Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Dissertação de Mestrado

Métodos Geométricos no Estudo e Integrabilidade do Fluxo Geodésico

Felipe Moscozo Araújo da Cruz

Salvador-Bahia

Maio de 2012

Métodos Geométricos no Estudo e Integrabilidade do Fluxo Geodésico

Felipe Moscozo Araújo da Cruz

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Diego Catalano Ferraioli.

Salvador-Bahia

Maio de 2012

da Cruz, Felipe Moscozo Araújo.

Métodos Geométricos no Estudo e Integrabilidade do Fluxo Geodésico. / Felipe Moscozo Araújo da Cruz. – Salvador: UFBA, 2012.

89 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Diego Catalano Ferraioli.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2012.

Referências bibliográficas.

1. Fluxo Geodésico. 2. Distribuições. 3. Geometria Simplética. 4.Estruturas Solúveis. 5.Simetrias. 6.Integração por Simetrias. I. Ferraioli, Diego Catalano. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 514.774.8

Métodos Geométricos no Estudo e Integrabilidade do Fluxo Geodésico.

Felipe Moscozo Araújo da Cruz

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 28 de maio de 2012.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Diego Catalano Ferraioli(Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório
UFAL

Prof. Dr. José Nelson Bastos Barbosa
UFBA

À minha família e aos meus pais.

"O temor a Deus é o princípio da ciência."

Provérbios 1.7

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo o estudo de métodos geométricos úteis na integração por quadraturas de fluxos geodésicos.
Além de discutir a abordagem simplética, tradicionalmente adotada neste tipo de problema, apresentamos também uma nova abordagem baseada na noção de estrutura solúvel. A aplicação destes métodos é ilustrada através de alguns exemplos.

Palavras-chave: Fluxo Geodésico; Distribuições; GEometria Simplética; Estruturas Solúveis; Simetrias; Integração por Simetrias.

Abstract

This work aims at study some geometric methods with are useful in the integration by quadratures of geodesic flows.
A new approach, based on the notion of solvable structure, is presented together with the symplectic one, traditionally followed in this kind of problem. Applications of the corresponding methods of integration are presented by means of some examples.

Keywords: Geodesic Flow; Distributions; Symplectic Geometry; Solvable Structures; Symmetries; Symmetry-reduction.

Sumário

Introdução

Tanto na matemática quanto na física, as equações que descrevem as geodésicas desempenham um papel muito importante. Por isso, torna-se particularmente útil o estudo de métodos de integração exata para este tipo de equações.

O presente trabalho tem como objetivo principal o estudo de métodos geométricos que permitem a integração por quadraturas de fluxos geodésicos. Uma ênfase particular, neste estudo, é dada aos aspectos que envolvem a noção de simetria. A principal justificativa para este interesse nas simetrias é devido, em primeiro lugar, ao fato que, já na abordagem simplética, tradicionalmente adotada no estudo da integrabilidade de fluxos geodésicos, as simetrias Hamiltonianas desenpenham um papel muito importante (vide, por exemplo, [5, 4, 13, 1] como também [38, 39, 14]). Em segundo lugar, a integrabilidade dos fluxos geodésicos é um caso particular do problema de integração de sistemas de equações diferenciais ordinárias, problema no qual o papel das álgebras de simetrias ainda é de fundamental importância (vide, por exemplo, [10, 11, 40, 41, 54, 48] como também [2, 29]). Uma situação analoga, embora mais complicada, se encontra no caso das equações diferenciais parciais (vide, por exemplo [2, 10, 11, 33, 40, 41, 49, 54]).

O estudo de fluxos geodésicos é um dos tópicos de pesquisa mais interessantes para quem estuda a integrabilidade de equações diferenciais com métodos simpléticos, bem como com métodos geométricos mais gerais. De fato, nas aplicações, como por exemplo na relatividade geral, é frequente a presença de simetrias na métrica (vide, por exemplo [49]). Estas simetrias do espaço se refletem em propriedades de simetrias das equações e, portanto, podem ser utilizadas para a integração do correspondente fluxo geodésico.

Tradicionalmente, usando o formalismo simplético, a integração do fluxo geodésico é feita por meio de métodos como o método de Hamilton-Jacobi ou usando teoremas de integrabilidade como o teorema de Liouville comutativo e não comutativo. Mas, nem sempre, estes métodos podem ser aplicados. Por exemplo, nem sempre é possível encontrar integrais completas da equação de Hamilton-Jacobi. Assim como nem sempre as hipóteses do teorema de Liouville (comutativo e não comutativo) são satisfeitas. Porém, nestes casos, isso não significa que as equações que descrevem o fluxo não podem ser integradas, por exemplo, com alguma técnica mais geral. Esse tipo de situação é muito comum no estudo das equações diferenciais, o que tem estimulado, nos últimos anos, o desenvolvimento de técnicas sempre mais gerais (vide [10, 11, 35] como também [22, 20, 21] e suas respectivas referências). Entre esses, o método das estruturas solúveis tem se mostrado particularmente útil na integração de EDOs.

Nessa dissertação, além de discutir a abordagem simplética, tradicionalmente adotada neste tipo de problema. Apresentaremos também uma nova abordagem baseada na noção de estruturas solúveis. A aplicação desses métodos será ilustrada através de alguns exemplos.

A presente dissertação está organizada em quatro capítulos. O Capítulo 1 lembra conceitos e resultados básicos sobre variedades diferenciáveis que são importantes para os capítulos seguintes. No Capítulo 2, após uma introdução à noção de simetria de uma distribuição, é discutida a descrição variacional para as esquações das geodésicas. Em particular, neste capítulo, usando o formalismo invariante de Poincaré-Cartan, é também introduzida a noção de simetria variacional junto ao teorema de Nöther que estabelece uma correspondência entre este tipo de simetria e as integrais primeiras das equações de Euler-Lagrange. No Capítulo 3, usando o formalismo simplético, tratamos a integração dos fluxos geodésicos por meio do método clássico de Hamilton-Jacobi. Na parte final deste capítulo, mostramos a aplicação desse método à integração do fluxo geodésico de algumas métricas de Einstein. No Capítulo 4, discutimos o uso de simetrias na integração de distribuições. Mais precisamente, após uma introdução às estruturas solúveis, provamos o teorema sobre a integrabilidade por quadraturas de uma distribuição na presença de uma tal estrutura. Na parte final do capítulo, aplicamos estes resultados à integração de fluxos geodésicos.

Capítulo 1

Preliminares de Geometria Diferencial

Neste capítulo apresentaremos as noções básicas, além das notações principais, que serão utilizadas nos próximos capítulos. Como não é objetivo deste capítulo fornecer todos os detalhes do material preliminar apresentado aqui, o leitor interessado encontrará mais detalhes nas referências [52], [50], [15], [27], [18], [37].

1.1 Variedades diferenciáveis

1.1.1 Introdução

Será apresentada aqui a noção de variedade diferenciável além de alguns fatos úteis a respeito desta. Para esse fim, começamos com a seguinte

Definição 1.1.1. *Um espaço topológico M de Haussdorf e com base enumerável é uma* ***variedade diferenciável*** *de dimensão n e classe C^k se existe uma família finita ou enumerável de homeomorfismos*

$$\mathcal{A} = \{\varphi_U : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi_U(U) \subset M\}$$

tais que

(1) $M = \bigcup \varphi_U(U)$*;*

(2) $\forall \varphi_U, \varphi_V \in \mathcal{A}$ *tais que* $\varphi_U(U) \cap \varphi_V(V) \neq \phi$ *temos*

$$\varphi_V^{-1} \circ \varphi_U : \varphi_U^{-1}(\varphi_U(U) \cap \varphi_V(V)) \longrightarrow \varphi_V^{-1}(\varphi_U(U) \cap \varphi_V(V))$$

é um difeomorfismo de classe C^k.

A família $\mathcal{A}$ satisfazendo (1) *e* (2) *é chamada* ***atlas de classe*** C^k *e seus elementos são chamados* ***cartas****.*

Em seguida, iremos considerar somente atlas de classe C^∞.

Definição 1.1.2. *Dois atlas $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ sobre um espaço topológico M são* ***equivalentes*** *se, e somente se, $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ é ainda um atlas de classe C^∞ (não é difícil ver que tal relação entre os atlas é, de fato, uma relação de equivalência, ou seja, uma relação reflexiva, simétrica e transitiva). Uma classe de equivalencia de atlas de classe C^∞ define uma* ***estrutura diferenciável*** *de classe C^∞ sobre o espaço topológico M.*

Segue diretamente da definição anterior que, para munir um espaço topológico M de uma estrutura diferenciável, é suficiente fixar um atlas de classe C^∞ pois tal estrutura pode ser obtida colecionando todos os atlas de classe C^∞ que são esquivalentes ao atlas fixado.

Se M é uma variedade e $\overline{x_i} := \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ são as funções coordenadas canônicas em $\mathbb{R}^n$, cada vizinhança $\varphi_U(U)$ pode ser equipada com n-funções $x_i : \varphi_U(U) \to \mathbb{R}$ definidas por $x_i := \overline{x_i} \circ \varphi_U^{-1}$ e chamadas *funções coordenadas* em $\varphi_U(U)$. Usando as funções coordenadas, uma variedade pode ser localmente identificada com um aberto do $\mathbb{R}^n$ e cada ponto pode ser descrito por meio das correspondentes n coordenadas. Podemos, portanto, aplicar localmente o cálculo diferencial ao estudo de problemas geométricos sobre variedades. Mas, tendo em conta as propriedades de uma estrutura diferenciável sobre uma variedade M, é possível também construir um cálculo diferencial definido globalmente em toda M.

Nos próximos parágrafos serão apresentados os aspectos principais desta construção. Começamos com o conceito de função diferenciável.

Definição 1.1.3. *Seja M uma variedade diferenciável com uma estrutura diferenciável definida pelo atlas $\mathcal{A} = \{\varphi_U\}$. Uma função $f : M \to \mathbb{R}$ é* ***diferenciável no ponto*** *p, com respeito a $\mathcal{A}$, se, e somente se, $\varphi_U^*(f) = f \circ \varphi_U$ é diferenciável de classe C^∞ em $\varphi_U^{-1}(p)$, para toda φ_U tal que $p \in \varphi_U(U)$. A função f é diferenciável em M com respeito a $\mathcal{A}$ se, e somente se, for diferenciável em todos os pontos de M com respeito a $\mathcal{A}$.*

O conjunto das funções diferenciáveis em M, com respeito a $\mathcal{A}$, tem uma estrutura natural de $\mathbb{R}$-espaço vetorial com a soma usual de funções e o produto por elementos de $\mathbb{R}$ e será indicado por $C^\infty(M)$ (ou $C^\infty_{\mathcal{A}}(M)$ se for necessário especificar a estrutura diferenciável).

Precisamos também da seguinte

Definição 1.1.4. *Sejam M e N variedades diferenciáveis com estruturas diferenciáveis definidas, respectivamente, pelos atlas $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$. Uma função $F : M \to N$ é* ***diferenciável no ponto*** *$p \in M$ se, e somente se, $F^*(f) = f \circ F$ é diferenciável em p, por cada $f \in {C^\infty}_{\mathcal{A}_2}(N)$. A aplicação F é dita* ***diferenciável*** *se, e somente se, $F^*({C^\infty}_{\mathcal{A}_2}(N)) \subset C^\infty_{\mathcal{A}_1}(M)$.*

1.1.2 Espaço Tangente em um ponto

Nesta seção será apresentada a noção de espaço vetorial tangente a uma variedade em um ponto além de outras definições que dependem desta noção. Começamos com a

Definição 1.1.5. *Sejam M variedade diferenciável e $p \in M$. Um **vetor tangente** a M no ponto p é uma aplicação*

$$X : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\mathbb{R}$ - *Linearidade:* $X(f + \lambda g) = X(f) + \lambda X(g), \quad \forall f, g \in C^\infty(M), \forall \lambda \in \mathbb{R}$

ii) Propriedade de Leibniz: $X(f \cdot g) = X(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot X(g), \quad \forall f, g \in C^\infty(M)$

Podemos, então, considerar um vetor tangente como uma "derivação no ponto p".

O conjunto dos vetores tangentes a M em um ponto p será denotado por T_pM e denominado **espaço tangente** a M no ponto p. Neste conjunto, podemos definir as seguintes operações:

$$\begin{aligned} (\xi + \eta)(f) &:= \xi(f) + \eta(f) \\ (c \cdot \xi)(f) &:= c \cdot [\xi(f)], \end{aligned}$$

$\forall \xi, \eta \in T_pM$, $\forall f \in C^\infty(M)$ e $c \in \mathbb{R}$.

Com estas duas operações, T_pM é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

Destacamos, na proposição seguinte, duas propriedades importantes satisfeitas por todo vetor tangente:

Proposição 1.1.6. *Seja M variedade diferenciável. Para todo $p \in M$ e todo $\xi \in T_pM$ valem:*

P.1) $\xi(c) = 0$, *para toda função constante* $c \in C^\infty(M)$.

P.2) $\xi(f) = \xi(g)$ *para todas* $f, g \in C^\infty(M)$ *que coincidem em uma vizinhança de* p. *(Localizabilidade)*

A demonstração dessa propriedade será baseada no seguinte lema elementar:

Lema 1.1.7. *Sejam U e V bolas fechadas de $\mathbb{R}^n$ tais que $U \subset V$ e $V \backslash U \neq \emptyset$. Existe uma função diferenciável $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, denominada função bossa, tal que*

1. $\varphi|_U \equiv 1$;

2. $\varphi|_{\mathbb{R}^n \backslash V} \equiv 0$.

Uma demonstração pode ser encontrada em [27] ou [52].

O mesmo resultado, por meio de uma identificação local da variedade com o $\mathbb{R}^n$ vale, localmente, para uma variedade qualquer.

A prova da **Proposição** 1.1.6 é a seguinte:

Prova: Pela regra de Leibniz, temos que $\xi(1) = \xi(1\cdot 1) = \xi(1)\cdot 1 + 1\cdot \xi(1)$. Logo, $\xi(1) = 0$. A propriedade P.1) é obtida pela linearidade de ξ.

Para provar a propriedade P.2), considere duas funções $f, g \in C^\infty(M)$ que coincidem em uma vizinhança $\mathcal{U}$ de p. Se $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}$ são bolas fechadas, com $p \in \mathcal{U}_1$, então, pelo lema anterior, existe $h \in C^\infty(M)$ tal que $h|_{\mathcal{U}_1} = 1$ e $h|_{M\setminus\mathcal{U}_2} = 0$. Dessa forma, $0 = (f-g).h$ e, pela regra de Leibniz, obtemos

$$\xi((f-g)\cdot h) = \xi(f-g)\cdot h(p) + (f-g)(p)\cdot \xi(h) = 0.$$

Portanto, $\xi(f) = \xi(g)$.

$\blacksquare$

Queremos, agora, descrever a forma coordenada de um vetor tangente. Para isso, seja φ_U uma carta com domínio U. Considere uma bola $W = \{(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} (\bar{x}_i - \bar{p}_i)^2 < \epsilon\} \subset U$ de raio ϵ e centro $\bar{p} = \varphi_U^{-1}(p)$, tal que $W \subset U$.

Pelo teorema fundamental do cálculo, para todo $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ e toda $f \in C^\infty(M)$, podemos escrever:

$\varphi_U^*(f)(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n) = \varphi_U^*(f)(\bar{p}_1, ..., \bar{p}_n) + \int_0^1 \frac{d}{dt}[\varphi_U^*(f)(\bar{p}_1 + t(\bar{x}_1 - \bar{p}_1), ..., \bar{p}_n + t(\bar{x}_n - \bar{p}_n))]dt.$

Logo, se $\bar{f} = f|_{\varphi(\omega)}$, obtemos a seguinte representação coordenada de $\bar{f}$

$$\bar{f}(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - p_i)\cdot g_i(x),$$

onde

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi_U^*(f)}{\partial \bar{x}_i}(\bar{p}_1 + t(\bar{x}_1 - \bar{p}_1), ..., \bar{p}_n + t(\bar{x}_n - \bar{p}_n))dt \ , \ i \in \{1, ..., n\}.$$

Para aplicar X a $\bar{f}$, é necessário "estender"$\bar{f}$ pois vetores tangentes se aplicam a funções diferenciáveis definidas em toda a variedade. Para isso, usando o lema anterior, considere uma bola fechada $\mathcal{U} \subset W$ tal que $p \in \mathcal{U}$ e uma $h \in C^\infty(M)$ tal que $h|_{\mathcal{U}} = 1$ e $h|_{M\setminus\mathcal{U}}$. Podemos, então,"estender"as funções x_i e g_i à variedade M fazendo

$$\widetilde{x_i} = \begin{cases} (x_i \cdot h)(q) & ,\text{se } q \in W; \\ 0 & ,\text{se } q \in M\setminus W. \end{cases}$$

e

$$\widetilde{g_i} = \begin{cases} (g_i \cdot h)(q) & \text{,se } q \in W; \\ 0 & \text{,se } q \in M \backslash W. \end{cases}$$

Dessa forma, podemos escrever a seguinte extensão $\tilde{f}$ de $\bar{f}$

$$\tilde{f} = f(p) + \left[\sum_{i=1}^{n} (\widetilde{x_i} - p_i) \cdot \widetilde{g_i} \right].$$

Claramente, $f \neq \bar{f}$, mas $f|_{\mathcal{U}} = \tilde{f}|_{\mathcal{U}}$. Portanto, se $\xi \in T_pM$, $\xi(f) = \xi(\bar{f})$
Agora, usando as propriedades P.1) e P.2), obtemos:

$$\begin{aligned} \xi(f) &= \sum_{i=1}^{n} \xi(\widetilde{x_i}) \cdot \widetilde{g_i}(p) = \sum_{i=1}^{n} \xi(x_i) \frac{\partial \varphi_U^*(f)}{\partial x_i} (\varphi_U^{-1}(p)) \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n} \xi(\widetilde{x_i}) \frac{\partial}{\partial x_i}|_{\varphi_U^{-1}(p)} \right] (\varphi_U^*(f)) = \left[\sum_{i=1}^{n} \xi(\widetilde{x_i}) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p \right] (f), \end{aligned}$$

onde $\dfrac{\partial}{\partial x_i}|_p : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ é o vetor tangente definido por

$$\tfrac{\partial}{\partial x_i}|_p(f) = \tfrac{\partial}{\partial x_i}|_{\varphi_U^{-1}(p)}(\varphi_U^*(f)).$$

Portanto, todo elemento $\xi \in T_pM$ tem a seguinte forma coordenada

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p,$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Além disso, não é difícil ver que os vetores $\dfrac{\partial}{\partial x_1}|_p, ..., \dfrac{\partial}{\partial x_n}|_p$ são linearmente independentes. Logo o conjunto $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x_1}|_p, ..., \dfrac{\partial}{\partial x_n}|_p \right\}$ forma uma base para o T_pM e concluimos que este é um espaço vetorial real de dimensão n.

1.1.3 Diferencial F_* de uma Aplicação F

Definida a noção de vetor e espaço tangentes, vejamos, agora, como definir a diferencial (ou“push-foward") de uma aplicação diferenciável F entre duas variedades.

Definição 1.1.8. *Sejam M e N variedades diferenciáveis, $p \in M$ e $F : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável em p. A **diferencial** de F em p é uma aplicação $\mathbb{R}$-linear*

$$(F_*)_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$$

tal que, dada $f \in C^\infty(N)$, $[(F_*)_p(\xi)]\,(f) = \xi(F^*(f))$.

Quando a aplicação $(F_*)_p$ é sobrejetiva, para todo $p \in M$, dizemos que F é uma **submersão** de M em N. Quando $(F_*)_p$ é injetiva para todo $p \in M$ dizemos que F é uma **imersão**. Se, além de F ser uma imersão, for também um homeomorfismo sobre sua imagem $F(M)$, então dizemos que F é um **mergulho** de M em N.

Definição 1.1.9. *Sejam M e N variedades diferenciáveis com $M \subset N$. M é uma **subvariedade** de N se a aplicação inclusão $i : M \longrightarrow N$ é um mergulho.*

Em coordenadas, a diferencial de uma aplicação F num ponto de $a \in M$ pode ser expressa da seguinte forma: sejam $x_1, ..., x_n$ funções coordenadas para a carta $\varphi_U : U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $a \in \varphi_U(U)$ e $y_1, ..., y_n$ funções coordenadas para a carta $\psi_V : V \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow N$ tal que $F(a) \in \psi_V(V)$. Nessas coordenadas, F pode ser representada como $F(x_1, ..., x_n) = (y_1 \circ F(x_1, ..., x_n), ..., y_m \circ F(x_1, ..., x_n)) =: (F_1(x_1, ..., x_n), ..., F_m(x_1, ..., x_n))$ e $X_a \in T_aM$ pode ser escrito na forma $X_a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_a \in T_aM$. Portanto, se $f \in C^\infty(N)$ então

$$
\begin{aligned}
\left[(F_*)_a(X_a)\right](f) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_a(F^*(f)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j}(F(a)) \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(a) \right) \\
&= \left[\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(a) \right) \frac{\partial}{\partial y_j}|_{F(a)} \right](f).
\end{aligned}
$$

Logo, a *j-ésima* componente do vetor $(F_*)_a(X_a)$ com respeito à base $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_j}|_{F(a)} \right\}$ é $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(a)$ e podemos representar a aplicação $(F_*)_a$ pela matriz

$$
\begin{bmatrix}
\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a) \\
\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(a) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(a)
\end{bmatrix}
$$

que é a matriz Jacobiana da F.

1.1.4 Fibrados Diferenciáveis

O produto direto (ou Cartesiano) $M \times N$ de duas variedades diferenciáveis é equipado, de maneira natural, com uma estrutura diferenciável: se $\mathcal{A}_M = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$ e $\mathcal{A}_N = \{(\psi_\beta, U_\beta)\}$ são atlas diferenciáveis (de classe C^∞) sobre M e N respectivamente, então $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha \times \psi_\beta, U_\alpha \times V_\beta)\}$ é um atlas C^∞ sobre $M \times N$, onde $(\varphi_\alpha \times \psi_\beta)(u, v) =$

$(\varphi_\alpha(u), \psi_\beta(v)) \in M \times N$, $u \in U_\alpha$, $v \in V_\beta$. Uma pequena alteração desta contrução gera um dos mais importantes conceitos da geometria diferencial: um *fibrado diferenciável*. A saber, uma aplicação diferenciável $\pi : E \longrightarrow M$ é chamado **fibrado diferenciável** sobre M com fibra N se

1) π é uma aplicação sobrejetora;

2) para todo ponto $x \in M$, existe uma vizinhança U_x contendo o ponto x tal que sua imagem inversa $\pi^{-1}(U_x)$ é difeomorfa ao produto $U_x \times N$, isto é, existe um difeomorfismo $f|_{U_x} : U_x \times N \longrightarrow \pi^{-1}(U_x)$ tal que $f|_{U_x}(x, y) \in \pi^{-1}(x)$, para todos $x \in U_x$ e $y \in N$.

A notação usual de um fibrado é $\pi : E \longrightarrow M$ ou (E, M, π).

As subvariedades $\pi^{-1}(x) \subset E$, $x \in M$, são chamadas **fibras** deste fibrado. Elas são todas difeomorfas a N. O espaço do fibrado E é a união destas fibras que não se interseptam em pares, isto é, ele é fibrado por elas. A variedade M é chamada **base do fibrado** (E, M, π).

Exemplo 1.1.10. *A projeção $\pi : M \times N \longrightarrow M$ de um produto direto no seu primeiro fator é um fibrado diferenciável, o qual é chamado* ***fibrado trivial****.*

O exemplo anterior dá uma justificativa para quando dizemos que, localmente, os fibrados são produtos diretos.

Seja $\mathcal{A} = \{\varphi_{U_\alpha}\}$ um atlas diferenciável em M tal que a imagem inversa $\pi^{-1}(V_\alpha)$, $V_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha)$, admite a aplicação trivializante $f_\alpha = f|_{V_\alpha} : V_\alpha \times N \longrightarrow \pi^{-1}(V_\alpha)$ satisfazendo a condição 2) de um fibrado. A aplicação

$$f_\beta^{-1} \circ f_\alpha : (V_\alpha \cap V_\beta) \times N \longrightarrow (V_\alpha \cap V_\beta) \times N,$$

aplica difeomorficamente toda fibra $\{x\} \times N \subset (V_\alpha \cap V_\beta) \times N$, $x \in V_\alpha \cap V_\beta$, nela mesma. Denotaremos este difeomorfismo, posteriormente a identificação óbvia de N e $\{x\} \times N$, por $h_{\alpha\beta} : N \longrightarrow N$ e a chamaremos **função de transição**. É óbvio que

$$h_{\alpha\alpha}(x) = id, \qquad h_{\beta\alpha}(x) = h_{\alpha\beta}^{-1}(x), \qquad h_{\alpha\beta}(x) \circ h_{\beta\gamma}(x) = h_{\alpha\gamma}(x)$$

e que os difeomorfismos $h_{\alpha\beta}(x)$ dependem diferenciavelmente da variável $x \in U_\alpha \cap U_\beta$. Ao contrário, especificando um atlas $\mathcal{A} = \{\varphi_{U_\alpha}\}$ em M e um sistema de difeomorfismos $h_{\alpha\beta}(x)$ que satisfazem as condições acima, podemos construir um fibrado $\pi : E \longrightarrow M$ para o qual as $h_{\alpha\beta}(x)$'s são funções de transição. Informalmente falando, as funções $h_{\alpha\beta}$ mostram como a variedade E é uma colagem de blocos da forma $U_\alpha \times N$.

Uma aplicação $\sigma : M \longrightarrow E$ tal que $\pi \circ \sigma = id$ é chamada **seção** do fibrado (E, M, π). Obviamente, σ é uma seção se, e somente se, $\sigma(x) \in \pi^{-1}(x)$. A coleção de todas as seções diferenciáveis do fibrado em questão é denotada por $\Gamma(\pi)$.

Sejam (E_i, M_i, π_i), $i \in \{1, 2\}$, fibrados. Os pares de aplicações $F : E_1 \longrightarrow E_2$, $f : M_1 \longrightarrow M_2$ são chamados **morfismos** do primeiro fibrado no segundo se $\pi_2 \circ F = f \circ \pi_1$. Em outras palavras, um morfismo aplica fibras de π_1 em fibras de π_2. O morfismo inverso é chamado uma **equivalência** (ou isomorfismo) dos fibrados em questão.

O fibrado π_1 é chamado subfibrado se o morfismo (F, f) determina mergulhos de subvariedades $F : E_1 \hookrightarrow E_2$, $f : M_1 \hookrightarrow M_2$.

Qualquer aplicação diferenciável $f : M_1 \longrightarrow M$ na base do fibrado $\pi : E \longrightarrow M$ gera um fibrado sobre M_1, chamado **fibrado induzido**, e denotado por $f^*(x) : f^*(E) \longrightarrow M_1$.

Uma fibra, do fibrado induzido, em um ponto $y \in M_1$ coincide com a fibra do fibrado original em um ponto $x = f(y)$. Formalmente, a variedade $f^*(E)$ é definida como a subvariedade de $M_1 \times E$ consistindo de pares (y, e) tais que $f(y) = \pi(e)$ e a projeção $f^*(\pi)$ é definida como a aplicação $(y, e) \mapsto y$.

Um fibrado (E, M, π) é chamado **fibrado vetorial** se suas fibras $\pi^{-1}(x)$ são equipadas com a estrutura de um espaço vetorial “dependendo diferenciavelmente"do ponto $x \in M$. Isso mostra que este fibrado pode ser especificado por funções de transição lineares, isto é, $h_{\alpha\beta}(x)$ são transformações lineares da fibra canônica N, a qual é um espaço vetorial.

Sejam S_i, $i \in \{1, ..., k\}$, seções do fibrado vetorial π e sejam $f_i \in C^\infty(M)$ funções sobre a base M. Então podemos definir uma seção $s = \sum_i f_i s_i$ dada por $s(x) = \sum_i f_i(x) s_i(x)$, já que a fibra $\pi^{-1}(x)$ é um espço vetorial. Dessa forma, dizemos que $\Gamma(\pi)$ é um C^∞-módulo.

Similarmente, podemos considerar fibrados cujas fibras tem outra estrutura, por exemplo, a estrutura de um espaço afim, a estrutura de um grupo, e outras ainda. Tais fibrados são caracterizados pelo fato que as funções de transição $h_{\alpha\beta}(x)$ que o especificam são transformações da fibra canônica N que preservam a correspondente estrutura.

Dada uma variedade diferenciável M de dimensão n, podemos definir o conjunto $TM = \bigcup\limits_{p \in M} T_pM$ e uma aplicação sobrejetora $\pi : TM \longrightarrow M$ definida por $\pi(\xi_p) = p$ denominada **projeção natural**. O conjunto TM possui uma estrutura natural de variedade diferenciável dada da seguinte forma: sejam os abertos de TM as imagens inversas dos abertos de M pela aplicação π e $\mathcal{A}$ uma estrutura diferenciável para a variedade M. Para toda $\varphi_U \in \mathcal{A}$ com $x_1, ..., x_n$ funções coordenadas para a carta φ_U, defina as aplicações

$$\widetilde{\varphi}_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$\widetilde{\varphi}_{\widetilde{U}}(\xi_p) = (x_1(p), ..., x_n(p), \xi_p(x_1), ..., \xi_p(x_n)),$$

onde $\widetilde{U} = \pi^{-1}(U)$.

Estas aplicações são injetoras e, com a topologia induzida em TM, são homeomorfismos. Além disso, TM é um espaço de Haussdorf paracompacto com estrutura diferenciável $\widetilde{\mathcal{A}} = \{\widetilde{\varphi}_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}\}$ de classe C^∞ pois as aplicações $\widetilde{\varphi}_{\widetilde{U}} \circ \widetilde{\varphi}_{\widetilde{V}}^{-1}$ são difeomorfismos de classe C^∞ para todas $\widetilde{\varphi}_{\widetilde{U}}, \widetilde{\varphi}_{\widetilde{V}} \in \widetilde{\mathcal{A}}$.

Agora que dotamos TM de uma estrutura diferenciável, é fácil ver que

$$\pi : TM \longrightarrow M$$

é um fibrado vetorial que é denominado **fibrado tangente** a M. Os espaços $T_pM = \pi^{-1}(p)$ são as **fibras**.

Uma seção do fibrado tangente é, portanto, uma aplicação $\Phi : M \longrightarrow TM$ tal que a imagem de cada ponto $x \in M$ está na fibra $\pi^{-1}(x)$ sobre x, ou seja, a imagem de cada ponto $x \in M$ pertence ao espaço tangente T_pM. Portanto, uma seção de π pode ser geometricamente interpretada como um campo de vetores tangentes. Na próxima seção, será introduzida, também, uma outra forma equivalente de considerar os campos de vetores tangentes.

1.2 Campos de vetores

Nesta seção trataremos os campos de vetores tangentes sobre uma variedade como derivações da álgebra $C^\infty(M)$. Dessa forma, veremos que o conjunto dos campos possui uma estrutura de $\mathbb{R}$-álgebra de Lie. Além disso, em decorrência dos teoremas de existência e unicidade, será definido, também, o fluxo de um campo junto a suas principais propriedades. Começamos com a seguinte

Definição 1.2.1. *Um **campo de vetores** C^∞ sobre uma variedade M é uma aplicação $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\mathbb{R}$*-linearidade :* $X(\alpha f + \beta g) = \alpha X(f) + \beta X(g), \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g \in C^\infty(M).$

(ii) Propriedade de Leibniz: $X(fg) = X(f)g + X(g)f, \qquad \forall f, g \in C^\infty(M).$

Portanto, um campo de vetores é uma derivação sobre $C^\infty(M)$ e o conjunto destas derivações será denotado por $\mathcal{D}(M)$. Consideraremos sempre campos de vetores C^∞.

