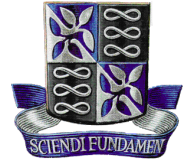




UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PGMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



CARACTERIZAÇÃO DE IMERSÕES CONFORMES COM A
MESMA APLICAÇÃO DE GAUSS: UMA SOLUÇÃO COMPLETA
DO PROBLEMA DE PIERRE SAMUEL

FELLIPE ANTONIO DOS SANTOS CARDOSO LEITE

Salvador-Bahia

Março de 2012

CARACTERIZAÇÃO DE IMERSÕES CONFORMES COM A
MESMA APLICAÇÃO DE GAUSS: UMA SOLUÇÃO COMPLETA
DO PROBLEMA DE PIERRE SAMUEL

FELLIPE ANTONIO DOS SANTOS CARDOSO LEITE

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da
Universidade Federal da Bahia como requisito
parcial para obtenção do título de Mestre em
Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Enaldo Silva Vergasta.

Salvador-Bahia

Março de 2012

Leite, Fellipe Antonio dos Santos Cardoso.

Caracterização de imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss: uma solução completa do problema de Pierre Samuel / Fellipe Antonio dos Santos Cardoso Leite. – Salvador: UFBA, 2012.

93 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Enaldo Silva Vergasta.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2012.

Referências bibliográficas.

1. Geometria Diferencial. 2. Geometria Riemanniana. 3. Imersões. I. Vergasta, Enaldo Silva. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 514
: 514.7

CARACTERIZAÇÃO DE IMERSÕES CONFORMES COM A
MESMA APLICAÇÃO DE GAUSS: UMA SOLUÇÃO COMPLETA
DO PROBLEMA DE PIERRE SAMUEL

FELLIPE ANTONIO DOS SANTOS CARDOSO LEITE

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da
Universidade Federal da Bahia como requisito
parcial para obtenção do título de Mestre em
Matemática, aprovada em de março de 2012.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Enaldo Silva Vergasta (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Marcos Dajczer
IMPA

Prof. Dr. Diego Catalano Ferraioli
UFBA

A todos aqueles que acreditaram em mim.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, sem o qual não apenas esse projeto ou minha carreira, mas toda a minha vida não existiria. A Ele a honra, glória e louvor, pelos séculos sem fim! Obrigado pela força nos momentos de fraqueza, a graça da perseverança e o entendimento de que tudo que ocorre em minha vida é para o meu crescimento como ser humano.

Em seguida agradeço aos meus pais, responsáveis pela minha criação e parte de minha visão de mundo. Vocês me educaram e incentivaram a perseverar nos estudos, graças a dedicação e amor de vocês, pude chegar onde estou. Estejam certos, como estou, de que vocês fizeram tudo o que estava ao alcance de vocês para que eu pudesse ser o melhor que possa ser. Entre os familiares, o muito obrigado à tia Maria José que soube exigir quando necessário, incentivar quando o desânimo batia forte, ouvir quando o mundo me parecia surdo e acolher quando ninguém o soube fazer, sem a senhora, este momento certamente não teria chegado. Agradeço a todos os familiares que seguraram as pontas enquanto estive me dedicando aos estudos; se algum dia lerem isso, peço sinceramente que não tentem me compreender (já vivi o suficiente pra saber que isso é muito difícil), apenas estejam certos de que busquei agir da melhor maneira possível e que jamais quis magoá-los. Aos meus avós cujos exemplos de vida me servem sempre de Norte, vocês que acreditaram antes de muitos outros que eu ainda tinha jeito, obrigado.

Agradeço a meu orientador, Enaldo, por tantas coisas que jamais poderia enumerar aqui: por aceitar me orientar, escolher um assunto tão interessante, compreender as limitações, incentivar na caminhada acadêmica e na própria vida. Tenho plena consciência que palavras e, mesmo ações, não são suficientes para fazê-lo, por isso “Deus lhe pague!”.

Muito obrigado aos meus professores, todos os que já tive até hoje, com vocês pude aprender não somente conteúdos, macetes e Teoremas; vocês me ensinaram posturas e valores, me mostraram o quanto esta profissão pode influenciar pessoas. Obrigado pela dedicação e profissionalismo de vocês, espero me tornar um profissional tão bom quanto os que encontrei nesta vida. Lembro de mencionar uma propaganda na qual um professor de educação física olha para uma criança e percebe que ela tem um potencial de atleta, encontrei em minha vida muitos professores que olharam pra mim, viram algum potencial,

acreditaram e investiram nisso. Espero sinceramente que outras pessoas encontrem e valorizem aquilo que eu encontrei.

Gostaria de agradecer explicitamente aos professores José Nelson, Paulo Varandas, Vilton, Ana Lúcia, Joseph, Samuel, Evandro, Diego, Rita, Cristiana, Sílvia Veloso, Bahiano, João Nestor, Esdras, Olenêva e tantos outros, pelos conselhos e incentivos durante esses últimos dois anos.

Agradeço ao professor Marcos Dajczer, pela disponibilidade em esclarecer dúvidas, a boa receptividade, as sugestões ao trabalho e à honra de tê-lo em minha banca.

Agradeço imensamente ao Laboratório de Ensino de Matemática e Estatística da Universidade Federal da Bahia (LEMA-UFBA), a participação deste grupo durante a graduação me permitiu complementar a sólida formação acadêmica, ampliou meus horizontes e me apresentou pessoas maravilhosas, mas do que colegas de trabalho vocês são minha família acadêmica. Elinalva, Cristiana, Rita, Lia, Denise, Paulo, Luiz Cláudio, Julianna, Fabiana Laranjeiras, Renivaldo, Antonio, José Fernandes, Graça Luzia e tantos outros, muitíssimo obrigado.

Aos meus amigos e colegas de caminhada: Andrêssa, Ana Paula, Dimi, Emanuele, Felipe Moscozo, Luiz, Rodrigo, Roberto e Thiago. A PGMAT tem razão, ao estudar com vocês pude crescer em muitos aspectos e posso dizer que, além de matemática, aprendi um pouco com cada um, pequenos detalhes que levo para vida. Nesses últimos anos dividimos alegrias, desesperos e muitos momentos felizes: as idéias e formas de pensar tão diversas, a acolhida diária, os risos, os encontros, as calourosas conversas. Levarei as melhores lembranças que puder de cada um de vocês com os quais fui moldando o profissional que hoje sou. Aos que nos acolheram com tanto carinho: Caio, Franciscleide, Kátia e Renivaldo, nosso muito obrigado e o registro das saudades de um tempo bom! Aos doutorandos da UFBA: Ângela, Teófilo, Adina, Márcio e Giovanne, pelas conversas, incentivos e troca de informações. Aos que ainda em minha graduação me davam conselhos: Elaís, Fabiana, Eliane, Manuela, Wendell, Teles, Roberto, Roberio e muitos outros que a memória me falha agora. Muito obrigado, ao amigo João Paulo Cirineu, pelos inúmeros conselhos, ajuda com TEX, conversas divertidas e grande incentivo! Aos demais amigos de vida fora IM: Ramon Lopes, Pablo Pinto, Fernando Pinto, Simone Oliveira, Gabriela Fernandes, Paulo Burger e tantos outros (muitos outros mesmo!), vocês que souberam compreender a ausência, ouvir os lamúrios, acolher com alegria e incentivar, mesmo sem compreender muito o que se passava, obrigado!

Aos esquecidos e não mencionados, obrigado desde já, por contar com a compreensão de vocês em saber que mais importante do que uma menção explícita é o reconhecimento real pelo auxílio na jornada.

Aos funcionários do Instituto de Matemática da UFBA, como esquecer daque-

les que nos recebiam todo dia com um sorriso, sempre disponíveis e compreensivos? Obrigado por alegrarem os nossos dias! De maneira especial, obrigado ao pessoal da CEAPG-MAT: D. Tânia, Tati, Davilene, Solange, Márcio e Marcos, valeu por “quebra-rem os galhos”.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro concedido a mim durante todo o meu mestrado.

“Muitas vezes as pessoas são egocêntricas, ilógicas e insensatas. Perdoe-as assim mesmo.

Se você é gentil, as pessoas podem acusá-lo de interesseiro. Seja gentil assim mesmo.

Se você é um vencedor, terá alguns falsos amigos e alguns inimigos verdadeiros.

Vença assim mesmo.

Se você é honesto e franco, as pessoas podem enganá-lo. Seja honesto e franco assim mesmo.

O que você levou anos para construir, alguém pode destruir de uma hora para outra. Construa assim mesmo.

Se você tem paz e é feliz, as pessoas podem sentir inveja. Seja feliz assim mesmo.

O bem que você faz hoje, pode ser esquecido amanhã. Faça o bem assim mesmo.

Dê ao mundo o melhor de você, mas isso pode não ser o bastante. Dê o melhor de você assim mesmo.

Veja você que, no final das contas, é tudo entre você e Deus. Nunca foi entre você e os outros.”

Madre Tereza de Calcutá

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo apresentar a resposta para a seguinte questão, proposta pelo geômetra algébrico Pierre Samuel em 1947: sob que condições duas imersões, de uma variedade no espaço Euclidiano, possuem a mesma aplicação de Gauss e induzem métricas conformes na variedade? A caracterização obtida é baseada no preprint “A complete solution of Samuel’s problem” de Marcos Dajczer e Ruy Tojeiro.

Palavras-chave: Imersões conformes; Aplicação de Gauss; Problema de Samuel.

Abstract

The present work aims to present the answer the following question, posed by the algebraic geometer Pierre Samuel in 1947: under which conditions two immersions, of a manifold into Euclidean space, have the same Gauss map and induce conformal metrics on the manifold? The obtained characterization is based on the preprint “A complete solution of Samuel’s problem” by Marcos Dajczer e Ruy Tojeiro.

Keywords: Conformal immersions; Gauss map; Samuel’s problem.

Sumário

| | |
|--|-----------|
| Introdução | 1 |
| 1 Preliminares | 5 |
| 1.1 Alguns conceitos de geometria Riemanniana | 5 |
| 1.2 Alguns conceitos da teoria de subvariedades | 6 |
| 1.3 Complexificação de um espaço vetorial | 9 |
| 1.4 Variedades Kaehlerianas | 12 |
| 1.5 Fibrados, subfibrados e distribuições | 17 |
| 1.6 O tensor de decomposição de uma imersão | 21 |
| 2 Imersões com a mesma aplicação de Gauss | 24 |
| 2.1 A aplicação de Gauss e tensores de Codazzi | 24 |
| 3 Imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss | 27 |
| 3.1 O Par (T, φ) | 27 |
| 3.2 O Lema de Kulkarni | 28 |
| 3.3 O Lema de Vergasta - versão real | 30 |
| 3.4 O Lema de Vergasta - versão complexificada | 31 |
| 4 O caso das superfícies | 35 |
| 4.1 O Teorema de Dajczer-Tojeiro para superfícies | 35 |
| 5 O produto warped de imersões | 40 |
| 5.1 Produtos twist e warped de variedades | 40 |
| 5.2 Teoremas de decomposição | 43 |
| 5.3 Produtos warped de imersões | 46 |
| 6 Mais alguns exemplos | 49 |
| 6.1 O caso trivial | 49 |
| 6.2 Cones Kaehlerianos reais mínimos | 50 |
| 6.3 Deformações conformes e a métrica do plano hiperbólico | 54 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 6.4 | Produto warped de imersões | 56 |
| 6.5 | O produto warped triplo | 59 |
| 7 | Caracterização das imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss | 61 |
| 7.1 | Propriedades dos subfibrados de $TM \otimes \mathbb{C}$ | 61 |
| 7.2 | O Teorema Dajczer-Tojeiro para o caso geral | 73 |
| A | Apêndice | 85 |
| A.1 | Tensoros em Variedades Riemannianas | 85 |
| | Referências | 88 |
| | Índice Remissivo | 90 |

Introdução

Sejam M^n uma variedade diferenciável e $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma imersão. É possível definir uma métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$ em M^n utilizando a imersão f da seguinte maneira

$$\langle X, Y \rangle_f = \langle f_*X, f_*Y \rangle, \forall X, Y \in TM.$$

Além disso, podemos definir uma aplicação F que, a cada ponto $p \in M^n$, associa o n -plano $f_*(T_pM)$, a imagem do espaço tangente T_pM pela diferencial da imersão f . A aplicação assim definida é chamada de aplicação de Gauss de f . Dizemos que duas imersões são conformes se as métricas induzidas por elas são conformes, isto é, $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ são conformes se existe uma função diferenciável $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\langle \cdot, \cdot \rangle_g = e^{2\varphi} \langle \cdot, \cdot \rangle_f$. Essas imersões possuem a mesma aplicação de Gauss se $f_*(T_pM) = g_*(T_pM)$, $\forall p \in M^n$.

Em 1947 Pierre Samuel, um grande geômetra algébrico, propôs o seguinte problema no artigo [Sam47]: “sob que condições duas imersões f e g de uma variedade M^n em \mathbb{R}^N são conformes e possuem a mesma aplicação de Gauss?” De certa forma, esta pergunta busca entender até que ponto uma imersão $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ depende da estrutura conforme e da aplicação de Gauss. Nesse contexto, é comum dizer que g é uma deformação conforme de f que preserva a aplicação de Gauss. Samuel conseguiu resolver parcialmente este problema em seu artigo, dividindo o problema em dois casos e caracterizando completamente um deles.

Mesmo antes do trabalho de Samuel, outros matemáticos estudaram casos particulares desse problema. Christoffel, em 1867, buscava entender até que ponto uma superfície $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é determinada por sua estrutura conforme e por sua aplicação de Gauss. Em 1982, Hoffman e Osserman, no artigo [HO82], estudaram o problema para superfícies de codimensão arbitrária. Dajczer e Gromoll [DG85] no ano de 1985, estudaram a versão isométrica do problema, isto é, quando $\varphi \equiv 0$. Bennet Palmer [Pal88], estudou superfícies isotérmicas com a mesma aplicação de Gauss. Vergasta [Ver92], além de contribuir com o caso geral, estudou deformações de superfícies em \mathbb{R}^3 que preservam a aplicação de Gauss mais revertem a orientação do plano $f_*(T_pM)$. Dajczer e Vergasta [DV95], também estudaram o problema para hipersuperfícies, isto é, imersões $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, com dimensão $n \geq 3$.

Cada trabalho forneceu resultados e contribuições próprias. Christoffel descobriu que, em \mathbb{R}^3 , além dos casos triviais (superfícies isométricas ou que diferem por homotetia e translação), duas superfícies que são conformes e tem a mesma aplicação de Gauss ou são mínimas ou são isotérmicas, isto é, admitem uma parametrização isotérmica em que as curvas coordenadas são as linhas de curvatura. Hoffman e Osserman provaram que se f e g são duas imersões conformes de uma superfície em \mathbb{R}^N cuja aplicação de Gauss preserva a orientação do 2-plano (isto é, os planos $f_*(T_pM)$ e $g_*(T_pM)$, além de coincidirem, tem a mesma orientação), então f e g são superfícies mínimas ou diferem por homotetia e translação. Dajczer e Gromoll provaram que se duas imersões são isométricas com a mesma aplicação de Gauss então, localmente f e g são produtos de subvariedades Kaehlerianas que admitem uma família associada, exatamente como ocorre com as superfícies mínimas. Já Vergasta obteve uma equação, envolvendo o fator conforme e um tensor, que traduz a condição de duas imersões serem conformes com a mesma aplicação de Gauss. Esse trabalho também forneceu uma caracterização, em termos das curvaturas principais, para que duas superfícies em \mathbb{R}^3 sejam conformes e a aplicação de Gauss, embora seja a mesma, reverta a orientação dos 2-planos. Usando essa caracterização, Vergasta consegue obter como exemplos as superfícies mínimas, as ciclides de Dupin, as superfícies de rotação e as superfícies de curvatura média constante em \mathbb{R}^3 . Em [DV95], os autores obtiveram as hipersuperfícies de rotação sobre curvas planas ou sobre superfícies mínimas em \mathbb{R}^3 .

Quanto a Pierre Samuel, podemos dizer que ele resolveu completamente o problema para superfícies em \mathbb{R}^N , mostrando que se as deformações de f são não triviais então elas ou são superfícies mínimas (caso preservem a orientação dos planos tangentes) ou superfícies isotérmicas (caso revertam a orientação dos planos). Samuel também contribuiu enunciando formalmente o caso geral do problema e resolvendo totalmente o chamado caso holonômico e parcialmente o caso não-holonômico, conceitos esses que dependem da integrabilidade de distribuições que surgiram em seu estudo. É interessante perceber que, apesar de algumas das soluções encontradas em trabalhos posteriores a Samuel já tivessem sido obtidas por ele, as demonstrações são diferentes (provavelmente porque [Sam47] não era conhecido por esses matemáticos, levando-os a reobter o mesmo resultado por outros caminhos).

Em 2010, Dajczer e Tojeiro [DT10] resolveram completamente o problema proposto por Samuel. Para a ideia central do trabalho, eles destacam outra contribuição de Samuel: trabalhar com tensores complexificados. Além dessa ideia, são utilizados a equação obtida por Vergasta em [Ver92] (chamada por eles, e também no presente trabalho, de Lema de Vergasta), o Teorema de Nölker e o Teorema de Hiepko. Esses dois últimos teoremas fornecem condições para que uma imersão e uma variedade, respectivamente, possam ser decompostas em produto de imersões e produto de variedades, o

produto warped. Os dois principais resultados dessa dissertação são

Teorema 4.1.1(Dajczer-Tojeiro [DT10])*Sejam $f, g : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^N$, duas imersões com a mesma aplicação de Gauss que induzem métricas conformes em M^2 . Então ocorre uma das seguintes alternativas:*

- (i) $g(M^2)$ é composição de homotetia e translação aplicada a $f(M^2)$;
- (ii) $f(M^2)$ e $g(M^2)$ são superfícies isotérmicas;
- (iii) $f(M^2)$ e $g(M^2)$ são superfícies mínimas.

Teorema 7.2.1(Dajczer-Tojeiro [DT10])*Sejam $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$, $n \geq 3$, duas imersões com a mesma aplicação de Gauss que induzem métricas conformes não isométricas em M^n . Então ocorre uma das seguintes alternativas:*

- (i) $f(M^n)$ e $g(M^n)$ são cones kaehlerianos reais mínimos;
- (ii) $f(M^n)$ e $g(M^n)$ são produtos warped de imersões;
- (iii) $f(M^n)$ e $g(M^n)$ são produtos warped triplos de imersões.

O primeiro destes resultados já era conhecido pelo próprio Samuel. O interessante é que agora ele é demonstrado utilizando, essencialmente, a mesma técnica desenvolvida para demonstrar o segundo Teorema, que é o resultado principal do artigo. Também é importante observar que o Teorema 7.2.1 trata exatamente dos casos ainda não completamente resolvidos, isto é, deformações conformes com a mesma aplicação de Gauss não triviais com $n \geq 3$.

A presente dissertação esta organizada em sete capítulos. O primeiro capítulo lembra conceitos e resultados básicos de Geometria Riemanniana e Teoria das Subvariedades que são importantes para o desenvolvimento do trabalho. Além disso, este capítulo também apresenta alguns conceitos e resultados não tão conhecidos, mas que estão intimamente ligados à solução do problema como, por exemplo, o tensor de decomposição (em inglês *splitting tensor*) e alguns resultados sobre subvariedades Kaehlerianas.

O Capítulo 2 trata de pares de imersões f e g com a mesma aplicação de Gauss, traduzindo essa hipótese na existência de um tensor sobre M^n , com determinadas características, que satisfaz uma equação envolvendo os diferenciais de f e g . Também neste capítulo vemos como se relacionam as segundas formas fundamentais de f e g , bem como as conexões de Levi-Civita da variedade M^n , correspondentes às métricas induzidas por f e g .

O Capítulo 3 inicia propriamente o estudo de imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss. Nele verificamos que essas duas hipóteses correspondem à existência

de um par (T, φ) , em que T é um tensor ortogonal em M^n e $\varphi \in C^\infty(M)$ é o fator conforme entre as métricas, o qual deve satisfazer determinadas propriedades. Depois de enunciar e provar a versão real do Lema de Vergasta (obtido em [Ver92]), apresentamos a versão complexificada. Em seguida, obtemos uma decomposição do fibrado tangente complexificado $(TM \otimes \mathbb{C})$ em auto-fibrados e verificamos que essa decomposição tem duas características cruciais para o restante do trabalho: além de ser ortogonal, ela é “preservada” pela segunda forma fundamental da imersão f , conforme a Proposição 3.4.3. Terminamos esse Capítulo apresentando casos particulares do Lema de Vergasta complexificado, que são utilizados posteriormente, e simplificações das equações fundamentais de uma imersão, ambos obtidos usando a decomposição do fibrado tangente.

O Capítulo 4 utiliza o maquinário construído nos capítulos precedentes para resolver o problema no caso em que f e g são superfícies, isto é, $n = 2$. Apresentamos a definição de superfície isotérmica em \mathbb{R}^N , que é uma generalização natural do conceito dado para \mathbb{R}^3 .

O Capítulo 5 apresenta, de maneira sucinta, os conceitos de produto twist e produto warped de variedades, exemplificando o segundo deles que é mais importante para o trabalho. O objetivo principal desse capítulo é apresentar os Teoremas de Nölker e Hiepko. Para isso, recorremos a outros teoremas precedentes (o de de Rham e o de Moore) que serviram de inspiração para esses resultados. Também nesse capítulo, definimos representação produto warped para \mathbb{R}^N e produto warped de imersões.

O Capítulo 6 apresenta classes de exemplos de imersões conformes não-isométricas com a mesma aplicação de Gauss, para $n \geq 3$. O primeiro deles combina uma deformação isométrica com uma deformação conforme do ambiente, os cones Kaehlerianos reais mínimos. As duas últimas seções apresentam exemplos construídos com auxílio de produto warped de imersões. A Seção 6.3 apresenta exemplos de produto warped de duas imersões e a Seção 6.4 apresenta um exemplo de produto warped de três imersões.

Finalmente, o Capítulo 7 conclui o trabalho apresentando a demonstração do Teorema de Dajczer-Tojeiro (Teorema 7.2.1), que é o resultado principal de [DT10]. Segundo esse teorema, todos os pares de imersões conformes não isométricas (de uma variedade de dimensão $n \geq 3$) que tem a mesma aplicação de Gauss devem pertencer a uma das 4 classes de exemplos construídas no capítulo 6. Para isso, precisamos estudar as propriedades dos auto-fibrados da decomposição de $TM \otimes \mathbb{C}$, o que é feito em dois lemas, e fazer uma análise das possíveis decomposições para $TM \otimes \mathbb{C}$.

A dissertação também possui um apêndice no qual o leitor poderá encontrar algumas informações adicionais sobre tensores em variedades Riemannianas.

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo recordamos conceitos de variedades Riemannianas e fornecemos as definições de alguns objetos da teoria de imersões, fibrados e tensores que serão utilizados no trabalho. Além disso, apresentamos outros elementos que serão importantes ao longo do trabalho: subvariedades Kaehlerianas reais pluriharmônicas, complexificação de espaços vetoriais e o tensor de decomposição de uma imersão.

Para a primeira seção, o leitor interessado em mais detalhes, poderá consultar [Cam10], [dC08] e [Spi75]; para segunda seção, [Daj90] e [dC08]; para a terceira, [Cam10], [Pla03] e [Ham02]; para a quarta, [Daj90] e [Cam10]; para quinta seção [Daj90], [Lee00] e [Spi75]; para última seção, [Daj90] e o artigo [DG90].

Salvo menção em contrário, M^n sempre denotará uma variedade Riemanniana n dimensional e, às vezes, também escrevemos apenas M .

1.1 Alguns conceitos de geometria Riemanniana

Considere a variedade Riemanniana $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Ao longo do trabalho, quando for conveniente escreveremos $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ para indicar a métrica de M . Lembramos que, em uma variedade Riemanniana, existe uma única conexão de Levi-Civita ou Riemanniana (isto é, uma conexão simétrica e compatível com a métrica). Neste texto sempre trabalharemos com conexões Riemannianas. Portanto, sempre que nos referimos a uma conexão, estamos subentendendo que esta é a conexão Riemanniana. Denotaremos por T_pM o espaço tangente de M no ponto p e por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos tangentes a M . Lembramos ainda que $TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_pM\}$ é o fibrado tangente de M . Além disso, o tensor de curvatura de M é a aplicação

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

e, dada uma base $\{X_1, \dots, X_n\}$ de $T_p M$ e $X \in T_p M$, a curvatura de Ricci de X em p é dada por

$$Ric(X) = \sum_{j=1}^{2n} \langle R(X, X_j) X_j, X \rangle.$$

Seja $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Definimos o *gradiente de φ* como o campo vetorial suave $\nabla\varphi$ tal que

$$\langle \nabla\varphi, X \rangle = X(\varphi), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \quad (1.1)$$

Dessa forma, à luz do Teorema de representação de Riesz, o gradiente de φ no ponto p é o vetor que representa o funcional linear $(\varphi_*)_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$.

1.2 Alguns conceitos da teoria de subvariedades

Sejam M^n, \overline{M}^m variedades Riemannianas e $f : M^n \rightarrow \overline{M}^m$ uma imersão. Dizemos que f é uma *imersão isométrica* se

$$\langle X, Y \rangle_M = \langle f_* X, f_* Y \rangle_{\overline{M}}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

O número $m - n$ é chamado *codimensão* de M .

Se M é uma variedade diferenciável e \overline{M} é uma variedade Riemanniana, uma imersão $f : M \rightarrow \overline{M}$ induz uma métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$ em M^n . Basta definir, em cada ponto $p \in M^n$, o produto interno $\langle u, v \rangle_p := \langle (f_*)_p u, (f_*)_p v \rangle$. Então, f torna-se uma imersão isométrica e $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_f)$ uma variedade Riemanniana. De agora em diante, salvo menção contrária, usaremos as seguintes notações. Dada uma imersão $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$, a métrica induzida por esta imersão será denotada por $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$, a conexão Riemanniana dessa métrica será denotada por ∇ e a conexão do ambiente será denotada por $\overline{\nabla}$. Quando tratarmos de duas imersões $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$, a conexão da variedade $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_g)$ será denotada por $\tilde{\nabla}$.

Se $f : M^n \rightarrow \overline{M}^m$ é uma imersão, então para cada ponto $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ em que $f|_U$ é um mergulho sobre $f(U)$. Portanto, podemos identificar U e $f(U)$ e pensar f , localmente, como uma inclusão. Isto induz uma decomposição do espaço tangente $T_p \overline{M}$ em soma direta

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus T_p M^\perp,$$

em que $T_p M^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \overline{M}$. Globalmente, esta decomposição induz a decomposição em soma de Whitney

$$T\overline{M} = TM \oplus TM^\perp,$$

em que TM^\perp é o fibrado normal de M . Assim, dados $X, Y \in TM$, tem-se

$$\overline{\nabla}_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^\top + (\overline{\nabla}_X Y)^\perp,$$

em que $(\)^\top$ e $(\)^\perp$ denotam as componentes tangente e normal de $\overline{\nabla}_X Y$, respectivamente. Na verdade, estamos utilizando um abuso de notação quando afirmamos que $X, Y \in TM$, pois a rigor, a conexão $\overline{\nabla}$ de $T\overline{M}$ é uma aplicação $\overline{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(TM) \rightarrow TM$. Isto é, estamos dizendo que $X, Y \in TM$, quando deveríamos nos referir às respectivas seções do fibrado a que estes pertencem, isto é, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \Gamma(TM)$. Durante todo o trabalho usaremos esse abuso de notação sem maiores comentários.

Como consequência da unicidade da conexão Riemanniana, obtemos que $(\overline{\nabla})^\top = \nabla$, em que ∇ é a conexão de M . Definindo agora a *segunda forma fundamental de f* , α_f , como

$$\alpha_f(X, Y) := \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y,$$

temos a fórmula de Gauss

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha_f(X, Y),$$

que também pode ser escrita como

$$\overline{\nabla}_U(f_*V) = f_*(\nabla_U V) + \alpha_f(U, V). \quad (1.2)$$

Recordamos que a segunda forma fundamental $\alpha_f : TM \times TM \rightarrow TM^\perp$ é um tensor (pois o valor de $\alpha_f(X, Y)(p)$ só depende dos valores X e Y no ponto p) simétrico. Dessa forma, existe um operador linear auto-adjunto associado a α_f , chamado de *Operador de Weingarten* e denotado por $A_\xi : TM \rightarrow TM$, dado por

$$\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle \alpha_f(X, Y), \xi \rangle.$$

Para qualquer imersão isométrica, valem as equações a seguir

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle \alpha_f(Y, W), \alpha_f(X, Z) \rangle - \langle \alpha_f(X, W), \alpha_f(Y, Z) \rangle \quad (1.3)$$

(Equação de Gauss)

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, \eta \rangle = \overline{\nabla}_Y \langle \alpha_f(X, Z), \eta \rangle - \overline{\nabla}_X \langle \alpha_f(Y, Z), \eta \rangle \quad (1.4)$$

(Equação de Codazzi)

$$\langle \bar{R}(X, Y)\eta, \xi \rangle - \langle R^\perp(X, Y)\eta, \xi \rangle = \langle [A_\eta, A_\xi]X, Y \rangle \quad (1.5)$$

(Equação de Ricci)

Nas equações acima, \bar{R} e R^\perp são as curvaturas definidas pelas conexões $\bar{\nabla}$ e $\nabla^\perp = (\bar{\nabla})^\perp$, respectivamente e $[A_\eta, A_\xi] = A_\eta A_\xi - A_\xi A_\eta$.

Dizemos que uma imersão $f : M \rightarrow \bar{M}$ é *totalmente geodésica* se $\alpha_f(X, Y) = 0$, $\forall X, Y \in TM$. Observe que f é totalmente geodésica se, e somente se,

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y.$$

Se $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+k}$ é uma imersão isométrica, um referencial ortonormal $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{n+k}\}$ em um aberto, $\tilde{U} \subset \tilde{M}$ é dito *adaptado à imersão* se as restrições de $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ a $U = \tilde{U} \cap M$ formarem um referencial em U . A existência desse objeto é garantida pelo Teorema de Gram-Schmidt e o leitor interessado em mais detalhes pode consultar [Lee00]. Seja $\{e_1, \dots, e_n, \eta_1, \dots, \eta_k\}$ um referencial adaptado à f definido em um aberto U . Considere o campo

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_f(e_i, e_i) \in \mathfrak{X}(U)^\perp, \quad (1.6)$$

como $\langle \alpha_f(e_i, e_i), \eta_j \rangle = \langle A_{\eta_j} e_i, e_i \rangle$, temos

$$\sum_{i=1}^n \alpha_f(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \langle \alpha_f(e_i, e_i), \eta_j \rangle \eta_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \langle A_{\eta_j} e_i, e_i \rangle \eta_j. \quad (1.7)$$

Substituindo (1.7) em (1.6), obtemos

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \langle A_{\eta_j} e_i, e_i \rangle \eta_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \text{tr}(A_{\eta_j}) \eta_j, \quad (1.8)$$

de maneira que H independe tanto do referencial tangente $\{e_1, \dots, e_n\}$ quanto do referencial normal $\{\eta_1, \dots, \eta_k\}$. Assim, o campo H fica bem definido em $\mathfrak{X}(M)^\perp$, sendo o seu valor em $p \in M$, $H(p)$, chamado de *vetor curvatura média de f em p* . Dizemos que f é mínima se $H = 0$.

Dizemos que uma imersão $f : M \rightarrow \tilde{M}$ é *umbílica em $p \in M^n$* se, para todo $\xi \in T_p M^\perp$, tem-se $A_\xi = \lambda_\xi I$, em que I é a identidade em $T_p M$. Quando f é umbílica em todo ponto $p \in M^n$ dizemos que f é uma *imersão umbílica*. Observe que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) f é umbílica em p ;
- (ii) $A_\xi = \langle H(p), \xi \rangle I$, $\forall \xi \in T_p M^\perp$;
- (iii) $\alpha(X, Y) = \langle X, Y \rangle H(p)$, $\forall X, Y \in T_p M$.

Uma imersão umbílica é chamada de *esférica* se o vetor curvatura média é paralelo na conexão normal, isto é,

$$\nabla_X^\perp H = 0, \forall X \in TM.$$

Para uso posterior, apresentamos aqui o Teorema de Liouville. Recordamos que *aplicações de semelhança* são aplicações conformes obtidas como composição de translação, transformações ortogonais e homotetia, isto é, multiplicação por uma constante não nula.

Teorema 1.2.1 (de Liouville). *Toda aplicação conforme $f : U \rightarrow V$ de um aberto conexo $U \subset \mathbb{R}^n$ em um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ é a restrição de uma composição de semelhança e inversões, de fato, no máximo uma de cada.*

O leitor interessado em mais detalhes poderá consultar os volumes 3 e 4 de [Spi75]. No primeiro deles (precisamente no Capítulo 4) se encontra a versão do Teorema em \mathbb{R}^3 e no segundo (precisamente no capítulo 7, parte A) se conclui a generalização para o \mathbb{R}^n , aqui enunciada.

1.3 Complexificação de um espaço vetorial

Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} de dimensão finita. Às vezes é conveniente interpretar soluções de equações em V como restrição do conjunto solução da mesma equação vista em um espaço vetorial complexo. Analogamente, operadores em V também podem ser vistos como restrição de um operador sobre um espaço vetorial complexo. Um exemplo clássico disso é a diagonalização de operadores definidos sobre um espaço vetorial real, pois como nem sempre o polinômio característico de um operador em V tem raízes em \mathbb{R} , é conveniente estender esse operador (e conseqüentemente a equação característica) aos complexos e definir autovalores complexos de um operador real. Isso se justifica porque \mathbb{C} é algebricamente fechado e assim a existência de autovalores é garantida.

Vejam agora como funciona a complexificação de um espaço vetorial e a extensão complexa bilinear de um produto interno sobre V . Essa seção é importante para entender melhor como funciona a complexificação da métrica, da segunda forma fundamental e da conexão Riemanniana, que é feita para obter a versão complexificada do Lema de Vergasta na Seção 3.4, e também para apresentar alguns fatos sobre espaços vetoriais complexos utilizados na próxima seção quando falaremos de variedades Kaehlerianas. Faremos aqui apenas uma apresentação de fatos sobre espaços vetoriais complexos e dos resultados principais relativos à complexificação de V , cujos detalhes e demonstrações podem ser encontrados na segunda seção do apêndice de [Cam10].

