Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Dissertação de Mestrado

Atratores Não-uniformemente Hiperbólicos

Andrêssa Lima de Souza

Salvador-Bahia
Fevereiro de 2012

Atratores Não-uniformemente Hiperbólicos

Andrêssa Lima de Souza

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Cesar Rodrigues Pinto Varandas.

Salvador-Bahia

Fevereiro de 2012

Souza, Andrêssa Lima de.

Atratores Não-uniformemente Hiperbólicos/Andrêssa Lima de Souza. – Salvador: UFBA, 2012.

66 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Varandas.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2012.

Referências bibliográficas.

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Atratores. 3. . I. Varandas, Paulo César R. Pinto. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 517. 930

Atratores Não-uniformemente Hiperbólicos

Andrêssa Lima de Souza

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada .

Banca examinadora:

Prof. Dr. Paulo César Rodrigues Pinto Varandas (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro
UFBA

Prof. Dr. Samuel Anton Senti
UFRJ

Agradecimentos

Agradeço a Deus por estar me permitindo viver esta vitória e por ter colocado pessoas maravilhosas que fazem de mim uma pessoa melhor. Ao meu Pai Afrânio pela força, dedicação e por todo seu sacrifício para que eu pudesse realizar os meus sonhos. À minha Mãe Regina, pelo apoio incondicional e por todo amor que a mim sempre dedicou

Agradeço a minha Avó Eunice, pessoa maravilhosa que me ensinou que o conhecimento é o melhor caminho, também pelo amor e dedicação. Aos meu irmãos Raissa e Artur Gabriel por existirem e me fazerem rir nos momentos de dificuldade. À minha madrinha Aldenice, pelo amor incondicional, força, apoio, dedicação e conselhos.

Agradeço ao meu orientador e amigo Paulo Varandas, pela dedicação a este trabalho, por todos os ensinamentos sobre a Matemática e a vida, pela amizade e parceria.

Agradeço a minha grande amiga Larissa, por dividir alegrias e dificuldades durante esses anos de convivência. E todos os amigos que fazem parte da minha vida. Aos mestres e amigos Luis Roque e Antonio Teófilo, por transmitirem seu conhecimento, pela amizade e carinho. À Elen Deise, grande amiga, pelo incentivo e amizade. Aos grandes amigos que fiz no mestrado Rodrigo von Flach, Kátia Silene, Ana Paula Freitas, Fellipe Antônio, Thiago Bonfim, Ângela Soldatelli, Luiz Alberto, Emanuele Romero, Roberto San'tana, Dimi Rangel, Raimundo Junior, Edward Landi, Elaine Rocha, Darlan e Jaqueline.

Agradeço a todos os mestres da UFBA, em particular aos Profs Vilton Pinheiro e José Nelson Barbosa. À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Estudaremos uma família de endomorfismos bi-dimensionais, construída por Marcelo Viana em [Vi97], de atratores não-uniformemente hiperbólicos com sensibilidade às condições iniciais, em outras palavras, pontos na bacia de atração tem apenas expoentes de Lyapunov positivos. Estes sistemas também ilustram um novo mecanismo robusto de dinâmica sensível. Apesar do caráter não-uniforme da expansão, o atrator persiste numa vizinhança do mapa inicial.

Palavras-chave: Hiperbolicidade Não-Uniforme; Atrator; Expoentes de Lyapunov; Skew-product.

Abstract

We will study a family of two-dimensional endomorphisms built by Marcelo Viana in [Vi97], of non-uniformly hyperbolic attractors with sensitivity to initial conditions, in other words, points in the basin of attraction have only positive Lyapunov exponents. These systems also illustrate a new robust mechanism of sensitive dynamics. In spite of the non-uniform expansion, the attractor persists in a neighborhood of the initial map.

Keywords: Non-uniform hyperbolicity; Attractor; Lyapunov Exponents; Skew-product.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Entre as décadas de 60 e 70 muitos dos resultados obtidos em Sistemas Dinâmicos estavam concentrados nos estudos de aplicações uniformemente hiperbólicas. Um dos principais objetivos de Sistemas Dinâmicos é descrever o comportamento assintótico das órbitas, ou seja o comportamento quando o tempo vai para o infinito. Mesmo nos casos em que a lei de evolução é muito simples, as órbitas podem apresentar um comportamento bastante complicado. Por exemplo, os sistemas podem apresentar sensibilidade às condições iniciais, ou seja, uma pequena variação sobre o estado inicial dá origem a um comportamento completamente diferente da original.

Uma medida importante para o estudo de diversos tipos de sistemas é a chamada medida física ou Sinai-Ruelle-Bowen (SRB). Dada uma transformação $\varphi : X \to X$ suave, com X uma variedade compacta, dizemos que uma medida finita μ em X é uma *medida Sinai-Ruelle-Bowen (medida SRB)* para a transformação φ se μ é φ-invariante e existe um conjunto $B \subset X$ com medida de Lebesgue positiva tal que para qualquer mapa contínuo $f : X \to \mathbb{R}$ e $x \in B$ tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(\varphi^j(x)) = \int_X f d\mu.$$

Dada $\varphi : X \to X$ uma transformação suave, definimos *Expoente de Lyapunov* os valores

$$\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log ||D\varphi^n(x)v||,$$

com $x \in X$ e $v \in T_xX$ não nulo, sempre que tal limite existir.

Das primeiras contribuições importantes destacamos Jakobson [Ja81], onde demonstrou que: dada uma família f_a de aplicações no intervalo $[0, 1]$, existe um conjunto Γ de parâmetros a, com medida de Lebesgue positiva, para os quais f_a tem uma medida invariante absolutamente contínua com respeito a Lebesgue. Isto foi provado para duas classes de aplicações,

1. $f_a(x) = af(x)$, com $0 < a \leq 4$ e f uma função C^3-próxima da aplicação quadrática $x(1 - x)$;

2. $f_a(x) = af(x)(mod 1)$, onde f é de classe C^3, $f(0) = f(1) = 0$ e f tem um único ponto crítico não degenerado em $[0, 1]$.

Após isto Benedicks e Carleson provaram que existe um conjunto $\Delta \subset (0, 2)$ com medida de Lebesgue positiva tal que para todo $a \in \Delta$ a aplicação $f_a(x) = 1 - ax^2$, com x no intervalo compacto I, tem Expoente de Lyapunov positivo no valor crítico $f_a(0)$. No segundo capítulo apresentamos o enunciado preciso deste resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [BC85].

Em um contexto mais geral, Thieullen, Tresser and Young [TTY94] provaram que dada uma família $\{f_a\}_{a\in\mathcal{A}}$, a um parâmetro, de aplicações não-flat que para um certo parâmetro a_*, f_{a_*} satisfaz as seguintes condições:

(a) f_{a_*} satisfaz a condição de Misiurewicz;

(b) f_{a_*} satisfaz uma condição tipo Collet-Eckamann;

(c) as derivadas parciais com respeito a x e a de $f_a^n(x)$, respectivamente no valor crítico e em a_* são comparáveis para n grande.

Então, a_* é um ponto de densidade do conjunto de parâmetros a tais que o expoente de Lyapunov de f_a no valor crítico é positivo, e f_a admite uma probabilidade invariante absolutamente contínua com respeito a Lebesgue.

Além disso, Freitas [Fr06] mostrou que f_a possui Expoente de Lyapunov positivo em Lebesgue quase todo ponto.

Por outro lado, Lyubich em [Ly97] e Graczyk-Światek em [GS97], garantiram que existe um conjunto aberto e denso de parâmetros $a \in [0, 2]$ para os quais $f_a : [-1, 1] \to [-1, 1]$ tem uma órbita periódica atratora cuja bacia de atração contém Lebesgue quase todo ponto.

Diante destes resultados podemos concluir que não existem exemplos robustos de sistemas não-uniformemente expansores na família quadrática f_a.

Em dimensões maiores, Hénon [He76] introduziu as aplicações $f_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dadas por $f_{a,b}(x, y) = (1 - ax^2 + y, bx)$, que são chamadas de mapas Hénon, e conjecturou que para $a = 1,4$ e $b = 0,3$ a transformação $f_{a,b}$ deveria ter um "atrator estranho". Mais tarde, Benedicks e Carleson [BC91] conseguiram provar a existência de atratores estranhos na família de Hénon para $b > 0$ suficientemente pequeno. Eles mostraram que se $W^u(p)$ é a variedade instável de $f_{a,b}$ no seu ponto fixo p, então para todo $c < \log 2$ existe $b_0 > 0$ tal que para todo $b \in (0, b_0)$ existe um conjunto de parâmetros $E(b)$ com medida de Lebesgue positiva e para todo $a \in E(b)$:

- Existe aberto $U = U(a,b)$ tal que para todo $z \in U$

$$dist(f^n_{a,b}(z), \overline{W^u(p)}) \to 0.$$

- Existe $z_0 = z_0(a,b) \in W^u(p)$ tal que $(f^n_{a,b}(z_0))_{n\geq 1}$ é densa em $W^u(p)$ e

$$||Df^n_{a,b}(z_0)(0,1)|| \geq e^{cn}.$$

A situação é substancialmente diferente para endomorfismos em dimensão alta. Recentemente Viana [Vi97] construiu transformações suaves e difeomorfismos exibindo atratores não-uniformemente hiperbólicos multidimensionais robustos, o que mostra que a persistência de hiperbolicidade não-uniforme pode ocorrer em dimensões altas.