Como no caso dos vetores tangentes, podemos definir operações de soma entre campos de vetores como também produto de um campo por uma função:

$$(X_1 + X_2)(f) := X_1(f) + X_2(f), \qquad \forall X_1, X_2 \in \mathcal{D}(M), \forall f \in C^\infty(M)$$
$$(fX)(g) := fX(g), \qquad \forall X \in \mathcal{D}(M), \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Com estas operações, $\mathcal{D}(M)$ é um $C^\infty(M)$-módulo.

Sejam M variedade diferenciável e $X \in \mathcal{D}(M)$ um campo de vetores. Em cada ponto $p \in M$, podemos definir um vetor tangente X_p por

$$X_p(f) := X(f)(p), \qquad \forall f \in C^\infty(M).$$

Dessa forma, dado um campo $X \in \mathcal{D}(M)$, podemos definir uma aplicação $\phi_X : M \longrightarrow TM$ por $\phi_X(p) = X_p$, ou seja, um campo de vetores tangentes define uma seção do fibrado tangente. Isso justifica a equivalência entre a interpretação de campo dada na seção anterior e aquela dada na presente seção.

Queremos expressar um campo de vetores em coordenadas. Para isso, sejam $x_1, ..., x_n$ funções coordenadas para a carta φ_U, $X \in \mathcal{D}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$. Pela observação anterior, em cada ponto $p \in M$, podemos associar um vetor tangente X_p tal que $X_p(f) = X(f)(p)$. Além disso, já foi visto que se $p \in \varphi_U(U)$ então podemos expressar X_p em coordenadas por $X_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_p(x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$. Logo, obtemos que $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X(x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Definição 1.2.2. *Se $F : M \longrightarrow N$ é uma aplicação C^∞ e X e Y são campos de vetores C^∞ em M e N, respectivamente, dizemos que X e Y são* ***F-relacionados*** *se $F_{*_p}(X_p) = Y_{F(p)}$, para todo $p \in M$.*

Decorre desta definição que se X e Y são $F-relacionados$ então

$$Y_{F(p)}(g) = F_{*_p}(X_p)(g) = X_p(g \circ F) \tag{1.1}$$

e temos também que

$$F^* \circ Y = X \circ F^*. \tag{1.2}$$

A volta também vale.

Podemos munir o módulo $\mathcal{D}(M)$ com uma importante estrutura para a qual é necessária a seguinte

Definição 1.2.3. *O* ***produto de Lie*** *(ou* ***comutador****) de dois campos vetores $X, Y \in \mathcal{D}(M)$ é definido por*

$$[X, Y](f) := X \circ Y - Y \circ X.$$

É fácil ver que o produto de Lie de dois campos de vetores é também um campo vetorial. Veremos agora como expressar o produto de Lie de dois campos em coordenadas. Para isso, sejam $x_1, ..., x_n$ funções coordenadas tais que $X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Então,

$$[X, Y] \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \left(X(b_i) - Y(a_i) \right).$$

Proposição 1.2.4. *O colchete de Lie é antissimétrico, $\mathbb{R}$-linear e satisfaz a identidade de Jacobi*

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$$

A demonstração decorre de verificações diretas.

Uma álgebra com uma multiplicação satisfazendo as propriedades do colchete de Lie acima é denominada álgebra de Lie. Dessa forma, $\mathcal{D}(M)$ é a álgebra de Lie dos campos de vetores sobre a variedade M.

Proposição 1.2.5. *Se $X_i \in \mathcal{D}(M)$ e $Y_i \in \mathcal{D}(N)$ são F-relacionados, para $i \in \{1, 2\}$, então $[X_1, X_2]$ e $[Y_1, Y_2]$ são F-relacionados.*

Prova: Se $g : N \longrightarrow \mathbb{R}$ é C^∞, então, por 1.1,

$$(Y_i(g)) \circ f = X_i(g \circ f), \forall i \in \{1, 2\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} ([Y_1, Y_2](g)) \circ f &= Y_1(Y_2(g)) \circ f - Y_2(Y_1(g)) \circ f \\ &= X_1(Y_2(g) \circ f) - X_2(Y_1(g) \circ f) \\ &= X_1(X_2(g \circ f)) - X_2(X_1(g \circ f)) \\ &= [X_1, X_2](g \circ f). \end{aligned}$$

■

Definição 1.2.6. *Seja X um campo de vetores C^∞ em uma variedade M. Uma* ***trajetória local*** *de X é uma curva $c : (a, b) \longrightarrow M$ tal que $c'(t) = X_{c(t)}$, onde t denota o parâmetro da curva e $c'(t) = c_* \left(\frac{d}{dt}\right)$. Se uma curva integral c tem domínio $\mathbb{R}$, dizemos que c é uma* ***trajetória global****.*

Queremos saber sobre quais condições uma curva $c : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ é uma trajetória de um campo X. Para isso sejam $\tau \in I$, $c(\tau) = a$ e sejam $x_1, ..., x_n$ funções coordenadas para a carta φ_U com $a \in \varphi_U(U)$. Considere também que X é representado em $\varphi_U(U)$ por $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e que $c(t) = (c_1(t), ..., c_n(t))$. Logo

$$\tfrac{d}{dt}|_{t=\tau}c(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{dc_i}{dt}(\tau)\frac{\partial}{\partial x_i}|_a.$$

Portanto, para que c seja uma trajetória do campo X, deve ser satisfeito o seguinte:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(a)\frac{\partial}{\partial x_i}_a = X_a = \frac{d}{dt}|_{t=\tau}c(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx_i}{dt}(\tau)\frac{\partial}{\partial x_i}|_a,$$

ou seja,

$$\tfrac{dc_i}{dt}(t) = \alpha_i(c(t)),\ i \in \{1, ..., n\}.$$

Isso justifica o seguinte

Teorema 1.2.7. *Sejam M variedade diferenciável, $x_1, ..., x_n$ funções coordenadas para a carta $\varphi_U : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ e $X \in \mathcal{D}(M)$ expresso localmente por $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Uma condição necessária e suficiente para que uma aplicação $c : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$, representada pelas funções $c_1(t), ..., c_n(t)$, seja uma trajetória local do campo X é que as funções $x_i(t)$ satisfaçãm o sistema de equações diferenciais ordinárias*

$$\tfrac{dc_i}{dt}(t) = \alpha_i(c(t)),\ i \in \{1, ..., n\}.$$

Temos, por teoremas de existência e unicidade de solução local ([52],[47],[50],[26]), que, para todo $a \in M$, existe uma trajetória local passando por a.

Definição 1.2.8. *Se toda trajetória de um campo de vetores X sobre uma variedade pode ser extendida a uma trajetória global então X é dito **completo**.*

Uma conseqência simples, porém importante, da existência e unicidade de solução local é que, dadas duas trajetórias $c_i : I_i \longrightarrow M$, $i \in \{1, 2\}$, passando por um ponto $a \in M$ e $\tau_i \in c_i^{-1}(a)$, $i \in \{1, 2\}$, então $c_1(t) = c_2(t+\tau_2-\tau_1)$, para todo t suficientemente proóximo de τ_1 ([52],[47],[50]).

Definição 1.2.9. *Sejam X um campo de vetores C^∞ sobre uma variedade M e $I_{x_0} \subset \mathbb{R}$ o intervalo máximo para o qual uma trajetória passando por $x \in M$ está definida e $D = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times M; t \in I_y \text{ e } y \in M\}$. O **fluxo** do campo X é a aplicação*

$$A : D \longrightarrow M$$
$$A(t, y) = c(c^{-1}(y) + t),$$

onde c é uma trajetória passando pelo ponto y.

A aplicação acima, de fato, está bem definida pois se s é outra trajetória passando por y então, pela observação anterior, temos que

$$s(t) = c(t + c^{-1}(y) - s^{-1}(y)).$$

Logo,

$$s(s^{-1}(y) + t) = c(s^{-1}(y) + t + c^{-1}(y) - s^{-1}(y)) = c(t + c^{-1}(y)).$$

Fixados um ponto $x \in M$ e $t \in I_x$ tais que $A(-t, x)$ e $A(t, x)$ estão definidos, existe uma vizinhança $U \subset M$ do ponto x tal que a família de aplicações $\{A_s : U \longrightarrow M; A_s(y) = A(s, y)\}_{|s|<|t|}$ está bem definida (v. [52],[47],[50]). Tal família é denominada **grupo local de transformações** de M, pois

$$A_{s_1} \circ A_{s_2} = A_{s_1+s_2}, \text{ para todo } s_1, s_2 \text{ tais que } |s_1|, |s_2|, |s_1 + s_2| < |t|.$$

Se o campo for completo então a família de aplicações $\{A_s : M \longrightarrow M\}_{s\in\mathbb{R}}$ constitui um grupo a um parâmetro com a operação de composição.

Decorre do teorema do fluxo local (v. [52],[47],[50]) que a aplicação $A : D \longrightarrow M$ é diferenciável e que, para todo $(t, x) \in D$, existe uma vizinhança U de x tal que a aplicação $A_t : U \longrightarrow M$,$A_t(y) = A(t, y)$, é um difeomorfismo local. Tal aplicação é denominada **operador de translação local** ao longo das trajetórias de X. Dessa forma, não é difícil ver que $\frac{d(A_t^*)}{dt}|_{t=0} = X$ (v. [52]).

Portanto, dado um campo X, podemos obter uma família a um parâmetro de difeomorfismos locais de M. O caminho contrário é possível pelo seguinte

Teorema 1.2.10. *Toda família a um parâmetro $\{A_t\}$ de transformações locais de M que depende diferenciavelmente de t define um operador de translação ao longo das trajetórias de um campo de vetores X definido pela fórmula*

$$X = \lim_{t\to 0} \frac{A_t^* - A_0^*}{t}.$$

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [52].

Um campo é, portanto, completamente determinado pelo seu fluxo e escreveremos $X \cong \{A_t\}$ para indicar que A_t é a família de operadores de translação ao longo das trajetórias de X.

Proposição 1.2.11. *Se $X \cong \{A_t\}$, então $X \circ A_t^* = A_t^* \circ X = \frac{d}{dt} A_t^*$.*

Prova: Sabemos que

$$\frac{d}{dt} A_t^* = \lim_{s\to 0} \frac{A_{t+s}^* - A_t^*}{s} = A_t^* \circ \left(\lim_{s\to 0} \frac{A_s^* - A_0^*}{s} \right) = A_t^* \circ X.$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{dt}A_t^* = \lim_{s\to 0}\frac{A_{t+s}^* - A_t^*}{s} = \left(\lim_{s\to 0}\frac{A_s^* - A_0^*}{s}\right)\circ A_t^* = X \circ A_t^*$$

e o teorema segue.

■

Veremos, agora, como se comportam os campos com relação a difeomorfismos através da seguinte

Definição 1.2.12. *Sejam M, N variedades diferenciáveis, $F : M \longrightarrow N$ difeomorfismo e $X \in \mathcal{D}(M)$. O **push-foward** do campo X pela aplicação F é definido por*

$$F_*(X) = (F^*)^{-1} \circ X \circ F_*.$$

É fácil ver que o push-foward de um campo de vetores por um difeomorfismo é também um campo de vetores.

1.3 Tensores

1.3.1 Introdução

Nesta seção será apresentada a noção de tensores e alguns importantes operadores de derivação sobre estes. A noção de tensores será fundamental para trabalharmos com o conceito de p-formas diferenciais e aplicá-las para estudos globais posteriores.

Definição 1.3.1. *Sejam $\mathcal{A}$ um anel comutativo unitário, $\mathcal{S}$ um $\mathcal{A}$-módulo e $\mathcal{S}^* = Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}, \mathcal{A}) = \{\psi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}; \psi$ é homomorfismo $\mathcal{A}$-linear$\}$. Um **tensor** do tipo (p, q) sobre o módulo $\mathcal{S}$ é uma aplicação $\mathcal{A}$-multilinear*

$$T : \underbrace{\mathcal{S}^* \times ... \times \mathcal{S}^*}_{p\ vezes} \times \underbrace{\mathcal{S} \times ... \times \mathcal{S}}_{q\ vezes} \longrightarrow \mathcal{A}.$$

O conjunto de todos os tensores do tipo (p,q) sobre o módulo $\mathcal{S}$ é denotado por $T_p^q(\mathcal{S})$ e constitui um $\mathcal{A}$-módulo com as operações naturais de soma e produto por elementos de $\mathcal{A}$ definidas abaixo:

$$\begin{array}{rcl} + : T_p^q(\mathcal{S}) \times T_p^q(\mathcal{S}) & \longrightarrow & T_p^q(\mathcal{S}) \\ (T + S)(s) & := & T(s) + S(s) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \times : \mathcal{A} \times T_p^q(\mathcal{S}) & \longrightarrow & T_p^q(\mathcal{S}) \\ (\alpha \times T)(s) & := & \alpha T(s) \end{array}$$

Como casos particulares, temos que $T_0^1(\mathcal{S}) = \mathcal{S}^*$ e $T_1^0(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ se considerarmos $\mathcal{S}^{**} = \mathcal{S}$. Além disso, por definição, $T_0^0 = \mathcal{A}$.

Definição 1.3.2. *Seja* $T(\mathcal{S}) = \sum_{p,q\geq 0} T_p^q(\mathcal{S})$, *definimos o* ***produto tensorial***

$$\otimes : T(\mathcal{S}) \times T(\mathcal{S}) \longrightarrow T(\mathcal{S})$$

tal que, se $f_1 \in T_p^q(\mathcal{S})$ *e* $f_2 \in T_r^s(\mathcal{S})$, $f_1 \otimes f_2 : \underbrace{\mathcal{S}^* \times ... \times \mathcal{S}^*}_{p+r\ vezes} \times \underbrace{\mathcal{S} \times ..., \times \mathcal{S}}_{q+l\ vezes}$ *é dada por*

$$f_1 \otimes f_2(s_1^*, ..., s_{p+r}^*, s_1, ..., s_{q+l}) = f_1(s_1^*, ..., s_p^*, s_1, ..., s_q).f_2(s_{p+1}^*, ..., s_{p+r}^*, s_{q+1}, ..., s_{q+l}).$$

Logo, $f_1 \otimes f_2 \in T_{p+r}^{q+l}(\mathcal{S})$.

Se o módulo $\mathcal{S}$ possui uma base finita $\{e_1, ..., e_n\}$, então os elementos $\epsilon_i \in \mathcal{S}^*$ definidos por $\epsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$ constituem uma base para $\mathcal{S}^*$. Logo, dados $s_j = \sum_{k=1}^{q} s_j^k e_k$, $s_i^* = \sum_{r=1}^{p} s_i^{r^*} \epsilon_r$ e $f \in T_p^q(\mathcal{S})$, obtem-se pela linearidade de f que

$$f(s_1^*, ..., s_p^*, s_1, ..., s_q) = \sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} f(\epsilon_{i_1}, ..., \epsilon_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q}) s_1^{i_1^*}. ... .s_p^{i_p^*}.s_1^{j_1}. ... .s_q^{j_q},$$

ou seja, f é únicamente definido pelos valores

$$f_{i_1,...,i_p}^{j_1,...,j_q} := f(\epsilon_{i_1}, ..., \epsilon_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q})$$

que são chamados **componentes** do tensor f com respeito à base $\{e_1, ..., e_n\}$.

Desse modo, podemos expressar f da seguinte forma:

$$f = \sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} f_{i_1,...,i_p}^{j_1,...,j_q} \widehat{e_{i_1}} \otimes ... \otimes \widehat{e_{i_p}} \otimes \epsilon_{j_1} \otimes ... \otimes \epsilon_{j_q}, \tag{1.3}$$

onde $\widehat{e_j} : \mathcal{S}^* \longrightarrow \mathcal{A}$ é definido por $\widehat{e_j}(s^*) = \widehat{e_j}(\sum_{r=1}^{p} s^{r^*} \epsilon_r) = s^*(e_j) = s^{j^*}$. Logo, $\{\widehat{e_{i_1}} \otimes ... \otimes \widehat{e_{i_p}} \otimes \epsilon_{j_1} \otimes ... \otimes \epsilon_{j_q}\}_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q \in \{1,...,n\}}$ constitui uma base para $T_p^q(\mathcal{S})$.

Veremos agora como aplicar a noção de tensores para o estudo de p-formas diferenciais. Começamos com a seguinte

Definição 1.3.3. *Sejam* $f \in T_0^p(\mathcal{S})$ *e* $\Delta(p)$ *o grupo das permutações de* $\{1, 2, ..., p\}$. f *é dita* ***p-forma simétrica*** *(respectivamente* ***antisimétrica****) se, para todo* $\delta \in \Delta(p)$, $f^\delta(s_1, ..., f_p) = f(s_{\delta(1)}, ..., s_{\delta(p)}) = f(s_1, ..., s_p)$ *(respectivamente* $f^\delta(s_1, ..., s_p) = (-1)^\delta f(s_1, ..., f_p)$*), onde* $(-1)^\delta = 1$ *se* δ *é uma permutação par e* $(-1)^\delta = -1$ *se* δ *é uma permutação ímpar.*

Não é difícil ver que o conjunto das p-formas antisimétricas sobre $\mathcal{S}$ possui uma estrutura de $\mathcal{A}$-módulo que denotaremos por $\Lambda^p(\mathcal{S})$, se $p > 0$, e $\Lambda^0(\mathcal{S}) = \mathcal{A}$ se $p = 0$. Também definimos $\Lambda(\mathcal{S}) = \sum_{p\geq 0} T_0^p(\mathcal{S})$.

Dado um tensor $f \in T(\mathcal{S})$ qualquer, podemos definir uma operação que o transforme em um tensor antisimétrico da seguinte forma:

$$alt : T(\mathcal{S}) \longrightarrow \Lambda(\mathcal{S})$$
$$alt(f) := \sum_{\delta \in \Delta(p)} (-1)^{\delta} f^{\delta}.$$

Num contexte mais geral de tensores, foi possível definir o produto tensorial e foi visto que $T(\mathcal{S})$ era fechado sobre esta operação. Porém, o mesmo não acontece quando nos restringimos a $\Lambda(\mathcal{S})$ pois o produto tensorial de tensores antisimétricos não necessariamente é antisimétrico. Neste caso, defini-se um novo produto da seguinte forma

Definição 1.3.4. *Sejam $f_1 \in \Lambda^p(\mathcal{S})$ e $f_2 \in \Lambda^q(\mathcal{S})$. Definimos o* ***produto exterior***

$$\wedge : \Lambda(\mathcal{S}) \times \Lambda(\mathcal{S}) \longrightarrow \Lambda(\mathcal{S})$$
$$(f_1, f_2) \longmapsto f_1 \wedge f_2 := \tfrac{1}{p!q!} alt(f_1 \otimes f_2).$$

De forma análoga ao que foi feito para o caso geral de tensores, obtem-se que $\{\epsilon_{i_1} \wedge ... \wedge \epsilon_{i_p}\}_{i_1,...,i_p \in \{1,2,...,n\}}$ constitui uma base para $\Lambda^p(\mathcal{S})$. Logo, todo elemento $\omega \in \Lambda^p(\mathcal{S})$ é escrito da forma $\displaystyle\sum_{i_1,...,i_p \in \{1,...,n\}} \omega(e_{i_1}, ..., e_{i_p}) \epsilon_{i_1} \wedge ... \wedge \epsilon_{i_p}$. Portanto, se a dimensão do $\mathcal{A}$-módulo $\mathcal{S}$ for n, então a dimensão de $\Lambda^p(\mathcal{S})$ é $\binom{n}{p}$.

1.3.2 Formas Dieferenciais e Fibrado Cotangente

Afim de aplicar a teoria de Tensores, consideraremos dois casos: primeiro, o anel $\mathcal{A}$ será $\mathbb{R}$ e o $\mathcal{A}$-módulo $\mathcal{S}$ será o espaço T_pM tangente a uma variedade M num ponto $p \in M$; segundo, o anel $\mathcal{A}$ será $C^\infty(M)$ e o $\mathcal{A}$-módulo $\mathcal{S}$ será $\mathcal{D}(M)$. No primeiro caso, os elementos de $\Lambda^q(T_pM)$ serão denominados **q-covetores** (ou **covetor de grau q**) no ponto p. No segundo, os elementos de $\Lambda^q(\mathcal{D}(M))$ serão denominados **q-formas diferenciais** (ou **forma diferencial de grau q**). No caso em que q = 1, $\Lambda^1(T_pM)$ é denominado **espaço cotangente** a M em p e é será denotado por T_p^*M.

Definição 1.3.5. *Sejam M variedade diferenciável e $f \in C^\infty(M)$. A 1-forma diferencial df sobre M definida por*

$$df : \mathcal{D}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$
$$df(X) = X(f)$$

é chamada ***diferencial da função f****.*

Uma restrição no domínio da diferencial de uma função gera a seguinte

Definição 1.3.6. *Sejam M variedade diferenciável e $f \in C^\infty(M)$. O* ***diferencial vertical*** *de f é definido por*

$$\begin{aligned} d^V f : V(M) &\longrightarrow \Lambda^1(M) \\ \xi &\longmapsto df(\xi), \end{aligned}$$

onde $V(M) = \{\eta \in TM : \pi_*(\eta) = 0\}$.

Definiremos, agora, o pull-back de uma p-forma:

Definição 1.3.7. *Sejam* M, N *variedades diferenciáveis,* $F : M \longrightarrow N$ *diferenciável,* $\omega \in T_0^p(\mathcal{D}(N))$*e* $X_1, ..., X_p \in \mathcal{D}(M)$. *O* ***pullback*** *de* ω *pela aplicação* F *é definido por*

$$F^*(\omega)(X_1, ..., X_p)(a) = \omega_{F(a)}\left((F^*)_a(X_{1_a}), ..., (F_*)_a(X_{p_a})\right), \forall a \in M.$$

Um q-covetor ω_p num ponto p de uma variedade diferenciável M é uma aplicação $\omega_p : \underbrace{T_pM \times ... \times T_pM}_{q\ vezes} \longrightarrow \mathbb{R}$. Queremos, agora, descrever localmente um q-covetor. Para isso, suponha $dim(M) = n$, $p \in M$, φ_U carta coordenada numa vizinhança, $x_1, ..., x_n$ funções coordenadas da carta φ_U. Usando 1.3, obtemos

$$\omega_p = \sum_{i_1,...,i_q \in \{1,...,n\}} \omega_p \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x_{i_q}}|_p\right) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_q},$$

onde $dx_{i_k}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_{i_l}}\right)_p = \delta_{kl}$.

Seja M variedade diferenciável de dimensão n, podemos definir o conjunto $T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$ e uma aplicação $\widetilde{\pi} : T^*M \longrightarrow M$ por $\widetilde{\pi}(\omega_p) = p$. Analogamente ao fibrado tangente, o conjunto T^*M possui uma estrutura natural de variedade diferenciável dada da seguinte forma: seja $\mathcal{A}$ estrutura diferenciálvel para a variedade M. Para toda $\varphi_V \in \mathcal{A}$ com $x_1, ..., x_n$ funções coordenadas para a carta φ_V podemos definir as aplicações

$$\widetilde{\psi}_{\widetilde{V}} : \widetilde{\pi}^{-1}(V) = \widetilde{V} \subset T^*M \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$
$$\widetilde{\psi}_{\widetilde{V}}(\omega_p) = \left(x_1(p), ..., x_n(p), \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}|_p\right), ..., \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_n}|_p\right)\right).$$

Não é difícil ver que estas aplicações são injetoras e podemos definir uma topologia em T^*M onde os abertos são as contraimagens de abertos do $\mathbb{R}^{2n}$. Com esta topologia em T^*M as aplicações $\widetilde{\psi}_{\widetilde{V}}$ são naturalmente homeomorfismos. Além disso, com esta topologia, não é difícil ver que T^*M é um espaço de Haussdorf e paracompacto e também que $\widetilde{\mathcal{A}} = \{\widetilde{\psi}_{\widetilde{V}} : \widetilde{V} \subset T^*M \longrightarrow \widetilde{\psi}_{\widetilde{V}}(\widetilde{V}) \subset \mathbb{R}^{2n}\}$ define uma estrutura diferenciável de classe C^∞ pois $\widetilde{\psi}_{\widetilde{V}} \circ \widetilde{\psi}_{\widetilde{U}}^{-1}$ são difeomorfismos de classe C^∞ para todas $\widetilde{\psi}_{\widetilde{V}}, \widetilde{\psi}_{\widetilde{U}} \in \widetilde{\mathcal{A}}$.

O conjunto T^*M munido com esta estrutura diferenciável é denominado **fibrado cotangente** e os espaços cotangentes a M em p $T_p^*M = \widetilde{\pi}^{-1}(p)$ são as fibras sobre cada ponto p. Como $\widetilde{\pi}^{-1}(p)$ tem estrutura de espaço vetorial para todo $p \in M$, o fibrado cotangente T^*M tem uma estrutura de fibrado vetorial. Além disso, é fácil ver que a aplicação $\widetilde{\pi} : T^*M \longrightarrow M$ é uma submersão.

Observação 1.3.8. *Podemos definir uma aplicação* $\Theta_a : \Lambda^p(\mathcal{D}(M)) \longrightarrow \Lambda^p(T_a(M))$ *por* $\Theta_a(\omega) = \omega_a$ *tal que*

$$\omega_a(X_{a_1}, ..., X_{a_p}) = \omega(X_1, ..., X_p)(a),$$

tal que $X_{a_1}, ..., X_{a_p}$ *são definidos pelos campos de vetores* $X_1, ..., X_n$ *respectivamente. Como esta definição é pontual, não depende da escolha de* $X_1, ..., X_p$*. Logo,* Θ_a *está bem definida.*

Portanto, dada uma p-forma diferencial $\omega \in \Lambda^p(\mathcal{D}(M))$, podemos definir em cada ponto $a \in M$ um p-covetor ω_a. O contrário também é possível.

Diferencial externo

O diferencial de uma forma diferenciável é definido de maneira axiomática pelo seguinte

Teorema 1.3.9. *Seja* M *variedade diferenciável. Existe uma, e somente uma, aplicação* $d_M : \Lambda(\mathcal{D}(M)) \longrightarrow \Lambda(\mathcal{D}(M))$ *tal que:*

1. $d_M(\omega_1 + \omega_2) = d_M(\omega_1) + d_M(\omega_2)$, $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda(\mathcal{D}(M))$;
2. $d_M(\omega_1 \wedge \omega_2) = d_M(\omega_1 \wedge \omega_2) + (-1)^{gr(\omega_1)}\omega_1 \wedge d_M(\omega_2)$, *onde* $gr(\omega_1)$ *é o grau de* ω_1*;*
3. $d_M \circ d_M = 0$;
4. *se* $f \in \Lambda^0(\mathcal{D})$*, então* $d_M(f)$ *é o diferencial da função* f *definido em* ***1.3.8****.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrado em [50] e [52].

Quando o domínio do operador d_M estiver claro, o denotaremos apenas por d.

Definição 1.3.10. *O operador definido no teorema acima é chamado* ***diferencial exterior****.*

O teorema abaixo exibe uma expressão global para o cálculo explícito do diferencial exterior.

Teorema 1.3.11. *Se* $\omega \in \Lambda^p(\mathcal{D}(M))$*,* $p \geq 1$*,* $X_1, ..., X_{p+1} \in \mathcal{D}(m)$*, então vale:*

$$d\omega(X_1, ..., X_{p+1}) =$$
$$\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}X_i(\omega(X_1, ..., \widehat{X_i}, ..., X_{p+1})) + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_1, ..., \widehat{X_i}, ..., \widehat{X_j}, ..., X_{p+1}),$$

onde o símbolo $\widehat{\cdot}$ *indica a exclusão do argumento correspondente.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [52].

Observe que, no teorema acima, se $p = 0$ e $\omega = f \in C^{\infty}(M)$, a fórmula se reduz à própria definição de diferencial de uma função.

O diferencial exterior satisfaz uma importante propriedade, denominada **naturalidade**, dada pela seguinte

Proposição 1.3.12. *Dada uma aplicação diferenciável $F : M \longrightarrow N$ entre as variedades diferenciáveis M e N. O diferencial exterior d satisfaz a seguinte propriedade*

$$d_M \circ F^* = F^* \circ d_N.$$

A demonstração pode ser encontrada em [52].

Definição 1.3.13. *Sejam M variedade diferenciável e $\omega \in \Lambda^p(\mathcal{D}(M))$. ω é dita* ***fechada*** *se $d\omega = 0$ e é dita* ***exata*** *se existe uma forma $\eta \in \Lambda^{p-1}(\mathcal{D}(M))$ tal que $d\eta = \omega$.*

Segue imediatamente da definição que toda forma exata é fechada.

Definição 1.3.14. *Uma variedade diferenciável M é dita orientável se existe uma forma $\omega \in \Lambda^n(\mathcal{D}(M))$, $n = dim M$, tal que $\omega_a \neq 0, \forall a \in M$. Tal forma se chama forma de volume sobre M.*

Como $dim\,(\Lambda^n(\mathcal{D}(M))) = 1$, se ω é uma forma de volume sobre M e $\omega' \in \Lambda^n(\mathcal{D}(M))$, então $\omega' = f\omega$, onde $f \in C^{\infty}(M)$. Se ω' também for uma forma de volume sobre M, então $f(a) \neq 0, \forall a \in M$. Em particular, se M é uma variedade conexa então só existem duas possibilidades: $f > 0$ ou $f < 0$. No primeiro caso, ω e ω' são ditas compatíveis. No segundo, ω e ω' são ditas incompatíveis. É fácil ver que a compatibilidade define uma relação de equivalência e isso nos possibilita introduzir a seguinte

Definição 1.3.15. *Uma classe de formas de volume compatíveis é dita Orientação para M.*

1.3.3 Derivada de Lie

Definição 1.3.16. *Seja $X \in \mathcal{D}(M)$, $X \cong \{A_t\}$, campo de vetores sobre uma variedade diferenciável M. A derivada de Lie de uma função $f \in C^{\infty}(M)$ na direção do campo X é definida por*

$$\mathcal{L}_X(f) := \lim_{t \to 0} \frac{(A_t)_*(f) - (A_0)_*(f)}{t} = X(f),$$

para toda $f \in C^{\infty}(M)$.

Analogamente, definimos as derivadas de Lie para campos e tensores. Vejamos primeiro a seguinte

Definição 1.3.17. *Sejam $X \cong \{A_t\}$ e Y campos de vetores sobre uma variedade diferenciável M. A derivada de Lie $\mathcal{L}_X Y$ do campo Y com respeito ao campo X é o campo de vetores*

$$(\mathcal{L}_X Y)_p := \lim_{t \to 0} \frac{Y_{A_t(p)} - A_{t_*}(Y_p)}{t}$$

. onde $(A_t)_*(Y_p)$ indica o push-foward do vetor Y_p.

É possível mostrar (v. [52]) que

$$\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y].$$

Um caso particular, com uma importante interpretação geométrica, é quando $\mathcal{L}_X(Y) = [Y, X] = 0$, ou seja, quando $X(Y) = Y(X)$. O teorema a seguir mostra que, neste caso, os operadores de translação ao longo das trajetórias de X comutam com os operadores de translação ao longo das trajetórias de Y.

Teorema 1.3.18. *Sejam X e Y campos de vetores sobre uma variedade diferenciável M e $\{A_t\}$ e $\{B_s\}$ os correspondentes grupos locais a um parâmetro de X e Y respectivamente. Então*

$$[X, Y] = 0 \text{ se, e somente se, } A_t \circ B_s = B_s \circ A_t.$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [52], [50].

Vejamos agora como definir a derivada de Lie tensorial.