Seja $V_{\mathbb{C}}$ um espaço vetorial complexo de dimensão finita. A restrição do corpo de escalares deste espaço a \mathbb{R} dá origem a um espaço vetorial real $V_{\mathbb{R}}$ e a uma transformação linear $J : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$ tal que $J^2 = J \circ J = -I$, em que I é o operador identidade em $V_{\mathbb{R}}$. Além disso, a dimensão complexa de $V_{\mathbb{C}}$ é o dobro da dimensão real de $V_{\mathbb{R}}$. Para entender melhor esses fatos, escrevamos $V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV$ que identificaremos como $V_{\mathbb{R}} = V \times V$ sendo V um espaço vetorial real. Claramente a dimensão de $V_{\mathbb{C}}$ como espaço vetorial complexo é metade da dimensão de $V_{\mathbb{R}}$ como espaço vetorial real. Além disso, a multiplicação pela unidade imaginária i em $V_{\mathbb{C}}$ é tal que

$$i(v_1 + iv_2) = (-v_2 + iv_1), \forall v_1, v_2 \in V.$$

Fazendo a identificação $(-v_2 + iv_1) \in V_{\mathbb{C}} \approx (-v_2, v_1) \in V_{\mathbb{R}}$, essa operação nos permite criar a transformação linear $J : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$, dada por $J(v_1, v_2) = (-v_2, v_1)$ tal que $J^2 = J \circ J = -I$. É fácil verificar que se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é base para $V_{\mathbb{C}}$ então $\{e_1, Je_1, \dots, e_n, Je_n\}$ é uma base para $V_{\mathbb{R}}$.

Dizemos que um operador linear $J : V \rightarrow V$ é uma *estrutura complexa para o espaço vetorial real* V se $J^2 = -I$. O próximo resultado permite compreender o por quê desse nome, além de fornecer condições para existência desse objeto.

Lema 1.3.1. *Se V é um espaço vetorial real munido de uma estrutura complexa $J : V \rightarrow V$ então V tem dimensão par. Ademais se $\dim V = 2n$, então*

- (i) *podemos escolher uma base $\{e_1, e'_1, \dots, e_n, e'_n\}$ para V tal que $e'_k = Je_k$, para todo $1 \leq k \leq n$;*
- (ii) *a operação de extensão de escalares complexos definida por $(a + ib)v := (av + Jbv)$ torna V um espaço vetorial complexo cuja dimensão complexa é n . Ademais, com a notação do item (i), $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de V sobre \mathbb{C} .*

Na discussão precedente, partindo de um espaço vetorial complexo, chegamos a um espaço vetorial real - munido de uma estrutura complexa - por meio de restrição dos escalares complexos a escalares reais. Agora faremos o caminho inverso, partindo de um espaço vetorial real chegaremos a um espaço vetorial complexo, utilizando dessa vez a extensão de escalares reais a escalares complexos.

Seja V um espaço vetorial real qualquer (perceba que não estamos dizendo que ele tem dimensão par). Podemos dotar o espaço vetorial real $V \times V$ com a estrutura complexa

$$\begin{aligned} J : V \times V &\rightarrow V \times V \\ (u, v) &\mapsto (-v, u). \end{aligned}$$

Aplicando o item (ii) do Lema anterior podemos ver $V \times V$ como espaço vetorial complexo que denotaremos por $V_{\mathbb{C}}$ e chamaremos de complexificação de V . Ainda pelo item (ii) do

Lema 1.3.1, concluímos que $2 \dim V_{\mathbb{C}} = \dim V_{\mathbb{R}}$, isto é, a dimensão complexa de $V_{\mathbb{C}}$ é metade da dimensão real de $V_{\mathbb{R}}$. É interessante observar que, embora V possa ser incluído em $V_{\mathbb{C}}$ de forma canônica, preservando as operações de adição e multiplicação por escalar, V não é subespaço de $V_{\mathbb{C}}$.

Dado um operador $T : V \rightarrow V$, definimos a complexificação de T (também chamado de complexificado de T) como sendo o único operador $T_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ que coincide com T em V , isto é, $T_{\mathbb{C}}(v) = T(v), \forall v \in V$. É possível mostrar que $T_{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2) = Tv_1 + iTv_2$, que as representações matriciais de $T_{\mathbb{C}}$ e T são as mesmas, bem como seus polinômios mínimo e característico. Além disso, se λ é autovalor de T , $\bar{\lambda}$ também o é e ambos tem a mesma multiplicidade algébrica. Mais detalhes sobre esses fatos podem ser encontrados em [Pla03] e [Ham02].

Seja V um espaço vetorial real munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Lembramos que um produto interno sobre um espaço vetorial real é uma forma bilinear, simétrica e positiva definida. Ao definirmos o produto interno sobre um espaço vetorial complexo, percebemos que este não pode ser simultaneamente bilinear e positivo definido, pois, supondo a bilinearidade temos $-1 = i^2 \langle 1, 1 \rangle = \langle i, i \rangle < 0$. Na verdade, é possível mostrar que, se o produto interno sobre um espaço vetorial complexo é positivo definido, então ele é uma forma sesquilinear (não é bilinear nem simétrico). Dessa forma, o produto interno real, $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, pode ser complexificado para $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ de duas maneiras, conforme se escolha $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ positivo definido ou $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ bilinear e simétrico. Essa segunda maneira é a que será utilizada nesse trabalho para complexificar a métrica e a segunda forma fundamental. O próximo resultado fornece algumas propriedades dessa extensão.

Lema 1.3.2. *Sejam V um espaço vetorial real munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ a extensão bilinear desse produto interno então*

$$(i) \langle v_1 + iv_2, w_1 + iw_2 \rangle_{\mathbb{C}} = (\langle v_1, w_1 \rangle - \langle v_2, w_2 \rangle) + i(\langle v_1, w_2 \rangle + \langle v_2, w_1 \rangle);$$

$$(ii) \langle w, w \rangle_{\mathbb{C}} = 0, \forall w \in \{v = v_1 + iv_2 : \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \text{ e } \|v_1\| = \|v_2\|\};$$

$$(iii) \langle v, \bar{v} \rangle_{\mathbb{C}} \geq 0 \text{ e } \langle v, \bar{v} \rangle = 0 \text{ se, e somente se, } v = 0.$$

Prova: Todas as afirmações são decorrentes de como estamos fazendo a extensão. Provaremos, no entanto, o item (iii) por sua importância para cálculos posteriores. De fato,

$$\langle v, \bar{v} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle v_1 + iv_2, v_1 - iv_2 \rangle_{\mathbb{C}} = \langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_2, v_2 \rangle - i\langle v_1, v_2 \rangle + i\langle v_2, v_1 \rangle = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2,$$

o que já é suficiente para concluirmos o desejado. \square

Optamos por apresentar aqui o comportamento da extensão complexa bilinear de um produto interno, dada a semelhança que este objeto tem com a métrica e a segunda forma fundamental de uma imersão. Como escolhemos manter a compatibilidade

entre métrica e conexão, em consequência da fórmula de Koszul, que permite obter a conexão em função da métrica, ao complexificarmos a métrica estamos automaticamente complexificando a conexão, respeitando assim as mesmas propriedades que uma conexão real possui. Dessa forma embora trabalhando com objetos definidos num fibrado complexificado, quase não perceberíamos diferença caso pensássemos que é um fibrado real mesmo. Não podemos dizer que o procedimento é exatamente o mesmo porque os detalhes expressos nos itens (ii) e (iii) do Lema anterior fazem alguma diferença nos cálculos que envolvem a métrica e a segunda forma fundamental. Observamos que existe outra construção para complexificação de espaços vetoriais, utilizando produto tensorial. Este método é rapidamente comentado em [Cam10] e justifica a notação $V \otimes \mathbb{C}$ para a complexificação de V utilizada em [DT10] e nos próximos capítulos desse texto.

1.4 Variedades Kaehlerianas

Seja M^n uma variedade diferenciável real. Dizemos que um tensor $J : TM \rightarrow TM$ definido em M é uma estrutura *quasi-complexa* se $J^2 = -I$.

Uma *variedade Kaehleriana* é um par (M^n, J) em que M é uma variedade Riemanniana complexa e J é uma estrutura quasi-complexa satisfazendo

- (i) J é paralelo, isto é, $(\nabla_X J)Y := \nabla_X JY - J\nabla_X Y = 0, \forall X, Y \in TM$;
- (ii) J é ortogonal, isto é, $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$.

Com essa definição munimos variedades com uma estrutura parecida com a unidade imaginária i dos números complexos.

A Proposição abaixo mostra que J se comporta bem com relação ao tensor de curvatura de uma variedade Kaehleriana.

Proposição 1.4.1. *Seja M^{2n} uma variedade Kaehleriana e J sua estrutura complexa então*

- (i) $JR(X, Y)Z = R(X, Y)JZ$;
- (ii) $R(JX, JY)Z = R(X, Y)Z$;
- (iii) $Ric(X) = Ric(JX)$.

Prova: Para provar o item (i), basta observar que, como J é paralelo, temos $\nabla_U JV =$

$J\nabla_U V$. Então

$$\begin{aligned}
JR(X, Y)Z &= J\left(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z\right) \\
&= J\nabla_X \nabla_Y Z - J\nabla_Y \nabla_X Z - J\nabla_{[X, Y]} Z \\
&= \nabla_X \nabla_Y JZ - \nabla_Y \nabla_X JZ - \nabla_{[X, Y]} JZ \\
&= R(X, Y)JZ.
\end{aligned}$$

Para o item (ii), usando que J é ortogonal, temos

$$\begin{aligned}
\langle R(JX, JY)Z, W \rangle &= \langle R(Z, W)JX, JY \rangle \stackrel{(i)}{=} \langle JR(Z, W)X, JY \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle \\
&= \langle R(X, Y)Z, W \rangle.
\end{aligned}$$

Logo $R(JX, JY)Z = R(X, Y)Z$. Finalmente, sejam $p \in M$ e $X \in T_p M$, e considere uma base ortonormal $\{X_1, \dots, X_{2n}\}$ de $T_p M$ tal que $X_{2i} = JX_{2i-1}$ e $X_1 = X$, logo

$$\begin{aligned}
Ric(X) &= \sum_{j=1}^{2n} \langle R(X, X_j)X_j, X \rangle = \sum_{j=1}^{2n} \langle JR(X, X_j)X_j, JX \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{2n} \langle R(X, X_j)JX_j, JX \rangle = \sum_{j=1}^{2n} \langle R(JX_j, JX)JX, JX_j \rangle.
\end{aligned}$$

Como J é ortogonal, $\langle JX_i, JX_j \rangle = \langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}$, ou seja, o conjunto $\{JX_1, \dots, JX_{2n}\}$ ainda é uma base para $T_p M$ e, como o Ric não depende da base considerada para $T_p M$, concluímos que

$$Ric(X) = \sum_{j=1}^{2n} \langle R(JX, JX_j)JX, JX_j \rangle = Ric(JX).$$

□

Uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$, em que M^n é uma variedade Kaehleriana, é chamada de *subvariedade Kaehleriana real*. Uma subvariedade Kaehleriana real f é dita ser *pluriharmônica*¹ se

$$\alpha_f(JX, Y) = \alpha_f(X, JY), \forall X, Y \in TM.$$

Sejam (M, J) e (\tilde{M}, \tilde{J}) duas variedades Kaehlerianas. Dizemos que $f : M \rightarrow \tilde{M}$ é *holomorfa* se $f_* \circ J = \tilde{J} \circ f_*$. É possível mostrar que se f é holomorfa então

$$\tilde{J}\alpha_f(X, Y) = \alpha_f(JX, Y) = \alpha_f(X, JY), \forall X, Y \in TM.$$

¹o leitor que consultar as referências [Daj90],[DG85] e [DT10] poderá encontrar os termos *circular* ou *pseudoholomorfa* em lugar de pluriharmônica. Cabe observar que a noção de pseudoholomorfa é introduzida em [DG85] e não corresponde à definição aqui colocada. Por sugestão do próprio Dajczer, optamos pela nomenclatura mais atual em detrimento àquela que aparece nesses artigos (circular). Aqueles que queiram entender melhor essa escolha podem buscar os trabalhos de Renato Tribuzy, como por exemplo [RT92].

Em particular, toda imersão holomorfa é pluriharmônica. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar o Capítulo 8 de [Daj90]. O próximo resultado relaciona subvariedades pluriharmônicas, imersões mínimas, condições que relacionam J e a segunda forma fundamental ou J e o operador de Weingarten.

Proposição 1.4.2. *Seja $f : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma subvariedade Kaehleriana real. As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) f é pluriharmônica;
- (ii) $\alpha_f(JX, JY) + \alpha_f(X, Y) = 0, \forall X, Y \in TM$;
- (iii) f é mínima;
- (iv) $JA_\xi = -A_\xi J$.

Prova: Primeiro vamos mostrar que (i) implica (ii). Se f é pluriharmônica então

$$\alpha_f(JX, JY) = \alpha_f(J^2X, Y) = \alpha_f(-X, Y) = -\alpha_f(X, Y).$$

Agora vejamos que (ii) implica (iii). Para isso consideremos um referencial ortonormal $\{X_1, X_2, \dots, X_{2n}\}$ sobre M tal que $X_{2i} = JX_{2i-1}$. Temos

$$2nH = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_f(X_i, X_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_f(X_{2i-1}, X_{2i-1}) + \sum_{i=1}^n \alpha_f(X_{2i}, X_{2i}).$$

No referencial considerado, temos $X_{2i} = JX_{2i-1}$. Como $\alpha_f(X_i, X_i) = -\alpha_f(JX_i, JX_i)$ temos

$$\alpha_f(X_{2i}, X_{2i}) = \alpha_f(JX_{2i-1}, JX_{2i-1}) = -\alpha_f(X_{2i-1}, X_{2i-1}),$$

portanto,

$$H = 0.$$

Agora vejamos que (iii) implica (i). Seja $p \in M^{2n}$, basta mostrar que em uma base $\{X_1, \dots, X_{2n}\}$ de T_pM temos

$$\alpha_f(JX_i, X_j) = \alpha_f(X_i, JX_j).$$

Considere uma base ortonormal $\{X_1, X_2, \dots, X_{2n}\}$ para T_pM tal que $X_{2i} = JX_{2i-1}$. Sejam

$$v_i = (\alpha_f(X_i, JX_1), \dots, \alpha_f(X_i, JX_{2n}))$$

e

$$w_i = (\alpha_f(X_1, JX_i), \dots, \alpha_f(X_{2n}, JX_i)).$$

Então

$$\|w_i\|^2 = \sum_{j=1}^{2n} \|\alpha_f(JX_i, X_j)\|^2$$

e

$$\|v_i\|^2 = \sum_{j=1}^{2n} \|\alpha_f(X_i, JX_j)\|^2$$

Observe que como $X_{2i} = JX_{2i-1}$, temos

$$\alpha_f(X_i, JX_j) = \begin{cases} -\alpha_f(X_i, X_{j-1}), & \text{se } j \text{ é par} \\ \alpha_f(X_i, X_{j+1}), & \text{se } j \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Portanto,

$$\|v_i\|^2 = \sum_{j=1}^{2n} \|\alpha_f(X_i, JX_j)\|^2 = \sum_{j=1}^{2n} \|\alpha_f(X_i, X_j)\|^2. \quad (1.9)$$

Pela equação de Gauss, fixado i , e dado j temos

$$\langle R(X_i, X_j)X_j, X_i \rangle - \langle \bar{R}(X_i, X_j)X_j, X_i \rangle = \langle \alpha_f(X_i, X_j), \alpha_f(X_j, X_i) \rangle - \langle \alpha_f(X_j, X_j), \alpha_f(X_i, X_i) \rangle.$$

Somando essas equações em j , obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2n} \langle R(X_i, X_j)X_j, X_i \rangle - \sum_{j=1}^{2n} \langle \bar{R}(X_i, X_j)X_j, X_i \rangle &= \sum_{j=1}^{2n} \langle \alpha_f(X_j, X_j), \alpha_f(X_i, X_i) \rangle - \\ &\sum_{j=1}^{2n} \|\alpha_f(X_i, X_j)\|^2, \end{aligned} \quad (1.10)$$

Como f é mínima, temos

$$\sum_{j=1}^{2n} \left\{ \langle \alpha_f(X_j, X_j), \alpha_f(X_i, X_i) \rangle \right\} = \left\langle \sum_{j=1}^{2n} \left\{ \alpha_f(X_j, X_j) \right\}, \alpha_f(X_i, X_i) \right\rangle = 0. \quad (1.11)$$

Além disso,

$$R(X_i, X_i)X_i, X_i = \bar{R}(X_i, X_i)X_i, X_i = 0, \quad (1.12)$$

$$\sum_{j \neq i} \langle R(X_i, X_j)X_j, X_i \rangle = Ric(X_i) \quad (1.13)$$

$$(1.14)$$

e, como em \mathbb{R}^N tem curvatura seccional constante $c = 0$,

$$\sum_{j \neq i} \langle \bar{R}(X_i, X_j)X_j, X_i \rangle = \sum_{j \neq i} \bar{K}(X_i, X_j) = (2n - 1)c = 0. \quad (1.15)$$

Substituindo (1.11), (1.12), (1.13) e (1.15) em (1.10) e comparando com (1.9), temos

$$Ric(X_i) = - \sum_{j=1}^{2n} \|\alpha_f(X_i, X_j)\|^2 = -\|v_i\|^2. \quad (1.16)$$

Analogamente,

$$Ric(JX_i) = - \sum_{j=1}^{2n} \|\alpha_f(JX_i, X_j)\|^2 = -\|w_i\|^2. \quad (1.17)$$

Como $Ric(Z) = Ric(JZ)$, as equações (1.16) e (1.17) implicam

$$\|v_i\|^2 = \|w_i\|^2. \quad (1.18)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} Ric(X_i) &= \sum_{j=1}^{2n} \langle R(X_i, X_j)X_j, X_i \rangle = \sum_{j=1}^{2n} \langle JR(X_i, X_j)X_j, JX_i \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{2n} \langle R(X_i, X_j)JX_j, JX_i \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{2n} \left\{ \langle \bar{R}(X_i, X_j)JX_j, JX_i \rangle - \langle \alpha_f(X_i, JX_j), \alpha_f(X_j, JX_i) \rangle + \right. \\ &\quad \left. \langle \alpha_f(X_j, JX_j), \alpha_f(X_i, JX_i) \rangle \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{2n} c \left\{ \langle X_i, JX_i \rangle \langle X_j, JX_j \rangle - \langle X_i, JX_j \rangle \langle X_j, JX_i \rangle \right\} + \\ &\quad \sum_{j=1}^{2n} \langle \alpha_f(X_j, JX_j), \alpha_f(X_i, JX_i) \rangle - \sum_{j=1}^{2n} \langle \alpha_f(X_i, JX_j), \alpha_f(X_j, JX_i) \rangle \end{aligned} \quad (1.19)$$

Além disso, como $X_{2i} = JX_{2i-1}$, temos

$$\alpha_f(X_j, JX_j) = \begin{cases} -\alpha_f(X_j, X_{j-1}), & \text{se } j \text{ é par} \\ \alpha_f(X_{j-1}, X_j), & \text{se } j \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

de maneira que

$$\sum_{j=1}^{2n} \langle \alpha_f(X_j, JX_j), \alpha_f(X_i, JX_i) \rangle = 0.$$

Substituindo as duas últimas igualdades em (1.19) e usando que $c = 0$ em \mathbb{R}^N , temos

$$Ric(X_i) = - \sum_{j=1}^{2n} \langle \alpha_f(X_i, JX_j), \alpha_f(X_j, JX_i) \rangle = -\langle v_i, w_i \rangle. \quad (1.20)$$

Mas pela Desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos

$$\langle v_i, w_i \rangle^2 \leq \|v_i\|^2 \|w_i\|^2 \quad (1.21)$$

e a igualdade só se verifica se v_i e w_i são linearmente dependentes. Dessa forma, (1.18), (1.20) e (1.21) implicam que $v_i = \pm w_i$. Afirmamos que $v_i = w_i$. De fato, se $w_i = -v_i$, temos

$$Ric(X_i) = \|v\|^2 \geq 0,$$

por outro lado, em (1.16), temos

$$\text{Ric}(X_i) = -\|v_i\|^2,$$

o que é absurdo, a menos que $v_i = w_i = 0$. Logo $v_i = w_i$, o que implica

$$\alpha_f(JX_i, X_j) = \alpha_f(X_i, JX_j), \quad 1 \leq i \leq 2n, \quad 1 \leq j \leq 2n.$$

Até aqui temos a equivalência entre (i), (ii) e (iii). Agora mostraremos que (i) é equivalente a (iv). De fato, dados $p \in M$, $X, Y \in T_p M$ e $\xi \in T_p M^\perp$ temos

$$\langle \alpha(X, JY), \xi \rangle = \langle A_\xi X, JY \rangle = -\langle J^2 A_\xi X, JY \rangle = -\langle JA_\xi X, Y \rangle$$

e

$$\langle \alpha(JX, Y), \xi \rangle = \langle A_\xi JX, Y \rangle.$$

Logo

$$\langle \alpha(JX, Y) - \alpha(X, JY), \xi \rangle = \langle A_\xi JX + JA_\xi X, Y \rangle,$$

o que nos permite concluir a equivalência entre (i) e (iv). \square

1.5 Fibrados, subfibrados e distribuições

Dada uma variedade diferenciável M^n , um *fibrado vetorial sobre M* é um par (E, π) em que E é uma variedade diferenciável e $\pi : E \rightarrow M$ é uma aplicação diferenciável sobrejetiva satisfazendo as seguintes condições:

- (i) Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $p \in M$, o conjunto $E_p = \pi^{-1}(p)$ possui uma estrutura de espaço vetorial real k -dimensional;
- (ii) Para cada $p \in M$ existem uma vizinhança $U \subset M$ de p e uma aplicação $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ tais que
 - (I) Para cada $q \in U$, a restrição de ψ a E_q é um isomorfismo linear entre E_q e $\{q\} \times \mathbb{R}^k$, este último munido com a estrutura canônica de espaço vetorial real;
 - (II) Se $\pi_U : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U$ denota a projeção sobre o primeiro fator então $\pi = \pi_U \circ \psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$.

Com as notações acima, dizemos que M é *base do fibrado*, E é seu *espaço total* e cada E_p é uma *fibra de E sobre p* . O número natural k é o *posto do fibrado*, a aplicação π é a *projeção ou aplicação de fibrado* e ψ é chamada de *trivialização local*. Quando não há possibilidade de confusão denota-se o fibrado vetorial por E ou π , ficando subentendido o par. Neste trabalho denotaremos o posto k do fibrado E por $\text{rank}(E)$.

Uma *seção* de um fibrado vetorial (E, π) é uma aplicação $\eta : M \rightarrow E$ tal que $\eta \circ \pi = Id_M$, em que Id_M é a aplicação identidade sobre M . O fibrado tangente TM tem uma estrutura natural de fibrado e os campos tangentes a M são as seções de TM . Observamos ainda que por simplicidade, chamaremos fibrados vetoriais simplesmente de fibrados.

Sejam (E, π_1) e (F, π_2) fibrados vetoriais sobre M , a *soma de Whitney* de E e F , denotada por $E \oplus F$ é o fibrado vetorial $(E \oplus F, M, \pi_1 \oplus \pi_2)$ em que

$$E \oplus F = \{(e, f) \in E \times F : \pi_1(e) = \pi_2(f)\}$$

e

$$\begin{aligned} \pi_1 \oplus \pi_2 : E \oplus F &\rightarrow M \\ (e, f) &\mapsto \pi_1 \oplus \pi_2((e, f)) = \pi_1(e) = \pi_2(f). \end{aligned}$$

Observe que a soma de Whitney é um fibrado cujas fibras sobre p são exatamente a soma direta dos espaços vetoriais E_p e F_p .

Um *subfibrado* de um fibrado (E, π) é um subconjunto $D \subset E$ com as seguintes propriedades:

- (i) D é uma subvariedade mergulhada de E ;
- (ii) Para cada $p \in M$, a fibra $D_p = D \cap \pi^{-1}(p)$ é um subespaço linear de $E_p = \pi^{-1}(p)$;
- (iii) Considerando cada D_p com a estrutura de subespaço vetorial de E_p e a projeção $\pi|_D : D \rightarrow M$, $(D, \pi|_D)$ é um fibrado vetorial.

A condição de D ser um fibrado vetorial implica que $\pi|_D : D \rightarrow M$ é sobrejetiva e que todas as fibras D_p tem a mesma dimensão.

Uma *distribuição sobre M* é um subfibrado D de TM . Nesse caso, a dimensão de cada fibra de D é chamada de *dimensão da distribuição*. Assim, podemos pensar que uma distribuição é uma aplicação que a cada $p \in M$ associa um subespaço $D_p \subset T_pM$.

Uma distribuição $D \subset TM$ é *integrável* se, para $p \in N$, existe uma variedade imersa $N \subset M$ tal que $D_p = T_pN$. Nesse caso, dizemos também que N é uma *variedade integral para D* . Dada uma distribuição sobre M , podemos identificar geometricamente o problema de saber se esta é integrável, com o problema de encontrar uma subvariedade N de M tal que os espaços tangentes dos pontos de N coincidam com os subespaços correspondentes associados pela distribuição.

Dizemos que um subfibrado E de TM é *umbílico* se existe uma seção $\eta \in E^\perp$ tal que

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle X, Y \rangle \langle \eta, Z \rangle, \forall X, Y \in E, \forall Z \in E^\perp.$$

Nesse caso, dizemos que η é a *curvatura normal média* de E . Observamos que, neste caso, se $X, Y \in E$ temos

$$\left(\nabla_X Y\right)_{E^\perp} = \langle X, Y \rangle \eta,$$

em particular, se X é unitário, temos

$$\left(\nabla_X X\right)_{E^\perp} = \eta.$$

Um subfibrado umbílico E de TM é *esférico* se

$$\langle \nabla_X \eta, Z \rangle = 0, \forall X \in E, \forall Z \in E^\perp.$$

Um subfibrado E de TM é *totalmente geodésico* se

$$\nabla_X Y \in E, \forall X, Y \in E.$$

Um subfibrado E é chamado de *paralelo* se dados $Y \in L$ e $X \in TM$ temos $\nabla_X Y \in E$.

As definições dos subfibrados acima tem uma certa proximidade com os respectivos conceitos para imersões (ou subvariedades). Na verdade, quando um subfibrado E é umbílico, totalmente geodésico ou esférico então E é integrável e suas folhas (veja definição de folhas mais adiante) são subvariedades umbílicas, totalmente geodésicas ou esféricas, respectivamente.

Dizemos que uma distribuição $D \subset TM$ é *involutiva* se dado um par de seções X, Y de D (isto é, pares de campos tangentes X, Y definidos em um aberto de M tal que $X_p, Y_p \in D_p, \forall p$) tem-se $[X, Y]$ é uma seção de D . O seguinte Teorema, cuja demonstração poderá ser consultada no capítulo 14 de [Lee00], diz exatamente quando uma distribuição é integrável.

Teorema 1.5.1 (Frobenius). *Uma distribuição é integrável se, e somente se, é involutiva.*

Ao tomar variedades integrais máximas em uma distribuição k -dimensional involutiva, obtêm-se uma partição da variedade M em subvariedades de dimensão k . Estas subvariedades funcionam localmente como fatias em coordenadas planas. Chamaremos de *folheação de dimensão k* da variedade M^n a coleção \mathcal{F} de subvariedades imersas k -dimensionais de M , disjuntas e conexas cuja união é M e tal que para cada vizinhança de um ponto $p \in M$ existe uma carta (U, x) tal que se uma folha intersecta U (aberto de M), então esta intersecção é uma união enumerável de fatias k -dimensionais da forma $x^{k+1}(q) = c^{k+1}, \dots, x^n(q) = c^n$, em que $(c^{k+1}, \dots, c^n) \in \mathbb{R}^{n-k}$ é constante (essas cartas são chamadas de cartas flat da folheação ou cartas trivializadoras de \mathcal{F}). A condição de intersectar em uma união enumerável de fatias tem natureza topológica, justificada na página 194 do volume I de [Spi75]. Entende-se por fatia um subconjunto da forma

$$\{q \in U : x^{k+1}(q) = c^{k+1}, \dots, x^n(q) = c^n\}, \text{ em que } (c^{k+1}, \dots, c^n) \in \mathbb{R}^{n-k} \text{ é constante.}$$

Dada uma imersão $f : M \rightarrow \tilde{M}$, para cada $p \in M$ definimos o *espaço de nulidade relativa de f em p* como

$$\Delta_f(p) = \{X \in T_p M : \alpha_f(X, Y) = 0, \forall Y \in T_p M\}.$$

A dimensão deste subespaço de $T_p M$ é denotada por $\nu(p)$ e é chamada de *índice de nulidade relativa do ponto p* . No caso de hipersuperfícies, o índice de nulidade relativa de um ponto p é exatamente o número de zeros que aparece na diagonal principal da matriz diagonalizada do operador de Weingarten na direção normal. É possível mostrar que, em abertos onde o índice de nulidade relativa $\nu : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ é constante, a aplicação que a cada $x \in M^n$ associa o subespaço $\Delta_f(x)$, é suave e define uma distribuição Δ_f , suave e integrável cujas folhas são totalmente geodésicas em M e em \tilde{M} . O leitor interessado nas demonstrações destes fatos pode consultar os capítulos III e V de [Daj90]). Desta forma, se ν é constante então

$$\Delta_f = \{X \in TM : \alpha_f(X, Y) = 0, \forall Y \in TM\}$$

é um subfibrado de TM chamado de *distribuição de nulidade relativa de f* o qual é totalmente geodésico.

A próxima proposição relaciona subfibrados paralelos, totalmente geodésicos, umbílicos e integráveis.

Proposição 1.5.2. *Seja E um subfibrado de TM . Considere as seguintes condições:*

- (i) E é paralelo;
- (ii) E é totalmente geodésico;
- (iii) E é umbílico;
- (iv) E é integrável.

Então (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv).

Terminamos essa seção apresentando alguns resultados que serão utilizados nesse trabalho.

Proposição 1.5.3. *Se $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $\nabla\varphi(p) \neq 0, \forall p \in M$ então a distribuição $\nabla\varphi^\perp$ é integrável.*

Prova: Como $\nabla\varphi(p) \neq 0, \forall p \in M$, então todo $a \in \mathbb{R}$ é valor regular para φ . Consequentemente, pelo Teorema da Função Implícita, $\varphi^{-1}(a)$ é uma subvariedade de M que tem $\nabla\varphi$ como campo normal em M , logo a distribuição $\nabla\varphi^\perp$ é tangente a $\varphi^{-1}(a)$ e, consequentemente, $\varphi^{-1}(a)$ é uma variedade integral para $\nabla\varphi^\perp$. Logo $\nabla\varphi^\perp$ é integrável. \square

Lembramos que os autovalores de um tensor definido sobre M são funções sobre M . Além disso, em \mathbb{R}^N , os conceitos de paralelo implicam alguma coisa ser constante, por exemplo, o transporte paralelo de um vetor é sempre o mesmo vetor em \mathbb{R}^N . Antes de prosseguirmos, recordamos que uma função $\lambda : M^n \rightarrow \mathbb{C}$ é constante com respeito a um subfibrado E se, para todo campo $X \in E$, temos $X(\lambda) = 0$. Este conceito está intimamente ligado a noção de invariância da função ao longo do campo, pois se uma função é constante no subfibrado então ela não varia na direção deste subfibrado. Agora mostraremos algumas propriedades que relacionam subfibrados paralelos e tensores paralelos.

Proposição 1.5.4. *Seja T um tensor paralelo, então*

- (i) *Se X é autovetor de T então o transporte paralelo de X ao longo de uma curva é um autovetor de T ;*
- (ii) *Se λ é autovalor de T então λ é constante em M ;*
- (iii) *$N(T)$ é um subfibrado paralelo.*

Prova: Sejam $\{X_1, \dots, X_{n-1}\}$ uma base ortonormal de T_pM , e $TX = \lambda X$. Dada uma curva qualquer ligando um ponto $q \in M$ ao ponto p , vamos usar o transporte paralelo $\{X(t), X_1(t), \dots, X_n(t)\}$ da base e de X para mostrar (i), (ii) e (iii). De fato,

$$\begin{aligned} Y(\langle TX(t), X_j(t) \rangle) &= \langle \nabla_Y TX(t), X_j(t) \rangle + \langle TX(t), \nabla_Y X_j(t) \rangle \\ &= \langle \nabla_Y TX(t), X_j(t) \rangle = \langle T\nabla_Y X(t), X_j(t) \rangle = 0 \end{aligned}$$

Logo $\langle TX(t), X_j(t) \rangle = \langle TX(0), X_j(0) \rangle = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} TX(t) &= \lambda(t)X(t), \\ \nabla_Y(TX(t)) &= \nabla_Y(\lambda(t)X(t)), \\ T(\nabla_Y X(t)) &= Y(\lambda(t))X(t) + \lambda(t)\nabla_Y X(t) \end{aligned}$$

e

$$Y(\lambda(t)) = 0.$$

Logo $\lambda(t) = \lambda(0)$. Finalmente, dado $Y \in TM$ e $X \in N(T)$ veremos que $\nabla_Y X \in N(T)$, ou seja, $T\nabla_Y X = 0$. Como T é paralelo, isso é equivalente a mostrar que $\nabla_Y TX = 0$, mas isso é claramente válido, pois $TX = 0$. \square

1.6 O tensor de decomposição de uma imersão

Vamos agora apresentar o *tensor de decomposição de uma imersão* (“splitting tensor” em inglês) que aparece em [Daj90], [DT10].

Seja D uma distribuição totalmente geodésica. Definimos o *tensor de decomposição* C como sendo a correspondência que a cada $X \in D$ associa a aplicação $C_X : D^\perp \rightarrow D^\perp$, dada por

$$C_X Y = -\overset{h}{\nabla}_X Y := -(\nabla_X Y)_{D^\perp}.$$

Como temos a decomposição ortogonal $TM = D \oplus D^\perp$, chamamos as componentes dessa decomposição de componentes horizontal e vertical, denotadas por $\overset{h}{\nabla} \in D^\perp$ e $\overset{v}{\nabla} \in D$, respectivamente.

Perceba que D^\perp é involutivo se, e somente se, C_X é simétrico para todo $X \in D$. Neste caso, C_X é exatamente o operador de Weingarten da inclusão das folhas de D^\perp em M na direção X .

Observe que, como D é totalmente geodésico, dados $Z \in D$ e $Y \in D^\perp$ temos $\nabla_Z Y \in D^\perp$. De fato, dado $V \in D$, temos $\langle V, Y \rangle = 0$ logo

$$\langle V, \nabla_Z Y \rangle = -\langle \nabla_Z V, Y \rangle = 0,$$

pois $Y \in D^\perp$ e, como D é totalmente geodésico e $Z, V \in D$, então $\nabla_Z V \in D$. Lembramos que a derivada do tensor de decomposição é dada por

$$(\nabla_V C_X)Y = \nabla_V(C_X Y) - C_X \nabla_V Y.$$

A próxima proposição nos fornece uma outra maneira de calcular a derivada do tensor de decomposição que nos será útil posteriormente.