Seja $\varphi_\alpha : I \times \mathbb{R} \to I \times \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^3 com $I = S^1$ dada por

$$\varphi_\alpha(\theta, x) = (d\theta(mod\ 1), a_0 + \alpha \sin 2\pi\theta - x^2),$$

onde d é inteiro, α é número real positivo e o parâmetro $a \in (1,2)$ é tal que a aplicação $f_a(x) = a - x^2$ tem um ponto crítico pré-periódico. O objetivo deste trabalho é apresentar com detalhes a prova do seguinte teorema:

Teorema 0.0.1. ***(Viana,[Vi97])*** *Suponha que $d \geq 16$. Então, existe $\alpha_0 > 0$ tal que para cada $0 < \alpha < \alpha_0$ temos*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|D\varphi^n_\alpha(x)v\| \geq c > 0,$$

em Lebesgue quase todo ponto $(\theta, x) \in S^1 \times I_0$ e $v \in T_{(\theta,x)}(S^1 \times \mathbb{R})$. Além disso, o mesmo vale para cada aplicação próxima de φ_α em $C^3(S^1 \times \mathbb{R})$.

Um dos pontos cruciais na prova do teorema é o fato de que $g(\theta) = d\theta(mod\ 1)$, ($d \geq 16$), possui uma estrutura Markoviana e é expansora. Então é natural pensar se o resultado acima admite extensão ao caso em que g é uma transformação expansora, Markoviana com infinitos ramos e ainda $|g'| \geq 16$. Nessa direção, Varandas em [Va12] anunciou o seguinte resultado:

Teorema 0.0.2. ***(Varandas, [Va12])*** *Considere o skew-product $\varphi_\alpha : (0,1] \times I \to (0,1] \times I$ dada por $\varphi_\alpha(\theta, x) = (g(\theta), f_\alpha(\theta, x))$ e tal que $h(x) = a_0 - x^2$ é Misiurewicz. Então existe $c > 0$ tal que para cada α suficientemente pequeno vale:*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log ||D\varphi^n_\alpha(\theta, x)v|| \geq c > 0$$

para Lebesgue quase todo (θ, x) e cada $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. Além disso, existe $\epsilon > 0$ tal que as mesmas propriedades valem para cada φ que é ϵ-C^3-próximo a φ_α.

No capítulo 2 damos um exemplo de uma transformação g que satisfaz as hipóteses do Teorema 0.0.2.

Descreveremos agora algumas propriedades estocásticas destas classes de sistemas não-uniformemente hiperbólicos robustos. Alves em [Al00] motivado pelo trabalho de Viana em [Vi97], mostrou que φ_α tem um número finito de probabilidades invariantes absolutamente contínuas, implicando que qualquer probabilidade invariante absolutamente contínua é uma combinação linear de tais medidas ergódicas. Em particular,

Teorema 0.0.3. *([Al00]) Existe $\delta > 0$ tal que toda $\varphi : S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R}$ que satifaz*

$$||\varphi - \varphi_\alpha||_{C^3} < \delta$$

tem uma medida SRB.

Araújo e Solano, em [AS11], estudaram a existência de probabilidades invariantes absolutamente contínuas para skew-products com dinâmica da base arbitrária e apenas expansão assintótica ao longo das fibras. Esse trabalho é uma generalização de um trabalho de Keller [Ke90] no qual prova que para mapas do intervalo com finitos pontos críticos e derivada Schwarziana não-positiva, existência de probabilidade invariante absolutamente continua é garantida por expoentes de Lyapunov positivos.

Ainda no sentido de obter generalizações de [Vi97], Schnellmann, em [Sc08], supõe que d pode assumir valores não inteiros implicando que g já não é mais um mapa contínuo e consegue provar a existência de dois expoentes de Lyapunov positivos. Porém antes disso, Buzzi, Sester e Tsujii em [BST02], mostraram que para $d \geq 2$, φ_α tem dois expoentes de Lyapunov positivos. Além disso, o mesmo vale para qualquer aplicação C^∞-próxima de φ_α.

A dissertação está organizada da seguinte forma. No primeiro capítulo, recordamos alguns conceitos e resultados da Teoria da Medida, Hiperbolicidade e Distorção Limitada. Estudamos também algumas propriedades dinâmicas da transformação de Gauss e mostramos a existência de uma medida invariante absolutamente contínua com respeito a Lebesgue. Além disso, descrevemos a dinâmica simbólica de transformações expansoras do intervalo.

No capítulo 2, apresentaremos o Teorema de Oseledets que, nos garante a existência de expoentes de Lyapunov para difeomorfismos e para transformações não invertíveis. Em seguida falaremos das aplicações quadráticas $f_a(x) = a - x^2$. Além disso, apresentaremos a noção de Derivada Schwarziana.

Logo em seguida, nos capítulos 3 e 4, apresentamos a prova do Teorema 0.0.1 que segue em parte a prova de Viana [Vi97] e contém uma prova alternativa para a persistência da folheação invariante.

Capítulo 1

Medidas Invariantes e Hiperbolicidade uniforme

Neste capítulo recordaremos alguns resultados básicos da Teoria da Medida, apresentaremos os conceitos de Hiperbolicidade e Distorção Limitada bem como suas propriedades, ainda mostraremos como estas duas condições implicam na existência de uma medida, invariante para a transformação de Gauss, absolutamente contínua com respeito a Lebesgue. Finalmente, descreveremos a dinâmica simbólica de transformações expansoras do intervalo ou círculo.

1.1 Teoria da Medida

Definiremos alguns conceitos da Teoria da Medida e apresentaremos resultados importantes desta teoria. Entre eles o lema de Borel-Cantelli e a Desigualdade de Markov.

Sejam X um espaço métrico compacto, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $f : X \longrightarrow X$. A transformação f é mensurável se, somente se $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$, para todo $A \in \mathcal{A}$. Dizemos que μ é invariante pela f se dado $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A).$$

A seguinte proposição caracteriza as medidas f-invariantes.

Proposição 1.1.1. *Sejam $f : X \longrightarrow X$ e $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty)$ uma medida de probabilidade. Então μ é f-invariante se, e somente se para toda função μ-integrável $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ temos*

$$\int \varphi d\mu = \int \varphi \circ f d\mu.$$

Prova: Suponhamos que f preserva a medida μ. Seja φ a função característica de algum conjunto mensurável A, $\varphi = \chi_A$. Então,

$$\int \varphi d\mu = \int \chi_A d\mu = \mu(A) = \mu(f^{-1}(A)),$$

pois μ é f-invariante. Ainda temos que:

$$\chi_{f^{-1}(A)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in f^{-1}(A) \\ 0, & \text{se} \quad x \notin f^{-1}(A) \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad f(x) \in A \\ 0, & \text{se} \quad f(x) \notin A \end{cases}$$

$$= \chi_A(f(x)) = \varphi(f(x)) = (\varphi \circ f)(x).$$

Daí,

$$\int \varphi \circ f d\mu = \int \chi_{f^{-1}(A)} d\mu = \mu(f^{-1}(A)) = \mu(A) = \int \varphi d\mu.$$

Assim, fica provado que

$$\int \varphi d\mu = \int \varphi \circ f d\mu,$$

quando φ é uma função característica. Observe que segue diretamente da linearidade da integral que se φ é uma função simples, ou seja existem $A_1, \ldots, A_n$ mensuráveis e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ constantes tais que $\varphi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}$, a igualdade acima ainda é válida.

Finalmente, se φ é uma função integrável qualquer, pela definição de integral,

$$\int \varphi d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int \varphi_n \circ f d\mu,$$

onde $(\varphi_n)_n$ é uma sequência de funções simples convergindo para φ.

Mas, já vimos que vale a igualdade $\int \varphi_n d\mu = \int \varphi_n \circ f d\mu$, pois cada φ_n é uma função simples. Tomando o limite em ambos os lados,

$$\lim_{n \to \infty} \int \varphi_n d\mu = \lim_{n \to \infty} \int \varphi_n \circ f d\mu \Rightarrow \int \varphi d\mu = \int \varphi \circ f d\mu.$$

Reciprocamente, dado um boreliano A, tomando $\varphi = \chi_A$, imediatamente temos $\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$, basta notar que $\chi_A \circ f = \chi_{f^{-1}(A)}$. ■

As medidas invariantes nos conduzem a informações importantes sobre o comportamento dinâmico do sistema. Em muitos casos esse estudo incide sobre a medição das quantidades $g \circ f^n$ para alguma função $g : X \to \mathbb{R}$, em média

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g \circ f^n.$$

Quando μ é uma probabilidade f-invariante ergódica, dada qualquer função integrável $g : X \to \mathbb{R}$, o limite desta média existe em μ- q.t.p. $x \in X$. Este resultado é devido a Birkhoff, para mais detalhes ver [M83] (Teorema 1.1, p. 102).

Considere $\mathcal{M}(X)$ o conjunto das probabilidades e $\mathcal{M}_f(X)$ o conjunto das probabilidades f-invariantes. Como X é compacto podemos tomar $(\varphi_n)_n$ sequência de funções contínuas densa na bola unitária de $C^0(X)$ ([OV11], Proposição 3.5, p.30). Então, definimos a seguinte distância em $\mathcal{M}(X)$:

$$d(\nu, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \int \varphi_n d\mu - \int \varphi_n d\nu \right|.$$

A distância d gera a chamada topologia fraca* em $\mathcal{M}(X)$.