Definição 1.3.19. *Sejam M variedade diferenciável, $\omega \in T_0^p(\mathcal{D}(M))$, $\{A_t\}$ grupo local a um parâmetro do campo de vetores $X \in \mathcal{D}(M)$. A derivada de Lie $\mathcal{L}(\omega)$ do tensor ω com respeito ao campo X é definida por*

$$\mathcal{L}(\omega) := \lim_{t \to 0} \frac{A_t^*(\omega) - A_0^*(\omega)}{t}.$$

É possível mostrar (v. [52]) que vale o seguinte:

$$\mathcal{L}_X(\omega)(X_1, ..., X_p) = X(\omega(X_1, ..., X_p)) + \sum_{i=1}^{p} \omega(X_1, ..., [X_i, X], ..., X_p) \tag{1.4}$$

Definição 1.3.20. *Sejam M variedade diferenciável, $X \in \mathcal{D}(M)$, $\omega \in T_0^p(\mathcal{D}(M))$. Definimos o operador de contração por um campo de vetores X $i_X : T_0^p(\mathcal{D}(M)) \longrightarrow T_0^{p-1}(\mathcal{D}(M))$ por*

$$i_X(\omega)(X_1, ..., X_{p-1}) := \omega(X, X_1, ..., X_{p-1}).$$

Com esta definição, é possível mostrar uma importante fórmula para o cálculo da derivada de Lie para tensores, a saber

$$\mathcal{L}_X(\omega) = d \circ i_x(\omega) + i_X \circ d(\omega).$$

Esta fórmula é denominada fórmula de Cartan para o cálculo da derivada de Lie tensorial e pode ser verificada aplicando o **Teorema 1.3.13** e a fórmula algébrica 1.4 para $\mathcal{L}\omega$.

Capítulo 2

Simetrias e Formalismo Variacional

O objetivo principal deste capítulo é dar uma descrição variacional para as equações das geodésicas e mostrar quais relações existem entre as *simetrias* e as *integrais primeiras* destas equações. Para esse fim, usaremos o formalismo invariante de Poincaré-Cartan que possibilitará uma melhor descrição das simetrias e da correspondência entre *simetrias variacionais* e integrais primeiras dada pelo *Teorema de Nöether*. As duas primeiras seções abordam um conteúdo preliminar à parte central deste capítulo bem como para conteúdos posteriores. De fato, o capítulo começa com a introdução das noções de *distribuição* e *simetria de uma distribuição*. A segunda seção é uma introdução aos *espaços de jatos* que representam o ambiente natural no qual as equações das geodésicas podem ser tratadas como variedades diferenciáveis. Assim, as soluções das equações podem ser descritas como variedades integrais da *distribuição de Cartan* induzuda sobre esta variedade. As simetrias dessa distribuição são as simetrias das equações das geodésicas. A terceira seção trata o formalismo de Poincaré-Cartan que permite uma formulação variacional invariante para as *equações de Eule-Lagrange* e, em particular, para as equações das geodésicas. Na quarta seção é introduzida a noção de simetria variacional junto a uma demonstração do teorema de Nöether.

2.1 Distribuições e simetrias

Nesta seção será apresentada a noção de uma distribuição sobre uma variedade diferenciável além de alguns resultados fundamentais a respeito destas. Dentre estes, destacamos o clássico teorema de Frobenius e suas consequências sobre a integrabilidade de distribuições. Também será vista a noção de simetria de uma distribuição junto a alguns resultados que decorrem da existência de simetrias.

Definição 2.1.1. *Uma* ***distribuição*** *$\mathcal{D}$ sobre uma variedade diferenciável M é uma* *aplicação que associa a cada ponto $p \in M$ um subespaço $\mathcal{D}_p \in T_pM$. Dizemos que a* ***dimensão de uma distribuição*** *é k se $dim(\mathcal{D}_p) = k$ para todo $p \in M$.*

Definição 2.1.2. *Uma distribuição k-dimensional $\mathcal{D}$ é dita* ***diferenciável num ponto*** *$p \in M$ quando, numa vizinhança U de $p \in M$, é possível obter k campos C^∞ L.I. tais que $\mathcal{D}$ é gerada por estes campos em U. Quando a distribuição $\mathcal{D}$ é diferenciável em todo ponto então dizemos que $\mathcal{D}$ é de classe C^∞*

Observe que, dado um campo de vetores X sobre uma variedade M, podemos sempre definir uma distribuição $\mathcal{D} =< X >$. Logo, a noção de uma distribuição generaliza o estudo dos campos de vetores. Precisamos, então, generalizar a noção de curvas integrais. Para isso, temos a seguinte

Definição 2.1.3. *Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição k-dimensional em uma variedade M. Uma subvariedade N^n de M^m é chamada* ***variedade integral*** *de $\mathcal{D}$ se $n \leq k$ e, para todo $p \in N$, temos que*

$$i_{*_p}(T_pN) \subset \mathcal{D}_p,$$

onde $i : N^n \longrightarrow M^m$ é a inclusão.

Diferente do caso unidimensional, subvariedades integrais maximais (isto é, de dimensão máxima) nem sempre existem mesmo localmente. Veremos, por exemplo, que em $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_{(x,y,z)}; \mathcal{D}_{(x,y,z)} = span\left\{\frac{\partial}{\partial x}|_{(x,y,z)} + y\frac{\partial}{\partial z}|_{(x,y,z)}, \frac{\partial}{\partial y}|_{(x,y,z)}\right\}$$

não admite subvariedade integral de dimensão máxima.

2.1.1 O Teorema de Frobenius

Considere uma distribuição k-dimensional $\mathcal{D}$ sobre uma variedade M. Dizemos que o campo de vetores X pertence a $\mathcal{D}$ se $X_p \in \mathcal{D}_p$ para todo p. Suponha que N é uma variedade integral de $\mathcal{D}$ e $i : N \longrightarrow M$ é a inclusão. Se X e Y são campos de vetores pertencentes a $\mathcal{D}$ então para todo $p \in N$ existem únicos vetores $\overline{X}_p, \overline{Y}_p \in T_pN$ tais que

$$X_p = i_{*_p}(\overline{X}_p) \text{ e } Y_p = i_{*_p}(\overline{Y}_p),$$

ou seja, X e $\overline{X}$ são i-relacionados e Y e $\overline{Y}$ também.

Como $[\overline{X}, \overline{Y}] \in N$ então, pela **Proposição** 1.2.5, $[X, Y] \in \mathcal{D}$. Consequentemente, se uma distribuição $\mathcal{D}$ admite uma variedade integral de dimensão máxima ($\mathcal{D}$ é completamente integrável), então $[X, Y] \in \mathcal{D}$ para todos $X, Y \in \mathcal{D}$. Esta condição de $[X, Y] \in \mathcal{D}$, para todos $X, Y \in \mathcal{D}$, é chamada **condição de Frobenius**.

Teorema 2.1.4. *(de Frobenius) Uma distribuição k-dimensional C^∞ $\mathcal{D}$ em uma variedade M é completamente integrável, ou seja, satisfaz a condição de Frobenius se, e somente se, para todo $p \in M$ existe um sistema de coordenadas φ_U com $\varphi^{-1}(p) = 0$ e $U = (-\epsilon, \epsilon) \times ... \times (-\epsilon, \epsilon)$ tal que, para cada $a_{k+1}, ..., a_n$ com $|a_i| < \epsilon$, o conjunto*

$$\{q \in \varphi_U(U); x_{k+1}(q) = a_{k+1}, ..., x_n(q) = a_n\}$$

é uma variedade integral de $\mathcal{D}$.

Como consequência temos que qualquer variedade integral de $\mathcal{D}$ conexa restrita a U está contida em um destes conjuntos.

Prova: A volta deste teorema decorre da observação anterior.

Agora, considere um sistema de coordenadas φ_U tal que $\varphi_U(0) = p$ e $\mathcal{D}_p = span\{\frac{\partial}{\partial \overline{x}_1}|_0, ..., \frac{\partial}{\partial \overline{x}_k}|_0\}$.

Seja $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ a projeção nas primeiras k-coordenadas. Então, $\pi_{*_0} : \mathcal{D}_0 \longrightarrow \mathbb{R}^k$ é um isomorfismo. Por continuidade, π_* é injetiva um $\mathcal{D}_r$ para r próximo de 0. Então, próximo de 0 podemos escolher únicos

$$X_1(r), ..., X_n(r) \in \mathcal{D}_r$$

tais que

$$\pi_{*_r}(X_i(r)) = \frac{\partial}{\partial \overline{x}_i}|_{\pi(r)},$$

para todo $i \in \{1, ..., k\}$.

Então os campos de vetores X_i em uma vizinhança de 0 em $\mathbb{R}^n$ e $\frac{\partial}{\partial \overline{x}_i}$ em uma vizinhança de 0 em $\mathbb{R}^k$ são π-relacionados. Então, pela **1.2.23**,

$$\pi_*([X_i, X_j]_r) = \left[\frac{\partial}{\partial \overline{x}_i}, \frac{\partial}{\partial \overline{x}_j}\right]_{\pi(r)} = 0.$$

Mas, por hipótese, $[X_i, X_j]_r \in \mathcal{D}_r$ e vimos que π_* é injetiva em $\mathcal{D}_r$. Então, $[X_i, X_j] = 0$.

Então, pelo **Teorema 1.2.15**, existe um sistema de coordenadas x tal que

$$X_i = \frac{\partial}{\partial \overline{x}_i}, \forall i \in \{1, ..., k\}.$$

O conjunto $\{q \in \varphi_U; x_{k+1}(q) = a_{k+1}, ..., x_n(q) = a_n\}$ são variedades integrais de $\mathcal{D}$ já que seus espaços tangentes são gerados por $\frac{\partial}{\partial \overline{x}_i}$ para $i \in \{1, ..., k\}$.

Seja $N \cup \varphi_U(U)$ uma variedade integral de $\mathcal{D}$ conexa restrita a $\varphi_U(U)$, com a inclusão $i : N \longrightarrow \varphi_U(U) \subset M$. Para qualquer vetor X_q tangente a N em q temos

$$d(x_l \circ i)(X_q) = X_q(x_l \circ i) = i_{*_q}(X_q)(x_l) = 0,$$

para todo $l \in \{k+1, ..., n\}$ já que $i_{*_q}(X_q) \in \mathcal{D}_q$ que é gerada por $\dfrac{\partial}{\partial \overline{x}_1}, ..., \dfrac{\partial}{\partial \overline{x}_k}$. Desse modo, $d(x_l \circ i)$ é constante, para todo $l \in \{k+1, ..., n\}$, na variedade conexa N.

■

O teorema de Frobenius, por estabelecer uma condição necessária e suficiente para uma distribuição ser integrável, motiva a seguinte

Definição 2.1.5. *Dizemos que uma distribuição $\mathcal{D}$ é* ***completamente integrável*** *se ela satisfaz a condição de Frobenius.*

Podemos enunciar outra versão para o teorema de Frobenius por meio de formas diferenciais a qual é mais conveniente em alguns casos. A saber

Teorema 2.1.6. *Uma distribuição $\mathcal{D} = Ann\{\omega_i\}$ é completamente integrável se, e somente se, existem 1-formas α_{ij} tais que*

$$d\omega_i = \sum_j \alpha_{ij} \wedge \omega_j,$$

para todo i.

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [36] e [47].

2.1.2 Simetrias de uma distribuição

De maneira geral, uma simetria em um espaço M pode ser descrita como uma autotransformação de M que preserva algum tipo de estrutura. Aqui, trataremos simetrias de uma distribuição sobre uma variedade. Começamos com a seguinte

Definição 2.1.7. *Um difeomorfismo $\varphi : M \longrightarrow M$ é chamado* ***simetria*** *(finita) de uma distribuição $\mathcal{D}$ se preserva esta distribuição, isto é, $\varphi_*(\mathcal{D}_p) = \mathcal{D}_{\varphi(p)}$ para todo $p \in M$.*

Definição 2.1.8. *Um campo de vetores X sobre uma variedade M é uma* ***simetria infinitesimal*** *de uma distribuição $\mathcal{D}$ se o seu fluxo $\{A_t\}$ consiste de simetrias finitas. O conjunto das simetrias infinitesimais de uma distribuição $\mathcal{D}$ é denotado por $Sym(\mathcal{D})$.*

É fácil ver que as simetrias finitas formam um grupo (geralmente, de dimensão infinita). Outro fato importante é que as simetrias infinitesimais formam uma álgebra de Lie (geralmente, de dimensão infinita). De fato, basta lembrar que a derivada de Lie possui a propriedade $\mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$ e, definindo o conjunto das simetrias de uma distribuição $\mathcal{D}$ por $Sym(\mathcal{D})$, verificamos diretamente que $(Sym(\mathcal{D}), [,])$ é uma álgebra de Lie.

Em geral, a definição que apresentamos de simetria infinitesimal não é muito conveniente para fazer cálculos. Mas podemos contornar esta dificuldade com o teorema a seguir:

Teorema 2.1.9. *Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição em M. São equivalentes as seguintes condições:*

(i) X é uma simetria infinitesimal de $\mathcal{D}$;

(ii) Se $X_1, ..., X_n$ são campos de vetores geradores de $\mathcal{D}$ então existem funções diferenciáveis μ_{ij} tais que $[X, X_i] = \sum_j \mu_{ij} X_j$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$;

(iii) Se $\omega_1, ..., \omega_m$ são 1-formas tais que $\mathcal{D} = Ann\{\omega_1, ..., \omega_m\}$, então existem funções diferenciáveis ν_{ij} tais que $\mathcal{L}_X(\omega_i) = \sum_j \nu_{ij}\omega_j$, para todo $i \in \{1, ..., m\}$.

Prova: $i \Rightarrow ii$. Seja X uma simetria de $\mathcal{D}$ e $\{A_t\}$ o seu fluxo. Como A_t preserva

a distribuição, para todo t, então o poushfoward do campo $X_i \in \mathcal{D}$ pertence a $\mathcal{D}$:

$$(A_t)_*(X_i) = \sum_j \alpha_{ij}(t) X_j,$$

onde $\alpha_{ij}(t)$ é uma família de funções diferenciáveis em M dependendo diferenciavelmente do parâmetro t. Diferenciando com respeito a t e avaliando em $t = 0$, obtemos

$$[X, X_i] = \sum_j \mu_{ij} X_j,$$

onde $\mu_{ij} := \frac{d\alpha_{ij}}{dt}|_{t=0}$.

$ii \Rightarrow iii$. Suponha que X satisfaz (ii). Pela equação (1.4), temos que

$$\mathcal{L}_X(\omega_j)(X_i) = X(\omega_j(X_i)) + \omega_j([X_i, X]) = -\omega_j([X, X_i]) = 0,$$

para todos $i \in \{1, ..., n\}$ e $j \in 1, ..., m$, já que $[X, X_i]$ é uma combinação de $X_1, ..., X_n$. Logo, $\mathcal{L}_X(\omega_j)$ é uma combinação de $\omega_1, ..., \omega_m$.

$iii \Rightarrow i$. Primeiro note que a igualdade $A^*_{t+s} = A^*_t \circ A^*_s$ implica que

$$\frac{d}{dt}|_{t=s} A^*_t(\omega) = A^*_s(\mathcal{L}_X(\omega)).$$

De fato,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|_{t=s}A_t^*(\omega) &= \lim_{t\to 0}\frac{A_{t+s}^*(\omega)-A_s^*(\omega)}{t}\\ &= A_s^*(\lim_{t\to 0}\frac{A_t^*(\omega)-A_0^*(\omega)}{t})\\ &= A_s^*(\mathcal{L}_X(\omega)).\end{aligned}$$

Agora, considere a $(m+1)$-forma dependendo do parâmetro t

$$\Omega_i(t) := A_t^*(\omega_i)\wedge\omega_1\wedge ...\wedge\omega_m.$$

Como $A_0^*(\omega_i)=\omega_i$, temos que $\Omega_i(0)=0$. Além disso,

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega_i}{dt}(t) &= A_t^*(\mathcal{L}_X(\omega_i))\wedge\omega_1\wedge ...\wedge\omega_m \qquad (2.1)\\ &= \sum_j A_t^*(\nu_{ij})\Omega_j.\end{aligned}$$

Logo, temos um problema de valor inicial composto por uma equação linear homogênea com valor inicial $\Omega_i(0)=0$, para todo $i\in\{1,...,m\}$. Logo, $\Omega_i(t)\equiv 0$. Isso mostra que $A_t^*(\omega_i)$ é uma combinação de $\omega_1,...,\omega_m$, para todo t e todo i. Logo, A_t é uma simetria de $\mathcal{D}$, para todo t, isto é, X é simetria de $\mathcal{D}$.

■

Definição 2.1.10. *Se X é uma simetria infinitesimal de $\mathcal{D}$ tal que $X\in\mathcal{D}$ então X é denominada* ***simetria característica*** *(ou trivial) e denotaremos o conjunto destas simetrias por $Char(\mathcal{D})$.*

Temos a seguinte

Proposição 2.1.11. *$Char(\mathcal{D})$ é um $C^\infty(M)$-módulo (em particular, um $\mathbb{R}$-espaço vetorial) e um ideal da álgebra $Sym(\mathcal{D})$.*

Prova: Se $X\in Char(\mathcal{D})$ e $\mathcal{D}=<X_1,...,X_k>$, temos que $X=\sum_i \alpha_i X_i$ e $\mathcal{L}_X X_i\in\mathcal{D}$. Portanto, para toda $f\in C^\infty(M)$, temos que

$$\mathcal{L}_{fX}X_i=[fX,X_i]=f\,[X,X_i]-X_i(f)X\in\mathcal{D}.$$

Analogamente, se $Y_1,Y_2\in Char(\mathcal{D})$, $Y_1+Y_2\in\mathcal{D}$. Logo, $Char(\mathcal{D})$ é um submódulo do $C^\infty(M)$-módulo dos campos pertencentes a $\mathcal{D}$.

Agora, se $X \in Char(\mathcal{D})$ e $Y \in Sym(\mathcal{D})$, então

$$\begin{aligned} [X,Y] &= \left[Y, \sum_i \alpha_i X_i\right] = \sum_i Y(\alpha_i)X_i + \sum_i \alpha_i \left[Y, X_i\right] \\ &= \sum_i Y(\alpha_i)X_i + \sum_i \alpha_i f_{ij} X_j, \end{aligned}$$

se $X = \sum_i \alpha_i X_i$ e $[Y, X_i] = \sum_j f_{ij} X_j$. Mas $[Y, X] \in \mathcal{D}$ e, por hipótese, X e Y são simetrias. Logo, $[X, Y]$ ainda é uma simetria e pertence a $\mathcal{D}$.

■

Outra propriedade importante é a seguinte

Proposição 2.1.12. *$Char(\mathcal{D})$ é uma distribuição completamente integrável.*

Prova: Consequência da proposição anterior e do teorema de Frobenius.

■

Definição 2.1.13. *A álgebra quociente*

$$sym(\mathcal{D}) := \frac{Sym(\mathcal{D})}{Char(\mathcal{D})}$$

é a álgebra das simetrias não características (ou próprias) de $\mathcal{D}$.

2.1.3 Integrais primeiras de uma distribuição

Definição 2.1.14. *Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição sobre M. Uma integral primeira de $\mathcal{D}$ é uma função $f \in C^\infty(M)$ tal que*

$$X(f) = 0,$$

para todo campo de vetores $X \in \mathcal{D}$.

Esta definição admite a seguinte interpretação geométrica:

Proposição 2.1.15. *Se $f \in C^\infty(M)$ é uma integral primeira de $\mathcal{D}$, então $\mathcal{D}_p \subset T_p\left(\Gamma_c(f)\right)$, para todo $p \in \Gamma_c(f) := \{a \in M : f(a) = c\}$. Em particular, $\Gamma_c(f)$ contem as variedades integrais que passam por seus pontos.*

A demonstração deste fato é direta.

Proposição 2.1.16. *Uma distribuição $\mathcal{D}$ k-dimensional sobre uma variedade M, com $dim(M) = n$, não pode admitir mais que $n - k$ integrais primeiras funcionalmente independentes.*

Prova: Se $\mathcal{D}$ é k-dimensional e $f_1, ..., f_{n-k}, g_1, ..., g_h$ são integrais primeiras funcionalmente independentes, então, definindo

$$D := Ann\{df_1, ..., df_{n-k}, dg_1, ..., dg_h\} \supseteq \mathcal{D},$$

temos que $k = dim(\mathcal{D}) \leq dim(D) = n - (n - k + h) = k - h$. Logo, $h = 0$.

■

Agora, temos a seguinte proposição

Proposição 2.1.17. *Se uma distribuição $\mathcal{D}$ k-dimensional sobre uma variedade M admite $dim(M) - k$ integrais primeiras funcionalmente independentes, então $\mathcal{D}$ é completamente integrável.*

Prova: Se $\mathcal{D}$ admite as integrais primeiras $f_1, ..., f_h \in C^\infty(M)$, com $h = dim(M) - k$, então

$$\begin{cases} f_1 = c_1 \\ \vdots \\ f_h = c_h \end{cases}$$

são variedades integrais maximais. Logo, $\mathcal{D}$ é completamente integrável.

■

As distribuições k-dimensionais completamente integráveis que admitem $dim(M) - k$ integrais primeiras funcionalmente independentes são um caso especial. De fato, se uma distribuição é completamente integrável não é garantido que existem $dim(M) - k$ integrais primeiras funcionalmente independentes. Por exemplo, se $dim(M) = n$ e $f_1, ..., f_{n-k} \in C^\infty(M)$ são integrais primeiras de $\mathcal{D}$ funcionalmente independentes, então, em cada vizinhança coordenada $\{x^i\}$, podemos considerar as equações

$$\begin{cases} f_1(x_1, ..., x_n) = y_1 \\ \vdots \\ f_{n-k}(x_1, ..., x_n) = y_{n-k} \end{cases}$$

e tentar resolvê-las com respeito a $x_1, ..., x_{n-k}$ (isso sempre é possível a menos de uma permutação de coordenadas)

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1, ..., y_{n-k}, x_{n-k+1}, ..., x_n) \\ \vdots \\ x_{n-k} = \varphi_{n-k}(y_1, ..., y_{n-k}, x_{n-k+1}, ..., x_n) \end{cases}$$

Assim, fixando $x_{n-k+1}, ..., x_n$, o sistema acima descreve uma subvariedade $\sum$ transversal às variedades integrais contidas em uma vizinhança de um ponto $p \in M$.

Assim, $\{y_1, ..., y_{n-k}\}$ parametrizam os pedaços de variedades de nível $\Gamma_y(f)$ que estão contidos em U. Mas pode acontecer que a mesma $\Gamma_y(f)$ tenha outras interseções com $\sum$.

Pelo teorema de Frobenius, temos que, pelo menos localmente, uma distribuição k-dimensional completamente integrável sobre uma variedade n-dimensional admite sempre n integrais primeiras funcionalmente independentes definidas em uma vizinhança de um ponto.

Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição sobre uma variedade M. Se $dim(\mathcal{D}) = k$ e $dim(M) = n$, podem existir, no máximo, $n - k$ simetrias de $\mathcal{D}$ transversais a $\mathcal{D}$. Isso motiva a seguinte

Definição 2.1.18. *Sejam $\mathcal{D}$ uma distribuição sobre uma variedade M, onde $dim(\mathcal{D}) = k$ e $dim(M) = n$. Uma álgebra de $n-k$ simetrias de $\mathcal{D}$ transversais a $\mathcal{D}$ se chama maximal.*

Na seção 4.3 provaremos um teorema, conhecido como *teorema de Bianchi-Lie*, que afirma que se uma distribuição $\mathcal{D}$ admite uma álgebra maximal e solúvel de simetrias transversais (veja seção 4.2) então $\mathcal{D}$ é integrável por quadraturas.

No último capítulo, trataremos as *estruturas solúveis*, que são estruturas mais gerais que as álgebras solúveis, e veremos um resultado mais geral que o teorema de Bianchi-Lie.

2.2 Espaços de jatos

Uma equação diferencial, do ponto de vista analítico, é uma relação funcional entre variáveis (x_i), funções $u^i(x)$ dessas variáveis e as derivadas u_i^j destas funções. Esse tipo de objeto matemático permite criar modelos matemáticos de fenômenos naturais ou de problemas de interesse teórico ou prático.

O tipo mais simples de uma equação diferencial (parcial) é uma equação de primeira ordem em uma função incógnita $u = u(x_1, ..., x_n)$ descrita por uma relação do tipo

$$F\left(x_1, ..., x_n, u, u_1, ..., u_n\right) = 0. \tag{2.2}$$

Precisamos dar uma descrição geométrica para este tipo de objeto para podermos fazer um estudo invariante.

Os espaços de jatos são o que permitem tratar geometricamente equações como 2.2. Nos espaços de jatos, de fato, podemos tratar as funções $\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ como funções coordenadas.

2.2.1 O primeiro espaço de jatos $J^1(M, n)$

Sejam M variedade diferenciável e $a \in M$. Começamos com a seguinte

Definição 2.2.1. *Duas subvariedades N_1 e N_2 de dimensão n são 1-tangentes (ou tangentes de primeira ordem) em $a \in N_1 \cap N_2$ se, e somente se*

$$T_aN_1 = T_aN_2.$$

Esta definição não depende da escolha de coordenadas em N_1 e N_2 numa vizinhança do ponto a. Esse fato nos permite introduzir uma relação de equivalência $\sim_a$ sobre o conjunto $\Gamma_a(M, n)$ de todas as subvariedades n-dimensionais de M que passam pelo ponto a dada por

$$N_1 \sim_a N_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} N_1 \text{ e } N_2 \text{ 1-tangentes em } a.$$

É imediato verificar que, de fato, $\sim_a$ estabelece uma relação de equivalência em $\Gamma_a(M, n)$. Dessa forma, temos a seguinte

Definição 2.2.2. *O primeiro espaço de jatos $J_a^1(M, n)$ das subvariedades n-dimensionais de M que passam pelo ponto a é o quociente $\Gamma_a(M, n)/_{\sim_a}$, isto é,*

$$J_a^1(M, n) = \left\{[N]_{\sim_a} : N \in \Gamma_a(M, n)\right\}.$$

Notação 2.2.3. *Para simplificar as notações, escreveremos $[N]_a$ em vez de $[N]_{\sim_a}$. Além disso, muitas vezes usa-se a notação $[N]_a^1$ para distinguir de $[N]_a^k \in J_a^k(M, n)$. De fato, mostraremos que é possível generalizar a construção de $J_a^1(M, n)$ e definir $J_a^k(M, n)$.*

Por definição, um elemento $\theta \in J_a^1(M, n)$ é uma classe de equivalência $\theta = [N]_a$ de subvariedades n-dimensionais, todas com o mesmo espaço tangente em a. Portanto, θ determina um ponto $a \in M$ e um espaço tangente $V_a \subset T_aM$, $dim(V_a) = n$.

Se $N \in \theta$, T_aN pode ser descrito em coordenadas locais como segue: considere $\{v_i\}$ coordenadas locais em uma vizinhança de $a \in M$. N pode ser descrita, pelo menos localmente, como um gráfico. De fato, seja $dim(M) = m+n$, então N, como subvariedade de M, admite uma descrição em coordenadas dada por

$$\begin{cases} v_{\beta_1} = v_{\beta_1}(v_{\alpha_1}, ..., v_{\alpha_n}) \\ \vdots \\ v_{\beta_m} = v_{\beta_m}(v_{\alpha_1}, ..., v_{\alpha_n}). \end{cases}$$

Definindo $x_i := v_{\alpha_i}$ e $u^i = v_{\beta_i}$, obtemos

$$\begin{cases} u^1 = u^1(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ u^m = u^m(x_1, ..., x_n). \end{cases} \tag{2.3}$$

Isso mostra que existem coordenadas locais $\{x_i, u^i\}$ em M tais que N é representada por um sistema da forma 2.3. Dessa forma, o espaço V_a tangente em a à variedade N pode ser descrito assim: se $f \in C^\infty(M)$, então, calculando sua restrição a N, obtemos $f(x, u(x))$ e, portanto, $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x\left(a\right), u\left(x\left(a\right)\right)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial u^j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial u^j}\right)(f)\left(x\left(a\right), u\left(x\left(a\right)\right)\right)$. Então,

$$\begin{aligned} V_a &= < \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_j \frac{\partial u^j}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial u^j}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} + \sum_j \frac{\partial u^j}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial u^j} > \\ &= < \frac{\partial}{\partial x_1} + p_1^j \frac{\partial}{\partial u^j}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} + p_n^j \frac{\partial}{\partial u^j} >, \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde $p_i^j := \frac{\partial u^j}{\partial x_i}$ e, na última igualdade, usamos a convenção de Einstein sobre a soma relativamente a índices repetidos.

Reciprocamente, se temos um subespaço $V_a \subset T_aM$ gerado por n vetores

$$\xi_1 = \sum_{h=1}^{n+m} A_1^h \frac{\partial}{\partial v_h}, ..., \xi_n = \sum_{h=1}^{n+m} A_n^h \frac{\partial}{\partial v_h},$$

então podemos sempre passar a outro sistema de geradores da forma

$$\begin{cases} \eta_1 = \dfrac{\partial}{\partial v_{\alpha_1}} + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} p_1^j \dfrac{\partial}{\partial v_{\beta_j}} \\ \eta_n = \dfrac{\partial}{\partial v_{\alpha_n}} + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} p_n^j \dfrac{\partial}{\partial v_{\beta_j}} \end{cases}$$

onde, definindo $x_i := v_{\alpha_i}$ e $u^j := v_{\beta_j}$, obtemos $\eta_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum p_n^j \frac{\partial}{\partial u^j}$, para todos $i \in \{1, ..., n\}$ e $j \in \{1, ..., m\}$. De fato, como os ξ_i's são L.I., podemos assumir que $A_1^{\alpha_1} \neq 0$ e definir $\eta_1 = \frac{1}{A_1^{\alpha_1}} = \frac{\partial}{\partial v_{\alpha_1}} + \sum B_1^k \frac{\partial}{\partial v_k}$. O mesmo pode ser feito para os demais ξ_i's.

Feito o procedimento acima, podemos sempre definir uma subvariedade N que, em $a \in M$, admite $V_a = T_aN$. De fato, nas coordenadas construidas $\{x_i, u^j\}$, podemos considerar

$$N = \left\{ u^j = \sum_{i=1}^{n} p_i^j x_i, j \in \{1, ..., m\} \right\}.$$

Estas considerações mostram que $\theta \in J_a^1(M, n)$ pode ser identificado com um par (a, V_a), onde $V_a \subset T_aM$ e $dim(V_a) = n$. Além disso, toda $N \in \Gamma_a(M, n)$ pode ser descrita localmente como gráfico de funções coordenadas $\{x_i, u^j\}$. Portanto, a partir de qualquer carta $\{v_h\}$, podemos construir uma carta especial $\{x_i, u^j\}$ chamada *separada*. A reunião de cartas separadas define um atlas separado de M. Obviamente, a estrutura diferenciável definida em M, por esse atlas, coincide com aquela inicial. Cada carta separada de uma vizinhança U de M define um conjunto de funções $\{x_i, u^j, p_i^j\}$ sobre o espaço $\bigcup_{a\in M} J_a^1(M,n)$. Estas funções são definidas como segue:

(1) $\{x_i, u^j, p_i^j\}$ sobre $\bigcup_{a\in M} J_a^1(M,n)$ são uma extensão das $\{x_i, u^j\}$ definidas sobre M. Se $\theta \in \bigcup_{a\in M} J_a^1(M,n)$, temos que $x_i(\theta) = x_i(a)$ e $u^j(\theta) = u^j(a)$.

(2) As funções p_i^j são definidas assim: se $\theta = (a, V_a)$ e V_a é o espaço tangente ao gráfico $\{u = u(x)\}$, no ponto a, então

$$p_i^j(\theta) = \frac{\partial u^j}{\partial x_i}(x(a)).$$

Notação 2.2.4. *Em virtude dessa definição, para denotar as coordenadas p_i^j, usa-se a notação u_i^j. Podemos chamar estas coordenadas **derivadas formais** das coordenadas u^j com respeito às coordenadas x_i.*

Definição 2.2.5. *Definimos $J^1(M,n)$, o **espaço dos 1-jatos de subvariedades n-dimensionais de** M, por*

$$J^1(M,n) = \bigcup_{a\in M} J_a^1(M,n).$$

Além disso, temos a seguinte projeção natural

$$\begin{aligned} \pi_{1,0} : J^1(M,n) &\longrightarrow M \\ \theta = (a, V_a) &\longmapsto a \end{aligned}$$

$\pi_{1,0}$ induz uma topologia natural sobre $J^1(M,n)$. Com esta topologia sobre $J^1(M,n)$, $\pi_{1,0}$ é contínua. Muitas vezes é conveniente introduzir a notação $J^0(M,n) = M$. Neste caso, se diz que M é o espaço dos 0-jatos de subvariedades.