Proposição 1.6.1. *Sejam D uma distribuição totalmente geodésica e $C : D \times D^\perp \rightarrow D^\perp$ o tensor de decomposição de D . Então*

$$(\nabla_V C_X)Y = C_V C_Y + C_{\nabla_V X} Y.$$

Prova: Sejam $X, V \in D$ e $Y \in D^\perp$, temos

$$(\nabla_V C_X)Y = \nabla_V(C_X Y) - C_X \nabla_V Y = -\nabla_V(\overset{h}{\nabla}_Y X) - C_X \nabla_V Y. \quad (1.22)$$

Note que, como D é totalmente geodésico, $\overset{h}{\nabla}_V \overset{v}{\nabla}_Y = 0$. De fato, pela decomposição $TM = D \oplus D^\perp$, temos $\overset{v}{\nabla}_Y X \in D$. Além disso, $V \in D$ e D totalmente geodésico, logo

$$\nabla_V(\overset{v}{\nabla}_Y X) \in D,$$

assim $\overset{h}{\nabla}_V(\overset{v}{\nabla}_Y X) = 0$. Portanto,

$$\overset{h}{\nabla}_V \nabla_Y X = \overset{h}{\nabla}_V \overset{h}{\nabla}_Y X \in D^\perp.$$

Por outro lado, $\nabla_V(\overset{h}{\nabla}_Y X) \in D^\perp$. De fato,

$$\langle \nabla_V(\overset{h}{\nabla}_Y X), Z \rangle = -\langle \overset{h}{\nabla}_Y X, \nabla_V Z \rangle = 0, \quad \forall Z \in D,$$

pois, como D é totalmente geodésico, $\nabla_V Z \in D$. Logo

$$\nabla_V \overset{h}{\nabla}_Y X = \overset{h}{\nabla}_V \overset{h}{\nabla}_Y X \stackrel{(1.23)}{=} \overset{h}{\nabla}_V (\nabla_Y X). \quad (1.23)$$

Substituindo (1.23) em (1.22), obtemos

$$\begin{aligned} (\nabla_V C_X)Y &= -\nabla_V(\overset{h}{\nabla}_Y X) - C_X \nabla_V Y \\ &= -\overset{h}{\nabla}_V \nabla_Y X - C_X \nabla_V Y. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Como $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$, temos

$$R(Y, V)X = \nabla_Y \nabla_V X - \nabla_V \nabla_Y X - \nabla_{[Y, V]} X = 0,$$

e conseqüentemente,

$$-\overset{h}{\nabla}_V \nabla_Y X = -\overset{h}{\nabla}_Y \nabla_V X + \overset{h}{\nabla}_{[Y, V]} X. \quad (1.25)$$

Além disso, como $[Y, V]^v, X \in D$ e D é totalmente geodésico, temos

$$\overset{h}{\nabla}_{[Y, V]^v} X = 0, \quad (1.26)$$

logo

$$\begin{aligned} -\overset{h}{\nabla}_V \nabla_Y X &= \overset{h}{\nabla}_{[Y, V]} X - \overset{h}{\nabla}_Y \nabla_V X \\ &\stackrel{(1.26)}{=} \overset{h}{\nabla}_{[Y, V]^h} X + C_{\nabla_V X} Y \\ &\stackrel{(1.25)}{=} \overset{h}{\nabla}_{\nabla_Y V} X - \overset{h}{\nabla}_{\nabla_V Y} X + C_{\nabla_V X} Y \\ &= -C_X(\overset{h}{\nabla}_V Y) + C_X(\overset{h}{\nabla}_Y V) + C_{\nabla_V X} Y \\ &= C_X C_Y + C_X(\nabla_V Y) + C_{\nabla_V X} Y. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Substituindo (1.27) em (1.24), concluímos que

$$(\nabla_V C_X)Y = C_V C_Y + C_{\nabla_V X} Y.$$

□

Capítulo 2

Imersões com a mesma aplicação de Gauss

Neste capítulo, trataremos de pares de imersões que possuem a mesma aplicação de Gauss. Veremos que tal condição é equivalente à existência de um tensor de Codazzi que comuta com a segunda forma fundamental. Além disso, analisaremos como a conexão correspondente à métrica induzida por cada imersão e a segunda forma fundamental de cada imersão estão relacionadas neste caso. Observamos que, nesse capítulo, ainda não supomos qualquer relação entre as métricas induzidas na variedade pelas imersões, diferente do que será feito no Capítulo 3, onde essas métricas serão consideradas conformes.

2.1 A aplicação de Gauss e tensores de Codazzi

Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma imersão. Cada espaço tangente de M^n é transformado por f em um subespaço n -dimensional de \mathbb{R}^N , ou seja, se $p \in M^n$ então $f_*(T_p M)$ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^N com dimensão n . A correspondência que a cada ponto $p \in M^n$ associa o n -plano $f_*(T_p M)$ é conhecida como *aplicação de Gauss da imersão f* . Observe que esta aplicação generaliza a aplicação normal de Gauss clássica conhecida para superfícies orientáveis em \mathbb{R}^3 . De fato, em \mathbb{R}^3 a aplicação normal de Gauss associa a cada ponto um vetor unitário normal à superfície (orientável) naquele ponto e, como sabemos, neste ambiente um plano fica completamente determinado quando conhecemos o seu vetor normal. Dessa forma, em \mathbb{R}^3 , o plano $f_*(T_p M)$ pode ser substituído pelo seu vetor normal.

Recordamos que o conjunto de todos os n -planos do \mathbb{R}^N é uma variedade diferenciável, conhecida como *variedade Grassmaniana* que denotaremos por $G_{N,n}$ (o leitor pode encontrar mais detalhes em [Cam10], [Lee00], [Tu08] e no volume II de [KN63]). Assim a aplicação de Gauss de uma imersão $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ é a aplicação $F : M^n \rightarrow G_{N,n}$

tal que $F(p) = f_*(T_pM)$. As imersões $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ tem a mesma aplicação de Gauss se os planos $f_*(T_pM)$ e $g_*(T_pM)$ coincidem, para cada $p \in M^n$.

Consideremos agora $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ imersões com a mesma aplicação de Gauss e $p \in M^n$. Então, dado $v \in T_pM$, existe $w \in T_pM$ tal que $g_*v = f_*w$. Seja $\phi_p : T_pM \rightarrow T_pM$ a aplicação que a cada $v \in T_pM$ associa $w \in T_pM$ tal que $g_*v = f_*w$. Tal aplicação é claramente linear e, dessa forma, podemos definir o tensor $\phi : TM \rightarrow TM$ tal que

$$g_* = f_* \circ \phi. \quad (2.1)$$

Como f e g são imersões, conclui-se que o tensor ϕ é invertível. Veremos que esse tensor satisfaz duas propriedades interessantes e relaciona as conexões de f e g determinadas pelas respectivas métricas induzidas, bem como as respectivas segundas formas fundamentais.

Dizemos que ϕ é um *tensor de Codazzi* se satisfaz

$$(\nabla_X\phi)Y = (\nabla_Y\phi)X, \quad \forall X, Y \in TM. \quad (2.2)$$

Dizemos ainda que o tensor ϕ *comuta com a segunda forma fundamental* de uma imersão f se

$$\alpha_f(\phi X, Y) = \alpha_f(X, \phi Y), \quad \forall X, Y \in TM. \quad (2.3)$$

Dada uma imersão isométrica, a seguinte proposição nos afirma que, a existência de outra imersão com a mesma aplicação de Gauss equivale à existência de um tensor de Codazzi que comuta com a segunda forma fundamental de f .

Proposição 2.1.1. *Sejam M^n uma variedade diferenciável e $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma imersão isométrica. Se $g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ é uma imersão com a mesma aplicação de Gauss de f , então o tensor $\phi : TM \rightarrow TM$, definido por $g_* = f_* \circ \phi$, é de Codazzi e comuta com a segunda forma fundamental de f . Reciprocamente, se M^n é uma variedade diferenciável simplesmente conexa e $\phi : TM \rightarrow TM$ é um tensor de Codazzi que comuta com a segunda forma fundamental de f , então existe uma imersão $g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ (única a menos de translação) tal que $g_* = f_* \circ \phi$.*

Prova: Sejam $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ imersões com a mesma aplicação de Gauss. A 1-forma $\omega = g_* = f_* \circ \phi$ em \mathbb{R}^N satisfaz

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) = X(f_*\phi(Y)) - Y(f_*\phi(X)) - f_*\phi([X, Y]).$$

Denotando por $\bar{\nabla}$ a conexão Riemanniana do \mathbb{R}^N , temos

$$d\omega(X, Y) = \bar{\nabla}_X(f_*\phi(Y)) - \bar{\nabla}_Y(f_*\phi(X)) - f_*\phi([X, Y]).$$

Daí, usando a fórmula de Gauss (1.2), obtemos

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y) &= (f_*(\nabla_X\phi Y) + \alpha_f(X, \phi Y)) - (f_*(\nabla_Y\phi X) + \alpha_f(Y, \phi X)) - f_*\phi([X, Y]) \\ &= f_*(\nabla_X\phi Y - \nabla_Y\phi X - \phi([X, Y])) + \alpha_f(X, \phi Y) - \alpha_f(Y, \phi X). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Como a 1-forma ω é exata, temos que ω é fechada, isto é, $d\omega = 0$. Portanto, as componentes normal e tangente de $d\omega(X, Y)$ se anulam, ou seja, $\alpha_f(X, \phi Y) - \alpha_f(Y, \phi X) = 0$ e $f_*(\nabla_X\phi Y - \nabla_Y\phi X - \phi([X, Y])) = 0$. A primeira equação é equivalente a dizer que a segunda forma fundamental de f comuta com ϕ e, como f é imersão, a segunda equação implica em $\nabla_X\phi Y - \nabla_Y\phi X - \phi([X, Y]) = 0$, ou equivalentemente

$$\nabla_X\phi Y - \nabla_Y\phi X - \phi\nabla_X Y - \phi\nabla_Y X = (\nabla_X\phi)Y - (\nabla_Y\phi)X = 0,$$

que equivale a dizer que ϕ é um tensor de Codazzi.

Reciprocamente, se existe um tensor de Codazzi $\phi : TM \rightarrow TM$ que comuta com a segunda forma fundamental de f , podemos definir ω como antes e obtemos a mesma expressão para $d\omega$ encontrada em (2.4). Observe que, sendo ϕ um tensor de Codazzi, a primeira parcela dessa expressão se anula. Como ϕ comuta com a segunda forma de f , a segunda parcela também é nula, logo ω é fechada. Como M é simplesmente conexa, ω é exata e, portanto, existe $g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que $g_* = f_* \circ \phi$. Logo f e g tem a mesma aplicação de Gauss. Como f é imersão, g também é. \square

Apresentamos agora a maneira como as duas conexões de M^n , correspondentes às métricas induzidas por imersões com a mesma aplicação de Gauss, se relacionam, bem como a relação que existe entre as segundas formas fundamentais das imersões.

Proposição 2.1.2. *Sejam $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ duas imersões com a mesma aplicação de Gauss. Então*

$$(i) \quad \tilde{\nabla}_X\phi Y = \phi\nabla_X Y$$

$$(ii) \quad \alpha_g(X, Y) = \alpha_f(\phi X, Y)$$

Prova: Como f e g tem a mesma aplicação de Gauss então $\nabla_X g_* Y = \nabla_X f_* \phi Y$. Pela fórmula de Gauss 1.2, aplicada às imersões f e g , temos

$$\nabla_X f_* \phi Y = f_*(\nabla_X \phi Y) + \alpha_f(X, \phi Y)$$

e

$$\nabla_X g_* Y = g_*(\nabla_X Y) + \alpha_g(X, Y).$$

Desse modo,

$$f_*(\nabla_X \phi Y) + \alpha_f(X, \phi Y) = g_*(\nabla_X Y) + \alpha_g(X, Y) = f_*\phi(\nabla_X Y) + \alpha_g(X, Y),$$

e obtemos o resultado desejado comparando as componentes tangente e normal nesta equação. \square

Capítulo 3

Imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss

Neste capítulo, iniciamos o estudo de imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss. Apresentamos um resultado devido a Vergasta ([Ver92]), que fornece uma condição necessária e suficiente para que duas imersões sejam conformes com a mesma aplicação de Gauss. Após estabelecermos a versão complexa desse resultado, apresentamos uma decomposição global do fibrado tangente complexificado. Em função dessa decomposição obtemos algumas simplificações para as equações de Codazzi e Gauss e alguns casos particulares do Lema de Vergasta.

3.1 O Par (T, φ)

Duas métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$, definidas em uma variedade M , são *conformes* se existe uma função diferenciável $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_2 = e^{2\varphi} \langle \cdot, \cdot \rangle_1.$$

Dizemos que duas imersões são conformes se as métricas induzidas por elas são conformes, isto é, $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ são *imersões conformes* se existe uma função diferenciável $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$, induzidas em M^n por f e g respectivamente, satisfazem

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_g = e^{2\varphi} \langle \cdot, \cdot \rangle_f. \quad (3.1)$$

Quando as imersões possuem a mesma aplicação de Gauss, os planos tangentes determinados por elas coincidem, isto é, $f_*(T_p M) = g_*(T_p M)$, $\forall p \in M$. Dessa forma é possível comparar os vetores desses planos. Mais precisamente, sejam $p \in M$ e $f_*(T_p M) = g_*(T_p M)$. Dado $v \in T_p M$ podemos extrair da relação (3.1) que

$$\|g_*v\| = \|v\|_{g(p)} = e^\varphi \|v\|_{f(p)} = e^\varphi \|f_*v\|,$$

ou equivalentemente,

$$\|e^{-\varphi}g_*v\| = \|f_*v\|.$$

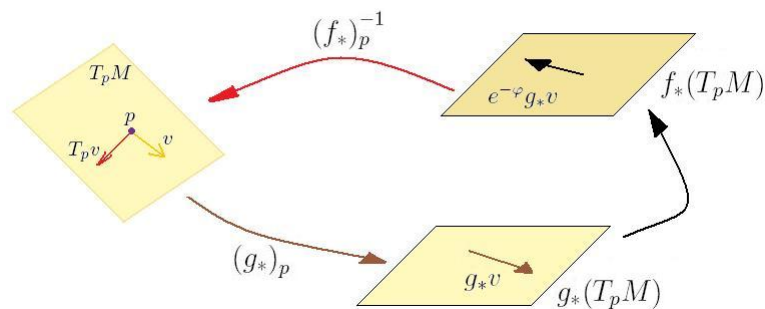
Logo a transformação $T_p : T_pM \rightarrow T_pM$ que a cada v associa $f_*^{-1}e^{-\varphi}g_*v$ é uma transformação ortogonal. Isto define um tensor ortogonal $T : TM \rightarrow TM$, tal que

$$T(v) = f_*^{-1}e^{-\varphi}g_*v,$$

ou seja,

$$g_* = e^\varphi f_* \circ T. \quad (3.2)$$

Comparando a última equação com (2.1) concluímos que $\phi = e^\varphi T$.



De agora em diante, se $f, g : M^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ são imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss, nos referiremos ao tensor T e a aplicação φ dados em (3.1) e (3.2) como o par (T, φ) . Observe que nessas condições T deve satisfazer (2.2) e (2.3), ou seja,

$$(\nabla_X T)Y = (\nabla_Y T)X, \quad \forall X, Y \in TM. \quad (3.3)$$

$$\alpha_f(TX, Y) = \alpha_f(X, TY), \quad \forall X, Y \in TM. \quad (3.4)$$

3.2 O Lema de Kulkarni

Sejam M uma variedade diferenciável e $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ duas métricas para M . O seguinte resultado de Kulkarni [Kul70] responde a seguinte questão: “como se relacionam as conexões Riemanniana das variedades $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ e $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ se as métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ são conformes, isto é, se existe uma função positiva $h \in C^\infty(M)$ tal que $\langle \cdot, \cdot \rangle_2 = h \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle_1$?”

Lema 3.2.1 (Kulkarni[Kul70]). *Sejam M uma variedade diferenciável, $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_2$ duas métricas para M tais que $\langle \cdot, \cdot \rangle_2 = h \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle_1$, com $h = e^{2\varphi}$. Então as*

conexões ∇ e $\tilde{\nabla}$ das variedades Riemannianas $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ e $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$, respectivamente satisfazem

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(\varphi)Y + Y(\varphi)X - \langle X, Y \rangle_1 \nabla \varphi. \quad (3.5)$$

Prova: Seja

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2h} \left\{ X(h)Y + Y(h)X - \langle X, Y \rangle_1 \nabla h \right\}. \quad (3.6)$$

Como a conexão Riemanniana é única, tudo que precisamos fazer é mostrar que a expressão no lado direito de (3.6) define uma conexão simétrica e compatível com a métrica. Usaremos a mesma notação para a conexão de $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ e a conexão definida pela expressão (3.6). Observe que a segunda parcela de (3.6) não se altera se trocarmos a ordem de X e Y . Portanto, a simetria de $\tilde{\nabla}$ decorre da simetria da conexão ∇ . Queremos mostrar que

$$X \langle Y, Z \rangle_2 = \langle \tilde{\nabla}_X Y, Z \rangle_2 + \langle Y, \tilde{\nabla}_X Z \rangle_2, \quad \forall X, Y \in TM. \quad (3.7)$$

Ora, $X \langle Y, Z \rangle_2 = X(h \langle Y, Z \rangle_1) = X(h) \langle Y, Z \rangle_1 + h \langle \nabla_X Y, Z \rangle_1 + h \langle Y, \nabla_X Z \rangle_1$. Enquanto isso, do lado direito de (3.7) temos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla}_X Y, Z \rangle_2 &= h \left\langle \nabla_X Y + \frac{1}{2h} \left\{ X(h)Y + Y(h)X - \langle X, Y \rangle_1 \nabla h \right\}, Z \right\rangle_1 \\ &= h \langle \nabla_X Y, Z \rangle_1 + \left\langle \frac{1}{2} \left\{ X(h)Y + Y(h)X - \langle X, Y \rangle_1 \nabla h \right\}, Z \right\rangle_1 \\ &= h \langle \nabla_X Y, Z \rangle_1 + \frac{1}{2} \left\{ X(h) \langle Y, Z \rangle_1 + Y(h) \langle X, Z \rangle_1 - \langle X, Y \rangle_1 \langle \nabla h, Z \rangle_1 \right\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle Y, \tilde{\nabla}_X Z \rangle_2 &= h \left\langle Y, \nabla_X Z + \frac{1}{2h} \left\{ X(h)Z + Z(h)X - \langle X, Z \rangle_1 \nabla h \right\} \right\rangle_1 \\ &= h \langle Y, \nabla_X Z \rangle_1 + \left\langle Y, \frac{1}{2} \left\{ X(h)Z + Z(h)X - \langle X, Z \rangle_1 \nabla h \right\} \right\rangle_1 \\ &= h \langle Y, \nabla_X Z \rangle_1 + \frac{1}{2} \left\{ X(h) \langle Y, Z \rangle_1 + Z(h) \langle Y, X \rangle_1 - \langle X, Z \rangle_1 \langle Y, \nabla h \rangle_1 \right\}. \end{aligned}$$

Ao somar as expressões acima, usando a definição de gradiente, obtemos

$$\langle \tilde{\nabla}_X Y, Z \rangle_2 + \langle Y, \tilde{\nabla}_X Z \rangle_2 = h \langle \nabla_X Y, Z \rangle_1 + h \langle Y, \nabla_X Z \rangle_1 + X(h) \langle Y, Z \rangle_1 = X \langle Y, Z \rangle_2 = X(h \langle Y, Z \rangle_1),$$

ou seja, a expressão em (3.6) define uma conexão compatível com a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$.

Como a função h é uma função positiva, podemos escrever $h = e^{2\varphi}$, para alguma função $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$. Note que, neste caso,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + \frac{1}{2e^{2\varphi}} \left\{ X(e^{2\varphi})Y + Y(e^{2\varphi})X - \langle X, Y \rangle_1 \nabla(e^{2\varphi}) \right\} \\ &= \nabla_X Y + \frac{1}{2e^{2\varphi}} \left\{ 2e^{2\varphi} X(\varphi)Y + 2e^{2\varphi} Y(\varphi)X - \langle X, Y \rangle_1 2e^{2\varphi} \nabla \varphi \right\} \\ &= \nabla_X Y + X(\varphi)Y + Y(\varphi)X - \langle X, Y \rangle_1 \nabla \varphi. \end{aligned}$$

□

3.3 O Lema de Vergasta - versão real

Voltemos para o nosso problema de determinar os pares de imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss. Como discutimos acima, se as métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ induzidas pelas imersões f e g , respectivamente, são conformes e estas imersões tem a mesma aplicação de Gauss existe um par (T, φ) como na Seção 3.1. O próximo resultado devido a Vergasta [Ver92] nos diz as condições que esse par deve satisfazer.

Lema 3.3.1 (de Vergasta[Ver92]). *Sejam $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss. Então o par (T, φ) , satisfaz*

$$(\nabla_X T)Y = \langle Y, \nabla \varphi \rangle TX - \langle X, Y \rangle T \nabla \varphi. \quad (3.8)$$

Reciprocamente, dados uma imersão $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ de uma variedade Riemanniana simplesmente conexa e um par (T, φ) satisfazendo (3.4) e (3.8), existe uma imersão $g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que f e g são conformes com a mesma aplicação de Gauss.

Prova: Sejam ∇ e $\tilde{\nabla}$ as conexões de $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_f)$ e $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_g)$ respectivamente. Como as imersões são conformes, pelo Lema 3.2.1 temos (3.5). Por outro lado, pela Proposição 2.1.2,

$$T \tilde{\nabla}_X Y = e^{-\varphi} \phi \tilde{\nabla}_X Y = e^{-\varphi} \nabla_X \phi Y = e^{-\varphi} \nabla_X e^\varphi TY.$$

Assim,

$$T \tilde{\nabla}_X Y = e^{-\varphi} (X(e^\varphi)TY + e^\varphi \nabla_X TY) = X(\varphi)TY + \nabla_X TY.$$

Aplicando T em (3.5) e subtraindo da última equação, obtemos

$$0 = T \nabla_X Y + Y(\varphi)TX - \langle X, Y \rangle T \nabla \varphi - \nabla_X TY,$$

ou equivalentemente,

$$\nabla_X TY - T \nabla_X Y + Y(\varphi)TX - \langle X, Y \rangle T \nabla \varphi.$$

Para provar a recíproca, definimos $\phi = e^\varphi T$. Assim

$$\alpha_f(\phi X, Y) = \alpha_f(e^\varphi TX, Y) = e^\varphi \alpha_f(TX, Y) = e^\varphi \alpha_f(X, TY) = \alpha_f(X, \phi Y).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} (\nabla_X \phi)Y &= \nabla_X \phi Y - \phi \nabla_X Y \\ &= \nabla_X (e^\varphi TY) - e^\varphi T \nabla_X Y \\ &= X(e^\varphi)TY + e^\varphi \nabla_X TY - e^\varphi T \nabla_X Y \\ &= e^\varphi (X(\varphi)TY + \nabla_X TY - T \nabla_X Y) \\ &= e^\varphi (X(\varphi)TY + Y(\varphi)TX - \langle X, Y \rangle T \nabla \varphi) \\ &= e^\varphi (Y(\varphi)TX + X(\varphi)TY - \langle Y, X \rangle T \nabla \varphi) \\ &= e^\varphi (Y(\varphi)TX + \nabla_Y TX - T \nabla_Y X) = (\nabla_Y \phi)X. \end{aligned}$$

Logo ϕ é um tensor de Codazzi que comuta com a segunda forma fundamental de f . Dessa forma, pela Proposição 2.1.1, existe uma imersão g , única a menos de translação tal que $g_* = f_* \circ \phi$. Logo f e g são conformes e tem a mesma aplicação de Gauss. \square

3.4 O Lema de Vergasta - versão complexificada

Dados um espaço vetorial V sobre \mathbb{R} e um operador $S : V \rightarrow V$ nem sempre existem autovalores para S . Isto ocorre porque \mathbb{R} não é algebricamente fechado. Por isso, muitas vezes considera-se a extensão de S a $V_{\mathbb{C}}$ já explicada no Capítulo 1. Seguindo esse mesmo raciocínio, queremos estudar os autovalores do tensor $T : TM \rightarrow TM$ para analisar o problema em questão (determinar os pares de imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss) e, para isso, precisaremos estendê-lo ao fibrado tangente complexificado. Como, pela Proposição 3.3.1, T está relacionado com a métrica e com a segunda forma fundamental, precisaremos estender esses dois objetos também.

Denotaremos a complexificação de TM por $TM \otimes \mathbb{C}$ e recordamos que, como comentado no Capítulo 1, a métrica e a segunda forma complexificadas são bilineares e simétricas, isto é,

$$\langle , \rangle : TM \otimes \mathbb{C} \times TM \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

e

$$\alpha_f : TM \otimes \mathbb{C} \times TM \otimes \mathbb{C} \rightarrow TM^{\perp} \otimes \mathbb{C}$$

são bilineares e simétricas, exatamente como no caso real. Observe ainda que, consequentemente, as conexões Riemannianas determinadas por f e g também são complexificadas, $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times TM \otimes \mathbb{C} \rightarrow TM \otimes \mathbb{C}$.

Observação 3.4.1. Após as complexificações descritas acima, o par (T, φ) construído na seção 3.1 também pode ser complexificado. Basta trocar o tensor $T : TM \rightarrow TM$ pela sua extensão complexa $T : TM \otimes \mathbb{C} \rightarrow TM \otimes \mathbb{C}$. Daqui por diante, ao nos referirmos ao par (T, φ) estaremos assumindo que o tensor T é a complexificação do tensor que aparece na seção 3.1.

A proposição anterior assume a seguinte versão complexificada, cuja prova é a mesma da versão real.

Lema 3.4.2 (de Vergasta, Complexificado). *Sejam $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss. Então o par (T, φ) , satisfaz*

$$(\nabla_U T)V = \langle V, \nabla \varphi \rangle TU - \langle U, V \rangle T \nabla \varphi. \quad (3.9)$$

Reciprocamente, dados uma imersão $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ de uma variedade Riemanniana simplesmente conexa e um par (T, φ) satisfazendo (3.9) e $\alpha_f(TU, V) = \alpha_f(U, TV)$, existe uma imersão $g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que f e g são conformes com a mesma aplicação de Gauss.

Como agora T é um tensor complexo, existem n autovalores complexos para T e, como este é um tensor ortogonal, seus autovalores tem módulo igual a um. Note que pontualmente, $TM \otimes \mathbb{C} = L_+ \oplus L_- \oplus L_c$, em que $L_+ = N(T - I)$, $L_- = N(T + I)$, $L_c = \sum_{i=1}^k E_{\lambda_i} \oplus E_{\bar{\lambda}_i} = \sum_{i=1}^k N(T - \lambda_i I) \oplus N(T - \bar{\lambda}_i I)$. Observe que $\lambda_i : M^n \rightarrow \mathbb{C}$ associa a cada $p \in M$ ao autovalor $\lambda_i(p)$ de T_p .

A seguinte proposição nos diz que esta é uma decomposição ortogonal que é “preservada” pela segunda forma fundamental da imersão f .

Proposição 3.4.3. *Sejam $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma imersão e $T : TM \rightarrow TM$ um tensor ortogonal que comuta com a segunda forma fundamental de f . Então*

$$(i) \quad \langle E_\lambda, E_\mu \rangle = 0, \text{ exceto se } \mu = \bar{\lambda}. \text{ Em particular } \langle Z, Z \rangle = 0, \forall Z \in L_c;$$

$$(ii) \quad \alpha_f(E_\lambda, E_\mu) = 0, \text{ exceto se } \mu = \lambda.$$

Prova: Sejam $X \in E_\lambda$ e $Y \in E_\mu$. Queremos mostrar que $\langle X, Y \rangle = 0$. Como T é ortogonal, T preserva produto interno, logo

$$\langle X, Y \rangle = \langle TX, TY \rangle = \langle \lambda X, \mu Y \rangle = \lambda \mu \langle X, Y \rangle = 0,$$

ou seja, $(1 - \lambda \mu) \langle X, Y \rangle = 0$. Como $\mu \neq \frac{1}{\lambda} = \bar{\lambda}$, temos então $\langle X, Y \rangle = 0$, o que conclui a demonstração de (i).

Para o item (ii), usaremos que T comuta com a segunda forma fundamental de f ,

$$\lambda \alpha_f(X, Y) = \alpha_f(TX, Y) = \alpha_f(X, TY) = \mu \alpha_f(X, Y),$$

logo $(\lambda - \mu) \alpha_f(X, Y) = 0$. Portanto se, $\lambda \neq \mu$, temos $\alpha_f(X, Y) = 0$. □

Assumiremos que

$$TM \otimes \mathbb{C} = L_+ \oplus L_- \oplus L_c, \tag{3.10}$$

é uma decomposição global, isto é, cada parcela da decomposição acima é um subfibrado de $TM \otimes \mathbb{C}$. Quando for conveniente denotaremos o bloco complexo $E_{\lambda_i} \oplus E_{\bar{\lambda}_i}$ por B_{λ_i} . Observamos ainda que escreveremos a decomposição (3.10) ainda que algum dos subfibrados seja trivial, isto é, $L = \{0\}$.

Observação 3.4.4. *O par (T, φ) satisfaz (3.4.2) se, e somente se, o par $(-T, \varphi)$ também satisfaz essa equação. Isso nos permite trocar o par (T, φ) por $(-T, \varphi)$, promovendo uma troca entre os fibrados L_+ e L_- . Mais precisamente, sejam (T, φ) e (\tilde{T}, φ) tais que $\tilde{T} = -T$. Se $TM = L_+ \oplus L_- \oplus L_c$ e $TM = \tilde{L}_+ \oplus \tilde{L}_- \oplus \tilde{L}_c$ são as decomposições induzidas por (T, φ) e (\tilde{T}, φ) , respectivamente, então $\tilde{L}_+ = L_-$ e $\tilde{L}_- = L_+$. De maneira que tudo que afirmarmos ou provarmos sobre L_+ valerá automaticamente para L_- .*

A seguir, fornecemos dois casos particulares do Lema de Vergasta obtidos com auxílio de (3.10). Essas equações serão utilizadas posteriormente para provar propriedades dos subfibrados L_+ , L_- e L_c .

Lema 3.4.5. *As seguintes equações são válidas*

$$(T - \mu I)\nabla_Z W = Z(\mu)W - \lambda W(\varphi)Z + \langle Z, W \rangle T\nabla\varphi, \forall Z \in E_\lambda, \forall W \in E_\mu; \quad (3.11)$$

$$(T - \bar{\lambda}I)\nabla_Z \bar{Z} = Z(\bar{\lambda})\bar{Z} - \lambda\bar{Z}(\varphi)Z + \langle Z, \bar{Z} \rangle T\nabla\varphi, \forall Z \in E_\lambda; \quad (3.12)$$

$$(T - \lambda I)\nabla_Z Z = Z(\lambda)Z - \lambda Z(\varphi)Z, \forall Z \in E_\lambda; \quad (3.13)$$

$$(T - \lambda I)\nabla_X Z = X(\lambda)Z - Z(\varphi)X, \forall X \in L_+, \forall Z \in E_\lambda \quad (3.14)$$

Prova: Todas as equações acima decorrem de substituição direta de campos dos respectivos subfibrados em (3.9). Além da definição de cada um dos subfibrados, utiliza-se o item (i) da Proposição 3.4.3. \square

Também serão importantes alguns casos particulares das equações de Gauss e Codazzi, no contexto de uma imersão $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ cuja segunda forma fundamental satisfaz $\alpha_f(E, F) = 0$, se $E \neq F$. Mais precisamente, estaremos interessados em imersões tais que, dados $X \in E$ e $Y \in F$ tem-se $\alpha_f(X, Y) = 0$.