Dada $f : X \to X$ e qualquer medida μ em X denota-se por $f_*\mu$ e chama-se imagem de μ por f a medida definida por

$$f_*\mu(E) = \mu(f^{-1}(E)),$$

para cada mensurável $E \subset X$. Note que μ é invariante por f se e somente se $f_*\mu = \mu$.

Lema 1.1.2. *A aplicação $f_* : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X)$ é contínua relativamente à topologia fraca*.*

Prova: Para mostramos o lema acima, basta mostrar que se μ_n converge para μ na topologia fraca*, então para toda função contínua ϕ temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int \phi df_*\mu_n = \int \phi df_*\mu.$$

Seja η uma medida qualquer, afirmamos que

$$\int \phi df_*\eta = \int \phi \circ f d\eta.$$

De fato, podemos aproximar ϕ por uma sequência de funções simples ϕ_n onde $||\phi_n|| \leq ||\phi||$, com $||\phi|| = \sup\{\phi(x) : x \in X\}$. Observe que isto implica, em particular que $||\phi_n \circ f|| \leq ||\phi \circ f||$. Se ϕ é a função característica de um conjunto mensurável qualquer A, então

$$\int \chi_A df_*\eta = \eta(f^{-1}(A)) = \int \chi_A \circ f d\eta.$$

Por linearidade, a igualdade acima se estende para as funções simples ϕ_n. Para finalizar, temos pelo Teorema da Convergência Dominada, [CJ08](Teorema 3.3.7, p. 54), que

$$\int \phi df_*\eta = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n df_*\eta = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n \circ f d\eta = \int \phi \circ f d\eta.$$

O que termina a prova da afirmação. Para completar a prova do lema, basta observar que a função $\phi \circ f$ também é contínua uma vez que f é contínua. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \int \phi df_*\mu_n = \lim_{n\to\infty} \int \phi \circ f d\mu_n = \int \phi \circ f d\mu = \int \phi df_*\mu.$$

∎

Visto a grande importância de medidas invariantes em Sistemas Dinâmicos surge uma pergunta natural: sob que condições garantimos a existência dessas medidas? Para responder este questionamento temos o seguinte teorema.

Teorema 1.1.3. *Seja $f : X \longrightarrow X$ uma transformação contínua em um espaço métrico compacto. Então existe pelo menos uma probabilidade f-invariante.*

Prova: Sejam $m \in \mathcal{M}(M)$ e a sequência $\mu_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} f_*^j m$, onde $(f_*^j m)(A) = m(f^{-j}(A))$, para todo $A \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{M}(X)$ é compacto [M83] temos que $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente $(\mu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Seja $\mu \in \mathcal{M}(X)$ tal que

$$\mu = \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} f_*^j m.$$

Para concluir mostremos que o limite de $(\mu_{n_k})_k$ é um ponto fixo para f_* e portanto uma probabilidade f-invariante. De fato, sejam $\Phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ uma família de funções contínuas limitadas e $\epsilon > 0$. Temos que

$$\left| \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} \int (\phi_i \circ f^j) dm - \int \phi_i d\mu \right| < \epsilon/2,$$

para todo i e todo k suficientemente grande. Como f_* é contínua, temos que

$$f_*\mu = f_*\left(\lim_k \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} f_*^j m \right) = \lim_k \frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} f_*^j m.$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} \int (\phi_i \circ f^j) dm - \frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} \int (\phi_i \circ f^j) dm \right| &= \frac{1}{n_k} |\phi_i dm - \int (\phi_i \circ f^{n_k}) dm| \\ &\leq \frac{2}{n_k} \sup |\phi_i| \\ &< \epsilon/2 \end{aligned}$$

para todo i e todo k suficientemente grandes. Daí,

$$\left| \frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} \int (\phi_i \circ f^j) dm - \int \phi_i d\mu \right| < \epsilon$$

para todo i e todo k suficientemente grande. Isto significa que $\dfrac{1}{n_k}\displaystyle\sum_{j=1}^{n_k} f_*^j m \to \mu$ quando $k \to +\infty$. Por unicidade do limite na topologia fraca*, $f_*\mu = \mu$. ■

Observação 1.1.4. *Para o teorema acima basta que f seja contínua no conjunto dos pontos não-errantes $\Omega(f)$, onde um ponto $x \in X$ é dito não-errante para f se dada uma vizinhança U de x qualquer existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. De fato, como o conjunto $\Omega(f)$ é invariante, então podemos definir uma nova transformação $\tilde{f} : \Omega(f) \to \Omega(f)$. Além disso, $\Omega(f)$ é fechado e portanto compacto. Fazendo o mesmo processo do teorema anterior para $\tilde{f}$ encontramos uma medida $\tilde{\mu}$ que é invariante pela $\tilde{f}$. Definamos $\mu(A) = \tilde{\mu}(A \cap \Omega(f))$, para todo $A \subset X$ mensurável, e μ é invariante pela f.*

Seguem agora algumas definições preliminares.

Definição 1.1.5. *Um conjunto $A \in \mathcal{A}$ é dito f- invariante se $f^{-1}(A) = A$. Dizemos que a medida μ é ergódica com respeito a f se só se todo conjunto f-invariante possui medida 0 ou 1.*

Definição 1.1.6. *Sejam μ, ν duas medidas de probabilidade, ν é dita absolutamente contínua com respeito a μ (notação: $\nu \ll \mu$) se para todo $A \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) = 0$, temos $\nu(A) = 0$.*

Uma propriedade se diz satisfeita em quase todos os pontos (q.t.p.), se o conjunto dos pontos onde a propriedade não é satisfeita tem medida nula, ou seja se existe $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 1$ e $\mu(A^c) = 0$.

Os resultados seguintes são poderosas ferramentas da Teoria da Probabilidade. O lema de Borel-Cantelli nos dá um critério para que dada uma sequência de conjuntos mensuráveis A_n (interpretando $\mu(A_n)$ como a probabilidade de x pertencer a A_n), a probabilidade de x pertencer a uma infinidade de conjuntos A_n é zero.

Lema 1.1.7. *(Borel-Cantelli) Sejam $A_n \subset X$ mensuráveis tais que $\sum_{n\geq 0} \mu(A_n) < \infty$. Então, a medida do conjunto de pontos x que pertencem a infinitos A_n é zero, isto é,*

$$\mu\left(\bigcap_{k\geq 0}\bigcup_{n\geq k} A_n\right) = 0$$

Prova: Seja $A = \bigcap_{k\geq 0}\bigcup_{n\geq k} A_n$. Então, $A \subset \bigcup_{n\geq k} A_n$ e, portanto $\mu(A) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \mu(A_n) \searrow 0$, quando $k \to \infty$, pois o limite acima é a cauda de uma série convergente. Logo, $\mu(A) = 0$. ■

Mostremos agora a Desigualdade de Markov que relaciona probabilidade à esperança. O lema nos dá um limite superior para a probabilidade de que uma função não-negativa de uma variável aleatória ser maior ou igual a alguma constante positiva.

Proposição 1.1.8. *(Desigualdade de Markov) Seja $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória assumindo valores reais positivos. Então, temos para qualquer $a > 0$:*

$$P(Z > a) = P(e^Z > e^a) \leq e^{-a} \int e^Z dP$$

Prova:

$$\begin{aligned}\int e^Z dP &= \int_{[e^Z > e^a]} e^Z dP + \underbrace{\int_{[e^Z \leq e^a]} e^Z dP}_{\geq 0} \geq \int_{[e^Z > e^a]} e^Z dP \geq \int_{[e^Z > e^a]} e^a dP \\ &= e^a . \int_{\Omega} dP = e^a . P(e^Z > e^a).\end{aligned}$$

■

Como a medida de Lebesgue é fisicamente relevante, um problema interessante é o de construir medidas f-invariantes absolutamente contínuas com respeito a Lebesgue. Isso será discutido na seção seguinte sob uma hipótese de hiperbolicidade.

1.2 Hiperbolicidade e Distorção Limitada

Seja $f : X \to X$ um difeomorfismo em uma variedade X dotada de uma métrica Riemanniana que induz uma norma $||\cdot||$ no espaço tangente. Um conjunto $\Lambda \subset X$ compacto f-invariante é dito hiperbólico se admite uma decomposição do fibrado tangente $T_\Lambda X = E^s \oplus E^u$, invariante pela derivada de f, e existem constantes $c > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que para todo $n \geq 1$ e todo $x \in \Lambda$, valem

$$||Df^n(x)|_{E^s_x}|| \leq c.\lambda^n$$

$$||Df^{-n}(x)|_{E^u_x}|| \leq c.\lambda^n.$$

Definição 1.2.1. *Uma transformação diferenciável $f : X \to X$ é dita expansora se existem $\lambda > 1$, $c > 0$ e uma métrica Riemanniana em X, tais que para todo ponto x de X tem-se*

$$||(Df^n(x))^{-1}||^{-1} \geq c\lambda^n.$$

Dizemos que o ponto $x \in X$ é periódico se existe $n \geq 1$ tal que $f^n(x) = x$. O ponto $x \in X$ é dito pré-periódico se existe $m \geq 1$ tal que $f^m(x)$ é periódico.

Introduzimos a seguir um exemplo de uma transformação expansora por pedaços no intervalo e mostraremos como obter condições de distorção limitada.