Notação 2.2.6. *Quando não há a possibilidade de confusão, pode ser conveniente omitir índices nos cálculos e nas fórmulas. Assim, por exemplo, escrevemos $\{x, u, p\}$ em vez de $\{x_i, u^j, p_i^j\}$ ou $du = pdx$ em vez de $du^j = p_i^j dx_i$.*

Além disso, usaremos agora a notação $D_i := \dfrac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} p_i^j \dfrac{\partial}{\partial u^j}$.

Mostraremos que $J^1(M,n)$ e $J^1_a(M,n)$ são variedades diferenciáveis. Para esse fim, precisamos do lema seguinte que é útil também em computações com as funções $\{x_i, u^j, p^j_i\}$.

Lema 2.2.7. *Se $\theta = [N]_a$ então, sob uma mudança de coordenadas $\{\bar{x} = \bar{x}(x,u), \bar{u} = \bar{u}(x,u)\}$ em uma vizinhança do ponto $a = \pi_{1,0}(a)$, $\bar{p}(\theta)$ é determinado em função de $x(\theta), u(\theta)$ e $p(\theta)\}$ pela fórmula*

$$\begin{pmatrix} D_1(\bar{x}_1) & \dots & D_1(\bar{x}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n(\bar{x}_1) & \dots & D_n(\bar{x}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p}^j_1 \\ \vdots \\ \bar{p}^j_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1(\bar{u}^j) \\ \vdots \\ D_n(\bar{u}^j) \end{pmatrix},$$

onde $j \in \{1, ..., m\}$, aplicando-a no ponto θ sendo que, sobre N,

$$\begin{pmatrix} D_1(\bar{x}_1) & \dots & D_1(\bar{x}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n(\bar{x}_1) & \dots & D_n(\bar{x}_n) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Prova: Como, por hipótese, temos duas cartas separadas $\{x_i, u^j\}$ e $\{\bar{x}_i, \bar{u}^j\}$ em uma vizinhança de $a \in M$ então temos duas possíveis representações de N como gráfico

$$\begin{aligned} N &= \{u = f(x)\} \\ &= \{\bar{u} = \bar{f}(\bar{x})\}. \end{aligned}$$

Portanto, usando estas representações, podmeos estabelecer a relação existente entre $\bar{p}(\theta)$ e $p(\theta)$. De fato, $\bar{p}(\theta) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}(\theta))$, $p(\theta) = \frac{\partial f}{\partial x} x(\theta)$ e, tendo em vista que

$$d\bar{x}_i = \sum_\alpha \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_\alpha} dx_\alpha + \sum_\beta \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial u^\beta} du^\beta$$
$$d\bar{u}^j|_\theta = \sum_i \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_i} d\bar{x}_i,$$

obtemos

$$\begin{aligned} d\bar{u}^j|_\theta &= \sum_i p^j_i(\theta) d\bar{x}_i|_\theta \\ &= \sum_i p^j_i(\theta) \left[\sum_\alpha \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_\alpha}(x(\theta), u(\theta)) dx_\alpha|_\theta + \sum_\beta \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial u^\beta}(x(\theta), u(\theta)) du^\beta|_\theta \right] \\ &= \sum_i p^j_i(\theta) \left[\sum_\alpha \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_\alpha}(x(\theta), u(\theta)) + \sum_\beta \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial u^\beta}(x(\theta), u(\theta)) p^\beta_\alpha(\theta) \right] dx_\alpha|_\theta, \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, usamos o fato que $du^\beta|_\theta = \sum_\alpha p^\beta_\alpha(\theta) dx_\alpha|_\theta$.

Por outro lado, temos também que

$$\begin{aligned} d\bar{u}^j|_\theta &= \sum_\alpha \frac{\partial u^j}{\partial x_\alpha} dx_\alpha|_\theta + \sum_\beta \frac{\partial u^j}{\partial u_\beta} du^\beta|_\theta \\ &= \sum_\alpha \left[\frac{\partial u^j}{\partial x_\alpha} + \sum_\beta \frac{\partial u^j}{\partial u_\beta} p^\beta_\alpha(\theta) \right] dx_\alpha|_\theta. \end{aligned}$$

Logo, comparando as duas expressões calculadas para $d\bar{u}^j|_\theta$, obtemos o resultado.

■

Observe que $det\left(D_\alpha\left(\bar{x}_i\right)\right) \neq 0$ pois, sobre N, temos que

$$d\bar{x}_i|_N = \sum_\alpha D_\alpha(\bar{x}_i)|_N dx_\alpha|_N$$

e $\{\bar{x}_i, \bar{u}^j\}$, $\{x_i, u^j\}$ são dois sistemas de coordenadas possíveis sobre N.

Teorema 2.2.8. *Se M é equipado com um atlas separado, com coordenadas locais $\{x, u\}$, então $J^1(M,n)$ é uma variedade diferenciável com coordenadas locais $\{x, u, p\}$. Além disso, para todo $a \in M$, $J^1_a(M,n)$ também é uma variedade diferenciável com coordenadas locais $\{p\}$.*

Prova: As funções x, u, p determinam um atlas para $J^1(M,n)$ e as funções de transição são difeomorfismos. De fato, se $\{\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}\}$ são outras coordenadas locais em uma vizinhança comum, então, pela definição dessas coordenadas, as funções de transição devem ter a forma $\{\bar{x} = \bar{x}(x,u), \bar{u} = \bar{u}(x,u), \bar{p} = \bar{p}(x,u,p)\}$, onde $(x,u) \mapsto (\bar{x}, \bar{u})$ é um difeomorfismo (pois é uma transformação de coordenadas sobre M) e $\bar{p} = \bar{p}(x,u,v)$ são determinadas pelas fórmulas do lema anterior. Logo, com as cartas descritas pelas coordenadas locais $\{x, u, p\}$, $J^1(M,n)$ é uma variedade diferenciável. Analogamente, prova-se que, para todo $a \in M$, $J^1_a(M,n)$ é uma variedade diferenciável.

■

Observe que, com respeito a esta estrutura diferenciável para $J^1(M,n)$, $\pi_{1,0} : J^1(M,n) \longrightarrow M$ é uma submersão. Além disso, para todo $\theta \in J^1(M,n)$, existe uma vizinhança $U \subset M$, $a = \pi_{1,0}(\theta) \in U$ e um difeomorfismo

$$\pi^{-1}_{1,0}(U) \simeq U \times J^1_a(M,n).$$

De fato, se U é suficientemente pequeno, é possível mostrar que $\pi^{-1}_{1,0}(U)$ pode ser coberta com um número finito de vizinhanças coordenadas, cada uma equipada com coordenadas do tipo $\{x, u, p\}$. Dessa forma, cada ponto $\theta \in \pi_{1,0}^{-1}(U)$, com suas coordenadas $p(\theta)$, determina um único ponto $\theta' \in J_a^1(M,n)$ (com mesmas coordenadas $p(\theta)$). Pode-se mostrar que essa correspondência não depende das coordenadas e, portanto, é bem definida a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \pi_{1,0}^{-1}(U) & \longrightarrow & U \times J_a^1(M,n) \\ \theta & \longmapsto & (\pi_{1,0}(\theta), \theta') \end{array}$$

a qual, é possível mostrar, é um difeomorfismo. Temos, portanto, o seguinte

Teorema 2.2.9. *$\pi_{1,0} : J^1(M,n) \longrightarrow M$ é um fibrado diferenciavel.*

Se $F : M \longrightarrow M$ é um difeomorfismo, toda subvariedade n-dimensional $N \subset M$ é transformada em uma subvariedade $F(N) \subset M$. Se $a \in M$, F induz naturalmente uma aplicação $F^{(1)}$ entre $J_a^1(M,n)$ e $J_{F(a)}^1(M,n)$. De fato, se $\theta = [N]_a^1$, definimos $F^{(1)}(\theta) := [F(N)]_{F(a)}^1$. Esta aplicação determina um automorfismo $F^{(1)} : J^1(M,n) \longrightarrow J^1(M,n)$ do fibrado $\pi_{1,0} : J^1(M,n) \longrightarrow M$. F^1 é um difeomorfismo. O lema anterior fornece uma descrição em coordenadas de $F^{(1)}$.

2.2.2 Prolongamentos de subvariedades

Denote por $\Gamma(M,n)$ o espaço das subvariedades n-dimensionais de M. Seja $N \in \Gamma(M,n)$. Considerando, em todo ponto $a \in N$, o espaço T_aN, definimos a subvariedade

$$j_1(N) := \{(a, T_aN) : a \in N\} \subset J^1(M,n).$$

Esta subvariedade é chamada **primeiro prolongamento** de N.

É fácil ver que $\pi_{1,0}(j_1(N)) = N$ para todo $N \in \Gamma(M,n)$.

Em coordenadas separadas, se $N = \{(x, f(x)) : x \in U \subset \mathbb{R}^n\}$ então

$$j_1(N) = \{(x,u,p) : u = f(x), p = \frac{\partial f}{\partial x}(x), x \in U\}.$$

Portanto, os primeiros prolongamentos de subvariedades n-dimensionais de M são subvariedades n-dimensionais de $J^1(M,n)$ que também são gráficos da forma $\{(x,u,p) : u = u(x), p = p(x), x \in U \subset \mathbb{R}^n\}$. As coordenadas $\{x\}$ são coordenadas internas sobre essas variedades. Logo, se $F \in C^\infty(J^1(M,n))$, sua restrição a um primeiro prolongamento $j_1(N)$ tem a forma $G(x) = F(x, u(x), p(x))$. Portanto, o vetor $\xi_i \in T_\theta(j_1(N))$, interpretado como operador de derivação direcional ao longo da i-ésima curva coordenada que passa pelo ponto $\theta(x) = (x, u(x), p(x))$ é tal que

$$\xi_i(G) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_j p_i^j \frac{\partial}{\partial u^j} \right) |_{\theta(x)} + \sum_{s,j} \frac{\partial p_s^j}{\partial x_i}(x) \frac{\partial}{\partial p_s^j} |_{\theta(x)} \right] (F).$$

Logo, do ponto de vista de $J^1(M,n)$, $T_\theta(j_1(N)) \subset T_\theta(J^1(M,n))$ é gerado pelos vetores

$$\xi_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial f^j}{\partial x_i}(x) \frac{\partial}{\partial u^j} + \sum_{j,s} \frac{\partial^2 f^j}{\partial x_i \partial x_s}(x) \frac{\partial}{\partial p_j^s}.$$

2.2.3 Distribuição de Cartan

Usando a descrição de $T_\theta(j_1(N))$, dada no final da seção anterior, podemos deduzir que, ao variar de $N' \in [N]_a$, os espaços $T_\theta(j_1(N'))$ variam e descrevem um subespaço $\mathcal{C}^1_\theta \subset T_\theta\left(J^1(M,n)\right)$. Isto define uma distribuição $\mathcal{C}^1$ sobre $J^1(M,n)$ que é chamada **distribuição de Cartan**. Em coordenadas:

$$\mathcal{C}^1 =< \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_j p_i^j \frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial p_i^j} >= Ann\{du^j - \sum_i p_i^j dx_i\}.$$

Aplicando o teorema de Frobenius, é imediato verificar que

Proposição 2.2.10. *A distribuição de Cartan não é completamente integrável.*

A dimensão de $J^1(M,n)$ é $n + m + n \cdot m = n + m \cdot (n+1)$ e a dimensão de $\mathcal{C}^1$ é $n + m \cdot n$.

Estaremos interessados em estudar a forma das simetrias da distribuição de Cartan. Por enquanto, observemos que já conhecemos uma classe de simetrias finitas. De fato, vimos que cada difeomorfismo F determina um difeomorfismo $F^{(1)} : J^1(M,n) \longrightarrow J^{(1)}(M,n)$.

Pela natureza das coordenadas $\{x,u,p\}$, ́fácil verificar que este $F^{(1)}$ é uma simetria de $\mathcal{C}^1$. Portanto, se $N^1 \subset J^1(M,n)$ é uma variedade integral de $\mathcal{C}^1$ (evidentemente de dimensão menor que $dim\,(\mathcal{C}^1)$, porque $\mathcal{C}^1$ é não integrável), $F^{(1)}(N_1)$ ainda é uma variedade integral. Uma análoga consideração pode ser aplicada ao fluxo $\{A_t\}$ de um campo $X \in \mathcal{D}(M)$. Este fluxo determina um fluxo $\{A_t^{(1)}\}$ sobre $J^{(1)}(M,n)$. Este fluxo define um campo $X^{(1)}$ sobre $J^1(M,n)$ que será chamado **primeiro prolongamento** do campo X.

Como o fluxo do campo $X^{(1)}$ preserva $\mathcal{C}^1$, o campo $X^{(1)}$ é uma simetria infinitesimal de $\mathcal{C}^1$. Portanto, o fluxo $\{A_t^{(1)}\}$ de $X^{(1)}$ transforma variedades de $\mathcal{C}^1$ em variedades integrais.

Um exemplo importante de variedades integrais é aquele das variedades $N_1 = j_1(N)$, para alguma $N \in \Gamma(M,n)$. Estas são varieades n-dimensionais.

2.2.4 Simetrias infinitesimais da distribuição de Cartan

Nesta seção mostraremos a estrutura das simetrias infinitesimais de $\mathcal{C}^1$. Em particular, mostraremos como calcular o primeiro prolongamento $X^{(1)}$ a partir de X.

Considere $Y \in \mathcal{D}(J^1(M,n))$ e assuma que, em coordenadas locais $\{x,u,p\}$, Y tem a forma

$$Y = \sum_i \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_j \eta_j \frac{\partial}{\partial u^j} + \sum_{i,j} \mu_i^j \frac{\partial}{\partial p_i^j}.$$

Então, sendo que $\mathcal{C}^1 = Ann\{\omega_1 = du^1 - \sum_i p_i^1 dx_i, ..., \omega_1 = du^m - \sum_i p_i^m dx_i\}$, a condição que $\mathcal{L}_Y \mathcal{C}^1 \subseteq \mathcal{C}^1$ pode ser escrita na forma $\mathcal{L}_Y \omega_j = \sum_s \alpha_{js}\omega_s$, onde as α_{js} são funções sobre $J^1(M,n)$. Esta condição também pode ser escrita na forma

$$\mathcal{L}_Y \omega_j \equiv 0 \; mod\{\omega_1, ..., \omega_m\}.$$

Agora, pondo $\phi_j = Y \lrcorner \omega_j$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y \omega_j &= d(Y \lrcorner \omega_j) + Y \lrcorner d\omega_j \\
&= d\phi_j + \left(\sum_i \xi_i dp_i^j - \sum_i \mu_i^j dx_i \right) \\
&= \sum_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} dx_i + \sum_s \frac{\partial \phi_j}{\partial u_s} du^s + \sum_{i,s} \frac{\partial \phi_j}{\partial p_i^s} dp_i^s + \sum_i \xi_i dp_i^j - \sum_i \mu_i^j dx_i.
\end{aligned}$$

Mas, escrevendo $du^s = \omega_s + \sum_i p_i^s dx_i$, obtemos

$$\mathcal{L}_Y \omega_j = \sum_i \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} + \sum_s p_i^s \frac{\partial \phi_j}{\partial u^s} - \mu_i^j \right) dx_i + \sum_{i,s} \frac{\partial \phi_j}{\partial p_i^s} dp_i^s + \sum_i \xi dp_i^j + \sum_s \frac{\partial \phi_j}{\partial u_s} \omega_s.$$

Logo, $\mathcal{L}_Y \omega_j \equiv 0 \; mod\{\omega_1, ..., \omega_m\}$ se, e somente se:
$\mu_i^j = D_i(\phi_j)$, com $D_i := \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_s p_i^s \frac{\partial}{\partial u^s}$;
$\frac{\partial \phi_j}{\partial p_i^s} = 0$ se $s \neq j$ (quando $m > 1$);
$\frac{\partial \phi_j}{\partial p_i^j} = -\xi_i$ ($\forall j \in \{1, ..., m\}$ e, portanto, $-\xi_i = \frac{\partial \phi_j}{\partial p_i^j} = \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_i^\alpha}$, $i, \alpha \in \{1, ..., m\}$).

Dessa forma, quando $m > 1$, temos que as funções $\phi_j := Y \lrcorner \omega_j = \eta_j - \sum_s \xi_s p_s^j$ são lineares nas p_i^j's. Para este fim, basta observar que, pela (iii), as segundas derivadas com relação às p_i^j's são nulas. Portanto, no caso $m > 1$, $\xi_s = \xi_s(x,u)$. Mas também $\eta_j = \eta_j(x,u)$, quando $m > 1$. De fato, $\frac{\partial \phi_j}{\partial p_i^s} = 0$, se $s \neq j$, implica que ϕ_j só pode depender das p_i^j's. Mas $\frac{\partial \phi_j}{\partial p_i^j} = -\xi_i = \frac{\partial \eta_j}{\partial p_i^j} - \sum_s \frac{\xi_s}{p_i^j} p_s^j - \xi_i$. Logo, $\frac{\partial \eta_j}{\partial p_i^j} - \sum_s \frac{\xi_s}{p_i^j} p_s^j = 0$ e, sendo $\frac{\partial \xi_s}{\partial p_i^j} = 0$, obtemos que $\frac{\partial \eta_j}{\partial p_i^j} = 0$.

Estes cálculos mostram que, introduzindo os operadores

$$D_i := \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_s p_i^s \frac{\partial}{\partial u^s},$$

temos o seguinte

Teorema 2.2.11. *Se $m = 1$, as simetrias de $\mathcal{C}^1$ têm a forma local*

$$Y = -\sum_i \frac{\partial \phi}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \left(\phi - \sum_i p_i \frac{\partial \phi}{\partial p_i} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \sum_i D_i(\phi) \frac{\partial}{\partial p_i},$$

com $\phi := Y \lrcorner \omega$, $\omega = du - \sum_i p_i dx_i$.

Se $m > 1$, as simetrias têm a forma local

$$Y = X + \sum_{i,j} D_i(\phi_j) \frac{\partial}{\partial p_i^j},$$

com X campo em M da forma

$$X = \sum_i \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_j \eta_j \frac{\partial}{\partial u^j}$$

e $\phi = (\phi_1, ..., \phi_m)$ definida por meio das equações

$$\phi_j = Y \lrcorner \omega_j, \quad \omega_j = du^j - \sum_i p_i^j dx_i.$$

A função ϕ se chama função geradora da simetria.

No caso $m > 1$, as simetrias Y são completamente determinadas por um camp X em M. Portanto, neste caso, Y coincide sempre com o campo $X^{(1)}$ sobre $J^1(M, n)$ determinado pelo fluxo $\{A_t^{(1)}\}$ que prolonga a $J^1(M, n)$ o fluxo $\{A_t\}$ de X.

Temos, portanto, o seguinte

Corolário 2.2.12. *O primeiro prolongamento $X^{(1)}$ de um campo $X = \sum_i \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_j \eta_j \frac{\partial}{\partial u^j}$ sobre uma variedade M é*

$$X^{(1)} = X + \sum_{i,j} D_{x_i}(\phi_j) \frac{\partial}{\partial p_i^j}, \tag{2.5}$$

onde $\phi_j = X \lrcorner \omega_j$.

2.2.5 Espaços de jatos de seções de um fibrado

A teoria dos espaços de jatos de subvariedades é a mais geral e permite tratar aspectos globais que seriam mais complicados com outros tipos de espaços de jatos.

Um outro tipo de fibrado de jatos, que usaremos em seguida, é a dos fibrados de jatos de seções de um fibrado $\pi : M \longrightarrow B$ diferenciável com $dim(B) = n$ e $dim(M) = m + n$. Estes espaços são denotados por $J^1(\pi)$ e, por definição, este é o espaço das classes de equivalência de seções cujos gráficos têm o mesmo espaço tengente em algum ponto. Obviamente, com esta definição podemos repetir todas as construções anteriores. Além disso, é fundamental observar que, neste caso, as coordenadas separadas são simplesmente as coordenadas de uma trivialização local do fibrado $\pi : M \longrightarrow B$. Portanto, podemos pensar que as $\{x_1, ..., x_n\}$ são coordenadas em uma vizinhança U de um ponto $b \in B$ e as coordenadas $\{u^1, ..., u^m\}$ são coordenadas sobre as fibras, contidas em $\pi^{-1}(U)$, em uma vizinhança $\widetilde{U} \subset \pi^{-1}(U)$ de um ponto $\bar{b}$ tal que $\pi(\bar{b}) = b$. Com estas coordenadas, as seções têm gráficos da forma $\{(x, u) : u = f(x), x \in U\} \subset \widetilde{U}$.

Como $J^1(\pi)$ é construído considerando apenas as subvariedades n-dimensionais que são gráficos de seções, temos uma importante diferença com $J^1(M, n)$. De fato, um difeomorfismo nem sempre transforma uma seção em outra seção. Portanto, apenas localmente (e, possivelmente, excluindo alguns pontos), podemos definir $F^{(1)}$.

A distribuição de Cartan é definida do mesmo modo que em $J^1(M, n)$ e tem a mesma forma coordenada. Além disso, os cálculos sobre as simetrias ainda ficam válidos.

2.2.6 Equações diferenciais, soluções e simetrias

Um sistema de h equações diferenciais em n variáveis independentes $\{x_i\}$ em m funções dependentes de primeira ordem

$$F^1(x_i, u^j(x), \frac{\partial u^j}{\partial x_i}) = 0, ..., F^h(x_i, u^j(x), \frac{\partial u^j}{\partial x_i}) = 0 \tag{2.6}$$

Quando as funções $F^1, ..., F^h$ satisfazem hipóteses necessárias de regularidade, pode-se tratar 2.6 como uma subvariedade $\mathcal{E}$ $(n + m + m \cdot n - h)$-dimensional de um espaço de jatos $J^1(E, n)$ com coordenadas $\{x, u, p\}$.

Denotaremos com $\mathcal{C}^1_{\mathcal{E}}$ a distribuição de Cartan induzida em $\mathcal{E}$ por $\mathcal{C}^1$, isto é, a distribuição tal que $(\mathcal{C}^1_{\mathcal{E}})_\theta = \mathcal{C}^1_\theta \cap T_\theta\mathcal{E}$, para todo $\theta \in \mathcal{E}$.

As soluções de 2.6 são subvariedades n-dimensionais de E que, portanto, são localmente da forma $N = \{(x, u) : u = f(x)\}$ e tais que $j_1(N) \subset \mathcal{E}$. Como estes prolongamentos $j_1(N)$ são variedades integrais de $\mathcal{C}^1$, então a condição $j_1(N) \subset \mathcal{E}$ implica que $j_1(N)$ é também variedade integral de $\mathcal{C}^1_{\mathcal{E}}$. Este é o significado geométrico das soluções de um sistema do tipo 2.6.

As simetrias infinitesimais de 2.6 são campos vetoriais em $\mathcal{E}$ que preservam $\mathcal{C}^1_{\mathcal{E}}$. Dessa forma, as simetrias podem ser de dois tipos principais: *externas* (ou de Lie) e *internas* (ou de Cartan). As simetrias externas são aquelas que se obtem de simetrias de $\mathcal{C}^1$ tangentes a $\mathcal{E}$. Nesse caso, a restrição a $\mathcal{E}$ de uma tal simetria é o que se chama **simetria externa**. As **simetrias internas** são simetrias que não se obtem restringindo a $\mathcal{E}$ uma simetria de $\mathcal{C}^1$ tangente a $\mathcal{E}$.

No caso em que $m > 1$, sabemos que todas as simetrias externas são da forma $X^{(1)}$ e, portanto, se obtem prolongando um campo $X \in \mathcal{D}(E)$.

Esta interpretação de 2.6 vale, em particular, quando as subvariedades que queremos descrever por meio de 2.6 (isto é, aquelas que são caracterizadas pela condição 2.6) são seções de um fibrado $\pi : E \longrightarrow B$. Neste caso, $\mathcal{E} \subset J^1(\pi)$.

2.2.7 Equação das geodésicas

Se (M, g) é uma variedade pseudo-Riemanniana n-dimensional, uma curva $\gamma(t)$ que, em coordenadas locais $\{x_i\}$, tem a carta $\gamma(t) = (x_i(t))$ é uma geodésica se suas componentes satisfazem as equações diferenciais

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2}(t) + \sum_{h,k=1}^{n} \Gamma^i_{hk} \frac{dx_h}{dt}(t) \frac{dx_k}{dt}(t) \qquad i \in \{1, ..., n\} \tag{2.7}$$

onde

$$\Gamma^i_{hk} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} g^{is} \left(\frac{\partial g_{hs}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x_h} - \frac{\partial g_{hk}}{\partial x_s} \right)$$

são os coeficientes de Christoffel da conexão Riemanniana de Levi-Civita. As funções g^{ij} são os elementos da matriz $(g_{ij})^{-1}$. As equações em 2.7 se chamam equações das geodésicas (v. [18, 37] para maiores detalhes).

Uma curva $\gamma(t) = (x_i(t))$ sobre M definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ pode ser identificada com uma seção local $t \longmapsto (t, x_i(t))$ do fibrado trivial $\pi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow \mathbb{R}$. As geodésicas são seções particulares deste fibrado.

Sendo 2.7 um sistema de equações de segunda ordem, podemos escrevê-lo como uma subvariedade do espaço $J^2(\pi)$ dos 2-jatos de seções do fibrado π. Esse fibrado pode ser definido como no caso de$J^1(\pi_1)$, sendo $\pi_1 : J^1(\pi_1) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Se, neste momento, denotarmos com $\{t, x_i, \dot{x}_i\}$ as coordenadas naturais em $J^1(\pi_1)$ e com $\{t, x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i\}$ as coordenadas naturais em $J^2(\pi_2) = J^1(\pi_1)$. Com essas coordenadas, 2.7 pode ser escrita como a subvariedade $\mathcal{E} \subset J^1(\pi_1)$, localmente descrita pelo sistema

$$\mathcal{E} := \{(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) : \ddot{x}_i + \Gamma^i_{hk} \dot{x}_h \dot{x}_k = 0\}. \tag{2.8}$$

Logo, uma seção de π_1, localmente descrita como $t \longmapsto (t, x_i(t))$, é uma solução de 2.6 se o seu segundo prolongamento $t \longmapsto (t, x_i(t), \dot{x}_i(t), \ddot{x}(t))$ está contido em $\mathcal{E}$.

Na próxima seção descrevremos as equações 2.6 como equações variacionais usando o formalismo de Poincaré-Cartan. Para esse fim, não será necessário citar o fibrado $J^2(\pi)$.

2.3 Formalismo de Cartan para o cálculo variacional

Nesta seção daremos uma formulação invariante das equações de Euler-Lagrange para o problema variacional com extremos fixos em uma variável independente. Para esse fim, usaremos o formalismo de Poincaré-Cartan que é, particularmente, conveniente para os nossos objetivos posteriores. Entretanto, para tornar mais claras as diferenças entre esta abordagem invariante e a clássica, começamos deduzindo as equações de Euler-Lagrange por meio de uma abordagem elementar baseada no uso de coordenadas locais. Para mais detalhes a respeito do formalismo de Poincaré-Cartan para o cálculo variacional de maneira mais geral, vide [30].

Nesta seção, π denotará um fibrado

$$\pi : E \longrightarrow I$$

onde E é uma variedade $(n+1)$-dimensional e $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Com t denotaremos uma coordenada em I e $\{x_i\}$ denotarão coordenadas nas fibras de π. As coordenadas naturais em $J^1(\pi)$ serão denotadas por $\{t, x_i, v_i\}$. Uma função $L \in C^\infty(J^1(\pi))$ será chamada **Lagrangeana**.

Seja ω forma de volume sobre I. Podemos associar a cada lagrangeana L um funcional sobre o espaço $\Gamma(\pi)$ das seções do fibrado π

$$A_s(I) = \int_i j_1(s)^*(L)\omega.$$

Uma **variação** s_τ de uma seção s, com extremidades fixas, é uma família a 1-parâmetro τ de seções de π tal que $s = s_0$ e s_t coincide com s nos extremos do intervalo de definição de s.

Uma seção s é L-**crítica** (ou L-estacionária) se $\frac{d}{d\tau}|_{\tau=0} A_L[s_\tau] = 0$, para toda variação s_τ de s com extremidades fixas.

As equações de Euler-Lagrange representam condições necessárias, e suficientes, para seções L-críticas.

Se $s \in \Gamma(\pi)$, $s : [a,b] \longrightarrow E$, pode ser descrita completamente nas coordenadas locais $\{x_i\}$, então, escolhendo $\omega = dt$, temos que

$$A_L[s] := \int_a^b L(t, x(t), v(t))dt.$$

Nesse caso, uma variação de s, para valores pequenos de τ, pode ser escrita em coordenadas na forma

$$s_\tau(t) = (t, x_i(t) + \tau h_i(t)),$$

com $h_i(a) = h_i(b) = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}|_{\tau=0} A_L[s_\tau] &= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x_i}(t, x(t), v(t)) h_i(t) + \frac{\partial L}{\partial v_i}(t, x(t), v(t)) \dot{h}(t) \right] dt \\
&= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x_i}(t, x(t), v(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i}(t, x(t), v(t)) \right] h_i(t) dt + \frac{\partial L}{\partial v_i}(t, x(t), v(t)) h_i(t)|_a^b \\
&= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x_i}(t, x(t), v(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i}(t, x(t), v(t)) \right] h_i(t) dt \qquad \forall h(t).
\end{aligned}$$

Logo, $s(t, x(t))$ é L-crítica se, e somente se, satisfaz as equações

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(t, x(t), v(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i}(t, x(t), v(t)) = 0, \qquad \forall i \in \{1, ..., n\}. \tag{2.9}$$

Estas são as **equações de Euler-Lagrange**.

Em $J^1(\pi)$, com coordenadas (t, x, v) e usando $D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, as equações 2.9 podem ser escritas na forma

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - D_t \frac{\partial L}{\partial v_i} = 0, \qquad \forall i \in \{1, ..., n\}. \tag{2.10}$$

As equações das geodésicas sobre uma variedade Riemanniana (M, g) são equações de Euler-Lagrange sobre um fibrado $\pi : I \times M \longrightarrow I$ e com função lagrangeana $L = \frac{1}{2} g_{ij} v_i v_j$.

2.3.1 Forma de Cartan das equações de Euler-Lagrange

O formalismo de Poincaré-Cartan é baseado em uma 1-forma Θ chamada forma de Poincaré-Cartan. Para definir esta forma, precisamos de algumas construções preliminares. Começamos fixando as notações principais.

Relembramos que $\pi : E \longrightarrow I$ é um fibrado onde $I \subset \mathbb{R}$. Também, estabelecemos as seguintes notações:

- $V(\pi) = Kern\,(\pi_*)$. Analogamente, $V_p(\pi) = Kern\left(\pi_{*_p}\right), \forall p \in J^1(\pi)$;
- $V(\pi_{1,0}) = Kern\,(\pi_{1,0_*})$, onde $\pi_{1,0} : J^1(\pi) \longrightarrow I$. Analogamente, $V_a(\pi_{1,0}) = Kern\left(\pi_{1,0_{*_a}}\right), \forall a \in J^1(\pi)$;
- $V^*(\pi) = (V\,(\pi))^*$; $V^*(\pi_{1,0}) = (V\,(\pi_{1,0}))^*$; $V^*(\pi_1) = (V\,(\pi_1))^*$.