Lema 3.4.6. *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma imersão isométrica cuja segunda forma fundamental satisfaz $\alpha_f(E, F) = 0$, se $E \neq F$. Então, dados $X, Y \in E$ e $Z \in F$, as equações de Gauss e Codazzi assumem, respectivamente as formas*

$$R(X, Y)Z = 0 \quad (3.15)$$

$$\alpha_f(\nabla_Y X, Z) + \alpha_f(Z, \nabla_Y Z) = \alpha_f(\nabla_X Y, Z) + \alpha_f(Y, \nabla_X Z). \quad (3.16)$$

Prova: Sejam $X, Y, Z \in TM$, lembrando que em \mathbb{R}^N temos $\bar{R} = 0$, pela equação de Gauss (1.3) obtemos

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle \alpha_f(Y, W), \alpha_f(X, Z) \rangle - \langle \alpha_f(X, W), \alpha_f(Y, Z) \rangle$$

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle A_{\alpha_f(X, Z)}Y, W \rangle - \langle A_{\alpha_f(Y, Z)}X, W \rangle$$

$$= \langle A_{\alpha_f(X, Z)}Y - A_{\alpha_f(Y, Z)}X, W \rangle$$

$$R(X, Y)Z = A_{\alpha_f(X, Z)}Y - A_{\alpha_f(Y, Z)}X, \forall X, Y, Z \in TM.$$

Como, dados $X, Y \in E$ e $Z \in F$, temos $\alpha_f(X, Z) = \alpha_f(Y, Z) = 0$, concluímos que

$$R(X, Y)Z = 0, \forall X, Y \in E, \forall Z \in F.$$

Para a equação de Codazzi (1.4), temos

$$\bar{\nabla}_X \langle \alpha_f(Y, Z), \eta \rangle = \bar{\nabla}_Y \langle \alpha_f(X, Z), \eta \rangle. \quad (3.17)$$

Desenvolvendo o lado direito de (3.17), temos

$$\begin{aligned}
& X(\langle \alpha_f(Y, Z), \eta \rangle) - \langle \alpha_f(\nabla_X Y, Z), \eta \rangle - \langle \alpha_f(Y, \nabla_X Z), \eta \rangle - \langle \alpha_f(Y, Z), \nabla_X^\perp \eta \rangle = \\
& \langle \nabla_X^\perp \alpha_f(Y, Z), \eta \rangle + \langle \alpha_f(Y, Z), \nabla_X^\perp \eta \rangle - \langle \alpha_f(\nabla_X Y, Z), \eta \rangle - \langle \alpha_f(Y, \nabla_X Z), \eta \rangle - \langle \alpha_f(Y, Z), \nabla_X^\perp \eta \rangle \\
& = \langle \nabla_X^\perp \alpha_f(Y, Z), \eta \rangle - \langle \alpha_f(\nabla_X Y, Z), \eta \rangle - \langle \alpha_f(Y, \nabla_X Z), \eta \rangle \\
& = \langle \nabla_X^\perp \alpha_f(Y, Z) - \alpha_f(\nabla_X Y, Z) - \alpha_f(Y, \nabla_X Z), \eta \rangle.
\end{aligned}$$

Quanto ao lado esquerdo de (3.17), temos

$$\begin{aligned}
& Y(\langle \alpha_f(X, Z), \eta \rangle) - \langle \alpha_f(\nabla_Y X, Z), \eta \rangle - \langle \alpha_f(X, \nabla_Y Z), \eta \rangle - \langle \alpha_f(X, Z), \nabla_Y^\perp \eta \rangle = \\
& \langle \nabla_Y^\perp \alpha_f(X, Z), \eta \rangle + \langle \alpha_f(X, Z), \nabla_Y^\perp \eta \rangle - \langle \alpha_f(\nabla_Y X, Z), \eta \rangle - \langle \alpha_f(X, \nabla_Y Z), \eta \rangle - \langle \alpha_f(X, Z), \nabla_Y^\perp \eta \rangle \\
& = \langle \nabla_Y^\perp \alpha_f(X, Z), \eta \rangle - \langle \alpha_f(\nabla_Y X, Z), \eta \rangle - \langle \alpha_f(X, \nabla_Y Z), \eta \rangle \\
& = \langle \nabla_Y^\perp \alpha_f(X, Z) - \alpha_f(\nabla_Y X, Z) - \alpha_f(X, \nabla_Y Z), \eta \rangle.
\end{aligned}$$

Assim, dados $X, Y, Z \in TM$, temos

$$- \nabla_Y^\perp \alpha_f(X, Z) + \alpha_f(\nabla_Y X, Z) + \alpha_f(Z, \nabla_Y Z) = - \nabla_X^\perp \alpha_f(Y, Z) + \alpha_f(\nabla_X Y, Z) + \alpha_f(Y, \nabla_X Z).$$

Escolhendo agora $X, Y \in E$ e $Z \in F$, temos $\alpha_f(Y, Z) = \alpha_f(X, Z) = 0$, logo

$$\alpha_f(\nabla_Y X, Z) + \alpha_f(Z, \nabla_Y Z) = \alpha_f(\nabla_X Y, Z) + \alpha_f(Y, \nabla_X Z).$$

□

Capítulo 4

O caso das superfícies

No presente capítulo apresentamos a solução do problema proposto por Pierre Samuel para o caso das superfícies, isto é, classificamos todos os pares de imersões de uma superfície M^2 em \mathbb{R}^N que são conformes e tem a mesma aplicação de Gauss.

4.1 O Teorema de Dajczer-Tojeiro para superfícies

Como comentamos na Introdução, muitos matemáticos estudaram o Problema de Samuel para o caso de superfícies, antes mesmo de Pierre Samuel ter enunciado o caso geral e resolvido totalmente o caso das superfícies em [Sam47]. O primeiro deles foi Christoffel, que estudou superfícies em \mathbb{R}^3 , concluindo que, se duas superfícies em \mathbb{R}^3 são conformes e tem a mesma aplicação de Gauss, então essas superfícies são superfícies mínimas ou superfícies isotérmicas. Dizemos que uma superfície é *isotérmica* em \mathbb{R}^3 se admite uma parametrização isotérmica em que as curvas coordenadas são as linhas de curvatura. Uma importante contribuição de Hoffman e Osserman em [HO82] nos diz que, se f e g são duas imersões conformes de uma superfície em \mathbb{R}^N cuja aplicação de Gauss preserva a orientação do 2-plano (isto é, os planos $f_*(T_pM)$ e $g_*(T_pM)$, além de coincidirem, tem a mesma orientação), então f e g são superfícies mínimas ou diferem por homotetia e translação. Outras contribuições interessantes para o caso das superfícies foram dadas por Vergasta em [Ver92], no qual o autor trabalhou com deformações de uma imersão $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^N$ que invertem a orientação, e por Palmer em [Pal88], que estuda as superfícies isotérmicas.

Para generalizar a definição de superfície isotérmica para codimensão maior que um, precisamos observar melhor o que acontece em \mathbb{R}^3 . As direções principais são dadas pelos autovetores da diferencial da aplicação normal de Gauss, ou seja, são vetores que diagonalizam a aplicação de Weingarten na direção normal. Em codimensão maior que um, o problema de encontrar uma parametrização isotérmica cujos vetores coordenados

são levados em vetores que diagonalizam a transformação de Weingarten perde o sentido, pois para cada direção normal ξ temos uma aplicação A_ξ (em codimensão um, só temos uma direção normal e por isso uma aplicação de Weingarten). Então, para resolver esse impasse sem privilegiar nenhuma direção, podemos procurar uma parametrização cujos vetores coordenados diagonalizem simultaneamente as transformações de Weingarten em todas as direções normais. Como sabemos, os operadores A_ξ, A_η são simultaneamente diagonalizáveis se, e somente se, eles comutam, isto é, $A_\xi \circ A_\eta = A_\eta \circ A_\xi$. Tendo em mente a Equação de Ricci (1.5) e o fato de, em \mathbb{R}^N , $\tilde{R} = 0$, concluimos que A_ξ, A_η são simultaneamente diagonalizáveis se, e somente se, o fibrado normal é *flat* (ou seja, $R^\perp = 0$). Dizemos que uma superfície $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^N$ é *isotérmica* se tem fibrado normal *flat* e admite uma parametrização isotérmica cujas curvas coordenadas são as linhas de curvatura. É interessante observar que em [Dar72], o autor encontra um sistema de equações que caracteriza a existência de coordenadas isotérmicas cujas curvas coordenadas são as linhas de curvatura, em \mathbb{R}^3 .

O próximo teorema foi retirado de [DT10], embora já fosse conhecido há muito tempo. O que torna a demonstração aqui apresentada interessante é o fato dela utilizar essencialmente a decomposição (3.10) e o Lema de Vergasta, exatamente como os autores fazem na demonstração do teorema principal do mesmo artigo.

Teorema 4.1.1 (Dajczer-Tojeiro[DT10]). *Sejam $f, g : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^N$, duas imersões com a mesma aplicação de Gauss que induzem métricas conformes em M^2 . Então ocorre uma das seguintes alternativas:*

- (i) $g(M^n)$ é composição de homotetia e translação aplicada a $f(M^n)$;
- (ii) $f(M^n)$ e $g(M^n)$ são superfícies isotérmicas;
- (iii) $f(M^n)$ e $g(M^n)$ são superfícies mínimas.

Prova: Faremos uma análise das possíveis decomposições para o fibrado complexificado. Primeiramente, observemos que a matriz que representa o tensor T é de ordem 2. Dessa forma, ou L_+ e L_- tem posto 1 (isto é, $TM \otimes \mathbb{C} = L_+ \oplus L_-$) ou um deles tem posto 2 (isto é $TM \otimes \mathbb{C} = L_+$ ou $TM \otimes \mathbb{C} = L_-$) ou $TM \otimes \mathbb{C} = L_c = E_\lambda \oplus E_{\bar{\lambda}}$.

- 1º Caso: $TM \otimes \mathbb{C} = L_+ \oplus L_-$

Sejam $X, Y \in TM$ ortonormais que geram L_+ e L_- , respectivamente, ou seja, $\langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle = 1$, $\langle X, Y \rangle = 0$, $TX = X$ e $TY = -Y$. Pelo Lema de Vergasta 3.4.2, temos

$$(\nabla_X T)Y = \langle Y, \nabla \varphi \rangle TX - \langle X, Y \rangle T \nabla \varphi$$

ou seja,

$$\nabla_X TY - T\nabla_X Y = \langle Y, \nabla\varphi \rangle TX - 0 = \langle Y, \nabla\varphi \rangle X.$$

Daí

$$-\nabla_X Y - T\nabla_X Y = Y(\varphi)X.$$

Tomando o produto interno por X temos

$$\langle -\nabla_X Y, X \rangle - \langle T\nabla_X Y, X \rangle = \langle Y(\varphi)X, X \rangle,$$

ou equivalentemente,

$$-\langle \nabla_X Y, X \rangle - \langle \nabla_X Y, T^{-1}X \rangle = Y(\varphi)\langle X, X \rangle.$$

Donde concluímos

$$Y(\varphi) = -2\langle \nabla_X Y, X \rangle = 2\langle \nabla_X X, Y \rangle.$$

Analogamente, $X(\varphi) = 2\langle \nabla_Y Y, X \rangle$. Definindo $\eta_+ = \nabla_X X$ e $\eta_- = \nabla_Y Y$, obtemos o sistema

$$\begin{aligned} Y(\varphi) &= 2\langle \eta_+, Y \rangle, \\ X(\varphi) &= 2\langle \eta_-, X \rangle. \end{aligned}$$

Como $Y(X(\varphi)) - X(Y(\varphi)) = [Y, X](\varphi) = (\nabla_Y X - \nabla_X Y)(\varphi)$, temos

$$\begin{aligned} Y(X(\varphi)) &= Y(2\langle \eta_-, X \rangle) = 2(\langle \nabla_Y \eta_-, X \rangle + \langle \eta_-, \nabla_Y X \rangle), \\ X(Y(\varphi)) &= X(2\langle \eta_+, Y \rangle) = 2(\langle \nabla_X \eta_+, Y \rangle + \langle \eta_+, \nabla_X Y \rangle). \end{aligned}$$

Como $TM \otimes \mathbb{C} = L_+ \oplus L_-$ é gerado por $\{X, Y\}$, temos

$$\begin{aligned} \eta_+ &= \nabla_X X = \langle \eta_+, Y \rangle Y, \\ \eta_- &= \nabla_Y Y = \langle \eta_-, X \rangle X, \\ \nabla_X Y &= -\langle \eta_+, Y \rangle X \end{aligned}$$

e

$$\nabla_Y X = -\langle \eta_-, X \rangle Y.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} (\nabla_Y X - \nabla_X Y)(\varphi) &= (\nabla_Y X)(\varphi) - (\nabla_X Y)(\varphi) \\ &= -\langle \eta_-, X \rangle Y(\varphi) - (-\langle \eta_+, Y \rangle X(\varphi)) \\ &= -\langle \eta_-, X \rangle \cdot 2\langle \eta_+, Y \rangle + \langle \eta_+, Y \rangle \cdot 2\langle \eta_-, X \rangle = 0, \\ Y(X(\varphi)) &= 2(\langle \nabla_Y \eta_-, X \rangle + \langle \eta_-, \nabla_Y X \rangle) \\ &= 2(\langle \nabla_Y \eta_-, X \rangle + \langle \eta_-, -\langle \eta_-, X \rangle Y \rangle) \\ &= 2(\langle \nabla_Y \eta_-, X \rangle - \langle \eta_-, X \rangle \langle \eta_-, Y \rangle) = 2\langle \nabla_Y \eta_-, X \rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
X(Y(\varphi)) &= 2(\langle \nabla_X \eta_+, Y \rangle + \langle \eta_+, \nabla_X Y \rangle) \\
&= 2(\langle \nabla_X \eta_+, Y \rangle + \langle \eta_+, -\langle \eta_+, Y \rangle X \rangle) \\
&= 2(\langle \nabla_X \eta_+, Y \rangle - \langle \eta_+, Y \rangle \langle \eta_+, X \rangle) = 2\langle \nabla_X \eta_+, Y \rangle.
\end{aligned}$$

Assim, a condição $Y(X(\varphi)) - X(Y(\varphi)) = (\nabla_Y X - \nabla_X Y)(\varphi)$ nos fornece

$$\langle \nabla_Y \eta_-, X \rangle = \langle \nabla_X \eta_+, Y \rangle. \quad (4.1)$$

Essa é exatamente a condição para existência de coordenadas isotérmicas em \mathbb{R}^3 , que pode ser encontrada em [Dar72]. Se mostrarmos agora que o fibrado normal é flat, concluiremos que essas superfícies tem que ser isotérmicas. Ora, pelo item (ii) do Lema 3.4.3 temos $\alpha(X, Y) = 0$, logo X e Y são direções principais e o fibrado normal da superfície é flat. Portanto, f e g são superfícies isotérmicas. Reciprocamente, qualquer superfície isotérmica simplesmente conexa admite uma única deformação conforme preservando a aplicação de Gauss. Esta deformação é chamada *superfície isotérmica dual*.

- 2º Caso $TM \otimes \mathbb{C} = L_+$ ou $TM \otimes \mathbb{C} = L_-$

Sejam X, Y ortonormais gerando L_+ . Por (3.9),

$$\nabla_X Y - T\nabla_X Y = Y(\varphi)X,$$

portanto

$$\langle \nabla_X Y, X \rangle - \langle T\nabla_X Y, X \rangle = \langle Y(\varphi)X, X \rangle,$$

ou equivalentemente,

$$\langle \nabla_X Y, X \rangle - \langle \nabla_X Y, T^{-1}X \rangle = Y(\varphi)\langle X, X \rangle,$$

isto é,

$$Y(\varphi) = 0.$$

Analogamente $X(\varphi) = 0$, portanto, $\nabla\varphi \perp L_+$, ou seja, $\nabla\varphi = 0$. Neste caso, $\phi = e^\varphi T = kT = kI$, com $k \in \mathbb{R}$. Logo f e g diferem por homotetia e translação.

- 3º Caso: $TM \otimes \mathbb{C} = L_c = E_\lambda \oplus E_{\bar{\lambda}}$

Seja $Z \in E_\lambda$ não nulo. Então tomando o produto interno com $\bar{Z} \in E_{\bar{\lambda}}$ em (3.13) obtemos

$$Z(\lambda)\langle Z, \bar{Z} \rangle + \lambda\langle \nabla_Z Z, \bar{Z} \rangle - \langle T\nabla_Z Z, \bar{Z} \rangle = \lambda Z(\varphi)\langle Z, \bar{Z} \rangle,$$

isto é,

$$(Z(\lambda) - \lambda Z(\varphi))\langle Z, \bar{Z} \rangle + \lambda\langle \nabla_Z Z, \bar{Z} \rangle - \langle \nabla_Z Z, T^{-1}\bar{Z} \rangle = 0,$$

onde levando-se em conta que $T^{-1}\bar{Z} = \lambda\bar{Z}$ e $\langle Z, \bar{Z} \rangle \neq 0$, temos

$$\bar{\lambda}Z(\lambda) = Z(\varphi). \quad (4.2)$$

Como λ tem módulo um, podemos dizer que $\lambda = e^{i\theta}$, assim

$$Z(\lambda) = Z(e^{i\theta}) = ie^{i\theta}Z(\theta) = i\lambda Z(\theta),$$

e comparando com a equação (4.2) temos $Z(\varphi) = iZ(\theta)$. Escolhendo um sistema de coordenadas isotérmicas $Z = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right)$, temos

$$Z(\varphi) = \frac{\partial}{\partial z}\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} - i\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right),$$

e

$$iZ(\theta) = i\frac{\partial}{\partial z}\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}i + \frac{\partial\theta}{\partial v}\right),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial u} &= \frac{\partial\theta}{\partial v}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} &= -\frac{\partial\theta}{\partial u}. \end{aligned}$$

Logo a condição anterior é equivalente a φ e θ serem harmônicas conjugadas. Como, pelo item (ii) da Proposição 3.4.3, temos $\alpha_f(Z, \bar{Z}) = 0$ concluímos que f é uma superfície mínima. Como M^2 é simplesmente conexa, se (u, v) são coordenadas isotérmicas globais, então a família de todas as deformações g da imersão f tal que f e g são conformes e tem a mesma aplicação de Gauss, está em correspondência com o conjunto das funções holomorfas $\psi = \varphi + i\theta$. Além disso, o elemento dessa família que corresponde a ψ é a superfície mínima

$$g = \int e^\psi f_z dz. \quad (4.3)$$

□

Observação 4.1.2. Se $\nabla\varphi = 0$ no 1º caso, então (4.1) é igual a zero. Isso implica que as curvas integrais de X e Y são geodésicas. Como pela Proposição 3.4.3 temos $\alpha_f(X, Y) = 0$, segue que $f = \beta \times \gamma$ é um produto de duas curvas enquanto $g = \beta \times (-\gamma)$, a menos de homotetia e translação. No terceiro caso, $\nabla\varphi = 0$ implica em λ constante e, portanto, f e g são membros de uma família associada de superfícies mínimas a menos de homotetia.

Capítulo 5

O produto warped de imersões

Neste capítulo apresentamos as definições de produto twist e produto warped de variedades, comparando-as e exemplificando especialmente o produto warped. Em seguida citamos alguns teoremas de decomposição de variedades em produtos. Os teoremas de G. de Rham[KN63] (Volume 1) e Hiepko [Hi79] dão condições suficientes para que uma variedade seja isométrica a uma variedade produto Riemanniano e a um produto warped de variedades, respectivamente. Outro teorema de decomposição interessante é o de J.D. Moore que fornece condições suficientes para que uma imersão isométrica $f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ de uma variedade produto $M = M_0 \times \dots \times M_k$, possa ser descrita como produto de imersões. Após o Lema de Nölker que fornece todas as maneiras de escrever \mathbb{R}^N como produto warped de variedades, definimos o produto warped de imersões buscando tornar este conceito mais intuitivo com um exemplo motivador. Finalmente apresentamos uma generalização do Teorema de Moore, o Teorema de Nölker no caso do \mathbb{R}^N (visto em [Nol96], onde também encontramos o Teorema de Hiepko aqui enunciado). O Leitor interessado em mais detalhes sobre produto warped de imersões poderá consultar [Nol96]. Para apresentação do produto twist e warped seguimos as idéias desse artigo e de [Toj06].

5.1 Produtos twist e warped de variedades

Dadas duas variedades Riemannianas $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$, $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle_N)$ e funções diferenciáveis $\rho_1 : M \times N \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $\rho_2 : M \times N \rightarrow \mathbb{R}_+$ definimos o *produto twist* de M e N como a variedade Riemanniana $(M \times^\rho N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ com a métrica

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \rho_1^2 \circ (\pi_M)_* \langle \cdot, \cdot \rangle_M + \rho_2^2 \circ (\pi_N)_* \langle \cdot, \cdot \rangle_N \text{ e } \rho = (\rho_1, \rho_2).$$

Sendo $\pi_M : M \times N \rightarrow M$ a projeção em M e $\pi_N : M \times N \rightarrow N$ a projeção em N . Nesse caso, dizemos que ρ_1, ρ_2 são as *funções twist*. Observe que esta definição generaliza a

noção de variedade produto, em que

$$\langle , \rangle = \langle , \rangle_M + \langle , \rangle_N,$$

ou seja, a variedade produto é o produto twist quando $\rho_1 = \rho_2 \equiv 1$. Assim, podemos pensar o produto twist de variedades como sendo a variedade produto $M \times N$ munida de uma métrica obtida como uma “torção” da métrica produto usual, entendemos por “torção” uma deformação por uma função diferenciável, que desempenha o mesmo papel dos pesos em uma média ponderada.

Outro caso particular do produto twist é quando $\rho_1 \equiv 1$ e $\rho_2 = \rho \circ \pi_N$ em que $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}_+$, isto é, quando a torção não é feita na primeira variedade e a torção feita na segunda só depende do ponto de M . Mais precisamente, dadas duas variedades Riemannianas $(M, \langle , \rangle_M), (N, \langle , \rangle_N)$ e uma função diferenciável $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}_+$, definimos o *produto warped de M e N* , denotado por $M \times_\rho N$, como sendo a variedade Riemanniana $(M \times N, \langle , \rangle)$ em que

$$\langle , \rangle = \langle , \rangle_M + \rho^2 \langle , \rangle_N,$$

e nesse caso ρ é chamada de *função warping*.

Apresentaremos a seguir as generalizações das definições acima ao produto de n variedades. Sejam M_0, \dots, M_{n-1} variedades Riemannianas, $M = M_0 \times \dots \times M_{n-1}$ e $\rho_i : M \rightarrow \mathbb{R}_+$. Denotando por \langle , \rangle_i a métrica de M_i e a π_i a projeção $\pi_i : M \rightarrow M_i$, definimos a *métrica produto twist de M* , por

$$\langle , \rangle_T = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i^2 (\pi_i)_* \langle , \rangle_i.$$

Sob condições semelhantes, com a ressalva de que a $\rho_0 \equiv 1$ e $\rho_i : M_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$, se $i > 0$, definimos a *métrica produto warped* por

$$\langle , \rangle_W = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i^2 (\pi_0)_* \langle , \rangle_i.$$

A variedade Riemanniana (M, \langle , \rangle_T) é chamada *produto twist de M_0, \dots, M_{n-1}* e é denotada por ${}^\rho \prod_{i=0}^{n-1} M_i$, em que $\rho = (\rho_0, \dots, \rho_{n-1})$. Nesse caso, ρ_i são chamadas de *funções twist*. A variedade Riemanniana (M, \langle , \rangle_W) é chamada *produto warped de M_0, \dots, M_{n-1}* e é denotada por $M_0 \times_\rho \prod_{i=1}^{n-1} M_i$, em que $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_{n-1})$. Nesse caso, ρ_i são chamadas *funções warping*.

Como neste trabalho temos um interesse maior em produtos warped, veremos agora alguns exemplos de métrica warped e produto warped.

Exemplo 5.1.1 (Coordenadas cilíndricas). Sejam M_0 o semi-plano $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ e M_1 a esfera $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$. Considere a função warping

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (r, z) &\mapsto r \end{aligned}$$

então a variedade $M_0 \times_\sigma M_1$ é a variedade $M_0 \times M_1$ munida com a métrica

$$\begin{aligned} \langle (V_1, W_1), (V_2, W_2) \rangle_{((r,z), \cos \theta, \sin \theta)} &= \langle V_1, V_2 \rangle_{(r,z)} + r^2 \langle W_1, W_2 \rangle_{(\cos \theta, \sin \theta)} \\ &= \langle V_1, V_2 \rangle + r^2 \langle W_1, W_2 \rangle. \end{aligned}$$

Note que $M_0 \times_\sigma M_1$ é isométrica a $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Para verificar isto, basta considerar a seguinte aplicação (coordenadas cilíndricas em \mathbb{R}^3)

$$\begin{aligned} \psi : M_0 \times_\sigma M_1 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ ((r, z), \cos \theta, \sin \theta) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \end{aligned}$$

De fato, considere \mathbb{R}^3 parametrizado pelas coordenadas cilíndricas

$$X(r, \theta) = (x(r, \theta), y(r, \theta), z(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z),$$

$M_0 \times_\sigma M_1$ parametrizado por

$$Y(r, \theta) = ((r, z), \cos \theta, \sin \theta)$$

e tomemos uma curva $\alpha(t) = (r(t), \theta(t))$ em \mathbb{R}^2 . Então as curvas $X(\alpha(t)) = X(t)$ e $Y(\alpha(t)) = Y(t)$ são tais que

$$X'(t) = (r'(t) \cos \theta(t) - r(t) \theta'(t) \sin \theta(t), r'(t) \sin \theta(t) + r(t) \theta'(t) \cos \theta(t), z'(t))$$

e

$$Y'(t) = ((r'(t), z'(t)), -\theta'(t) \sin \theta(t), \theta'(t) \cos \theta(t)).$$

Logo

$$\begin{aligned} \|X'(t)\|^2 &= \langle X'(t), X'(t) \rangle_{(x,y,z)} = \{r'(t)\}^2 + \{r(t)\theta'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2 \\ \|Y'(t)\|^2 &= \langle Y'(t), Y'(t) \rangle_{((r,z), \cos \theta, \sin \theta)} \\ &= \langle (r', z'), (r', z') \rangle + \{r\}^2 \langle (-\theta' \sin \theta, \theta' \cos \theta), (-\theta' \sin \theta, \theta' \cos \theta) \rangle \\ &= \{r'(t)\}^2 + \{r(t)\theta'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2. \end{aligned}$$

Exemplo 5.1.2 (Coordenadas esféricas). Sejam $M_0 = \mathbb{R}_+$ e M_1 a esfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Considere a função warping

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ r &\mapsto r \end{aligned}$$

então a variedade $M_0 \times_\sigma M_1$ é a variedade $M_0 \times M_1$ munida com a métrica

$$\begin{aligned} \langle (V_1, W_1), (V_2, W_2) \rangle_{(r, \cos \theta, \sin \theta)} &= \langle V_1, V_2 \rangle_r + r^2 \langle W_1, W_2 \rangle_{(\cos \theta, \sin \theta)} \\ &= \langle V_1, V_2 \rangle + r^2 \langle W_1, W_2 \rangle. \end{aligned}$$

Note que $M_0 \times_\sigma M_1$ é isométrica a $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Para verificar isto, basta considerar a seguinte aplicação (coordenadas esféricas em \mathbb{R}^3)

$$\begin{aligned} \psi : M_0 \times_\sigma M_1 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \cos \theta, \sin \theta) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

A verificação deste fato é inteiramente análoga àquela do exemplo anterior.

5.2 Teoremas de decomposição

Uma ideia muito comum em matemática é procurar decompor um objeto em partes mais simples. Assim acontece, por exemplo, com os números inteiros, que podem ser decompostos em produto de primos e com os grupos finitos, que se escrevem como produto de grupos simples. Da mesma forma, em geometria existem dois teoremas de decomposição, cujas generalizações serão importantes para o restante da dissertação. O primeiro deles é o Teorema de G. de Rham que fornece condições para que uma variedade possa ser fatorada como produto riemanniano de variedades.

Teorema 5.2.1 (de Rham[KN63]). *Seja M uma variedade Riemanniana simplesmente conexa e completa. Assuma que $TM = TM_1 \oplus TM_2$ é uma decomposição em subfibrados paralelos tal que, em cada ponto $p \in M$, os subespaços $T_p M_1, T_p M_2$ são invariantes pelo grupo de holonomia linear Ψ_p . Sejam M_1 e M_2 as variedades integrais máximas de TM_1 e TM_2 , respectivamente. Então M é isométrica ao produto riemanniano de M_1 por M_2 .*

O leitor interessado em mais detalhes poderá consultar o volume I de [KN63]. O Teorema de G. de Rham foi generalizado por S. Hiepko para o caso em que a variedade tem uma decomposição adequada do seu fibrado tangente. Nesse caso a variedade pode ser “fatorada” como produto warped de variedades Riemannianas. O resultado a seguir, enunciado em [Nol96], é uma generalização natural do teorema obtido por Hiepko em [Hi79] para o produto de duas variedades. Lembramos que a folheação canônica de $M = M_0 \times \dots \times M_k$ determinada por M_i é, em cada ponto $p = (p_0, \dots, p_k) \in M$, dada por

$$L_i(p) = \{p_0\} \times \dots \times \{p_{i-1}\} \times M_i \times \{p_{i+1}\} \times \dots \times \{p_k\}.$$

Teorema 5.2.2 (Hiepko[Hi79]). *Sejam M uma variedade Riemanniana e $TM = \bigoplus_{i=0}^k E_i$ uma decomposição ortogonal em subfibrados vetoriais não triviais tais que cada E_i é esférico e cada E_i^\perp é totalmente geodésico. Então*

(i) Para cada ponto $p = (p_0, \dots, p_k) \in M$, existe uma isometria ψ de um produto warped $M_0 \times_{\rho_1} M_1 \times \dots \times_{\rho_k} M_k$ sobre uma vizinhança de p em M tal que

$$\rho_1(p_0) = \dots = \rho_k(p_0) = 1 \quad (5.1)$$

e

$$\psi(L_p) \text{ é uma variedade integral de } E_i; \quad (5.2)$$

(ii) Se M é simplesmente conexa e completa então, para cada ponto $p \in M$, existe uma isometria de um produto warped $M_0 \times_{\rho_1} M_1 \times \dots \times_{\rho_k} M_k$ sobre M satisfazendo (5.1) e (5.2).

O segundo teorema de decomposição a que nos referimos na introdução desta seção é o análogo extrínseco do Teorema de de Rham. O próximo teorema devido a J.D. Moore [Mo71], fornece uma condição para que uma imersão isométrica $f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ possa ser fatorada em produto de imersões $f_i : M_i \rightarrow N_i$ em que N_i são subespaços euclidianos de \mathbb{R}^N .

Teorema 5.2.3 (J.D. Moore). *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma imersão isométrica, em que a variedade produto $M = M_0 \times \dots \times M_k$ é tal que cada M_i é conexa. Além disso, a segunda forma fundamental de f satisfaz*

$$\alpha_f(X, Y) = 0, \quad \forall (X, Y) \in T_p L_i \times T_p L_j, \quad \text{com } i \neq j.$$

em que L_0, \dots, L_k são as folheações canônicas de M determinadas por M_0, \dots, M_k respectivamente. Então existem uma isometria $\psi : N_0 \times \dots \times N_k \rightarrow \mathbb{R}^N$ e k imersões $f_i : M_i \rightarrow N_i$, em que cada N_i é um espaço euclidiano, satisfazendo

$$f = \psi \circ (f_0 \times \dots \times f_k),$$

ou seja, f é um produto Riemanniano de f_0, \dots, f_k .

Note que, para o Teorema de Moore, o ambiente em questão já possui em si uma estrutura natural como produto ou, seguindo a nomenclatura de [Nol96], uma representação produto ψ que nos permite “encaixar” cada f_i . Em outras palavras, a estrutura natural de \mathbb{R}^N como produto, permite definir facilmente o produto extrínseco de imersões (como faremos na próxima seção) utilizando uma isometria existente entre o espaço ambiente e o produto cartesiano dos subespaços N_i . Dessa forma, antes de qualquer tentativa de generalização desse Teorema, precisamos nos perguntar quais as representações de \mathbb{R}^N em produtos twist ou warped. Nölker encontrou as representações em produto warped de ambientes de curvatura seccional constante no Teorema 7 de [Nol96]. Para uso posterior enunciamos abaixo o caso de \mathbb{R}^N .

Lema 5.2.4 (Nölker[Nol96]). *Sejam $f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma imersão isométrica, p um ponto de \mathbb{R}^N , $N \geq 2$ e $V_i \subset T_p M$ subespaços vetoriais não triviais tais que $T_p M = \bigoplus_{i=0}^k V_i$, $k \geq 1$, é uma decomposição ortogonal de $T_p M$. Sejam ainda $z_1 \dots z_k \in V_0$ vetores dois a dois ortogonais. Denote por N_i , $i = 1, \dots, k$ a esfera de \mathbb{R}^N determinada por (p, V_i, z_i) , isto é, a esfera de \mathbb{R}^N tangente a V_i em p com vetor curvatura média (normal) z_i . Defina*

$$N_0 := p - \sum_{z_i \neq 0} \frac{z_i}{\|z_i\|^2} + \{\bar{p} \in V_0 : \langle z_i, \bar{p} \rangle < 0, \forall z_i \neq 0\}$$

e, para $i = 1, \dots, k$,

$$\begin{aligned} \sigma_i : N_0 &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ p &\mapsto 1 + \langle z_i, p - \bar{p} \rangle. \end{aligned}$$

Então a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : N_0 \times_{\sigma_1} N_1 \times \dots \times N_k &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ (p_0, \dots, p_k) &\mapsto p_0 + \sum_{i=1}^k \sigma_i(p_0)(p_i - p) \end{aligned}$$

é uma isometria sobre o subconjunto aberto denso

$$N^\psi := \mathbb{R}^N \setminus \left(p - \sum_{z_i \neq 0} \frac{z_i}{\|z_i\|^2} + \bigcup_{z_i \neq 0} ([z_i] \oplus V_i)^\perp \right).$$

Cada isometria ψ determinada por $(p; \bigoplus_{i=0}^n V_i; z_1, \dots, z_n)$ será chamada de *representação produto warped* de \mathbb{R}^N e às vezes também se diz que ψ é determinada por $(p; N_0, N_1, \dots, N_k)$. Na verdade, segundo o Corolário 18 de [Nol96], toda representação de \mathbb{R}^N em produto warped ou coincide com a representação acima ou é uma restrição dela, de modo que o lema anterior fornece todas as representações produto warped de \mathbb{R}^N .

É interessante observar que a existência de uma esfera determinada por (p, V, z) se assemelha muito ao Axioma das r -esferas. Uma subvariedade umbílica de uma variedade Riemanniana é uma *esfera extrínseca* quando tem vetor curvatura média paralelo na conexão normal. Dizemos que uma variedade Riemanniana M^n , $n \geq 3$, satisfaz o *axioma das r -esferas*, com $r \geq 2$ fixo se, para todo ponto $p \in M$ e todo subespaço $L \subset T_p M$, existe uma esfera extrínseca passando por p cujo espaço tangente em p é L . Foi demonstrado por Leung e Nomizu em [LN71] que se M satisfaz o axioma das r -esferas então M tem curvatura seccional constante. O leitor interessado poderá encontrar mais detalhes sobre isto na Seção 1.3 de [Daj90]. Assim, num espaço de curvatura constante, dados um ponto p e um subespaço V , existe uma esfera extrínseca que é tangente a V no ponto p . O resultado anterior admite que dados um ponto p , um subespaço $V \subset \mathbb{R}^N$ e um vetor z é possível obter uma esfera extrínseca que é tangente a V em p e cujo vetor curvatura média é z .

Antes de apresentarmos a generalização do Teorema de Moore, precisaremos definir o produto warped de imersões.

5.3 Produtos warped de imersões

Como comentamos na seção anterior, a representação de \mathbb{R}^N em produto é tão natural que nos induz a definir o produto extrínseco de variedades Riemannianas ou, mais precisamente, o produto de imersões Riemannianas. Sejam $f_i : M_i \rightarrow N_i$, $i = 1 \dots n$, imersões em que cada N_i é um subespaço de \mathbb{R}^N satisfazendo $\sum_{i=1}^n \dim(N_i) = N$, dizemos que a imersão

$$\begin{aligned} f : M_1 \times \dots \times M_n &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ (p_1, \dots, p_n) &\mapsto (f_1(p_1), \dots, f_n(p_n)) \end{aligned}$$

é o *produto extrínseco de variedades Riemannianas* ou, simplesmente, *produto de imersões Riemannianas*, denotado por $f = f_1 \times \dots \times f_n$.

Antes de definir o produto warped de imersões vejamos um exemplo que motiva essa definição.

