distintos, os conjuntos A_x e A_y são distintos, temos que $|\mathcal{A}| = |A| = \kappa$.

Falta ver que de fato $\mathcal{A}$ é família *a.d.*

Sejam A_x e A_y dois elementos distintos de $\mathcal{A}$. Como $\mathbb{R}$ é Hausdorff, temos que existem abertos disjuntos U_x e U_y, vizinhanças de x e y respectivamente.

A sequência $z_{x,n}$ converge para x, logo apenas um número finito de termos da sequência está fora de U_x, i.e., $A_x \setminus U_x$ é finito. De modo análogo, concluímos que $A_y \setminus U_y$ é finito. Assim, como U_x e U_y são disjuntos, $A_x \cap A_y = (A_x \setminus U_x) \cap (A_y \setminus U_y)$, que é finito pois $A_x \setminus U_x$ e $A_y \setminus U_y$ o são.

Portanto, a família $\mathcal{A}$ é *a.d.* de tamanho κ, como queríamos mostrar. ■

Vamos agora definir os Ψ-espaços. Tais espaços foram utilizados por Mrówka, em seu artigo [M54], para exibir um exemplo simples de espaço completamente regular, pseudocompacto e não compacto.

Definição 1.30. Fixada uma família *a.d.* $\mathcal{A}$ definimos $\Psi(\mathcal{A})$ como o espaço topológico cujo suporte é conjunto $\mathcal{A} \cup \omega$ munido com a topologia gerada pela base

$$\{\{n\} : n \in \omega\} \cup \{\{A\} \cup (A \setminus F) : A \in \mathcal{A} \text{ e } F \in [\omega]^{<\omega}\},$$

ou seja, cada ponto em ω é isolado e cada $A \in \mathcal{A}$ tem os conjuntos da forma $\{A\} \cup (A \setminus F)$, para cada $F \subseteq \omega$ finito, como vizinhanças básicas. □

A seguir veremos várias propriedades básicas dos Ψ-espaços que não dependem de nenhuma hipótese combinatória adicional sobre a família *a.d.*

Proposição 1.31. *Seja $\mathcal{A}$ família a.d. não vazia e seja $X = \Psi(\mathcal{A})$. Então:*

(i) X é Hausdorff;

(*ii*) *X é primeiro enumerável;*

(*iii*) *X é localmente compacto;*

(*iv*) *X é separável;*

(*v*) *X' é fechado e discreto não vazio (onde X' denota o conjunto de pontos de acumulação de X);*

(*vi*) *X é zero-dimensional;*

Demonstração: (*i*) Sejam $x, y \in X$. Se $x \in \omega$ e $y \in \omega$, $\{x\}$ e $\{y\}$ são vizinhanças disjuntas que separam x e y.

Suponha agora, s.p.g., $x \in \omega$ e $y \in \mathcal{A}$. Então $\{x\}$ e $\{y\} \cup y \setminus \{x\}$ são vizinhanças disjuntas que separam x e y.

Se $x, y \in \mathcal{A}$, $z = x \cap y$ é finito, e portanto, $\{x\} \cup (x \setminus x \cap y)$ e $\{y\} \cup (y \setminus x \cap y)$ são vizinhanças disjuntas que separam x e y.

(*ii*) Imediato, já que a base que utilizamos para definir a topologia do espaço é enumerável.

(*iii*) Vamos mostrar até mais do que a compacidade local de X. Na verdade, vamos mostrar que a base que usamos para definir a topologia dos espaços $\Psi(\mathcal{A})$ é constituída de abertos compactos.

Seja U um aberto básico da forma $\{A\} \cup (A \setminus F)$, com $A \in \mathcal{A}$ e $F \subseteq \omega$ finito e considere $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de U constituída de abertos básicos. Fixe V um aberto de $\mathcal{U}$ que cobre o ponto A.

Então V é da forma $\{A\} \cup (A \setminus G)$, com $G \subseteq \omega$ finito. Assim, o conjunto $U \setminus V$ é finito. Fixando, para cada ponto $p \in U \setminus V$ um aberto U_p da cobertura $\mathcal{U}$, obtemos uma subfamília finita de $\mathcal{U}$ que cobre U, logo U é subespaço compacto, como queríamos demonstrar.

(*iv*) ω é denso em X. De fato, dado um ponto $x \in X$ arbitrário, se $x \in \omega$ é óbvio que toda vizinhança de x intersecta ω. Se $x \in \mathcal{A}$, qualquer vizinhança básica de x intersecta ω pois são da forma $\{x\} \cup (x \setminus F)$, com $F \subseteq \omega$ finito, e, como x é um subconjunto infinito de ω, $x \setminus F$ é não vazio, logo intersecta ω.

(*v*) Note que, para todo $A \in \mathcal{A}$, temos $(\{A\} \cup A) \cap \mathcal{A} = \{A\}$, logo $\mathcal{A}$ é discreto.

Para ver que $\mathcal{A}$ é fechado basta mostrar que $\omega = \Psi(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{A}$ é aberto. Mas isso é imediato pois, dado um ponto $n < \omega$ e um aberto U contendo n, temos $n \in \{n\} \subseteq U$.

(*vi*) Sabemos, pelo item (*i*) que X é Hausdorff. Vimos também, na demonstração do item (*iii*), que os abertos que compõem a base canônica do espaço $\Psi(\mathcal{A})$ são compactos.

Como subconjuntos compactos em espaços T_2 são sempre fechados, temos que os abertos da base canônica de X são abertos-fechados, logo X é zero-dimensional. ■

É possível demonstrar a recíproca desta proposição, e portanto, que estas propriedades de fato caracterizam os espaços $\Psi(\mathcal{A})$. Na verdade, não precisamos de todos os itens da proposição anterior para essa caracterização, conforme a seguinte proposição, que pode ser encontrada em [vD84]. A demonstração encontra-se redigida em [S04]

Proposição 1.32. *Se X é Hausdorff, primeiro-enumerável, localmente compacto, separável e tal que seu conjunto de pontos de acumulação é discreto e não vazio, então existe uma família a.d. $\mathcal{A}$ tal que X é homeomorfo a $\Psi(\mathcal{A})$.* ■

Outra informação relevante, ainda sobre a proposição 1.31, é o fato de que, a rigor, não precisaríamos mostrar que $\Psi(\mathcal{A})$ é Hausdorff. Bastaria mostrar que é T_0 e zero-dimensional. Mais do que isso, a proposição que veremos a seguir nos diz que o espaço é de Tychonoff.

Proposição 1.33. *Seja X um espaço topológico. Se X é T_0 e zero-dimensional então X é Tychonoff.*

Demonstração: Inicialmente, note que, se um espaço é T_0 e zero-dimensional, então é Hausdorff. De fato, dados dois pontos, como o espaço é T_0, existe um aberto que contém um dos pontos e não contém o outro. Tomando uma vizinhança básica (de uma base de abertos-fechados) do ponto que está no aberto e o complementar desta vizinhança obtemos dois abertos disjuntos que separam os dois pontos, logo o espaço é Hausdorff (e portanto, T_1).

Vamos mostrar agora que, se X é zero-dimensional então é $T_{3\frac{1}{2}}$.

Dados um fechado F e um ponto p fora de F, fixe uma vizinhança básica U de p contida no aberto $X \setminus F$.

Defina agora uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in U \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus U \end{cases}$$

A função f é localmente constante, e portanto é contínua, logo X é $T_{3\frac{1}{2}}$.

Assim, concluímos que, se um espaço é T_0 e zero-dimensional então é $T_{3\frac{1}{2}}$ e T_1, i.e., é um espaço de Tychonoff, como queríamos mostrar. ■

Corolário 1.34. *O espaço $\Psi(\mathcal{A})$ é Tychonoff, qualquer que seja a família a.d. $\mathcal{A}$ que lhe dá origem.* ■

Mais tarde veremos que esse é o maior axioma de separação (dentre os axiomas de separação clássicos) que $\Psi(\mathcal{A})$ satisfaz sem a necessidade de adicionar hipóteses sobre o espaço ou sobre a família *a.d.* que lhe dá origem.

Vimos acima que os Ψ-espaços são localmente compactos mas não necessariamente precisam ser compactos. Seria interessante questionar se existe alguma condição sob a qual poderíamos obter compacidade. Na verdade não é possível no caso em que a família *a.d.* é infinita, conforme veremos no seguinte teorema, já que tais espaços não podem sequer ser enumeravelmente compactos. Tal fato será relevante adiante no estudo da normalidade nos Ψ-espaços.

O nosso principal objetivo no estudo dos Ψ-espaços é a obtenção de boas propriedades topológicas em tais espaços sob a assunção de hipóteses puramente combinatórias sobre a família *a.d.* que determina o espaço. Veremos adiante algumas consequências da maximalidade da família *a.d.*, inicialmente mostraremos que sob tais condições, o Ψ-espaço é pseudocompacto e usaremos este fato, combinado com o teorema anterior e com uma proposição relacionando pseudocompacidade e compacidade enumerável em espaços normais para estudar a normalidade de Ψ-espaços sobre famílias *m.a.d.*.

Teorema 1.35. *Se $\mathcal{A}$ é família a.d. infinita, então $\Psi(\mathcal{A})$ não é enumeravelmente compacto.*

Demonstração: Conforme vimos na demonstração do item (v) da proposição 1.31, o conjunto $\mathcal{A}$ é fechado e discreto em $\Psi(\mathcal{A})$. Se a família *a.d.* $\mathcal{A}$ é infinita, temos que $\Psi(\mathcal{A})$ possui um subespaço fechado e discreto infinito e portanto, $\Psi(\mathcal{A})$ não pode ser enumeravelmente compacto. ∎

Proposição 1.36. *Sejam $\mathcal{A}$ família m.a.d. e $Y \subseteq \omega$ infinito. Então Y possui ponto de acumulação.*

Demonstração: Temos dois casos a considerar: $Y \in \mathcal{A}$ ou $Y \notin \mathcal{A}$.

Se $Y \in \mathcal{A}$, Y é ponto de acumulação de Y.

Se $Y \notin \mathcal{A}$, então $\mathcal{A} \cup \{Y\}$ não é *a.d.*, logo existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \cap Y$ é infinito. Assim, A é ponto de acumulação de Y, já que qualquer vizinhança de A contém "todos a menos de finitos" elementos de A. ∎

Corolário 1.37. *Nas condições da proposição anterior, se $F \subseteq \omega$ é fechado e discreto, então F é finito.* ∎

Teorema 1.38. *Se $\mathcal{A}$ é família m.a.d. então $\mathcal{A}$ não é (a).*

Demonstração: Seja $\mathcal{A}$ uma família *m.a.d.*. Como vimos na proposição 1.27, $\mathcal{A}$ é não enumerável e assim, podemos escrever $\mathcal{A} = \{A_n : n < \omega\} \cup \mathcal{A}'$, onde $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \{A_n : n < \omega\}$.

Como $\mathcal{A}$ é *m.a.d.*, pelo corolário 1.37, todos os subconjuntos fechados e discretos de ω são finitos. A recíproca é imediata. Assim, o conjunto de todos os subconjuntos fechados e discretos de ω coincide com o conjunto $[\omega]^{<\omega}$ de todos os subconjuntos finitos de ω, que sabemos ser enumerável. Tome então uma enumeração $\{F_n : n < \omega\}$ de $[\omega]^{<\omega}$.

Considere agora a cobertura $\mathcal{U}$ de $\Psi(\mathcal{A})$ dada por

$$\mathcal{U} = \{\{A_n\} \cup (A_n \setminus F_n) : n < \omega\} \cup \{\{A\} \cup A : A \in \mathcal{A}'\} \cup \{\omega\}$$

Note que, cada A_n é coberto apenas por um aberto da cobertura $\mathcal{U}$.

Dado $F \subseteq \omega$ um fechado e discreto qualquer, existe um $m < \omega$ tal que $F = F_m$.

Mas, pela definição da cobertura aberta $\mathcal{U}$, $A_m \notin St(F, \mathcal{U})$, logo $\Psi(\mathcal{A})$ não pode ser (a). ∎

O seguinte teorema nos dá uma caracterização da pseudocompacidade para espaços Tychonoff. Trata-se de um resultado bem conhecido que incluiremos aqui para que este trabalho seja o mais completo possível.

A demonstração foi retirada de [E89].

Teorema 1.39. *Seja X um espaço Tychonoff. São equivalentes:*

(i) *X é pseudocompacto;*

(ii) *toda família localmente finita de abertos não vazios de X é finita;*

(iii) *toda cobertura aberta localmente finita de X consistindo de abertos não vazios é finita;*

(iv) *toda cobertura aberta localmente finita de X admite subcobertura finita.*

Demonstração: $(i) \Longrightarrow (ii)$: Vamos mostrar a contrapositiva . Suponha que não vale (ii). Então existe $\mathcal{U} = \{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ família localmente finita de subconjuntos distintos e não vazios de X.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, escolha $x_i \in U_i$.

Como X é Tychonoff, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe uma função $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f_i(x_i) = i$ e $f_i(X \setminus U_i) \subseteq \{0\}$.

Pela finitude local da família $\mathcal{U}$, segue que a fórmula

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)|$$

define uma função contínua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Como a função f é ilimitada, X não é pseudcompacto.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$: imediato.

$(iii) \Longrightarrow (iv)$: imediato.

$(iv) \Longrightarrow (i)$: Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e suponha que X satisfaz (iv).

Claramente a cobertura $\{f^{-1}(]i-1, i+1[) : i \in \mathbb{N}\}$ de X é localmente finita.

A existência de subcobertura finita implica na limitação da função f, logo X é pseudocompacto. ■

Teorema 1.40 ([M54])**.** *Seja $\mathcal{A}$ uma família m.a.d. infinita. Então $\Psi(\mathcal{A})$ é pseudocompacto.*

Demonstração: Seja $\mathcal{V}$ uma família infinita de abertos. Vamos mostrar que $\mathcal{V}$ não é localmente finita. Podemos supor, s.p.g., que a família $\mathcal{V}$ é enumerável pois, se uma subfamília enumerável de $\mathcal{V}$ não for localmente finita, a própria família não pode ser localmente finita.

Fixemos $\mathcal{V} = \{V_n : n < \omega\}$ uma enumeração da família $\mathcal{V}$.

Como ω é denso, $V_n \cap \omega \neq \emptyset$, logo podemos tomar, para cada $n \in \omega$, $x_n \in V_n \cap \omega$.

Se a imagem da sequência $x : \omega \longrightarrow \omega$, dada por $x(n) = x_n$ é finita, existe um $m < \omega$ tal que $x^{-1}(m)$ é infinito. Assim, $x(m)$ pertence a infinitos elementos de $\mathcal{V}$.

Considere agora o caso em que a imagem da sequência $(x_n)_{n<\omega}$ é infinita. Seja $B = \text{im}(x_n)_{n<\omega}$. Como B é infinito e $\mathcal{A}$ é *m.a.d.*, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $|B \cap A| = \omega$. ■

Proposição 1.41. *Seja X espaço normal. Se X é pseudocompacto, então X é enumeravelmente compacto.*

Demonstração: Seja X um espaço normal. Vamos mostrar que se X não é enumeravelmente compacto, então X não e pseudocompacto.

Suponha que X não é enumeravelmente compacto. Então existe um subconjunto fechado e discreto $A \subseteq X$ infinito. Seja $B = \{a_n : n < \omega\}$ subconjunto enumerável de A.

Defina $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo $f(a_n) = n$. f é contínua pois B é discreto. Pelo teorema de Tietze, como B é fechado, existe $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ extensão contínua de f. Como

f e ilimitada, sua extensão F também o é, logo X não pode ser pseudocompacto. ■

Segue imediatamente da proposição anterior e do teorema 1.40 o seguinte:

Corolário 1.42. *Se $\mathcal{A}$ é uma família m.a.d. infinita, então $\Psi(\mathcal{A})$ não é normal.*

Demonstração: Seja $\mathcal{A}$ uma família *m.a.d.* Pelo teorema 1.40, $\Psi(\mathcal{A})$ é pseudocompacto. Se $\Psi(\mathcal{A})$ fosse normal, pela proposição 1.41, $\Psi(\mathcal{A})$ seria enumeravelmente compacto, contrariando o teorema 1.35, logo $\Psi(\mathcal{A})$ não pode ser um espaço normal se $\mathcal{A}$ é *m.a.d.* ■

1.3.2 Famílias dominantes

Definição 1.43. Seja $\langle \mathbb{P}; \leqslant \rangle$ uma pré ordem e seja $D \subseteq \mathbb{P}$. Dizemos que D é *cofinal* em $\langle \mathbb{P}; \leqslant \rangle$, ou que D é *cofinal em* $\mathbb{P}$ *segundo* $\leqslant$, se para todo $p \in \mathbb{P}$ existe $d \in D$ tal que $p \leqslant d$.

A *cofinalidade* de uma pré-ordem $\langle \mathbb{P}; \leqslant \rangle$, denotada por $\mathrm{cf}\langle \mathbb{P}; \leqslant \rangle$, é o menor tamanho de um subconjunto cofinal em $\langle \mathbb{P}; \leqslant \rangle$, i.e.,

$$\mathrm{cf}\langle \mathbb{P}; \leqslant \rangle = \min\{|D| : D \text{ é cofinal em } \langle \mathbb{P}; \leqslant \rangle\}$$

No caso em que $\mathbb{P}$ é uma família de funções, diremos que a subfamília A que é cofinal em $\langle \mathbb{P}; \leqslant \rangle$ é uma *família dominante*. □

Neste trabalho vamos concentrar as atenções no caso particular em que $\mathbb{P} = {}^{\omega_1}\omega$ munido com as seguintes pré-ordens:

$$\begin{aligned} f \leqslant g &:\iff f(\alpha) \leqslant g(\alpha),\ \forall \alpha \in \omega_1 \\ f \leqslant^* g &:\iff \{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) > g(\alpha)\} \text{ é enumerável} \\ f \preccurlyeq g &:\iff \{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) > g(\alpha)\} \text{ é não estacionário} \end{aligned}$$

bem como com as suas versões estritas:

$$\begin{aligned} f < g &:\iff f(\alpha) < g(\alpha),\ \forall \alpha \in \omega_1 \\ f <^* g &:\iff \{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) \geqslant g(\alpha)\} \text{ é enumerável} \\ f \prec g &:\iff \{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) \geqslant g(\alpha)\} \text{ é não estacionário} \end{aligned}$$

Note que, em ZFC,

$$f <^* g \iff \exists \beta < \omega_1\ \forall \alpha \geqslant \beta\ [f(\alpha) < g(\alpha)]$$

pois, sob AC, ω_1 é cardinal regular[1], logo todo subconjunto enumerável é limitado. Reciprocamente, todo subconjunto limitado é enumerável.

Observe ainda que, pelo mesmo argumento usado acima, vale o análogo para a ordem $\leqslant^*$, i.e.,

$$f \leqslant^* g \iff \exists \beta < \omega_1 \, \forall \alpha \geqslant \beta \, [f(\alpha) \leqslant g(\alpha)].$$

Nos exemplos vistos acima, partimos da ordem usual definida no conjunto ω e munimos o produto ${}^{\omega_1}\omega$ com uma ordem coordenada a coordenada. No primeira ordem parcial definida, consideramos todas as coordenadas. Na segunda, consideramos o caso em que o conjunto das coordenadas em que não ocorre a desigualdade no sentido desejado é um conjunto pequeno no sentido de cardinalidade. Na terceira pré-ordem definida acima, consideramos o caso em que o conjunto das coordenadas onde não ocorre a desigualdade desejada é pequeno no sentido do filtro *club*.

Podemos generalizar as ideias expostas acima considerando pré-ordens definidas através de ideais sobre ω_1. Na verdade, podemos ainda considerar um caso mais geral, já que apenas utilizamos o fato de ω ser ordem total, não precisamos de estrutura alguma sobre o conjunto de índices do produto, que no nosso caso específico é o ordinal ω_1.

Dados uma ordem total $\langle Y; \leqslant \rangle$ e um ideal $\mathcal{I}$ sobre um conjunto X qualquer definimos uma relação em ${}^X Y$ da seguinte maneira:

$$f \preccurlyeq_{\mathcal{I}} g :\iff \{x \in X : f(\alpha) > g(\alpha)\} \in \mathcal{I}$$

A proposição seguinte assegura que de fato tais relações são pré-ordens no conjunto ${}^X Y$.

Proposição 1.44. *Sejam $\langle Y; \leqslant \rangle$ uma ordem total, X um conjunto qualquer e $\mathcal{I}$ um ideal sobre X. Então a relação $\preccurlyeq_{\mathcal{I}}$ definida como*

$$f \preccurlyeq_{\mathcal{I}} g :\iff \{x \in X : f(x) > g(x)\} \in \mathcal{I}$$

é uma pré-ordem no produto ${}^X Y$.

Além disso, dados dois ideais $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ sobre X, se $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ então $\preccurlyeq_{\mathcal{I}} \subseteq \preccurlyeq_{\mathcal{J}}$.

Demonstração: Como a relação $\leqslant$ é reflexiva, o conjunto $\{x \in X : f(x) > f(x)\}$ é vazio, logo pertence a $\mathcal{I}$

[1] Esta informação é interessante de destacar pois a própria topologia do ordinal ω_1 depende do valor da sua cofinalidade; por exemplo, sabe-se que se ω_1 não for regular, será paracompacto.

Para ver que a relação $\preccurlyeq_{\mathcal{I}}$ é transitiva, tome $f, g, h \in {}^XY$ funções tais que $f \preccurlyeq_{\mathcal{I}} g$ e $g \preccurlyeq_{\mathcal{I}} h$. Assim, os conjuntos $A = \{x \in X : f(x) > g(x)\}$ e $B = \{x \in X : g(x) > h(x)\}$ são elementos do ideal $\mathcal{I}$. Queremos mostrar que o conjunto $C = \{x \in X : f(x) > h(x)\} \in \mathcal{I}$.