Temos a seguinte

Proposição 2.3.1. *Existe uma única 1-forma ω_1 em $J^1(\pi)$ tal que:*

(i) $j_1(\gamma)^* w_1 = 0$, para toda $s \in \Gamma(\pi)$;

(ii) $w_1(\xi) = (\pi_{1,0})_*(\xi)$*, para todo* $\xi \in V(\pi_1)$.

Prova: (i)*Unicidade.* Suponha que ω_1 e $\overline{\omega_1}$ são duas 1-formas satisfazendo as condições acima. Se $\xi \in T_p(J^1(\pi))$, então $\xi - j_1(s)_*\pi_{1_*}(\xi) \in V(\pi)$, para toda seção $s \in \Gamma(\pi)$. Logo, utilizando as hipóteses i) e ii),

$$\begin{aligned}(\omega_1 - \overline{\omega_1})(\xi) &= (\omega_1 - \overline{\omega_1})(\xi - j_1(s)_*\pi_{1_*}(\xi)) + (\omega_1 - \overline{\omega_1})(j_1(s)_*\pi_{1_*}(\xi)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo, $\omega_1 = \overline{\omega_1}$.

(ii)*Existência.* Seja $p \in j_1(\pi)$ tal que $p = j_1(s)(t)$, $s \in \Gamma(\pi)$. Defina ω_1 por

$$\omega_1(\xi) = \pi_{1,0_*}(\xi) - j_1(s)_*\pi_{1_*}(\xi), \forall \xi \in T_pJ^1(\pi). \tag{2.11}$$

Dessa forma, temos que $\omega_1(\xi) = \pi_{1,0_*}(\xi)$, para todo $\xi \in V(\pi)$, e $\omega_1(j_1(s)_*(\nu)) = 0$, para toda seção s de π já que

$$\begin{aligned}\omega_1(j_1(s)_*(\nu)) &= \pi_{1,0_*}(j_1(s)_*(\nu)) - j_1(s)_*\pi_{1_*}(j_1(s)_*(\nu)) \\ &= \pi_{1,0_*}(j_1(s)_*(\nu)) - \pi_{1,0_*}(j_1(s)_*(\nu)) \\ &= 0,\end{aligned}$$

usando, na segunda igualdade, o fato que $\pi_{1_*} \circ j_1(s)_* = id$.

∎

Sejam (t, x, v) coordenadas locais para $J^1(\pi)$, podemos descrever ω_1 em coordenadas por

$$\omega_1 = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes (dx_i - v^i dt). \tag{2.12}$$

De fato, sejam $p = j_1(s)(t) \in J^1(\pi)$ e $X_p = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial}{\partial v_i} \in T_pJ^1(\pi)$, temos:

$$\begin{aligned}\omega_p(X_p) &= \tau\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} - \sigma_*(\tau\frac{\partial}{\partial t}) \\ &= \tau\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} - \tau(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}) \\ &= \sum_{i=1}^n (\xi_i - \tau v_i(p))\frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes (dx_i - v_i(p)dt)_p(X_p).\end{aligned}$$

Agora, observe que cada fibra $\pi_{1,0}^{-1}(a)$ é um espaço afim associado ao espaço vetorial $V_a(\pi)$. De fato, se $p_1, p_2 \in \pi_{1,0}^{-1}(a)$ são tais que $p_i = j_1(s_i(t))$, a estrutura de espaço afim pode ser definida por meio da aplicação $\varphi : \pi_{1,0}^{-1}(a) \times \pi_{1,0}^{-1}(a) \longrightarrow V_a(\pi)$ dada por $\varphi(p_1, p_2) = (s_{1_*} - s_{2_*})(\frac{\partial}{\partial t})|_{\pi(a)} \in V_a(\pi)$. Esta estrutura de espaço afim permite identificar com $V_a(\pi)$ cada espaço tangente a $\pi_{1,0}^{-1}(a)$. Portanto, cada elemento $\alpha \in V^*(\pi_{1,0})$ pode ser identificado com um elemento de $Hom(V(\pi), \mathbb{R})$. Por outro lado, se $p = j_1(s)(t_0)$ e $\dot{s}(t_0)$ denota o vetor tangente ao gráfico da seção s em t_0, então podemos considerar uma aplicação $\psi : V^*(\pi_{1,0}) \longrightarrow Hom(V(\pi), TI)$ tal que $\psi(\alpha_p) = \pi_*(\dot{s}(t_0)) \otimes \alpha_p \in Hom(V_p(\pi), T_{\pi_1(p)}I)$, para todo $p \in J^1(\pi)$. Em coordenadas, $\psi(dv_i) = \frac{\partial}{\partial t} \otimes du_i$.

Agora, definimos uma 1-forma θ sobre $J^1(\pi)$ por

$$\theta_{j_1(\gamma)(t)}(\xi) = L(j_1(\gamma)(t)).\pi_{1_*}(\xi) + \mu_L(j_1(\gamma)(t))(\omega_{1_p}(\xi)),$$

onde

$$\begin{array}{rcll} \mu_L : J^1(\pi) & \longrightarrow & Hom(V(E), TI) & \quad (Transformada\ de\ Legendre) \\ \mu_L(p) & := & \psi(d^V L(p)). & \end{array}$$

Em coordenadas, $\mu_L(t, x, v) = (\dfrac{\partial L}{\partial v_i} dx_i) \otimes \dfrac{\partial}{\partial t}$ e

$$\theta = \sum_i [Ldt + \frac{\partial L}{\partial v_i}(dx_i - v_i dt)] \otimes \frac{\partial}{\partial t}.$$

Enfim, podemos considerar a 1-forma Θ sobre $J^1(\pi)$ por

$$\Theta = \theta \,\overline{\wedge}\, \omega,$$

onde ω é uma forma de volume em I e $\overline{\wedge}$ estabelece um produto entre h-formas sobre $J^1(\pi)$, com valores em TI, e r-formas sobre $J^1(\pi)$ fornecendo como resultado $(h + r - 1)$-formas sobre $J^1(\pi)$ da seguinte maneira: se $\alpha = \xi \otimes \rho$, então $\alpha \,\overline{\wedge}\, \beta = \rho \wedge \xi \lrcorner \beta$.

Θ se chama forma de Poincaré-Cartan (ou apenas de Cartan) que, em coordenadas, é expressa da seguinte maneira: se $\omega = dt$,

$$\Theta = Ldt + \sum_i \frac{\partial L}{\partial v_i}(dx_i - v_i dt)$$

É fácil ver que as formas Ldt e Θ definem o mesmo funcional $A_L[s]$:

$$A_L[s] = \int_A j_1(s)^* \mathcal{L} = \int_A j_1(s)^* \Theta.$$

Isso também seria verdade para qualquer 1-forma do tipo $\widetilde{\Theta} = Ldt + \sum_i \alpha_i(dx_i - v_i dt)$. Mas a escolha da forma de poincaré-Cartan leva à seguinte caracterização invariante das equações de Euler-Lagrange:

Teorema 2.3.2. *Uma seção $s \in \Gamma(\pi)$ é L-crítica se, e somente se,*

$$j_1(s)^*(X \lrcorner d\Theta) = 0,$$

para todo $X \in \mathcal{D}(J^1(\pi))$.

Prova: Uma variação $s_\tau(t) = s(t)$ pode ser construída por meio do fluxo $\{\mathcal{A}_\tau\}$ de um campo vertical X que deixa fixados os extremais $s(a)$ e $s(b)$. O fato de X ser vertical permite que a variação $\mathcal{A}_\tau \circ s$ seja do tipo $s_\tau(t)$. Se τ varia em uma vizinhança suficientemente pequena de 0 então as seções $j_1(s_\tau(t))$ fornecem uma variação da seção $j_1(s)$. Além disso, $\{A_\tau\}$ induz um fluxo local $\{A_\tau^{(1)}\}$ de um campo $X^{(1)}$ em $J_1(\pi)$. Este $X^{(1)}$ é o primeiro prolongamento de X. Este campo é tal que $(\pi_{1,0})(X^{(1)}) = X$. Além disso, $j_1(s_\tau) = A_\tau^{(1)} \circ j_1(s)$ e, portanto, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau} A_L[s_\tau]|_{\tau=0} &= \frac{d}{d\tau}\int_I j_1(s_\tau)^*\Theta|_{\tau=0} = \int_I \frac{d}{d\tau} j_1(s_\tau)^*\Theta|_{\tau=0} \\
&= \int_I \frac{d}{d\tau}(A_\tau^{(1)} \circ j_1(s))^*\Theta|_{\tau=0} = \int_I \frac{d}{d\tau}\left(j_1(s)^*\left(A_\tau^{(1)*}\Theta\right)\right)|_{\tau=0} \\
&= \int_I j_1(s)^*\left(\mathcal{L}_{X^{(1)}}\Theta\right) = \int_I j_1(s)^*(X^{(1)} \lrcorner d\Theta + d(X^{(1)} \lrcorner \Theta)) \\
&= \int_I j_1(s)^*(X^{(1)} \lrcorner d\Theta) + \int_I d(j_1(s)^*(X^{(1)} \lrcorner \Theta)).
\end{aligned}$$

Agora, usando o teorema de Stokes e lembrando que $X|_{\partial I} = 0$ e, portanto, $X^{(1)}|_{\partial I} = 0$, obtem-se que

$$\frac{d}{d\tau} A_L[s_\tau]|_{\tau=0} = \int_I j_1(s)^*(X^{(1)} \lrcorner d\Theta) + \int_{\partial I} j_1(s)^*(X^{(1)} \lrcorner \Theta) = \int_I j_1(s)^*(X^{(1)} \lrcorner d\Theta).$$

Isso significa que s é L-crítica se, e somente se,

$$j_1(s)^*(X^{(1)} \lrcorner d\Theta) = 0, \forall X \in V(\pi).$$

Entretanto, um campo sobre $J^1(\pi)$ pode ser projetado, via $\pi_{1,0}$, em um campo nulo ou que tem, pelo menos, uma parte horizontal ou vertical (com respeito a π) não nula. Vamos analisar as situações possíveis para $j_1(s)^*(Y \lrcorner d\Theta)$, quando $Y \in \mathcal{D}(J_1(\pi))$.

(a) Se $Y \in \mathcal{D}(J^1(\pi))$ é tal que $\pi_{1,0_*}(Y) = 0$, podemos provar usando coordenadas ou um cálculo invariante (v. [50]) que

$$\tau^*(i_Y d\Theta) = tr[\tau^*(\mathcal{L}_Y(\mu_L) \circ \omega_1)]\Omega,$$

para toda seção $\tau \in \Gamma(\pi_1)$.

Em particular, se $\tau = j_1(s)$ obtem-se

$$j_1(s)(i_Y d\Theta) = 0$$

pois $j_1(s)^*\omega_1 = 0$.

(b) Se $Y \in \mathcal{D}(J^1(\pi))$ é tal que $\pi_{1,0_*}(Y) = X$ com $\pi_*(X) = 0$, então Y é uma combinação de campos da forma $X_i^{(1)}$, com $X_i \in V(\pi)$.

(c) Se $Y \in \mathcal{D}(J^1(\pi))$ é tal que $\pi_{1_*}(Y) \neq 0$, então

$$j_1(s)^*(Y \lrcorner d\Theta) = 0.$$

Unindo o fato inicial da demonstração às observações $(a), (b)$ e (c) obtem-se o resultado desejado.

■

Pelo Teorema 2.3.2, podemos concluir que os 1-jatos de seções L-críticas (isto é, as soluções das equações de Euler-Lagrange) são variedades integrais da distribuição que anula o sistema de formas

$$\mathcal{I}_L = \left\{ Y \lrcorner d\Theta : Y \in \mathcal{D}\left(J^1\left(\pi\right)\right) \right\}.$$

Usando as coordenadas (t, x, v), esta distribuição é, portanto, a mesma gerada pelo campo

$$X_L = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i} + F_i(t, x, v) \frac{\partial}{\partial v_i} \tag{2.13}$$

cujo fluxo é dado pelas equações de Euler-Lagrange escritas na forma

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = F_i(t, x, v). \end{cases}$$

Se L satisfaz a condição de regularidade

$$det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_i v_j}\right) \neq 0,$$

é sempre possível escrever as equações do fluxo do campo 2.13 nesta forma.

As equações de Euler-Lagrange são, portanto, a forma local da condição

$$j_1(s)^*(X \lrcorner d\Theta) = 0, \qquad \forall X \in \mathcal{D}(J^1(\pi)).$$

2.4 Simetrias Variacionais e Teorema de Nöether

Por meio da carcterização das seções L-críticas, dada pelo **Teorema 2.3.2**, será possível demonstrar numa forma simples o teorema de Nöether que estabelece uma relação entre simetrias variacionais e integrais primeiras.

Definição 2.4.1. *Um campo Y sobre $\mathcal{D}J^1(\pi)$ é uma simetria variacional para uma lagrangeana L se*

$$\mathcal{L}_Y\Theta = df, \qquad f \in C^\infty\left(J^1(\pi)\right).$$

Em particular, o campo Y é chamado simetria variacional do tipo Lie se $Y = X^{(1)}$ com $X \in \mathcal{D}(E)$. Caso contrário, Y é chamado simetria variacional de Cartan.

Uma simetria variacional preserva a distribuição que anula o sistema de formas $\mathcal{I}_L$. De fato, temos a seguinte

Proposição 2.4.2. *Se $Y \in \mathcal{D}(J^1(\pi))$ é uma simetria variacional, entaão Y é uma simetria das equações de Euler-Lagrange.*

Prova: Se Y é simetria variacional, $\mathcal{L}_Y\Theta = df$ e, portanto, $\mathcal{L}_Y(X \lrcorner d\Theta) = [Y,X]\lrcorner d\Theta$. Logo, Y é simetria da distribuição $Ann(\mathcal{I}_L)$ e, portanto, é simetria das equações de Euler-Lagrange.

■

Em virtude da propriedade $[\mathcal{L}_{Y^1}, \mathcal{L}_{Y^2}] = \mathcal{L}_{[Y^1,Y^2]}$, verifica-se facilmente que o colchete de Lie de duas simetrias variacionais é uma simetria variacional e que, portanto, as simetrias variacionais formam uma álgebra com respeito a este produto de Lie.

O teorema de Nöether é o seguinte

Teorema 2.4.3. *(de Nöether) Se Y é uma simetria variacional, tal que $\mathcal{L}_Y\Theta = df, f \in C^\infty(J^1(\pi))$, então*

$$F = f - Y\lrcorner\Theta$$

é uma integral primeira das equações de Euler-Lagrange. Além disso, F é também uma integral primeira para o campo Y, ou seja, $Y(F) = 0$.

Prova: Vimos, ao final da seção anterior, que se s é uma solução do problema variacional então $j_1(s)^*(i_X X^{(1)}\lrcorner d\Theta) = 0$ para todo $X \in \mathcal{D}(J^1(\pi))$. Dessa forma, se $X \in \mathcal{D}J^0(\pi)$ é uma simetria de Nöether, usando a fórmula de Cartan, obtemos

$$\begin{aligned}
0 = j_1(s)^*(X^{(1)}\lrcorner d\Theta) &= j_1(s)^*\left(\mathcal{L}_{X^{(1)}}\Theta - d\left(X^{(1)}\lrcorner\Theta\right)\right) \\
&= j_1(s)^*\left(df - d\left(X^{(1)}\lrcorner\Theta\right)\right) \\
&= j_1(s)^* \circ d(f - X^{(1)}\lrcorner\Theta) \\
&= d[j_1(s)^*(f - X^{(1)}\lrcorner\Theta)]
\end{aligned}$$

o que significa que $F := X^{(1)} \lrcorner \Theta - f$ é uma integral primeira para o fluxo geodésico. Mais ainda, pela própria definição da F, segue-se que $X^{(1)}(F) = X^{(1)} \lrcorner dF = 0$. De fato, usando a fórmula de Cartan, obtemos

$$\begin{aligned}
X^{(1)} \lrcorner dF &= X^{(1)} \lrcorner (d\left(X^{(1)} \lrcorner \Theta\right) - df) \\
&= X^{(1)} \lrcorner (\mathcal{L}_{X^{(1)}}\Theta - X^{(1)} \lrcorner d\Theta - df) \\
&= X^{(1)} \lrcorner (df - X^{(1)} \lrcorner d\Theta - df) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Um importante tipo de simetria variacional são os campos de Killing, isto é, simetrias infinitesimais da métrica. De fato, o resultado adiante mostra que se X é um campo de Killing sobre uma variedade M, então $X^{(1)}$ é uma simetria variacional do tipo Lie para a lagrangeana $L = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g_{ij}v_iv_j$. No caso dessa Lagrangeana, é fácil verificar que o campo $\frac{\partial}{\partial t}$ é uma simetria variacional. Aplicando o teorema de Nöether, verifica-se que L é uma integral primeira associada a essa simetria.

Teorema 2.4.4. *Sejam (M, g) variedade Riemanniana e X campo de Killing sobre M. Então $X^{(1)}$ é uma simetria variacional para $L = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g_{ij}v_iv_j$.*

Prova: Sejam $t, x_1, ..., x_n, v_1, ..., v_n$ coordenadas sobre $J^1(\pi)$, $X = \xi_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ campo sobre $J^0(\pi)$ tal que X é campo de Killing sobre M e $\Theta = (L - \dfrac{\partial L}{\partial v_i}v_i)dt + \dfrac{\partial L}{\partial v_i}dx_i$. Pela fórmula 2.5,

$$X^{(1)} = X + \sum_{i,j} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} v_j \frac{\partial}{\partial v_i}.$$

Portanto,

$$X^{(1)} \lrcorner \Theta = \sum_{i,j} g_{ij}v_j\xi_i$$

e

$$d\left(X^{(1)}\right) \lrcorner \Theta = \sum_{i,j,k} [\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + g_{ij}v_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}]dx_k + \sum_{ik} [g_{ik}\xi_i]dv_k.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
d\Theta = &- \frac{1}{2}\sum_{i,j,k} (\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} v_iv_j)dx_k \wedge dt - \sum_{i,k} (g_{ik}v_i)dv_k \wedge dt \\
&+ \sum_{i,j,k} (\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} v_j)dx_k \wedge dx_i + \sum_{i,k} g_{ik}dv_k \wedge dx_i.
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} X^{(1)} \lrcorner d\Theta = & - \frac{1}{2}\sum_{i,j,k}(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} v_i v_j \xi_k)dt - \sum_{i,j,k}(g_{ik} v_i v_j \frac{\xi_k}{x_j})dt \\ & + \sum_{i,j,k}(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} v_j \xi_k)dx_i + \sum_{i,j,k}(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} v_j \xi_i)dx_k \\ & + \sum_{i,j,jk} g_{ik} v_j \frac{\partial \xi_k}{\partial v_k} dx_i - \sum_{i,j,k}(g_{ik}\xi_i)dv_k. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X^{(1)}}\Theta = & X^{(1)} \quad \lrcorner d\Theta + d\left(X^{(1)} \lrcorner \Theta\right) \\ - & \sum_{i,j,k}[\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} v_i v_j \xi_k + g_{ik} v_i v_j \frac{\xi_k}{x_j}]dt \\ + & [g_{kj} v_j \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} v_j \xi_k + g_{ik} v_j \frac{\partial \xi_k}{\partial v_k}]dx_i. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Agora, usando o fato que

$$X(g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})) = (\mathcal{L}_X g)(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) + g(\mathcal{L}_X \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) + g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \mathcal{L}_X \frac{\partial}{\partial x_j}),$$

e que $\mathcal{L}_X(g) = 0$, pois X é campo de Killing, obtemos

$$\sum_k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\xi_k = -\sum_k \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} g_{kj} - \sum_k \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} g_{ik}. \tag{2.15}$$

Substituindo 2.15 em 2.14, obtemos

$$\mathcal{L}_{X^{(1)}}\Theta = 0.$$

Portanto, $X^{(1)}$ é uma simetria de Lie.

■

Pelo teorema de Nöether, a integral primeira associada ao campo de Killing X é

$$\begin{aligned} H_X &= X^{(1)} \lrcorner \Theta \\ &= 2\sum_{i,j} g_{i,j} v_j \xi_i \\ &= \xi_i \frac{\partial L}{\partial v_i}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.4.5. *Considere a métrica de Schwarzschild*

$$ds^2 = (1 - \frac{2m}{x_2})d(x_1)^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{x_2}} d(x_2)^2 - (x_2)^2(d(x_3)^2 + sen^2 x_3 d(x_4)^2). \tag{2.16}$$

A menos do fator $\frac{1}{2}$*, a Lagrangeana que descreve as geodésicas é dada por*

$$L = (1 - \frac{2m}{x_2})(v_1)^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{x_2}}(v_2)^2 - (x_2)^2(v_3)^2 - sen^2 x_3 (v_4)_2. \tag{2.17}$$

é possível mostrar (vide [51]) que a álgebra das simetrias variacionais do tipo Lie dessa Lagrangeana é 5*-dimensional e gerada pelos campos*

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial}{\partial t} \\
X_2 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \\
X_3 &= \cos x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} - \cot x_3 \sin x_4 \frac{\partial}{\partial x_4} \\
X_4 &= \sin x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} + \cot x_3 \cos x_4 \frac{\partial}{\partial x_4} \\
X_5 &= \frac{\partial}{\partial x_4}.
\end{aligned}$$

As integrais primeiras, obtidas por meio do teorema de Nöether são, respectivamente, dadas por

$$\begin{aligned}
F_1 &= L \\
F_2 &= v_1 \\
F_3 &= (\cos x_4)v_3 - (\cot x_3 \sin x_4)v_4 \\
F_4 &= (\sin x_4)v_3 + (\cot x_3 \cos x_4)v_4 \\
F_5 &= v_4.
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Integração de Fluxos Geodésicos com Métodos Simpléticos

A geometria simplética dedica-se a estudar variedades que admitem uma estrutura simplética, ou seja, variedades que admitem uma 2-forma não degenerada e fechada. Para variedades com uma tal estrutura, existe uma extensa teoria (por exemplo, [5],[13],[14],[4]) da qual começamos o capítulo com algumas definições e resultados elementares e que serão úteis ao nosso estudo. Até agora, abordamos o fluxo geodésico como uma dinâmica Lagrangeana. A geometria simplética permite uma descrição por meio de uma dinâmica chamada Hamiltoniana que, analogamente à dinâmica Lagrangeana, é proveniente de uma função sobre uma variedade simplética. Veremos aqui que a transformada de Legendre faz a ligação entre a dinâmica Lagrangeana e a dinâmica Hamiltoniana. Isso nos possibilitará tratar as geodésicas com as ferramentas da geometria simplética. Portanto, deixaremos de tratar as geodésicas no espaço de jatos $J^1(I, M)$ para tratá-las no ambiente simplético. No caso das geodésicas, onde a Lagrangeana satisfaz a condição 3.1, isto é uma via de mão dupla.

Na parte final deste capítulo, mostraremos como o método de Hamilton-Jacobi pode ser aplicado à integração do fluxo geodésico e aplicaremos este método a algumas métricas de Einstein.

3.1 Introdução

No capítulo anterior, observamos que, sob hipóteses de regularidade para a função lagrangeana L (isto é, sobre a condição 3.1), as equações de Euler-Lagrange podem ser consideradas como equações que descrevem o fluxo de um campo de vetores sobre o fibrado tangente. Entretanto, dependendo da Lagrangeana L, estas equações podem assumir um aspecto muito pouco tratável. Entretanto, por meio de uma mudança de coordenadas adequada, as equações de Euler-Lagrange podem assumir uma forma bem mais elegante. De fato, se $p_i := \frac{\partial L}{\partial v_i}$, então, na hipótese que

$$det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_j \partial v_i}\right) \neq 0, \tag{3.1}$$

a transformação

$$(x, v) \longmapsto (x, p) \tag{3.2}$$

define uma mudança de coordenadas (difeomorfismo).

Nestas coordenadas, as equações de Euler-Lagrange se tornam mais simples. De fato, se $H := \sum_i p_i v_i - L$ e assumirmos que vale 3.1, entaão $v = F(x, p)$. Logo,

$$\begin{aligned} dH &= -dL + p_i dv_i + v dp_i \\ &= -\frac{\partial L}{\partial x_i} dx_i - \frac{\partial L}{\partial v_i} dv_i + p_i dv_i + v_i dp_i. \end{aligned}$$

e, lembrando que $p_i := \frac{\partial L}{\partial v_i}$, obtemos

$$\begin{aligned} dH &= -\frac{\partial L}{\partial x_i} dx_i - p_i dv_i + p_i dv_i + v_i dp_i \\ &= -\frac{\partial L}{\partial x_i} dx_i + v_i dp_i \end{aligned}$$

onde subíndices repetidos indicam somatórios. Por outro lado, interpretando $H = H(x, p)$, temos que $dH = \frac{\partial H}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$ e, comparando com a última identidade acima, obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial L}{\partial x_i} \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} = v_i. \end{cases}$$

Logo, as equações de Euler-Lagrange se escrevem na forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases}$$

Estas equações são conhecidas como *Equações de Hamilton* e, na hipótese que 3.1 é satisfeita, são equivalentes às equações de Euler-Lagrange.

A forma de Hamilton das equações de Euler-Lagrange é muito simples e admite uma interpretação geométrica que será tratada na seção seguinte. Veremos, adiante, que essa interpretação, aplicada ao fluxo geodésico, possibilitará tratar esse fluxo como um caso particular de uma dinâmica Hamiltoniana em uma variedade simplética.

3.2 Variedades Simpléticas e Campos Hamiltonianos

Nesta seção veremos os conceitos e resultados elementares da geometria simplética úteis para a abordagem do fluxo geodésico como uma dinâmica Hamiltoniana. Começamos com a

Definição 3.2.1. *Seja M uma variedade de dimensão par. Uma estrutura simplética sobre M é uma 2-forma ω fechada e não degenerada em M, isto é, tal que $d\omega = 0$ e $\xi \lrcorner \omega \neq 0$ para todo $\xi \in T_pM$ não nulo e todo $p \in M$*

O par (M, ω) é chamado variedade simplética.

O fato da dimensão da variedade M ser par é uma condição necessária e decorre da não degeneração da 2-forma ω. De fato, em todo ponto $x \in M$, podemos fixar uma base $v^1, ..., v^n$ de T_xM. Nesta base, ω fica completamente determinada pela matriz $\Omega := (\omega_{ij})$, onde $\omega_{ij} = \omega(v_i, v_j)$. Esta matriz é anti-simétrica e não degenerada, já que ω é não degenerada. Isso implica imediatamente que a dimensão de M é par já que $\Omega = \Omega^T$ e

$$det(\Omega) = det(\Omega^T) = det(-\Omega) = (-1)^{dim(M)} det(\Omega). \tag{3.3}$$

Outro fato sobre uma variedade simplética que decorre diretamente da estrutura simplética é que toda variedade simplética é orientável. De fato, seja (M, ω) uma variedade simplética. Em cada ponto $p \in M$, ω_p é uma 2-forma bilinear antisimétrica sobre T_pM. Portanto, se $dim(M) = 2n$, existe uma base $\{\alpha_i\}$ de T_p^*M tal que $\omega_p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \wedge \alpha_{i+n}$. Por indução, é fácil provar que

$$\omega_p^k = \underbrace{\omega \wedge ... \wedge \omega}_{kvezes} = \sum_{i_1,...,i_k=1}^{n} \alpha_{i_1} \wedge \alpha_{i_1+n} \wedge ... \wedge \alpha_{i_k} \wedge \alpha_{i_k+n}$$

e, portanto, $\omega_p^n = n! \alpha_1 \wedge \alpha_{1+n} \wedge ... \wedge \alpha_k \wedge \alpha_{k+n}$. Logo, $\omega_p \neq 0$ para todo $p \in M$ e ω^n é uma forma de volume.

Um exemplo de variedade simplética é $\mathbb{R}^{2n} = \{(x_1, ..., x_n, p_1, ..., p_n)\}$ equipado com a 2-forma $\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx_i$.

Um segundo exemplo é o fibrado cotangente a uma variedade N equipado com o diferencial externo da 1-forma *universal* ou *tautológica*. De fato, sejam $M = T^*N$ e $\pi : T^*N \longrightarrow N$ a projeção canônica. A 1-forma universal $\rho \in \Lambda^1(M)$ é definida por

$$\rho_\theta = \theta(\pi_* \xi) \qquad \forall \theta \in M \text{ } e \text{ } \forall \xi \in T_\theta M.$$

Se $\{x_i\}$ são coordenadas locais em N e $\{x_i, p_i\}$ as correspondentes coordenadas canônicas em M, temos que $\rho_\theta = \sum_i p_i(\theta) dx_i|_\theta$, isto é, $\rho = \sum_i \rho_i dx_i$. $(M, d\rho)$ é, portanto, uma variedade simplética.

Outros exemplos simples de variedades simpléticas são representados pelas superfícies orientáveis. Nesses casos, uma forma de volume ω qualquer é sempre fechada e, portanto, define uma estrutura simplética.

Nos dois primeiros exemplos, a forma simplética tinha a forma coordenada $\sum_i dp_i \wedge dx_i$. O teorema de Darboux afirma que, localmente, em toda variedade simplética existem coordenadas canônicas (x_i, p_i) nas quais a forma simplética é simplesmente $\sum_i dp_i \wedge dx_i$.

Definição 3.2.2. *Um campo de vetores $X \in \mathcal{D}(M,\omega)$ é dito Hamiltoniano se*

$$i_X\omega = -dH, \tag{3.4}$$

onde $H \in C^\infty(M)$.

Como ω é não degenerada, a aplicação

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathcal{D}(M) &\longrightarrow \Lambda^1(M) \\ X &\longmapsto X \lrcorner \omega \end{aligned}$$

é um isomorfismo. Os campos Hamiltonianos são os campos correspondentes, por meio de Γ, às 1-formas exatas.

Se $H \in C^\infty(M)$, usando coordenadas canônicas (x_i, p_i), é fácil ver que o campo Hamiltoniano $X_H = \Gamma^{-1}(-dH)$ tem a seguinte forma:

$$X_H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial p_i}. \tag{3.5}$$

3.3 Transformada de Legendre

No início deste capítulo, vimos uma mudança de coordenadas que gera uma correspondência entre as equações de Euler-Lagrange e as equações de Hamilton. Entretanto, este procedimento era local e, portanto, dependente da escolha de coordenadas. Veremos aqui uma versão invariante destra transformação que é comumente chamada *transformada de Legendre.*

Começamos lembrando que (T^*M, ω), com $\omega = d\rho$, é uma variedade simplética. Além disso, nas coordenadas canônicas (x,p) em T^*M, ρ se escreve como

$$\rho = \sum_i p_i dx_i. \tag{3.6}$$

Como T_xM é um espaço vetorial então, para todo $\xi \in T_xM$, temos um isomorfismo $T_xM \simeq T_\xi(T_xM)$ que denotaremos por α_ξ.

Usando as coordenadas canônicas (x_i, v_i) em TM, o isomorfismo α_ξ é tal que

$$\begin{aligned} \alpha_\xi : T_xM &\longrightarrow T_\xi(T_xM) \\ \frac{\partial}{\partial x_i}|_x &\longmapsto \frac{\partial}{\partial v_i}|_\xi. \end{aligned}$$

isto é, $\alpha_\xi = \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i}|_\xi \otimes dx_i|_x$.

A transformada de Legendre é a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(L) : TM &\longrightarrow T^*M \\ \xi &\longmapsto \mathcal{L}(L)(\xi) \end{aligned} \tag{3.7}$$

tal que

$$\mathcal{L}(L)(\xi) := d^V(L)|_\xi \circ \alpha_\xi, \tag{3.8}$$

onde d^V é o diferencial externo vertical

$$\begin{array}{rcl} d^V : C^\infty(TM) & \longrightarrow & \Lambda^1(TM) \\ f & \longmapsto & d^V(f), \end{array}$$

definido como

$$d^V(f)|_\xi = (df)|_{T_{\pi(\xi)}M},$$

com $\pi : TM \longrightarrow M$ a projeção canônica.