Exemplo 5.3.1 (Superfície de Rotação). Sejam J um intervalo aberto e

$$\begin{aligned} c : J &\rightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ t &\mapsto (\rho(t), \beta(t)) \end{aligned}$$

uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Consideremos agora as variedades $M_0 = J$, $M_1 = \mathbb{S}^1$, $M_0 \times_\rho M_1$. A imersão

$$\begin{aligned} f : M_0 \times_\rho M_1 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, \cos \theta, \sin \theta) &\mapsto (\rho(t) \cos \theta, \rho \sin \theta, \beta(t)) \end{aligned}$$

parametriza globalmente a superfície obtida pela rotação de c em torno do eixo z . Note que f pode ser obtida pela composição das coordenadas cilíndricas de \mathbb{R}^3 com o produto cartesiano de c e $id_{\mathbb{S}^1}$, isto é, sendo

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (r, z) &\mapsto r \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \psi : (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \times_{\sigma} \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ ((r, z), \cos \theta, \sin \theta) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \end{aligned}$$

temos

$$f = \psi(c \times id_{\mathbb{S}^1}) = \psi(\rho, \beta, \cos \theta, \sin \theta),$$

além disso, $\rho = \sigma \circ c$.

Seja $\psi : N_0 \times_{\sigma_1} N_1 \times \dots \times_{\sigma_k} N_k \rightarrow \mathbb{R}^N$ a representação produto warped de \mathbb{R}^N , determinada por $(p, N_0, N_1, \dots, N_k)$ ou $\psi = Id : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$. Sejam $f_i : M_i \rightarrow N_i$, $i = 0, \dots, k$, imersões isométricas e $\rho_i := \sigma_i \circ f_0 : N_0 \rightarrow \mathbb{R}$. O *produto warped extrínseco* ou,

simplesmente, *produto warped de imersões* é a imersão isométrica $f := \psi \circ (f_0 \times \dots \times f_k)$, dada por

$$\begin{aligned} f : M_0 \times_{\rho_1} M_1 \times \dots \times_{\rho_k} &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ (p_0, p_1, \dots, p_k) &\mapsto f_0(p) + \sum_{i=1}^k \rho_i^2(p_0)(f_i(p_i) - p). \end{aligned}$$

Observe que, na definição acima, o produto warped das imersões $f_i : M_i \rightarrow N_i$ é uma imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ em que M é um produto warped de cada M_i , dado por $M := M_0 \times_{\rho_1} M_1 \times \dots \times_{\rho_k}$ e $\rho_i := \sigma_i \circ f_0$.

Agora estamos em condições de enunciar uma generalização do Teorema de J.D. Moore.

Teorema 5.3.2 (Nölker[Nol96]). *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma imersão isométrica de um produto warped $M = M_0 \times_{\rho_1} M_1 \times \dots \times_{\rho_k}$, $k \geq 1$, de variedades Riemannianas conexas tal que a segunda forma fundamental de f satisfaz*

$$\alpha_f(X, Y) = 0, \forall (X, Y) \in T_p L_i \times T_p L_j, \text{ com } i \neq j,$$

em que L_0, \dots, L_k são as folheações canônicas de M determinadas por M_0, \dots, M_k respectivamente. Seja $p = (p_0, \dots, p_k) \in M$ tal que $\rho_1(p_0) = \dots = \rho_k(p_0) = 1$. Então f é um produto warped de imersões f_i , mais precisamente:

(i) Para cada $i = 0, \dots, k$ definimos $f_i : M_i \rightarrow \mathbb{R}^N$ por

$$f_i(x) = (p_0, \dots, p_{i-1}, x, p_{i+1}, \dots, p_k),$$

então cada f_i é uma imersão isométrica e

$$f(x) = f_0(x_0) + \sum_{i=1}^k \rho_i^2(x_0)(f_i(x_i) - f(p)), \forall x \in M.$$

(ii) Se N_i é a menor esfera de f_i , para $i = 1, \dots, k$ e V_i, z_i são, nessa ordem, o espaço tangente e o vetor curvatura média de N_i em $f(p)$, então $\langle V_i, V_j \rangle = 0$, se $i \neq j$ e $z_1, \dots, z_k \in V_0 := \left(\bigoplus_{i=1}^k V_i \right)^\perp$. Portanto, $(f(p), N_1, \dots, N_k)$ determina uma representação produto warped de \mathbb{R}^N, ψ . Ademais, $f(M_0) \subset N_0$ e $\rho_i = \sigma_i \circ f_0$ para $i = 1, \dots, k$. Consequentemente, $f = \psi \circ (f_0 \times \dots \times f_k)$, onde $f_i : M_i \rightarrow N_i$.

Como neste trabalho o fibrado de M está sendo decomposto em no máximo três subfibrados (a saber L_+, L_- e L_c), sendo que L_c sempre tem dimensão par, usaremos as seguintes representações produto warped de \mathbb{R}^N . A primeira, para o produto de duas imersões, é dada por

$$\begin{aligned} \psi_1 : \mathbb{R}_+^m \times_{x_m} \mathbb{S}^{N-m} &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ (X, Y) &\mapsto (x_1, \dots, x_{m-1}, x_m Y) = (x_1, \dots, x_{m-1}, x_m y_1, \dots, x_m y_m). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Para o produto de três imersões, usaremos

$$\begin{aligned} \psi_2 : \mathbb{R}_*^m \times_{x_{m-1}} \mathbb{S}^{m_1} \times_{x_m} \mathbb{S}^{m_2} &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ (X, Y_1, Y_2) &\mapsto (x_1, \dots, x_{m-2}, x_{m-1}Y_1, x_m Y_2), \end{aligned} \tag{5.4}$$

em que $N = m + m_1 + m_2$ e $\mathbb{R}_*^m = \{(x_1, \dots, x_m) : x_{m-1}, x_m > 0\}$.

Dessa forma, podemos utilizar as seguintes definições (como feito em [DT10]). Dadas imersões $f_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}_+^m$, $f_2 : M_2 \rightarrow \mathbb{S}^{N-m}$ definimos o *produto warped das imersões* f_1, f_2 como sendo a imersão $f : M_1 \times M_2 \rightarrow \mathbb{R}^N$ dada por

$$f = \psi_1 \circ (f_1 \times f_2) := \psi(f_1, f_2).$$

Analogamente para o produto warped de 3 imersões $f_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}_*^m$, $f_2 : M_2 \rightarrow \mathbb{S}^{m_1}$ e $f_3 : M_3 \rightarrow \mathbb{S}^{m_2}$ definimos o *produto warped triplo das imersões* f_1, f_2, f_3 como sendo a imersão $f : M_1 \times M_2 \times M_3 \rightarrow \mathbb{R}^N$ dada por

$$f = \psi_2 \circ (f_1 \times f_2 \times f_3).$$

Capítulo 6

Mais alguns exemplos

Neste capítulo, apresentamos exemplos de imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss em adição às superfícies obtidas no Capítulo 4. Esses exemplos aparecerão na classificação obtida no teorema principal deste trabalho.

6.1 O caso trivial

Nesta seção estudamos o caso em que a variedade M , domínio de duas imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss, é um aberto de um espaço euclidiano.

Exemplo 6.1.1. Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma imersão isométrica totalmente geodésica e $\phi : U \rightarrow U$ um difeomorfismo conforme. Então f e $g = f \circ \phi$ são imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss.

A proposição seguinte nos afirma que se f e g são imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss, com $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^N$ totalmente geodésica, então g é como no exemplo acima.

Proposição 6.1.2. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma imersão isométrica totalmente geodésica. Se U é simplesmente conexo então qualquer imersão $g : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que f e g são conformes com a mesma aplicação de Gauss tem a forma $g = f \circ \phi$, em que $\phi : U \rightarrow U$ é um difeomorfismo conforme.*

Prova: Como f e g tem a mesma aplicação de Gauss, existe $\phi : TU \rightarrow TU$ tal que $g_* = f_* \circ \phi$. Considerando g_* como uma 1-forma em U com valores em \mathbb{R}^N , procedemos como na demonstração da Proposição 2.1.1: derivamos essa 1-forma e obtemos a expressão (2.4). Logo ϕ ser um tensor de Codazzi que comuta com a segunda forma fundamental de f é equivalente a g_* ser fechada, isto é, $dg_* = 0$. Portanto, como U é simplesmente conexo, g_* é exata e $g = f \circ \phi$. \square

6.2 Cones Kaehlerianos reais mínimos

Podemos considerar ainda uma outra classe pouco interessante de exemplos, compondo uma inversão com transformações conformes do ambiente, como a homotetia e a inversão em esferas. Dado um cone em \mathbb{R}^N , podemos tomar a esfera de raio um centrada em seu vértice. A intersecção do cone com a esfera dá origem a uma subvariedade da esfera. O cone sobre essa subvariedade da esfera, isto é, o cone cujo vértice é o centro da esfera e cujas retas passam por essa subvariedade, coincide com o cone dado inicialmente. Além disso, inversões são transformações conformes do ambiente que preservam a aplicação de Gauss desses cones. De fato, a aplicação de Gauss é constante ao longo de retas e retas são preservadas por inversão. Assim, o cone inicial e sua inversão com respeito ao centro da esfera são imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss. Observe, no entanto, que nesse caso a subvariedade é invariante pela deformação, pois cones sobre esferas são invariantes por inversão com respeito ao centro da esfera.

Nessa seção usaremos esse exemplo mais conhecido para construir uma classe interessante de imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss. Combinaremos a construção precedente com deformações isométricas que preservam a aplicação de Gauss de subvariedades Kaehlerianas. Assim estaremos construindo um exemplo de imersões conformes que nem é isométrico nem é uma deformação conforme do ambiente.

Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma subvariedade Kaehleriana real. Tomando $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ podemos definir a família de 1-formas

$$J_\theta = \cos \theta I + \text{sen } \theta J.$$

Note que, fixado θ , como J é um tensor paralelo, J_θ também o é pois

$$\begin{aligned} (\nabla_X J_\theta)Y &= \nabla_X(J_\theta Y) - J_\theta \nabla_X Y \\ &= \nabla_X(\cos \theta Y + \text{sen } \theta JY) - \cos \theta \nabla_X Y + \text{sen } \theta J \nabla_X Y \\ &= \cos \theta \nabla_X Y + \text{sen } \theta \nabla_X JY - \cos \theta \nabla_X Y - \text{sen } \theta J \nabla_X Y \\ &= \text{sen } \theta (\nabla_X J)Y = 0. \end{aligned}$$

Assim como a estrutura quasi-complexa J , o tensor J_θ é ortogonal. De fato,

$$\begin{aligned} \langle J_\theta X, J_\theta Y \rangle &= \langle \cos \theta X + \text{sen } \theta JX, \cos \theta Y + \text{sen } \theta JY \rangle \\ &= \cos^2 \theta \langle X, Y \rangle + \cos \theta \text{sen } \theta \langle X, JY \rangle + \text{sen } \theta \cos \theta \langle JX, Y \rangle + \text{sen}^2 \theta \langle JX, JY \rangle \\ &= \langle X, Y \rangle + \cos \theta \text{sen } \theta \langle X, JY \rangle - \text{sen } \theta \cos \theta \langle JX, J^2 Y \rangle \\ &= \langle X, Y \rangle + \cos \theta \text{sen } \theta \langle X, JY \rangle - \text{sen } \theta \cos \theta \langle X, JY \rangle \\ &= \langle X, Y \rangle \end{aligned}$$

Além disso, se J comuta com a segunda forma fundamental de f o mesmo ocorre

com J_θ , pois, neste caso, temos

$$\begin{aligned}
\alpha_f(J_\theta X, Y) &= \alpha_f(\cos \theta X + \operatorname{sen} \theta JX, Y) \\
&= \cos \theta \alpha_f(X, Y) + \operatorname{sen} \theta \alpha_f(JX, Y) \\
&= \cos \theta \alpha_f(X, Y) + \operatorname{sen} \theta \alpha_f(X, JY) \\
&= \alpha_f(X, \cos \theta Y + \operatorname{sen} \theta JY) \\
&= \alpha_f(X, J_\theta Y).
\end{aligned}$$

Como vimos no Capítulo 1, se f é mínima, então f é pluriharmônica. Observe ainda que f pluriharmônica significa que a segunda forma fundamental de f comuta com J . Assim, se f é mínima, J_θ é um tensor paralelo (logo de Codazzi) que comuta com a segunda forma fundamental de f . Pela Proposição 2.1.1, existe uma imersão $g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ satisfazendo $g_* = f_\theta = f_* \circ J_\theta$, portanto, com a mesma aplicação de Gauss que f . Como J_θ também é ortogonal, cada $f_\theta : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ é uma deformação isométrica de f que preserva a aplicação de Gauss. Ademais, pela Proposição 2.1.2, temos

$$\alpha_\theta(X, Y) = \alpha_f(J_\theta X, Y), \quad \forall X, Y \in TM,$$

logo f_θ é pluriharmônica e, portanto, mínima.

Da discussão anterior, concluímos que toda subvariedade Kaehleriana real mínima simplesmente conexa define uma família de variedades Kaehlerianas reais mínimas f_θ , $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (exatamente como ocorre com as superfícies mínimas) que é chamada de *família associada* $\{f_\theta\}$. Em [DG85], Dajczer e Gromoll resolveram a versão isométrica do problema proposto por Pierre Samuel, isto é, eles determinaram os pares de imersões isométricas não triviais que tem a mesma aplicação de Gauss. A solução encontrada diz que, localmente, essas imersões são produtos de variedades Kaehlerianas reais mínimas as quais, globalmente, admitem uma família associada. Dessa maneira, famílias associadas de uma subvariedade Kaehleriana real mínima constituem uma classe de exemplos de imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss.

Um *cone Kaehleriano real mínimo* é uma subvariedade Kaehleriana real mínima $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ que admite uma folheação por linhas retas concorrentes num mesmo ponto. Ora, cones Kaehlerianos reais mínimos admitem uma família associada de variedades Kaehlerianas reais mínimas e todos os elementos dessa família são isométricos com a mesma aplicação de Gauss. Nosso objetivo é mostrar que os elementos da família associada a um cone Kaehleriano real mínimo também são cones. Em seguida, consideraremos esses cones como cones sobre esferas, os quais são invariantes por inversão com respeito ao centro da esfera (que é o vértice desse cone). De maneira que, cada f_θ é um cone obtido como deformação isométrica de f e, após a inversão com respeito ao vértice desse cone, encontramos g tal que f e g são cones Kaehlerianos reais mínimos, conformes e com a mesma aplicação de Gauss. Dessa forma, o cone Kaehleriano real mínimo inicial e o

cone obtido com essa deformação, que é a combinação de deformação isométrica com deformação conforme do ambiente, constituem um exemplo de imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss.

Exemplo 6.2.1 (cones Kaehlerianos reais mínimos). Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ um cone Kaehleriano real mínimo. Seja f_θ qualquer elemento de sua família associada e denotemos por \mathcal{I} a inversão com respeito ao centro da esfera centrada no vértice de f_θ . Então, definindo $g = \mathcal{I} \circ f_\theta$, temos que f e g são imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss.

A questão agora é: como construir explicitamente um cone Kaehleriano real mínimo? Além do mais, resta ver que realmente os elementos da família associada a um cone Kaehleriano real mínimo também são cones. Para responder a essas questões, precisamos de alguns comentários adicionais. Observamos que, se f é pluriharmônica, Δ_f é J -invariante. De fato, se $X \in \Delta_f$, temos $\alpha_f(X, Y) = 0, \forall Y \in TM$ logo

$$\alpha_f(JX, Y) = \alpha_f(X, JY) = 0,$$

o que nos leva a concluir que para qualquer $X \in \Delta_f$, temos $JX \in \Delta_f$. Isso nos permite mostrar que $\Delta_f = \Delta_{f_\theta}$. De fato, seja $X \in \Delta_f$ temos

$$\alpha_\theta(X, Y) = \alpha_f(J_\theta X, Y) = \alpha_f(X, J_\theta Y) = 0,$$

logo $\Delta_f \subset \Delta_{f_\theta}$. Usando que $f_* = f_\theta \circ J_{-\theta}$ concluimos que $\Delta_{f_\theta} \subset \Delta_f$.

Também em [DG85], os autores mostraram que imersões pluriharmônicas, além de apresentarem família associada, tem outra característica muito parecida com as superfícies mínimas. Lembramos que uma superfície mínima parametrizada em coordenadas isotérmicas tem funções harmônicas como coordenadas e, que dada uma função harmônica u em um conjunto simplesmente conexo, existe uma função \tilde{u} , única a menos de constante, chamada de harmônica conjugada tal que $f(u, v) = u + i\tilde{u}$ é uma função holomorfa (ver detalhes na Seção 3.5 de [dC06], - particularmente as páginas 240 e 254). É este fato essencialmente que permite a construção da família associada e, de certa forma, isso também é respeitado por imersões pluriharmônicas. Mais precisamente, seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma imersão pluriharmônica com família associada não trivial (isto é, cujos membros não são todos iguais) e considere $X = \{F : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m : F \text{ é imersão, } m \in \mathbb{N}\}$, então X possui um único representante holomorfo dado por

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}}f \oplus \frac{1}{\sqrt{2}}f_{\frac{\pi}{2}} : M^n \rightarrow \mathbb{C}^N.$$

Ou seja, a imersão f é parte real da imersão $F = \frac{1}{\sqrt{2}}(f \oplus i f_{\frac{\pi}{2}})$. É interessante comentar que a família associada de uma imersão pluriharmônica $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ é trivial se, e somente

se, f é holomorfa (o que implica N ser par). A seguinte proposição nos mostra como construir cones Kaehlerianos reais mínimos e nos permite concluir que cada membro da família associada de um cone Kaehleriano real mínimo é um cone Kaehleriano real mínimo.

Proposição 6.2.2. *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N, n \geq 4$, uma imersão isométrica mínima de uma variedade Kaehleriana simplesmente conexa. Então f é um cone se, e somente se, f é parte real de uma imersão isométrica holomorfa $F : M^n \rightarrow \mathbb{C}^N$ obtida como o levantamento de uma imersão holomorfa $\bar{f} : M^n \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}$ pela projeção $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}$.*

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{C} \\ & \nearrow F & \downarrow \pi \\ M^n & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1} \end{array}$$

$$\bar{f} = \pi \circ F$$

Prova: A recíproca desse resultado não traz nenhuma novidade, pois se F é obtida como levantamento de uma imersão de M^n em $\mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}$, então sua parte real é claramente um cone. Basta mostrar que $F = \frac{1}{\sqrt{2}}(f \oplus if_{\frac{\pi}{2}})$ é obtida como descrito no enunciado, pois f já é a parte real dessa F que é a única representante holomorfa do conjunto X citado acima. Para isso, encontraremos uma folheação de $F(M)$ por retas complexas de \mathbb{C}^N que concorrem num mesmo ponto, logo $\pi \circ F(M)$ é uma curva β em $\mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}$, ou seja, F é o levantamento de $\bar{f} : M^n \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}$ que leva a variedade M^n na curva β . Vamos primeiro mostrar que, assim como f , $g = f_{\frac{\pi}{2}}$ é um cone. Como f é um cone, existe um campo R e uma função suave γ sobre M^n tal que $h = f + \gamma^{-1}f_*R$ é constante. Assim, devemos mostrar que $l = g + \gamma^{-1}g_*R$ também é constante. Como h é constante, temos que $h_*X = 0, \forall X \in TM$; por outro lado,

$$\begin{aligned} h_*X &= dhX = dfX + d(\gamma^{-1}f_*R)X \\ &= f_*X + X(\gamma^{-1})f_*R + \gamma^{-1}d(f_*R)X = f_*X + X(\gamma^{-1})f_*R + \gamma^{-1}X(f_*R) \\ &= f_*X + X(\gamma^{-1})f_*R + \gamma^{-1}(f_*\nabla_X R + \alpha_f(X, R)) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Dessa forma, $h_*R = 0$ implica em

$$R(\gamma) = \gamma^2, \quad (6.2)$$

$$\nabla_R R = 0 \quad (6.3)$$

e

$$\alpha_f(R, R) = 0 \quad (6.4)$$

. Para $S \perp R$, $h_*S = 0$, implica

$$S(\gamma) = 0, \quad (6.5)$$

$$\nabla_S R = -\gamma S \quad (6.6)$$

e

$$\alpha_f(R, S) = 0. \quad (6.7)$$

Dessa forma, derivando $l = g + \gamma^{-1}g_*R$ temos

$$\begin{aligned} \tilde{l}_*X &= g_*X + X(\gamma^{-1})g_*R + \gamma^{-1}(g_*\nabla_X R + \alpha_g(X, R)) \\ &= f_*JX + X(\gamma^{-1})f_*JR + \gamma^{-1}(f_*J\nabla_X R + \alpha_f(JX, R)) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Observe que $l_*R = 0$. De fato, trocando X por R em (6.8), vemos que as duas primeiras parcelas de (6.8) se anulam porque $R(\frac{1}{\gamma}) = -1$ (por causa de (6.2)). Além disso, por conta de (6.3), a terceira parcela é nula. Finalmente, $\alpha_f(JR, R) = 0$, porque sendo f_*R a direção do vértice (para cada ponto p), temos $R \in \Delta$.

Se $S \perp R$ também temos $l_*S = 0$. De fato, trocando X por S em (6.8), vemos que a primeira e a terceira parcelas de (6.8) se anulam em decorrência de (6.6). Além disso, o segundo termo é zero por (6.5) e $\alpha_f(JS, R) = 0$, porque $R \in \Delta$. Logo a aplicação l é constante, o que nos faz concluir que $g = f_{\frac{\pi}{2}}$ é um cone.

Agora, mostraremos que $L = \text{ger}\{R, JR\}$ é uma distribuição integrável cujas folhas são levadas por f e g em subespaços de \mathbb{R}^N . Considerando as equações (6.3) e (6.6) vemos que L é totalmente geodésica. Além disso, de (6.4) e (6.7), temos $L \subset \Delta$. De fato, como $\alpha_f(R, R) = \alpha_f(R, JR) = 0$, resta apenas ver que $\alpha_f(JR, JR) = -\alpha_f(R, R) \stackrel{(6.4)}{=} 0$. Logo as folhas de L são subespaços afins de \mathbb{R}^N , o que conclui a prova. \square

6.3 Deformações conformes e a métrica do plano hiperbólico

Antes de apresentar os próximos exemplos, faremos um pequeno parênteses para estudar a relação entre deformações de superfícies mínimas contidas no semi-espaço superior \mathbb{R}_+^m que preservam a aplicação de Gauss e a métrica induzida pela métrica do plano hiperbólico.

Sejam $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}_+^m$ imersões isométricas que preservam a métrica do plano

hiperbólico, dadas por $f = (a_1, \dots, a_{m-1}, a)$ e $g = (b_1, \dots, b_{m-1}, b)$. Então

$$\langle X, Y \rangle_{L^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \langle f_* X, f_* Y \rangle, & \text{pois } f \text{ preserva a métrica do plano hiperbólico;} \\ \frac{1}{b} \langle g_* X, g_* Y \rangle, & \text{pois } g \text{ preserva a métrica do plano hiperbólico,} \end{cases}$$

logo

$$\langle g_* X, g_* Y \rangle = \frac{b}{a} \langle f_* X, f_* Y \rangle,$$

ou seja, dizer que f e g induzem a mesma métrica do plano hiperbólico \mathbb{R}_+^m significa que f e g induzem métricas conformes a métrica Euclideana de \mathbb{R}_+^m cujo fator conforme e^φ satisfaz

$$e^\varphi a = b. \quad (6.9)$$

Sabemos que uma superfície é mínima se, e somente se, as funções coordenadas numa parametrização isotérmica são harmônicas. Além disso, se a superfície for simplesmente conexa, existem as funções harmônicas conjugadas dessas funções coordenadas, as quais parametrizam outra superfície mínima. Essas duas superfícies juntas dão origem a uma família associada de superfícies mínimas isométricas com a mesma aplicação de Gauss (ver exercício 14 de [dC06]).

O próximo resultado utiliza as informações dos dois parágrafos precedentes para caracterizar pares de imersões isométricas de uma superfície mínima no espaço hiperbólico \mathbb{R}_+^m que preservam a aplicação de Gauss. Essas deformações são importantes porque, além de constituírem um exemplo, darão origem a outros exemplos de imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss.

Proposição 6.3.1. *Duas superfícies mínimas $f, g : M^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^m$ tem a mesma aplicação de Gauss (orientada) e são isométricas com respeito à métrica hiperbólica de \mathbb{R}_+^m se, e somente se, f e g estão relacionadas da seguinte maneira: se f é parametrizada em coordenadas isotérmicas por $f = (a_1, \dots, a_{m-1}, a)$ e $A = a + i\tilde{a}$ é holomorfa então*

$$g = - \int \frac{1}{A^2} f_z dz. \quad (6.10)$$

Além disso, a última coordenada da função g é a parte real de $\frac{1}{A}$.

Prova: Diferenciando (6.9) temos

$$b_z = e^\varphi (a_z + a\varphi_z) = e^\varphi (a_z + ia\theta_z),$$

onde $\psi = \varphi + i\theta$. Por outro lado, pelas expressões de f e g e por (4.3) temos

$$b_z = e^\psi a_{z\cdot}, \quad (6.11)$$

logo

$$e^{\varphi}(a_z + ia\theta_z) = e^{\psi}a_z$$

e

$$\theta_z = \frac{a_z(e^{i\theta} - 1)}{ai} = (1 - e^{i\theta})\frac{ia_z}{a} \quad (6.12)$$

Como $\frac{\theta_z}{a_z}$ é harmônica, então $\{(e^{i\theta} - 1)/a\}_{\bar{z}} = 0$. Portanto, $k = (e^{i\theta} - 1)/a$ é uma função holomorfa, $k = u + iv$. Logo $e^{i\theta} = 1 + au + iav$ e, portanto,

$$1 = |e^{i\theta}| = (1 + au)^2 + (av)^2.$$

Assim, $a = -2u/(u^2 + v^2)$. Por outro lado, $\frac{-2}{k} = \frac{-2}{u + iv} = \frac{-2(u - iv)}{u^2 + v^2}$, ou seja, $a = \operatorname{Re}\left(\frac{-2}{k}\right)$ e $-2/k$ é holomorfa. Dessa forma, se $A = a + i\tilde{a}$ é holomorfa, temos $k = -2/A$, ou seja,

$$e^{i\theta} = ak + 1 = \frac{-2a}{A} + 1 = \frac{-\bar{A}}{A}.$$

Logo as funções holomorfas e^{ψ} e $-1/A^2$ tem o mesmo argumento e, portanto, coincidem. Assim, trocando e^{ψ} por $-1/A^2$ em (4.3) obtemos (6.10). Agora, se $\mathcal{A} = b + i\tilde{b}$ é holomorfa então juntando este fato e (6.11) temos $\mathcal{A}_z = e^{\psi}A_z = -A_z/A^2 = (1/A)_z$, ou seja, b é parte real de $1/A$, a menos de constante. \square

Observação 6.3.2. Se $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^m$ é totalmente geodésica, munindo M^2 com a métrica induzida pelo plano hiperbólico sobre \mathbb{R}_+^m temos que M^2 ou é um aberto de \mathbb{R}^2 ou um aberto do plano hiperbólico \mathbb{H}_c^2 , $c \in [-1, 0)$, dependendo se $f(L^2)$ é paralelo ao bordo de \mathbb{R}_+^m ou não, conforme f seja uma restrição a M^2 de uma imersão isométrica de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{H}_c^2 , respectivamente. Consequentemente, a menos de translação, g é dada por $g = f \circ h$ onde h é a restrição a M^2 de uma isometria de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{H}_c^2 , respectivamente.

6.4 Produto warped de imersões

Em [DT10] são construídos dois exemplos utilizando produto warped de duas imersões. Ambos utilizam a seguinte representação produto warped para \mathbb{R}^N

$$\begin{aligned} \psi_1 : \mathbb{R}_+^m \times_{x_m} \mathbb{S}^{N-m} &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ (X, Y) &\mapsto (x_1, \dots, x_{m-1}, x_m y_1, \dots, x_m y_m). \end{aligned}$$

Vamos inicialmente discutir quais as condições para que duas imersões, que são produto warped construídos com esta representação, devem satisfazer para serem conformes e terem a mesma aplicação de Gauss. Em seguida, apresentaremos os dois exemplos

construídos em [DT10]: no primeiro deles a primeira imersão é uma superfície mínima no plano hiperbólico e no segundo ela é uma curva do plano hiperbólico.

Sejam $f_0, g_0 : N^s \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $l : L^{n-s} \rightarrow \mathbb{S}^{N-m}$ imersões isométricas. Se $M^n = N^s \times L^{n-s}$ e $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ são dadas por

$$f = \psi_1 \circ (f_0 \times l) \text{ e } g = \psi_1 \circ (g_0 \times l) \quad (6.13)$$

vemos que f e g tem a mesma aplicação de Gauss se, e somente se, f_0 e g_0 também tem a mesma aplicação de Gauss. Além disso, se as métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\sim}$ induzidas por f e g são dadas, respectivamente, por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_0 + \rho^2 \langle \cdot, \cdot \rangle_1 \text{ e } \langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{0}} + \tilde{\rho}^2 \langle \cdot, \cdot \rangle_1, \quad (6.14)$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{0}}$ são métricas em N^s induzidas por f_0 e g_0 , respectivamente, $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ é a métrica em L^{n-s} induzida por l e as últimas coordenadas das funções f_0 e g_0 são dadas por $\rho = x_m \circ f_0$ e $\tilde{\rho} = x_m \circ g_0$, respectivamente. Assim, existe $\psi \in C^\infty(M)$ tal que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\sim} = \psi^2 \langle \cdot, \cdot \rangle$ se, e somente se

(i) $\psi = \psi_0 \circ \pi_0$, para alguma $\psi_0 \in C^\infty(N)$;

(ii) $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{0}} = \psi_0^2 \langle \cdot, \cdot \rangle_0$;

(iii) $\psi_0^2 \cdot \rho^2 = \tilde{\rho}^2$.

Em outras palavras, as equações dos itens (ii) e (iii) implicam que, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{0}}$ são conformes se, e somente se,

$$\frac{1}{\tilde{\rho}} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{0}} = \frac{1}{\rho^2} \langle \cdot, \cdot \rangle_0,$$

ou seja, f_0 e g_0 induzem a mesma métrica e esta é a métrica do plano hiperbólico. Neste caso, o fator conforme entre as métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{0}}$ é $\psi = \psi_0 \circ \pi_0$ com $\psi_0^2 = \tilde{\rho}^2 / \rho^2$. Vamos destacar este resultado

Proposição 6.4.1. *Sejam $f_0, g_0 : N^s \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $l : L^{n-s} \rightarrow \mathbb{S}^{N-m}$ imersões isométricas, $M^n = N^s \times L^{n-s}$ e $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ dadas por*

$$f = \psi_1 \circ (f_0 \times l) \text{ e } g = \psi_1 \circ (g_0 \times l). \quad (6.15)$$

Então f e g são conformes e tem a mesma aplicação de Gauss se, e somente se, f_0 e g_0 tem a mesma aplicação de Gauss e induzem a mesma métrica, a métrica do plano hiperbólico em \mathbb{R}^m .

Vamos agora aos exemplos, destacados cada um em uma proposição. O primeiro deles é consequência direta das Proposições 6.3.1 e 6.4.1.

Proposição 6.4.2. *Sejam $f_0, g_0 : N^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^m$ superfícies mínimas e $l : L^{n-2} \rightarrow \mathbb{S}^{N-m}$ uma imersão isométrica qualquer. Sejam ainda $M^n = N^s \times L^{n-s}$ e $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ dadas por*

$$f = \psi_1 \circ (f_0 \times l) \text{ e } g = \psi_1 \circ (g_0 \times l).$$

As imersões f e g são conformes com a mesma aplicação de Gauss se, e somente se, quando f_0 é parametrizada em coordenadas isotérmicas por $f_0 = (a_1, \dots, a_{m-1}, a)$ e $A = a + i\tilde{a}$ é holomorfa tem-se $g_0 = -\int \frac{1}{A^2}(f_0)_z dz$.

Observação 6.4.3. Quando f_0 (e conseqüentemente g_0) é totalmente geodésica, $f(M)$ ou é um subconjunto aberto do cilindro sobre l ou é um produto de uma reta com um cone sobre l , dependendo de $f_0(N^2)$ ser ou não paralela ao bordo de \mathbb{R}^m . Ademais, a menos de translação tem-se $g(M) = f(M)$, pois as folhas da folheação produto de M^n correspondentes ao primeiro fator (superfície mínima) são folhas da nulidade relativa tanto de f quanto de g e $g = f \circ \phi$, sendo ϕ o difeomorfismo conforme de M^n dado por $\phi(x, y) = (h(x), y)$, onde h é, de acordo com a Observação 6.3.2, a restrição a N^2 de uma isometria de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{H}_c^2 , respectivamente.

O segundo exemplo é obtido quando descobrimos qual a condição que duas curvas regulares do plano hiperbólico devem satisfazer para induzirem a métrica do plano hiperbólico nos intervalos e terem a mesma aplicação de Gauss.

Proposição 6.4.4. *Sejam $\beta, \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_+^m$ duas curvas regulares e $l : L^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{N-m}$ uma imersão isométrica qualquer. Sejam ainda $M^n = I \times L^{n-1}$ e $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ dadas por*

$$f = \psi_1 \circ (f_0 \times l) \text{ e } g = \psi_1 \circ (g_0 \times l).$$

Então f e g são conformes com a mesma aplicação de Gauss se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\gamma = -C \int \frac{\beta'(\tau)}{\beta_m^2(\tau)} d\tau. \quad (6.16)$$

Prova: Pela Proposição (6.4.1) precisamos mostrar apenas que f_0 e g_0 tem a mesma aplicação de Gauss e induzem a métrica do plano hiperbólico. Dizer que as curvas regulares γ e β tem a mesma aplicação de Gauss significa que seus campos velocidade tem a mesma direção, isto é, existe $\lambda \in C^\infty(I)$ tal que $\gamma'(s) = \lambda(s)\beta'(s)$, $\forall s \in I$. Por outro lado, dizer que f_0 e g_0 induzem a métrica do plano hiperbólico sobre \mathbb{R}_+^m é o mesmo que dizer que β e γ , vistas como curvas no modelo semi-espaço do plano hiperbólico, admitem parametrização comum pelo comprimento de arco, ou seja,

$$\frac{\|\beta'(s)\|}{\beta_m(s)} = \frac{\|\gamma'(s)\|}{\gamma_m(s)}.$$

Portanto, ou $\lambda(s) = \gamma(s)/\beta_m(s)$ ou $\lambda(s) = -\gamma(s)/\beta_m(s)$. A primeira equação implica na solução trivial $\gamma = C\beta + v$, em que $C > 0$ é constante e $v \in \mathbb{R}^m$. Já a segunda equação assume a forma

$$\frac{\gamma'_m(s)}{\gamma_m(s)} = -\frac{\beta'_m(s)}{\beta_m(s)}.$$

Logo $\gamma_m = C/\beta_m$ com $C > 0$ constante. Assim, $\lambda = -C/\beta_m^2$ e

$$\gamma = -C \int \frac{\beta'(\tau)}{\beta_m^2(\tau)} d\tau.$$

□

Observação 6.4.5. Se $m = 1$ e $\beta, \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ estão relacionadas por (6.16), então $\gamma = C/\beta$. Neste caso, $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ dadas por (6.13) com $M^n = I \times L^{n-1}$ são cones que diferem por uma inversão com respeito a esfera centrada no vértice comum.