Exemplo 1.2.2. *Denotando $[x]$ a parte inteira do número real x, seja $\tilde{g}(\theta) = \dfrac{1}{\theta} - \left[\dfrac{1}{\theta}\right]$, $\theta \in (0,1]$ a aplicação de Gauss,*

Observe que $|D\tilde{g}(\theta)| \geq 1$ para todo $\theta \in (0,1]$ e $|D\tilde{g}(\theta)| = 1$ se, e somente se $\theta = 1$. De fato,

$$|D\tilde{g}(\theta)| = \left|\frac{-1}{\theta^2}\right| = \frac{1}{\theta^2},$$

como $0 < \theta \leq 1$ temos que $\theta^2 < \theta \leq 1$, logo $\dfrac{1}{\theta^2} \geq 1$. Suponha agora que $|D\tilde{g}(\theta)| = 1$, então $\left|\dfrac{-1}{\theta^2}\right| = 1$ o que implica $\dfrac{1}{\theta^2} = 1 \Rightarrow \theta = 1$. Reciprocamente se $\theta = 1$ temos

$$|D\tilde{g}(\theta)| = \left|\frac{-1}{\theta^2}\right| = 1.$$

Considere a modificação de $\tilde{g}$ do seguinte jeito:

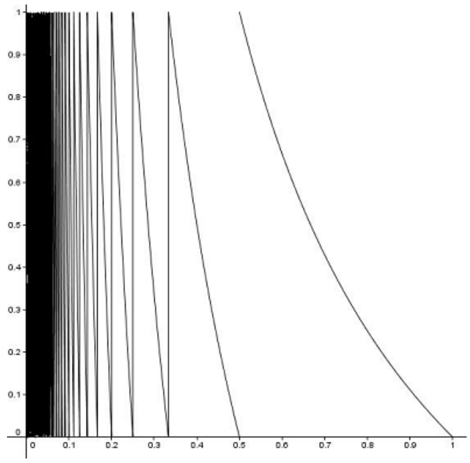

Figura 1.1: A aplicação de Gauss

$$g(\theta)=\begin{cases}\tilde{g}(\theta) & se \quad \theta\in\left(0,\dfrac{1}{16}\right] \\ -16\left(\theta-\dfrac{k}{16}\right)+1 & se \quad \theta\in\left(\dfrac{k}{16},\dfrac{k+1}{16}\right], k=1,\cdots,15\end{cases}$$

Note que $|Dg(\theta)|\geq 16$, $\forall\theta\in(0,1]$.

Definição 1.2.3. *Seja* Λ *um subconjunto compacto de* X *e* f*-invariante. Dizemos que* Λ *é atrator para* f *se existe* $\mathcal{U}\subset X$ *aberto tal que* $f(\overline{\mathcal{U}})\subset int(\mathcal{U})$, $\Lambda=\bigcap_{n\geq 0}f^n(\mathcal{U})$ *e* $f|_\Lambda$ *é transitivo.*

Definição 1.2.4. *O par* (X,f) *é dito topologicamente transitivo, se para todo par de abertos* U *e* V *em* X *existe* $n\in\mathbb{N}$ *tal que* $f^n(U)\cap V\neq\emptyset$.

Lema 1.2.5. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. f *é topologicamente transitiva;*

2. *Existe um residual* $R\subset X$ *tal que para todo* $x\in R$, $\mathcal{O}(x)=\{f^n(x):n\in\mathbb{N}\}$ *é densa.*

Prova: Para provar que (1) $\Rightarrow$ (2) vamos mostrar que existe um residual R_1 tal que $\omega(x):=\{y\in X;\exists n_j\to\infty$ e $f^{n_j}(x)\to y\}=X$, para todo $x\in R_1$. De fato, seja $\{B_n:n\geq 1\}$ uma base enumerável de abertos. Definamos $A_n=\{y\in X:f^m(y)\in B_n$ para algum $m\geq 0\}$. Temos que A_n é aberto, por definição, e é denso pela hipótese. Então $R_1=\bigcap_{n\geq 1}A_n$ é residual. Sejam $x\in R_1$ e $U\subset X$ aberto, por definição existe n tal que $B_n\subset U$. Logo, como $x\in A_n$ para cada n, temos que existe m tal que $f^m(x)\in B_n\subset U$. Portanto, $\omega(x)=X$, isto é, a orbita de x é densa.

Agora suponha que $x \in X$ é tal que sua órbita é densa em X, ou seja, $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$, então $\omega(x) = X$. Sejam U, V abertos quaisquer de X, então existe n_1 tal que $f^{n_1}(x) \in V$ e existe n_2 com $n_2 < n_1$ tal que $f^{n_2}(x) \in U$ o que implica que $f^{n_1-n_2}(U) \cap V \neq \emptyset$. ■

Definição 1.2.6. *Dizemos que f é topologicamente mixing se para todo par de abertos não-vazios U e V em X existe $N > 0$ tal que para cada $n > N$ temos que*

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Definição 1.2.7. *Dada $f : I \to I$, dizemos que uma partição $\mathcal{P}$ de I é Partição de Markov completa para f se, $f(P) = I$, para todo $P \in \mathcal{P}$ e $f|_P : P \to I$ é difeomorfismo C^1 e admite extensão C^1 ao fecho de P.*

Definição 1.2.8. *Uma transformação $f : X \to X$ é dita topologicamente exata se dado qualquer aberto $U \subset X$ existe $N \geq 1$ tal que, $f^N(U) = X$.*

Lema 1.2.9. *A transformação de Gauss é topologicamente exata.*

Prova: Sejam $U \subset I$ aberto e $\mathcal{P}$ a partição de $(0, 1]$ dada no Exemplo 1.2.2. Consideremos a partição $\mathcal{P}^{(n)} = \bigvee_{j=0}^{n-1} g^{-j} P_j$, com $P_j \in \mathcal{P}$ dinamicamente gerada, isto é, $P \in \mathcal{P}^{(n)} \Leftrightarrow P = P_0 \cap g^{-1}(P_1) \cap \cdots \cap g^{-m}(P_m)$ e $g^n : P \to I$ é difeomorfismo. Então,

$$|P| \leq \frac{|g^n(P)|}{|Dg^n(x)|} \leq \frac{1}{16^n}.$$

Portanto os elementos de $\mathcal{P}^{(n)}$ possuem diâmetro arbitrariamente pequeno. Então, existe $P \in \mathcal{P}^{(n)}$ tal que $P \subset U$.

Como a transformação de Gauss é expansora por pedaços temos $\mathcal{P}^{(n)}$ é uma partição Markov completa, então existe $N > 0$ tal que $I = g^N(P) \subset g^n(U) \subset I$. ■

Consideremos agora $f : N \to N$ uma aplicação C^1 por pedaços, onde N é o S^1 ou $[0, 1]$. Se $I \subset N$ é um intervalo tal que $Df(x) \neq 0$ $\forall x \in I$ definimos a distorção de f em I por

$$Dist(f, I) = \sup_{x,y \in I} log \frac{|Df(x)|}{|Df(y)|}.$$

Definição 1.2.10. *Dizemos que f tem distorção limitada em I se existe $K > 0$ tal que*

$$K^{-1} \leq Dist(f, I) \leq K.$$

A propriedade de distorção limitada será fundamental para a construção de medidas invariantes absolutamente contínuas com respeito a Lebesgue. Uma questão é de como obter distorção limitada.

Definição 1.2.11. *Dizemos que f, de classe C^2, satisfaz a condição de Rényi se existe $c > 0$ tal que*

$$\frac{|D^2 f(x)|}{|Df(x)|^2} \leq c$$

para todo $x \in I$.

Exemplo 1.2.12. *A transformação g definida no Exemplo 1.2.2 satisfaz a condição de Rényi. De fato, quando $\theta \in \left(0, \frac{1}{16}\right]$ temos $|D^2 g(\theta)| = \frac{2}{|\theta|^3}$, logo*

$$\frac{|D^2 g(\theta)|}{|Dg(\theta)|^2} = \frac{2}{|\theta|} \leq 2.$$

Nos outros casos $\frac{|D^2 g(\theta)|}{|Dg(\theta)|^2} = 0$. Portanto, $\frac{|D^2 g(\theta)|}{|Dg(\theta)|^2} \leq c$, para todo $x \in I$

Proposição 1.2.13. *Seja $f : I \to I$, $I = \bigcup_{j \geq 1} I_j$, C^2 por pedaços satisfazendo Rényi. Então, f tem distorção limitada. Como consequência a transformação $g : (0,1] \to (0,1]$ do Exemplo 1.2.2 satisfaz que existe $K > 0$ tal que $\frac{1}{K} \leq \frac{|Df(x)|}{|Df(y)|} \leq K$ para cada $x, y \in I_j$ e $j \geq 1$.*

Prova: Como $-c \leq \frac{D^2 g(x)}{Dg(x)^2} \leq c$ temos que $\frac{D^2 g(x)}{Dg(x)} \leq c.Dg(x)$. Daí,

$$\int_y^x \frac{D^2 g(s)}{Dg(s)} ds \leq \int_y^x c.Dg(s) ds,$$

isto implica que

$$\log Dg(x) - \log Dg(y) \leq c.(g(x) - g(y)),$$

logo

$$\log \frac{Dg(x)}{Dg(y)} \leq c.(g(x) - g(y)) \Rightarrow \frac{Dg(x)}{Dg(y)} \leq e^{c.(g(x)-g(y))}.$$

Como $x, y \in I_j$ temos que $g(x) - g(y) \leq m(g(I_j)) \leq 1$. Portanto g tem distorção limitada. ■