Em coordenadas (x, v),

$$d^V(f) = \frac{\partial f}{\partial v_i} dv_i.$$

Portanto,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(L)(\xi) & = & d^V(L)|_\xi \circ \alpha_\xi \\ & = & \dfrac{\partial L}{\partial v_i}(\xi) dv_i|_\xi \circ (\dfrac{\partial}{\partial v_i}|_\xi \otimes dx_i|_{\pi(\xi)}) \\ & = & \dfrac{\partial L}{\partial v_i}(\xi) dx_i|_{\pi(\xi)}. \end{array}$$

Logo,

$$\mathcal{L}(L)(\xi) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial v_i}(\xi) dx_i|_{\pi(\xi)}. \tag{3.9}$$

Se, portanto, usamos as coordenadas canônicas (x_i, p_i) de T^*M, temos que uma representação coordenada de $\mathcal{L}(L)$ é

$$\begin{cases} x_i = x_i \\ p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}. \end{cases}$$

Vimos no início desta seção que, se L é regular, isto é, se $det\left(\frac{\partial L}{\partial v_j \partial v_i}\right) \neq 0$, então esta transformação transforma as equação de Euler-Lagrange nas equações de Hamilton com Hamiltoniana $H = \sum_i p_i v_i - L$. Isso significa que o campo que descreve as equações de Euler-Lagrange com Lagrangeana L é transformado via $\mathcal{L}(L)_*$ no campo Hamiltoniano associado à Hamiltoniana $H = \sum_i p_i v_i - L$.

Para o estudo do fluxo geodésico em $J^1(I, M) \approx I \times TM$ por meio do problema variacional, foi necessário introduzir a lagrangeana $L(t, \xi) = \frac{1}{2} g_{\pi(\xi)}(\xi, \xi)$. Veremos agora como esta Lagrangeana se transforma por meio da transformada de Legendre. Mais especificamente, vamos calcular a Hamiltoniana H cujo fluxo está relacionado ao fluxo geodésico por meio da transformada de Legendre. Para isso, precisamos primeiro mostrar que a lagrangeana L que descreve o fluxo geodésico é uma função convexa. De fato, se $\xi = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

$$\frac{\partial L}{\partial v_k} = \sum_j g_{kj} v_j \tag{3.10}$$

e

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v_l v_k} = g_{kl}. \tag{3.11}$$

Logo, $det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_l v_k}\right) = det\,(g_{kl}) \neq 0$.

Temos que

$$v_j = \sum_k \frac{\partial L}{\partial v_k} g^{jk}(x), \tag{3.12}$$

onde g^{jk} são coeficientes da matriz inversa da métrica.

Agora, lembrando que $p = \frac{\partial L}{\partial v}$, a Hamiltoniana $H = \sum_i p_i v_i - L$ se escreve como

$$\begin{aligned} H(x,p) &= \sum_{ik} p_i p_k g^{ik} - L(x, v(x,p)) \\ &= \sum_{ik} p_i p_k g^{ik} - \frac{1}{2} \sum_{ij} \sum_{kl} p_k g^{ik} p_l g^{jl} g_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{kl} p_k p_l g^{kl}. \end{aligned}$$

3.4 Campos Hamiltonianos e estrutura de Poisson

Nesta seção discutiremos o importante fato de que campos Hamiltonianos compoem um álgebra de Lie. Além disso, introduzimos a noção de colchete de Poisson entre funções definidas sobre variedades simpléticas e suas propriedades. Começamos com a seguinte

Definição 3.4.1. *Sejam f e g duas funções diferenciáveis sobre uma variedade simplética (M, ω). O colchete de Poisson $\{f, g\}$ entre f e g é definido por $\{f, g\} := -X_f \lrcorner X_g \lrcorner \omega = -X_f(g)$, onde X_f e X_g denotam os campos Hamiltonianos associados a f e g respectivamente.*

Usando a definição do colchete de Poisson, podemos dizer que $f \in C^\infty(M)$ é uma integral primeira de X_H, isto é, $X_H(f) = 0$, se, e somente se, $\{H, f\} = 0$.

Sejam X_1 e X_2 tais que $X_1 \lrcorner \omega = -dH_1$ e $X_2 \lrcorner \omega = -dH_2$, temos que

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] \lrcorner \omega &= \mathcal{L}_{X_1} X_2 \lrcorner \omega \\ &= \mathcal{L}_{X_1}(X_2 \lrcorner \omega) - X_2 \lrcorner \mathcal{L}_{X_1} \omega \\ &= X_1 \lrcorner d(X_2 \lrcorner \omega) + d(X_1 \lrcorner X_2 \lrcorner \omega) = -d\{H_1, H_2\}. \end{aligned}$$

Isso prova a seguinte

Proposição 3.4.2. *O conjunto dos campos Hamiltonianos* $Ham(\omega)$ *é uma álgebra de Lie e* $[X_{H_1}, X_{H_2}] = X_{\{H_1,H_2\}}$*, para todas* $H_1, H_2 \in C^\infty(M)$.

Temos também a seguinte

Proposição 3.4.3. *O colchete de poisson é* $\mathbb{R}$*-bilinear, antissimétrica e satisfaz a identidade de Jacobi:*

$$\{g, \{f, h\}\} + \{h, \{g, f\}\} + \{f, \{h, g\}\} = 0;$$

. Portanto, $(C^\infty(M), \{\ ,\ \})$ *é uma álgebra de Lie.*

Prova: A bilinearidade sobre $\mathbb{R}$ e a antisimetria do colchete de Poisson são evidentes. Provbaremos, portanto, a identidade de Jacobi. Para isso, sejam X_1, X_2 e X_3 campos Hamiltonianos tais que

$$\begin{aligned} X_1 \lrcorner \omega &= -dH_1 \\ X_2 \lrcorner \omega &= -dH_2 \\ X_3 \lrcorner \omega &= -dH_3. \end{aligned}$$

Aplicando a definição de colchete de Poisson e as propriedades da derivada de Lie, obtem-se que

$$\begin{aligned} \{\{H_1, H_2\}, H_3\} &= X_{\{H_1,H_2\}}(H_3) \\ &= [X_1, X_2] \lrcorner dH_3 \\ &= -[X_1, X_2] \lrcorner X_3 \lrcorner \omega \\ &= -(\mathcal{L}_{X_1} X_2) \lrcorner X_3 \lrcorner \omega \\ &= -\mathcal{L}_{X_1}(X_2 \lrcorner X_3 \lrcorner \omega) + X_2 \lrcorner \mathcal{L}_{X_1}(X_3 \lrcorner \omega) \\ &= X_1(\{H_2, H_3\}) + X_2 \lrcorner [X_1, X_3] \lrcorner \omega + X_2 \lrcorner X_3 \lrcorner \mathcal{L}_{X_1} \omega \\ &= \{H_1, \{H_2, H_3\}\} - \{H_2, \{H_1, H_3\}\}, \end{aligned}$$

Onde usamos o fato que $\mathcal{L}_{X_1}\omega = 0$. Logo,

$$\{\{H_1, H_2\}, H_3\} + \{\{H_3, H_2\}, H_1\} + \{\{H_2, H_3\}, H_1\} = 0.$$

■

3.5 Método de Hamilton-Jacobi

Para a parte seguinte desta seção será fundamental a seguinte

Definição 3.5.1. *Sejam (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) variedades simpléticas e $T : M_1 \longrightarrow M_2$ um difeomorfismo. T é uma transformação simplética se satisfaz*

$$T^*\omega_2 = \omega_1.$$

Em particular, um difeomorfismo $F : M_1 \longrightarrow M_1$ é dito simplético se $F^*\omega_1 = \omega_1$.

Analogamente, de um ponto de vista infinitesimal, temos a seguinte

Definição 3.5.2. *Um campo X sobre uma variedade simplética (M, ω) é uma transformação simplética infinitesimal se*

$$\mathcal{L}_X\omega = 0.$$

Em outras palavras, X é uma transformação simplética infinitesimal se, e somente se, seu fluxo é composto por transformações infinitesimais, isto é, $A_t^*\omega = \omega$.

Usando a definição de campo Hamiltoniano e a fórmula de Cartan é possível provar o seguinte

Teorema 3.5.3. *(de Liouville) Os campos Hamiltonianos são transformações simpléticas infinitesimais. Em particular, os fluxos Hamiltonianos preservam a forma de volume $\Omega = \omega^n$, onde ω^n entende-se por $\underbrace{\omega \wedge ... \wedge \omega}_{nvezes}$.*

As transformações simpléticas de uma variedade simplética formam um grupo. Reciprocamente, lembrando da propriedade da derivada de Lie

$$\mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$$

se verifica que o conjunto das transformações simpléticas infinitesimais admite uma estrutura de álgebra de Lie.

3.5.1 Funções geradoras de transformações simpléticas

Veremos agora uma maneira de gerar uma determinada classe de transformações simpléticas. Para isso, considere $T : (M, \omega) \longrightarrow (M, \omega)$ uma transformação simplética e (q, p) coordenadas canônicas sobre M (tais que a forma simplética ω se escreve como $\omega = dp \wedge dq$). Logo, considerando que T é expressa em coordenadas por $T(q, p) = (\bar{q}(q, p), \bar{p}(q, p))$, temos que

$$d\bar{p}(q, p) \wedge d\bar{q}(q, p) = T^*(d\bar{p} \wedge d\bar{q}) = dp \wedge dq,$$

ou, equivalentemente,

$$d\left(\bar{p}(q,p)d\bar{q}(q,p) - pdq\right) = 0.$$

Portanto, pelo menos localmente, em uma vizinhança U coberta pelas coordenadas (q,p), podemos escrever

$$\bar{p}(q,p)d\bar{q}(q,p) - pdq = -df(q,p), \tag{3.13}$$

com $f \in C^\infty(U)$. Mas se considerarmos que $det\left(\frac{\partial \bar{q}}{\partial p}\right) \neq 0$, podemos expressar p em função das coordenadas q e $\bar{q}$ e substituir em 3.13. Dessa maneira, definindo

$$W(q,\bar{q}) := f(q, p(q,\bar{q})),$$

obtemos que

$$\bar{p}(q,\bar{q})d\bar{q} - p(q,\bar{q})dq = -\frac{\partial W}{\partial q}dq - \frac{\partial W}{\partial \bar{q}}d\bar{q}$$

e, portanto,

$$\begin{cases} p = \frac{\partial W}{\partial q} \\ \bar{p} = -\frac{\partial W}{\partial \bar{q}}. \end{cases} \tag{3.14}$$

O sistema 3.14, por construção, define implicitamente uma transformação simplética $(q,p) \longmapsto (\bar{q},\bar{p})$ se $W\,(q,\bar{q})$ satisfaz a condição

$$det\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \bar{q}\partial q}\right) \neq 0. \tag{3.15}$$

Uma função desse tipo é chamada *função geradora* de uma transformação simplética do tipo *livre*.

3.5.2 Transformações Simpléticas e o Método de Hamilton Jacobi

O método de Hamilton-Jacobi consiste em encontrar uma função geradora de uma transformação simplética livre $(q,p) \longmapsto (\bar{q},\bar{p})$ tal que

$$H(q(\bar{q},\bar{p}), p(\bar{q},\bar{p})) = \bar{H}(\bar{q}). \tag{3.16}$$

A vantagem dessas novas coordenadas $(\bar{q},\bar{p})$ é devida ao fato de que as equações de Hamilton adquirem uma forma facilmente integrável. A saber, as equações de Hamilton para a nova Hamiltoniana $\bar{H}$ são dadas por

$$\begin{cases} \dot{\bar{q}} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}} = 0 \\ \dot{\bar{p}} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}} = \nu(\bar{q}). \end{cases} \tag{3.17}$$

Como $\dot{\bar{q}} = 0$, obtemos que $\bar{q}(t) = \bar{q}_0$ é constante e, consequentemente, $\dot{\bar{p}} = \nu(\bar{q}) = \nu(\bar{q}_0)$ é constante. Logo, o sistema 3.17 é facilmente integrável, onde as soluções são dadas por

$$\begin{cases} \bar{q}(t) = \bar{q}_0 \\ \bar{p}(t) = \nu(\bar{q}_0)t + \bar{p}_0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Para obter o fluxo nas coordenadas (q, p) é suficiente inverter a transformação.

Usando os resultados da seção anterior, sabemos que, para construir uma transformação simplética livre que satisfaça 3.16 é preciso encontrar uma solução $W = W(q, \bar{q})$ da equação

$$H(q, \frac{\partial W}{\partial q}) = H(\bar{q}) \tag{3.19}$$

que satisfaça também a condição 3.15. A equação 3.19 é conhecida como *equação de Hamilton-Jacobi.*

Um dos métodos mais eficientes para encontrar soluções da equação 3.19 é o método da separação de variáveis. Os exemplos a seguir mostram como este método funciona na prática. Em geral, a aplicabilidade deste método nem sempre é garantida pois pode depender de uma particular escolha de coordenadas. Maiores detalhes sobre este aspecto podem ser encontrados nos seguintes trabalhos [17, 25, 32].

Exemplo 3.5.4. *(Fluxo geodésico numa superfície de revolução) Uma superfície de revolução S pode ser parametrizada por*

$$\begin{cases} x_1 = f(r)cos\varphi \\ x_2 = f(r)sen\varphi \\ x_3 = g(r). \end{cases}$$

A métrica sobre uma superfície de revolução, dada pela paramétrização acima, induzida da métrica canônica do $\mathbb{R}^3$ é dada por

$$g_S = \left(f'(r)^2 + g'(r)^2\right) dr^2 + f(r)^2 d\varphi^2.$$

A Lagrangeana L sobre S que descreve o fluxo geodésico é dada por

$$L(r, \varphi, v_1, v_2) = \frac{1}{2}\left[\left(f'(r)^2 + g'(r)^2\right) v_1^2 + f(r)^2 v_2^2\right]$$

e a Hamiltoniana H obtida pela transformada de Legendre é dada por

$$H(r, \varphi, p_1, p_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{f'(r)^2 + g'(r)^2} + \frac{p_2^2}{f(r)^2}\right).$$

Agora, para aplicarmos o método de Hamilton-Jacobi, precisamos encontrar uma solução $W(r, \varphi, \bar{r}, \bar{\varphi})$ da equação

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2}{f'(r)^2 + g'(r)^2} + \frac{\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2}{f(r)^2}\right) = \bar{\varphi}$$

Supondo que a solução W é da forma

$$W(r, \varphi, \bar{r}, \bar{\varphi}) = W_1(r, \bar{r}, \bar{\varphi}) + W_2(\varphi, \bar{r}, \bar{\varphi}),$$

a equação de Hamilton-Jacobi é reescrita da forma

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2}{f'(r)^2 + g'(r)^2} + \frac{\left(\frac{\partial W_2}{\partial \varphi}\right)^2}{f(r)^2}\right) = \bar{\varphi}$$

Reorganizando a equação acima, obtemos

$$\left(\frac{\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2}{f'(r)^2 + g'(r)^2} - 2\varphi = -\frac{\left(\frac{\partial W_2}{\partial \varphi}\right)^2}{f(r)^2}\right). \tag{3.20}$$

Observe que o lado esquerdo da equação não depende de φ. Logo,

$$\frac{\left(\frac{\partial W_2}{\partial \varphi}\right)^2}{f(r)^2} = \alpha(\bar{r}, \bar{\varphi}).$$

Resolvendo a equação 3.20 com respeito a $\frac{\partial W_1}{\partial r}$, obtemos

$$\frac{\partial W_1}{\partial r} = \sqrt{\left(2\bar{\varphi} - \frac{\alpha^2}{f(r)^2}\right)(f'(r)^2 + g'(r)^2)}$$

e podemos encontrar uma integral completa de 3.20 dada por

$$W(r, \varphi, \bar{r}, \bar{\varphi}) = \int \sqrt{\left(2\bar{\varphi} - \frac{\alpha^2}{f(r)^2}\right)(f'(r)^2 + g'(r)^2)}dr + \alpha(\bar{r}, \bar{\varphi})\varphi.$$

Exemplo 3.5.5. *(Geodésicas do Elipsóide) Considere o elipsóide dado implicitamente por*

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1.$$

Considere a seguinte parametrização do elipsóide

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{a}cos(\theta)\sqrt{\epsilon + (1-\epsilon)cos^2(\varphi)} \\ x_2 = \sqrt{b}sen(\theta)cos(\varphi) \\ x_3 = \sqrt{c}sen(\varphi)\sqrt{1 - \epsilon cos^2(\varphi)} \end{cases}$$

onde $\theta \in (0, 2\pi]$ e $\varphi \in (0, 2\pi]$. Observe que, com esta parametrização, o elipsóide é coberto duas vezes.

É possível mostrar que se (g_{ij}) são os coeficientes da métrica do elipsóide induzida da métrica canônica do $\mathbb{R}^3$ então

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}g_{ij}v_iv_j \\ &= \frac{1}{2}[v_1^2A(\theta) + v_2^2B(\varphi)][C(\theta) + D(\varphi)], \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
A(\theta) &= \frac{(c-a)+(b-a)cos^2\theta}{a+(b-a)cos^2\theta} \\
B(\varphi) &= \frac{(b-a)+(c-b)cos^2\varphi}{bsen^2\varphi+ccos^2\varphi} \\
C(\theta) &= (b-a)sen^2\theta \\
D(\varphi) &= (c-b)cos^2\varphi.
\end{aligned}$$

Por meio da transformada de Legendre, obtemos a Hamiltoniana

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{A(\theta)}+\frac{p_2^2}{B(\varphi)}\right)\frac{1}{C(\theta)+D(\varphi)}.$$

Agora, considere a equação de Hamilton-Jacobi

$$H\left(\theta,\varphi,\frac{\partial W}{\partial\theta},\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)=\bar{\varphi} \tag{3.21}$$

e suponha que a função $W(\theta,\varphi,\bar{\theta},\bar{\varphi})$ *tenha a forma particular*

$$W=W_1(\theta,\bar{\theta},\bar{\varphi})+W_2(\varphi,\bar{\theta},\bar{\varphi}).$$

Agora, de 3.21, obtemos que

$$\frac{1}{2(C(\theta)+D(\varphi))}\left[\frac{1}{A(\theta)}\left(\frac{\partial W_1}{\theta}\right)^2+\frac{1}{B(\varphi)}\left(\frac{\partial W_2}{\varphi}\right)^2\right]=\bar{\varphi}^2$$

Reogarnizando a equação acima, obtemos

$$\frac{1}{A(\theta)}\left(\frac{\partial W_1}{\theta}\right)^2-2C(\theta)\bar{\varphi}=-\left(\frac{1}{B(\varphi)}\left(\frac{\partial W_2}{\varphi}\right)^2-2D(\varphi)\bar{\varphi}\right).$$

Observe que o lado esquerdo da equação acima depende de θ *e não depende de* φ *e o lado direito depende de* φ *e não depende de* θ*. Logo, temos que*

$$\begin{cases}
\frac{1}{A(\theta)}\left(\frac{\partial W_1}{\theta}\right)^2-2C(\theta)\bar{\varphi}=\alpha(\bar{\theta},\bar{\varphi}) \\
\left(\frac{1}{B(\varphi)}\left(\frac{\partial W_2}{\varphi}\right)^2+2D(\varphi)\bar{\varphi}\right)=-\alpha(\bar{\theta},\bar{\varphi})
\end{cases}$$

e a integração destas duas equações nos fornece a função W

$$\begin{aligned}
W={}&\int\left[\left(\alpha\left(\bar{\theta},\bar{\varphi}\right)+2C\left(\theta\right)\bar{\varphi}\right)A\left(\theta\right)\right]^{\frac{1}{2}}d\theta \\
&+\int\left[\left(2D\left(\varphi\right)\bar{\varphi}-\alpha\left(\bar{\theta},\bar{\varphi}\right)\right)B\left(\varphi\right)\right]^{\frac{1}{2}}d\varphi+\beta\left(\bar{\theta},\bar{\varphi}\right).
\end{aligned}$$

Em particular, podemos assumir que $\alpha\left(\bar{\theta},\bar{\varphi}\right)=\bar{\theta}$ *e que* $\beta=0$*. Logo,*

$$W=\int\left[\left(\bar{\theta}+2C\left(\theta\right)\bar{\varphi}\right)A\left(\theta\right)\right]^{\frac{1}{2}}d\theta+\int\left[\left(2D\left(\varphi\right)\bar{\varphi}-\bar{\theta}\right)B\left(\varphi\right)\right]^{\frac{1}{2}}d\varphi$$

e concluimos que o fluxo geodésico no elipsóide é completamente integrável.

3.6 Teoria Geométrica das equações de Hamilton-Jacobi

Classicamente, dada uma função diferenciável H sobre o espaço cotangente T^*M a uma variedade M com coordenadas locais (q_i), a correspondente equação de Hamilton-Jacobi é uma condição sobre a diferencial de uma função $S \in C^\infty(M)$ da seguinte forma

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = c$$

onde c é uma constante fixada.

Uma vez que, em vista do teorema de Darboux, qualquer variedade simplética (M, ω) pode ser localmente identificada com algum aberto do fibrado cotangente T^*M, as equações de Hamilton-Jacobi podem ser estudadas de forma geral em variedades simpléticas.

Aqui, daremos uma interpretação geométrica para a solução desta classe de equações juntamente com um método geométrico para obtenção de soluções.

Para este fim, primeiro relembramos a definição geométrica de uma equação diferencial parcial (EDP) de primeira ordem.

Definição 3.6.1. *Uma EDP de primeira ordem escalar é uma hipersuperfície $\mathcal{E}$ do primeiro espaço de jatos $J^1(n, N)$ das subvariedades n-dimensionais de uma variedade $n+1$-dimensional N.*

$J^1(n, N)$ é uma variedade $2n+1$-dimensional equipada com a distribuição de Cartan $\mathcal{C}^1$. Em coordenadas, considerando uma vizinhança de N equipada com coordenadas $(q_1, ..., q_n)$, $J^1(n, N)$ é naturalmente equipada com coordenadas $(q_1, ..., q_n, u, v_1, ..., v_n)$ tais que $u = u(q_1, ..., q_n)$ e a distribuição de Cartan é descrita por $\mathcal{C} = Ann\{du - \sum_i v_i dq_i\}$. A 1-forma $\theta := du - u_i dq_i$ define uma estrutura de contato em $J^1(n, N)$, isto é, $\theta \wedge (d\theta)^n$ é uma forma de volume (aqui, $(d\theta)^n = d\theta \wedge ... \wedge d\theta \quad$ n-vezes).

Nessas coordenadas, temos que uma representação local de uma EDP de primeira ordem é

$$F(q_i, u, v_i) = 0.$$

Variedades integrais maximais de $\mathcal{C}$ sobre $J^1(N, \mathbb{R})$ são n-dimensionais e são chamadas Legendrianas. Em coordenadas locais, uma variedade Legendriana tem a forma $\big\{(q_i, u, v_i) : \ u = f(q_i),\ v_j = \partial_{q_j} f(q_i)\big\}$.

Temos a seguinte

Definição 3.6.2. *Soluções de uma EDP de primeira ordem $\mathcal{E}$ são subvariedades Legendrianas de $\mathcal{E}$.*

Localmente, $J^1(n, N)$ pode ser identificado com uma vizinhança do produto $T^*N \times \mathbb{R}$. Nesta identificação local, a coordenada u é uma coordenada sobre uma vizinhança de $\mathbb{R}$ e (q_i, v_i) são coordenadas em uma vizinhança de T^*N. Nestas coordenadas locais, $d\theta = dq_i \wedge dv_i$ é a forma simplética canônica.

Quando (3.22) não depende de u, isto é, ∂_u é uma simetria da EDP de primeira ordem, então, se $u = u(q)$ é uma solução, $u(q) + constante$ é também uma solução. Neste caso, a equação é simplesmente definida em uma vizinhança de T^*N já que o fato de F não depender de u implica que $F = F(q_i, v_i)$. Assim, devido à estrutura simplética desta vizinhança, nestes casos a equação é chamada simplética. De acordo com esta terminologia, e em vista da descrição em coordenadas das equações de Hamilton-Jacobi feita anteriormente, podemos considerar as equações de Hamilton-Jacobi justamente como uma equação simplética de primeira ordem. A presença da simetria ∂_u é, em particular, responsável pela existência de soluções multi-valuadas para esta classe de equações.

Dessa forma, relembrando que, em uma variedade simplética $2n$-dimensional (M, Ω), variedades Lagrangianas são as subvariedades n-dimensionais L de M tais $\omega|_L = 0$ (variedades Lagrangeanas são variedades de dimensão maximal satisfazendo a condição $\omega|_L = 0$), podemos usar a seguinte

Definição 3.6.3. *Dada uma variedade simplética (M, ω), uma equação de Hamilton-Jacobi Γ é uma hipersuperfície de M e suas soluções são subvariedades Lagrangianas as quais estão contidas em $\mathcal{E}$.*

Em coordenadas locais, uma variedade Lagrangiana tem a forma $\left\{(q_i, p_i) : \ p_j = \partial_{q_j} W(x^i)\right\}$, para alguma função $W = W(q_1, ..., q_n)$.

O então chamado problema de Hamilton-Jacobi é o de encontrar soluções para as equações de Hamilton-Jacobi. De acordo com a definição acima, este é um problema invariante. A então chamada teoria das equações de Hamilton-Jacobi investiga a conexão entre as soluções das equações de Hamilton-Jacobi e as correspondentes equações de Hamilton. Do ponto de vista invariante esta conexão e dada pelo princípio da absorção, o qual pode ser ilustrado como segue.

Para qualquer hipersuperfície Γ de uma variedade simplética (M, ω), em todo ponto q é definido um subespaço unidimensional (pela não-degeneração de ω) $l_q(\Gamma) \subset T_q\Gamma \subset T_qM$ o qual é, por definição, o complemento ω-ortogonal de $T_q\Gamma$, isto é, $l_q(\Gamma) = \{\xi \in T_qM; \omega(\xi, \eta) = 0, \forall \eta \in T_q\Gamma\}$. O subespaço $l_q(\Gamma)$ é chamado a característica de Γ no ponto q e $l(\Gamma) = \bigcup l_q(\Gamma)$ é a distribuição característica de Γ.

O espaço característico $l_q(\Gamma)$ é contido em $T_q\Gamma$ pois, caso contrário, ω seria degenerada. De fato, se $l_q(\Gamma)$ estivesse contido no complementar de $T_q\Gamma$ em T_qM teríamos que existe um $\xi \in T_qM$ tal que $\omega(\xi, \cdot) = 0$ em $T_q\Gamma$ e,portanto, ξ seria um vetor não-nulo tal que $I_\xi \omega = 0$ contradizendo a não-degeneração de ω. O princípio da absorção consiste na seguinte propriedade: se $L \subset \Gamma$ é uma variedade Lagrangiana, então $l_q(\Gamma) \subset T_qL$, $\forall q \in L$. A rasão para $l_q(\Gamma)$ ser absorvido por L é a seguinte: se $l_q(\Gamma)$ fosse transversal a L, então $l_q(\Gamma) \oplus T_qL$ seria um $(n+1)$-dimensional subespaço no qual ω_q se anula. Mas a dimensão maximal do subespaços $V \subset T_qM$ tais que $\omega|_V = 0$ é n e conicide com a dimensão dos subespaços Lagrangeanos.

Agora, já que X_H é tangente a $H = c$ e é também uma simetria infinitesimal da estrutura simplética ω, seu fluxo transforma variedades lagrangeanas em variedades lagrangeanas e soluções de $\Gamma = \{H = c\}$ em soluções. Mas, a condição $X_H \lrcorner \omega = dH$ implica que X_H é ω-ortogonal a todo campo de vetores tangente a $H = c$, e portanto X_H é ω-ortogonal a Γ. Portanto, X_H gera a distribuição característica e o princípio da absorção implica que X_H é tangente a todas as soluções de Γ. Portanto, X_H transforma toda solução de Γ nela mesma. Isso nos dá uma forma de construir explicitamente soluções da equação de Hamilton-Jacobi. Essa construção segue a mesma ideia do método das características para EDP's de primeira ordem. De fato, ela pode ser interpretada como uma especialização do método para o caso simplético.

Seja $\{A_t\}$ o fluxo de X_H e $L' \subset M$ uma variedade $(n-1)$-dimensional pré-Lagrangiana (isto é, tal que $\omega|_{L'} = 0$) contida em Γ. Se o campo de vetores X_H é transversal a L', podemos considerar a variedade $L = \bigcup_t A_t(L')$. Esta é uma solução da equação de Hamilton-Jacobi. De fato, para todo $q \in L$, o espaço tangente $T_qL = T_q(A_t(L')) \oplus < X_H|_x >$, onde $\omega|_{T_q(A_t(L'))} = 0$, já que A_t é uma simetria de ω. Logo, X_H é ω-ortogonal a $T_q(A_t(L'))$ e L é Lagrangeana.

Portanto, o problema de Hamilton-Jacobi se reduz aos seguintes dois problemas:

(1) descrever toda subvariedade pré-Lagrangeana L' $(n-1)$-dimensional de Γ;

(2) construir L partindo de L'.

Tecnicamente, (2) consiste na integração do fluxo do campo de vetores, o qual é um problema solúvel a princípio.

Por outro lado, as considerações acima provam que variedades pré-Lagrangianas sobre Γ são hipersuperfícies de variedades Lagrangeanas. Logo, como uma variedade Lagrangeana tem a forma local $\{(q_i, p_i) : \ p_j = \partial_{q_j} W\}$, podemos escolher coordenadas nas quais as variedades pré-Lagrangeanas que estão contidas em Γ podem ser localmente representadas como $L' = \{(q_i, p_i) : \quad q_n = 0, p_j = \partial_{q_j}\phi, p_n = \phi_n\}$, para algumas funções $\phi = \phi(q_1, ..., q_{n-1})$ e $\phi_n = \phi_n(q_1, ..., q_{n-1})$. Dessa maneira, em cada carta coordenada, variando as funções ϕ e ϕ_n, podemos localmente descrever todas as variedades pré-Lagrangeanas L'. Isso dá uma solução do problema (1).

Agora, é útil introduzir a seguinte terminologia. Uma variedade pré-Lagrangeana $(n-1)$-dimensional $L' \subset \Gamma$ será chamado um valor inicial de Cauchy para a equação de Hamilton-Jacobi Γ. Se L' é transversal à característica X_H, o valor inicial de Cauchy será chamado não-característico.

Usando esta terminologia, podemos dizer que o método da solução explícita mencionado acima para as equações de Hamilton-Jacobi vai ao longo dos seguintes três passos:

(a) construir um valor inicial de Cauchy não-característico;

(b) integrar X_H;

(c) construir $L = \bigcup_t A_t(L')$.

No que diz respeito à conexão entre as soluções de uma equação de Hamilton-Jacobi $\Gamma = \{H = c\}$ e o correspondente sistema Hamiltoniano, é preciso lembrar a descrição que demos de transformações simpléticas em termos de funções geratrizes.

De fato, uma solução de Γ tem a forma

$$L = \{q_i, p_i = \partial_{q_i} W\}$$

e, por definição, é tal que

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = c.$$

Agora, considere uma família $\Gamma(\bar{q})$ de equações de Hamilton-Jacobi

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = K(\bar{q}_1, ..., \bar{q}_n)$$

a qual é definida por uma função diferenciável K de n parâmetros $(\bar{q}_1, ..., \bar{q}_n)$. Tal função K poderia até ser constante.

Uma integral completa de $\Gamma(\bar{q})$ é uma solução $W = W(q_1, ..., q_n, \bar{q}_1, ..., \bar{q}_n)$ tal que $\det(\frac{\partial^2 W}{\partial \bar{q} \partial q}) \neq 0$.

Dada uma integral completa, o sistema

$$\begin{cases} p = \frac{\partial W}{\partial q} \\ \bar{p} = -\frac{\partial W}{\partial \bar{q}} \end{cases}$$

define uma transformação simplética $T : (\bar{q}, \bar{p}) \mapsto (q, p)$.