6.5 O produto warped triplo

Na última seção deste capítulo apresentamos mais um exemplo de imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss, construído em [DT10] com auxílio do produto warped de imersões. Para este exemplo utilizaremos a seguinte representação produto warped para \mathbb{R}^N ,

$$\begin{aligned} \psi_2 : \mathbb{R}_*^m \times_{x_{m-1}} \mathbb{S}^{m_1} \times_{x_m} \mathbb{S}^{m_2} &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ (X, Y_1, Y_2) &\mapsto (x_1, \dots, x_{m-2}, x_{m-1}Y_1, x_m Y_2), \end{aligned}$$

em que $N = m + m_1 + m_2$ e $\mathbb{R}_*^m = \{(x_1, \dots, x_m) : x_{m-1}, x_m > 0\}$.

Proposição 6.5.1. *Sejam $f_0, g_0 : N^2 \rightarrow \mathbb{R}_*^m$ superfícies mínimas, $l_1 : L_1^{s_1} \rightarrow \mathbb{S}^{m_1}$ e $l_2 : L_2^{s_2} \rightarrow \mathbb{S}^{m_2}$ imersões isométricas quaisquer. Sejam ainda $M^n = N^2 \times L_1^{s_1} \times L_2^{s_2}$ e $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ dadas por*

$$f = \psi_2 \circ (f_0 \times l_1 \times l_2) \text{ e } g = \psi_2 \circ (g_0 \times l_1 \times (-l_2)). \quad (6.17)$$

Então as imersões f e g são conformes e tem a mesma aplicação de Gauss se, e somente se, f_0 e g_0 satisfazem as seguintes condições:

- (i) *Se f_0 é parametrizada por coordenadas isotérmicas $f_0 = (a_1, \dots, a_{m-2}, a, \tilde{a})$ com $a, \tilde{a} > 0$, então a função $A = a + i\tilde{a}$ é holomorfa. Ademais, se $g_0 = (\beta_1, \dots, \beta_{m-2}, \beta, \tilde{\beta})$ com $\beta, \tilde{\beta} > 0$, são coordenadas isotérmicas então $\mathcal{A} = \beta + i\tilde{\beta}$ é holomorfa;*
- (ii) *Se \mathcal{R} denota a reflexão com respeito ao hiperplano ortogonal a e_m , então $\mathcal{R} \circ g_0 = (\beta_1, \dots, \beta_{m-2}, \beta, -\tilde{\beta})$ se relaciona com f_0 por (4.3), em particular, $\mathcal{A} = 1/A$.*

Prova: Observe que f e g tem a mesma aplicação de Gauss se, e somente se f_0 e $\mathcal{R} \circ g$ tem a mesma aplicação de Gauss. Se as métricas \langle , \rangle e \langle , \rangle^\sim induzidas por f e g são, respectivamente,

$$\langle , \rangle_0 + \rho_1^2 \langle , \rangle_1 + \rho_2^2 \langle , \rangle_2 \text{ e } \langle , \rangle^\sim + \tilde{\rho}_1^2 \langle , \rangle_1 + \tilde{\rho}_2^2 \langle , \rangle_2, \quad (6.18)$$

em que \langle , \rangle_0 e \langle , \rangle^\sim são métricas em N^2 induzidas por f_0 e g_0 , respectivamente, \langle , \rangle_1 é a métrica em $L_1^{s_1}$ induzida por l_1 , \langle , \rangle_2 é a métrica em $L_2^{s_2}$ induzida por l_2 , e as duas últimas coordenadas das funções f_0 e g_0 são dadas por $\rho_1 = x_{m-1} \circ f_0$ e $\rho_2 = x_m \circ f_0$, $\tilde{\rho}_1 = x_{m-1} \circ g_0$, $\tilde{\rho}_2 = x_m \circ g_0$, respectivamente. Assim, existe $\psi \in C^\infty(M)$ tal que $\langle , \rangle^\sim = \psi^2 \langle , \rangle$ se, e somente se

- (i) $\psi = \psi_0 \circ \pi_0$, para alguma $\psi_0 \in C^\infty(N)$;
- (ii) $\langle , \rangle^\sim = \psi_0^2 \langle , \rangle$;
- (iii) $\psi_0^2 \cdot \rho_i^2 = \tilde{\rho}_i^2$, $1 \leq i \leq 2$.

Portanto, se f_0 é parametrizada em coordenadas isotérmicas (u, v) por $f_0 = (a_1, \dots, a_m)$ então (u, v) são também coordenadas isotérmicas para g e

$$(\mathcal{R} \circ g_0)_z = e^\psi (f_0)_z \quad (6.19)$$

para alguma função holomorfa $\psi = \varphi + i\theta$. Se chamarmos momentaneamente $a = a_{m-1}$, $b = a_m$, $\beta = \beta_{m-1}$ e $\gamma = \beta_m$, então por (6.19) e pelo item (iii) temos $\beta_z = e^\psi a_z$, $e a = \beta$ e $\gamma_z = -e^\psi b_z$, $e^\varphi b = \gamma$. Procedendo como na Proposição 6.3.1 concluímos das duas primeiras equações que $e^\psi = 1/A^2$ e das duas últimas que $e^\psi = -1/B^2$, sendo $A = a + i\tilde{a}$ e $B = b + i\tilde{b}$ holomorfas. Logo, $A^2 = -B^2$, ou seja, $b = \tilde{a}$. \square

Capítulo 7

Caracterização das imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss

Neste capítulo concluímos a caracterização de todos os pares de imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss. Como o problema já foi resolvido para o caso das superfícies no Capítulo 4 (Teorema 4.1.1) e a versão isométrica já tinha sido resolvida por Dajczer e Gromoll em [DG85], o problema se restringe agora a determinar os pares de imersões $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$, com $n \geq 3$ tais que f e g são conformes, não isométricas, com a mesma aplicação de Gauss.

Para resolver esse problema necessitamos estudar a decomposição (3.10) do fibrado tangente complexificado em auto-fibrados do tensor T . Por isso, na Seção 7.1, veremos algumas propriedades desses subfibrados, pensando em utilizar os Teoremas de Hiepkö e Nölker, trabalhados no Capítulo 5, para determinar uma estrutura de produto warped para a variedade M e para a imersão f .

De posse das propriedades dos subfibrados, enunciaremos e provaremos o resultado principal deste trabalho (Teorema 7.2.1) que também é o resultado principal de [DT10]. Segundo esse resultado, duas imersões de uma variedade n -dimensional ($n \geq 3$) em \mathbb{R}^N tem a mesma aplicação de Gauss se, e somente se, são como os exemplos apresentados no Capítulo 6. No final desse capítulo, o leitor poderá consultar um diagrama que esquematiza a prova do Teorema Principal.

7.1 Propriedades dos subfibrados de $TM \otimes \mathbb{C}$

Antes de passarmos às propriedades dos subfibrados, apresentamos a seguir um resultado útil. Ele fornece uma condição para garantir que um subfibrado umbílico é

esférico.

Proposição 7.1.1. *Seja E um subfibrado umbílico de TM tal que $\text{rank}(E) \geq 2$. Se*

$$R(X, Y)Z \in E, \quad \forall X, Y, Z \in E, \quad (7.1)$$

então E é esférico. Ademais, se $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ é uma imersão isométrica tal que $\alpha_f(E, E^\perp) = 0$, então vale (7.1).

Prova: Como $\text{rank}(E) \geq 2$, podemos tomar $X, Y \in E$ ortonormais e, como o subfibrado E é umbílico, temos

$$\left(\nabla_X X \right)_{E^\perp} = \left(\nabla_Y Y \right)_{E^\perp} = \eta \in E^\perp.$$

Queremos mostrar que $\langle \nabla_Y \eta, Z \rangle = 0, \forall Y \in E, \forall Z \in E^\perp$. Se $Z \in E^\perp$, temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_Y \eta, Z \rangle &= Y \langle \eta, Z \rangle - \langle \eta, \nabla_Y Z \rangle = Y \langle \nabla_X X, Z \rangle - \langle \eta, \nabla_Y Z \rangle \\ &= \langle \nabla_Y \nabla_X X, Z \rangle + \langle \nabla_X X, \nabla_Y Z \rangle - \langle \eta, \nabla_Y Z \rangle. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Como, por hipótese, $R(X, Y)W \in E, \forall X, Y, W \in E, \forall Z \in E^\perp$, temos $\langle R(Y, X)X, Z \rangle = 0$.

Logo, como

$$R(Y, X)X = \nabla_Y \nabla_X X - \nabla_X \nabla_Y X - \nabla_{[Y, X]} X,$$

temos

$$\langle \nabla_Y \nabla_X X, Z \rangle = \langle \nabla_X \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_{[Y, X]} X, Z \rangle \quad (7.3)$$

Como E é umbílico e $X \perp Y$ temos

$$\left(\nabla_Y X \right)_{E^\perp} = \langle X, Y \rangle \eta = 0,$$

ou seja, $\nabla_Y X \in E$. Usando mais uma vez a umbilicidade de E , obtemos $\langle \nabla_X \nabla_Y X, Z \rangle = \langle X, \nabla_Y X \rangle \langle \eta, Z \rangle = 0$, pois $\|X\| = 1$. Além disso, como E é involutivo (lembre que E é umbílico e veja a Proposição 1.5.2), dados $X, Y \in E$, temos $[Y, X] \in E$. Então

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{[Y, X]} X, Z \rangle &= \langle [Y, X], X \rangle \langle \eta, Z \rangle = \langle \nabla_Y X, X \rangle \langle \eta, Z \rangle - \langle \nabla_X Y, X \rangle \langle \eta, Z \rangle \\ &= \langle \nabla_X X, Y \rangle \langle \eta, Z \rangle. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Logo

$$\langle \nabla_Y \nabla_X X, Z \rangle = \langle \nabla_X X, Y \rangle \langle \eta, Z \rangle. \quad (7.5)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X X, \nabla_Y Z \rangle &= \langle \nabla_X X, (\nabla_Y Z)_{E^\perp} \rangle + \langle \nabla_X X, (\nabla_Y Z)_E \rangle \\ &= \langle \eta, (\nabla_Y Z)_{E^\perp} \rangle + \langle \nabla_X X, (\nabla_Y Z)_E \rangle. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Observe que $(\nabla_Y Z)_E = \langle \nabla_Y Z, Y \rangle Y$. De fato, seja

$$\{W_i \in E : \langle W_i, W_j \rangle = \langle W_i, Y \rangle = 0, i \neq j\}$$

tal que $\{Y\} \cup \{W_i \in E\}$ gera E . Então

$$(\nabla_Y Z)_E = aY + \sum_i b_i W_i,$$

com $a = \langle (\nabla_Y Z)_E, Y \rangle = \langle \nabla_Y Z, Y \rangle$ e $b_i = \langle (\nabla_Y Z)_E, W_i \rangle = \langle \nabla_Y Z, W_i \rangle$. Como $Z \in E^\perp$, temos $\langle Z, W_i \rangle = 0$ e, conseqüentemente, $b_i = \langle \nabla_Y Z, W_i \rangle = -\langle Z, \nabla_Y W_i \rangle$. Usando a umbilicidade de E , temos $b_i = -\langle Z, \nabla_Y W_i \rangle = -\langle Y, W_i \rangle \langle \eta, Z \rangle = 0$. Dessa forma, substituindo $(\nabla_Y Z)_E$ em (7.6), tem-se

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X X, \nabla_Y Z \rangle &= \langle \eta, \nabla_Y Z \rangle + \langle \nabla_Y Z, Y \rangle \langle \nabla_X X, Y \rangle = \langle \eta, \nabla_Y Z \rangle - \langle Z, \nabla_Y Y \rangle \langle \nabla_X X, Y \rangle \\ &= \langle \eta, \nabla_Y Z \rangle - \langle Z, \eta \rangle \langle \nabla_X X, Y \rangle. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Substituindo (7.5) e (7.7) em (7.2) concluimos que E é esférico.

Se $\alpha_f(E, E^\perp) = 0$, aplicando a equação de Gauss (3.15) a $X, Y \in E$ e $U \in E^\perp$, temos $R(X, Y)U = 0$. Dessa forma dados $X, Y, W \in E$ e $U \in E^\perp$ temos

$$0 = \langle R(X, Y)U, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, U \rangle$$

e, como U é qualquer, concluimos que $R(X, Y)W \in E, \forall X, Y, W \in E$. \square

O próximo resultado, relaciona subfibrados totalmente geodésicos de TM e invariantes por T com o gradiente do fator conforme.

Lema 7.1.2. *Se L é um subfibrado vetorial de TM que é totalmente geodésico e invariante por T , então $\nabla\varphi \in L$. Em particular, se a distribuição de nulidade relativa é não trivial, tem-se $\nabla\varphi \in \Delta$.*

Prova: Pelo Lema de Vergasta (3.9), aplicado a $X \in L$, temos

$$\begin{aligned} \nabla_X TX - T\nabla_X X &= \langle X, \nabla\varphi \rangle TX - T\nabla\varphi \\ T\nabla\varphi &= -\nabla_X TX + T\nabla_X X + X(\varphi)TX \\ \nabla\varphi &= -T^t \nabla_X TX + \nabla_X X(\varphi)X, \end{aligned} \quad (7.8)$$

pois T é ortogonal. Observe agora que $X, TX \in L$, pois L é invariante por T . Como L é totalmente geodésico, temos $\nabla_X X, \nabla_X TX \in L$. Finalmente, como $\nabla_X TX \in L$ e L é invariante por T , concluimos que $T^t \nabla_X TX \in L$, pois nesse caso $\nabla_X TX$ também é invariante por $T^t = T^{-1}$. Dessa forma $\nabla\varphi \in L$. Como Δ é totalmente geodésica, resta ver que esta é invariante por T . De fato, se $X \in \Delta$, temos $\alpha_f(X, Y) = 0, \forall Y \in TM$, como T comuta com a segunda forma, temos

$$\alpha_f(TX, Y) = \alpha_f(X, TY) = 0,$$

o que nos leva a concluir que para qualquer $X \in \Delta$, temos $TX \in \Delta$. \square

Veremos agora algumas propriedades dos subfibrados L_+ , L_- , L_c e dos seus respectivos complementos ortogonais. Lembramos que não estamos interessados em casos triviais, e por isso supomos sempre que $\nabla\varphi \neq 0$.

Lema 7.1.3. *Os subfibrados L_+ e L_- da decomposição (3.10) satisfazem as seguintes propriedades:*

(i) L_+ e L_- são umbílicos com curvaturas normais médias $\eta_+ \in L_+^\perp$ e $\eta_- \in L_-^\perp$, respectivamente, satisfazendo

$$(T - I)\eta_+ = T(\nabla\varphi)_{L_+^\perp} \quad (7.9)$$

e

$$(T + I)\eta_- = T(\nabla\varphi)_{L_-^\perp}; \quad (7.10)$$

(ii) Se $\text{rank}(L_+) \geq 2$ (respectivamente $\text{rank}(L_-) \geq 2$) então L_+ (respectivamente L_-) é esférico e $\nabla\varphi \in L_+^\perp$ (respectivamente $\nabla\varphi \in L_-^\perp$);

(iii) L_+ (respectivamente L_-) é totalmente geodésico se, e somente se, $\nabla\varphi \in L_+$ (respectivamente $\nabla\varphi \in L_-$);

Prova: Tendo em vista a Observação 3.4.4, faremos a prova de cada item apenas para o fibrado L_+ . Observamos ainda que a equação (7.10) pode ser obtida usando um procedimento análogo ao que será feito no item (i).

(i) Seja $Y \in L_+$ um campo unitário. Pelo Lema de Vergasta (3.9), temos

$$\nabla_X Y - T\nabla_X Y = Y(\varphi)TX - \langle X, Y \rangle T\nabla\varphi,$$

ou seja,

$$(T - I)\nabla_X Y = \langle X, Y \rangle T\nabla\varphi - Y(\varphi)TX. \quad (7.11)$$

Note que $(T - I)\nabla_X Y \in L_+^\perp$, logo o lado direito de (7.11) também está nesse subfibrado. Observe que se $\text{rank}(L_+) = 1$, claramente L_+ é umbílico e, tomando $X = Y$ em (7.11), concluímos que $X(\varphi) = 0$, ou equivalentemente, $\nabla\varphi \in L_+^\perp$. Dessa forma, lembrando que $\nabla_X X = \eta_+$ (pois $X \in L_+$ é unitário), a equação (7.9) segue facilmente. Se $\text{rank}(L_+) \geq 2$, tomando $X \in L_+$ ortogonal a Y , obtemos de (7.11) que $Y(\varphi) = 0$, ou equivalentemente, $\nabla\varphi \in L_+^\perp$. Dessa forma $(T - I)\nabla_X Y = 0$, ou equivalentemente,

$$(\nabla_Y X)_{L_+^\perp} = 0 = \langle X, Y \rangle \eta_+.$$

Logo L_+ é umbílico.

- (ii) Como vimos no item anterior, neste caso, $(\nabla_Y X)_{L_+^\perp} = 0$. Dessa forma $\eta_+ = 0$ e, portanto, L_+ é esférico.
- (iii) Como, L_+ é invariante por T , segue do Lema 7.1.2 que se L_+ é totalmente geodésico então $\nabla\varphi \in L_+$. Para recíproca, observe que se $\nabla\varphi \in L_+$, então a partir de (7.9) concluímos que $\eta_+ \in L_+ \cap L_+^\perp$. Logo $\eta_+ = 0$. Observe que, nesse caso,

$$\left(\nabla_X Y\right)_{E^\perp} = \langle X, Y \rangle \eta_+ = 0, \quad \forall X, Y \in E,$$

pois L_+ é umbílico. Logo $\nabla_X Y \in E, \forall X, Y \in E$ ou seja, L_+ é totalmente geodésico. \square

Lema 7.1.4. *Seja L um dos subfibrados $L_+, L_+^\perp, L_c, L_c^\perp$. Então, L é totalmente geodésico se, e somente se, $\nabla\varphi \in L$.*

Prova: A primeira parte já foi provada no Lema 7.1.2, pois estes fibrados são invariantes por T . Para provarmos a recíproca precisamos analisar caso a caso. Como a Proposição anterior já mostrou o caso $L = L_+$ e $L = L_-$, tendo em mente a Observação 3.4.4, restam-nos os seguintes casos:

- (i) $L = L_c^\perp$. Queremos mostrar que dados $W_1, W_2 \in L_c^\perp = L_+ \oplus L_-$, temos $\nabla_{W_1} W_2 \in L_c^\perp$. Nesse caso $W_1 = X_1 + Y_1$ e $W_2 = X_2 + Y_2$ com $X_1, X_2 \in L_+$ e $Y_1, Y_2 \in L_-$, portanto

$$\nabla_{W_1} W_2 = \nabla_{X_1} X_2 + \nabla_{X_1} Y_2 + \nabla_{Y_1} X_2 + \nabla_{Y_1} Y_2 \quad (7.12)$$

Observe que se $\nabla\varphi \in L_c^\perp = L_+ \oplus L_-$, das equações (7.9) e (7.10), temos que

$$(T - I)(\eta_+)_{L_-} + (T - I)(\eta_+)_{L_c} = T(\nabla\varphi)_{L_-}$$

e

$$(T + I)(\eta_-)_{L_+} + (T + I)(\eta_-)_{L_c} = T(\nabla\varphi)_{L_+},$$

pois $\eta_+ \in L_+^\perp$ e $\eta_- \in L_-^\perp$. Logo $(\eta_+)_{L_c} = 0 = (\eta_-)_{L_c}$. Dessa forma, $\nabla_{X_1} X_2 \in L_+, \forall X_1, X_2 \in L_+$ e $\nabla_{Y_1} Y_2 \in L_-, \forall Y_1, Y_2 \in L_-$. Além disso, o Lema de Vergasta implica em $\nabla_Y X, \nabla_X Y \in L_c^\perp, \forall X \in L_+, Y \in L_-$. Portanto, L_c^\perp é totalmente geodésico.

- (ii) $L = L_+^\perp$. Se $\nabla\varphi \in L_+^\perp$, tomando $X \in L_+^\perp$ na equação (7.11) obtemos

$$(T - I)\nabla_X Y = 0,$$

ou seja, $\nabla_X Y \in L_+$. De maneira que dado $Z \in L_+^\perp$, temos

$$0 = \langle \nabla_X Y, Z \rangle = -\langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad \forall Y \in L_+,$$

ou seja, $\nabla_X Z \in L_+^\perp, \forall X, Z \in L_+^\perp$.

(iii) $L = L_c$. Basta observar que $L = L_c = L_+^\perp \cap L_-^\perp$ e usar que intersecção de fibrados totalmente geodésicos é um fibrado totalmente geodésico.

□

Lema 7.1.5. *O subfibrado L_c da decomposição (3.10) satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) *Um autovalor λ de T é constante em $B_\lambda = E_\lambda \oplus E_{\bar{\lambda}}$ se, e somente se, $\nabla\varphi \in B_\lambda^\perp$;*
- (ii) *Se $B_\lambda \not\subseteq \Delta \otimes \mathbb{C}$ então o autovalor λ de T é constante em B_λ ;*
- (iii) *Se $\text{rank}(L_c) \geq 4$ então um autovalor μ de T pode deixar de ser constante apenas em B_μ . Ademais, isso só pode ocorrer se μ tem multiplicidade 1 e $B_\mu = \Delta \otimes \mathbb{C}$;*
- (iv) *Se $\text{rank}(L_c) \geq 4$ e ou $\Delta \cap L_c = \{0\}$ ou $\text{rank}\Delta \geq 3$ então $\nabla\varphi \in L_c^\perp$;*
- (v) *Se $\text{rank}(L_c) = 2$, $\text{rank}\Delta \geq 3$ e $L_c \subset \Delta$ então $\nabla\varphi \in L_c^\perp$;*
- (vi) *Se $TM \otimes \mathbb{C} = L_c$ então $n = 2$.*

Prova:

- (i) Procedendo como no 3º caso da demonstração do Teorema 4.1.1, obtemos a equação (4.2), renumerada a seguir

$$\bar{\lambda}Z(\lambda) = Z(\varphi). \quad (7.13)$$

Aplicando a conjugação à última equação, obtemos

$$\bar{Z}(\varphi) = \lambda\bar{Z}(\bar{\lambda}) = -\bar{\lambda}\bar{Z}(\lambda). \quad (7.14)$$

De (7.13) e (7.14) decorre que

$$Z(\lambda) = \bar{Z}(\lambda) = 0$$

se, e somente se,

$$\langle \nabla\varphi, Z \rangle = \langle \nabla\varphi, \bar{Z} \rangle = 0.$$

Ou seja, λ é constante em B_λ , se, e somente se, $\nabla\varphi \in B_\lambda^\perp$.

- (ii) Nesse caso, $\text{rank}(\Delta) \geq 3$, pois $\text{rank}(B_\lambda) = 2$ e $B_\lambda \not\subseteq \Delta \otimes \mathbb{C}$. Como mostramos no Lema 7.1.2, Δ é invariante por T . Assim, se σ é uma folha de Δ , então $T(\sigma) \subset \sigma$. Além disso, como Δ é totalmente geodésica, σ é um $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^N$, pois toda geodésica em σ é geodésica em \mathbb{R}^N . Logo $f|_\sigma: \sigma \rightarrow \mathbb{R}^N$ é uma aplicação de \mathbb{R}^k em \mathbb{R}^N e podemos aplicar a Proposição 6.1.2. Concluimos assim que $e^\varphi T|_\Delta$ é a derivada da transformação conforme ϕ de σ . Pelo Teorema de Liouville ϕ é uma composição de inversão com aplicação de semelhança, assim T tem autovalores constantes em $\Delta \otimes \mathbb{C}$. Em particular, λ é constante.

(iii) Como $\text{rank}(L_c) \geq 4$, então existem pelo menos dois blocos complexos, digamos B_λ e B_μ . Seja $W \in E_\mu$. Tomando o produto interno de (3.14) com $X \in L_+$, obtemos

$$\langle T\nabla_X W, X \rangle - \mu \langle \nabla_X W, X \rangle = X(\mu) \langle W, X \rangle - W(\varphi) \langle X, X \rangle$$

e daí

$$X(\mu) = 0. \quad (7.15)$$

Analogamente, tomando o produto interno de (3.14) com $Y \in L_-$, obtemos

$$Y(\mu) = 0. \quad (7.16)$$

Assim, μ é constante em L_+ e L_- , para concluir a primeira parte resta mostrar que μ é constante nos blocos B_λ com $\mu \neq \lambda$. Seja $Z \in E_\lambda$ tal que $\langle Z, W \rangle = 0$ se $Z \in E_{\bar{\mu}}$. Então, tomando o produto interno de (3.11) por \bar{W} , obtemos

$$\langle T\nabla_Z W, \bar{W} \rangle - \mu \langle \nabla_Z W, \bar{W} \rangle = Z(\mu) \langle W, \bar{W} \rangle - \lambda W(\varphi) \langle Z, \bar{W} \rangle + 0 \quad (7.17)$$

$$Z(\mu) \langle W, \bar{W} \rangle = 0 \quad (7.18)$$

Como $\langle W, \bar{W} \rangle \neq 0$, concluimos que $Z(\mu) = 0$, $\forall Z \in E_\lambda$, $\lambda \notin \{\mu, \bar{\mu}\}$. Dessa forma, μ pode não ser constante apenas em B_μ . Observe que isto só pode ocorrer se μ for raiz simples (isto é, tem multiplicidade 1). De fato, como $\text{rank}(L_c) \geq 4$ e temos pelo menos dois blocos B_μ e B_λ iguais, concluimos que μ é constante em B_λ (pelo item (i)) e λ é constante em B_μ . Mas, como os blocos são iguais, temos $\lambda = \mu$. Logo se μ tem multiplicidade maior que 1, então μ é constante em B_μ .

Vejam agora que, se $\text{rank}(L_c) \geq 4$ e $B_\mu \not\subset \Delta \otimes \mathbb{C}$ então μ é constante em B_μ . Para isso, sejam λ um autovalor de T com $\lambda \notin \{\mu, \bar{\mu}\}$, $Z \in E_\lambda$ e $W \in E_\mu$. Como, pelo item (ii) da Proposição 3.4.3, temos $\alpha_f(E, E^\perp) = 0$, podemos usar a equação de Codazzi (3.16) para obter

$$\alpha_f(\nabla_Z \bar{Z}, W) + \alpha_f(\bar{Z}, \nabla_Z W) = \alpha_f(\nabla_{\bar{Z}} Z, W) + \alpha_f(Z, \nabla_{\bar{Z}} W). \quad (7.19)$$

Utilizando que $\alpha_f(E, E^\perp) = 0$ e lembrando que $\text{rank}(E_\lambda) = \text{rank}(E_{\bar{\lambda}}) = 1$, temos

$$\begin{aligned} \alpha_f(\nabla_Z \bar{Z}, W) &= \alpha_f((\nabla_Z \bar{Z})_{E_\mu}, W) = \alpha_f(\langle \nabla_Z \bar{Z}, \bar{W} \rangle W, W) \\ &= \langle \nabla_Z \bar{Z}, \bar{W} \rangle \alpha_f(W, W), \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned} \alpha_f(\bar{Z}, \nabla_Z W) &= \alpha_f(\bar{Z}, (\nabla_Z W)_{E_\lambda}) = \alpha_f(\bar{Z}, \langle \nabla_Z W, Z \rangle \bar{Z}) \\ &= -\langle W, \nabla_Z Z \rangle \alpha_f(\bar{Z}, \bar{Z}), \end{aligned} \quad (7.21)$$

$$\begin{aligned} \alpha_f(\nabla_{\bar{Z}} Z, W) &= \alpha_f((\nabla_{\bar{Z}} Z)_{E_\mu}, W) = \alpha_f(\langle \nabla_{\bar{Z}} Z, \bar{W} \rangle W, W) \\ &= \langle \nabla_{\bar{Z}} Z, \bar{W} \rangle \alpha_f(W, W), \end{aligned} \quad (7.22)$$

e

$$\begin{aligned}\alpha_f(Z, \nabla_{\bar{Z}}W) &= \alpha_f(Z, (\nabla_{\bar{Z}}W)_{E_\lambda}) = \alpha_f(Z, \langle \nabla_{\bar{Z}}W, \bar{Z} \rangle Z) \\ &= -\langle W, \nabla_{\bar{Z}}\bar{Z} \rangle \alpha_f(Z, Z) = 0.\end{aligned}\quad (7.23)$$

Substituindo (7.20),(7.21),(7.22) e (7.23) em (7.19), obtemos

$$\langle [Z, \bar{Z}], \bar{W} \rangle \alpha_f(W, W) = \langle \nabla_Z Z, W \rangle \alpha_f(\bar{Z}, \bar{Z}) - \langle \nabla_Z \bar{Z}, W \rangle \alpha_f(Z, Z). \quad (7.24)$$

Por outro lado, tomando o produto interno de (3.13) por W , obtemos

$$\langle T\nabla_Z Z, W \rangle - \lambda \langle \nabla_Z Z, W \rangle = Z(\lambda) \langle Z, W \rangle - \lambda Z(\varphi) \langle Z, W \rangle,$$

Logo

$$(\bar{\mu} - \lambda) \langle \nabla_Z Z, W \rangle = 0 \quad (7.25)$$

Trocando Z por \bar{Z} no procedimento anterior, concluimos que

$$(\bar{\mu} - \lambda) \langle \nabla_{\bar{Z}} \bar{Z}, W \rangle = 0. \quad (7.26)$$

Como $\lambda \notin \{\mu, \bar{\mu}\}$, concluimos de (7.25) e (7.26) que

$$\langle \nabla_{\bar{Z}} \bar{Z}, W \rangle = \langle \nabla_Z Z, W \rangle = 0, \quad (7.27)$$

de maneira que (7.24) se torna

$$\langle [Z, \bar{Z}], \bar{W} \rangle \alpha_f(W, W) = 0 \quad (7.28)$$

e consequentemente

$$\langle [Z, \bar{Z}], W \rangle \alpha_f(\bar{W}, \bar{W}) = 0. \quad (7.29)$$

Logo

$$\alpha_f(W, W) = 0 \text{ ou } \langle [Z, \bar{Z}], \bar{W} \rangle = 0. \quad (7.30)$$

Como estamos supondo $\alpha_f(W, W) \neq 0$, pois $B_\mu \notin \Delta \otimes \mathbb{C}$, temos

$$\langle [Z, \bar{Z}], \bar{W} \rangle = 0. \quad (7.31)$$

Mas, tomando o produto interno de (3.11) por \bar{Z} , obtemos

$$\langle T\nabla_Z W, \bar{Z} \rangle - \mu \langle \nabla_Z W, \bar{Z} \rangle = -\lambda W(\varphi) \langle Z, \bar{Z} \rangle,$$

ou seja,

$$(\lambda - \mu) \langle \nabla_Z \bar{Z}, W \rangle = \lambda W(\varphi). \quad (7.32)$$

Trocando Z por \bar{Z} no procedimento anterior concluímos que

$$(\bar{\lambda} - \mu)\langle \nabla_{\bar{Z}}Z, W \rangle = \bar{\lambda}W(\varphi). \quad (7.33)$$

Subtraindo (7.32) de (7.33), obtemos

$$(1 - \mu\bar{\lambda})\langle \nabla_Z\bar{Z}, W \rangle - (1 - \mu\lambda)\langle \nabla_{\bar{Z}}Z, W \rangle = 0.$$

Como por (7.31) temos $\langle \nabla_Z\bar{Z}, W \rangle = \langle \nabla_{\bar{Z}}Z, W \rangle$, concluímos que

$$(\lambda - \bar{\lambda})\langle \nabla_Z\bar{Z}, W \rangle = 0. \quad (7.34)$$

Assim, se $\langle \nabla_Z\bar{Z}, W \rangle \neq 0$, por (7.34) teríamos $\lambda = \bar{\lambda}$ o que é absurdo. Logo

$$\langle \nabla_Z\bar{Z}, W \rangle = 0 = \langle \nabla_{\bar{Z}}Z, W \rangle. \quad (7.35)$$

Assim, de (7.32), (7.33) e (7.35), concluímos que $\nabla\varphi \in B_\mu^\perp$, o que pelo item (i) implica que μ é constante em B_μ . Dessa forma, tendo em mente o item (ii), se $B_\mu \neq \Delta \otimes \mathbb{C}$ temos μ constante. Assim μ pode não ser constante em B_μ somente se μ é raiz simples e $B_\mu = \Delta \otimes \mathbb{C}$.

- (iv) Observe que se $\text{rank}(L_c) \geq 4$ e $\Delta \cap L_c = \{0\}$ então todo bloco B_μ é tal que $B_\mu \not\subset \Delta \otimes \mathbb{C}$. Pelo item anterior, concluímos que todo μ é constante em B_μ . Assim, pelo item (i), $\nabla\varphi \in L_c^\perp$. Caso $\text{rank}(L_c) \geq 4$ e $\text{rank}(\Delta) \geq 3$ devemos notar que $\Delta \neq \{0\}$ e proceder como na prova do item (ii), concluindo que todos os autovalores de T são constantes. Em particular, todos os autovalores complexos de T são constantes. Novamente, pelo item (i) concluímos que $\nabla\varphi \in L_c^\perp$.
- (v) Como $\text{rank}(L_c) = 2$, $\text{rank}\Delta \geq 3$ e $L_c \subset \Delta$, podemos usar a prova do item (ii). Como os autovalores de T são constantes em $\Delta \otimes \mathbb{C}$ e $L_c \subset \Delta$, concluímos que todos os autovalores complexos de T são constantes. Logo, pelo item (i), $\nabla\varphi \in L_c^\perp$.
- (vi) Pelo item (iv) do Lema 7.1.5, basta mostrar que se $\text{rank}(L_c) \geq 4$ então não existe um autovalor complexo de multiplicidade 1 tal que $B_\mu = \Delta \otimes \mathbb{C}$, pois nesse caso todos os autovalores são constantes em seus blocos e, conseqüentemente na variedade. Logo pelo item (i) $\nabla\varphi \in L_c^\perp$. Nesse caso, concluímos que $\nabla\varphi = 0$.