Além disso pelo Teorema do Valor Médio, distorção limitada implica que existe $C > 0$ tal que dados quaisquer dois intervalos $I, J \subset I_j$ temos que

$$C^{-1} \frac{|I|}{|J|} \leq \frac{|g(I)|}{|g(J)|} \leq C \frac{|I|}{|J|}.$$

Proposição 1.2.14. *A transformação g (Ex. 1.2.2) admite uma única medida de probabilidade μ, f-invariante absolutamente contínua com respeito a Lebesgue (m).*

Prova: Definamos a sequência $(\mu_n)_{n\geq 1}$ dada por $\mu_n = \dfrac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g_*^j m$, onde $g_*^j m(A) = m(g^{-j}(A))$, para todo $A \subset (0,1]$ mensurável. Mostraremos que $g_*^j m \ll m$, para todo $j \geq 1$. De fato, sejam $\{g_i\}$ os ramos inversos de g, com $g_i : I_i \to (0,1]$, tal que dado qualquer intervalo $A \subset (0,1]$ temos,

$$(g_* m)(A) = m(g^{-1}(A)) = \sum_i m(g_i^{-1}(A)).$$

Cada $g_i : I_i \to (0,1]$ é um difeomorfismo. Portanto, podemos aplicar o Teorema de Mudança de Variável para cada g_i e obtemos,

$$m(A) = \int_{g_i^{-1}(A)} |detDg(x)| dm(x) \tag{1.1}$$

Pela Proposição 1.2.13 sabemos que a condição de Renyi implica distorção limitada. Então, existe $C > 0$ tal que, para cada intervalo $J \subset (0,1]$ vale

$$C^{-1} \leq \frac{|detDg(x)|}{|detDg(y)|} \leq C,$$

para todo $x, y \in J$. Logo, denotando $I_i = (a_i, b_i]$

$$\begin{aligned}
(1.1) &= \int_{g_i^{-1}(A)} \frac{|detDg(a_i)|}{|detDg(a_i)|} |detDg(x)| dm(x) \\
&\geq \int_{g_i^{-1}(A)} C^{-1} |detDg(a_i)| dm(x) \\
&= C^{-1} |detDg(a_i)| m(g_i^{-1}(A)).
\end{aligned}$$

Isto é, $m(g_i^{-1}(A)) \leq C|detDg(a_i)|^{-1} m(A)$.

Como $(g_* m)(A) = \sum_i m(g_i^{-1}(A))$ e $Dg(x) = \dfrac{-1}{x^2}$, segue que

$$\begin{aligned}
(g_* m)(A) &\leq C \sum_i |detDg(a_i)|^{-1} m(A) \\
&\leq C \sum_i |a_i|^2 m(A) \\
&\leq \tilde{C} m(A),
\end{aligned}$$

onde para a última desigualdade devemos observar que cada $a_i = \dfrac{1}{i}$, ou seja, a série $\sum_i |a_i|^2 = \sum_i \dfrac{1}{i^2}$ e portanto converge. Desta forma concluímos a afirmação para $j = 1$.

Agora seja $j \geq 1$ qualquer. Temos que $(g_*^j m)(A) = m(g^{-j}(A)) = \sum_i m(g_i^{-j}(A))$, para todo $A \subset (0,1]$.

Considere as sequências finitas $\underline{i} = (i_1, \ldots, i_j)$ e os ramos inversos de g^j, $g_{\underline{i}}^j : I_{\underline{i}} = (a_{\underline{i}}, b_{\underline{i}}] \to (0,1]$. Como $(0,1]$ admite uma partição de Markov completa então cada

$g_{\underline{i}}^j : I_{\underline{i}} \to (0,1]$ é um difeomorfismo. Como $|Dg_{\underline{i}}^j|$ é crescente pelo Teorema do Valor Médio para $g_{\underline{i}}^j$ obtemos

$$|detDg_{\underline{i}}^j(a_{\underline{i}})||(a_{\underline{i}}, b_{\underline{i}})| \geq |(0,1]| = 1,$$

o que implica em

$$|detDg_{\underline{i}}^j(a_{\underline{i}})|^{-1} \leq |(a_{\underline{i}}, b_{\underline{i}})|.$$

Somando em cada entrada da sequência $\underline{i}$ e denotando $\sum\limits_{\underline{i}\geq 1} = \sum\limits_{i_1\geq 1}\sum\limits_{i_2\geq 1}\cdots\sum\limits_{i_j\geq 1}$ segue-se que

$$\sum_{\underline{i}} |detDg_{\underline{i}}^j(a_{\underline{i}})|^{-1} \leq \sum_{\underline{i}} |(a_{\underline{i}}, b_{\underline{i}})| = 1.$$

Então, um argumento similar ao anterior mostra que

$$\begin{aligned} (g_*^j m)(A) &\leq C\textstyle\sum_{\underline{i}} |detDg_{\underline{i}}^j(a_{\underline{i}})|^{-1} m(A) \\ &\leq C.m(A). \end{aligned}$$

O que conclui a afirmação para $j \geq 1$.

Além disso, pelo Teorema de Radon-Nikodym ([CJ08], Teorema 4.4.3, p.67), temos que

$$C.m(A) \leq (g^j m)(A) = \int_A \frac{dg_*^j m}{dm} dm,$$

para todo A mensurável. Portanto, $\dfrac{dg_*^j m}{dm} \leq C$. Repetindo o processo acima para os valores $b_{\underline{i}}$ obtemos $C^{-1} \leq \dfrac{dg_*^j m}{dm}$, $\forall j \geq 1$. ■

A sequência $(\mu_n)_{n\geq 1}$ admite pelo menos uma subsequência convergente na topologia fraca*. Para provar a afirmação provaremos um resultado mais geral.

Lema 1.2.15. *Toda sequencia de probabilidades em um espaço métrico compacto X admite uma subsequência convergente na topologia fraca**

De fato, seja $\mathcal{F} = \{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto enumerável denso na bola unitária de $C^0(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a sequência de números reais $\int \phi_n d\mu_k$, $k \in \mathbb{N}$ é limitada por 1. Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma sequência $(k_j^n)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\int \phi_n d\mu_{k_j^n}$ converge para algum número $\Phi_n \in \mathbb{R}$ quando $j \to \infty$.

Além disso, cada sequência $(k_j^{n+1})_{j\in\mathbb{N}}$ pode ser escolhida como subsequência da anterior $(k_j^n)_{j\in\mathbb{N}}$. Definamos $l_j = k_j^j$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Por construção a menos de um número finito de termos, $(l_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de cada uma das $(k_j^n)_{j\in\mathbb{N}}$. Logo,

$$\int \phi_n d\mu_{l_j} \to \Phi_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Daí,

$$\Phi(\varphi) = \lim_{j\to\infty} \int \varphi d\mu_{l_j} \tag{1.2}$$

existe para toda função $\varphi \in C^0(X)$. De fato, suponha primeiro que $\varphi \in C^0(X)$. Dado qualquer $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\phi_n \in \mathcal{F}$ tal que $||\varphi - \phi_n||_0 \leq \epsilon$. Então,

$$\left| \int \varphi d\mu_{l_j} - \int \phi_n d\mu_{l_j} \right| \leq \epsilon,$$

para todo j. Como $(\int \varphi d\mu_{l_j})_j$ converge para Φ_n, segue que

$$\limsup_{j\to\infty} \int \varphi d\mu_{l_j} - \liminf_{j\to\infty} \int \varphi d\mu_{l_j} \leq 2\epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, concluímos que $\lim_{j\to\infty} \int \varphi d\mu_{l_j}$ existe. Para o caso geral seguimos o mesmo argumento substituindo φ por $\varphi/||\varphi||$.

Finalmente, o operador $\Phi : C^0(X) \to \mathbb{R}$ definido por (1.2) é linear e positivo. Além disso, $\Phi(1) = 1$. Logo, pelo Teorema de Riez-Markov ([CJ08], Teorema 10.2.2. p.124), existe alguma probabilidade μ em X tal que $\Phi(\varphi) = \int \varphi d\mu$, para toda φ contínua. Assim,

$$\int \varphi d\mu = \lim_{j\to\infty} \varphi d\mu_{l_j},$$

para todo $\varphi \in C^0(X)$.

Mostramos que μ é equivalente a Lebesgue, falta mostrar que μ é única probabilidade f-invariante absolutamente contínua com respeito à Lebesgue. Pelo mesmo argumento usado no Teorema 1.1.3 temos que μ é f-invariante. Para provar a unicidade vejamos o seguinte fato.

Proposição 1.2.16. *Sejam μ e ν probabilidades invariantes em X tais que μ é ergódica e ν é absolutamente contínua com relação a μ, então $\mu = \nu$.*

Prova: Seja $\varphi : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável limitada qualquer. Segue do Teorema de Birkhoff que como μ é invariante e ergódica a média temporal

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$$

é constante igual a $\int \varphi d\mu$ em μ quase todo ponto. Segue que esta igualdade também vale em ν quase todo ponto, já que $\nu \ll \mu$.

Em particular, $\int \varphi d\nu = \int \tilde{\varphi} d\nu = \int \varphi d\mu$, onde para a primeira igualdade usamos o Teorema de Birkhoff. Considerando funções características, temos que $\mu(A) = \nu(A)$ para todo Boreliano A, i.e., $\mu = \nu$. ■

Suponha que g admita outra medida ν invariante absolutamente contínua com respeito a Lebesgue, então $\nu \ll \mu$, pois μ é equivalente a Lebesgue que é ergódica em $(0, 1]$. Logo, pela Proposição 1.2.16 temos que $\nu = \mu$.