Em termos das novas coordenadas $(\bar{q}, \bar{p})$, as equações de Hamilton são descritas por meio da nova Hamiltoniana $K\ (\bar{q})$ pelas equações

$$\begin{cases} \dot{\bar{q}} = \frac{\partial K}{\partial \bar{p}} = 0, \\ \dot{\bar{p}} = -\frac{\partial K}{\partial \bar{q}} = \nu(\bar{q}) \end{cases}$$

e podem ser facilmente integradas na forma

$$\begin{cases} \bar{q} = \bar{q}_0 \\ \bar{p} = \nu(\bar{q}_0 t + \bar{p}_0) = -\dfrac{\partial W}{\partial \bar{q}}(q, \bar{q}), \end{cases}$$

com $\bar{q}_0, \bar{p}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Então, tomando a imagem por meio de T desta solução, podemos calcular a solução do sistema Hamiltoniano original. Este método de integração das equações de Hamilton é conhecido como o método de Hamilton-Jacobi.

Uma simples consequência da existência de uma integral completa é que as novas funções coordenadas $\{\bar{q}_i\}$ formam um sistema de n integrais primeiras de X_H involutivo.

Na prática, o mais eficiente método para calcular integrais completas de (3.22) é por separação de variáveis. Entretanto, a separação de variáveis depende de uma escolha de coordenadas e nem sempre é possível aplicá-la. Uma discussão deste aspecto pode ser encontrada em [17, 25, 32].

3.7 Aplicação a algumas Métricas de Einstein

Nessa seção aplicaremos o método de Hamilton-Jacobi à integração do fluxo geodésico das seguintes classes de métricas de Einstein:

(a) $g = \epsilon_1 \left(\frac{q_1}{q_1 - A} dq_1^2 - \frac{\zeta^2 (q_1 - A)}{q_1} dq_2^2 \right) + \epsilon_2 q_1^2 \left(dq_3^2 + F\left(q_3\right) dq_4^2 \right)$,
onde $\epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1$ e $\zeta^2 = \pm 1$ e $F(q_3) = sinh^2(q_3), -cosh^2(q_3), sin^2(q_3)$.

(b) $g = \epsilon_1 \frac{1}{\sqrt{q_1}} \left(dq_1^2 - \zeta^2 dq_2^2 \right) + \epsilon_2 q_1 \left(dq_3^2 + \epsilon dq_4^2 \right)$,
onde $\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_2, \zeta^2 = \pm 1$.

Estas métricas são soluções das equações de Einstein no vácuo $Ric(g) = 0$ sob as seguintes hipóteses:

(I) o espaço admite uma álgebra de Killing 3-dimensional com órbitas 2-dimensionais.

(II) a métrica g é não degenerada sobre essas órbitas 2-dimensionais e a distribuição ortogonal às órbitas é completamente integrável.

Estas métricas admitem, como casos particulares, algumas métricas muito significativas. De fato, se consideramos em (a) $F(q_3) = sen^2(q_3), \zeta^2 = -1, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ e $A = 2\frac{GM}{c^2}$ (G é a constante de Newton, c a velocidade da luz e M uma massa) então obtemos a *solução de Schwarzchild* para o campo gravitacional com simetria esférica produzida por uma massa M não rotante. As álgebras de Killing destas métricas são completamente determinadas como segue. No caso (a), $Kill(g) = SO(2,1)$ se $F(q_3) = senh^2 q_3$, $-cosh^2 q_3$, ao contrário, se $F(q_3) = sen^2 q_3$, $Kill(g) = SO(3)$. No caso (b), a álgebra de Killing é $Kill(g) = Kill\left(d\xi^2 \pm d\eta^2\right)$. Maiores detalhes sobre estas métricas podem ser encontrados nos artigos [43], [44], [45]. Nestes trabalhos foram também classificadas as métricas com órbitas 2-dimensionais correspondentes às mesmas hipóteses (relativamente à não degeneração da métrica sobre as órbitas e à completa integrabilidade da distribuição ortogonal).

O caso de métricas degeneradas sobre as órbitas de Killing, ao contrário, foi completamente classificado em [23], [24]. Em [53] é possível encontrar um resumo completo desses resultados junto às possíveis aplicações físicas dessas métricas em relatividade geral.

3.7.1 Caso (a)

Nesse caso, usando o método de Hamilton-Jacobi, mostraremos a integração por quadraturas do fluxo geodésico de métricas da seguinte forma

$$g = \epsilon_1 \left(\frac{q_1}{q_1 - A} dq_1^2 - \frac{\zeta^2 (q_1 - A)}{q_1} dq_2^2 \right) + \epsilon_2 q_1^2 \left(dq_3^2 + F(q_3) dq_4^2 \right),$$

onde $\epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1$ e $\zeta^2 = \pm 1$.

Por meio da transformada de Legendre, a função Hamiltoniana se escreve

$$H = \frac{q_1 - A}{\epsilon_1 q_1} p_1^2 - \frac{q_1}{\epsilon_1 \zeta^2 (q_1 - A)} p_2^2 + \frac{1}{\epsilon_2 q_1^2} p_3^2 + \frac{1}{\epsilon_2 q_1^2 F(q_3)} p_4^2.$$

Nosso primeiro objetivo será encontrar uma função geradora de transformação simplética $W = W(q, \bar{q})$ tal que, nas novas coordenadas $(\bar{q}, \bar{p})$, a função Hamiltoniana tem a forma mais simples $\bar{H} = \bar{q}_1$.

Nestas coordenadas, as equações de Hamilton se escrevem

$$\begin{cases} \dot{\bar{q}}_i = 0 \\ \dot{\bar{p}}_i = -\delta_{1i} \quad i \in \{1, 2, 3, 4\} \end{cases}$$

e, portanto, são facilmente integráveis por quadraturas:

$$\begin{cases} \bar{q}_i = \bar{q}_{i_0} \\ \bar{p}_i = -\delta_{1i} t + \bar{p}_{i_0} \quad i \in \{1, 2, 3, 4\} \end{cases}$$

com $\bar{q}_{0_i}, \bar{p}_{i_0} \in \mathbb{R}$.

A função W deve ser uma integral completa da **equação de Hamilton-Jacobi**:

$$\frac{q_1 - A}{\epsilon_1 q_1} \left(\frac{\partial W}{\partial q_1} \right)^2 - \frac{q_1}{\epsilon_1 \zeta^2 (q_1 - A)} \left(\frac{\partial W}{\partial q_2} \right)^2 + \frac{1}{\epsilon_2 q_1^2} \left(\frac{\partial W}{\partial q_3} \right)^2 + \frac{1}{\epsilon_2 q_1^2 F(q_3)} \left(\frac{\partial W}{\partial q_4} \right)^2 = \bar{q}_1.$$

Esta equação pode ser integrada pelo método de separação de variáveis. De fato, se supormos que

$$W = W_1(q_1, \bar{q}) + W_2(q_2, \bar{q}) + W_3(q_3, \bar{q}) + W_4(q_4, \bar{q}), \tag{3.22}$$

onde $\bar{q} = (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \bar{q}_4)$, a equação de Hamilton-Jacobi assume a forma

$$\frac{q_1 - A}{\epsilon_1 q_1} \left(\frac{\partial W_1}{\partial q_1} \right)^2 - \frac{q_1}{\epsilon_1 \zeta^2 (q_1 - A)} \left(\frac{\partial W_2}{\partial q_2} \right)^2 + \frac{1}{\epsilon_2 q_1^2} \left(\frac{\partial W_3}{\partial q_3} \right)^2 + \frac{1}{\epsilon_2 q_1^2 F(q_3)} \left(\frac{\partial W_4}{\partial q_4} \right)^2 = \bar{q}_1.$$

Agora, derivando essa equação com respeito a q_2, obtemos que W_2 depende linearmente de q_2 e, portanto, pode ser escrita na forma

$$W_2(q_2, \bar{q}) = \alpha_{21}(\bar{q})q_2 + \alpha_{22}(\bar{q}). \tag{3.23}$$

Analogamente, derivando com respeito a q_4, obtemos

$$W_4(q_4, \bar{q}) = \alpha_{41}(\bar{q})q_4 + \alpha_{42}(\bar{q}). \tag{3.24}$$

Com isso, a equação de Hamilton-Jacobi assume a forma

$$\frac{q_1(q_1 - A)}{\epsilon_1}\left(\frac{\partial W_1}{\partial q_1}\right)^2 - \frac{q_1^3\alpha_{21}(\bar{q})^2}{\epsilon_1\zeta^2(q_1 - A)} - \bar{q}_1 q_1^2 = -\frac{1}{\epsilon_2}\left(\left(\frac{\partial W_3}{\partial q_3}\right)^2 + \frac{\alpha_{41}(\bar{q})^2}{F(q_3)}\right),$$

onde o lado esquerdo não depende de q_3 e o lado direito não depende de q_1. Isso mostra que ambos os lados são iguais a uma função $B(\bar{q})$. Logo, se obtem facilmente que

$$W_1 = \pm\int\sqrt{\frac{1}{q_1 - A}\left(\epsilon_1 q_1\bar{q}_1 + \frac{q_1^2\alpha_{21}(\bar{q})^2}{\zeta^2(q_1 - A)} + \frac{\epsilon_1 B(\bar{q})}{q_1}\right)}dq_1 + R_1(\bar{q}), \tag{3.25}$$

$$W_3 = \pm\int\sqrt{-\epsilon_2 B(\bar{q}) - \frac{\alpha_{41}(\bar{q})^2}{F(q_3)}}dq_3 + R_3(\bar{q}), \tag{3.26}$$

onde R_1 e R_3 são funções arbitrárias.

Portanto, substituindo 3.25,3.23,3.26 e 3.24 em 3.22, obtemos uma integral completa da equação de Hamilton-Jacobi. Em particular, escolhendo $\alpha_{22} = \alpha_{44} = 0$, $\alpha_{21} = \bar{q}_2$, $\alpha_{41} = \bar{q}_4$, $B = -\bar{q}_3$ e $R_1 = R_3 = 0$, podemos escolher a seguinte integral:

$$W = \int\sqrt{\frac{1}{q_1 - A}\left(\epsilon_1 q_1\bar{q}_1 + \frac{q_1^2\bar{q}_2^2}{\zeta^2(q_1 - A)} - \frac{\epsilon_1\bar{q}_3}{q_1}\right)}dq_1 + \bar{q}_2 q_2 + \int\sqrt{\epsilon_2\bar{q}_3 - \frac{\bar{q}_4^2}{F(q_3)}}dq_3 + \bar{q}_4 q_4.$$

Portanto, o fluxo geodésico é implicitamente descrito pelas equações

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\bar{q}_1}\int\sqrt{\frac{1}{q_1-A}\left(\epsilon_1 q_1\bar{q}_1 + \frac{q_1^2\bar{q}_2^2}{\zeta^2(q_1-A)} - \frac{\epsilon_1\bar{q}_3}{q_1}\right)}dq_1 = t - \bar{p}_{1_0} \\ q_2 = -\bar{p}_{2_0} - \frac{\partial}{\partial\bar{q}_2}\int\sqrt{\frac{1}{q_1-A}\left(\epsilon_1 q_1\bar{q}_1 + \frac{q_1^2\bar{q}_2^2}{\zeta^2(q_1-A)} - \frac{\epsilon_1\bar{q}_3}{q_1}\right)}dq_1 \\ \frac{\partial}{\partial\bar{q}_3}\int\sqrt{\epsilon_2\bar{q}_3 - \frac{\bar{q}_4^2}{F(q_3)}}dq_3 = -\bar{p}_{3_0} - \frac{\partial}{\partial\bar{q}_3}\int\sqrt{\frac{1}{q_1-A}\left(\epsilon_1 q_1\bar{q}_1 + \frac{q_1^2\bar{q}_2^2}{\zeta^2(q_1-A)} - \frac{\epsilon_1\bar{q}_3}{q_1}\right)}dq_1 \\ q_4 = -\bar{p}_{4_0} - \frac{\partial}{\partial\bar{q}_4}\int\sqrt{\epsilon_2\bar{q}_3 - \frac{\bar{q}_4^2}{F(q_3)}}dq_3 \end{cases}$$

onde as $\bar{q}_i$'s são constantes. É evidente que a dificuldade em escrever explicitamente o fluxo geodésico é devida às integrais presentes na primeira e terceira equações.

3.7.2 Caso (b)

Neste caso, usando o método de Hamilton-Jacobi, mostraremos a integração por quadraturas do fluxo geodésico de métricas da seguinte forma forma

$$g = \epsilon_1 \frac{1}{\sqrt{q_1}}(dq_1^2 - \zeta^2 dq_2^2) + \epsilon_2 q_1(dq_3^2 + \epsilon dq_4^2),$$

onde $\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_2, \zeta^2 = \pm 1$.

Por meio da transformada de Legendre, a função Hamiltoniana se escreve

$$H = \frac{\sqrt{q_1}}{\epsilon_1}(p_1^2 - \frac{1}{\zeta^2}p_2^2) + \frac{1}{\epsilon_2 q_1}(p_3^2 + \frac{1}{\epsilon}p_4^2).$$

Inicialmente, precisamos encontrar uma função geradora de transformação simplética $W = W(q, \bar{q})$ tal que, nas novas coordenadas $(\bar{q}, \bar{p})$, a função Hamiltoniana tem a forma $\bar{H} = \bar{q}_1$.

A função W deve ser uma integral completa da **equação de Hamilton-Jacobi**:

$$\frac{\sqrt{q_1}}{\epsilon_1}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 - \frac{1}{\zeta^2}\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2\right) + \frac{1}{q_1\epsilon_2}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial q_3}\right)^2 + \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\partial W}{\partial q_4}\right)^2\right) = \bar{q}_1.$$

Esta equação pode ser integrada através do método da separação de variáveis.

De fato, se supormos que

$$W = W_1(q_1, \bar{q}) + W_2(q_2, \bar{q}) + W_3(q_3, \bar{q}) + W_4(q_4, \bar{q}), \tag{3.27}$$

onde $\bar{q} = (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \bar{q}_4)$, a equação de Hamilton-Jacobi assume a forma

$$\frac{\sqrt{q_1}}{\epsilon_1}\left(\left(\frac{\partial W_1}{\partial q_1}\right)^2 - \frac{1}{\zeta^2}\left(\frac{\partial W_2}{\partial q_2}\right)^2\right) + \frac{1}{q_1\epsilon_2}\left(\left(\frac{\partial W_3}{\partial q_3}\right)^2 + \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\partial W_4}{\partial q_4}\right)^2\right) = \bar{q}_1.$$

Agora, derivando essa equação com respeito a q_2, obtemos que W_2 depende linearmente de q_2 e, portanto, pode ser escrita na forma

$$W_2(q_2, \bar{q}) = \alpha_{21}(\bar{q})q_2 + \alpha_{22}(\bar{q}). \tag{3.28}$$

Analogamente, derivando com respeito a q_3, obtemos

$$W_3(q_3, \bar{q}) = \alpha_{31}(\bar{q})q_3 + \alpha_{32}(\bar{q}) \tag{3.29}$$

e, derivando com respeito a q_4, obtemos

$$W_4(q_4, \bar{q}) = \alpha_{41}(\bar{q})q_4 + \alpha_{42}(\bar{q}). \tag{3.30}$$

Com isso, a equação de Hamilton-Jacobi assume a forma

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial q_1}\right)^2 = \bar{q}_1 + \frac{\sqrt{q_1}}{\epsilon_1}\left(\frac{\alpha_{21}(\bar{q})^2}{\zeta^2}\right) - \frac{1}{q_1\epsilon_2}\left(\alpha_{31}(\bar{q})^2 - \frac{\alpha_{41}(\bar{q})^2}{\epsilon}\right).$$

e é fácil ver que

$$\frac{\partial W_1}{\partial q_1} = \pm \int \sqrt{\bar{q}_1 + \frac{\sqrt{q_1}}{\epsilon_1}\left(\frac{\alpha_{21}(\bar{q})^2}{\zeta^2}\right) - \frac{1}{q_1\epsilon_2}\left(\alpha_{31}(\bar{q})^2 - \frac{\alpha_{41}(\bar{q})^2}{\epsilon}\right)}dq_1 + R(\bar{q}), \quad (3.31)$$

onde R é uma função arbitrária. Portanto, substituindo 3.31, 3.28, 3.29 e 3.30 em 3.27, obtemos uma integral completa da equação de Hamilton-Jacobi. Em particular, escolhendo $\alpha_{22} = \alpha_{33} = \alpha_{44} = 0$ e $R = 0$, obtemos a seguinte integral:

$$W = \frac{\partial W_1}{\partial q_1} = \int \sqrt{\bar{q}_1 + \frac{\sqrt{q_1}}{\epsilon_1}\left(\frac{\bar{q}_2^2}{\zeta^2}\right) - \frac{1}{q_1\epsilon_2}\left(\bar{q}_3^2 - \frac{\bar{q}_4^2}{\epsilon}\right)}dq_1 + \bar{q}_2 q_2 + \bar{q}_3 q_3 + \bar{q}_4 q_4.$$

Portanto, o fluxo geodésico é implicitamente descrito pelas equações

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{q}_1}\int \sqrt{\bar{q}_1 + \frac{\sqrt{q_1}}{\epsilon_1}\left(\frac{\bar{q}_2^2}{\zeta^2}\right) - \frac{1}{q_1\epsilon_2}\left(\bar{q}_3^2 - \frac{\bar{q}_4^2}{\epsilon}\right)}dq_1 = t - p_{1_0} \\ q_2 = -p_{2_0} - \frac{\partial}{\partial \bar{q}_2}\int \sqrt{\bar{q}_1 + \frac{\sqrt{q_1}}{\epsilon_1}\left(\frac{\bar{q}_2^2}{\zeta^2}\right) - \frac{1}{q_1\epsilon_2}\left(\bar{q}_3^2 - \frac{\bar{q}_4^2}{\epsilon}\right)}dq_1 \\ q_3 = -p_{3_0} - \frac{\partial}{\partial \bar{q}_3}\int \sqrt{\bar{q}_1 + \frac{\sqrt{q_1}}{\epsilon_1}\left(\frac{\bar{q}_2^2}{\zeta^2}\right) - \frac{1}{q_1\epsilon_2}\left(\bar{q}_3^2 - \frac{\bar{q}_4^2}{\epsilon}\right)}dq_1 \\ q_4 = -p_{4_0} - \frac{\partial}{\partial \bar{q}_4}\int \sqrt{\bar{q}_1 + \frac{\sqrt{q_1}}{\epsilon_1}\left(\frac{\bar{q}_2^2}{\zeta^2}\right) - \frac{1}{q_1\epsilon_2}\left(\bar{q}_3^2 - \frac{\bar{q}_4^2}{\epsilon}\right)}dq_1. \end{cases}$$

onde as q_i's são constantes. Observe que a dificuldade em escrever explicitamente o fluxo geodésico é devida à integral presente na primeira equação.

Capítulo 4

Uso de Simetrias na Integração de Fluxos Geodésicos

4.1 Introdução

No capítulo anterior mostramos como a geometria simplética pode ser usada para tratar a integração por quadraturas das EDO's do tipo variacional. Em particular, usando o método clássico de Hamilton-Jacobi, vimos como a abordagem simplética se aplica ao caso das equações que descrevem o fluxo geodésico de algumas métricas de Einstein.

Neste capítulo, discutiremos o uso de simetrias na integração de distribuições. Mais precisamente, provaremos a integrabilidade por quadraturas de uma distribuição na presença de uma estrutura solúvel. Dessa forma, encontraremos, como casos particulares, os teoremas de Liouville sobre a integrabilidade comutativa e não comutativa de sistemas Hamiltonianos (v. [13], [14], [28], [38]). Estes resultados serão aplicados ao caso particular da distribuição unidimensional que, sobre o fibrado tangente de uma variedade Riemanniana, é associada ao correspondente fluxo geodésico.

4.2 Álgebras Solúveis de Simetrias e Estruturas Solúveis

As estruturas solúveis foram introduzidas com o propósito de generalizar um resultado clássico que afirma que, conhecendo-se uma álgebra k-dimensional $\mathcal{G}$ de simetrias, solúvel e transversal, para uma distribuição $(n-k)$-dimensional $\mathcal{D}$ completamente integrável, em uma variedade n-dimensional, então $\mathcal{D}$ pode ser integrada por quadraturas. De fato, as estruturas solúveis generalizam a seguinte noção de álgebra solúvel:

Definição 4.2.1. *Uma álgebra de Lie $(\mathcal{G}, [,])$ se chama **solúvel** se a bandeira das álgebras* *derivadas é tal que*

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^{(0)} \supset \mathcal{G}^{(1)} \supset ... \supset \mathcal{G}^{(l)} = 0$$

para algum inteiro $l \geq 0$.

Lembramos que, dada uma álgebra de Lie $(\mathcal{G}, [,])$, a sua **primeira subálgebra derivada** $\mathcal{G}^{(1)}$ é

$$\mathcal{G}^{(1)} = \left\{[X, Y] : X, Y \in \mathcal{G}^{(0)}\right\}.$$

Indutivamente, são definidas as derivadas superiores

$$\mathcal{G}^{(h+1)} = \left\{[X, Y] : X, Y \in \mathcal{G}^{(h)}\right\}.$$

A partir de $\mathcal{G}^{(l)}$ é sempre possível construir uma base $\{Z_1, ..., Z_r\}$ de $\mathcal{G}$ tal que Z_{h+1} é simetria de $< Z_1, ..., Z_h >$, para todo $h \in \{1, ..., r-1\}$. Esta observação leva de forma natural a considerar a seguinte

Definição 4.2.2. *Dada uma distribuição* $\mathcal{D} =< X_1, ..., X_h >$*, em uma variedade diferenciável* M*, um sistema de campos de vetores* $\{Y_1, ..., Y_{n-h}\}$ *forma uma estrutura solúvel para* $\mathcal{D}$ *se, denotando* $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$ *e* $\mathcal{D}_s =< X_1, ..., X_h, Y_1, ..., Y_s >$*, as seguintes duas condições são satisfeitas:*

(i) $\mathcal{D}_{n-h} = TM$;

(ii) $\mathcal{L}_{Y_s}\mathcal{D}_{s-1} \subset \mathcal{D}_{s-1}$, $\forall s \in \{1, ..., n-h\}$.

Em particular, dada uma estrutura solúvel $\{Y_1, ..., Y_{n-h}\}$ para uma distribuição integrável $\mathcal{D}$, temos a bandeira de distribuições integráveis

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_1 \subset ... \subset \mathcal{D}_{n-h} = TM$$

Observe que a condição (i) implica que estruturas solúveis globais só podem existir para variedades orientáveis. Portanto, sobre variedades não orientáveis, só podemos considerar estruturas solúveis definidas localmente. Já a condição (ii), impõe somente que Y_1 seja simetria de $\mathcal{D}$. De fato, os demais campos $Y_2, ..., Y_{n-h}$ podem não ser simetrias da distribuição $\mathcal{D}$ mas cada campo Y_s deve ser simetria da distribuição $\mathcal{D}_{s-1}$.

Na seção a seguir, com o teorema 4.3.1, mostraremos que as estruturas solúveis desempenham o mesmo papel das álgebras solúveis maximais na integração de uma distribuição de Frobenius. Portanto, pelo fato de serem objetos mais gerais, as estruturas solúveis tornam-se particularmente úteis quando o teorema de Bianchi-Lie não pode ser aplicado.

4.3 Integração por Quadraturas na Presença de Estruturas Solúveis

Nesta seção veremos como estruturas solúveis podem ser utilizadas na integração de uma distribuição. Para isso, precisamos do seguinte

Teorema 4.3.1. *Se $\{Y_1,...,Y_{n-h}\}$ forma uma estrutura solúvel para uma distribuição $\mathcal{D} =< X_1,...,X_h >$ completamente integrável sobre uma variedade M n-dimensional e com forma de volume Ω, então:*

(1) $\Delta := Y_1\lrcorner...\lrcorner Y_{n-h}\lrcorner X_1\lrcorner...\lrcorner X_h\lrcorner\Omega \neq 0$;

(2) $\mathcal{D} = Ann\{\Omega_1,...,\Omega_{n-h}\}$, *onde*

$$\Omega_i := \frac{1}{\Delta}Y_1\lrcorner...\lrcorner\widehat{Y_i}\lrcorner...\lrcorner Y_{n-h}\lrcorner X_1\lrcorner...\lrcorner X_h\lrcorner\Omega, \tag{4.1}$$

para todo $i \in \{1,...,n-h\}$

(3) $d\Omega_{n-h} = 0$;

(4) $d\Omega_i \equiv 0 \ mod\{\Omega_{i+1},...,\Omega n-h\}$, *para todo* $i \in \{1,...,n-h-1\}$.

Prova: (1) e (2) são consequências do fato que Ω é uma forma de volume e que $\{Y_1,...,Y_{n-h},X_1,...,X_h\}$ é um referencial sobre M.

(3) Definindo

$$\alpha_i = Y_1\lrcorner...\lrcorner\widehat{Y_i}\lrcorner...\lrcorner Y_{n-h}\lrcorner X_1\lrcorner...\lrcorner X_h\lrcorner\Omega$$

e observando que $\Delta = (-1)^{k+1}Y_i\lrcorner\alpha_i$, para todo $i \in \{1,...,n-h\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
d\Omega_{n-h} &= d\left(\frac{1}{\Delta}\alpha_{n-h}\right)\\
&= \frac{1}{-\Delta^2}d\Delta\wedge\alpha_{n-h} + \frac{1}{\Delta}d\alpha_{n-h}\\
&= \frac{-d\Delta\wedge\alpha_{n-h}+\Delta d\alpha_{n-h}}{\Delta^2}\\
&= \frac{(-1)^{n-h+1}}{\Delta^2}\left[-(\mathcal{L}_{Y_{n-h}}\alpha_{n-h} - Y_{n-h}\lrcorner d\alpha_{n-h})\wedge\alpha_{n-h} + Y_{n-h}\lrcorner(\alpha_{n-h})d\alpha_{n-h}\right],
\end{aligned}$$

onde usamos a fórmula de Cartan para a derivada de Lie.

Como, por construção, $\mathcal{D}_{n-h-1} = Ann\{\alpha_{n-h}\}$ é integrável

$$d\alpha_{n-h} = \rho\wedge\alpha_{n-h}.$$

e, como Y_{n-h} é simetria de $\mathcal{D}_{n-h-1}$, temos que

$$\mathcal{L}_{Y_{n-h}}\alpha_{n-h} = f\alpha_{n-h},$$

para alguma função f. Dessa forma, obtemos que $d\Omega_{n-h} = 0$.
(4) Utilizando o Lema de Poincaré, obtemos que, pelo menos localmente, $d\Omega_{n-h} = dI_{n-h}$, para alguma função I_{n-h}. Entretanto, $\mathcal{D}_{n-h-1} = Ann\{\Omega_{n-h}\}$ e, portanto, I_{n-h} é uma integral primeira de $\mathcal{D}_{n-h-1}$. Falta apenas observar que, sobre as variedades de nível de I_{n-h}, $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{n-h-1}\}$ forma uma estrutura solúvel para $\mathcal{D}$. Logo, podemos iterar o procedimento anterior e demonstrar que a restrição a essa variedade de nível de Ω_{n-h-1} é fechada e encontrar mais uma integral primeira I_{n-h-1}. Continuando dessa forma, provamos o desejado. Em particular, obtemos um sistema completo de integrais $\{I_1, ..., I_{n-h}\}$.

■

Na prática, utilizando este teorema, podemos iterativamente calcular um número maximal de integrais primeiras $\{I_1, ..., I_{n-h}\}$ que, em virtude da proposição 2.1.17, nos permite descrever as variedades integrais de $\mathcal{D}$ na forma implícita

$$\begin{cases} I_1 = c_1 \\ \vdots \\ I_{n-h} = c_{n-h} \end{cases},$$

$c_i \in \mathbb{R}$. Como consequência desse teorema, obtemos também o seguinte

Teorema 4.3.2. *(de Bianchi-Lie) Se uma distribuição completamente integrável $\mathcal{D}$ admite uma álgebra maximal e solúvel de simetrias transversais a $\mathcal{D}$, então $\mathcal{D}$ é integrável por quadraturas.*

Prova: Uma álgebra solúvel de simetrias transversais maximal forma uma estrutura solúvel para a distribuição $\mathcal{D}$. Portanto, aplicando o teorema anterior a esta estrutura, o resultado segue.

■

4.4 Aplicações a EDO's do Tipo Variacional

Como discutimos no capítulo 2, as equações de Euler-Lagrange, quando a lagrangeana é regular, são as equações do fluxo de um campo X_L sobre $J^1(\pi)$.

Aqui, como no capítulo 2, π denota o fibrado trivial $\pi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow \mathbb{R}$. Portanto, podemos identificar $J^1(\pi)$ com $\mathbb{R} \times M$. De fato, uma seção σ qualquer de π pode ser identificada com uma curva γ em M e $[\sigma]^1_a$, $a \in \mathbb{R}$, pode ser identificado com o vetor tangente à curva γ no ponto $\gamma(a)$.

No caso de uma lagrangeana $L = \frac{1}{2} g_{ij} v_i v_j$, que descreve o fluxo geodésico de uma métrica g, o campo X_L independe da coordenada t em $\mathbb{R}$ e, portanto, é um campo que se pode projetar, com respeito à projeção $\pi_1 : J^1(\pi) \longrightarrow TM$, em um campo sobre TM que denotaremos com X_E.

Aplicaremos os resultados da seção anterior à distribuição 1-dimensional sobre TM definida como $< X_E >$. As variedades integrais dessa distribuição são as pré-geodésicas da conexão Riemanniana em M, isto é, a menos de uma parametrização natural, são curvas geodésicas.

O campo X_E é um campo sobre TM que, via transformada de Legendre, se transforma no campo Hamiltoniano X_H sobre T^*M com Hamiltoniana $H = \frac{1}{2}g^{ij}p_ip_j$. Assim como para a distribuição $< X_E >$, também para $< X_H >$ podemos aplicar os resultados da seção anterior para integrar o fluxo geodésico. Nesse caso, usando o teorema 4.3.1 sobre integração com estruturas solúveis, podemos facilmente deduzir dois importantes resultados sobre a integrabilidade de sistemas Hamiltonianos com simetrias, a saber, o teorema de Liouville comutativo e o teorema de Liouville não-comutativo. O teorema de Liouville comutativo afirma que, se $< X_H >$ é um campo Hamiltoniano sobre uma variedade simplética $2n$-dimensional M que admite n integrais primeiras $f_0 = H, f_1, ..., f_{n-1}$ funcionalmente independentes e em involução (isto é, tal que $\{f_i, f_j\} = 0$), então o fluxo Hamiltoniano de X_H é integrável por quadraturas.

Do nosso ponto de vista, a integrabilidade por quadraturas é uma simples consequência do fato que, nas hipóteses do teorema, X_H é tangente às variedades de nível n-dimensionais $\Gamma_c = \{H = c_0, f_1 = c_1, ..., f_{n-1} = c_{n-1}\}$ e que, além disso, os campos $\{X_H, X_{f_1}, ..., X_{f_{n-1}}\}$ são todos tangentes a Γ_c e comutam. Portanto, $< X_H >$ induz, em cada variedade de nível Γ_c, uma distribuição 1-dimensional que admite uma estrutura solúvel dada pelos campos $X_{f_1}, ..., X_{f_{n-1}}$. Neste caso, a estrutura solúvel é dada por uma álgebra abeliana de simetrias de $< X_H >$.