Dado $x \in X$ arbitrário, se $x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$, como a relação $\leqslant$ é transitiva (e estamos supondo que a ordem é total), então $x \in X \setminus C$, logo $C \subseteq A \cup B$. Como $\mathcal{I}$ é ideal, segue que $C \in \mathcal{I}$ e portanto a relação $\preccurlyeq_{\mathcal{I}}$ é transitiva. ■

Proposição 1.45. *Sejam $\langle \mathbb{P}, \leqslant_1 \rangle$ e $\langle \mathbb{P}, \leqslant_2 \rangle$, com $\leqslant_1 \subseteq \leqslant_2$ e seja λ um cardinal.*

Se $\leqslant_1$ tem um subconjunto cofinal de tamanho λ, então $\leqslant_2$ tem subconjunto confinal de tamanho λ. Em outras palavras,

$$\mathrm{cf}\langle \mathbb{P}, \leqslant_1 \rangle \geqslant \mathrm{cf}\langle \mathbb{P}, \leqslant_2 \rangle$$

Demonstração: Basta notar que, para dois elementos $x, y \in \mathbb{P}$, se $x \leqslant_1 y$ então, como $\leqslant_1 \subseteq \leqslant_2$, temos $x \leqslant_2 y$.

Assim, se um subconjunto $D \subseteq \mathbb{P}$ é cofinal segundo $\leqslant_1$, para todo $z \in \mathbb{P}$ existe $d \in D$ tal que $z \leqslant_1 d$. Mas, como vimos acima, $z \leqslant_2 d$ e portanto, o próprio subconjunto D é cofinal segundo $\leqslant_2$.

Tomando $\lambda = |D|$ obtemos o desejado. ■

Corolário 1.46. *Sejam $\langle Y; \leqslant \rangle$ uma ordem total, X um conjunto qualquer e considere dois ideais $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ sobre X, com $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$.*

Uma família de funções que é dominante em $\langle {}^XY, \preccurlyeq_I \rangle$ é também dominante em $\langle {}^XY, \preccurlyeq_J \rangle$

Em outras palavras,

$$\mathrm{cf}\langle {}^XY, \preccurlyeq_I \rangle \geqslant \mathrm{cf}\langle {}^XY, \preccurlyeq_J \rangle$$

O fato seguinte nos mostra que quando estamos interessados apenas na cofinalidade, não interessa se a ordem é estrita ou não.

Fato 1.47. *Sejam α um ordinal limite, Y um conjunto qualquer e $\mathcal{I}$ um ideal sobre Y. Então $\mathrm{cf}\langle {}^Y\alpha, \prec_{\mathcal{I}} \rangle = \mathrm{cf}\langle {}^Y\alpha, \preccurlyeq_{\mathcal{I}} \rangle$*

Demonstração: Pelo fato 1.45, como $\prec_{\mathcal{I}} \subseteq \preccurlyeq_{\mathcal{I}}$, temos a desigualdade $\mathrm{cf}\langle {}^Y\alpha, \prec_{\mathcal{I}} \rangle \geqslant \mathrm{cf}\langle {}^Y\alpha, \preccurlyeq_{\mathcal{I}} \rangle$. Vamos mostrar então a outra desigualdade.

Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções cofinal em $\langle {}^Y\alpha, \preccurlyeq_{\mathcal{I}} \rangle$ de tamanho $\kappa = \mathrm{cf}\langle {}^Y\alpha, \preccurlyeq_{\mathcal{I}} \rangle$.

Considere a família de funções $\mathcal{F}' = \{f + 1 : f \in \mathcal{F}\}$, onde $(f+1)(y) = f(y) + 1$, $\forall y \in Y$. Note que, cada função está bem definida pois o ordinal α é limite.

Dada uma função qualquer $f : Y \longrightarrow \alpha$, como a família $\mathcal{F}$ é dominante segundo $\preccurlyeq_{\mathcal{I}}$, existe $g : Y \longrightarrow \alpha$ tal que $f \preccurlyeq_{\mathcal{I}} g$.

Como $f \preccurlyeq_{\mathcal{I}} g$, o conjunto $X = \{y \in Y : f(y) > g(y)\}$ pertence ao ideal $\mathcal{I}$. Note que, para $y \in X$, temos $f(y) \geqslant (g+1)(y)$ e portanto, o conjunto $\{y \in Y : (f)(y) \geqslant (g+1)(y)\}$ pertence ao ideal $\mathcal{I}$, logo temos $f \prec_{\mathcal{I}} (g+1)(y)$

Assim, a família $\mathcal{F}'$ é dominante em ${}^{Y}\alpha$ segundo $\prec_{\mathcal{I}}$. Como $|\mathcal{F}'| = |\mathcal{F}| = \kappa$, temos que $\kappa \in \{|\mathcal{G}| : \mathcal{G}$ é família dominante em $\langle {}^{Y}\alpha; \prec_{\mathcal{I}}\rangle\}$ e portanto, $\kappa \geqslant \mathrm{cf}\langle {}^{Y}\alpha, \preccurlyeq_{\mathcal{I}}\rangle$, como queríamos mostrar. $\blacksquare$

Fato 1.48. *Sejam κ, λ cardinais infinitos e seja $\mathcal{F} \subseteq {}^{\kappa}\lambda$ uma família de funções de tamanho κ. Então $\mathcal{F}$ não é dominante em $\langle {}^{\kappa}\lambda, \leqslant\rangle$.*

Demonstração: Considere $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma enumeração qualquer da família $\mathcal{F}$.

Seja $g : \kappa \longrightarrow \lambda$, dada por $g(\alpha) = f_\alpha(\alpha) + 1$.

Note que a função g não é dominada por nenhuma função da família $\mathcal{F}$, logo $\mathcal{F}$ não pode ser dominante em $\langle {}^{\kappa}\lambda, \leqslant\rangle$. $\blacksquare$

A seguir, definiremos uma classe de famílias dominantes em $\langle {}^{\omega_1}\omega, \leqslant\rangle$ que será fundamental nos capítulos 4 e 5.

Definição 1.49. Dizemos que uma família $\mathcal{F}$ de funções de ω_1 em ω dominante segundo $\leqslant$ é uma *família dominante pequena* se o tamanho de $\mathcal{F}$ for menor ou igual a $\mathfrak{c}$. $\square$

O próximo teorema que veremos estabelece uma relação entre as cofinalidades das ordens $\langle {}^{\omega_1}\omega, \leqslant\rangle$ e $\langle {}^{\omega_1}\omega, \leqslant^*\rangle$. Antes de enunciar teorema, porém, veremos um pequeno lema que estabelece uma desigualdade, envolvendo o pequeno cardinal $\mathfrak{d}$, que será importante na demonstração do teorema.

O pequeno cardinal $\mathfrak{d}$ é definido da seguinte maneira:

$$\mathfrak{d} = \mathrm{cf}\langle {}^{\omega}\omega, \leqslant^*\rangle$$

Uma demonstração de que $\mathfrak{d} = \mathrm{cf}\langle {}^{\omega}\omega, \leqslant\rangle$ pode ser encontrada em [vD84].

Este resultado citado para o cardinal $\mathfrak{d}$ já era conhecido desde os anos 60. Em seu artigo publicado no fim dos anos 80, [C88], Comfort mostrou resultados mais gerais sobre estes invariantes cardinais.

O lema seguinte estabelece uma relação entre $\mathrm{cf}\langle {}^{\omega_1}\omega, \leqslant^*\rangle$ e o invariante cardinal $\mathfrak{d}$

Lema 1.50. $\mathrm{cf}\langle {}^{\omega_1}\omega, \leqslant^*\rangle \geqslant \mathfrak{d}$

Demonstração: Seja $\kappa = \mathrm{cf}\langle {}^{\omega_1}\omega, \leqslant^* \rangle$ e seja $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ família dominante em $\langle {}^{\omega_1}\omega, \leqslant^* \rangle$ de tamanho mínimo.

Defina, para $\alpha < \kappa$ e $\beta < \omega_1$, funções $f_{\alpha,\beta} : \omega \longrightarrow \omega$ pondo $f_{\alpha,\beta}(n) = f_\alpha(\beta + n)$. Vamos mostrar que a família $\{f_{\alpha,\beta} : \alpha < \kappa \text{ e } \beta < \omega_1\}$ é dominante em $\langle {}^{\omega}\omega, \leqslant \rangle$ e aí, como $|\{f_{\alpha,\beta} : \alpha < \kappa \text{ e } \beta < \omega_1\}| = \kappa$, teremos $\mathfrak{d} \leqslant \kappa$. Seja $g : \omega \longrightarrow \omega$ arbitrária. Defina uma função $\overline{g} : \omega_1 \longrightarrow \omega$, pondo $\overline{g}(\delta + n) = g(n)$, para todo δ ordinal[2]. Então existe $\gamma < \kappa$ tal que $\overline{g} \leqslant^* f_\gamma$. Logo existe $\delta < \omega_1$ tal que, para $\xi > \delta$, $\overline{g}(\xi) \leqslant f_\gamma(\xi)$.

Assim, para qualquer $n < \omega$ temos:

$$\begin{aligned} g(n) &= \overline{g}(\delta + n) \\ &\leqslant f_\gamma(\delta + n) \\ &= f_{\alpha,\delta}(n) \end{aligned}$$

Assim, a família de funções $\{f_{\alpha,\beta} : \alpha < \kappa \text{ e } \beta < \omega_1\}$ é dominante em $\langle {}^{\omega}\omega, \leqslant \rangle$ de tamanho κ, logo $\mathfrak{d} = \mathrm{cf}\langle {}^{\omega}\omega, \leqslant \rangle \leqslant \kappa$, como queríamos. ■

O resultado que veremos em seguida é um caso particular do teorema de Comfort. Optamos por apresentar apenas este caso particular pois, ao longo deste trabalho vamos trabalhar somente com famílias dominantes em ${}^{\omega_1}\omega$ nas aplicações em topologia.

Teorema 1.51 (Comfort, [C88]). $\mathrm{cf}\langle {}^{\omega_1}\omega, \leqslant \rangle = \mathrm{cf}\langle {}^{\omega_1}\omega, \leqslant^* \rangle$.

Demonstração: Vamos mostrar que $\mathrm{cf}\langle {}^{\omega_1}\omega, \leqslant \rangle \leqslant \mathrm{cf}\langle {}^{\omega_1}\omega, \leqslant^* \rangle$. A outra desigualdade é imediata do fato 1.45.

Seja $\kappa = \mathrm{cf}\langle {}^{\omega_1}\omega, \leqslant^* \rangle$ e seja $\{f_\beta : \beta < \kappa\}$ uma família dominante em $\langle {}^{\omega_1}\omega, \leqslant^* \rangle$ de tamanho mínimo. Pelo lema anterior, $\kappa \geqslant \mathfrak{d}$, que é não enumerável.

Por combinatória, para cada $\omega \leqslant \alpha < \omega_1$, como ${}^{\alpha}\omega \approx {}^{\omega}\omega$, podemos fixar uma família $\mathcal{F}_\alpha \subseteq {}^{\alpha}\omega$ dominante em $\langle {}^{\alpha}\omega; \leqslant \rangle$ com $\mathcal{F}_\alpha = \mathfrak{d}$.

Defina, para $\alpha < \omega_1$, $\beta < \kappa$ e $g \in \mathcal{F}_\alpha$, $h_{\alpha,\beta,g} : \omega_1 \longrightarrow \omega$ pondo

$$h_{\alpha,\beta,g} = g \cup f_\beta \restriction \omega_1 \setminus \alpha$$

Afirmo que $\{h_{\alpha,\beta,g} : \alpha < \omega_1, \beta < \kappa \text{ e } g \in \mathcal{F}_\alpha\}$ é família dominante de cardinalidade κ.

[2]Estamos usando aqui um resultado da aritmética ordinal que garante que todo ordinal γ pode ser decomposto de maneira única como $\gamma = \delta + n$, onde δ é o maior ordinal limite menor ou igual a γ e n é um ordinal finito (i.e., um número natural).

Para ver que $\{h_{\alpha,\beta,g} : \alpha < \omega_1,\ \beta < \kappa \text{ e } g \in \mathcal{F}_\alpha\}$ tem de fato tamanho κ, basta notar que

$$\{h_{\alpha,\beta,g} : \alpha < \omega_1,\ \beta < \kappa \text{ e } g \in \mathcal{F}_\alpha\} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \bigcup_{g\in\mathcal{F}_\alpha} \{h_{\alpha,\beta,g} : \beta < \kappa\},$$

logo

$$\begin{aligned}|\{h_{\alpha,\beta,g} : \alpha < \omega_1,\ \beta < \kappa \text{ e g} \in \mathcal{F}_\alpha\}| &= |\bigcup_{\alpha<\omega_1} \bigcup_{g\in\mathcal{F}_\alpha} \{h_{\alpha,\beta,g} : \beta < \kappa\}| \\ &= \omega_1 \cdot \mathfrak{d} \cdot \kappa \\ &= \kappa\end{aligned}$$

Veja que a primeira igualdade só é válida porque os conjuntos $\{h_{\alpha,\beta,g} : \beta < \kappa\}$, para $\alpha < \omega_1$ e $g \in \mathcal{F}_\alpha$ são dois a dois disjuntos.

Para ver que a família $\{h_{\alpha,\beta,g} : \alpha < \omega_1, \beta < \kappa \text{ e } g \in \mathcal{F}_\alpha\}$ é dominante em $\langle {}^{\omega_1}\omega, \leqslant\rangle$, tome $t \in {}^{\omega_1}\omega$ uma função qualquer. Como $\{f_\beta : \beta \in \kappa\}$ é família dominante de funções segundo $\leqslant^*$, existe $\gamma \in \kappa$ tal que $t \leqslant^* f_\gamma$, logo existe $\delta < \omega_1$ tal que, para todo $\xi > \delta$, $t(\xi) \leqslant f(\xi)$.

Mas note que, como $\mathcal{F}_\delta$ é família dominante em ${}^\delta\omega$, existe uma função $h \in {}^\gamma\omega$ tal que $t \restriction \gamma \leqslant h$.

Agora basta observar que a função $h_{\delta,\gamma,h}$ domina a função t, i.e., $t \leqslant h_{\delta,\gamma,h}$. De fato, dado $\xi < \omega_1$, se $\xi \leqslant \delta$ então $h_{\delta,\gamma,h}(\xi) = h(\xi) \geqslant t(\xi)$. Se $\xi > \delta$, então $h_{\delta,\gamma,h}(\xi) = f_\gamma(\xi) \geqslant t(\xi)$.

Desta forma, mostramos que, se $\kappa = \mathrm{cf}\langle {}^{\omega_1}\omega, \leqslant^*\rangle$, existe uma família dominante de tamanho κ em $\langle {}^{\omega_1}\omega, \leqslant\rangle$, logo $\mathrm{cf}\langle {}^{\omega_1}\omega, \leqslant\rangle \leqslant \mathrm{cf}\langle {}^{\omega_1}\omega, \leqslant^*\rangle$, como queríamos mostrar. ■

Finalizaremos esta seção com comentários a respeito da relação entre famílias dominantes e cardinais inacessíveis.

Jech e Prikry, em seu artigo [JP94], mostraram que "$\mathrm{cf}(2^\omega) = 2^\omega < 2^{\omega_1}$" + "existe uma família dominante pequena" implica que "existe um modelo interno com um cardinal mensurável". Eles mostraram ainda que, assumindo que 2^ω é um cardinal real mensurável (*real-valued measurable cardinal*) ou $2^\omega < \min\{2^{\omega_1}, \aleph_{\omega_1}\}$ então não existem famílias dominantes de tamanho menor que 2^{ω_1} em $\langle {}^{\omega_1}\omega; \leqslant\rangle$.

É fato bem conhecido entre pesquisadores e estudantes de Teoria dos conjuntos, que a consistência da existência de cardinais mensuráveis, ou mais geralmente, de grandes cardinais não pode ser demonstrada em ZFC, já que a existência de tais cardinais torna possível a construção de um modelo de ZFC e, consequentemente, torna possível demonstrar a consistência de ZFC, o que não é possível, como afirma o Segundo Teorema da Incompletude, de Gödel.

Portanto, ao afirmar que uma afirmação implica a existência de famílias dominantes pequenas, assumindo "$\mathrm{cf}(2^\omega) = 2^\omega < 2^{\omega_1}$", leva à conclusão de que a consistência de tal afirmação não pode ser demonstrada.

Veremos mais adiante, no capítulo 4, que algumas afirmações topológicas sobre a existência de certos espaços nos permite construir famílias dominantes pequenas. Com isso obtemos resultados relacionados a consistência e independência em topologia de um modo surpreendentemente simples.

1.3.3 A categoria $\mathcal{PV}$ de de Paiva e Vojtáš

Nesta seção presentaremos a categoria $\mathcal{PV}$, cujo nome foi dado por Andreas Blass, em seu artigo [B95], em homenagem a Valéria de Paiva e Peter Vojtáš. Neste artigo, Andreas Blass apresenta os trabalhos de Valéria de Paiva e Peter Vojtáš, que a princípio pareciam completamente distintos, e exibe um ponto em comum, que é a categoria que aparece naturalmente associada aos trabalhos de ambos.

Tal categoria aparece no trabalho de Valéria de Paiva sobre lógica linear (veja, por exemplo, o artigo [P89]) e no trabalho de Peter Vojtáš sobre invariantes cardinais do contínuo (veja, por exemplo, o artigo [V93]).

Vamos agora à definição desta categoria:

Os objetos da categoria $\mathcal{PV}$ são triplas (A, B, E), onde A e B são conjuntos de cardinalidade no máximo $\mathfrak{c}$ e $E \subseteq A \times B$ é uma relação tal que:

$$\forall a \in A \;\; \exists b \in B \;\; aEb \;\; \text{e} \;\; \forall b \in B \;\; \exists a \in A \;\; \neg aEb$$

Um morfismo de um objeto $o_2 = (A_2, B_2, E_2)$ para um objeto $o_1 = (A_1, B_1, E_1)$ é um par (φ, ψ), onde $\varphi : A_1 \longrightarrow A_2$ e $\psi : B_2 \longrightarrow B_1$ são funções satisfazendo:

$$\forall a \in A_1 \; \forall b \in B_2 \; \varphi(a)\, E_2\, b \longrightarrow a\, E_1\, \psi(b)$$

A composição de morfismos é definida como $(\varphi_1, \psi_1) \circ (\varphi_2, \psi_2) = (\varphi_1 \circ \varphi_2, \psi_2 \circ \psi_1)$. É imediato que a composição de morfismos assim definida é associativa.

Intuitivamente, podemos encarar os objetos da categoria $\mathcal{PV}$ como sendo um conjunto A de problemas, um conjunto B de possíveis soluções, e uma relação $E \subseteq A \times B$ que diz quando um elemento de B é solução de um "problema" de A. Sob este ponto de vista, podemos encarar um morfismo como uma redução da tarefa de encontrar soluções para problemas num objeto a encontrar soluções para os problemas num outro objeto, cujas soluções são conhecidas i.e., dados dois objetos $o_1 = (A_1, B_1, E_1)$ e $o_2 = (A_2, B_2, E_2)$

tais que existe um morfismo (φ, ψ) de o_2 para o_1, dado um "problema" $a \in A_1$, reduzimos via φ a um problema $\varphi(a)$ em A_2 cuja solução $b \in B_2$ já é conhecida, e voltamos via ψ e encontramos a solução $\psi(b) \in B_1$ para o nosso problema inicial a.

O seguinte diagrama facilita a compreensão desta ideia intuitiva:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d] & E_1 & \psi(b) \\
\varphi(a) & E_2 & b \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Podemos ainda definir nesta categoria, como em qualquer outra categoria, uma pré-ordem, que no nosso caso chamaremos de ordenação de Galois-Tukey, da seguinte maneira:

$$o_1 \leqslant o_2 \iff \text{existe um morfismo de } o_2 \text{ para } o_1.$$

Definimos ainda relação de equivalência naturalmente associada a essa pré-ordem:

$$o_1 \sim o_2 \iff o_1 \leqslant o_2 \text{ e } o_2 \leqslant o_1.$$

A seguinte proposição será bastante útil adiante pois nos fornece elementos maximal e minimal segundo a pré-ordem $\leqslant$.

Proposição 1.52.

(i) $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, =)$ *é um elemento maximal em* $\mathcal{PV}$*, i.e.,* $\forall o \in \mathcal{PV}$*,* $o \leqslant (\mathbb{R}, \mathbb{R}, =)$.

(ii) $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \neq)$ *é um elemento minimal em* $\mathcal{PV}$*, i.e.,* $\forall o \in \mathcal{PV}$*,* $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \neq) \leqslant o$*.*

Demonstração: (i) Seja $o = (A, B, E)$ e fixe $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ injetora e $\xi \subseteq E$ uma função de A em B, i.e., para todo $a \in A$ tem-se que $a \, E \, \xi(a)$.

Considere φ' uma inversa à esquerda de φ e defina $\psi = \xi \circ \varphi'$.

Sejam $a \in A$ e $b \in B$ tais que $\varphi(a) = b$. Queremos mostrar que $a \, E \, \psi(b)$.

Como $\varphi(a) = b$, temos que $\psi(\varphi(a)) = \psi(b)$. Mas $\psi(\varphi(a)) = \psi(\varphi'(\varphi(a))) = \xi(a)$, e assim $\xi(a) = \psi(b)$. Porém, temos por hipótese que $a \, E \, \xi(a)$, logo $a \, E \, \psi(b)$.