1.3 Dinâmica Simbólica

Nesta seção descreveremos a dinâmica simbólica de transformações expansoras. Embora os resultados sejam mais gerais, focamos no caso do intervalo ou círculo.

Dado $m \geq 1$ sejam $A_m = \{1, \dots, m\}$ um alfabeto finito e $\Sigma_m = A_m^{\mathbb{N}}$ o conjunto de todas as sequências infinitas unilaterais. Definamos o mapa $\sigma : \Sigma_m \to \Sigma_m$ por $\sigma(x_i) = (x_{i+1})$, i.e., a imagem de uma sequencia por σ é obtida deslocando (x_i) um passo à esquerda. O par (Σ_A, σ) é chamado de shift. Note que como o símbolo à esquerda desaparece, a aplicação σ não é inversível, e cada ponto tem m pré-imagens.

O espaço do shift Σ_m é compacto na topologia produto. A base desta topologia é formada pelos cilindros

$$C_{i_1,\dots,i_k} = \{x = (x_l) : x_j = i_j,\ j = 1, \dots, k\},$$

onde cada $i_j \in A_m$.

Dizemos que um conjunto $\Lambda \subset \Sigma_m$ é um subshift se é compacto e σ-invariante. Um subshift Λ é do tipo finito se existe $M = (\tau_{ij})$ matriz $m \times m$, chamada matriz de incidência, cujas entradas τ_{ij} são 0 ou 1 tal que

$$x = (x_i) \in \Lambda \Leftrightarrow \tau_{i_k i_{k+1}} = 1,$$

para todo $k \geq 1$.

Apesar de apresentarem uma dinâmica bastante simples o shift tem muita utilidade em sistemas dinâmicos, principalmente por servir de modelo para uma grande classe de funções, inclusive para funções que possuem órbitas muito complicadas.

Seja $f : N \to N$ um mapa C^1, com $N = [0, 1]$ ou $N = S^1$, e seja $K \subset N$ um compacto f-invariante. Suponhamos que f é expansora em K e que existe um aberto $U \supset K$ tal que $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U)$, e que f é topologicamente transitivo em K. K é chamado de repulsor.

Uma coleção de fechados $R_1, \dots, R_p \subset K$ que satisfaz as seguintes propriedades

1. $K = \bigcup_{i=1}^{p} R_i$ e $\overline{int(R_i)} = R_i$ para $i = 1, \dots, p$;

2. $intR_i \cap intR_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$;

3. $f(R_i) \supset R_j$ sempre que $f(intR_i) \cap R_j \neq \emptyset$,

formam uma Partição de Markov do repulsor K.

Definindo uma $p \times p$ matriz $A = (\tau_{ij})$ com entradas

$$\tau_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad f(intR_i) \cap intR_j \neq \emptyset \\ 0 & \text{se} \quad f(intR_i) \cap intR_j = \emptyset \end{cases}$$

e considere o shift $\sigma : \Sigma_A \to \Sigma_A$ definido por $\sigma(i_1 i_2 \cdots) = (i_2 i_3 \cdots)$, onde $\Sigma_A = \{(i_1 i_2 \cdots) \in \{1, \ldots, p\}^{\mathbb{N}} : \tau_{i_k i_{k+1}} = 1 \ \forall k \in \mathbb{N}\}$.

Denotemos por Σ_n o conjunto formado por todas as n-uplas $(i_1 i_2 \cdots i_n)$ tais que existe uma sequência $(j_1 j_2 \cdots) \in \Sigma_A$ tal que $i_l = j_l$ para $l = 1, \ldots, n$. Para cada $(i_1 i_2 \cdots i_n) \in \Sigma_n$ definimos

$$C_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \bigcap_{l=1}^{n} f^{-l+1}(R_{i_l})$$

e $h : \Sigma_A \to K$ dada por

$$h((i_1 i_2 \cdots)) = \bigcap_{l=0}^{\infty} f^{-l} R_{i_{l+1}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{i_1 i_2 \cdots i_n}.$$

Para que h esteja bem definida devemos mostrar que $\displaystyle\bigcap_{l=0}^{\infty} f^{-l} R_{i_{l+1}} \neq \emptyset$ e que contém apenas um ponto. De fato, por definição a sequência de conjuntos $C_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ é encaixante, isto é, $C_{i_1 i_2 \cdots i_{n+1}} \subset C_{i_1 i_2 \cdots i_n}$, para todo $n \geq 1$ o que implica $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_{i_1 i_2 \cdots i_n} \neq \emptyset$. Suponha que existem $x, y \in \displaystyle\bigcap_{l=0}^{\infty} f^{-l} R_{i_{l+1}}$. Podemos tomar o diâmetro da partição arbitrariamente pequeno [Cm85]. Então, dado $\epsilon > 0$,

$$dist(x, y) \leq diam(R_{i_1}) \leq diam(\mathcal{P}) < \epsilon.$$

Daí, $dist(f^j(x), f^j(y)) \leq \lambda^{-j}\epsilon$, para todo $j \geq 1$, onde $\lambda = 2$ é a constante de expansão de σ. Então as órbitas futuras de x, y estarão sempre próximas o que é um absurdo pois f é expansora.

Além disso, $h \circ \sigma((i_1 i_2 \cdots)) = \displaystyle\bigcap_{j} f^{-j} R_{i_{j+1}} = f\left(\bigcap_{j} f^{-j} R_{i_j}\right) = f \circ h((i_1 i_2 \cdots))$ e a função h é Hölder contínua (veja [PU10]). Assim, obtemos uma função $h : \Sigma_A \to K$ que codifica o repulsor K.

Capítulo 2

Hiperbolicidade não-uniforme em dimensão 1

Iniciaremos o capítulo apresentando um resultado devido a Oseledets que, sob certas condições, nos garante a existência do limite

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \log ||Df^n(x)v||.$$

Apresentaremos tal resultado para difeomorfismos e para transformações não invertíveis. Em seguida falaremos das aplicações quadráticas $f_a(x) = a - x^2$, que são exemplos unidimensionais de aplicações que possuem expoente de Lyapunov positivo para um conjunto de parâmetros a com medida de Lebesgue positiva. Além disso, apresentaremos a Derivada Schwarziana e algumas propriedades.

2.1 Expoentes de Lyapunov

Nesta secção introduziremos um conceito de grande importância na Teoria dos Sistemas Dinâmicos, os chamados Expoentes de Lyapunov. Dada uma transformação diferenciável $f : X \to X$, para cada $x \in X$ e $v \in T_xX$, o número

$$\lambda(x, v) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \log ||Df^n(x)v||,$$

onde $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{nvezes}$, é dito *Expoente de Lyapunov* (associado a x e v), sempre que tal limite existir. Estes números fornecem informações preciosas acerca do comportamento assintótico da derivada de f ao longo da órbita de x através da expansão e contração de vetores no espaço tangente. Em geral o limite acima pode não existir. Porém um resultado devido a Oseledets nos diz que sob condições bastante gerais podemos falar em Expoentes de Lyapunov como definidos anteriormente.

Teorema 2.1.1. *(Teorema de Oseledets) Sejam X variedade compacta sem bordo, $f \in Dif^1(X)$ e μ probabilidade f-invariante. Então, para μ quase todo ponto $x \in X$:*

1. *Existe $k(x) \geq 1$ e decomposição $T_xX = E_x^1 \oplus \cdots \oplus E_x^{k(x)}$, Df-invariante (isto é, $Df(x)E_x^i = E_x^i$), variando mensuravelmente com o x;*

2. *para cada $v \in E_x^i \backslash \{0\}$, $\lambda_i(\mu, x) = \lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log ||Df^n(x)v||$ existe e varia mensuravelmente com x, e ainda $\lambda_i(\mu, f(x)) = \lambda_i(\mu, x)$.*

Se μ é ergódica, então as funções $k(\cdot)$ e $\lambda_i(\mu, \cdot)$ são constantes, isto é, independem de x.

Este teorema descreve o comportamento passado e futuro da dinâmica. Para endomorfismos pode-se descrever o comportamento futuro.

Teorema 2.1.2. *(Teorema de Oseledets- caso não invertível) Seja f um endomorfismo de classe C^1 em uma variedade compacta X. Suponha que $\log |detDf(x)| \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Então, existe $A \in \mathcal{A}$, f-invariante, com $\mu(A) = 1$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *Existe uma função mensurável invariante $s : A \longrightarrow \mathbb{N}$ (ou seja, $s \circ f = s$);*

2. *para cada $x \in A$, existem números reais $\lambda_{s(x)}(x) < \lambda_{s(x)-1}(x) < \cdots < \lambda_1(x)$, com $\lambda_i(\mu, f(x)) = \lambda_i(\mu, x)$, variando mensuravelmente com x;*

3. *para cada $x \in A$ existem subespaços vetoriais $\{0\} := V_{s(x)+1}(x) \subset V_{s(x)}(x) \subset ... \subset V_1(x) = T_xM$, tais que $Df(x)V_i(x) = V_i(f(x))$, variam mensuravelmente com o ponto x.*

4. *para todo $x \in A$ e $v \in V_i(x) \backslash V_{i+1}(x)$,*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log ||Df^n(x)v|| = \lambda_i(\mu, x)$$

Em dimensão um o exemplo mais simples de dinâmica com expoente de Lyapunov positivo são as aplicações expansoras. De fato, dada $g : I \to I$ tal que existe $\lambda > 1$ tal que $|(g^n)'(x)| \geq \lambda^n$, então

$$\frac{1}{n} log|(g^n)'(x)| \geq log\lambda > 0.$$

2.1.1 A família quadrática

Nesta seção faremos o estudo da dinâmica da aplicação quadrática $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f_a(x) = a - x^2$, $a \in \mathbb{R}$. Estas aplicações são escritas de várias formas, por exemplo $x \mapsto 1 - ax^2$ e $x \mapsto ax(1-x)$, porém conjugadas entre si.