O teorema de Liouville não comutativo, demonstrado por Fomenko e Mishchenko em [38], generaliza o teorema anterior da seguinte maneira: se X_H é um campo Hamiltoniano sobre uma variedade simplética $2n$-dimensional M que admite uma álgebra de Poisson de simetrias $\mathcal{A}$ m-dimensional, com $m \geq n$ e com um centro $\mathcal{A}_0$ $(2n - m)$-dimensional tal que $H \in \mathcal{A}_0$, então o fluxo de X_H se integra por quadraturas. Também neste caso, podemos deduzir este resultado pelo teorema 4.3.1 da seção anterior. De fato, se $\mathcal{A} =< \{f_0 = H, f_1, ..., f_{m-1}\} >$, então as variedades $\Gamma_c = \{H = c_0, f_1 = c_1, ..., f_{m-1} = c_{m-1}\}$ são $(2n-m)$-dimensionais e, se $\mathcal{A}_0 = \{g_1 = H, g_2, ..., g_{2n-m}\}$, os campos $\{X_H, X_{g_2}, ..., X_{g_{2n-m}}\}$ são tangentes a estas variedades. Logo, sendo que $[X_{g_i}, X_{g_j}] = 0$, sobre cada Γ_c ainda temos uma estrutura solúvel para a distribuição induzida por $< X_H >$. Também neste caso, a estrutura solúvel é formada por uma álgebra abeliana de simetrias.

Com base nestas interpretações dos teoremas de Liouville comutativo e não comutativo, podemos pensar em aplicar o teorema 4.3.1 a casos mais gerais, como proposto em [19]. De fato, se X_H é um campo Hamiltoniano sobre uma variedade simplética $2n$-dimensional M que admite uma álgebra de Poisson de simetrias $\mathcal{A}$, h-dimensional, tal que $\mathcal{A} = \{f_0 = H, f_1, ..., f_{h-1}\}$. Então, denotando com $\Gamma_c = \{H = c_0, f_1 = c_1, ..., f_{h-1} = c_{h-1}\}$ as correspondentes variedades de nível, podemos aplicar o teorema 4.3.1 aos casos em que: (i) existem $2n-h$ campos $Z_1 = X_H, Z_2, ..., Z_{2n-h}$ tangentes às variedades de nível Γ_c (e, portanto, tais que $Z_i(f_j) = 0$); (ii) $\{Z_1, ..., Z_{2n-h}\}$ determina uma estrutura solúvel para $< X_H >$ em cada Γ_c.

Assim como os teoremas de Liouville, comutativo e não comutativo, tem um correspondente lagrangeano em TM, também a generalização acima pode ser aplicada em TM bem como em T^*M. De fato, em TM, se X_E (o campo correspondente a X_H) admite um sistema de integrais primeiras do tipo Nöether, funcionalmente independentes, $\{f_0 = L = X_E \lrcorner \Theta, f_1, ..., f_{h-1}\}$, podemos aplicar o teorema 4.3.1 aos casos em que: (i) existem $2n-h$ campos $Z_1 = X_E, Z_2, ..., Z_{2n-h}$ tangentes às variedades de nível $\Gamma_c = \{L = c_0, f_1 = c_1, ..., f_{h-1} = c_{h-1}\}$; (ii) $\{Z_1, ..., Z_{2n-h}\}$ determina uma estrutura solúvel para $< X_E >$ em cada Γ_c.

Na próxima seção, trabalhando em TM, serão dados alguns exemplos deste método. Outros exemplos poderão ser encontrados em [19].

4.5 Algumas Aplicações

Nesta seção ilustraremos, por meio de alguns exemplos, o método descrito na seção anterior. Usaremos, para este fim, a classificação dada por Bianchi em [9] das métricas tridimensionais que admitem um grupo de isometrias. Neste trabalho de Bianchi, foram identificados quinze tipos distintos de métricas. Em quase todos estes casos, o fluxo geodésico é facilmente integrável por quadratura pois existem álgebras bidimensionais abelianas de simetrias. Nos seguintes cinco casos, ao contrário, a integrabilidade, se for possível, é menos óbvia.

(i) $g = dx_1^2 + \alpha dx_2^2 + 2\left(\beta - \alpha x_2\right) dx_2 dx_3 + \left(\alpha x_2^2 - 2\beta x_2 + \gamma\right) dx_3^2$,

com α, β e γ funções de x_1;

(ii) $g = dx_1^2 + \varphi^2\left(x_1\right)\left(dx_2^2 + sin^2\left(dx_3^2\right)\right)$;

(iii) $g = dx_1^2 + \varphi^2\left(x_1\right)\left(dx_2^2 + e^{2x_2} dx_3^2\right)$,

onde φ é uma função arbitrária.

(iv)

$$\begin{aligned} g &= \frac{Q^{(4)}(x_1)}{24}dx_1^2 + Q(x_1)dx_2^2 + \left(Q(x_1)x_2^2 - \frac{Q'(x_1)}{2}x_2 + \frac{Q''(x_1)}{2} - \frac{h}{2}\right)dx_3^2 \\ &+ 2\left(\frac{Q''(x_1)}{12} + h\right)dx_1dx_2 + 2\left\{\frac{Q'''(x_1)}{24} - \left(\frac{Q''(x_1)}{12} + h\right)x_2\right\}dx_1dx_3 \\ &+ 2\left(\frac{Q'(x_1)}{4} - Q(x_1)x_2\right)dx_2dx_3, \end{aligned}$$

com $Q(x_1)$ um polinômio de grau quatro em x_1 com primeiro coeficiente não negativo e h uma constante;

(v) $g = \sum_{i,k} a_{ik}dx_idx_k$, com

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2e\,cos(2x_3) + 2f\,sen(2x_3) + \frac{(a^2+d^2)}{2}; \\ a_{22} &= 2sen(x_1)cos(x_1)(b\,sen(x_3) - c\,cos(x_3)) - a_{11}sen^2(x_1) + a^2 + d\,sen^2(x_1); \\ a_{33} &= a^2; \\ a_{12} &= cos(x_1)(b\,cos(x_3) + c\,sen(x_3)) + 2sen(x_1)(e\,sen(2x_3) - f\,cos(2x_3)) \\ a_{13} &= b\,cos(x_3) + c\,sen(x_3) \\ a_{23} &= a^2cos(x_1) + sen(x_1)(b\,sen(x_3) - c\,cos(x_3)) \end{aligned}$$

De fato, nestes casos, é necessária uma análise mais detalhada para estabelecer se o fluxo geodésico é integrável por quadraturas.

O primeiro exemplo abaixo é relativo a uma das métricas classificadas em [9] pelas quais, ao contrário das métricas $(i)-(v)$, a propriedade de integrabilidade por quadraturas é mais evidente. O objetivo deste exemplo é, principalmente, o de ilustrar o mecanismo de integração por meio de estruturas solúveis no caso mais simples já coberto pelo teorema de Lie-Bianchi. No segundo exemplo, ao contrário, será mostrada a integrabilidade por quadraturas das métricas do tipo (iii). Neste caso, já que o teorema de Lie-Bianchi não se aplica, o método de integração discutido na seção anterior será ilustrado com um maior grau de generalidade. Em particular neste exemplo, veremos a vantagem de considerar simetrias variacionais mais gerais daquelas de Killing justificando, assim, a descrição daquele tipo de simetria no capítulo 2.

4.5.1 Aplicação às Métricas do Tipo $g = dx_1^2 + dx_2^2 + 2x_1dx_2dx_3 + \left(1 + x_1^2\right)dx_3^2$

Nos demais casos estudados em [9], a integrabilidade é garantida pois as métricas admitem uma álgebra abeliana de simetrias $\mathcal{G} =< X_1, X_2 >$. Logo, se $\{f_0 = E, f_1, f_2\}$

são integrais primeiras dadas pelo funcional energia e pelas simetrias do tipo Killing X_1 e X_2 sobre as correspondentes variedades integrais tridimensionais, temos uma estrutura solúvel abeliana induzida pela álgebra abeliana $< X_E, X_0, X_1 >$. Como ilustração deste caso, integramos por quadraturas o fluxo geodésico da métrica $g = dx_1^2 + dx_2^2 + 2x_1 dx_2 dx_3 + (1 + x_1^2)\, dx_3^2$. Esta métrica admite uma álgebra abeliana de simetrias variacionais do tipo Killing $Kill(g) =< X_1, X2 >$ gerada pelos campos

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^2}, \;\; X_2 = \frac{\partial}{\partial x^3}$$

que satisfazem

$$[X_1, X_2] = 0.$$

A lagrangeana Riemanniana L, neste caso, é dada por

$$L = v_1^2 + v_2^2 + 2x^1 v_2 v_3 + (1 + (x^1)^2) v_3^2, \tag{4.2}$$

onde (t, x^i, v_i) são coordenadas sobre $J^1(\pi)$.

Usando essa L e lembrando que $\Theta = \sum_i \frac{\partial L}{\partial v_i}(dx_i - v_i dt) - Ldt$ podemos calcular as integrais primeiras $f_1 = X_1^{(1)} \lrcorner \Theta$ e $f_2 = X_2^{(1)} \lrcorner \Theta$ utilizando os primeiros prolongamentos

$$\begin{aligned} X_1^{(1)} &= X_1 \\ X_2^{(1)} &= X_2 \end{aligned}$$

obtemos que $f_1 = v_2 + x_1 v_3$ e $f_2 = x_1 v_2 + v_3 + v_3 x_1^2$.

Outra integral primeira é dada pelo funcional energia $E = L$. Esta é a integral primeira correspondente ao mesmo campo X_E que descreve o fluxo geodésico

$$\begin{aligned} X_E = \;& v_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x^3} + (v_2 v_3 + x^1 v_3) \frac{\partial}{\partial v_1} \\ +\;& (-v_3 v_1 + x^1 v_1 v_2 + (x^1)^2 v_1 v_3) \frac{\partial}{\partial v_2} - (v_1 v_2 + x^1 v_1 v_3) \frac{\partial}{\partial v_3}. \end{aligned}$$

As variedades de nível $\Gamma_c = \{E = c_0, f_1 = c_1, f_2 = c_2\}$, neste caso, são tridimensionais já que, de fato, as integrais primeiras E, f_1 e f_2 são funcionalmente independentes.

Como a álgebra de simetrias $Kill(g)$ é abeliana e tangente às variedades de nível, podemos utilizar o método de integração com estruturas solúveis com esta álgebra e com a forma de volume $\Omega := dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. Assim, temos que

$$\Delta := X_E \lrcorner X_1 \lrcorner X_2 \lrcorner \Omega = v_1$$

e a restrição $\bar{\Omega}_2$ da 1-forma

$$\Omega_2 = \frac{1}{\Delta} X_E \lrcorner X_1 \lrcorner \Omega = -v_3 \frac{dx_1}{v_1} + dx_3$$

à variedade Γ_c é fechada.

É possível verificar que $\bar{\Omega}_2 = d\left[x_3 - \frac{v_1}{v_2+x_1v_3}\right]$. Logo, $I_2 := x_3 - \frac{v_1}{v_2+x_1v_3}$ é uma integral primeira de $< X_E, X_1, X_2 >$ sobre Γ_c. Analogamente, a restrição $\bar{\Omega}_1$ da 1-forma

$$\Omega_1 = \frac{1}{\Delta} X_E \lrcorner X_2 \lrcorner \Omega = v_2 \frac{dx_1}{v_1} - dx_2$$

à variedade $\Gamma_c \cap \{I_2 = c_3\}$ é fechada e podemos mostrar que $\bar{\Omega}_1 = dI_1$ com

$$\begin{aligned} I_1 = & \frac{(2v_2^2 + 4x_1v_2v_3 + 2x_1^2v_3^2 + v_3^2 + v_1^2)arctg(\frac{\sqrt{(v_2+x_1v_3)^2}(x_1 - \frac{(x_1v_2+(1+x_1^2)v_3)}{v_2+x_1v_3})}{v_1})}{2\sqrt{(v_2+x_1v_3)^2}(v_2+x_1v_3)^2} \\ & - \frac{2x_2v_2^2 + 4x_2x_1v_2v_3 + 2x_2x_1^2v_3^2 + 2x_1v_1v_2 + v_3v_1 + 2x_1^2v_1v_3}{2\sqrt{(v_2+x_1v_3)^2}(v_2+x_1v_3)^2}. \end{aligned}$$

Logo, as geodésicas são implicitamente descritas pelo sistema

$$\{E = c_0, f_1 = c_1, f_2 = c_2, I_1 = c_3, I_2 = c_4\}$$

4.5.2 Aplicação às Métricas do tipo $g = dx_1^2 + \phi(x_1)\left(dx_2^2 + e^{2x_2}dx_3^2\right)$

Como exemplo de aplicação do método das estruturas solúveis no caso em que não temos uma álgebra de simetrias abeliana, mostraremos como é possível integrar por quadraturas o fluxo geodésico da métrica $g = dx_1^2 + \phi(x_1)(dx_2^2 + e^{2x_2}dx_3^2)$. Para esta métrica é conhecida a álgebra de simetrias do tipo Killing $Kill(g) =< X_1, X_2, X_3 >$ gerada pelos campos

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x^3}, \; X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} - x_3\frac{\partial}{\partial x^3} \\ X_3 &= x_3\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(e^{-2x_2} - x_3^2\right)\frac{\partial}{\partial x_3} \end{aligned}$$

que satisfazem

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= -X_1 \\ [X_1, X_3] &= -X_2 \\ [X_2, X_3] &= X_1 \end{aligned}$$

A lagrangeana Riemanniana L, neste caso, é dada por

$$L(t, x^i, v_i) = \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{2}\phi(x_1)\left(v_2^2 + e^{2x_2}v_3^2\right), \tag{4.3}$$

onde (t, x^i, v_i) são coordenadas sobre $J^1(\pi)$.

Usando essa L e lembrando que $\Theta = \sum_i \frac{\partial L}{\partial v_i}(dx_i - v_i dt) - Ldt$ podemos facilmente calcular as integrais primeiras

$$f_1 = X_1^{(1)} \lrcorner \Theta, \quad f_2 = X_2^{(1)} \lrcorner \Theta, \quad f_3 = X_3^{(1)} \lrcorner \Theta$$

utilizando os primeiros prolongamentos

$$\begin{aligned}
X_1^{(1)} &= X_1; \\
X_2^{(1)} &= X_2 - v_3 \frac{\partial}{\partial v_3}; \\
X_3^{(1)} &= X_3 + v_3 \frac{\partial}{\partial v_2} - (e^{-2x_2} v_2 + x_3 v_3) \frac{\partial}{\partial v_3}
\end{aligned}$$

e obtemos que

$$\begin{aligned}
f_1 &= \phi^2 e^{2x_2} v_3; \\
f_2 &= -phi^2 (x_3 e^{2x_2} v_3 - v_2) \\
f_3 &= -\frac{1}{2} \phi^2 (-v_3 + e^{2x_2} x_3^2 - 2x_3 v_2).
\end{aligned}$$

Outra integral primeira é dada pelo funcional energia $E = L$. Esta é a integral primeira correspondente ao mesmo campo X_E que descreve o fluxo geodésico

$$\begin{aligned}
X_E = \; & v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \phi\phi'(v_2^2 + e^{2x_2} v_3^2) \frac{\partial}{\partial v_1} \\
+ \; & (\phi^{2x_2} v_3^2 - 2v_1 v_2 \phi') \frac{\partial}{\partial v_2} - \frac{2v_3(v_1\phi' + \phi v_2)}{\phi} \frac{\partial}{\partial v_3}.
\end{aligned}$$

O nosso problema consiste em integrar o campo X_E.

Sabemos que os campos $\left\{X_E, X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, X_3^{(1)}\right\}$ geram uma álgebra satisfazendo

$$\begin{aligned}
[X_E, X_i^{(1)}] &= 0 \\
[X_1^{(1)}, X_2^{(1)}] &= [X_1, X_2]^{(1)} = -X_1^{(1)} \\
[X_1^{(1)}, X_3^{(1)}] &= [X_1, X_3]^{(1)} = X_2^{(1)} \\
[X_2^{(1)}, X_3^{(1)}] &= [X_2, X_3]^{(1)} = -X_3^{(1)}.
\end{aligned}$$

Logo, esta álgebra não é solúvel. Além disso, nem todos estes campos são tangentes às variedades de nível $\{E = c_0, f_1 = c_1, f_2 = c_2, f_3 = c_3\}$ que são bidimensionais. De fato, as funções E, f_1, f_2 e f_3 são funcionalmente independentes. O campo X_E é tangente à essa variedade de nível e, ao contrário deste, nenhum dos outros campos X_i é tangente.

Mostraremos dois possíveis métodos de integração do fluxo geodésico aproveitanto, em ambos os casos, a presença de simetrias de Cartan. Pode-se verificar, no caso desta métrica, que a álgebra das simetrias variacionais do tipo Lie coincide com $Kill(g)$. Ao contrário, a álgebra de simetrias variacionais do tipo Cartan é mais ampla e usaremos estruturas solúveis adaptadas a elementos dessa álgebra.

Abordagem I : Integração sobre variedades de nível tridimensionais

Neste caso, construiremos uma estrutura solúvel tangente às variedades de nível

$$\Gamma_c = \{E = c_0, f_1 = c_1, f_2 = c_2\}\,.$$

Para esse fim, procuramos uma simetria variacional Z_1 do tipo Cartan, tangente a Γ_c e independente de X_E. Uma simetria desse tipo é dada pelo campo

$$Z_1 = \phi^2(-v_2\frac{\partial}{\partial x_2} - v_3\frac{\partial}{\partial x_3} - e^{2x_2}v_3^2\frac{\partial}{\partial v_2} + 2v_2v_3\frac{\partial}{\partial v_4}).$$

Este campo comuta com X_E. Portanto, para construir uma estrutura solúvel do tipo que precisamos podemos procurar um campo Z_2 tangente a Γ_c e tal que

$$\begin{aligned} [Z_2, Z_1] &\in \; < X_E, Z_1 > \\ [Z_2, X_E] &\in \; < X_E, Z_1 >. \end{aligned}$$

Uma escolha pode ser

$$Z_2 = -e^{2x_2}v_3\frac{\phi^3}{\phi'}\frac{\partial}{\partial x_1} + \phi^2 e^{2x_2}v_3\frac{\partial}{\partial x_2} - \phi^2 v_2\frac{\partial}{\partial x_3} + v_2v_3\phi^2e^{2x_2}\frac{\partial}{\partial v_2}.$$

Dessa forma, $< X_E, Z_1, Z_2 >$ é uma estrutura solúvel sobre Γ_c. Portanto, podemos aplicar o método de integração com estruturas solúveis usando a forma de volume

$$\Omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

sobre Γ_c. De fato, $\{E = c_0, f_1 = c_1, f_2 = c_2\}$ pode ser resolvida com respeito a v_1, v_2 e v_3 e, portanto, tem coordenadas internas x_1, x_2, x_3. De fato, temos a seguinte parametrização de Γ_c:

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{c_1}{\phi^2 e^{2x_2}} \\ v_2 &= \frac{c_1x_3 + c_2}{\phi^2} \\ v_1 &= \frac{\epsilon}{e^{2x_2}}(-c^2 - c_1^2e^{2x_2}x_3^2 - 2c_1c_2x_3e^{2x_2} - c_2^2e^{2x_2} + c_0e^{2x_2}\phi^2)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

onde $\epsilon = \pm 1$. Assim, temos que

$$\Delta := X_E \lrcorner Z_1 \lrcorner Z_2 \lrcorner \Omega = v_1\phi^4(v_2^2 + e^{2x_2}v_3^2)$$

e a restrição $\bar{\Omega}_2$ da 1-forma

$$\Omega_2 = \frac{1}{\Delta}X_E \lrcorner Z_1 \lrcorner \Omega = \frac{\phi^2}{\Delta}(v_1v_3dx_2 - v_1v_2dx_3)$$

à variedade Γ_c é fechada.

É possível verificar que

$$\bar{\Omega}_2 = d\left[-\frac{1}{2c_1}ln\left(c_1^2e^{-2x_2}+(c_2+c_1x_3)^2\right)\right].$$

Logo, $I_2 := c_1^2e^{-2x_2}+(c_2+c_1x_3)^2$ é uma integral primeira de $< X_E, Z_1, Z_2 >$ sobre Γ_c. Subsequentemente, sobre $\Gamma_c \cap \{I_2 = c_3\}$, a restrição $\bar{\Omega}_1$ da forma $\Omega_1 = \frac{1}{\Delta}X_E \lrcorner Z_2 \lrcorner \Omega$ é fechada e vale

$$d\Omega_1 = d\left(\frac{1}{\Delta}X_E \lrcorner Z_2 \lrcorner \Omega\right) = dI_1,$$

onde $I_1 = e^{c_1c_3}arctg\left[(c_2+c_1x_3)\,e^{c_1c_3}\right]+\int \frac{\epsilon}{\phi\sqrt{c_0\phi^2-e^{-2c_1c_3}}}dx_1$. Esta é outra integral primeira de $< X_E, Z_1, Z_2 >$ sobre Γ_c.

Concluindo, as geodésicas são implicitamente descritas pelo sistema

$$\{E = c_0, f_1 = c_1, f_2 = c_2, I_2 = c_3, I_3 = c_4\}.$$

Abordagem II : Integração sobre variedades de nível bidimensionais

Agora, consideraremos as variedades de nível

$$\Gamma_c = \{E = c_0, f_1 = c_1, f_2 = c_2, f_3 = c_3\}$$

e procuramos uma simetria Z_1 de X_E sobre Γ_c. Portanto, construiremos uma estrutura solúvel para $< X_E >$ sobre estas variedades de nível. Uma tal simetria sobre Γ_c é dada por

$$Z_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \phi^2v_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \phi^2v_3\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial v_1} + \phi^2e^{2x_2}v_3^2\frac{\partial}{\partial v_2} - 2\phi^2v_2v_3\frac{\partial}{\partial v_3}.$$

Esta é uma simteria do tipo Cartan tal que $[Z_1, X_E] = 0$ e é tangente a Γ_c. Logo, $< X_E, Z_1 >$ é uma estrutura solúvel abeliana sobre Γ_c. Portanto, podemos usar esta estrutura para integrar o fluxo geodésico sobre Γ_c.

Observação 4.5.1. *Observe que $Z_1 \lrcorner \Theta = \phi^4(v_2^2 + exp2x_2v_3^2)$ depende funcionalmente de f_0, f_1, f_2 e f_3.*

Como as equações $\{E = c_0, f_1 = c_1, f_2 = c_2, f_3 = c_3\}$ podem ser resolvidas na forma

$$\begin{aligned}
v_3 &= \frac{-c_1x_3^2+2x_3c_2-2c_3}{\phi^2} \\
v_2 &= \frac{x_3c_1+c_2}{\phi^2} \\
v_1 &= \epsilon\frac{\sqrt{c_0\phi^2-c_2^2-2c_1c_3}}{\phi}, \quad \epsilon = \pm 1 \\
x_2 &= ln\left(-\frac{c_1}{c_1x_3^2+2x_3c_2-2c_3}\right).
\end{aligned}$$

uma forma de volume sobre Γ_c é $\Omega = dx_1 \wedge dx_3$. Usando essa forma, é possível verificar que $\Delta = -v_1 v_3 \phi^2$ e que a 1-forma $\Omega_1 = \frac{1}{\Delta} X_E \lrcorner \Omega = \frac{1}{\Delta}(v_3 dx_1 - v_1 dx_3)$ é fechada sobre Γ_c. De fato, temos que

$$\begin{aligned} \Omega_1|_{\Gamma_c} &= \bar{\Omega}_1 = d\left[\frac{-arctg\left(\frac{c_1x_3+c_2}{\sqrt{2c_1c_3+c_2^2}}\right)}{c_2^2+2c_1c_3} + \int \frac{\epsilon}{\phi\sqrt{-2c_1c_3-c_2^2+c_0\phi^2}}dx_1\right] \\ &= dI_1. \end{aligned}$$

Logo, as geodésicas (mais precisamente, as pré-geodésicas) são descritas pelo sistema

$$\{E = c_0, f_1 = c_1, f_2 = c_2, f_3 = c_3, I_1 = c_4\}.$$

Referências

[1] A. V. Aminova 2003 Projective Transformations of Pseudo-Riemannian Manifolds, *Journal of Mathematical Sciences* **113** 367-470

[2] I. Anderson and M. Fels 2005 Exterior Differential Systems with Symmetry *Acta Appl. Math.* **87** 3-31

[3] I. Anderson, N. Kamran and P. Olver 1993 Internal, External and Generalized Symmetries *Adv. Math.* **100** 53-100

[4] V. I. Arnold, A. B. Givental 2001 *Sympletic Geometry* Dynamical Systems IV (Springer-Verlag)

[5] V. I. Arnold 1989 *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer-Verlag)

[6] P. Basarab-Horwath 1992 Integrability by quadratures for systems of involutive vector fields *Ukrain. Mat. Zh.* **43** 1330-1337; translation in *Ukrain. Math. J.* **43** 1236-1242

[7] M.A. Barco and G.E. Prince 2001 Solvable symmetry structures in differential form applications *Acta Appl. Math.* **66** 89-121

[8] M.A. Barco and G.E. Prince 2001 New symmetry solution techniques for first-order non-linear PDEs *Appl. Math. Comput.* **124** 169-196

[9] L. Bianchi 1898 Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti *Memorie di Matematica e di Fisica della Societa Italiana delle Scienze, Serie Terza* **Tomo XI** 267-352 (Reimpressão: *General Relativity and Gravitation* 2001, v. 33, No 12)

[10] G. W. Bluman and S. C. Anco 2002 *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations* (Springer-Verlag)

[11] G. W. Bluman and S. Kumei 1989 *Symmetries and differential equations* (Springer-Verlag)

[12] G. W. Bluman and G. J. Reid 1988 New symmetries for ordinary differential equations *IMA J. Appl. Math.* **40** 87-94

[13] A. V. Bolsinov and A. T. Fomenko 2004 *Integrable Hamiltonian Systems, Geometry, Topology, Classification* (Chapman-Hall/CRC)

[14] A. V. Bolsinov and B. Jovanović 2002 Noncommutative Integrability, Moment Map and Geodesic Flows *Ann. Glob. Anal. and Geom.* **23** 305-322

[15] F. Brickell and R. S. Clark 1970 *Differentiable Manifolds* (Van Nostrand Reinhold Co.)

[16] R. Bryant, S.S. Chern, R. Gardner, H. Goldschmidt, P. Griffiths 1990 *Exterior Differential Systems* (MSRI Publications)

[17] A. Bruce, R. McLenaghan, R. Smirnov 2001 A geometrical approach to the problem of integrability of Hamiltonnian systems by separation of variables *J. Geom. Phys.* **39** 301-322

[18] M. P. do Carmo 1992 *Riemannian Geometry* (Birkauser)

[19] D. Catalano Ferraioli, Solvable Structures Applied to Integration of Variational ODEs (em preparação)

[20] D. Catalano Ferraioli, P. Morando 2009 Applications on Solvables Structures to the Nonlocal Symmetry-Reduction of ODEs *J. Nonlinear Math. Phys.* **16** 27-42

[21] D. Catalano Ferraioli, P. Morando 2009 Local and Nonlocal Solvable Structures in the Reduction of ODEs *J. Phys. A* **42** 035210

[22] D. Catalano Ferraioli 2007 Nonlocal aspects of λ-symmetries and ODEs reduction *J. Phys. A: Math Theor* **40** 5479-5489

[23] D. Catalano Ferraioli and A. M. Vinogradov 2006 Ricci Flat 4-Metrics with Bidimensional Null Orbits Part I. General Aspects and Nonabelian Case *Acta Apl. Math.* **92** 209-225

[24] D. Catalano Ferraioli and A. M. Vinogradov 2006 Ricci Flat 4-Metrics with Bidimensional Null Orbits Part II. The Abelian Case *Acta Apl. Math.* **92** 226-239

[25] M. Crampin 2005 On the orthogonal separation of variables in the Hamilton-Jacobi equation for geodesics in a Riemannian manifold, *Diff. Geom. Appl.*, Proc. Conf. Prague, August 30, 2004, 453-496

[26] Richard, L. , Bishop, Richard J. Crittenden 1964 *Geometry of Manifolds*, (AMS)

[27] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov 1985 *Modern Geometry–methods and Applications: The geometry and topology of manifolds* (Springer - Verlag)

[28] A. Fasano, S. Marmi 2006 *Analytical Mechanics. An Introduction* (Oxford University Press)

[29] M. E. Fels 2007 Integrating scalar ordinary differential equations with symmetry revisited *Found. Comput. Math.* **7** 417-454

[30] H. Goldshmidt and S. Sternberg 1973 Hamilton-Cartan formalism in the calculus of variations *Annales de L'institut Fourier* **1** 203-267

[31] T. Hartl and C. Athorne 1994 Solvable structures and hidden symmetries *J. Phys. A: Math Gen* **27** 3463-3471

[32] J. Horwood, R. McLenaghan, R. Smirnov 2005 Invariant classification of orthogonally separable Hamiltonian systems in Euclidean spaces *Commum. Math. Phys.* **259** 679-709.

[33] N. Kamran 2002 *Selected topics in the geometrical study of differential equations* (AMS)

[34] G. H. Katzin and J. Levine 1972 Applications of Lie Derivative to Symetries, Geodesics, And first Integrals in Riemannian Spaces *Colloq. Math.* (Wroclaw) **26** 21

[35] I. S. Krasil'shchik and A. M. Vinogradov 1989 Nonlocal Trends in the Geometry of Differential Equations: Symmetries, Conservation Laws, and Bäcklund Transformations *Acta Appl. Math.* **15** 161-209

[36] A. Kushner, V. Lychagin, V. Rubstov 2007 *Contact Geometry and Non-linear Differential Equations* (Cambridge University Press)

[37] J. M. Lee 1997 *Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature* (Springer-Verlag)

[38] A. S. Mishchenko and A. T. Fomenko 1978 Generalized Liouville Method of Integration of Hamiltonian Systems *Functional Anal. Appl.* **12** 113-121

[39] N. N. Nekhoroshev 1972 Action-Angle Variables and their Generalization *Trans. Moscow Math. Soc.* **26** 180-198.

[40] P.J. Olver 1993 *Application of Lie groups to differential equations* (Springer-Verlag)

[41] P.J. Olver 1995 *Equivalence, invariants, and symmetry* (Cambridge University Press)

[42] G. Prince 1983 Toward a classification of dynamical symmetries in classical mechanics *Bull. Austral. Math. Soc.* **27** 53-71

[43] G. Sparano, G. Vilasi and A. M. Vinogradov 2001 Gravitational Fields with a non-Abelian, bidimensional Lie algebra of symmetries *Phys. Lett., B* **513** 142-146

[44] G. Sparano, G. Vilasi and A. M. Vinogradov 2002 Vacuum Einstein metrics with bidimensional Killing leaves. I. Local aspects. *Differ. Geom. Appl.* **16** 95-120

[45] G. Sparano, G. Vilasi and A. M. Vinogradov 2002 Vacuum Einstein metrics with bidimensional Killing leaves. II. Global aspects. *Differ. Geom. Appl.* **17** 15-35

[46] J. Sherring and G. Prince 1992 Geometric aspects of reduction of order *Trans. Amer. Math. Soc.* **334** 433-453

[47] M. Spivak 1999 *A Comprehensive Introduction To Differential Geometry* (Publish Or Perish)

[48] H. Stephani 1989 *Differential equations. Their solution using symmetries* (Cambridge University Press)

[49] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, E. Herlt 2003 *Exact Solutions of Einstein Field Equations 2nd ed.* (Cambridge University Press)

[50] S. Sternberg 1964 *Lectures on Differential Geometry* (Prentice-Hall)

[51] M. Tsamparlis, A. Paliathanasis 2010 Lie and Noether Symmetries of geodesic equations and collineations *Gen Relativ Gravit* **42** 2957-2980

[52] L. Tu 2007 *An Introduction to Manifolds* (Springer-Verlag)

[53] G. Vilasi 2008 Einstein Metrics with 2-dimensional Killing Leaves and their Physical Interpretation *Recent Development in Pseudo-Riemannianan Geometry* **495** 526.

[54] A. M. Vinogradov et al. 1999 *Symmetries and conservation laws for differential equations of mathematical physics* (AMS)

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170 -110
<http://www.pgmat.ufba.br>