Portanto o par (φ, ψ) é um morfismo de $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, =)$ em o, i.e., $o \leqslant (\mathbb{R}, \mathbb{R}, =)$.

(ii) Sejam $o = (A, B, E)$ e $\psi : B \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função injetora.

Fixe uma função $\zeta : B \longrightarrow A$ tal que $\zeta \cap E^{-1} = \emptyset$, i.e., para cada $b \in B$, $\zeta(b)$ é um elemento de A tal que $\neg \zeta(b) \, E \, b$.

Suponha $a = \psi(b)$. Vamos mostrar que $\neg\varphi(a)\, E\, b$.

Considere ψ' uma inversa à esquerda para ψ e defina $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow A$, $\zeta \circ \psi'$.

Aplicando φ a ambos os lados da igualdade $a = \psi(b)$, obtemos $\varphi(a) = \varphi(\psi(b))$. Observe que $\varphi(\psi(b)) = \zeta \circ \psi'(\psi(b)) = \zeta(b)$. Mas, pela definição da função ζ, $\neg\zeta(b)\, E\, b$, logo $\neg\varphi(a)\, E\, b$, como desejávamos.

Assim, (φ, ψ) é um morfismo de o em $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \neq)$, logo $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \neq) \leqslant o$. ■

Retomando a ideia intuitiva de encarar os objetos da categoria como problemas, possíveis soluções e uma relação que nos diz quando uma resposta é solução para um problema, podemos pensar da seguinte maneira:

- O objeto $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, =)$ é composto de problemas difíceis de resolver, já que cada problema tem uma única solução. Assim, se sabemos como solucionar problemas em $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, =)$, podemos utilizar estas informações para resolver problemas em qualquer outro objeto o, já que sempre temos um morfismo de $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, =)$ para o.

- Já o objeto $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \neq)$ tem muitas soluções para um dado problema e assim, podemos facilmente reduzir a tarefa de encontrar uma solução para um dado problema em $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \neq)$ à busca de um solução em um outro objeto o qualquer no qual já saibamos como solucionar os problemas, já que sempre temos um morfismo de o para $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \neq)$.

Intuitivamente, a tarefa de encontrar soluções para problemas em $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, =)$ é a mais difícil de ser realizada, enquanto que em $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \neq)$ é a mais fácil possível.

1.3.4 Os Princípios Diamante Parametrizados

Introduziremos agora a definição de princípio diamante parametrizado, que toma como parâmetros elementos da categoria $\mathcal{PV}$

Definição 1.53. Seja $o = (A, B, E)$ um objeto da categoria $\mathcal{PV}$. Então o princípio $\Phi(o)$ é a asserção:

$\Phi(o) \equiv$ *Para toda função $F : {}^{<\omega_1}2 \longrightarrow A$, existe uma função $g : \omega_1 \longrightarrow B$ tal que, para toda função $f : \omega_1 \longrightarrow 2$, o conjunto $\{\alpha \in \omega_1 : F(f \restriction \alpha)\, E\, g(\alpha)\}$ é estacionário em ω_1.*

Se $o = (A, B, E)$, denotamos $\Phi(o)$ por $\Phi(A, B, E)$. No caso em que $A = B$, denotaremos $\Phi(A, B, E)$ simplesmente por $\Phi(A, E)$.

A função g, que na definição dos princípios diamante parametrizados têm um papel análogo ao da sequência diamante dada pelo princípio $\diamondsuit$, será chamada *função oráculo* para F dada por $\Phi(o)$. □

Em alguns momentos, vamos nos referir à função F como *coloração da árvore binária (por elementos de A).* A motivação para essa nomenclatura vem do caso clássico, que será discutido em detalhes na seção seguinte, que é princípio $\Phi(2,=)$, no qual pode-se pensar que estamos colorindo a árvore binária em duas cores, por exemplo preto e branco, e que o princípio $\Phi(2,=)$ garante que dado qualquer ramo, a função oráculo é capaz de acertar uma quantidade razoável de vezes a cor da restrição do ramo aos seus segmentos iniciais.

Um fato interessante sobre o princípio $\Phi(2,=)$ é que, dada $F : {}^{<\omega_1}2 \longrightarrow 2$, g é oráculo para F dado por $\Phi(2,=)$ se, e somente se, $h = 1 - g$ é oráculo para F dado por $\Phi(2,\neq)$. Concluímos então que os princípios $\Phi(2,=)$ e $\Phi(2,\neq)$ são equivalentes.

O fato seguinte nos dá uma relação entre a ordenação que introduzimos na categoria $\mathcal{PV}$ e os princípios diamante parametrizados. Este fato é bastante útil pois podemos provar implicações entre dois princípios apenas exibindo um morfismo entre objetos correspondentes, o que muitas vezes é uma tarefa bem mais simples.

Fato 1.54. *Se o_1 e o_2 são dois objetos da categoria $\mathcal{PV}$ tais que $o_1 \leqslant o_2$, então $\Phi(o_2)$ implica $\Phi(o_1)$. Em particular, se dois objetos o_1 e o_2 são equivalentes em $\mathcal{PV}$ então, os princípios $\Phi(o_1)$ e $\Phi(o_2)$ são equivalentes.*

Prova: Sejam $o_1 = (A_1, B_1, E_1)$ e $o_2 = (A_2, B_2, E_2)$ dois objetos da categoria $\mathcal{PV}$, com $o_1 \leqslant o_2$, e seja (φ, ψ) um morfismo de o_2 em o_1.

Seja $F_1 : {}^{<\omega_1}2 \longrightarrow A_1$ uma coloração da árvore binária.

Considere agora a coloração dada por $F_2 = (\varphi \circ F_1) : {}^{<\omega_1}2 \longrightarrow A_2$. Supondo $\Phi(o_2)$, existe $g_2 : \omega_1 \longrightarrow B_2$ tal que o conjunto $S_2 = \{\alpha < \omega_1 : F_2(f \restriction \alpha)\, E_2\, g_2(\alpha)\}$ é estacionário, para qualquer função $f : \omega_1 \longrightarrow 2$.

Defina agora $g_1 = (\psi \circ g_2) : \omega_1 \longrightarrow B_1$. Vamos mostrar que, para toda função $f : \omega_1 \longrightarrow 2$, o conjunto $S_1 = \{\alpha < \omega_1 : F_1(f \restriction \alpha)\, E_1\, g_1(\alpha)\}$ é estacionário. Para isso, verificaremos que $S_1 \supseteq S_2$.

Dada uma função $f : \omega_1 \longrightarrow 2$ arbitrária, se $\alpha \in S_2$, então $F_2(f \restriction \alpha)\, E_2\, g_2(\alpha)$. Mas note que, pela definição da F_2, $F_2(f \restriction \alpha) = \varphi(F_1(f \restriction \alpha))$ e, como (φ, ψ) é morfismo de o_2 em o_1, $F_1(f \restriction \alpha)\, E_1\, \psi \circ g_2(\alpha) = g_1(\alpha)$ e portanto, $\alpha \in S_1$, como desejávamos. ∎

Combinando o fato anterior com a proposição 1.52 obtemos o seguinte resultado:

Corolário 1.55. *Para todo objeto $o \in \mathcal{PV}$,*

$$\Phi(\mathbb{R}, =) \Longrightarrow \Phi(o) \Longrightarrow \Phi(\mathbb{R}, \neq)$$

■

Vamos utilizar, na seguinte demonstração, a equivalência do princípio $\diamondsuit$ que definimos em 1.14.

Relembrando, o princípio $\diamondsuit_{ar}$ é a seguinte asserção:

$\diamondsuit_{ar} \equiv$ *existe uma sequência $\langle f_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$, onde cada $f_\alpha \in {}^\alpha 2$ tal que, para toda função $f : \omega_1 \longrightarrow 2$, o conjunto $\{\alpha < \omega_1 : f \restriction \alpha = f_\alpha\}$ é estacionário.*

Proposição 1.56. *O princípio $\diamondsuit$ implica $\Phi(o)$, para todo objeto $o \in \mathcal{PV}$.*

Demonstração: Sejam $o = (A, B, E) \in \mathcal{PV}$, $F : {}^{<\omega_1}2 \longrightarrow A$ arbitrária e seja $\langle g_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ uma $\diamondsuit_{ar}$-sequência.

Fixe uma função $g : \omega_1 \longrightarrow B$ de modo que, para cada $\alpha < \omega_1$, $g(\alpha)$ é algum $b \in B$ tal que $F(g_\alpha)Eb$.

Seja $f : \omega_1 \longrightarrow 2$ um ramo qualquer de ${}^{<\omega_1}2$. Por $\diamondsuit_{ar}$, o conjunto

$$S_1 = \{\alpha < \omega_1 : f \restriction \alpha = g_\alpha\}$$

é estacionário. Queremos mostrar que o conjunto

$$S_2 = \{\alpha < \omega_1 : F(f \restriction \alpha)\, E\, g(\alpha)\}$$

é estacionário. Nossa estratégia será mostrar que $S_1 \subseteq S_2$.

Dado $\alpha \in S_1$, $f \restriction \alpha = g(\alpha)$; aplicando F a ambos os termos temos $F(f \restriction \alpha) = F(g_\alpha)$, mas como $F(g_\alpha)\, E\, g(\alpha)$, temos que $F(f \restriction \alpha)\, E\, g(\alpha)$ e assim concluímos que $\alpha \in S_2$.

Portanto $S_1 \subseteq S_2$ e S_2 é estacionário, como queríamos demonstrar. ■

Proposição 1.57 ([MHD04])**.** *Os princípios $\diamondsuit$ e $\Phi(\mathbb{R}, =)$ são equivalentes.*

Demonstração: Pela proposição anterior, basta mostrar que $\Phi(\mathbb{R}, =)$ implica $\diamondsuit$.

Para cada $\alpha < \omega_1$, fixe uma função injetora $H_\alpha : {}^\alpha 2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e defina uma função $F : {}^{<\omega_1}2 \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo $F(t) = H_\alpha(t)$, onde $\alpha = \mathrm{dom}(t)$.

Pelo princípio $\Phi(\mathbb{R}, =)$, para qualquer $f : \omega_1 \longrightarrow 2$, existe $g : \omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que o conjunto $S = \{\omega \leqslant \alpha < \omega_1 : H_\alpha(f \restriction \alpha) = g(\alpha)\}$ é estacionário.

Defina agora, para cada $\alpha < \omega_1$, uma sequência $a_\alpha \in^\alpha 2$, $a_\alpha = H'_\alpha(g(\alpha))$, onde H'_α é uma inversa à esquerda de H_α fixada. Vamos mostrar que $\langle a_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ é uma $\diamondsuit_{ar}$-sequência.

Seja $S' = \{\omega \leqslant \omega_1 : f \restriction \alpha = a_\alpha\}$. Basta mostrarmos que $S \subseteq S'$ e teremos que S' é estacionário, completando a prova.

De fato, se $\alpha \in S$, então $H_\alpha(f \restriction \alpha) = g(\alpha)$; aplicando a inversa à esquerda H'_α de H_α a ambos os lados da equação, obtemos $H'_\alpha(H_\alpha(f \restriction \alpha)) = H'_\alpha(g(\alpha))$, e portanto $f \restriction \alpha = a_\alpha$ e $\alpha \in S'$, como queríamos. ■

Para finalizar esta subseção, vamos definir os princípio diamante parametrizados efetivos. Precisamos antes falar de objetos Borel na categoria $\mathcal{PV}$

Definição 1.58. (i) Um objeto (A, B, E) da categoria $\mathcal{PV}$ é Borel se A, B e E são subconjuntos Borel de algum espaço polonês.

(ii) Se o_1 e o_2 são ambos objetos Borel então, $o_1 \leqslant^B_{GT} o_2$ se existe um morfismo (φ, ψ) de o_2 para o_1 com as funções φ e ψ ambas Borel. □

Podemos agora definir os princípios diamante parametrizados efetivos:

Definição 1.59. Dado um objeto Borel $o = (A, B, E) \in \mathcal{PV}$, definimos o princípio $\diamondsuit(o)$ como:

$\diamondsuit(o) \equiv$ *Para toda função Borel* $F : {}^{<\omega_1}2 \longrightarrow A$, *existe uma função* $g : \omega_1 \longrightarrow B$ *tal que, para toda função* $f : \omega_1 \longrightarrow 2$, *o conjunto* $\{\alpha \in \omega_1 : F(f \restriction \alpha)\, E\, g(\alpha)\}$ *é estacionário em* ω_1.

□

Vale o análogo do fato 1.54 para os princípios diamante parametrizados efetivos. Basta notar que as funções utilizadas na demonstração de 1.54 são Borel.

Fato 1.60. *Sejam o_1 e o_2 objetos Borel da categoria $\mathcal{PV}$.*

(i) *Se $o_1 \leqslant^B_{GT} o_2$, então $\diamondsuit(o_2) \longrightarrow \diamondsuit(o_1)$.*

(ii) *Se $o_1 \sim^B_{GT} o_2$, então $\diamondsuit(o_2) \longleftrightarrow \diamondsuit(o_1)$.*

Também apenas observando que as funções utilizadas na demonstração de 1.57 são na verdade funções Borel, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 1.61 ([MHD04]). *O princípio diamante parametrizado efetivo $\diamondsuit(\mathbb{R}, =)$ é equivalente ao diamante original, $\diamondsuit$.*

1.3.5 O diamante fraco

Nesta subseção apresentaremos a demonstração de um teorema devido a Devlin e Shelah, que apareceu no artigo [DS78], que estabelece uma relação entre a asserção combinatória $2^\omega < 2^{\omega_1}$ e um enfraquecimento do princípio diamante, introduzido por eles, que na nossa linguagem é o princípio $\Phi(2, \neq)$. Tal teorema motivou a aparição de diversos enfraquecimentos do princípio diamante, como o $\diamondsuit_{\mathfrak{d}}$, que mais tarde deram origem aos princípios diamante parametrizados.

A demonstração que faremos segue a que se encontra no survey [R11], de Assaf Rinot. Optamos por reorganizar a demonstração feita por Rinot, enunciando como lemas antes de enunciar o teorema, duas afirmações que pertenciam ao corpo da demonstração. Além disso, procuramos explicar mais detalhadamente algumas passagens, com o intuito de tornar mais fácil a compreensão deste teorema, que como grande parte dos resultados devidos a Shelah, são profundos e de demonstração bastante trabalhosa.

Proposição 1.62. $\Phi(2, \neq) \Longrightarrow 2^\omega < 2^{\omega_1}$.

Demonstração: Suponha $2^\omega = 2^{\omega_1}$ e seja $h : {}^\omega 2 \longrightarrow {}^{\omega_1}2$ uma sobrejeção.

Considere $F : {}^{<\omega_1}2 \longrightarrow 2$ dada por:

$$F(t) = h(t \restriction \omega)(dom(t)),$$

se $\mathrm{dom}(t)$ é infinito e, para $\mathrm{dom}(t)$ finito, pode valer qualquer coisa, $F(t) = 1$ sempre, por exemplo.

Seja $g : \omega_1 \longrightarrow 2$. Como h é sobre, $g = h(\sigma)$, para algum $\sigma \in {}^\omega 2$. Considere agora uma função $f : \omega_1 \longrightarrow 2$ tal que $f \restriction \omega = \sigma$.

Dado $\alpha < \omega_1$ ordinal infinito,

$$\begin{aligned} F(f \restriction \alpha) &= h((f \restriction \alpha) \restriction \omega)(\mathrm{dom}(t)) \\ &= h(f \restriction \omega)(\alpha) \\ &= h(\sigma)(\alpha) \\ &= g(\alpha) \end{aligned}$$

Assim, o conjunto $\{\alpha < \omega_1 : F(f \restriction \alpha) \neq g(\alpha)\}$ é limitado, logo não pode ser estacionário e portanto, nenhuma $g : \omega_1 \longrightarrow 2$ pode ser oráculo para a função F, logo vale $\neg\Phi(2, \neq)$. ∎

Podemos mostrar ainda mais do que mostramos acima. Na verdade, a proposição acima pode ser generalizada para qualquer objeto da categoria $\mathcal{PV}$, como veremos em seguida.

Proposição 1.63. *Para todo objeto $o \in \mathcal{PV}$, $\Phi(o)$ implica $2^\omega < 2^{\omega_1}$.*

Demonstração: Vamos mostrar a contrapositiva, i.e., que $2^\omega = 2^{\omega_1}$ implica $\neg\Phi(A, B, E)$.

Suponha que $2^\omega = 2^{\omega_1}$ e seja $H : 2^\omega \longrightarrow {}^{\omega_1}B$ uma função sobrejetora. Note que tal função existe pois, como $|B| \leqslant 2^\omega$, $|{}^{\omega_1}B| \leqslant (2^\omega)^{\omega_1} = 2^{\omega\cdot\omega_1} = 2^{\omega_1}$. Por outro lado, se $|B| > 1$, $2^\omega \leqslant |{}^{\omega_1}B|$.

Fixe uma função $F : {}^{<\omega_1}2 \longrightarrow A$ tal que, para cada ${}^{<\omega_1}2$, $F(t)$ é algum $a \in A$ tal que $\neg aEH(t \restriction \omega)(\mathrm{dom}(t))$. F está bem definida pois, para todo $b \in B$, em particular para $b = H(t \restriction \omega(\mathrm{dom}(t)))$, existe $a \in A$ tal que $\neg aEb$, pela definição dos objetos de $\mathcal{PV}$.

Considere agora uma função $g : \omega_1 \longrightarrow B$ arbitrária e fixe uma função $f : \omega_1 \longrightarrow 2$ tal que $H(f \restriction \omega) = g$.

Para $\delta \geqslant \omega$, pela definição de F, $\neg F(f \restriction \delta)EH(f \restriction \omega)(\delta) = g(\delta)$, e portanto $\{\delta \in \omega_1 : F(f \restriction \delta)Eg(\delta)\} \subseteq \omega$, logo é não estacionário e vale $\neg\Phi(A, B, E)$. ■

Introduziremos a seguir um princípio combinatório que irá nos auxiliar na demonstração do teorema de Devlin e Shelah. Tal princípio não se encaixa na definição de princípio diamante parametrizado, porém é bastante semelhante.

Considere o seguinte princípio:

$(\dagger) \equiv$ *Para toda função $F : {}^{<\omega_1}({}^\omega 2) \longrightarrow {}^\omega 2$ existe $g : \omega_1 \longrightarrow {}^\omega 2$ tal que, para toda função $f : \omega_1 \longrightarrow {}^\omega 2$ o conjunto $\{\alpha < \omega_1 : F(f \restriction \alpha) \neq g(\alpha)\}$ é estacionário.*

Veremos adiante como corolário da demonstração do teorema de Devlin e Shelah que os princípios $(\dagger)$ e $\Phi(2, \neq)$ são equivalentes. Porém, na demonstração que apresentaremos do teorema de Devlin e Shelah, o princípio $(\dagger)$ se mostra mais interessante.

Para chegar ao nosso objetivo, precisamos demonstrar que vale uma destas implicações. O enunciado do fato que demonstraremos a seguir nos dá tal implicação, ou melhor, a sua contrapositiva.

Fato 1.64. $\neg\Phi(2, \neq) \Longrightarrow \neg(\dagger)$

Demonstração: Seja $F : {}^{<\omega_1}2 \longrightarrow 2$ uma testemunha da falha de $\Phi(2, \neq)$.

Dada $t \in {}^{<\omega_1}({}^\omega 2)$ defina, para $\gamma < \mathrm{dom}(t) < \omega_1$, $t_\gamma \in {}^{<\omega_1}2$, $t_\gamma(\beta) = t(\beta)(\gamma)$. Defina agora $F^* : {}^{<\omega_1}({}^\omega 2) \longrightarrow {}^\omega 2$, dada por $F^*(t)(\gamma) = F(t_\gamma)$

Seja $g : \omega_1 \longrightarrow {}^\omega 2$. Queremos mostrar que existe uma função $f : \omega_1 \longrightarrow {}^\omega 2$ tal que o conjunto $\{\alpha < \omega_1 : F^*(f \restriction \alpha) \neq g(\alpha)\}$ é não estacionário, ou equivalentemente, que seu complementar $C = \{\alpha < \omega_1 : F^*(f \restriction \alpha) = g(\alpha)\}$ contém um club.

Considere, para cada $n < \omega$, a função $g_n : \omega_1 \longrightarrow 2$ definida por $g_n(\alpha) = g(\alpha)(n)$.

Por $\neg\Phi(2,\neq)$, para cada $n<\omega$, existe $f_n:\omega_1\longrightarrow 2$ tal que $C_n=\{\alpha<\omega_1: F(f_n\restriction\alpha)=g_n(\alpha)\}\in Club(\omega_1)$.

Defina agora uma função $f:\omega_1\longrightarrow {}^{\omega}2$, $f(\delta)(n)=f_n(\delta)$

Afirmo que tal função f, o conjunto $C=\{\alpha<\omega_1: F^*(f\restriction\alpha)=g(\alpha)\}\in Club(\omega_1)$.

De fato, se $\alpha\in\bigcap_{n<\omega}C_n$ então, para todo $n<\omega$, $F(f_n\restriction\alpha)=g_n(\alpha)$. Mas note que

$$\begin{aligned}F^*(f\restriction\alpha)(n)&=F(f_n\restriction\alpha)\\&=g_n(\alpha)\\&=g(\alpha)(n)\end{aligned}$$

e portanto, como tal igualdade é válida para todo natural $n<\omega$, temos que $F^*(f\restriction\alpha)=g(\alpha)$

Assim, $\bigcap_{<\omega}C_n\subseteq C$. Como $Club(\omega_1)$ é filtro σ-completo, segue que $C\in Club(\omega_1)$, como desejávamos. ■

Definiremos agora um tipo de sequência será importante nos dois lemas que antecedem o teorema final.