A família de aplicações quadráticas foi um dos objetos mais estudados na última década. Isto se deve em parte à simplicidade da expressão e a complexidade da dinâmica gerada por essas aplicações.

Uma das questões interessantes é a existência de uma probabilidade invariante absolutamente contínua, pois a existência de tal medida implica um comportamento caótico. Ledrapier [Le81] mostrou que se $f : I \to I$, com I intervalo, tem uma medida de probabilidade invariante absolutamente contínua com entropia métrica positiva então existe um subconjunto $\Lambda \subset I$ de medida de Lebesgue positiva tal que o expoente de Lyapunov existe e é igual a alguma constante positiva para cada $x \in \Lambda$. Segundo um resultado devido a Ruelle [Ru79], as órbitas de pontos próximos de Λ se afastam exponencialmente rápido.

Estamos especialmente interessados em saber quando f_a tem um comportamento expansor. A dinâmica desta aplicação é interessante se o parâmetro a estiver entre $-\frac{1}{4}$ e 2. Caso contrário $f_a^n(x) \to -\infty$ quando $n \to +\infty$.

Observemos que $f_a = f$ exibe um ponto crítico $c = 0$, e isto é o principal motivo que impede que a aplicação quadrática tenha comportamento expansor. De fato, suponhamos que

$$|f^n(c) - c| < 4^{-n},$$

para algum $n \geq 1$. Então, para $J = (-4^{-n}, 4^{-n})$ temos que $f^n(\overline{J}) \subset J$ e $|(f^n)'| < 1$ em J. De fato, seja $x = f^n(y)$ com $y \in \overline{J}$, então $|y - c| \leq 4^{-n}$. Por continuidade $|f^n(y) - f^n(c)| < \epsilon$, com $\epsilon > 0$ dado. Por outro lado, $|f^n(c) - c| < 4^{-n}$, logo

$$|f^n(y)| - |f^n(c)| \leq |f^n(y) - f^n(c)| < \epsilon \Rightarrow |f^n(y)| < \epsilon + 4^{-n}.$$

Como ϵ é qualquer temos que $f^n(y) \in J$. Além disso,

$$|(f^n)'(x)| = \prod_{j=0}^{n-1} |f'(f^j(x))| = \prod_{j=0}^{n-1} 2|f^j(x)| < 2^n.4^{-\sum_{j=0}^{n-1} j} < 1.$$

Isto implica que f tem uma órbita periódica atratora e então o expoente de Lyapunov é negativo. Assim, controlar a recorrência à região crítica $c = 0$ é a estratégia básica para garantir que a contração que acontece toda vez que uma órbita passa próximo ao ponto crítico $c = 0$ não acumule com o passar do tempo.

É importante também considerar o caso em que a órbita do ponto crítico é não recorrente, isto é, $\inf_{n \geq 1} |f_a^n(c) - c| > 0$.

Então, $|(f^n)'(f(c))| = \prod_{j=0}^{n-1} |f'(f^{j+1}(c))| = \prod_{j=0}^{n-1} |-2f^{j+1}(c)| = 2^n \prod_{j=1}^{n} |f^j(c) - c| \geq \sigma.\lambda^n$, onde $\lambda > 1$ e $\sigma > 0$. Além disso, se $I = [q, -q]$, onde $q = \dfrac{-1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$ é o ponto fixo com maior valor absoluto, Lebesgue quase todo ponto $x \in I$ satisfaz a propriedade anterior com $\sigma = \sigma(x)$. Para mais detalhes veja [V97]

Observação 2.1.3. *O intervalo* $I_0 = [q, -q]$ *satisfaz* $f_a(I_0) \subset (I_0)$

Seja $x = f(y)$ com $y \in f(I_0)$. Temos dois casos:

1. $q \leq y < 0 \Rightarrow q \leq f(y) < a$

2. $0 \leq y \leq -q \Rightarrow q \leq f(y) \leq a$

Então, $x \in [q, a] \subset [q, -q]$, quando $a \in (-\frac{1}{4}, 2)$.

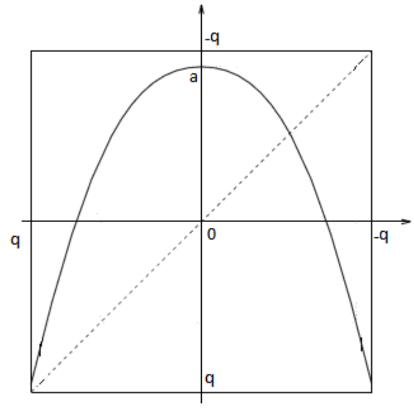

Figura 2.1: Conjunto Invariante

Do ponto de vista probabilístico um resultado importante foi devido a Jackobson [Ja81] o qual mostrou que para um conjunto Γ de parâmetros $a \in [0, 2]$ com $Leb(\Gamma) > 0$ a aplicação quadrática $f_a(x) = ax(1 - x)$ tem medida finita invariante absolutamente contínua. Benedicks e Carleson [BC85] provaram que o conjunto de parâmetros para os quais o valor crítico $f_a(0)$ para a aplicação f_a tem um expoente de Lyapunov positivo tem medida de Lebesgue positiva. Mais precisamente,

Teorema 2.1.4. ***(Benedicks e Carleson)[BC85].*** *Seja* $f_a : (-1, 1) \to (-1, 1)$ *dada por* $f_a(x) = 1 - ax^2$ *com* $a \in (0, 2)$. *Existem constantes* $C, \gamma > 0$ *e um conjunto* $E \subset (0, 2)$ *com medida de Lebesgue positiva, tais que para todo* $a \in E$,

$$|(f_a^n)'(f_a(0))| \geq C.e^{\gamma n}, \ \forall n \geq 1$$

Do ponto de vista topológico, tem-se

Teorema 2.1.5. ***(Lyubich[Ly97])*** *Existe um conjunto aberto e denso de parêmetros* $a \in [0, 2]$ *para os quais* f_a *tem uma órbita periódica atratora cuja bacia de atração contém Lebesgue quase todo ponto.*

2.2 Derivada Schwarziana

Seja f uma função de classe C^3 definida no intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se $f'(x) \neq 0$ definimos a derivada Schwarziana de f em x por

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2.$$

Se y é um ponto crítico isolado de f definimos $Sf(y) = \lim_{x\to y} Sf(x)$, se o limite existir.

Observação 2.2.1. *O operador $Nf = (\log f')'$ desempenha um importante papel no estudo da distorção de funções. De fato, $Nf = (\log f')' = \dfrac{f''}{f'}$ e assim se f é um difeomorfismo em $x, y \in I$ então*

$$\log \frac{f''(x)}{f'(y)} = \int_x^y \frac{f''(t)}{f'(t)}dt = \int_x^y Nf(t)dt.$$

Além disso este operador está relacionado com a derivada Schwarziana da seguinte forma:

$$Sf = (Nf)' - \frac{1}{2}(Nf)^2$$

Lema 2.2.2. *(Princípio do Mínimo). Seja I um intervalo e $f : I \to I$ um mapa de classe C^3 com $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Se $Sf < 0$, então $|f'|$ não atinge um mínimo local no interior de I.*

Prova: Seja p um ponto critico de f'. Então $f''(p) = 0$, daí como $Sf(p) < 0$ temos que $\dfrac{f'''(p)}{f'(p)} < 0$. Assim, $f'''(p)$ e $f'(p)$ tem sinais opostos.

Se $f'(p) < 0$, então $f'''(p) > 0$ e portanto p é um mínimo local de f', logo é um máximo local de $|f'|$. Analogamente, se $f'(p) > 0$ então p é um ponto de máximo local de $|f'|$. Como f' nunca é zero em I temos que $|f'|$ não tem um mínimo local em I. ∎

Teorema 2.2.3. *Seja $f : I \to I$, I intervalo compacto, uma aplicação de classe C^3 com derivada Schwarziana negativa. Seja V um aberto que contém todos os pontos críticos de f e contém pelo menos um ponto de cada órbita periódica não-repulsora. Então existem $C > 0$, $\lambda > 1$ tais que se $x \in I$ satisfaz $f^i(x) \notin V$ para cada $i = 0, \ldots, n-1$, então $|Df^n(x)| > C\lambda^n$.*

Prova: Existe um inteiro m tal que se $f^i(x) \notin V$ para todo $0 \leq i \leq m$, então $|Df^m(x)| > 1$. De fato, suponha, por contradição que existe inteiro n arbitrariamente grande para o qual existe um ponto $x_n \in I$ tal que

$$|Df^n(x_n)| \leq 1 \text{ e } f^i(x_n) \notin V$$

para cada $0 \leq i \leq n$.