Vamos assumir o contrário, isto é, que existe um autovalor μ que não é constante em B_μ . Como $\text{rank}(L_c) \geq 4$, sejam $0 \neq W \in E_\mu$ e $Z \in E_\lambda$ com $\lambda \notin \{\mu, \bar{\mu}\}$. Logo $\alpha_f(W, W) = 0$ e $\alpha_f(Z, Z) \neq 0$. Repetindo o argumento para obtenção de (7.25) e (7.26), podemos obter (7.34) e

$$\langle \nabla_ZZ, W \rangle = \langle \nabla_ZZ, \bar{W} \rangle = 0. \quad (7.36)$$

Além disso, como $\alpha_f(Z, Z) \neq 0$, pelo item (ii) temos que $\lambda = \beta + i\gamma$. Seja $\{X, Y\}$ um referencial ortonormal em Δ constante ao longo de cada folha. Segue de (7.36) que o tensor de decomposição C de Δ satisfaz

$$C_X Z = -\nabla_Z X = \langle Z, \bar{Z} \rangle^{-1} \langle \nabla_Z \bar{Z}, X \rangle Z, \forall Z \in E_\lambda.$$

Chamando $S = \langle Z, \bar{Z} \rangle^{-1} \nabla_Z \bar{Z}$ e $\rho = \langle S, X \rangle$, percebemos que $C_X Z = \rho Z$ e $C_Y Z = \nu Z$ com $\nu = \langle S, Y \rangle$. Escrevendo $S = U + iV$, obtemos de que

$$\mu = \frac{\langle V, W \rangle}{\langle \beta V - \gamma U, W \rangle}.$$

Como $\mu\bar{\mu} = 1$, temos $\|V\| = \|\beta V - \gamma U\|^2$. Como $\gamma \neq 0$, podemos escrever

$$\gamma(\|U\|^2 - \|V\|^2) = 2\beta\langle V, U \rangle. \quad (7.37)$$

Denotando $A = \langle S, S \rangle = (\|U\|^2 - \|V\|^2) - 2i\langle U, V \rangle$, então (7.37) implica que A/\bar{A} é constante em M^n . Portanto,

$$X(A)\bar{A} = AX(\bar{A}) \quad (7.38)$$

Por outro lado, como $\nabla_X C_X Z = (C_X^2)Z$ e $\nabla_X C_Y Z = C_Y C_X Z$ para $Z \in E_\lambda$, obtemos $X(\rho) = \rho^2$ e $X(\nu) = \nu\rho$. Como $A = \rho^2 + \nu^2$, temos $X(A) = 2\rho A$. Substituindo essa última igualdade em (7.38), temos $(\rho - \bar{\rho})|A|^2 = 0$. Logo $\rho = \bar{\rho}$, isto é, $\langle V, X \rangle = 0$. Analogamente $\langle V, Y \rangle = 0$. Logo $V = 0$, o que é absurdo. Logo $\text{rank}(L_c) = 2$ o que implica $n = 2$.

□

Lema 7.1.6. *Considere a decomposição (3.10) e suponha que $L_c \neq \{0\}$. Nessas condições, L_+ e L_- satisfazem*

- (i) $\nabla\varphi \notin L_+ \cup L_-$;
- (ii) Se $\text{rank}(L_+) = 1$ e $L_+ \not\subset \Delta$ (respectivamente $\text{rank}(L_-) = 1$ e $L_- \not\subset \Delta$) então $\nabla\varphi \in L_+^\perp$ (respectivamente $\nabla\varphi \in L_-^\perp$);
- (iii) Se $L_- \neq \{0\}$, $\text{rank}(L_+) = 1$ e $L_+ \subset \Delta$ (respectivamente $L_+ \neq \{0\}$, $\text{rank}(L_-) = 1$ e $L_- \subset \Delta$) então $\text{rank}(L_-) = 1$ (respectivamente $\text{rank}(L_+) = 1$) e $L_+ \oplus L_- \subset \Delta$;
- (iv) Se L_c é totalmente geodésico e $L_+ \neq \{0\}$ (respectivamente $L_- \neq \{0\}$) então $\text{rank}(L_c) = 2$ e L_+ (respectivamente L_-) é esférico.

Prova:

(i) Note que, após provar o item (iii) do Lema 7.1.3, só precisamos mostrar (i) quando $\text{rank}(L_+) = 1$. Dado $X \in L_+$, por (3.12), temos

$$\begin{aligned} \langle T\nabla_Z \bar{Z}, X \rangle - \bar{\lambda} \langle \nabla_Z \bar{Z}, X \rangle &= Z(\bar{\lambda}) \langle \bar{Z}, X \rangle - \lambda \bar{Z}(\varphi) \langle Z, X \rangle + \langle Z, \bar{Z} \rangle \langle T\nabla \varphi, X \rangle \\ (1 - \bar{\lambda}) \langle \nabla_Z \bar{Z}, X \rangle &= \langle Z, \bar{Z} \rangle X(\varphi). \end{aligned} \quad (7.39)$$

Observe que, como $\langle Z, \bar{Z} \rangle, X(\varphi) \in \mathbb{R}$ e $(1 - \bar{\lambda}) \notin \mathbb{R}$, a equação (7.39) implica $\langle \nabla_Z \bar{Z}, X \rangle \notin \mathbb{R}$. Por outro lado, como não estamos interessados no caso isométrico, podemos admitir que $\nabla \varphi \neq 0$. Dessa forma, supondo por absurdo que $\nabla \varphi \in L_+$, concluímos que $\nabla \varphi$ gera L_+ (lembre que $\text{rank}(L_+) = 1$). Assim, pela Proposição 1.5.3, concluímos que L_+^\perp é integrável. Ora, isso implica que $\langle \nabla_Z \bar{Z}, X \rangle \in \mathbb{R}$, o que é absurdo. Logo $\nabla \varphi \notin L_+$.

(ii) Pela equação (3.13), podemos escrever

$$\lambda \nabla_Z Z - T\nabla_Z Z = \lambda Z(\varphi)Z - Z(\lambda)Z. \quad (7.40)$$

Tomando o produto interno dessa igualdade com $X \in L_+$, obtemos

$$\lambda \langle \nabla_Z Z, X \rangle - \langle \nabla_Z Z, X \rangle = 0,$$

ou seja,

$$(\lambda - 1) \langle \nabla_Z Z, X \rangle = 0.$$

Como $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, temos

$$\langle \nabla_Z Z, X \rangle = 0. \quad (7.41)$$

Pelo item (ii) da Proposição 3.4.3, temos $\alpha_f(E, E^\perp) = 0$, logo podemos usar a equação de Codazzi (3.16) na forma

$$\alpha_f(\nabla_Z X, \bar{Z}) + \alpha_f(X, \nabla_Z \bar{Z}) = \alpha_f(\nabla_X Z, \bar{Z}) + \alpha_f(Z, \nabla_X \bar{Z}). \quad (7.42)$$

Utilizando que $\alpha_f(E, E^\perp) = 0$ e lembrando que $\text{rank}(E_\lambda) = \text{rank}(E_{\bar{\lambda}}) = 1$, temos

$$\begin{aligned} \alpha_f(\nabla_Z X, \bar{Z}) &= \alpha_f((\nabla_Z X)_{E_{\bar{\lambda}}}, \bar{Z}) = \alpha_f(\langle \nabla_Z X, Z \rangle \bar{Z}, \bar{Z}) \\ &= -\langle X, \nabla_Z Z \rangle \alpha_f(\bar{Z}, \bar{Z}) \stackrel{(7.41)}{=} 0, \end{aligned} \quad (7.43)$$

$$\begin{aligned} \alpha_f(X, \nabla_Z \bar{Z}) &= \alpha_f(X, (\nabla_Z \bar{Z})_{L_+}) = \alpha_f(X, \langle \nabla_Z \bar{Z}, X \rangle X) \\ &= \langle \nabla_Z \bar{Z}, X \rangle \alpha_f(X, X), \end{aligned} \quad (7.44)$$

$$\begin{aligned} \alpha_f(\nabla_X Z, \bar{Z}) &= \alpha_f((\nabla_X Z)_{E_{\bar{\lambda}}}, \bar{Z}) = \alpha_f(\langle \nabla_X Z, Z \rangle \bar{Z}, \bar{Z}) \\ &= \langle \nabla_X Z, Z \rangle \alpha_f(\bar{Z}, \bar{Z}) = 0 \end{aligned} \quad (7.45)$$

$$(7.46)$$

e

$$\begin{aligned}\alpha_f(Z, \nabla_X \bar{Z}) &= \alpha_f(Z, (\nabla_X \bar{Z})_{E_\lambda}) = \alpha_f(Z, \langle \nabla_X \bar{Z}, \bar{Z} \rangle Z) \\ &= \langle \nabla_X \bar{Z}, \bar{Z} \rangle \alpha_f(Z, Z) = 0.\end{aligned}\tag{7.47}$$

Substituindo (7.43),(7.44),(7.45) e (7.47) em (7.42), obtemos

$$\alpha_f(X, X) \langle \nabla_Z \bar{Z}, X \rangle = 0.$$

Como $\text{rank}(L_+) = 1$ e $L_+ \not\subset \Delta$, temos $\alpha_f(X, X) \neq 0$, logo $\langle \nabla_Z \bar{Z}, X \rangle = 0$. Portanto, (7.39) implica $X(\varphi) = 0$ e, como $\text{rank}(L_+) = 1$, temos $\nabla\varphi \in L_+^\perp$.

(iii) Suponhamos por absurdo que $\text{rank}(L_+) \geq 2$ ou $\text{rank}(L_-) = 1$ e $L_- \not\subset \Delta$. Observe que, em ambos os casos, $\nabla\varphi \in L_-^\perp$. No primeiro caso isso se justifica pelo item (ii) do Lema 7.1.3 e no segundo caso pelo item (ii) do Lema 7.1.6. Se mostrarmos agora que $\nabla\varphi \in L_c^\perp$, concluímos que $\nabla\varphi \in L_-^\perp \cap L_c^\perp = L_+$, o que contradiz o item (iv), concluindo a demonstração. Para verificar que $\nabla\varphi \in L_c^\perp$, vamos considerar dois casos

(a) $\text{rank}(L_c) \geq 4$. Neste caso ou $\Delta \cap L_c = \{0\}$ ou $\text{rank}(\Delta) \geq 3$. Em ambos os casos, pelo item (iv) do Lema 7.1.5, obtemos $\nabla\varphi \in L_c^\perp$.

(b) $\text{rank}(L_c) = 2$. Neste caso ou $\Delta \cap L_c = \{0\}$ ou $\text{rank}(\Delta) \geq 3$ e $L_c \subset \Delta$. O primeiro caso, pelo item (ii) do Lema 7.1.5, implica que λ é constante em B_λ , qualquer que seja o bloco complexo B_λ . Ora, pelo item (i) do Lema 7.1.5 isso só pode ocorrer se $\nabla\varphi \in B_\lambda^\perp$, para todo bloco complexo. Logo $\nabla\varphi \in L_c^\perp$. No segundo caso, o item (v) do Lema 7.1.5 fornece $\nabla\varphi \in L_c^\perp$.

Dessa forma, tanto $\text{rank}(L_+) \geq 2$ quanto $\text{rank}(L_-) = 1$ e $L_- \not\subset \Delta$ nos conduzem a um absurdo.

(iv) Vamos mostrar que não ocorre $\text{rank}(L_c) \geq 4$. Se supusermos $\text{rank}(L_c) \geq 4$ e $L_c \subset \Delta$, pelo item (iv) do Lema 7.1.5 e pelo Lema 7.1.4, temos $\nabla\varphi \in L_c \cap L_c^\perp$. Isso contraria $\nabla\varphi \neq 0$. Supondo que $\text{rank}(L_c) \geq 4$ e $L_c \not\subset \Delta$, temos que a restrição de f às folhas de L_c não é totalmente geodésica. Mais precisamente, se σ é uma folha de L_c então $f|_\sigma$ não é totalmente geodésica. Como, pelo Lema 7.1.4, $\nabla\varphi \in L_c$, concluímos que $g|_\sigma$ é uma deformação conforme não trivial de $f|_\sigma$. A esse par de imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss corresponde a restrição de T à folha σ como tensor ortogonal e σ como auto-fibrado complexo (isto é, σ é o subfibrado L_c da decomposição (3.10) para o fibrado $T\sigma \otimes \mathbb{C}$). Logo σ é invariante por T e $T\sigma \otimes \mathbb{C}$ só tem a componente complexa, isto é, $T\sigma \otimes \mathbb{C} = L_c$. Assim, pelo item (vi) do Lema 7.1.5, concluímos que σ não pode ter dimensão maior que 2. Logo $\text{rank}(L_c) = 2$.

Por causa do item (ii) do Lema 7.1.3, só precisamos provar que L_+ é esférico quando $\text{rank}(L_+) = 1$. Como L_c é totalmente geodésico, pelo Lema 7.1.4, temos $\nabla\varphi \in L_c$. Aplicando (3.9) a campos unitários $X \in L_+$ e $Y \in L_-$, concluiremos que $2\langle\eta_+, Y\rangle = Y(\varphi) = 0$ e conseqüentemente $\eta_+ \in L_c$. Sejam λ e $\bar{\lambda}$ os autovalores complexos de T , $Z \in E_\lambda$ e X unitário gerando L_+ . Utilizando (3.14), obtemos $X(\lambda) = 0$ e $Z(\varphi) = \bar{\lambda}Z(\lambda)$. Portanto

$$(1 - \lambda)\langle\eta_+, Z\rangle = \bar{\lambda}Z(\lambda). \quad (7.48)$$

Derivando com respeito a X , usando que $\nabla\lambda \in L_c$ e que L_c é totalmente geodésico, temos

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)\langle\nabla_X\eta_+, Z\rangle + (1 - \lambda)\langle\eta_+, \nabla_X Z\rangle &= \bar{\lambda}XZ(\lambda) = \bar{\lambda}[X, Z](\lambda) \\ &= \bar{\lambda}\nabla_X Z(\lambda) = \bar{\lambda}\langle\nabla_X Z(\lambda), \bar{Z}\rangle Z(\lambda) \stackrel{(7.48)}{=} (1 - \lambda)\langle\nabla_X Z(\lambda), \bar{Z}\rangle\langle\eta_+, \nabla_X Z\rangle, \end{aligned}$$

portanto, $\langle\nabla_X\eta_+, Z\rangle = 0$.

□

7.2 O Teorema Dajczer-Tojeiro para o caso geral

Essa seção é o ápice do trabalho, pois aqui enunciamos e mostramos o Teorema principal de [DT10] que é uma caracterização para imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss. Segundo essa caracterização todo par de imersões conformes com a mesma aplicação de Gauss é como um dos exemplos construídos no capítulo anterior, desde que a dimensão da variedade seja maior ou igual a 3 e o par não isométrico. Ao fim desta seção, apresentamos um diagrama que esquematiza a demonstração.

Teorema 7.2.1 (Dajczer-Tojeiro [DT10]). *Sejam $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$, $n \geq 3$, duas imersões com a mesma aplicação de Gauss que induzem métricas conformes não isométricas em M^n . Então ocorre uma das seguintes alternativas:*

- (i) $f(M^n)$ e $g(M^n)$ são cones Kaehlerianos reais mínimos;
- (ii) $f(M^n)$ e $g(M^n)$ são produtos warped de imersões;
- (iii) $f(M^n)$ e $g(M^n)$ são produtos warped triplos de imersões.

Prova: Analisaremos os possíveis casos para a decomposição do fibrado tangente em $TM \otimes \mathbb{C} = L_+ \oplus L_- \oplus L_c$. Nosso objetivo é usar as propriedades dos subfibrados para conseguir aplicar os Teoremas de Hiepko e Nölker, obtendo conclusões sobre a estrutura da variedade M .

Como M^n tem dimensão maior ou igual que 3, temos os seguintes casos a considerar:

- (i) $TM \otimes \mathbb{C} = L_+$ ou $TM \otimes \mathbb{C} = L_-$;
- (ii) $TM \otimes \mathbb{C} = L_+ \oplus L_-$
- (iii) $TM \otimes \mathbb{C} = L_c$;
- (iv) $TM \otimes \mathbb{C} = L_+ \oplus L_c$ ou $TM \otimes \mathbb{C} = L_- \oplus L_c$
- (v) $TM \otimes \mathbb{C} = L_+ \oplus L_- \oplus L_c$

Observe que os dois casos descritos em (i) não são interessantes porque $T = I$ ou $T = -I$. No segundo caso podemos supor que um dos subfibrados tem posto 1, pois se ambos tem posto maior que 2 concluímos que $\nabla\varphi = 0$ pelo item (ii) do Lema 7.1.3. Suponhamos que $\text{rank}(L_+) = 1$, logo $\text{rank}(L_-) \geq 2$, pois $n \geq 3$. Assim, pelo item (ii) do Lema 7.1.3, L_- é esférico e $\nabla\varphi \in L_+$. Logo pelo Lema 7.1.4, L_+ é totalmente geodésico e podemos aplicar o Teorema de Hiepko para concluir que $M = N_1 \times_\rho N_2$ com $\dim(N_1) = 1$ e $\dim(N_2) \geq 2$. Logo pelo Lema 3.4.3 podemos aplicar o Teorema de Nölker e concluir que $f = \psi_1(f_0 \times_\rho f_1)$ e $g = \psi_1(g_0 \times g_1)$ em que f_0 e g_0 são curvas regulares que, pela Proposição 6.4.4, satisfazem (6.16).

Vejamus que (iii) não ocorre. Utilizando o item (vi) do Lema 7.1.5, descobrimos que M é uma superfície, isto é, $n = 2$ contradizendo a hipótese $n \geq 3$.

Conforme a Observação 3.4.4, podemos reduzir (iv) ao caso $TM \otimes \mathbb{C} = L_+ \oplus L_c$. Se $\text{rank}(L_+) \geq 2$, pelo item (ii) do Lema 7.1.3 e pelo item (i) do Lema 7.1.6, concluímos que L_+ é esférico e $\nabla\varphi \in L_c$, respectivamente. Logo, pelo Lema 7.1.4, L_c é totalmente geodésico e, pelo item (iv) do Lema 7.1.6, $\text{rank}(L_c) = 2$. Utilizando novamente o Lema 3.4.3 e os Teoremas de Hiepko e Nölker, concluímos que $f = \psi_1(f_0 \times f_1)$ e $g = \psi_1(g_0 \times g_1)$ em que f_0 e g_0 são superfícies mínimas com a mesma aplicação de Gauss (orientada), isométricas com respeito a métrica hiperbólica de \mathbb{R}_+^m e relacionadas como na Proposição 6.4.2. Supondo agora que $\text{rank}(L_+) = 1$ e $L_+ \subset \Delta$, como $n > 3$, temos duas possibilidades: ou $L_+ = \Delta$ (caso $\text{rank}(\Delta) = 1$) ou $\text{rank}(\Delta) \geq 3$ (caso $\text{rank}(\Delta) > 1$). Em ambos os casos $\nabla\varphi \in L_+$, na primeira alternativa porque, sendo Δ totalmente geodésico, podemos usar o Lema 7.1.4, e na segunda porque ou $\text{rank}(L_c) = 2$ e $L_c \subset \Delta$ ou $\text{rank}(L_c) \geq 4$ e $\text{rank}(\Delta) \geq 3$ e usamos os itens (vi) ou (v) do Lema 7.1.5. Mas $\nabla\varphi \in L_+$ contradiz o item (i) do Lema 7.1.6. Dessa forma, se $\text{rank}(L_+) = 1$ tem-se $L_+ \not\subset \Delta$. Pelo item (ii) do Lema 7.1.6 temos $\nabla\varphi \in L_c$ e, em consequência do Lema 7.1.4 e do item (iv) Lema 7.1.6, temos $\text{rank}(L_c) = 2$ e L_+ é esférico. Procedendo como no caso $\text{rank}(L_+) \geq 2$, concluímos exatamente o mesmo: f, g são como no segundo exemplo da Seção 6.4.

Quanto ao item (v), precisamos analisar os possíveis valores para os postos de L_+ e L_- . Considerando isso, podemos subdividir o caso $TM \otimes \mathbb{C} = L_+ \oplus L_- \oplus L_c$ em

- (a) $TM \otimes \mathbb{C} = L_+ \oplus L_- \oplus L_c$, $\text{rank}(L_+) \geq 2$ e $\text{rank}(L_-) \geq 2$;

(b) $TM \otimes \mathbb{C} = L_+ \oplus L_- \oplus L_c$, $\text{rank}(L_+) = \text{rank}(L_-) = 1$;

(c) $TM \otimes \mathbb{C} = L_+ \oplus L_- \oplus L_c$ e ou $\text{rank}(L_+) = 1$ ou $\text{rank}(L_-) = 1$.

Já é possível resolver o caso (a). Utilizando o item (ii) do Lema 7.1.3, concluímos que L_+ e L_- são esféricos e $\nabla\varphi \in L_c = L_+^\perp \cap L_-^\perp$. Desta forma pelo Lema 7.1.4, concluímos que L_c é totalmente geodésico e conseqüentemente, pelo item (iv) do Lema 7.1.6, temos $\text{rank}(L_c) = 2$. Novamente utilizamos o Lema 3.4.3 e os Teoremas de Hiepko e Nölker, concluindo que f e g são como o produto warped triplo descrito na Seção 6.5.

De acordo com a possibilidade de L_+ e L_- estarem, ou não, contidos em Δ , utilizando a Observação 3.4.4 e a relação expressa no item (iii) da Lema 7.1.6, podemos subdividir (b) em

(b₁) $TM \otimes \mathbb{C} = L_+ \oplus L_- \oplus L_c$, $\text{rank}(L_+) = \text{rank}(L_-) = 1$ e $L_+, L_- \not\subset \Delta$;

(b₂) $TM \otimes \mathbb{C} = L_+ \oplus L_- \oplus L_c$, $\text{rank}(L_+) = \text{rank}(L_-) = 1$ e $L_+ \oplus L_- \subset \Delta$;

Se pensarmos em fazer o mesmo para o subitem (c), a relação expressa no item (iii) do Lema 7.1.6 nos induz uma redução para o caso

(c') $TM \otimes \mathbb{C} = L_+ \oplus L_- \oplus L_c$, $\text{rank}(L_+) = 1$, $L_+ \not\subset \Delta$ e $\text{rank}(L_-) \geq 2$.

Para os itens (b₁) e (c') é possível concluir que $\nabla\varphi \in L_c$. No primeiro caso, aplicamos o item (ii) do Lema 7.1.6 e, para o segundo, utilizamos o item (ii) do Lema 7.1.3 e o item (ii) do Lema 7.1.6 para concluir que $\nabla\varphi \in L_-^\perp \cap L_+^\perp = L_c$. Assim, L_c é totalmente geodésico e, pelo item (iv) do Lema 7.1.6, concluímos que L_+ e L_- são esféricos e $\text{rank}(L_c) = 2$. Como no caso (a), concluímos que f e g são como o produto warped triplo descrito na seção 6.5.

Quanto ao item (b₂) mostraremos no Lema 7.2.2, a seguir, que ele corresponde aos cones Kaehlerianos reais mínimos. ■

Lema 7.2.2. *Se $TM \otimes \mathbb{C} = L_+ \oplus L_- \oplus L_c$, $\text{rank}(L_+) = \text{rank}(L_-) = 1$ e $L_+ \oplus L_- \subset \Delta$ então f é um cone Kaehleriano real mínimo e $g = \mathcal{I} \circ f_\theta$, em que f_θ é um membro da família associada de f e \mathcal{I} é a inversão em \mathbb{R}^N com respeito ao vértice de f_θ .*

Prova: Dividiremos a prova desse lema em três sublemas. No primeiro sublema descobriremos que só existe um autovalor complexo para T , que L_c^\perp é totalmente geodésico e que existe um referencial ortonormal obedecendo certas equações. No segundo sublema utilizaremos as equações do referencial obtido para concluir que f e g são cones. O último sublema irá nos dizer que a variedade M^n é Kaehleriana, que a imersão f é mínima e que g é obtida pela inversão de um membro da família associada de f , ou seja, f e g são como no exemplo da Seção 6.2. □

Sublema 7.2.3. Se $TM \otimes \mathbb{C} = L_+ \oplus L_- \oplus L_c$, $\text{rank}(L_+) = \text{rank}(L_-) = 1$ e $L_+ \oplus L_- \subset \Delta$, então

- (i) O subfibrado $L := L_+ \oplus L_-$ é totalmente geodésico e $\nabla\varphi \in L$;
- (ii) O tensor T tem apenas um par de autovalores complexos $\lambda, \bar{\lambda}$;
- (iii) Se $\lambda = a + ib$ então existem $\gamma : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ e um referencial ortonormal $\{R, S\}$ em L tais que

$$TR = -aR - bS \quad (7.49)$$

$$TS = -bR + aS \quad (7.50)$$

$$C_R = \gamma I \quad (7.51)$$

$$C_S|_{E_\lambda} = i\gamma I \quad (7.52)$$

$$\nabla_R R = 0 \quad (7.53)$$

$$\nabla_S S = \gamma R \quad (7.54)$$

$$R(\gamma) = \gamma^2 \quad (7.55)$$

$$S(\gamma) = 0. \quad (7.56)$$

Prova:

- (i) Se $L = L_+ \oplus L_- = \Delta$ então $L = L_c^\perp$ é totalmente geodésico e, pelo Lema 7.1.4 $\nabla\varphi \in L$. Caso contrário $L \subsetneq \Delta$ e, conseqüentemente, $\text{rank}(\Delta) > 3$ o que pelos itens (iv) e (v) do Lema 7.1.5 implica em $\nabla\varphi \in L$.
- (ii) Para este item, faremos alguns cálculos e concluiremos que $a = \text{Re}(\lambda)$ e $b = \text{Im}(\lambda)$ são determinados unicamente. Sejam X, Y campos unitários gerando L_+ e L_- , respectivamente. Logo $\eta_+ = \nabla_X X \in L_+^\perp$ e $\eta_- = \nabla_Y Y \in L_-^\perp$. Como $\nabla\varphi \in L$, pelas equações (7.9) e (7.10), temos

$$(T - I)\nabla_X X = T(\nabla\varphi)_{L_-}$$

e

$$(T - I)\nabla_Y Y = T(\nabla\varphi)_{L_+}$$

Somando essas equações e usando que $\nabla\varphi \in L$, $\eta_+ = \nabla_X X \in L_-$ e $\eta_- = \nabla_Y Y \in L_+$, obtemos

$$\frac{1}{2}\nabla\varphi = \nabla_X X + \nabla_Y Y = \Gamma_1 Y + \Gamma_2 X, \quad (7.57)$$

em que $\Gamma_1 = \langle \nabla_X X, Y \rangle$ e $\Gamma_2 = \langle \nabla_Y Y, X \rangle$. Sejam $\{u, v\}$ ortonormais tais que $\sqrt{2}Z = u + iv$, logo $\langle Z, \bar{Z} \rangle = 1$ e

$$2\nabla_Z Z = (\nabla_u u - \nabla_v v) + i(\nabla_u v + \nabla_v u), \quad (7.58)$$

$$2\nabla_Z \bar{Z} = (\nabla_u u + \nabla_v v) + i(\nabla_v u - \nabla_u v). \quad (7.59)$$

Aplicando (7.41) a $Z = u + iv$, temos

$$\langle \nabla_u u - \nabla_v v, X \rangle + i\langle \nabla_u v + \nabla_v u, X \rangle = 0 \quad (7.60)$$

e, analogamente

$$\langle \nabla_u u - \nabla_v v, Y \rangle + i\langle \nabla_v u + \nabla_u v, Y \rangle = 0. \quad (7.61)$$

Logo

$$(\nabla_u u)_L = (\nabla_v v)_L \quad (7.62)$$

e

$$(\nabla_u v + \nabla_v u)_L = 0. \quad (7.63)$$

Substituindo (7.59) na equação (7.39), usando que $\lambda = a + ib$, $\langle Z, \bar{Z} \rangle = 1$ e que, pela equação (7.57), $X(\varphi) = 2\Gamma_2$, obtemos

$$(a - 1)\langle \nabla_u u, X \rangle + b\langle \nabla_v u, X \rangle = -2\Gamma_2,$$

$$(a - 1)\langle \nabla_v u, X \rangle + b\langle \nabla_u u, X \rangle = 0,$$

pois $\Gamma_2 \in \mathbb{R}$. Resolvendo esse sistema nas variáveis $\langle \nabla_u u, X \rangle$ e $\langle \nabla_v u, X \rangle$ e usando o fato de λ ser autovalor do tensor ortogonal T , temos

$$\langle \nabla_u u, X \rangle = \Gamma_2, \quad (7.64)$$

$$\langle \nabla_v u, X \rangle = \frac{b}{a - 1}\Gamma_2. \quad (7.65)$$

Substituindo apenas X por Y desde o início do processo, de maneira análoga, encontramos o seguinte sistema nas variáveis $\langle \nabla_u u, Y \rangle$ e $\langle \nabla_v u, Y \rangle$

$$(a + 1)\langle \nabla_u u, Y \rangle + b\langle \nabla_v u, Y \rangle = 2\Gamma_1,$$

$$(a + 1)\langle \nabla_v u, Y \rangle - b\langle \nabla_u u, Y \rangle = 0,$$

cuja solução é

$$\langle \nabla_u u, Y \rangle = \Gamma_2, \quad (7.66)$$

$$\langle \nabla_v u, Y \rangle = \frac{b}{a + 1}\Gamma_2. \quad (7.67)$$

De (7.64), (7.66) e (7.57), concluimos que

$$(\nabla_u u)_L = \nabla\varphi. \quad (7.68)$$

Como $\nabla\varphi \in L$, temos

$$\langle (\nabla_u u)_L, (\nabla_v u)_L \rangle = \frac{1}{2} \langle \nabla\varphi, (\nabla_v u)_L \rangle \stackrel{(7.63)}{=} -\frac{1}{2} \langle \nabla\varphi, \nabla_u v \rangle \quad (7.69)$$

Por outro lado, como $\langle Z, X \rangle = \langle Z, Y \rangle = 0$, podemos concluir facilmente que $\langle u, X \rangle = \langle v, X \rangle = \langle u, Y \rangle = \langle v, Y \rangle = 0$. Logo, $u, v \in L^\perp$ e então

$$\begin{aligned} 0 &= u \langle v, \nabla\varphi \rangle = \langle \nabla_u v, \nabla\varphi \rangle + \langle v, \nabla_u \nabla\varphi \rangle, \\ 0 &= v \langle u, \nabla\varphi \rangle = \langle \nabla_v u, \nabla\varphi \rangle + \langle u, \nabla_v \nabla\varphi \rangle. \end{aligned}$$

Como $0 = [u, v](\varphi) = \nabla_u v(\varphi) - \nabla_v u(\varphi)$, temos $\langle \nabla_u v, \nabla\varphi \rangle = \langle \nabla_v u, \nabla\varphi \rangle$. Logo

$$\langle v, \nabla_u \nabla\varphi \rangle = \langle u, \nabla_v \nabla\varphi \rangle. \quad (7.70)$$

Por outro lado, $\nabla\varphi \in L$ e $u, v \in L^\perp$, implicam

$$\langle v, \nabla_u \nabla\varphi \rangle = -\langle \nabla_u v, \nabla\varphi \rangle \text{ e } \langle u, \nabla_v \nabla\varphi \rangle = -\langle \nabla_v u, \nabla\varphi \rangle. \quad (7.71)$$

De (7.63), (7.70) e (7.71) concluimos que $\langle v, \nabla_u \nabla\varphi \rangle = \langle u, \nabla_v \nabla\varphi \rangle = 0$. Assim, por (7.69), temos

$$\langle (\nabla_u u)_L, (\nabla_v u)_L \rangle = 0. \quad (7.72)$$

Observe que, como $a^2 + b^2 = 1$, temos

$$\frac{b}{a-1} = -\left(\frac{b}{a+1}\right)^{-1}. \quad (7.73)$$

Logo, usando (7.65) e (7.67),

$$\langle \nabla_v u, X \rangle \langle \nabla_v u, Y \rangle = \left(\frac{b}{a-1}\Gamma_2\right) \left(\frac{b}{a+1}\Gamma_1\right)^{-1} = -\Gamma_1\Gamma_2. \quad (7.74)$$

Comparando (7.74) com (7.64) e (7.66), concluimos que

$$\langle \nabla_v u, X \rangle \langle \nabla_v u, Y \rangle = -\langle \nabla_u u, X \rangle \langle \nabla_u u, Y \rangle. \quad (7.75)$$

Juntas (7.72) e (7.75) implicam $\langle \nabla_u u, X \rangle^2 = \langle \nabla_v u, Y \rangle^2$ e $\langle \nabla_u u, Y \rangle^2 = \langle \nabla_v u, X \rangle^2$, ou seja, $\|(\nabla_u u)_L\| = \|(\nabla_v u)_L\|$. Logo, de (7.64), (7.66), (7.65) e (7.67), obtemos

$$(a+1)\Gamma_2^2 + (a-1)\Gamma_1^2 = 0. \quad (7.76)$$

Dai

$$a = \operatorname{Re}(\lambda) = \frac{\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2}{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2} \quad (7.77)$$

e, consequentemente,

$$b = \operatorname{Im}(\lambda) = \pm \frac{2\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2}. \quad (7.78)$$

(iii) Seja $\gamma = \|\frac{1}{2}\nabla\varphi\| \stackrel{(7.57)}{=} \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2$. Defina

$$R = \frac{1}{2\gamma}\nabla\varphi = \frac{1}{\gamma}(\Gamma_2X + \Gamma_1Y) \quad (7.79)$$

$$S = \frac{1}{\gamma}(-\Gamma_1X + \Gamma_2Y). \quad (7.80)$$

Logo R e S são tais que $R \perp S$ e $\|R\| = \|S\| = 1$. Mostremos agora que esse referencial satisfaz as equações desejadas, utilizando relações obtidas no item anterior. Observe que, por (7.62), (7.68) e (7.79), temos

$$(\nabla_u u)_L = \frac{1}{2}\nabla\varphi = \gamma R = (\nabla_v v)_L. \quad (7.81)$$

Como $(\nabla_u u)_L = \gamma R$, $\langle (\nabla_u u)_L, (\nabla_v u)_L \rangle = 0$, $\text{rank}(L) = 2$ e $R \perp S$, temos $(\nabla_v u)_L$ tem a mesma direção de S . Além disso, como $\|(\nabla_v u)_L\| = \|(\nabla_u u)_L\| = \|\gamma R\| = \gamma$, temos $(\nabla_v u)_L = \pm\gamma S$. Escolhendo $b > 0$, obtemos

$$(\nabla_v u)_L = \gamma S = -(\nabla_u v)_L. \quad (7.82)$$

Logo

$$TR = T\left(\frac{1}{\gamma}(\Gamma_2X + \Gamma_1Y)\right) = \frac{1}{\gamma}(\Gamma_2X - \Gamma_1Y), \quad (7.83)$$

enquanto

$$\begin{aligned} -aR - bS &= \frac{\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2}{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2} \left(\frac{1}{\gamma}(\Gamma_2X + \Gamma_1Y) \right) - \frac{2\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2} \left(\frac{1}{\gamma}(-\Gamma_1X + \Gamma_2Y) \right) \\ &= \frac{1}{\gamma(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2)} \{ \Gamma_2(\Gamma_2^2 + \Gamma_1^2)X - \Gamma_1(\Gamma_2^2 + \Gamma_1^2)Y \} \\ &= \frac{1}{\gamma}(\Gamma_2X - \Gamma_1Y) \end{aligned} \quad (7.84)$$

Comparando (7.83) e (7.84) obtemos (7.49). A equação (7.50) é obtida pelo mesmo procedimento. Vamos agora mostrar que $\nabla_Z R$ tem a mesma direção de Z com $\nabla_Z R = -\gamma Z$. Para isso, mostraremos primeiro que $\nabla_Z R \perp L$. Feito isso temos $\nabla_Z R = AZ + B\bar{Z} + \sum_i C_i W_i + \sum_i D_i \bar{W}_i$. Então verificaremos que $\nabla_Z W \perp R$ e $\nabla_Z \bar{W} \perp R$, $\forall W, \bar{W} \perp Z$.