Definição 1.65 (Sequência H-prospectiva)**.** Seja $H: {}^{<\omega_1}({}^{\omega}2)\longrightarrow {}^{<\omega_1}({}^{\omega}2)$.

Dizemos que uma sequência $\langle(f_n,D_n):n<\omega\rangle$ é sequência H-prospectiva se:

(1) $\{D_n:n<\omega\}$ é cadeia decrescente de clubs de ω_1;

(2) $\forall n<\omega\ f_n:\omega_1\longrightarrow {}^{\omega}2$;

(3) $\forall n<\omega\ \forall\alpha\in D_{n+1}\ H(f_{n+1}\restriction\alpha)=f_n\restriction\min(D_n\setminus\alpha+1)$ □

Enunciaremos em seguida dois lemas, cuja demonstração será feita depois, e a partir destes lemas demostraremos o teorema de Devlin e Shelah.

Lema 1.66. *$\neg\Phi(2,\neq)$ implica a existência de uma função $H: {}^{<\omega_1}({}^{\omega}2)\longrightarrow {}^{<\omega_1}({}^{\omega}2)$ tal que, para toda função $f:\omega_1\longrightarrow {}^{\omega}2$, existe uma sequência H-prospectiva $\langle(f_n,D_n):n<\omega\rangle$ com $f_0=f$*

Lema 1.67. *Para toda função $H: {}^{<\omega_1}({}^{\omega}2)\longrightarrow {}^{<\omega_1}({}^{\omega}2)$, existe uma função $H^*: {}^{\omega}({}^{<\omega_1}({}^{\omega}2))\longrightarrow {}^{\omega}({}^{<\omega_1}({}^{\omega}2))$ com a seguinte propriedade:*

Para toda sequência H-prospectiva $\langle(f_n,D_n):n<\omega\rangle$ e todo $\alpha\in\bigcap_{n<\omega}D_n$, existe $\alpha^\star<\omega_1$ tal que:

(1) $\alpha^\star > \alpha$;

(2) $\alpha^\star \in \bigcap_{n<\omega} D_n$;

(3) $H^*(\langle f_n \restriction \alpha : n < \omega\rangle) = \langle f_n \restriction \alpha^\star : n < \omega\rangle$.

Teorema 1.68 (Devlin - Shelah)**.** $2^\omega < 2^{\omega_1}$ *implica* $\Phi(2, =)$.

Demonstração: Mostraremos na verdade a contrapositiva, i.e., que $\neg\Phi(2, =)$ implica $2^\omega = 2^{\omega_1}$. Para isso, vamos construir uma função injetora $\psi : {}^{\omega_1}({}^\omega 2) \longrightarrow {}^\omega({}^{<\omega_1}({}^\omega 2))$ supondo válido o princípio $\neg\Phi(2, =)$.

Fixe uma função $H : {}^{<\omega_1}({}^\omega 2) \longrightarrow {}^{<\omega_1}({}^\omega 2)$, conforme lema 1.66 e seja $H^* : {}^\omega({}^{<\omega_1}({}^\omega 2)) \longrightarrow {}^\omega({}^{<\omega_1}({}^\omega 2))$ a função obtida aplicando o lema 1.67 à função H.

Dada uma função $f : \omega_1 \longrightarrow {}^\omega 2$ arbitrária, tomamos uma sequência H-prospectiva $\langle (f_n, D_n) : n < \omega\rangle$ com $f_0 = f$ e definimos $\psi(f) = \langle f_n \restriction \alpha : n < \omega\rangle$, para $\alpha = \min(\bigcap_{n<\omega} D_n)$.

Vamos mostrar que ψ é injetora exibindo uma "inversa à esquerda" $\varphi : {}^\omega({}^{\omega_1}({}^\omega 2)) \longrightarrow {}^{\leqslant\omega_1}({}^\omega 2)$.

Dada $\sigma : \omega \longrightarrow {}^{<\omega_1}({}^\omega 2)$, definimos uma sequência auxiliar $\langle \sigma_\xi : \xi \leqslant \omega_1\rangle$ por recursão em $\omega_1 + 1$.

- $\sigma_0 = \sigma$;
- $\sigma_{\xi+1} = H^*(\sigma_\xi)$;
- $\sigma_\xi(n) = \bigcup_{\eta<\xi} \sigma_\eta(n)$, para $\xi \leqslant \omega_1$ ordinal limite e $n < \omega$.

Finalmente, defina $\varphi(\sigma) = \sigma_{\omega_1}(0)$.

Afirmação. $\varphi(\psi(f)) = f$*, para toda função* $f : \omega_1 \longrightarrow {}^\omega 2$.

De fato. Fixe $f : \omega_1 \longrightarrow {}^\omega 2$ e seja $\sigma = \psi(f)$.

Pela definição da função ψ, $\sigma = \langle f_n \restriction \alpha : n < \omega\rangle$ para alguma sequência H-prospectiva $\langle (f_n, D_n) : n < \omega\rangle$ e $\alpha \in \bigcap_{n<\omega} D_n$.

Pela escolha de H^* e por $f_0 = f$, existe uma sequência estritamente crescente $\langle \alpha_\xi : \xi < \omega_1\rangle$ de ordinais de $\bigcap_{n<\omega} D_n$ tal que, para todo $\xi < \omega_1$, $\sigma_\xi = \langle f_n \restriction \alpha_\xi : n < \omega\rangle$.

Tal sequência é dada da seguinte maneira:

- $\alpha_0 = \alpha$;
- $\alpha_{\xi+1} = (\alpha_\xi)^\star$;
- $\alpha_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} \alpha_\eta$, se $\xi < \omega_1$ é ordinal limite.

De fato,

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \sigma \\ &= \langle f_n \restriction \alpha : n < \omega \rangle \\ &= \langle f_n \restriction \alpha_0 : n < \omega \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi+1} &= H^*(\sigma_\xi) \\ &= H^*(\langle f_n \restriction \alpha_\xi : n < \omega \rangle) \\ &= \langle f_n \restriction (\alpha_\xi)^\star : n < \omega \rangle \\ &= \langle f_n \restriction \alpha_{\xi+1} : n < \omega \rangle.\end{aligned}$$

E finalmente, se $\xi < \omega_1$ é ordinal limite,

$$\begin{aligned}\sigma_\xi(n) &= \bigcup_{\eta<\xi} \sigma_\eta(n) \\ &= \bigcup_{\eta<\xi} f_n \restriction \alpha_\eta \\ &= f_n \restriction \alpha_\xi.\end{aligned}$$

Logo, como $\langle \alpha_\xi : \xi < \omega_1 \rangle$ é sequência estritamente crescente de ordinais de tamanho ω_1 em ω_1,

$$\begin{aligned}\varphi(\psi(f)) &= \varphi(\sigma) \\ &= \sigma_{\omega_1}(0) \\ &= \bigcup_{\xi<\omega_1} \sigma_\xi(0) \\ &= \bigcup_{n<\omega} f_n \restriction \alpha_\xi \\ &= f.\end{aligned}$$

■

Voltaremos agora à demonstração dos lemas 1.66 e 1.67.

Demonstração do lema 1.66: Seja $F : {}^{<\omega_1}({}^\omega 2) \longrightarrow {}^\omega 2$ testemunha da falha de (†), fixe $\varphi : {}^\omega 2 \longrightarrow {}^{<\omega_1}({}^\omega 2)$ bijeção e defina $H = \varphi \circ F$.

Dada $f : \omega_1 \longrightarrow {}^{\omega}2$, definimos, por recursão em ω,

- $f_0 = f$ e $D_0 = \omega_1$.

- Suponha $n < \omega$ e f_n e D_n definidos. Defina $g : \omega_1 \longrightarrow {}^{\omega}2$, $g(\alpha) = \varphi^{-1}(f_n \restriction \min(D_n \setminus \alpha + 1))$

Como F testemunha a falha de (†), a função g definida acima não pode ser oráculo, logo existe uma função $h : \omega_1 \longrightarrow {}^{\omega}2$ tal que o conjunto $\{\alpha < \omega_1 : F(h \restriction \alpha) = g(\alpha)\}$ contém um club, digamos C_n. Tomemos $f_{n+1} = h$ e $D_{n+1} = D_n \cap C_n$.

É imediato que a sequência $\langle (f_n, D_n) : n < \omega \rangle$ assim definida satisfaz as cláusulas (1) e (2) da definição de sequência H-prospectiva. Para ver que vale(3) note que, para $\alpha \in D_{n+1}$,

$$\begin{aligned} H(f_{n+1} \restriction \alpha) &= (\varphi \circ F)(f_{n+1} \restriction \alpha) \\ &= (\varphi \circ g)(\alpha) \\ &= f_n \restriction \min(D_n \setminus \alpha + 1) \end{aligned}$$

■

Demonstração do lema 1.67: Dada uma função H como na hipótese, definimos funções $H^m : {}^{\omega}({}^{<\omega_1}({}^{\omega}2)) \longrightarrow {}^{\omega}({}^{<\omega_1}({}^{\omega}2))$ por recursão em $m < \omega$.

Para todo $\sigma : \omega \longrightarrow {}^{\omega_1}({}^{\omega}2)$, seja:

- $H^0(\sigma) = \sigma$;

- Supondo H^m definida, $H^{m+1}(\sigma) = \langle H(H^m(\sigma)(n+1) : n < \omega \rangle$.

Finalmente, defina $H^*(\sigma) = \langle \bigcup_{m<\omega} H^m(\sigma)(n) : n < \omega \rangle$.

Para ver que H^* funciona, i.e., que satisfaz as cláusulas (1)-(3), fixe uma sequência H-prospectiva $\langle (f_n, D_n) : n < \omega \rangle$ e algum $\alpha \in \bigcap_{n<\omega} D_n$.

Defina $\langle \langle \alpha_n^m : n < \omega \rangle : n < \omega \rangle$ pondo:

- $\alpha_n^0 = \alpha$;

- dado $m < \omega$, para todo $n < \omega$ defina $\alpha_n^{m+1} = min(D_n \setminus \alpha_{n+1}^m + 1)$.

Considere $\alpha^\star = \sup_{m<\omega} \alpha_0^m$. Vamos mostrar que $\alpha^\star$, como definimos, de fato satisfaz as cláusulas $(1) - (3)$ e assim finalizar a demonstração deste lema.

(1) $\alpha^\star \geqslant \alpha_0^1 = \min(D_0 \setminus \alpha_1^0 + 1)$, logo $\alpha^\star > \alpha_1^0 = \alpha$.

(2) Para mostrar que vale (2), precisaremos mostrar antes duas afirmações.

Afirmação. $\forall m < \omega\ \forall n < \omega\ \alpha_n^m \leqslant \alpha_{n+1}^m$.

Fixemos $n < \omega$ e façamos indução em $m < \omega$.

$m = 0$: Trivial.

$m - 1 \longmapsto m$: Suponhamos que, para todo $n < \omega$, $\alpha_n^{m-1} \leqslant \alpha_{n+1}^{m-1}$.

Como a sequência dos D_n's é decrescente e $\alpha_n^{m-1} + 1 \subseteq \alpha_{n+1}^{m-1} + 1$,

$D_{n+2} \setminus \alpha_{n+2}^{m-1} + 1 \subseteq D_{n+1} \setminus \alpha_{n+1}^{m-1} + 1$,

logo

$$\min(D_{n+2} \setminus \alpha_{n+2}^{m-1} + 1) \leqslant \min(D_{n+1} \setminus \alpha_{n+1}^{m-1} + 1)$$

i.e., $\alpha_n^m \leqslant \alpha_{n+1}^m$.

Pela Afirmação e pela definição dos α_n^m's,

$$\alpha_{n+1}^{m+1} \geqslant \alpha_n^{m+1} > \alpha_{n+1}^m$$

Portanto, $\forall n < \omega$,

$$\sup_{m<\omega} \alpha_{n+1}^m \geqslant \sup_{m<\omega} \alpha_n^m \geqslant \sup_{m<\omega} \alpha_{n+1}^m.$$

Logo, $\forall n < \omega$,

$$\sup_{m<\omega} \alpha_n^m = \sup_{m<\omega} \alpha_{n+1}^m.$$

Assim, para todo $n < \omega$, $\alpha^\star$ é limite de uma sequência de elementos de D_n. Como cada D_n é fechado, concluímos que $\alpha^\star \in D_n$, para todo $n < \omega$.

(3) Mostraremos, por indução em $m < \omega$, que

$$H^m(\langle f_n \restriction \alpha : n < \omega\rangle) = \langle f_n \restriction \alpha_n^m : n < \omega\rangle$$

$m = 0$: $H^0(\langle f_n \restriction \alpha : n < \omega\rangle) = \langle f_n \restriction \alpha : n < \omega\rangle = \langle f_n \restriction \alpha_n^0 : n < \omega\rangle$

$m \longmapsto m + 1$:

$$\begin{aligned} H^{m+1}(\langle f_n \restriction \alpha : n < \omega\rangle) &= \langle H(H^m(\langle f_n \restriction \alpha : n < \omega\rangle)(n+1)) : n < \omega\rangle \\ &= \langle H(f_{n+1} \restriction \alpha_{n+1}^m : n < \omega\rangle \end{aligned}$$

Vamos mostrar agora que

$$\langle H(f_{n+1} \restriction \alpha_{n+1}^m : n < \omega\rangle = \langle f_n \restriction \alpha_n^m : n < \omega\rangle$$

i.e, mostraremos que, para todo $n < \omega$,

$$H(f_{n+1} \restriction \alpha_{n+1}^m) = f_n \restriction \alpha_n^{m+1}.$$

Seja $n < \omega$. Pela definição de α_n^{m+1}, basta mostrar que:

$$H(f_{n+1} \restriction \alpha_{n+1}^m) = f_n \restriction \min(D_n \setminus \alpha_{n+1}^m + 1)$$

Mas isso segue imediatamente dos fatos de que $\alpha^m_{n+1} \in D_{n+1}$ e que $\langle (f_n, D_n) : n < \omega \rangle$ é uma sequência H-prospectiva.

Portanto,

$$\begin{aligned} H^*(\langle f_n \restriction \alpha : n < \omega \rangle) &= \langle f_n \restriction \bigcup_{m<\omega} \alpha^m_n : n < \omega \rangle \\ &= \langle f_n \restriction \alpha^\star : n < \omega \rangle. \end{aligned}$$

■

Capítulo 2

Espaços onde a densidade restringe o extent

Neste capítulo apresentaremos resultados que dizem respeito à limitação do extent pela densidade em certas classes de espaços topológicos.

As limitações que serão obtidas na primeira seção são absolutas, i.e., válidas em qualquer modelo de ZFC. Já na segunda seção vamos mostrar que certas hipóteses combinatórias implicam em limitações melhores.

Os resultados vistos na segunda seção são mais fortes no sentido de que a limitação no extent obtida será pela própria densidade, enquanto nos resultados da primeira seção, a limitação é por uma potência da densidade. A partir dos resultados de consistência, já bem conhecidos, de tais asserções combinatórias, teremos como corolário resultados de consistência em topologia.

2.1 O Lema de Jones e os teoremas de Matveev e Fleissner

Nesta seção apresentaremos três teoremas que nos dão limitações no extent de certos espaços topológicos em termos das suas densidades. As limitações que apresentaremos nesta seção serão em por uma potência da densidade e, com exceção do Lema de Jones, consideraremos o caso em que os espaços são separáveis.

As classes de espaços estudadas serão: espaços normais, (a)-espaços e espaços enumeravelmente paracompactos.

O primeiro teorema que veremos é o famoso Lema de Jones, que tem aplicações, por exemplo, na demonstração da não normalidade de exemplos clássicos de espaços topológicos não métricos, como a Reta de Sorgenfrey e o Plano de Niemytzki.

O segundo, é uma versão do Lema de Jones para (a)-espaços, devida a Matveev. que foi quem introduziu a propriedade (a) nos seus estudos sobre espaços *a.e.c.*.

O terceiro teorema, devido a Fleissner, nos dá uma limitação no extent se o espaço for enumeravelmente paracompacto e separável.

Nos três casos, a limitante obtido é o cardinal $\mathfrak{c}$.

Teorema 2.1 (Lema de Jones, [J37]). *Se X é um espaço normal, $C \subseteq X$ é fechado e discreto e $D \subseteq X$ é denso, então $2^{|C|} \leqslant 2^{|D|}$.*

Demonstração: Sejam X espaço normal, $C \subseteq X$ subconjunto fechado e discreto e $D \subseteq X$ denso em X.

Note que, para cada subconjunto $Y \subseteq C$, Y e $C \setminus Y$ são fechados disjuntos (pois subconjuntos de fechados e discretos são também fechados e discretos). Como X é normal, existe, para cada $Y \subseteq C$, um aberto U_Y tal que $Y \subseteq U_Y$ e $C \setminus Y \subseteq X \setminus \overline{U_Y}$.

Sejam Y e Z subespaços de X fechados e discretos, com $Y \neq Z$. Então $U_Y \neq U_Z$.

Podemos supor, s.p.g., que $Y \setminus Z \neq \emptyset$, logo $\emptyset \neq Y \setminus Z \subseteq U_Y \setminus \overline{U_Z}$.

Note que $U_Y \setminus \overline{U_Z}$ é aberto, logo $D \cap U_Y \setminus \overline{U_Z} \neq \emptyset$ e portanto, $U_y \cap D \neq U_Z \cap D$.

Assim, a aplicação $f : \mathcal{P}(C) \longrightarrow \mathcal{P}(D)$, dada por $f(Y) = U_Y \cap D$ é injetora e portanto, $|\mathcal{P}(C)| \leqslant |\mathcal{P}(D)|$, i.e., $2^{|C|} \leqslant 2^{|D|}$ ■

Aplicando o Teorema de Cantor ("$X \prec \mathcal{P}(X)$") obtemos o seguinte resultado:

Corolário 2.2. *Se X é um espaço normal, $H \subseteq X$ é fechado e discreto e $D \subseteq X$ é denso, então $|H| < 2^{|D|}$.* ■

Corolário 2.3. *Suponha $2^\kappa < 2^{\kappa^+}$. Se X é um espaço T_4, $d(X) = \kappa$ então X não tem fechado e discreto de tamanho κ^+ (i.e., $e(X) \leqslant \kappa$).*

Demonstração: Caso X tivesse um fechado e discreto H de tamanho κ^+, tomando $D \subseteq X$ denso de tamanho $\kappa = d(X)$, pelo Lema de Jones, teríamos $2^{\kappa^+} \leqslant 2^\kappa$, e portanto não valeria a desigualdade $2^\kappa < 2^{\kappa^+}$. ■

O teorema seguinte, devido a Matveev, pode ser encarado como uma versão do Lema de Jones (na verdade, do corolário 2.2) para (a)-espaços. Com isso podemos demonstrar a validade de algumas afirmações relacionadas ao extent de (a)-espaços separáveis análogas às obtidas para espaços normais separáveis.

Teorema 2.4 (Matveev, [M97]). *Se um (a)-espaço separável possui um fechado e discreto de cardinalidade κ, então $\kappa < 2^\omega$.*

Demonstração: Seja X um (a)-espaço separável, com D denso em X, D enumerável, e suponha, por absurdo, que X possui um fechado e discreto H de tamanho 2^ω.

Como $|H| > |D|$, podemos supor s.p.g. que D e H são disjuntos (pois $H \setminus D$ é fechado e discreto de tamanho 2^ω). Note que, como a família de todos os subconjuntos fechados e discretos de D tem tamanho 2^ω, podemos indexar tal família usando H. Seja $\{G_x : x \in H\}$ tal enumeração.

Defina, para cada $x \in H$, uma vizinhança aberta de x da seguinte maneira: $U_x = X \setminus ((H \setminus \{x\}) \cup G_x)$ e considere a cobertura aberta $\mathcal{U} = \{X \setminus H\} \cup \{U_x : x \in H\}$ de X.

Note que, para todo $x \in H$, $U_x \cap H = \{x\}$ e portanto, o único elemento de $\mathcal{U}$ que contém x é U_x. Note também, que $U_x \cap G_x = \emptyset$.

Seja $C \subseteq D$ subconjunto fechado e discreto de D; então existe $z \in H$ tal que $C = G_z$, e portanto, $U_z \cap C = \emptyset$. Como U_z é o único aberto de $\mathcal{U}$ tal que $z \in U_z$, temos que $z \notin St(C,\mathcal{U})$, logo X não é (a)-espaço, contradição. ■

Para concluir esta seção veremos um teorema, devido a Fleissner, que nos dá uma limitação do extent para espaços enumeravelmente paracompactos separáveis.

Teorema 2.5 (Fleissner, [F78]). *Se X é enumeravelmente paracompacto e separável então X não possui fechado e discreto de tamanho maior ou igual a $\mathfrak{c}$.*

Demonstração: Seja X enumeravelmente paracompacto e separável com $D \subseteq X$ denso enumerável e suponha, por absurdo, $H \subseteq X$ fechado e discreto de tamanho $\mathfrak{c}$.

Como $(2^\omega)^\omega = 2^\omega$, podemos usar H para indexar a família de todas as sequências de subconjuntos de D que são localmente finitas. Seja $\mathscr{G} := \{G_x : x \in H\}$ tal família e, para cada $x \in H$, ponha $G_x = \langle G_{x,n} : x < \omega \rangle$.

Defina agora $f : H \to \omega$, $x \mapsto f(x) := min\{n : x \notin \overline{G_{x,n}}\}$.

Note que, como cada G_x é localmente finita, x não pode pertencer a um número infinito de $\overline{G_{x,n}}$'s e portanto, f está bem definida.

Para cada $n < \omega$, defina $H_n := f_{-1}(n)$. Assim, $\{H_n : n < \omega\}$ é uma partição de H.

Considere a cobertura enumerável de X dada por $\mathcal{U} = \{X \setminus (H \setminus H_n) : n < \omega\}$ e seja $\mathcal{V}$ o refinamento de $\mathcal{U}$ que é localmente finito.

Para cada $n < \omega$, defina $S_n = St(H_n, \mathcal{V}) \cap D$.

Afirmação: $\mathcal{S} = \langle S_n : n < \omega \rangle$ é uma sequência de subconjuntos de D que é localmente finita.

prova: Suponha, por absurdo, que a sequência $\mathcal{S} = \langle S_n : n < \omega \rangle$ não é localmente finita. Então, existe um ponto x tal que qualquer vizinhança intersecta infinitos elementos de $\{St(H_n, \mathcal{V}) : n < \omega\}$.

Mas $\mathcal{V}$ é localmente finita, portanto existe U vizinhança aberta de x tal que U intersecta finitos elementos de $\mathcal{V}$ que tenham intersecção com H.

Para cada aberto $V_i \in \mathcal{V}$ que intersecta U fixe um ponto $x_i \in V_i \cap H$

Pela suposição de que a sequência $\mathcal{S} = \langle S_n : n < \omega \rangle$ não é localmente finita, a vizinhança U intersecta infinitos elementos de $\{St(H_n, \mathcal{V}) : n < \omega\}$. Seja $I \subseteq \omega$ o conjunto de índices que são testemunha da intersecção não vazia com U.

Fixe, para cada $n \in I$ um aberto $V_n \in \mathcal{V}$ que intersecta H_n. Como $\{H_n : n < \omega\}$ é partição, e cada aberto V_n intersecta H em um H_n diferente, temos que infinitos abertos da cobertura $\mathcal{V}$ (a saber, todos os abertos V_n, para $n \in I$) intersectam U, o que é uma contradição, logo vale a afirmação.

Assim, existe $z \in H$ tal que $S = G_z$.

Suponha, por absurdo, que $z \in \bigcup \mathcal{V}$.

Se $m = f(z)$, temos $z \in H_m$ e portanto,

$$\begin{aligned} z &\in St(H_n, \mathcal{V}) \\ &\subseteq \overline{St(H_m, \mathcal{V}} \\ &= \overline{St(H_m, \mathcal{V}) \cap D} \\ &= \overline{S_m} \\ &= \overline{G_{z,m}} \end{aligned}$$

o que é uma contradição pois $x \notin \overline{G_{x,f(x)}}$, $\forall x \in H$.

Logo $H \nsubseteq \bigcup \mathcal{V}$, como desejado. ■

2.2 Alguns resultados obtidos assumindo certas asserções conjuntistas

Nesta seção iremos apenas apresentar alguns resultados que podem ser obtidos assumindo asserções conjuntistas bem conhecidas, como CH, o princípio $\diamondsuit$, os princípios diamante parametrizados, a não existência de famílias dominantes pequenas, etc. A maioria dos resultados que serão aqui apresentados serão demonstrados ao longo deste trabalho.

Os resultados obtidos na seção anterior são absolutos, i.e., são válidos em todos os modelos de ZFC. Adicionando mais axiomas (cuja consistência ou independência com os demais axiomas de ZFC já foi estabelecida) podemos obter resultados melhores, cuja validade porém, se restringe a certos modelos de ZFC, a saber, os modelos onde valem tais axiomas ou asserções.

Os três teoremas vistos na seção anterior (o Lema de Jones e os teoremas de Matveev e Fleissner) nos fornecem informações semelhantes sobre restrições no extent de espaços separáveis que sejam normais, (a)-espaços ou enumeravelmente paracompactos. Tais espaços necessariamente têm extent menor que o cardinal $\mathfrak{c}$. Sob CH, o extent de tais espaços tem, necessariamente, que ser enumerável.

Porém, a Hipótese do Contínuo em diversos contextos se mostra uma hipótese muito forte, colapsando, por exemplo, todos os invariantes cardinais do contínuo. Para obter resultados com validade mais ampla, podemos tentar obter os mesmos resultados assumindo hipóteses mais fracas que CH.

Uma boa opção é o "diamante fraco" $2^\omega < 2^{\omega_1}$, que como vimos na seção do capítulo 1, é equivalente ao princípio diamante parametrizado $\Phi(2, =)$.

No caso dos espaços normais separáveis, o diamante fraco é suficiente para mostrar que o extent de tais espaços é enumerável (veja o corolário 2.3, tomando $\kappa = \omega$), porém para os (a)-espaços separáveis, a pergunta se o diamante fraco é suficiente para mostrar que o extent de tais espaços é enumerável permanece em aberto ainda.

Consideraremos ainda mais três asserções combinatórias: a não existência de famílias dominantes pequenas, o princípio diamante parametrizado $\Phi(\omega, <)$, bem como a sua versão efetiva $\diamondsuit(\omega, <)$.

Até agora discutimos a influência apenas de asserções combinatórias válidas no modelo construtível. No capítulo 4, serão exibidos teoremas que fazem a ligação entre a existência de subconjuntos fechados e discretos enumeráveis com a existência de famílias dominantes pequenas. A existência de tais famílias, como foi discutido na subseção 1.3.2, têm relação com a existência de grandes cardinais.

Assumindo a não existência de famílias dominantes pequenas, espaços enumeravelmente paracompactos possuem extent enumerável. Para (a)-espaços não temos nenhum resultado geral, porém, adicionando a hipótese de o espaço ser localmente compacto, obtemos extent enumerável.

O seguinte diagrama nos dá uma boa visualização das relações existentes entre as asserções combinatórias que estamos utilizando:

$$\begin{tikzcd}
V = L \arrow[dr] & & & \\
& \diamondsuit \arrow[r] \arrow[d] & CH \arrow[dr] & \\
& \Phi(\omega, <) \arrow[r] \arrow[dr] & \neg FDP \arrow[r] & 2^{\omega} < 2^{\omega_1} \\
& & \diamondsuit(\omega, <) &
\end{tikzcd}$$

No diagrama acima, $\neg FDP$ é uma abreviatura para "não existem famílias dominantes pequenas".

As implicações "$CH \longrightarrow 2^{\omega} < 2^{\omega_1}$" e "$\Phi(\omega, <) \longrightarrow \diamondsuit(\omega, <)$" são triviais. A implicação "$\Phi(\omega, <) \longrightarrow \neg FDP$" está feita o capítulo 5 (veja o corolário 5.17). A última implicação é simples de ver, basta notar que, como $|{}^{\omega_1}\omega| = 2^{\omega_1}$, assumindo "$2^{\omega} = 2^{\omega_1}$" temos $|{}^{\omega_1}\omega| = 2^{\omega} = \mathfrak{c}$ e portanto, a própria família de funções ${}^{\omega_1}\omega$ é uma família dominante pequena.

Ainda sobre o diagrama, sabemos, por [MS09], que CH é consistente com $\neg\diamondsuit(\omega, <)$ e portanto, $\Phi(\omega, <)$ e $\diamondsuit(\omega, <)$ são independentes de CH. Sabe-se ainda que $\neg\diamondsuit(\omega, <)$ + $\neg CH$ + "$2^{\omega} < 2^{\omega_1}$" e $\neg\diamondsuit(\omega, <)$ + $\neg CH$ + "$2^{\omega} = 2^{\omega_1}$" são ambos consistentes, porém, permanece em aberto ainda se CH é independente de $\Phi(\omega, <)$.

Vamos agora sumarizar alguns resultados sobre espaços normais, enumeravelmente paracompactos e (a)-espaços obtidos assumindo as asserções combinatórias que aparecem no diagrama.

1. *Sob CH:*

   - O extent de espaços normais é enumerável (corolário do Lema de Jones, 2.1);
   - O extent de (a)-espaços é enumerável (corolário do Teorema de Matveev, 2.4);
   - O extent de espaços enumeravelmente paracompactos é enumerável(corolário do Teorema de Fleissner, 2.5).

2. *Sob o diamante fraco:*

   - O extent de espaços normais é enumerável (corolário do Lema de Jones, 2.1);

Para o caso dos espaços enumeravelmente paracompactos e dos (a)-espaços, as perguntas foram propostas em [S05] e [MS11] e permanecem em aberto:

- **Questão ([S05],[MS11]):** *O diamante fraco sozinho implica que o extent de (a)-espaços separáveis é enumerável?*
- **Questão ([MS11]):** *O diamante fraco sozinho implica que o extent de espaços enumeravelmente paracompactos separáveis é enumerável?*

3. *Sob "não existem famílias dominantes pequenas":*

- Permanece em aberto a questão de que a não existência de família dominantes pequenas implica ou não que (a)-espaços separáveis têm extent enumerável, porém, adicionando a hipótese de o espaço ser localmente compacto obtemos extent enumerável (veja o teorema 4.6).

  Questão ([S05]): *A não existência de família dominantes pequenas implica ou não que (a)-espaços separáveis têm extent enumerável?*

- Para espaços enumeravelmente paracompactos separáveis temos o seguinte teorema:

  Teorema de Watson ([W85]): *A existência de famílias dominantes pequenas é equivalente à existência de espaços enumeravelmente paracompactos com extent não enumerável.*

  Ou, equivalentemente: *A não existência de famílias dominantes pequenas é equivalente à asserção "todo espaço enumeravelmente compacto separável tem extent enumerável".*

  Em 4.1 demonstraremos que a existência de espaços enumeravelmente paracompactos com extent não enumerável implica a existência de famílias dominantes pequenas. Omitiremos a outra implicação porque que a técnica utilizada na demonstração dela não tem proximidade com as que serão vistas ao longo deste trabalho. Outro motivo para esta omissão é que a outra implicação será usada apenas uma vez, ao passo que a que demonstraremos vai ser mais amplamente discutida.

4. *Sob o princípio* $\Phi(\omega, <)$*:*

Veremos no capítulo 5, seção 2 que o princípio $\Phi(\omega, <)$ implica a não existência de espaços enumeravelmente paracompactos separáveis com extent não enumerável e assim, pelo Teorema de Watson (4.1) vamos obter a implicação "$\Phi(\omega, <) \longrightarrow \neg FDP$".

5. *Sob o princípio* $\diamondsuit(\omega, <)$*:*

   Como no caso da asserção “não existem famílias dominantes pequenas”, não sabemos se o princípio $\diamondsuit(\omega, <)$ implica que (a)-espaços separáveis têm extent enumerável, porém, como veremos no teorema 5.15, se adicionarmos a hipótese de o espaço ser localmente enumeravelmente compacto, obtemos extent enumerável.

Capítulo 3

Caracterizações combinatórias de propriedades topológicas de Ψ-espaços

Os Ψ-espaços foram definidos a partir de famílias almost disjoint, que são estrutura puramente combinatórias. Vimos, ainda no capítulo 1, que a presença de determinadas hipóteses combinatórias na família *a.d.* que dá origem ao espaço, têm forte influência sobre a topologia dos Ψ-espaços. Veremos neste capítulo caracterizações combinatórias das três propriedades topológicas discutidas no capítulo anterior. Através dessas caraterizações podemos obter resultados combinatórios através de resultados topológicos e vice-versa.

Vamos seguir a mesma ordem do capítulo anterior: primeiro caracterizaremos a normalidade, depois a propriedade (a) e, por último, a paracompacidade enumerável.

3.1 Normalidade

O passo que daremos a seguir é em direção a uma caracterização combinatória da normalidade nos Ψ-espaços, para isso introduziremos o conceito de *separação* entre famílias de subconjuntos infinitos de ω

Definição 3.1. Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq [\omega]^\omega$ e seja $S \in [\omega]^\omega$. Dizemos que S separa $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}$ se

$$\forall A \in \mathcal{A}\ A \subseteq^* S \ \wedge\ \forall B \in \mathcal{B}\ B \cap S \text{ é finito}$$

Dizemos que $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq [\omega]^\omega$ podem ser separados se existe $S \in [\omega]^\omega$ tal que S separa $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}$. $\square$

Note que, se S separa $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}$ então $\omega \setminus S$ separa $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$. Desta forma, concluímos que a relação "podem ser separados" é simétrica.

O fato que veremos a seguir nos dá uma relação entre os conceitos de separação de subconjuntos numa família *a.d.* e o conceito de separação de subespaços no Ψ-espaço correspondente a tal família *a.d.*.

Fato 3.2. *Seja $\mathcal{A}$ família a.d. e sejam $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ subconjuntos disjuntos de $\mathcal{A}$. Então,*

$\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ podem ser separados em $\Psi(\mathcal{A})$ $\iff$ $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ podem ser separados.

Demonstração: [$\Longleftarrow$] Seja S conjunto que separa $\mathcal{F}$ de $\mathcal{G}$.

Então $\mathcal{F} \cup S$ e $\mathcal{G} \cup (\omega \setminus S)$ são vizinhanças abertas (claramente disjuntas) de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, respectivamente.

De fato, dado $F \in \mathcal{F}$, como S separa $\mathcal{F}$ de $\mathcal{G}$, temos que $F \subseteq^* S$, i.e., $F \setminus S$ é finito e assim, $\{F\} \cup F \setminus (F \setminus S) = \{F\} \cup (F \cap S)$ é uma vizinhança aberta de F contida em $\mathcal{F} \cup S$. Dado $G \in \mathcal{G}$, $G \subseteq^* \omega \setminus S$ e o argumento é análogo.

Como os demais pontos de $\mathcal{F} \cup S$ e $\mathcal{G} \cup (\omega \setminus S)$ são isolados, têm-se o desejado.

[$\Longrightarrow$] Sejam U e V vizinhanças abertas que separam, em $\Psi(\mathcal{A})$, os subconjuntos $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ de $\mathcal{A}$. Vamos mostrar que $U \cap \omega$ é conjunto que separa $\mathcal{F}$ de $\mathcal{G}$.

Seja $A \in \mathcal{F}$; então, existe $F \subseteq \omega$ finito tal que $\{A\} \cup (A \setminus F) \subseteq U$. Logo $A \setminus F \subseteq U \cap \omega$, ou, equivalentemente, $A \subseteq^* U \cap \omega$.

Seja agora $B \in \mathcal{G}$; então, existe $G \subseteq \omega$ finito tal que $\{B\} \cup (B \setminus G) \subseteq V \subseteq \Psi(\mathcal{A}) \setminus U$. Temos então que $B \setminus G \subseteq (\Psi(\mathcal{A}) \setminus U) \cap \omega$. Mas $(\Psi(\mathcal{A}) \setminus U) \cap \omega = (\Psi(\mathcal{A}) \cap \omega) \setminus U = \omega \setminus U = \omega \setminus (U \cap \omega)$, portanto $B \subseteq^* \omega \setminus S$.

Logo $U \cap \omega$ é conjunto que separa $\mathcal{F}$ de $\mathcal{G}$ e assim, os subconjuntos $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ podem ser separados. ■

Vamos agora, a partir do lema acima, que nos dá informação apenas do comportamento de subconjuntos de $\mathcal{A}$, obter uma caracterização válida para todo o espaço.

Proposição 3.3. $\Psi(\mathcal{A})$ *é normal* $\iff$ *quaisquer $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ disjuntos em $\mathcal{A}$ podem ser separados.*

Demonstração: [$\Rightarrow$] Segue imediatamente do fato anterior.

[$\Leftarrow$] Sejam $F \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ fechado e $V \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ aberto, com $F \subseteq V$. Vamos mostrar que existe um aberto $U \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ tal que $F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.

Se $F \cap \mathcal{A} = \emptyset$, acabou, basta tomar $U = F$ pois, como neste caso temos $F \subseteq \omega$, F é aberto-fechado.

Considere então $\mathcal{F} = F \cap \mathcal{A}$. Se $\mathcal{F} = \mathcal{A}$, i.e., se $F \supseteq \mathcal{A}$, temos $\Psi(\mathcal{A}) \setminus V \subseteq \omega$ e assim, V é aberto-fechado e basta tomarmos $U = V$.

Se $\mathcal{F} \neq \mathcal{A}$, considere $\mathcal{G} = \mathcal{A} \setminus \mathcal{F}$ o complementar de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{A}$.

Seja $S \subseteq \mathcal{A}$ um subconjunto de $\mathcal{A}$ que separa $\mathcal{F}$ de $\mathcal{G}$ e defina $U = F \cup ((V \cap \omega) \cap S)$.

Note que U é aberto. Se $x \in U \cap \omega$, como ω é subconjunto discreto de $\mathcal{A}$, $x \in \{x\} \subseteq U$. Se $x \in U \cap \mathcal{A} = \mathcal{F}$, como S separa $\mathcal{F}$ de $\mathcal{G}$, temos que $x \subseteq^* S$, i.e., que $x \setminus S$ é finito. Assim, $\{x\} \cup (x \setminus (x \setminus S)$ é vizinhança aberta de x e, como $\{x\} \cup (x \setminus (x \setminus S) = \{x\} \cup (x \cap S)$, esta vizinhança de x está contida em S

Para obter a inclusão $U \subseteq \overline{V}$, mostraremos que $\Psi(\mathcal{A}) \setminus V \subseteq \Psi(\mathcal{A}) \setminus \overline{U}$.

Seja $x \in \Psi(\mathcal{A}) \setminus V$. Então $x \notin F$. Se $x \in \omega$, acabou. Se $x \in \mathcal{A}$, então, como $x \notin F$, temos que $x \in \mathcal{A} \setminus F = \mathcal{G}$. Mas, como S é um separa $\mathcal{F}$ de $\mathcal{G}$, então $x \cap S$ é finito, e assim, $\{x\} \cup (x \setminus (x \cap S)) = \{x\} \cup (x \setminus S)$ é uma vizinhança aberta de x.

Note, porém, que esta vizinhança é disjunta de S e portanto, é disjunta de U, já que $U \subseteq S$. Logo o ponto x não está em $\overline{U}$. Como o ponto x foi tomado arbitrário, concluímos que $\Psi(\mathcal{A}) \setminus V \subseteq \Psi(\mathcal{A}) \setminus \overline{U}$, como queríamos mostrar.

Logo $\Psi(\mathcal{A})$ é normal. ∎

3.2 Propriedade (a)

Vamos agora caracterizar combinatorialmente a propriedade (a).

Teorema 3.4 ([SV98]). *Seja $\mathcal{A}$ uma família a.d.. Então $\Psi(\mathcal{A})$ tem a propriedade (a) se, e somente se, para toda função $f : \mathcal{A} \longrightarrow \omega$ existe $P \subseteq \omega$ tal que para todo $A \in \mathcal{A}$, $0 < |P \cap (A \setminus f(A))| < \omega$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{A}$ uma família *a.d.* e suponha que $\Psi(\mathcal{A})$ satisfaz a propriedade (a).

Dada uma função $f : \mathcal{A} \longrightarrow \omega$, considere a cobertura aberta de $\Psi(\mathcal{A})$ dada por

$$\mathcal{U} = \{\{A\} \cup (A \setminus f(A)) : A \in \mathcal{A}\} \cup \omega$$

Como $\mathcal{A}$ é (a) e ω é denso em $\Psi(\mathcal{A})$, existe fechado e discreto $P \subseteq \omega$ tal que $St(P, \mathcal{U}) = \Psi(\mathcal{A})$. Assim, como cada ponto de $\mathcal{A}$ pertence a apenas um aberto da cobertura $\mathcal{U}$, P intersecta cada um desses abertos, portanto temos $0 < |P \cap (A \setminus f(A))|$.

Se $P \cap (A \setminus f(A))$ fosse infinito, A seria ponto de acumulação de P. Porém P é fechado e discreto e assim, $P \cap (A \setminus f(A))$ tem que ser finito.

Logo, vale $0 < |P \cap (A \setminus f(A))| < \omega$.

Reciprocamente, tome uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de $\Psi(\mathcal{A})$ e um denso $D \subseteq \Psi(\mathcal{A})$. Considere um refinamento $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ obtido fixando, para cada $A \in \mathcal{A}$, um aberto da forma $\{A\} \cup (A \setminus n_A) \subseteq U$, onde U é um aberto da cobertura $\mathcal{U}$ que contém o ponto A e $n_A < \omega$.

Defina uma função $f : \mathcal{A} \longrightarrow \omega$ pondo $f(A) = n_A$. Para esta função f, existe um conjunto $P \subseteq \omega$ tal que $P \cap (A \setminus f(A))$ é não vazio e finito, para todo $A \in \mathcal{A}$.

Assim, como $P \cap (A \setminus f(A))$ é não vazio, temos que $\mathcal{A} \subseteq St(P, \mathcal{V})$. Segue do fato que $P \cap (A \setminus f(A))$ é finito que P é fechado, pois nenhum ponto de $\mathcal{A}$ pode ser ponto de acumulação de P. Observe ainda que, como $P \subseteq \omega$, P é fechado e discreto.

Note que o conjunto $Q = \Psi(\mathcal{A}) \setminus St(P, \mathcal{V})$ é fechado e, como está contido em ω, é discreto. Assim $P \cup Q$ fechado e discreto contido no denso ω, e portanto no denso D. Observe ainda que $St(P \cup Q, \mathcal{V}) = \Psi(\mathcal{A})$.

Logo $\Psi(\mathcal{A})$ satisfaz a propriedade (a), como queríamos mostrar. ■

Outra caracterização interessante da propriedade (a) para Ψ-espaços pode ser encontrada no artigo [S02], de Szeptycki, que utiliza o conceito de famílias *a.d.* soft.

Definição 3.5 ([S02])**.** Dizemos que uma família *a.d.* $\mathcal{A}$ é $soft$ se existe X subconjunto infinito de ω tal que, $\forall A \in \mathcal{A}\ 0 < |X \cap A| < \omega$.