Como $\|R\| = 1$, só precisamos mostrar que $\langle \nabla_Z R, S \rangle = 0$, para ver que $\nabla_Z R \perp L$. Mas $\nabla_Z R = \nabla_u R + i\nabla_v R$ e podemos utilizar (7.79) e os fatos R tem a mesma direção de $\nabla\varphi$ e $R \perp S$ para concluir que

$$\begin{aligned} \langle \nabla_Z R, S \rangle &= \langle \nabla_u R, S \rangle + i\langle \nabla_v R, S \rangle = \\ &= \langle \nabla_u \nabla\varphi, S \rangle + i\langle \nabla_v \nabla\varphi, S \rangle. \end{aligned} \quad (7.85)$$

Como $u(S(\varphi)) - S(u(\varphi)) = (\nabla_u S)(\varphi) - (\nabla_S u)(\varphi)$, concluímos que $\langle \nabla_u \nabla \varphi, S \rangle = \langle u, \nabla_S \nabla \varphi \rangle$. Mas como $S, \nabla \varphi \in L$ e L é totalmente geodésico (pelo item (i) desse Lema) temos $\nabla_S \nabla \varphi \in L$ e já vimos que $u \in L^\perp$. Consequentemente

$$0 = \langle \nabla_S \nabla \varphi, u \rangle = \langle \nabla_u \nabla \varphi, S \rangle \quad (7.86)$$

e, analogamente,

$$0 = \langle \nabla_S \nabla \varphi, v \rangle = \langle \nabla_v \nabla \varphi, S \rangle. \quad (7.87)$$

Substituindo (7.86) e (7.87) em (7.85), concluímos que $\nabla_Z R \perp L$. Vejamos agora que $\langle \nabla_Z W, R \rangle = \langle \nabla_Z \bar{W}, R \rangle = 0$, $\forall Z \perp \{W, \bar{W}\}$. Ora se $Z \perp W$, obtemos de (3.11) que

$$Z(\lambda)W + \lambda \nabla_Z W - T \nabla_W = 0$$

e, tomando o produto interno dessa equação por X e Y , obtemos $\langle \nabla_Z W, X \rangle = \langle \nabla_Z W, Y \rangle = 0$. Logo $\nabla_Z W \perp R$ e, analogamente, $\nabla_Z \bar{W} \perp R$. Finalmente como $\nabla_Z R \perp L$, podemos escrever $\nabla_Z R = AZ + B\bar{Z} + \sum_i C_i W_i + \sum_i D_i \bar{W}_i$ com

$$\begin{aligned} A &= \langle \nabla_Z R, \bar{Z} \rangle = -\langle R, \nabla_Z \bar{Z} \rangle = -\gamma, \\ C_i &= \langle \nabla_Z R, W_i \rangle = -\langle R, \nabla_Z W_i \rangle = 0, \\ D_i &= \langle \nabla_Z R, \bar{W}_i \rangle = \langle R, \nabla_Z \bar{W}_i \rangle = 0. \end{aligned}$$

Utilizando (7.58), (7.79), $\nabla \varphi \in L$, (7.62) e (7.63), temos

$$B = \langle \nabla_Z R, Z \rangle = -\langle R, \nabla_Z Z \rangle = 0.$$

Concluímos assim que $\nabla_Z R$ tem a mesma direção de Z com $\nabla_Z R = -\gamma Z$, ou equivalentemente,

$$C_R Z = -(\nabla_Z R)_{L^\perp} = \gamma Z$$

que é (7.51). Como $R \perp S$ temos $0 = \langle \nabla_u R, S \rangle = -\langle R, \nabla_u S \rangle$ e $0 = \langle \nabla_v R, S \rangle = -\langle R, \nabla_v S \rangle$ e como $\nabla_Z W, \nabla_Z \bar{W} \perp L$, temos $\nabla_Z W, \nabla_Z \bar{W} \perp S$. Assim, exatamente como antes, concluímos que $\nabla_Z S = -i\gamma Z$ e

$$C_S Z = -(\nabla_Z S)_{L^\perp} = -i\gamma Z$$

que é (7.52). Para concluir este Sublema, mostraremos (7.53) e (7.55). Como $\|R\| = 1$ e L é totalmente geodésico temos $\nabla_R R = \beta S$, logo

$$\nabla_R C_R = C_R C_R + C_{\nabla_R R} = C_R^2 + \beta C_S,$$

ou seja,

$$\nabla_R C_R Z = C_R^2 Z + \beta C_S Z = C_R(\gamma Z) + \beta(-i\gamma Z) = \gamma^2 Z - i\beta\gamma Z, \forall Z \in E_\lambda.$$

Por outro lado, $\nabla_R C_R = \nabla_R(C_R)Z - C_R(\nabla_R Z) = R(\gamma)Z$. Logo $\beta = 0$ e $R(\gamma) = \gamma^2$. Concluindo assim (7.53) e (7.55). De maneira análoga, obtemos (7.56) e (7.54).

□

Sublema 7.2.4. *Se $TM \otimes \mathbb{C} = L_+ \oplus L_- \oplus L_c$, $\text{rank}(L_+) = \text{rank}(L_-) = 1$ e $L_+ \oplus L_- \subset \Delta$ então f e g são cones.*

Prova: Para provar que f é um cone iremos mostrar que a aplicação $h = f + \gamma^{-1}f_*R$ é constante. Como $R \in \Delta$, temos $\alpha(R, X) = 0, \forall X \in TM$ assim

$$h_*R = f_*R + R\left(\frac{1}{\gamma}\right)f_*R + \left(\frac{1}{\gamma}\right)f_*\nabla_R R = 0,$$

por causa de (7.53) e (7.55). Por outro lado,

$$h_*S = f_*S + S\left(\frac{1}{\gamma}\right)f_*S + \left(\frac{1}{\gamma}\right)f_*\nabla_S R = 0,$$

por (7.56) e de $\nabla_S R = -\gamma S$. Para verificar a última igualdade lembremos que, como $\langle R, S \rangle = 0$ e L é totalmente geodésico, temos $-\langle S, \nabla_S R \rangle = \langle \nabla_S S, R \rangle \stackrel{(7.54)}{=} \gamma$. Finalmente

$$h_*Z = f_*Z + Z\left(\frac{1}{\gamma}\right)f_*Z + \left(\frac{1}{\gamma}\right)f_*\nabla_Z R = 0, \forall Z \in L_c.$$

De fato, $2Z(\gamma^2) = 2Z\left(\frac{1}{4}\langle \nabla\varphi, \nabla\varphi \rangle\right) = \langle \nabla_Z \nabla\varphi, \nabla\varphi \rangle = \langle \nabla_{\nabla\varphi} \nabla\varphi, Z \rangle = 0$, pois L é totalmente geodésico e $\nabla\varphi \in L$. Logo $Z(\gamma) = 0$ e, usando que $\nabla_Z R = -\gamma Z$, por (7.88) concluímos que $h_*Z = 0$.

Observe que o referencial $\{R, S\}$ em M^n foi obtido usando somente a imersão f . Para provar que g é cone vamos obter um outro referencial $\{\tilde{R}, \tilde{S}\}$ sobre M que corresponda à imersão g , transportando o referencial $\{R, S\}$ para esse contexto com auxílio do tensor T . Como g e f são conformes, por (3.1) temos que $\tilde{R} = e^{-\varphi}R, \tilde{\gamma} = e^{-\varphi}\gamma$ e $\tilde{S} = e^{-\varphi}S$, logo

$$\tilde{\nabla}_Z \tilde{R} = \tilde{\gamma}Z, \tilde{\nabla}_{\tilde{R}} \tilde{R} = 0 \text{ e } \tilde{\nabla}_{\tilde{S}} \tilde{S} = -\tilde{\gamma}\tilde{R}.$$

Utilizando esses fatos, procedemos como antes e concluímos que $l = g - \tilde{\gamma}^{-1}g_*\tilde{R}$ também é constante, isto é, g é um cone. □

Sublema 7.2.5. *Se $TM \otimes \mathbb{C} = L_+ \oplus L_- \oplus L_c$, $\text{rank}(L_+) = \text{rank}(L_-) = 1$ e $L_+ \oplus L_- \subset \Delta$ então M^n é uma variedade Kaehleriana, f é mínima e $g = \mathcal{I} \circ f_\theta$, em que f_θ é um membro da família associada de f e \mathcal{I} é a inversão em \mathbb{R}^N com respeito ao vértice de f_θ .*

Prova: Como concluímos no sublema anterior, g é um cone com $l = g - \tilde{\gamma}^{-1}g_*\tilde{R}$ constante, digamos $l = Q_0 \in \mathbb{R}^N$. Seja \mathcal{I} a inversão com respeito à esfera unitária centrada em Q_0 . Observe que \mathcal{I} mantém as folhas de $g(M)$ invariantes, porque g é um cone. Além disso,

$$I_*(p) = \frac{1}{\|p - Q_0\|^2} \mathcal{R},$$

em que \mathcal{R} é a reflexão com respeito ao hiperplano ortogonal ao vetor posição $(p - Q_0)$. Como $g(p) - Q_0 = \tilde{\gamma}^{-1}g_*\tilde{R}$, temos $\|g(p) - Q_0\|^2 = \tilde{\gamma}^{-2}$. Logo

$$(\mathcal{I} \circ g)_* = \tilde{\gamma}^2 g_* \hat{\mathcal{R}} T = \tilde{\gamma}^2 f_* e^\varphi \hat{\mathcal{R}} T = e^{-\varphi} \gamma^2 f_* \hat{T},$$

em que $\hat{\mathcal{R}}$ é definida por $\hat{\mathcal{R}}R = -R$ e $\hat{R}|_{R^\perp} = I|_{R^\perp}$ e $\hat{T} = \mathcal{R}T$. Agora vamos mostrar que $I \circ g$ e f são homotéticas, isto é, $(I \circ g)_* = kf_*$, $k \in \mathbb{R}$. Para ver isso, basta mostrar que $e^{-\varphi} \gamma^2$ é constante em M . Ora, por (7.79) temos $\nabla\varphi = 2\gamma R$ que junto com (7.55) implica $R(e^{-\varphi} \gamma^2) = 0$. Além disso, se $V \perp R$ temos $V(\varphi) = 0 = V(\gamma)$. Dessa forma $e^{-\varphi} \gamma^2$ é constante em M . Por outro lado, da definição de \hat{T} , por (7.49) e (7.50), temos

$$\hat{T}(R - iS) = \lambda(R - iS),$$

logo \hat{T} é um tensor ortogonal sobre M cujos autovalores são λ e $\bar{\lambda}$. Além disso, como f e $I \circ g$ são homotéticas, segue da Proposição 2.1.2 que \hat{T} é paralelo. Em particular, pela Proposição 1.5.4, temos que λ é constante em M^n e que $\hat{E}_\lambda = N(\hat{T} - \lambda I)$ é um subfibrado paralelo de $TM \otimes \mathbb{C}$. Definido $\hat{J} : TM \otimes \mathbb{C} \rightarrow TM \otimes \mathbb{C}$ por

$$\hat{J}Z = \begin{cases} iZ, & \text{se } Z \in \hat{E}_\lambda; \\ -iZ, & \text{se } Z \in \hat{E}_{\bar{\lambda}} \end{cases}$$

e de maneira canônica nos subfibrados de posto um (L_+ e L_-), temos que \hat{J} é uma estrutura quasi-complexa de $TM \otimes \mathbb{C}$, paralela com respeito à conexão Riemanniana. De fato, se $Z \in \hat{E}_\lambda, W \in \hat{E}_{\bar{\lambda}}$ temos

$$\hat{J}^2 Z = \hat{J}(iZ) = i\hat{J}Z = i \cdot iZ = -Z$$

e

$$\hat{J}^2 W = \hat{J}(-iW) = -i\hat{J}W = (-i)(-i)W = -W.$$

Assim, $\hat{J}(\hat{E}_\lambda) = \hat{E}_\lambda$, $\hat{J}(\hat{E}_{\bar{\lambda}}) = \hat{E}_{\bar{\lambda}}$ e $\hat{J}(\bar{Z}) = \overline{\hat{J}Z}$ com $\hat{J}^2 = -I$, ou seja, \hat{J} é uma estrutura quasi-complexa de $TM \otimes \mathbb{C}$. Como nos subfibrados de posto um este tensor é paralelo, resta mostrar que é paralelo no bloco $\hat{E}_\lambda \oplus \hat{E}_{\bar{\lambda}}$. Sejam $X \in TM \otimes \mathbb{C}$ e $Z \in \hat{E}_\lambda$. Como \hat{E}_λ é um subfibrado paralelo, $\nabla_X Z \in \hat{E}_\lambda$ logo $\hat{J}\nabla_X Z = i\nabla_X Z$ e

$$(\nabla_X \hat{J})Z = \nabla_X \hat{J}Z - \hat{J}\nabla_X Z = \nabla_X iZ - i\nabla_X Z = 0.$$

Analogamente, $(\nabla_X \hat{J})Z = 0$ se $Z \in \hat{E}_{\bar{\lambda}}$. Portanto, \hat{J} é uma estrutura quasi-complexa paralela de $TM \otimes \mathbb{C}$.

Como $\hat{J}(\bar{Z}) = \overline{\hat{J}Z}$, \hat{J} dá origem a uma estrutura quasi-complexa paralela J para M^n , o que torna M uma variedade Kaehleriana. Mais precisamente, se $X = \frac{Z + \bar{Z}}{2} \in TM$, definindo $J : TM \rightarrow TM$ por

$$J(X) = \hat{J}(X) = \frac{\hat{J}Z + \hat{J}\bar{Z}}{2} = \frac{\hat{J}Z + \overline{\hat{J}Z}}{2} \in TM,$$

temos

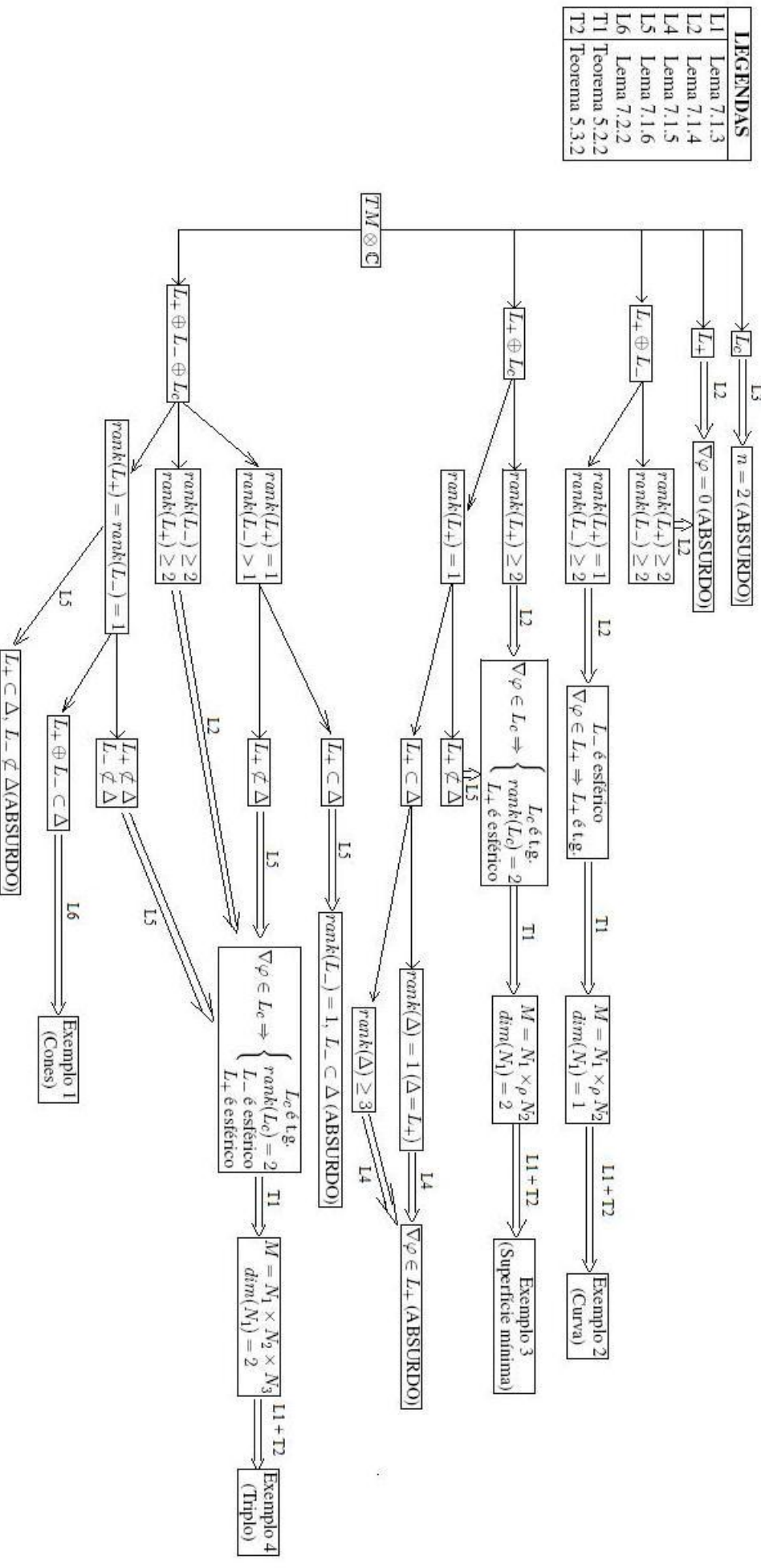
$$J^2(X) = \frac{\hat{J}(\hat{J}Z + \overline{\hat{J}Z})}{2} = \frac{\hat{J}^2Z + \overline{\hat{J}^2Z}}{2} = -\frac{Z + \bar{Z}}{2} = -X.$$

Também é possível mostrar que $\nabla_X J = \nabla_X \hat{J} = 0$, de maneira que (M^n, J) é uma variedade Kaehleriana.

Como a segunda forma fundamental de f comuta com T e $\hat{T} = \mathcal{R}T$, concluímos que essa segunda forma também comuta com \hat{T} e com J . Para verificar que α_f comuta com \hat{T} , basta perceber que $\hat{T}|_{\hat{E}_\lambda} = \lambda I$ e $\hat{T}|_{\hat{E}_{\bar{\lambda}}} = \bar{\lambda} I$ e verificar que a afirmação vale para esses subfibrados. Quanto a α_f comuta com J , isso decorre de α_f comutar com \hat{J} .

Como α_f comuta com J , concluímos que f é pluriharmônica e, conseqüentemente, mínima. Portanto, f é um cone Kaehleriano real mínimo que é homotético a $\mathcal{I} \circ g$. Dessa forma, existe um membro f_θ da família associada $\{f_\theta\}$ tal que $f_\theta = \mathcal{I} \circ g$, a menos de homotetia. Logo $g = \mathcal{I} \circ f_\theta$. \square

Quadro Resumo da demonstração do Teorema 7.2.1:



Apêndice A

Apêndice

Apresentamos aqui alguns fatos sobre tensores, para mais detalhes recomendamos [Lee00], [War83] e [Cam10].

A.1 Tensores em Variedades Riemannianas

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma aplicação k -linear com valores reais definida sobre V é chamada de um k -*tensor covariante* ou um *tensor de grau k* e uma aplicação k -linear com valores reais definida sobre V^* é chamada de k -*tensor contravariante*. Um *tensor misto* ou *tensor do tipo (k, l)* ou *tensor k -contravariante, l -covariante* é uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{l \text{ fatores}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ fatores}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Denotamos por $T_l(V)$ o conjunto dos tensores contravariantes definidos em V , por $T^k(V)$ o conjunto dos tensores covariantes definidos em V e por $T_l^k(V)$ o conjunto dos tensores mixos do tipo (k, l) . Essas são as definições de tensores em espaços vetoriais. É possível fazer uma descrição abstrata desse conceito, que parece se mostrar um pouco mais conveniente quando queremos analisar as propriedades desses objetos. Para abordá-la é preciso primeiro definir o produto tensorial de dois tensores. Dados $F \in T^k(V)$ e $G \in T^l(V)$ definimos o tensor $F \otimes G \in T^{k+l}(V)$ dado por

$$F \otimes G(X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_{k+l}) = F(X_1, \dots, X_k)G(X_{k+1}, \dots, X_{k+l}).$$

Mais geralmente, dados os tensores $F \in T_k^l(V)$ e $G \in T_r^s(V)$ definimos o tensor $F \otimes G \in T_{k+r}^{l+s}(V)$ dado por

$$F \otimes G(\omega^1, \dots, \omega^{k+r}, X_1, \dots, X_{l+s}) = F(\omega^1, \dots, \omega^k, X_1, \dots, X_l)G(\omega^{k+1}, \dots, \omega^{k+r}, X_{l+1}, \dots, X_{l+s}).$$

É possível mostrar que todo k -tensor covariante pode ser escrito como combinação linear de produtos tensoriais de covetores. E utilizando a construção abstrata aqui citada (que pode ser encontrada no capítulo 8 de [Lee00], no capítulo de 2 [War83] e no apêndice de [Cam10]) podemos mostrar que

$$T_l(V) = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{l \text{ fatores}}$$

$$T^k(V) = \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{k \text{ fatores}}$$

e

$$T_{l+1}^k(V) = T_l^{k+1}(V),$$

onde as igualdades acima são vistas a menos de isomorfismo.

Seja M uma variedade diferenciável, podemos utilizar os espaços tangentes da variedade para construir um fibrado vetorial cujas fibras são um dos seguintes espaços vetoriais $T_l(V)$, $T^k(V)$ ou $T_l^k(V)$. Assim, um fibrado de k -tensores covariantes em uma variedade M é o fibrado

$$T^k M = \coprod_{p \in M} T^k(T_p M),$$

o fibrado de k -tensores contravariantes é o fibrado

$$T_l M = \coprod_{p \in M} T_l(T_p M)$$

e o fibrado de tensores misto do tipo (k, l) é o fibrado

$$T_l^k M = \coprod_{p \in M} T_l^k(T_p M).$$

Dizemos que qualquer um desses subfibrados é um fibrado tensorial de M . Um tensor sobre M é qualquer seção de um desses subfibrados. Dizemos que um tensor é suave se a seção que o define é suave. O seguinte Lema nos permite pensar tensores de uma maneira mais intuitiva.

Lema A.1.1. *Seja M uma variedade diferenciável e seja $\sigma : M \rightarrow T^k M$ uma aplicação (não necessariamente contínua) tal que $\sigma_p \in T^k(T_p M)$ para cada $p \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) σ é suave;

(ii) Em qualquer carta coordenada as funções componentes (ou funções coordenadas) de σ são suaves;

(iii) Se X_1, \dots, X_k são campos de vetores definidos em qualquer subconjunto aberto $U \subset M$, então a função $\sigma(X_1, \dots, X_k)(p) = \sigma_p(X_1(p), \dots, X_k(p))$ é suave.

Então, podemos pensar um tensor como uma aplicação que em cada ponto é uma aplicação multilinear e cujos valores só dependem das coordenadas dos campos no ponto em questão. Em particular, os tensores $T, \phi \in \Gamma(T^*M \otimes TM)$ identificados com $\phi : TM \rightarrow TM$ e $T : TM \rightarrow TM$ aqui trabalhados, são aplicações que em cada ponto definem uma transformação linear e o valor de ϕ no ponto p , por exemplo, só depende das coordenadas dos campos no ponto p .

Tensores podem ser derivados com respeito a um campo de vetores (covetores) com auxílio da Derivada de Lie que denotaremos por L (veja detalhes no capítulo 2 de [War83] ou capítulo 13 de [Lee00]). Usaremos a seguinte Proposição

Proposição A.1.2. *Seja X um campo de vetores C^∞ sobre M então*

(i) $L_X f = X(f)$ se $f \in C^\infty(M)$;

(ii) $L_X Y = [X, Y]$ se $Y \in \mathfrak{X}(M)$;

(iii) $L_X : \Lambda^*(M) \rightarrow \Lambda^*(M)$ é uma derivação que comuta com o diferencial exterior, isto é, $L_X d\omega = d\omega L_X$;

(iv) Em $\Lambda^*(M)$, $L_X \omega = i(X) \circ d\omega + d\omega \circ i(X)$, em que se ω é uma k -forma então $i(X) \circ \omega$ é $(k-1)$ -forma dada por $\omega(X, X_1, \dots, X_{k-1})$.

(v) Sejam $\omega \in \Lambda^k(M)$ e $X_j \in \mathfrak{X}(M)$, $1 \leq j \leq k$ então

$$L_X \omega(X_1, \dots, X_k) = L_X(\omega(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{i=1}^k \omega(X_1, \dots, L_X X_i, \dots, X_k).$$

(vi) Sejam $\omega \in \Lambda^k(M)$ e $X_j \in \mathfrak{X}(M)$, $0 \leq j \leq k$ então (v) temos

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i \omega(X, X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k). \end{aligned}$$

(vii) Dados $T \in T_k^l$, $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $\omega_j \in \Lambda^1(M)$, $1 \leq i \leq l$ e $1 \leq j \leq k$ então

$$\begin{aligned} L_X(T)(\omega_1, \dots, \omega_k, X_1, \dots, X_l) &= X(T(\omega_1, \dots, \omega_k, X_1, \dots, X_l)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^k T(\omega_1, \dots, L_X \omega_i, \dots, \omega_k, X_1, \dots, X_l) \\ &\quad - \sum_{j=1}^l T(\omega_1, \dots, \omega_k, X_1, \dots, L_X X_j, \dots, X_l). \end{aligned}$$

Dizemos que um tensor é paralelo se a derivada de Lie dele é zero. No nosso caso, como estamos trabalhando com variedades Riemannianas, temos $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$. E trabalhamos com tensores ϕ do tipo $(1, 1)$ logo a derivada de Lie é calculada por

$$L_X(\phi)(Y) = (\nabla_X \phi)Y = \nabla_X \phi Y - \phi \nabla_X Y.$$

Alguns livros denotam $L_X(\phi)(Y)$ por $\nabla \phi(X, Y)$ como, por exemplo, [dC08], vendo a derivada de um tensor covariante de grau 1 como um tensor covariante de grau 2.

Referências

- [Cam10] CAMINHA NETO, Antonio M.. Introdução à geometria das aplicações harmônicas, São Carlos: RiMA, 2010. (*XVI Escola de Geometria Diferencial*)
- [Dar72] Darboux G. Lecons sur la théorie des surfaces, Paris 1914 (Reprinted by Chelsea Pub. Co., 1972).
- [Daj90] DAJCZER, Marcos; et. al. Submanifolds and isometric immersions, Publish or Perish, 1990. (*Math. Lect. Series*)
- [dC06] DO CARMO, Manfredo P. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, ed.2, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. (*Textos Universitários*).
- [dC08] DO CARMO, Manfredo P. Geometria Riemanniana, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2008. (*Projeto Euclides*).
- [DG85] DAJCZER, Marcos; GROMOLL, Detlef. Real Kaehler submanifolds and uniqueness of the Gauss map, *Journal Differential Geometry*, n.22, p. 13-28, 1985.
- [DG90] DAJCZER, Marcos; GROMOLL, Detlef. Rigidity of complete Euclidean hypersurfaces, *Journal Differential Geometry*, n.31, p. 401-416, 1990.
- [DR86] DAJCZER, Marcos; RODRIGUEZ, Lucio. Rigidity of Real Kaehler submanifolds, *Duke Mathematical Journal*, v. 53, n.1, p. 211-220, (Março 1986), 1986.
- [DT10] DAJCZER, Marcos; TOJEIRO, Ruy. A complete solution of Samuel's Problem, *arXiv:1004.014v.1 [math.DS]*, 2010.
- [DV95] DAJCZER, Marcos; VERGASTA, Enaldo Silva. Conformal Hypersurfaces with the Same Gauss Map, *Transactions of the American Mathematical Society*, v.347, n.7, p.2437-2450, 1995. "
- [Ham02] BUENO, Hamilton. Álgebra Linear - um segundo curso, 2002.
- [Hi79] HIEPKO S. Eine innere Kennzeichnung der verzerrten Produkte, *Math. Ann.*, n.241, p. 209 -215, 1979.

- [HO82] HOFFMAN, D.; OSSERMAN, R. The Gauss map of surfaces in R^n , *J. Diff. Geom.*, n.19, p. 733-754, 1982.
- [KN63] NOMIZU, K.; KOBAYASHI, S. Foundations of Differential Geometry, *Wiley Classics Library*, John Wiley & Sons, New York, London, 1963.
- [Kul70] KULKARNI, Ravindra S. Curvature and Metric, *The Annals of Mathematics*, Second Series, v.91, n. 2 (Mar., 1970), p. 311-331, 1970.
- [Lee00] LEE, John M. Introduction to smooth manifolds, *Versão 3.0*, Springer Verlag, 2000.
- [LN71] LEUNG, D. NOMIZU, K. The axiom of spheres in Riemannian Geometry, *J. Diff. Geom.*, n.5, p. 487-489, 1971.
- [Mo71] MOORE, John Douglas. Isometric immersions of Riemannian products, *J. Diff. Geom.*, n.5, p.159-168, 1971.
- [Nol96] NÖLKER, Stefan. Isometric immersions of warped products, *Differential Geometry and its Applications*, n.6 p.1-30, 1996.
- [Pal88] PALMER, Bennet. Isothermic surfaces and the Gauss map, *Proc. Amer. Math. Soc.*, n. 104, p. 876-884, 1988.
- [Pla03] ANDRADE, Plácido. Um curso de Álgebra Linear, 2003.
- [RT92] Rigoli, Marco; Tribuzy, Renato. The Gauss map fo Kählerian submanifolds of R^n , *Transactions of the American mathematical society*, v.332, n. 2, p. 515-528, 1992.
- [Sam47] SAMUEL, Pierre. On conformal correspondence of Surfaces and Manifolds, *American J. Math.*, v.69, n.3, p. 421-446, 1947.
- [Spi75] SPIVAK, Michael. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, vol.I-V, Publish or Perish, Berkeley, 1979.
- [Toj06] TOJEIRO, Ruy. Isothermic submanifolds of Euclidean space, *J. reine angew. Math.*, n. 598, p. 1-24, 2006.
- [Tu08] TU, Loring W. An introduction to manifolds, *Universitext*, Springer Verlag, 2008.
- [Ver92] VERGASTA, Enaldo S. Conformal deformations preserving the Gauss map, *Pacific J. Math.*, v. 156, n.2, 1992.
- [War83] WARNER, Frank. Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, *Graduate texts in mathematics 94*, Springer-Verlag, 1983.

Índice Remissivo

- índice
 - de nulidade relativa, 20
- aplicação
 - de Gauss, 25
 - de semelhança, 9
- axioma
 - das r -esferas, 45
- codimensão, 6
- comutar com a segunda forma, 25
- cone
 - Kaehleriano real mínimo, 51
 - sobre a esfera, 50
- curvatura
 - normal média de E , 19
- distribuição, 18
 - integrável, 18
 - de nulidade relativa, 20
 - dimensão, 18
 - involutiva, 19
- esfera extrínseca, 45
- espaço
 - de nulidade relativa, 20
- estrutura
 - complexa, 10
 - quasi-complexa, 12
- exemplo
 - cones Kaehlerianos reais mínimos, 52
 - coordenadas cilíndricas, 42
 - coordenadas esféricas, 42
 - superfície de rotação, 46
- fibrado
 - base, 17
 - vetorial, 17
 - Distribuição, 18
 - espaço total, 17
 - fibra, 17
 - posto, 17
 - projeção, 17
 - seção, 18
 - subfibrado, 18
 - trivialização, 17
- flat, 36
- folheação
 - de dimensão k , 19
- função
 - twist, 40
 - warping, 41
- gradiente, 6
- imersão
 - isométrica, 6
 - esférica, 9
 - holomorfa, 13
 - totalmente geodésica, 8
 - umbílica, 8
 - umbílica em p , 8
- imersões
 - com a mesma aplicação de Gauss, 25
 - conformes, 27

- de Kulkarni, 28
- de Nölker, 45
- de Vergasta, 31
- métrica
 - twist, 41
 - warped, 41
- operador
 - de Weingarten, 7
- produto
 - de imersões, 46
 - warped de imersões, 47
 - warped extrínseco, 47
 - twist, 40
 - warped, 41
- referencial
 - adaptado à imersão, 8
- representação produto warped, 45
- segunda forma fundamental de f , 7
- soma de Whitney, 18
- subfibrado
 - esférico, 19
 - paralelo, 19
 - totalmente geodésico, 19
 - umbílico, 18
- subvariedade
 - Kaehleriana real, 13
 - Kaehleriana real pluriharmônica, 13
- superfície
 - isotérmica em \mathbb{R}^3 , 35
 - isotérmica em \mathbb{R}^N , 36
- tensor
 - de Codazzi, 25
 - de decomposição, 21
- Teorema
 - de Frobenius, 19
 - de Hiepko, 43
 - de Moore, 44
 - de Nölker, 47
 - de Rham, 43
- variedade
 - Grassmaniana, 24
 - integrável, 18
 - Kaehleriana, 12
- vetor
 - curvatura média, 8

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA

CEP: 40170-110

<<http://www.pgmat.ufba.br>>