Outra coisa que precisamos definir antes de enunciar a caracterização de Szeptycki é a ideia de modificação finita de uma família *a.d.*.

Definição 3.6 ([S02])**.** Dada uma família *a.d.* $\mathcal{A}$, dizemos que $B \subseteq [\omega]^\omega$ é uma modificação finita de $\mathcal{A}$ se $\mathcal{B}$ pode ser obtida removendo uma quantidade finita de elementos de cada subconjunto de $\mathcal{A}$, i.e., se $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ é uma enumeração de $\mathcal{A}$ então $\mathcal{B} = \{B_i : i \in I\}$ é modificação finita de $\mathcal{A}$ se, para todo $i \in I$, temos $B_i \subseteq A_i$ e $A_i \setminus B_i$ finito.

Com técnicas semelhantes às utilizadas no teorema anterior, podemos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.7 ([S02])**.** *Suponha que $\mathcal{A}$ é uma família a.d.. Então $\Psi(\mathcal{A})$ tem a propriedade (a) se, e somente se, toda modificação finita de $\mathcal{A}$ é $soft$.*

3.3 Paracompacidade enumerável

A última propriedade para a qual daremos uma caracterização combinatória para os Ψ-espaços é a paracompacidade enumerável.

Proposição 3.8 ([S07b],[MS09]). *Seja $\mathcal{A}$ uma família a.d. São equivalentes:*

(i) $\Psi(\mathcal{A})$ *é enumeravelmente paracompacto;*

(ii) *Para toda sequência decrescente $\langle \mathcal{F}_n : n < \omega \rangle$ de subconjuntos de $\mathcal{A}$ com intersecção vazia, existe uma sequência $\langle E_n : n < \omega \rangle$ de subconjuntos de ω satisfazendo as seguintes condições:*

$(ii).1$ $\forall n < \omega\ \forall A \in \mathcal{F}_n$ *($A \setminus E_n$ é finito)*

$(ii).2$ $\forall A \in \mathcal{A}\ \exists n < \omega$ *($A \cap E_n$ é finito)*

(iii) *Para toda partição $\{\mathcal{A}_n : n < \omega\}$ de $\mathcal{A}$, existe uma sequência $\langle E_n : n < \omega \rangle$ de subconjuntos de ω satisfazendo as seguintes condições:*

$(iii).1$ $\forall n < \omega\ \forall m \geqslant n\ \forall A \in \mathcal{A}_m$ *($A \setminus E_n$ é finito)*

$(iii).2$ $\forall A \in \mathcal{A}\ \exists n < \omega$ *($A \cap E_n$ é finito)*

(iv) *Para toda partição $\{\mathcal{A}_n : n < \omega\}$ de $\mathcal{A}$, existe uma sequência $\subseteq$-decrescente $\langle E_n : n < \omega \rangle$ de subconjuntos de ω satisfazendo as seguintes condições:*

$(iv).1$ $\forall n < \omega\ \forall A \in \mathcal{A}_n$ *($A \setminus E_n$ é finito)*

$(iv).2$ $\forall A \in \mathcal{A}\ \exists n < \omega$ *($A \cap E_n$ é finito)*

(v) *Para toda função $g : \mathcal{A} \longrightarrow \omega$, existem uma sequência $\subseteq$-decrescente $\langle E_n : n < \omega \rangle$ de subconjuntos de ω e uma função $f : \mathcal{A} \longrightarrow \omega$ satisfazendo as seguintes condições:*

$(v).1$ $\forall A \in \mathcal{A}$ *($A \setminus E_{g(A)}$ é finito)*

$(v).2$ $\forall A \in \mathcal{A}$ *($A \cap E_{f(A)}$ é finito)*

Demonstração: A demonstração da equivalência entre (i), (ii) e (iii) pode ser encontrada em [S04]. Vamos mostrar a equivalência entre os itens (iii), (iv) e (v).

$(iii) \Longrightarrow (iv)$: Sejam $\{\mathcal{A}_n : n < \omega\}$ uma partição qualquer de $\mathcal{A}$ e $\langle E_n : n < \omega \rangle$ a sequência $\subseteq$-decrescente de subconjuntos de ω dada por (iii).

Definimos uma sequência $\langle E'_n : n < \omega \rangle$ da seguinte maneira:

$$E'_n = \bigcap\nolimits_{i \leqslant n} E_i.$$

Esta nova sequência é claramente $\subseteq$-decrescente. Vamos ver que ela de fato satisfaz $(iv).1$ e $(iv).2$.

Sejam $n < \omega$ e $A \in \mathcal{A}_n$. O caso $n = 0$ é imediato pois $E'_0 = E_0$. Suponhamos então $n > 0$.

Note que

$$A \setminus E'_n = A \setminus \bigcap_{i \leqslant n} E_i = \bigcup_{i \leqslant n} A \setminus E_i.$$

Por (iii).1, $A \setminus E_n$ é finito, para todo $n < \omega$. Como união finita de finitos é finita, temos que $A \setminus E'_n$ é finito também, logo vale (iv).1.

Veja também que

$$A \cap E'_n = A \cap \bigcap_{i \leqslant n} E_i \subseteq A \cap E_i,$$

para todo $i \leqslant n$. Por (iii).2, $A \cap E_n$ é finito para algum $m < \omega$ e assim, $A \cap E'_m$ é finito e vale (iv).2.

$(iv) \implies (v)$: Seja $g : \mathcal{A} \longrightarrow \omega$ uma função qualquer. Considerando a partição $\{\mathcal{A}_n : n < \omega\}$ dada por $\mathcal{A}_n = g^{-1}[\{n\}]$, podemos aplicar o item (iv) e assim obtemos uma sequência $\langle E_n : n < \omega \rangle$ $\subseteq$-decrescente de subconjuntos de ω.

Seja A um elemento de $\mathcal{A}$. Aplicando (iv).1 para $n = g(A)$ temos que $A \setminus E_{g(A)}$ é finito e portanto vale (v).1.

Por (iv).2, existe $n < \omega$ tal que $A \cap E_n$ é finito. Fixe então, para cada $A \in \mathcal{A}$, um $n = n_A$. Tome, por exemplo, $n_A = \min\{n < \omega : A \cap E_n \text{ é finito}\}$. Definimos a função $f : \mathcal{A} \longrightarrow \omega$ pondo $f(A) = n_A$. A função f claramente satisfaz (v).2.

$(v) \implies (iii)$: Dada uma partição $\{\mathcal{A}_n : n < \omega\}$ de $\mathcal{A}$ arbitrária, definimos uma função $g : \mathcal{A} \longrightarrow \omega$ pondo $g(A) = n < \omega$ tal que $A \in \mathcal{A}_n$. Como $\{\mathcal{A}_n : n < \omega\}$ é partição, a função está bem definida.

Aplicando o item (v), obtemos uma sequência $\subseteq$-decrescente $\langle E_n : n < \omega \rangle$ de subconjuntos de ω e uma função $f : \mathcal{A} \longrightarrow \omega$ satisfazendo (v).1 e (v).2.

Dado $A \in \mathcal{A}$, tome $n = f(A)$ e, por (v).2 obtemos a validade de (iii).2.

Sejam $n > 0$, $m \geqslant n$ e $A \in \mathcal{A}_m$. Então $m = g(A)$ e, por (v).1, $A \setminus E_m$ é finito.

Como a sequência $\langle E_n : n < \omega \rangle$ é $\subseteq$-decrescente e $m \geqslant n$, temos que $A \setminus E_n$ é finito, logo vale (iii).1. ■

Capítulo 4

Famílias dominantes e Topologia

Nosso principal objetivo neste capítulo é estudar relações entre a existência de certos espaços topológicos com a existência de famílias dominantes em pré-ordens cujo suporte é o conjunto das funções de ω_1 em ω.

A existência de tais famílias (junto com algumas outras hipóteses, como vimos no final da subseção 1.3.2) implica na existência de grandes cardinais e portanto, a consistência de tal existência não pode ser demonstrada.

Assim, quando mostramos que a partir de certos espaços topológicos com propriedades especiais conseguimos construir famílias dominantes pequenas, temos como corolário que, (assumindo hipóteses combinatórias, como "$\mathrm{cf}(2^\omega) = 2^\omega < 2^{\omega_1}$") a consistência da existência de tais espaços não pode ser demonstrada.

A partir deste ponto até o final do capítulo 5, assumiremos que todos os espaços topológicos considerados satisfazem o axioma de separação T_1.

4.1 Espaços enumeravelmente paracompactos separáveis

Veremos nesta seção um importante exemplo de aplicação de combinatória infinitária na obtenção de resultados num contexto consistência e independência em topologia geral. Assumindo hipóteses topológicas bastante razoáveis podemos construir uma estrutura combinatória cuja existência está relacionada com a existência de grandes cardinais, como mencionamos no início deste capítulo.

Teorema 4.1 ([W85]). *A existência de um espaço enumeravelmente paracompacto separável com um fechado e discreto não enumerável implica a existência de uma família* *dominante pequena em* $\langle {}^{\omega_1}\omega, \leqslant \rangle$.

Demonstração: Seja X enumeravelmente paracompacto com H fechado e discreto não enumerável e D denso enumerável.

Note que, como todo subconjunto de um discreto e fechado é também discreto e fechado, podemos supor H e D disjuntos. $H \setminus D$ é fechado e discreto não enumerável, podemos trabalhar com $G = H \setminus D$ ao invés de H.

Podemos supor também que $|H| = \omega_1$. Note ainda que, como se trata da construção de um objeto combinatório, podemos supor $H = \omega_1 \setminus \omega$ e $D = \omega$.

Veja ainda que, como $(2^\omega)^\omega = 2^\omega$, as sequencias localmente finitas de subconjuntos de ω podem ser enumeradas por um $\kappa \leqslant \mathfrak{c}$, $\{P_\alpha : \alpha < \kappa\}$, onde $P_\alpha = \langle P_{\alpha,n} : n < \omega \rangle$.

Seja $\mathscr{F} = \{f_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq {}^{\omega_1 \setminus \omega}\omega$.

$$f_\alpha(\beta) = \begin{cases} \max\{n : \beta \in \overline{P_{\alpha,n}}\} & \text{se } \{n : \beta \in \overline{P_{\alpha,n}}\} \neq \emptyset; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pela finitude local dos P_α's, $\mathcal{F}$ está bem definida

Afirmação: $\mathcal{F}$ é dominante em $\langle {}^{\omega_1 \setminus \omega}\omega, \leqslant \rangle$

Seja $g : \omega_1 \setminus \omega \longrightarrow \omega$ uma função qualquer e considere $\{g^{-1}(n) : n < \omega\}$ a partição de $\omega_1 \setminus \omega$ induzida por g.

Defina uma cobertura aberta enumerável $\mathcal{U} = \{X \setminus ((\omega_1 \setminus \omega) \setminus g^{-1}(n)) : n < \omega\}$

Como X é enumeravelmente paracompacto, existe $\mathcal{V}$ refinamento aberto localmente finito.

Para cada $n < \omega$, defina $W_n = St(g^{-1}(n), \mathcal{V})$ e considere a família $\mathcal{W} = \{W_n : n < \omega\}$.

Afirmação: $\mathcal{W}$ é localmente finita (a prova é análoga à da afirmação feita na demonstração do teorema 2.5)

Para cada $n < \omega$ defina $S_n = W_n \cap \omega$.

Como $\mathcal{W}$ é localmente finita, $\mathcal{S} = \{S_n : n < \omega\}$ é sequência localmente finita de subconjuntos do denso ω. Logo existe $\xi < \kappa$ tal que $\mathcal{S} = P_\xi$.

Afirmo que $g \leqslant f_\xi$. De fato, fixe $\beta \in \omega_1 \setminus \omega$ e seja $m = g(\beta)$.

$$\begin{aligned} \beta \in g^{-1}(m) &\subseteq W_m \\ &\subseteq \overline{W_m} \\ &= \overline{W_m \cap \omega} \\ &= \overline{S_m} \\ &= \overline{P_{\xi,m}} \end{aligned}$$

Assim, $m \in \{n < \omega : \beta \in \overline{P_{\xi,n}}\}$, logo

$$g(\beta) = m \leqslant \max\{n < \omega : \beta \in \overline{P_{\xi,n}}\} = f_\xi(\beta)$$

Portanto, para todo $\beta \in \omega_1 \setminus \omega$, temos $g(\beta) \leqslant f_\xi(\beta)$, logo $g \leqslant f_\xi$.

Logo a família $\mathcal{F}$ é dominante em $\langle {}^{\omega_1}\omega, \leqslant\rangle$ e tem tamanho menor ou igual a $\mathfrak{c}$, conforme desejávamos. ∎

Observação 4.2. Conforme pode-se ver no artigo [W85], na verdade vale a recíproca do teorema anterior, i.e., existe uma equivalência entre a existência desses dois objetos, um de natureza topológica e outro de natureza puramente combinatória

No presente trabalho, optamos por demonstrar apenas a implicação que nos será mais necessária, tanto para aplicações do resultado em si como também da técnica que foi utilizada pelo autor do teorema para obter o resultado. □

Em seguida, temos um corolário do teorema demonstrado acima. Basta aplicar o resultado de Jech e Prikry que foi mencionado no fim da seção 1.3.2.

Corolário 4.3. *Argumentando apenas em ZFC, não podemos demonstrar a existência de um espaço enumeravelmente paracompacto separável com um fechado e discreto não enumerável.* ∎

Observando a demonstração do teorema de Watson (4.1), pode-se concluir, fazendo pequenas adaptações, o seguinte teorema:

Teorema 4.4. *Se κ é não enumerável e X é um espaço enumeravelmente paracompacto separável com um fechado e discreto de tamanho κ, então existe uma família dominante de tamanho 2^ω em $\langle {}^{\kappa}\omega, \leqslant\rangle$.* ∎

Aplicando este teorema, para $\kappa = 2^\omega$, obtemos que a existência de um espaço enumeravelmente paracompacto separável com um fechado e discreto de tamanho (c) implica na existência de família dominantes de tamanho $\mathfrak{c}$ em $\langle {}^{\mathfrak{c}}\omega, \leqslant\rangle$, o que não é possível, conforme vimos no lema 1.48.

Desta forma, obtemos uma demonstração alternativa para o teorema de Fleissner (2.5), que foi demonstrado na seção 1 do capítulo 2.

4.2 (a)-espaços localmente compactos separáveis

O teorema principal desta seção é uma extensão de um resultado para Ψ-espaços que apareceu no artigo [S05].

Teorema 4.5 ([S05]). *Se existe uma família a.d. de tamanho ω_1 tal que o espaço correspondente $\Psi(\mathcal{A})$ satisfaz a propriedade (a), então existe uma família dominante pequena.*

Omitiremos a demonstração do teorema acima pois ele segue diretamente do resultado seguinte, que é o análogo do teorema feito na seção anterior para espaços enumeravelmente paracompactos, para (a)-espaços localmente compactos separáveis.

Teorema 4.6 ([S05]). *A existência de um (a)-espaço localmente compacto separável que possui um fechado e discreto não enumerável implica a existência de famílias dominantes pequenas.*

Demonstração: Seja X um espaço topológico conforme o enunciado do teorema e sejam $D \subseteq X$ denso enumerável e $H \subseteq X$ fechado e discreto não enumerável. Como $|H| > |D|$, podemos supor s.p.g. que $H = \omega_1 \setminus \omega$ e $D = \omega$.

Seja $\mathcal{C} = \{C_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$ uma enumeração do conjunto de todos os subconjuntos de D que são fechados e discretos em X.

Para cada $\beta \in \omega_1 \setminus \omega$, fixe uma vizinhança aberta U_β de β tal que:

(1) $U_\beta \cap (\omega_1 \setminus \omega) = \beta$;

(2) U_β está contido em algum compacto K_β de X.

Defina agora, para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, uma função $f_\alpha : (\omega_1 \setminus \omega) \longrightarrow \omega$ pondo:

$$f_\alpha(\beta) = \begin{cases} \max(U_\beta \cap C_\alpha) & \text{se } U_\beta \cap C_\alpha \neq \emptyset; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que, como cada C_α é fechado e discreto, $K_\beta \cap C_\alpha$ é fechado e discreto contido num compacto, logo $K_\beta \cap C_\alpha$ é finito e podemos tomar seu máximo.

Seja $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Afirmamos que $\mathcal{F}$ é família dominante (de tamanho $\leqslant \mathfrak{c}$) em $\langle {}^{(\omega_1 \setminus \omega)}\omega; \leqslant \rangle$.

Considere uma função $g : (\omega_1 \setminus \omega) \longrightarrow \omega$ arbitrária e seja $\mathcal{U}$ a cobertura aberta de X dada da seguinte maneira:

$$\mathcal{U} = \{X \setminus (\omega_1 \setminus \omega)\} \cup \{U_\beta \setminus (g(\beta) + 1) : \beta \in (\omega_1 \setminus \omega)\}$$

Observe que, por (1), para cada $\beta \in (\omega_1 \setminus \omega)$, o aberto $U_\beta \setminus (g(\beta)+1)$ é o único elemento de $\mathcal{U}$ que contém β. Como X é (a)-espaço, existe um fechado e discreto $F \subseteq D$ tal que $St(F,\mathcal{U}) = X$. Mas lembre-se que $F \in \mathcal{C}$, logo existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $F = C_\alpha$.

Veremos agora que a função f_α domina a função g. De fato, para todo $\beta \in (\omega_1 \setminus \omega)$ temos

$$(U_\beta \setminus (g(\beta)+1)) \cap C_\alpha \neq \emptyset$$

logo $f_\alpha(\beta) \geqslant g(\beta)$, como queríamos. ■

A versão original presente no artigo [S05] é um pouco mais forte, porém, para enunciá-la precisaríamos introduzir a função cardinal $\mathrm{ddc}_1(\mathrm{X})$, o que é desnecessário para os fins deste trabalho. A prova é essencialmente a mesma, a menos de alguns pequenos detalhes que o leitor que consegue compreender bem a demonstração aqui exposta certamente não terá dificuldades para compreendê-los.

Segue imediatamente do último teorema o seguinte resultado:

Corolário 4.7. *Assuma que vale a afirmação "Não existe família dominante pequena". Nestas condições, (a)-espaços localmente compactos e separáveis tem extent enumerável.*

Combinando o teorema anterior com o resultado de Jech e Prikry comentado no final da seção 1.3.2 obtemos o seguinte:

Corolário 4.8. *Assuma que valem as afirmações "*$\mathrm{cf}(2^\omega) = 2^\omega < 2^{\omega_1}$*" e "Não existem modelos internos com cardinais mensuráveis". Nestas condições, (a)-espaços localmente compactos e separáveis têm extent enumerável.*

Capítulo 5

Princípios Diamante Parametrizados e Topologia

Lembre-se que ao longo deste capítulo estamos assumindo que todos os espaços topológicos satisfazem o axioma de separação T_1.

5.1 Aplicações em Ψ-espaços

Ao longo deste capítulo, iremos cometer um pequeno abuso de linguagem. Dada uma propriedade topológica $\mathcal{P}$, diremos que "$\mathcal{A}$ satisfaz $\mathcal{P}$" como sinônimo de "$\Psi(\mathcal{A})$ satisfaz $\mathcal{P}$".

Vamos definir agora alguns invariantes cardinais relacionados a famílias $a.d$ e seus Ψ-espaços associados. Desta forma, informações topológicas serão traduzidas em desigualdades entre cardinais.

Os primeiros dois invariantes cardinais com os quais trabalharemos são definidos em termos da propriedade (a).

Definição 5.1.

$$\mathfrak{nsa} = \min\{|\mathcal{A}| : \Psi(\mathcal{A}) \text{ não é } (a)\}$$
$$\mathfrak{vsa} = \min\{\kappa \in Card : \forall \mathcal{A}(|\mathcal{A}| = \kappa \longrightarrow \neg(a)_{\mathcal{A}})\}$$

□

Os próximos dois invariantes cardinais estão relacionados com a compacidade enumerável em Ψ-espaços

Definição 5.2.

$$\mathfrak{ncp} = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \text{ não é enumeravelmente paracompacta}\}$$

$$\mathfrak{vcp} = \min\{\kappa \in Card : \text{nenhuma família } a.d. \text{ de tamanho } \kappa \text{ é enumeravelmente paracompacta}\}$$

□

Fato 5.3.

(i) $\omega_1 \leqslant \mathfrak{nsa} \leqslant \mathfrak{vsa} \leqslant 2^\omega$

(ii) $\omega_1 \leqslant \mathfrak{ncp} \leqslant \mathfrak{vcp} \leqslant 2^\omega$

Demonstração: Se uma família *a.d.* $\mathcal{A}$ é enumerável, então o espaço $\Psi(\mathcal{A})$ possui base enumerável. Como vimos na subseção 1.3.1, o espaço $\Psi(\mathcal{A})$ sempre é completamente regular, em particular, regular. Podemos então, aplicando o bem conhecido Teorema de Metrização de Urisohn (teorema 23.1 de [W70]), concluir de $\Psi(\mathcal{A})$ é metrizável, logo normal e paracompacto.

Pode-se mostrar também que todo espaço paracompacto é (a)-espaço. Desta forma, concluímos que os invariantes $\mathfrak{nsa}$, $\mathfrak{vsa}$, $\mathfrak{nsp}$ e $\mathfrak{vcp}$ são todo não enumeráveis.

As demais desigualdades são triviais. ■

Antes de enunciar os teoremas principais desta seção, faremos dois lemas que estabelecem duas equivalências do princípio $\Phi(\omega, <)$, que se mostrarão mais adequadas na demonstração dos teoremas principais. Provaremos equivalências entre o objeto $(\omega, \omega, <)$ da categoria $\mathcal{PV}$ e dois outros objetos desta categoria, e aplicando o fato 1.54, obteremos a equivalência entre os princípios diamante parametrizados que tomam tais objetos como parâmetro.

Lema 5.4. $(\omega, \omega, <) \sim ([\omega]^{<\omega}, [\omega]^{<\omega}, \subsetneq)$

Demonstração: Seja $\varphi : \omega \longrightarrow [\omega]^{<\omega}$, dada por $\varphi(n) = \{0, ..., n\}$ e seja $\psi : [\omega]^{<\omega} \longrightarrow \omega$ dada por $\psi(a) = \max(a)$.

Vamos mostrar que (φ, ψ) é morfismo de $(\omega, \omega, <)$ em $([\omega]^{<\omega}, [\omega]^{<\omega}, \subsetneq)$ e que (ψ, φ) é morfismo de $([\omega]^{<\omega}, [\omega]^{<\omega}, \subsetneq)$ em $(\omega, \omega, <)$.

De fato, dados $n \in \omega$ e $a \in [\omega]^{<\omega}$, se $\varphi(n) = \{0, ..., n\} \subsetneq a$, existe $m \in a$ tal que $m > n$, logo $\psi(a) = \max(a) > n$.

Reciprocamente, se $\psi(a) < n$, i.e., se $\max(a) < n$, então $a \subseteq \{0, ..., n-1\}$, logo $a \subseteq \{0, ..., n\} = \varphi(n)$. ■

Lema 5.5. *Seja $E \subseteq \mathcal{P}(\omega) \times \omega$ a relação dada por $a\, E\, n$ sse $a \in [\omega]^\omega$ ou $a \subseteq n$. Então $(\omega, \omega, <) \sim (\mathcal{P}(\omega), \omega, E)$.*

Demonstração: Para ver que $(\omega, \omega, <) < (\mathcal{P}, \omega, E)$ basta tomarmos o par (φ, ψ), onde $\varphi : \omega \longrightarrow \mathcal{P}(\omega)$, $n \longmapsto n$ e ψ é a identidade em ω

De fato, dados $m, n \in \omega$, se $\varphi n E m$, como $\{n\}$ é finito temos que $\{n\} \subseteq m$, logo $n < m = \psi(m)$.

Para obter a desigualdade contrária vamos usar o par (φ, ψ) com $\varphi : \mathcal{P}(\omega) \longrightarrow \omega$, $\varphi(a) = \max(a)$, se a é finito, e $\varphi(a) = 0$, caso contrário. A função ψ será a identidade em ω novamente.

Sejam $a \in \mathcal{P}(\omega)$ e $n \in \omega$ e suponha $\varphi(a) < n$. Se a é infinito, claramente $a\, E\, n$. Se a é finito, então $\max(a) < n$, e assim $a \subseteq n$ e temos $a\, E\, n$.

■

Neste capítulo estamos interessados em aplicações de princípios diamante parametrizados em topologia, em particular, de aplicações do princípio $\diamondsuit(\omega, <)$.

Não iremos apresentar a demonstração de que a função F do seguinte teorema é Borel, mas daremos exemplo mais adiante de uma verificação desse tipo.

Proposição 5.6 ([MS09])**.** *$\diamondsuit(\omega, <)$ implica que para toda família a.d. $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ existe alguma função $g \in {}^{\omega_1}\omega$ tal que, para todo $P \in [\omega]^\omega$,*

$$\begin{aligned} &\textit{ou } \{\alpha < \omega_1 : P \cap A_\alpha \text{ é infinito}\} \\ &\textit{ou } \{\alpha < \omega_1 : P \cap A_\alpha \subseteq g(\alpha)\} \end{aligned}$$

é estacionário em ω_1.

Demonstração: Seja $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ uma família *a.d.*. Defina $F : {}^{<\omega_1}2 \longrightarrow \mathcal{P}(\omega)$ pondo, para $h \in {}^{<\omega_1}2$, $F(h) = A_{\mathrm{dom}(h)} \cap X_{h\restriction\omega}$, onde $X_{h\restriction\omega} = \{k \in \omega : h(k) = 1\}$.

Combinando o fato 1.54 e o lema 5.5 temos que os princípios $\diamondsuit(\omega, <)$ e $\diamondsuit(\mathcal{P}, \omega, E)$ são equivalentes, logo podemos aplicar o princípio $\diamondsuit(\mathcal{P}(\omega), \omega, E)$ à função F e assim, obtemos uma função oráculo $g : \omega_1 \longrightarrow \omega$ para F.

Seja $P \in [\omega]^\omega$. Se $\{\alpha < \omega_1 : P \cap A_\alpha \text{ é infinito }\}$ não é estacionário em ω_1 então seu complementar, $\{\alpha < \omega_1 : |P \cap A_\alpha| < \omega\}$ contém um *club*, digamos C. Neste caso, tomando uma função $f : \omega_1 \longrightarrow 2$ tal que $X_{f\restriction\omega} = P$ temos que o conjunto

$$\begin{aligned} S &= \{\alpha < \omega_1 : F(f \restriction \alpha)\, E\, g(\alpha)\} \\ &= \{\alpha < \omega_1 : A_\alpha \cap P \text{ é infinito ou } A_\alpha \cap P \subseteq g(\alpha)\} \end{aligned}$$

é estacionário em ω_1.

Como C é *club* e S é estacionário, $C \cap S$ é estacionário, logo o conjunto $\{\alpha < \omega_1 : A_\alpha \cap P \subseteq g(\alpha)\} \supseteq C \cap S$ é estacionário em ω_1. ■

Como consequência deste teorema temos o seguinte:

Corolário 5.7 ([MS09]). *$\diamondsuit(\omega, <)$ implica $\mathfrak{vsa} = \omega_1$*

Demonstração: Bastava mostrarmos apenas que o princípio $\diamondsuit(\omega, <)$ implica que um dos dois conjuntos, $\{\alpha < \omega_1 : P \cap A_\alpha \text{ é infinito}\}$ ou $\{\alpha < \omega_1 : P \cap A_\alpha \subseteq g(\alpha)\}$ é não vazio, porém foi mostrado no teorema anterior que, sob $\diamondsuit(\omega, <)$, um (e apenas um) destes conjuntos deve ser estacionário ("temos um conjunto médio de contra-exemplos").

Logo, o princípio $\diamondsuit(\omega, <)$ implica que nenhuma família *a.d* de tamanho ω_1 satisfaz a propriedade (a) ou, na linguagem dos invariantes cardinais que foram definidos nesta seção, $\mathfrak{vsa} = \omega_1$. ■

A proposição seguinte estabelece o resultado análogo ao do corolário anterior para o invariante cardinal $\mathfrak{vcp}$.

Proposição 5.8 ([MS09]). *$\diamondsuit(\omega, <)$ implica $\mathfrak{vcp} = \omega_1$*

Demonstração: Seja $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ família *a.d.* tal que o espaço associado $\Psi(\mathcal{A})$ é enumeravelmente paracompacto e seja $\{E_f : f \in {}^\omega 2\}$ uma enumeração do conjunto de todas as sequências de subconjuntos de ω.

Considere a coloração $F : {}^{<\omega_1}2 \longrightarrow \omega$ da árvore binária ${}^{<\omega_1}2$ dada por

$$F(h) = \begin{cases} \max X_h & \text{se } \operatorname{dom}(h) \geqslant \omega \text{ e } X_h \neq \emptyset \text{ e limitado;} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde $X_h = \{n < \omega : A_{\operatorname{dom}(h)} \setminus E_{h \restriction \omega, n} \text{ é finito}\}$.

Aplicando o princípio $\diamondsuit(\omega, <)$ obtemos uma função oráculo $g : \omega_1 \longrightarrow \omega$.

Identificando, por combinatória, a família *a.d.* $\mathcal{A}$ com o seu conjunto de índices, ω_1, podemos aplicar o item (v) da proposição 3.8 para a função oráculo g. Então existe uma sequência $\subseteq$-decrescente $E = \langle E_n : n < \omega \rangle$ de subconjuntos de ω e uma função $f : \omega_1 \longrightarrow \omega$ satisfazendo as condições $(v).1$ e $(v).2$ de 3.8

Seja $s \in {}^\omega 2$ tal que $E = E_s$ e seja $t \in {}^{\omega_1}\omega$ uma função qualquer tal que $t \restriction \omega = s$.

Por $\diamondsuit(\omega, <)$, o conjunto

$$S = \{\omega \leqslant \alpha < \omega_1 : F(t \restriction \alpha) < g(\alpha)\}$$

é estacionário.

Por (v).2, existe $n = f(A)$ tal que o conjunto $A_\alpha \cap E_{s,n}$ é finito e assim, como A_α é infinito temos que $A_\alpha \setminus E_{s,n}$ é infinito. Mas lembre que a sequência $E_s = \langle E_{s,n} : n < \omega \rangle$ é $\subseteq$-decrescente, logo, para todo $m \geqslant n$, $A_\alpha \setminus E_{s,m}$ é infinito. Assim, o conjunto $\{n < \omega : A_\alpha \setminus E_{s,n}$ é finito$\}$ é finito.

Pela definição da coloração F,

$$F(t \upharpoonright \alpha) = \max\{n < \omega : A_\alpha \setminus E_{s,n} \text{ é finito}\}$$

Note que, por (v).1, $A_\alpha \setminus E_{g(\alpha)}$ é finito e assim, $g(\alpha) \in \{n < \omega : A_\alpha \setminus E_{s,n}$ é finito$\}$ para todo $\alpha < \omega_1$.

Mas, para $\alpha \in S$, por $\diamondsuit(\omega, <)$, $g(\alpha) > \max\{n < \omega : A_\alpha \setminus E_{s,n}$ é finito$\}$, contradição pois $g(\alpha) \in \{n < \omega : A_\alpha \setminus E_{s,n}$ é finito$\}$. ■

Até agora, discutimos apenas a paracompacidade enumerável e a propriedade (a) em Ψ-espaços.

Em ZFC, existem Ψ-espaços de tamanho ω_1 que não são normais, por isso não vale a pena definir o análogo dos invariantes cardinais $\mathfrak{nsa}$ e $\mathfrak{ncp}$ para a normalidade. Porém, como consequência do Lema de Jones, sabemos que espaços normais separáveis não podem conter subconjuntos fechados e discretos de tamanho $\mathfrak{c}$, logo faz sentido definir para a normalidade um invariante cardinal do tipo “never”.

Definição 5.9. O invariante cardinal $\mathfrak{vn}$ e definido da seguinte maneira:

$$\mathfrak{vn} = \min\{\kappa \in \text{Card} : \text{não existe família a.d. } \mathcal{A} \text{ de tamanho } \kappa \text{ que seja normal}\}$$

□

No artigo [S07b] pode ser encontrada uma demonstração de que Ψ-espaços normais são enumeravelmente paracompactos. Temos então, como corolário deste fato, a seguinte proposição:

Proposição 5.10. $\mathfrak{vn} \leqslant \mathfrak{vcp}$

Demonstração: Seja $\mathcal{A}$ uma família de tamanho $\mathfrak{vcp}$. Então, pela definição do invariante cardinal $\mathfrak{vcp}$, que $\mathcal{A}$ não é enumeravelmente paracompacto. Pela recíproca da proposição anterior, $\mathcal{A}$ não é normal.

Assim, como $\mathcal{A}$ foi tomado arbitrário, toda família *a.d.* de tamanho $\mathfrak{vcp}$ é não normal e portanto, $\mathfrak{vcp} \in \{\kappa \in \text{Card} : |\mathcal{A}| = \kappa \longrightarrow \mathcal{A} \text{ não é normal}\}$.

Como $\mathfrak{vn}$ é o mínimo deste conjunto, segue então que $\mathfrak{vn} \leqslant \mathfrak{vcp}$. ■

Combinando a proposição 5.8 com a proposição anterior, obtemos o seguinte resultado: $\Phi(\omega, <)$ implica $\mathfrak{vn} = \omega_1$.

Porém, podemos enunciar algo mais forte. Temos, como consequência do Lema de Jones (ou, mais precisamente do corolário 2.1) o seguinte resultado:

Proposição 5.11. $2^\omega < 2^{\omega_1}$ *implica* $\mathfrak{vn} = \omega_1$.

Tendo em mente alguns resultados para espaços normais que também são válidos para espaços enumeravelmente paracompactos, surge então a seguinte questão:

Questão 5.12 ([MS09])**.** *O diamante fraco sozinho implica* $\mathfrak{vcp} = \omega_1$*?*

Vimos acima a limitação do invariante cardinal $\mathfrak{vn}$ pelo invariante $\mathfrak{vcp}$. Seria interessante saber se existe uma desigualdade semelhante envolvendo o invariante cardinal $\mathfrak{vsa}$ o sob quais hipóteses poderíamos obter tal desigualdade.

A proposição seguinte, cuja demonstração encontra-se em [SV98], nos fornece a desigualdade desejada assumindo uma hipótese bastante interessante.

Proposição 5.13. *Seja* $\mathcal{A}$ *uma família a.d. de tamanho menor que* $\mathfrak{d}$*. Se* $\mathcal{A}$ *é normal então* $\mathcal{A}$ *é* (a)*.*

Segue da proposição acima o seguinte resultado:

Corolário 5.14. $\mathfrak{vn} \leqslant \mathfrak{d}$ *implica* $\mathfrak{vn} \leqslant \mathfrak{vsa}$*.*

Demonstração: Assuma que vale a desigualdade $\mathfrak{vn} \leqslant \mathfrak{d}$ e suponha que $\mathfrak{vn} > \mathfrak{vsa}$. Assim, se $\kappa = \mathfrak{vsa}$ temos $\kappa < \mathfrak{vn} \leqslant \mathfrak{d}$

Seja $\mathcal{A}$ uma família *a.d.* de tamanho κ. Pela proposição anterior, $\mathcal{A}$ não pode ser normal, caso contrário, como $|\mathcal{A}| = \kappa < \mathfrak{d}$, $\mathcal{A}$ seria (a), porém, pela definição de $\mathfrak{vsa}$, $\mathcal{A}$ não é (a)

Logo, como $\mathcal{A}$ é uma família *a.d.* arbitrária de tamanho κ, o cardinal κ satisfaz "$|\mathcal{A}| = \kappa \longrightarrow \mathcal{A}$ não é normal" e assim, $\kappa \geqslant \mathfrak{vn}$, o que é uma contradição pois supomos $\mathfrak{vn} > \mathfrak{vsa}$.

Portanto vale o resultado enunciado. ■

5.2 Aplicações em espaços topológicos gerais

Como vimos na seção 2.1., para espaços normais separáveis, o diamante fraco é suficiente para obter extent enumerável, porém, para espaços enumeravelmente paracompactos e (a)-espaços saber se o diamante fraco implica extent enumerável ainda é um problema em aberto.

Vamos agora mostrar algumas aplicações do princípios $\Phi(\omega, <)$ e $\diamondsuit(\omega, <)$ na restrição do extent de (a)-espaços e espaços enumeravelmente paracompactos.

O seguinte teorema é uma generalização do teorema 5.8, que fizemos para Ψ-espaços.

Lembre que, como $\mathcal{A}$ é fechado e discreto em $\Psi(\mathcal{A})$ e seu complementar é enumerável, $e(\Psi(\mathcal{A})) = |\mathcal{A}|$. Aplicando o teorema seguinte a um Ψ-espaço $\Psi(\mathcal{A})$ arbitrário, obtemos que o princípio $\diamondsuit(\omega, <)$ implica que $\mathcal{A}$ é enumerável e portanto, que $\mathfrak{vcp} = \omega_1$

Teorema 5.15. *O princípio $\diamondsuit(\omega, <)$ implica que não existe (a)-espaço separável, localmente enumeravelmente compacto com extent não enumerável.*

Demonstração: Seja X espaço T_1 separável, localmente enumeravelmente compacto. Vamos mostrar que, se $e(X) > \omega$, então X não é (a)-espaço.

Podemos supor, s.p.g, ω denso em X e $\omega_1 \setminus \omega$ fechado e discreto em X.

Para cada $\beta \in \omega_1 \setminus \omega$, seja O_β uma vizinhança aberta de β tal que $O_\beta \cap (\omega_1 \setminus \omega) = \{\beta\}$.

Como X é localmente enumeravelmente compacto, podemos tomar, para cada $\beta \in \omega_1 \setminus \omega$, vizinhanças enumeravelmente compactas K_β e fixar um aberto $U_\beta \subseteq K_\beta$, s.p.g. $U_\beta \subseteq O_\beta$.

Seja, para cada $\beta \in \omega_1 \setminus \omega$, $A_\beta = U_\beta \cap \omega$ e defina, para $\omega \leqslant \alpha < \omega_1$ e $h \in {}^{\alpha}2$, $X \restriction \omega = \{i < \omega : h(i) = 1\}$.

Considere a coloração da árvore binária $F : {}^{<\omega_1}2 \longrightarrow \omega$ dada por

$$F(h) = \begin{cases} \max(A_{\mathrm{dom}(h)} \cap X_{h\restriction\omega}) + 1 & \text{se } A_{\mathrm{dom}(h)} \cap X_{h\restriction\omega} \text{ é finito e não vazio,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Afirmação. *A função F é Borel.*

Para mostrar que a função F é Borel temos que mostrar que, para cada $\alpha < \omega_1$ fixado, a função $F \restriction {}^{\alpha}2$ é Borel.

Seja $\alpha < \omega_1$ fixado. Como ω é um espaço T_1 enumerável, todos os unitários são fechados, e portanto são Borel, assim, qualquer subconjunto de ω é Borel, pois é união enumerável dos unitários de seus elementos. Desta forma, para esta verificação (e de todas as outras funções presentes neste trabalho) é suficiente mostrar que imagem inversa de unitário é Borel.

Fixemos $\alpha < \omega_1$ e um $k > 0$.

Se $(F \restriction {}^{\alpha}2)^{-1}[\{k\}] = \emptyset$, então é um conjunto Borel. Se $(F \restriction {}^{\alpha}2)^{-1}[\{k\}] \neq \emptyset$, note que, para $h \in {}^{\alpha}2$, $F(h) = k$ se, e somente se, $k - 1 \in X_{h\restriction\omega}$ e, para todo $i \geqslant k$, temos

$i \notin X_{h\restriction\omega}$, logo

$$(F \restriction {}^{\alpha}2)^{-1}[\{k\}] = \{h \in {}^{\alpha}2 : h(k-1) = 1\} \cap \bigcap_{i \in A_\alpha \setminus k} \{h \in {}^{\alpha}2 : h(i) = 0\}$$

O conjunto $\{h \in {}^{\alpha}2 : h(k-1) = 1\}$ é um aberto básico da topologia de ${}^{\alpha}2$ (que é a topologia produto), logo é um conjunto Borel. Já o conjunto $\bigcap_{i \in A_\alpha \setminus k}\{h \in {}^{\alpha}2 : h(i) = 0\}$ é um G_δ, i.e., é uma união enumerável de aberto pois, para cada $i \in A_\alpha \setminus k$, o conjunto $\{h \in {}^{\alpha}2 : h(i) = 0\}$ é um aberto na topologia produto e assim, $\bigcap_{i \in A_\alpha \setminus k}\{h \in {}^{\alpha}2 : h(i) = 0\}$ também é Borel. Logo $(F \restriction {}^{\alpha}2)^{-1}[\{k\}]$ é Borel.

Portanto, a função F é Borel.

Aplicando o princípio $\diamondsuit(\omega, <)$ obtemos uma função $g : \omega_1 \longrightarrow \omega$ oráculo para a função F dada por $\diamondsuit(\omega, <)$.

Seja $\mathcal{U} = \{X \setminus (\omega_1 \setminus \omega\} \cup \{U^*_\beta : \beta \in \omega_1 \setminus \omega\}$, onde $U^*_\beta = U_\beta \setminus g(\beta)$, para cada $\beta \in \omega_1 \setminus \omega$. Note que, como $\beta \notin g(\beta)$, temos que $\mathcal{U}$ é cobertura aberta de X.

Seja $E \subseteq \omega$ fechado e discreto e seja $f : \omega_1 \longrightarrow 2$ tal que $X_{f\restriction\omega} = E$.

Pelo princípio $\diamondsuit(\omega, <)$, o conjunto $S = \{\alpha < \omega_1 : F(f \restriction \alpha) < g(\alpha)\}$ é estacionário.

Para cada $x \in E$, fixemos uma vizinhança V_x tal que $V_x \cap E = \{x\}$.

Fixemos $\alpha \in \omega_1 \setminus \omega$. O conjunto $\{U_x : x \in E\} \cup \{X \setminus E\}$ é cobertura aberta de X e portanto, cobre K_α. Como essa família de conjunto que cobre K_α é enumerável e K_α é enumeravelmente compacto, existe $Z \subseteq E$ finito tal que

$$K_\alpha \subseteq (X \setminus E) \cup \bigcup_{x \in Z} V_x.$$

Mas, $U_\alpha \subseteq K_\alpha$, logo

$$U_\alpha \subseteq (X \setminus E) \cup \bigcup_{x \in Z} V_x,$$

e assim,

$$\begin{aligned} U_\alpha \cap E &\subseteq ((X \setminus E) \cap E) \cup (\bigcup_{x \in Z} V_x \cap E) \\ &= \bigcup_{x \in Z} \{x\} \\ &= Z \end{aligned}$$

Logo $U_\alpha \cap E \subseteq Z$ e portanto, $U_\alpha \cap E$ é finito.

Note que, como $E \subseteq \omega$, $U_\alpha \cap E = A_\alpha \cap E = A_\alpha \cap X_{f\restriction\omega}$ e assim, para $\alpha \in S$, $F(f \restriction \alpha) = \max(A_\alpha \cap E) + 1$.

Logo, $\max(A_\alpha \cap E) + 1$

Por $\diamondsuit(\omega, <)$, Pela definição da função F, se $A_\alpha \cap X_{f\restriction\omega}$ é finito,

$$
\begin{aligned}
U_\alpha^* \cap E &= (U_\alpha \setminus g(\alpha) \cap E \\
&= (U_\alpha \cap E) \setminus g(\alpha) \\
&\subseteq (A_\alpha \cap E) \setminus g(\alpha) \\
&= \emptyset
\end{aligned}
$$

Portanto, para todo $\alpha \in S$, $U_\alpha^* \cap E = \emptyset$ e assim, $St(E,\mathcal{U}) \subseteq X \setminus S \neq X$. Como E é arbitrário, a cobertura $\mathcal{U}$ testemunha a falha da propriedade (a) no espaço X. ■

A próxima aplicação que veremos é para espaços enumeravelmente paracompactos separáveis.

Teorema 5.16. *O princípio $\Phi(\omega, <)$ implica que não existe espaço separável, enumeravelmente paracompacto com extent não enumerável.*

Demonstração: Seja X espaço separável com extent não enumerável. Sejam $D \subseteq X$ denso enumerável e $H \subseteq X$ fechado e discreto não enumerável. Podemos supor, s.p.g., que H e D são disjuntos e, por combinatória, que $H = \omega_1 \setminus \omega$ e $D = \omega$.

Fixe uma bijeção de modo que exista uma maneira canônica de associar um elemento de ${}^{\omega}\mathcal{P}(\omega)$ a uma função em ${}^{\omega}2$, i.e., seja $\{G_r : r \in {}^{\omega}2\}$ a família de todas as sequências de subconjuntos de ω, $G_r = \langle G_{r,n} : n < \omega \rangle$.

Seja $F : {}^{<\omega_1}2 \longrightarrow \omega$ dada por:

$$
F(h) = \begin{cases} \sup(\{n : \mathrm{dom}(h) \in \overline{G_{h\restriction\omega,n}}\}) + 1 & \text{se o conjunto é finito;} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}
$$

Aplicando o princípio $\Phi(\omega, <)$ à função F obtemos uma função oráculo $g : \omega_1 \longrightarrow \omega$. Temos então uma partição de ω_1 dada por $\{g^{-1}[\{n\}] : n < \omega\}$.

Considere agora a cobertura aberta enumerável de X dada por

$$
\mathcal{U} = \{(X \setminus (\omega_1 \setminus \omega)) \cup g^{-1}[\{n\}] : n < \omega\}.
$$

Seja $\mathcal{V}$ uma família localmente finita de abertos de X arbitrária que refina $\mathcal{U}$, i.e., para todo $V \in \mathcal{V}$ existe algum $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U$.

Para cada $n < \omega$, defina $S_n = St(g^{-1}[\{n\}], \mathcal{V}) \cap \omega$. Então $\mathcal{S} = \langle S_n | n < \omega \rangle$ é uma sequência localmente finita de subconjuntos de ω.

Seja $f : \omega_1 \longrightarrow 2$ uma função qualquer tal que $G_{f\restriction\omega} = \mathcal{S}$. Por $\Phi(\omega, <)$, $A = \{\alpha < \omega_1 : F(f \restriction \alpha) < g(\alpha)\}$ é estacionário. Note que a finitude local de $\mathcal{S}$ garante que

$\{n < \omega : \alpha \in \overline{S_{f\restriction\omega,n}}\}$ é um conjunto finito para todo $\alpha < \omega_1$.

Afirmação: $A \cap \bigcup \mathcal{V} = \emptyset$

Suponha que não, i.e., que existe $\alpha \in A \cap \bigcup \mathcal{V}$. Então, $\alpha \in St(g^{-1}[\{g(\alpha)\}], \mathcal{V})$ e assim,

$$\begin{aligned}\alpha &\in \overline{St(g^{-1}[\{g(\alpha)\}], \mathcal{V})} \\ &= \overline{St(g^{-1}[\{g(\alpha)\}], \mathcal{V}) \cap \omega} \\ &= \overline{S_{g(\alpha)}} \\ &= \overline{G_{f\restriction\omega,g(\alpha)}}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}g(\alpha) &\leqslant \max\{n < \omega : \alpha \in \overline{G_{f\restriction\omega,n}}\} \\ &< F(f \restriction \alpha) \\ &< g(\alpha)\end{aligned}$$

o que é uma contradição.

Assim, nenhuma família localmente finita de abertos de X arbitrária que refina $\mathcal{U}$ cobre X, i.e., a cobertura enumerável $\mathcal{U}$ não admite refinamento localmente finito e portanto X não pode ser enumeravelmente paracompacto. ■

Combinando o teorema anterior com o a recíproca do teorema 4.1 (lembre que a validade da recíproca foi comentada na observação 4.2), obtemos o seguinte resultado:

Corolário 5.17. *O princípio $\Phi(\omega, <)$ implica que não existem famílias dominantes pequenas em ${}^{\omega_1}\omega$.*

Podemos mostrar algo ainda mais forte generalizando o corolário anterior, para isso precisaremos do seguinte fato:

Como $\prec$ estende $\leqslant^*$, pelo fato 1.45, se mostrarmos que não existem famílias dominantes de tamanho $\mathfrak{c}$ em $\langle {}^{\omega_1}\omega, \prec\rangle$ sob o princípio $\Phi(\omega, <)$ então também não existirão famílias dominantes de tamanho $\mathfrak{c}$ em $\langle {}^{\omega_1}\omega, \leqslant^*\rangle$ sob o mesmo princípio.

Desta forma, o seguinte resultado é um fortalecimento do corolário anterior.

Teorema 5.18. *$\Phi(\omega, <)$ implica a não existência de famílias dominantes de tamanho $\mathfrak{c}$ em $\langle {}^{\omega_1}\omega, \prec\rangle$*

Demonstração: Seja $\mathcal{F} \subseteq {}^{\omega_1}\omega$, com $|\mathcal{F}| = \mathfrak{c}$. Indexamos $\mathcal{F} = \{f_x : x \in {}^{\omega}2\}$.

Considere $F : {}^{<\omega_1}2 \longrightarrow \omega$ a coloração da árvore binária dada por:

$$F(h) = \begin{cases} f_{h\restriction\omega}(\mathrm{dom}(h)), & \text{se } \mathrm{dom}(h) \geqslant \omega; \\ 0, & \text{se } \mathrm{dom}(h) \text{ é finito.} \end{cases}$$

Afirmo que $\mathcal{F}$ não é dominante em $\langle {}^{\omega_1}\omega, \prec\rangle$.

Tomando a função $g : \omega_1 \longrightarrow \omega$ dada pelo princípio $\Phi(\omega, \prec)$, veremos que g não é dominada por nenhuma função em $\mathcal{F}$.

De fato, seja $f_x \in \mathcal{F}$ e seja $f : \omega_1 \longrightarrow 2$ um ramo qualquer satisfazendo $f \restriction \omega = x$.

Por $\Phi(\omega, <)$, o conjunto

$$S = \{\omega \leqslant \alpha < \omega_1 : F(f \restriction \alpha) < g(\alpha)\}$$

é estacionário.

Mas note que

$$F(f \restriction \alpha) = f_{(f\restriction\alpha)\restriction\omega}(\alpha) = f_{(f\restriction\omega)}(\alpha) = f_x(\alpha),$$

logo, se $\alpha \in S$, então $f_x(\alpha) < g(\alpha)$, ou seja, o conjunto

$$S_x = \{\omega \leqslant \alpha < \omega_1 : f_x(\alpha) < g(\alpha)\}$$

contém o conjunto S.

Portanto, para toda função $x \in {}^{\omega}2$, o conjunto S_x é estacionário, logo $g \not\prec f_x$, e assim a família de funções $\mathcal{F}$ não é dominante. $\blacksquare$

Apêndice A

Propriedades topológicas relativas

O conceito de *propriedade topológica relativa* foi introduzido por Arhangel'skiĭ e Genedi no final dos anos 80. A ideia é obter informações de um conjunto Y contido em um espaço X com relação à topologia do espaço X ao invés de recorrer à topologia de subespaço herdada por Y. Estamos interessados na maneira como Y está "disposto" em relação à topologia de X, ou como Y está "localizado" em X.

A principal vantagem em trabalhar com propriedades relativas como hipótese em teoremas, é restringir algumas hipóteses aos subconjuntos que realmente importam na demonstração, e consequentemente diminuir as exigências para um certo espaço satisfazer as premissas do teorema e desta forma, ampliamos os resultados obtidos a uma maior classe de espaços.

Vamos agora definir as propriedades topológicas relativas que utilizaremos neste apêndice para mostrar como funcionam tais propriedades e depois enunciar o teorema que demonstraremos como ilustração do uso de propriedades relativas.

Neste apêndice não estamos fazendo a suposição de que todos os espaços topológicos satisfazem o axioma de separação T_1.

Definição A.1. Sejam X um espaço topológico e $Y \subseteq X$.

(*i*) Y é *compacto em* X se toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X tem uma subfamília finita $\mathcal{V}$ tal que $Y \subseteq \bigcup \mathcal{V}$.

(*ii*) Y é *localmente compacto em* X se todo ponto $y \in Y$ tem uma vizinhança V_y que é compacta em X.

(*iii*) Y é *(enumeravelmente) paracompacto em* X se para toda cobertura (enumerável) $\mathcal{U}$ de X existe uma família $\mathcal{V}$ de abertos de X tal que $\mathcal{V}$ é localmente finita em cada ponto de Y, $\mathcal{V}$ refina $\mathcal{U}$ e $Y \subseteq \bigcup \mathcal{V}$.

(*iv*) Y tem a *propriedade* (a) *em* X (ou *é relativamente* (a) *em* X) se para toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X e todo subconjunto denso $D \subseteq X$, existe $C \subseteq D$ tal que C é um fechado e discreto de X e $Y \subseteq St(C,\mathcal{U})$. □

O próximo exemplo nos mostra o quanto uma versão relativa de uma propriedade pode diferir de sua versão original

Exemplo A.2 (Todo subconjunto de um compacto é relativamente compacto)**.** Seja X um espaço topológico, suponha que temos uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ arbitrária de X e que o subconjunto Y está contido em um compacto $K \subseteq X$.

Note que, como $\mathcal{U}$ cobre o subespaço K e K é compacto, existe uma subfamília de abertos $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\mathcal{V}$ cobre K. Mas, como $Y \subseteq K$, a família de abertos $\mathcal{V}$ também cobre Y e portanto, Y é relativamente compacto em X.

No caso particular em que X é um espaço normado de dimensão finita, estar contido num compacto é equivalente a ser um subconjunto limitado. Assim, num espaço normado de dimensão finita, todo subconjunto limitado é relativamente compacto.

Observação A.3. Uma informação muito importante que podemos ver como consequência deste exemplo é que propriedades topológicas relativas não são propriedades topológicas, i.e., não são preservadas por homeomorfismos. Vejamos o exemplo da compacidade relativa.

Considere o espaço $X = [0, 2[$ com a topologia de subespaço da reta e considere dois subconjuntos $Y =]0, 1[$ e $Z =]1, 2[$.

Veja que Y e Z são homeomorfos com a topologia de subespaço de X, porém, Y é compacto em X pois, Y está contido no subespaço compacto $[0, 1]$ de X logo, pelo que vimos no exemplo anterior, Y é compacto em X. Já o subconjunto Z não está contido em nenhum subespaço compacto de X e, mais ainda, é fácil ver que Z não é compacto em X.

Portanto, como vimos, a compacidade relativa não é uma propriedade topológica.

O teorema que provaremos a seguir é um exemplo de resultado de consistência em topologia envolvendo propriedades topológicas relativas nos moldes dos resultados obtidos ao longo deste trabalho.

Antes, precisamos definir um conceito que será importante e em seguida enunciar um lema que usaremos na demonstração do teorema principal deste apêndice.

Definição A.4. Sejam $A, B \subseteq X$. Dizemos que A é *localmente finito em* B se todo ponto $x \in B$ tem uma vizinhança aberta U_x tal que $U_x \cap A$ é finito. Se $A = B$, dizemos que A é *localmente finito em si mesmo*. Se $B = X$, então A é dito ser *localmente finito*. □

Lembre-se que, neste apêndice não estamos assumindo que todos os espaços são T_1. Caso contrário, tal definição seria desnecessária em alguns casos, como veremos na seguinte observação.

Observação A.5. Note que, em espaços T_1,

- A é localmente finito em si mesmo *sse* A é discreto;
- A é localmente finito *sse* A é fechado e discreto.

Lema A.6. *Se $Y \subseteq X$ é compacto em X e $H \subseteq X$ é um subconjunto fechado de X que é localmente finito em si mesmo, então $F = H \cap Y$ é um conjunto finito.*

Demonstração: Seja $\{U_x : x \in H\}$ uma coleção de abertos testemunhando que H é localmente finito em si mesmo e considere a cobertura aberta $\{U_x : x \in H\} \cup \{X \setminus H\}$. Como Y é compacto em X, existem $x_1, ..., x_n \in H$ tais que $Y \subseteq U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_n} \cup X \setminus H$. Portanto $F = H \cap Y \subseteq (U_{x_1} \cap H) \cup ... \cup (U_{x_n} \cap H)$. Como cada U_{x_i} é finito, F está contido numa união finita de finitos, logo é finito.

Podemos agora enunciar e demonstrar o teorema principal deste apêndice.

Teorema A.7. *A existência de um espaço T_1 separável X com um fechado e discreto não enumerável que é relativamente localmente compacto em X e relativamente (a) em X implica a existência de família dominante pequena em $\langle {}^{\omega_1}\omega \rangle$.*

Demonstração: Seja X um espaço separável e que contém um fechado e discreto F não enumerável que é relativamente localmente compacto em X e relativamente (a) em X.

Podemos supor, s.p.g., que ω é denso em X e $F = \omega_1 \setminus \omega$.

Para cada $\beta \in \omega_1 \setminus \omega$, fixe U_β uma vizinhança de β tal que:

(1) $U_\beta \cap (\omega_1 \setminus \omega) = \{\beta\}$,

(2) $U_\beta \subseteq K_\beta$, K_β compacto em X.

Seja $\mathcal{F}_{cd} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ a família de todos os subconjuntos fechados e discretos do denso ω.

Para cada $C \in \mathcal{F}_{cd}$, defina uma função $f_C : \omega_1 \setminus \omega \longrightarrow \omega$ pondo

$$f_C(\beta) = \begin{cases} \max(U_\beta \cap C) & \text{se } U_\beta \cap C \neq \emptyset \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Cada função está bem definida pois, pelo lema A.6, o conjunto $U_\beta \cap C$ é finito (pois é subconjunto de $K_\beta \cap C$), para todo $\beta < \omega_1$.

Podemos então construir a família $\mathcal{F}$ de todas essas funções, i.e., $\mathcal{F} = \{f_C : C \in \mathcal{F}_{cd}\}$. Veja que $|\mathcal{F}| \leqslant \mathfrak{c}$ pois $|\mathcal{F}_{cd}| \leqslant \mathfrak{c}$.

Afirmo que a família $\mathcal{F}$ é dominante. De fato, dada uma função $g : \omega_1 \longrightarrow \omega$ arbitrária, considere a cobertura aberta de X dada da seguinte maneira:

$$\mathcal{U} = \{X \setminus (\omega_1 \setminus \omega)\} \cup \{U_\beta \setminus g(\beta) : \beta \in \omega_1 \setminus \omega\}.$$

Observe que, como X é T_1, cada $U_\beta \setminus g(\beta)$ é aberto, logo $\mathcal{U}$ é de fato cobertura aberta de X.

Note ainda que, por (1), para cada $\beta \in \omega_1 \setminus \omega$, o aberto $U_\beta \setminus g(\beta)$ é o único aberto da cobertura $\mathcal{U}$ que contém o ponto β. Como $\omega_1 \setminus \omega$ tem a propriedade (a) em X, existe um fechado e discreto $C \subseteq \omega$ tal que $\omega_1 \setminus \omega \subseteq St(C, \mathcal{U})$.

Para todo $\beta \in \omega_1 \setminus \omega$ temos $(U_\beta \setminus g(\beta)) \cap C \neq \emptyset$, logo $f_C(\beta) \geqslant g(\beta)$ para todo $\beta \in \omega_1 \setminus \omega$, portanto a função f_C domina a função g.

Como a função g foi tomada arbitrária, a família de funções $\mathcal{F}$ é dominante em $\langle {}^{\omega_1}\omega, \leqslant \rangle$ de tamanho $\mathfrak{c}$. $\blacksquare$

Referências

[B95] Blass, A., Questions and answers – a category arising on linear logic, complexity theory, and set theory, *Advances in Linear Logic (Ithaca, NY, 1993)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **222**, p. 61–81, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[C88] Comfort, W.W., Cofinal families in certain function spaces, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, v. **29**, n. 4, p. 665–675, 1988.

[DS78] Devlin, K.J.; Shelah, S., A weak version of $\diamondsuit$ which follows from $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$, *Israel J. Math.*, v. **29**, n. 2-3, p. 239–247, 1978.

[vD84] van Dowen, E.K., The integers and Topology. In*Handbook of set-theoretic topology*, p. 111–167, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[E89] Engelking, R. *General Topology.* rev. compl. ed. Berlin: Heldermann, 1989. (Sigma Series in Pure Mathematics, **6**)

[F78] Fleissner, W., Separation properties in Moore spaces. *Fund. Math*, v. **98**, n. 3, p. 279–286, 1978.

[Jec03] Jech, T.J. *Set Theory: The Third Millennium Edition, Revised and Expanded.* New York: Springer, 2003. (Springer Monographs in Mathematics)

[JP94] Jech, T.J.; Prikry, K., Cofinality of the partial ordering of functions of ω_1 to ω under eventual domination, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, v. **95**, n. 1, p. 25–32, 1984.

[J37] Jones, F.B. Concerning normal and completely normal spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 43, p. 671–677, 1937.

[JMS00] Just, W.; Matveev, M.V.; Szeptycki, P.J., Some results on property (a), *Topology Appl.*, v. **100**, n. 1, p. 67–83, 2000.

[K80] Kunen, K. *Set Theory: an introduction to independence proofs.* Amsterdam: North-Holland, 1980. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, **102**)

[M94] Matveev, M.V., Absolutely countably compact spaces, *Topology Appl.*, v. **58**, n. 1, p. 81–92, 1994.

[M97] Matveev, M.V., Some questions on property (a), *Questions Answers Gen. Topology*,v. bf 15, n. 2, p. 103–111, 1997.

[MHD04] Moore, J.T.; Hrušák, M.; Džamonja, M. Parametrized $\diamondsuit$ principles, *Tans. Amer. Math. Soc.*, v. **356**, n. 6, p. 2281–2306, 2004.

[MS09] Morgan, C.; Da Silva, S.G., Almost disjoint families and "never" cardinal invariants, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, v. **50**, n. 3, p. 433–444, 2009.

[MS10] Morgan, C.; Da Silva, S.G., Covering properties which, under weak diamond principles, constrain the extents of separable spaces, *Acta Math. Hungar.*, v. 128, n. 4, p. 358–368, 2010.

[MS11] Morgan, C.; Silva, S.G., A note on closed discrete subsets of separable (a)-spaces. *Houston Journal of Mathematics*, v. , n. , p. , 2011.

[M54] Mrówka, S., On completely regular spaces, *Fund. Math.*, v. **41**, p. 105–106, 1954.

[P89] de Paiva, V.C.V., A dialectica-like model of linear logic. *Category Theory and Computer Science (Manchester, 1989)*, Lecture Notes in Compu. Sci. **389**, p. 341–356, Springer, Berlin, 1989.

[R11] Rinot, Assaf, *Jensen's diamond principle and its relatives*, In: Set theory and its applications, Contemp. Math., v. **533**, p. 125–156, Amer. Math. Soc., 2011.

[S04] da Silva, S.G. *Alguns resultados envolvendo cardinais e uma determinada propriedade topológica.* Tese de doutorado, 2004.

[S05] da Silva, S.G. Property (a) and dominating families, *Comment. Mat. Univ. Carolin.*, v. **46**, n. 4, p. 667 - 684, 2005.

[S07a] da Silva, S.G., Large cardinals and topology: a short retrospective and some new results, *Log. J. IGPL*, v. **15**, n. 5-6, p. 433–443, 2007.

[S07b] da Silva, S.G., On the presence of countable paracompactness, normality and property (a) in spaces from almost disjoint families,*Questions Answers Gen. Topology*, v. **25**, n. 1, p. 1–18, 2007.

[S11] da Silva, S.G., Closed discrete subsets of separable spaces and relative versions of normality, countable paracompactness and property (a). *Comment. Mat. Univ. Carolin.*, v. **52**, n. , p. 435 - 444, 2011.

[SV98] Szepticky, P.J.; Vaughan, J.E., Almost Disjoint Families an property (a). *Fund. Math*, v. **158**, n. 3, p. 229 - 240, 1998.

[S02] Szeptycki, P.J., Soft almost disjoint families, *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. **130**, n. 12, p. 3713–3717 (electronic), 2002.

[V93] Vojtáš, P., Generalized Galois-Tukey-connections between explicit relations on classical objects of real analysis. In *Set theory of the reals (Ramat Gan, 1991)*, p. 619–643. Barclan Univ., Ramat Gan, 1993.

[W85] Watson, W.S. Separation in countably paracompact spaces, *Tans. Amer. Math. Soc.*, v. **290**, n. 2, p. 831 -842, 1985.

[W70] Willard, Stephen. *General Topology*. Reading, MA: Addison–Wesley, 1970. (Addison–Wesley Series in Mathematics)

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170 -110
<http://www.pgmat.ufba.br>