O conjunto de pontos críticos de f e de pontos periódicos não-repulsores é finito, pois os pontos críticos de f são isolados. Então existe um aberto U contendo cada ponto periódico não-repulsor em V e cujo fecho está contido em V. Seja J_n o maior intervalo contendo x_n tal que

$$f^j(J_n) \subset I \backslash \overline{U},\ \forall\ j = 0, \ldots, n.$$

Como f^n é um difeomorfismo em J_n, pois os pontos críticos de f estão em U e $Sf^n < 0$, segue pelo Princípio do Mínimo que $|Df^n(x)|$ não atinge mínimo local no interior de I. Então, existe uma componente L_n de $J_n \backslash \{x_n\}$ tal que $|Df^n(x)| \leq 1$, para todo $x \in L_n$.

Suponhamos sem perda de generalidade que J_n é conexo, ou seja, J_n é um intervalo, então $J_n \backslash \{x_n\}$ possui duas componentes conexas. Suponha que em toda componente conexa $L_n \subset J_n \backslash \{x_n\}$ exista $z_n \in L_n$ tal que $|Df^n(z_n)| > 1$. Como $|Df^n(x_n)| \leq 1$ e $|Df^n|$ é uma função monótona, pois não admite mínimo local em I, teríamos

$$z_n < x_n \Rightarrow |Df^n(z_n)| < |Df^n(x_n)|.$$

Uma contradição pois $|Df^n(z_n)| > |Df^n(x_n)|$.

Seja $y_n \neq x_n$ no bordo de L_n. Pela maximalidade de J_n, existe um inteiro $0 \leq k(n) < n$ tal que $f^{k(n)}(y_n) \in \overline{U}$. Seja δ de modo que cada componente de $V \backslash U$ tenha comprimento $\geq \delta$. Como $f^{k(n)}(x_n) \notin V$ e $f^{k(n)}(y_n) \in \overline{U}$ obtemos

$$|f^{k(n)}(L_n)| > \delta. \tag{2.1}$$

Por outro lado, como $0 < |Df^n(x)| \leq 1$ para todo $x \in L_n$ temos que

$$|f^n(L_n)| \leq |L_n|. \tag{2.2}$$

Segue que

$$|L_n| \to 0. \tag{2.3}$$

De fato, suponha que esta convergência não seja válida, podemos tomar uma subsequência L_{n_i} convergindo para um intervalo L de comprimento positivo. Se J é um intervalo cujo fecho está contido no interior de L, então existe um inteiro j tal que L_{n_i} contém J para todo $n_i > j$. Como $L_n \subset J_n$ e $f^j(J_n) \cap \overline{U} = \emptyset$, para cada $0 \leq j \leq n$ segue que $f^n(J) \subset I \backslash \overline{U}$, para todo inteiro n. Pelo Teorema de Denjoy-Scwartz que nos diz que dada uma aplicação contínua no intervalo compacto I que é C^1 por pedaços, monótona por pedaços e é tal que a função $x \mapsto \log|f'(x)|$ se estende a uma função Lipschitz em I, então $f|_J$ não tem intervalos errantes, ou seja, temos que existe um ponto em J que é assintótico para atratores periódicos. Isso não é possível porque U contém um ponto de cada órbita periódica atratora de f.

De 2.2 e 2.3 obtemos $|f^n(L_n)| \to 0$. Como $|f^{k(n)}(L_n)| \geq \delta$, podemos tomar uma subsequência $n_i \to \infty$ tal que o intervalo $f^{k(n_i)}(L_{n_i})$ converge para um intervalo S de comprimento menor ou igual a δ. Como $|f^n(L_n)| = |f^{n-k(n)}(f^{k(n)}(L_n))| \to 0$ e $|f^{k(n)}(L_n)| \geq \delta$ obtemos $n - k(n) \to \infty$. Se J é um intervalo cujo fecho está contido no interior de S, então $f^{k(n_i)}(L_{n_i})$ contém J para i suficientemente grande. Como antes, segue que $f^n(J)$ está contido em $I \backslash \overline{U}$, para todo n. Usando novamente o Teorema de Denjoy-Scwartz temos que existe pontos em J que são assintóticos para um atrator periódico, uma contradição pois $f^n(J) \cap \overline{U} = \emptyset$, $\forall n \geq 0$.

Pelo que vimos no início da demonstração e a compacidade de $I \backslash V$ segue que existe um inteiro k e $\lambda > 1$ tal que $|Df^k(x)| > \lambda^k$ sempre que $f^i(x) \notin V$ para todo $i \leq k$. Seja $\rho = min\{|Df(x)| : \; x \in I \backslash V\}$ e $C > 0$ tal que $\rho^i > C\lambda^i$, $\forall 0 \leq i < k$. Se n é um inteiro tal que $f^l(x) \notin I \backslash V$ para todo $l < n$, então podemos escrever $n = jk + i$ com $0 \leq i < k$ e temos

$$|Df^n(x)| = \left(\prod_{l=0}^{j-1} |Df^k(f^{lk}(x))| \right) . |Df^i(f^{jk}(x))| \geq (\lambda^k)^j \rho^i \geq \lambda^{jk} C \lambda^i = C\lambda^n.$$

■

Capítulo 3

Atrator Bidimensional Robusto com Expansão Não-uniforme

O objetivo deste capítulo é apresentar com detalhes a prova do Teorema 3.0.5 que foi enunciado na Introdução e que será lembrado a seguir.

Seja $\varphi_\alpha : I \times \mathbb{R} \longrightarrow I \times \mathbb{R}$ aplicação de classe C^3, com $I = S^1$ ou $I = [0, 1]$, dada por:

$$\varphi_\alpha(\theta, x) = (d\theta \ (mod 1), a(\theta) - x^2),$$

onde $d \geq 2$, $a(\theta) = a_0 + \alpha\psi(\theta)$, onde ψ é uma função Morse e a_0 é fixado de tal forma que $x = 0$ é ponto pré-periódico para a aplicação $h(x) = a_0 - x^2$. Durante todo o texto estaremos considerando $\psi(\theta) = \sin 2\pi\theta$.

Em [Vi97], Viana mostrou que assumindo $d \geq 16$ e α suficientemente pequeno, estes mapas admitem dois expoentes de Lyapunov positivos em Lebesgue quase todo ponto de $S^1 \times I_0$, no qual I_0 é um intervalo compacto contido em $(-2, 2)$.

Observação 3.0.4. *Lembrando a observação 2.1.3 temos que para $a < 2$ existe intervalo compacto $I_0 \subset (-2, 2)$ tal que $\varphi_\alpha(S^1 \times I_0) \subset S^1 \times I_0$;*

Isto implica que para qualquer ponto $(\theta, x) \in S^1 \times \mathbb{R}$, ou sua órbita eventualmente intersecta a faixa invariante $S^1 \times I_0$ ou o expoente de Lyapunov é positivo na direção vertical.

Teorema 3.0.5. ***(Viana,[Vi97])*** *Suponha que $d \geq 16$. Então, existe $\alpha_0 > 0$ tal que para cada $0 < \alpha < \alpha_0$ temos*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|D\varphi_\alpha^n(x)v\| \geq c > 0,$$

em Lebesgue quase todo ponto $(\theta, x) \in S^1 \times I_0$ e $v \in T_{(\theta,x)}(S^1 \times \mathbb{R})$. Além disso, o mesmo vale para cada aplicação próxima de φ_α em $C^3(S^1 \times \mathbb{R})$.

Observação 3.0.6. *No Teorema 3.0.5, vamos provar que φ_α tem expoente de Lyapunov positivo na direção vertical, já que a expansão da aplicação g nos garante que φ_α tem expoente de Lyapunov positivo para todo $(\theta, x) \in S^1 \times I_0$ e todo vetor não nulo $v \in T_{(\theta,x)}(S^1 \times \mathbb{R})$ que tem uma componente horizontal. De fato,*

$$D\varphi_\alpha(\theta, x) = \begin{pmatrix} g'(\theta) & 0 \\ \partial_\theta f(\theta, x) & \partial_x f(\theta, x) \end{pmatrix}$$

Então, aplicando a regra da Cadeia obtemos

$$D\varphi_\alpha^n(\theta, x) = \begin{pmatrix} (g^n)'(\theta) & 0 \\ A & B \end{pmatrix}$$

Daí, dado $v = (v_1, v_2) \in T_x(S^1 \times I_0)$ tal que $v_1 \neq 0$ temos que

$$||D\varphi_\alpha^n(\theta, x)v|| = \left|\left| \begin{pmatrix} (g^n)'(\theta) & 0 \\ A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right|\right| \geq |(g^n)'(\theta)v_1|$$

Mas,

$$|(g^n)'(\theta)| = \prod_{j=0}^{n-1} |g'(g(\theta))| = d^n \geq 16^n.$$

Para provar o teorema enunciado acima iremos seguir [Vi97] e considerar a aplicação $\varphi : I \times \mathbb{R} \to I \times \mathbb{R}$ de classe C^2 da forma $\varphi(\theta, x) = (g(\theta), f(\theta, x))$, com $\partial_x f(\theta, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ tal que

$$||\varphi - \varphi_\alpha||_{C^2} \leq \alpha \text{ em } S^1 \times I_0. \tag{3.1}$$

Além disso, introduzimos o conceito de Curvas Admissíveis.

3.1 Curvas e Segmentos Admissíveis

Queremos mostrar que a expansão horizontal domina a expansão vertical na faixa dinâmica $S^1 \times I_0$. Essa dominação permite concentrar-nos em curvas quase horizontais, que permanecem assim sob iterações. Deste ponto em diante tomamos $I = S^1$, com orientação induzida por $\mathbb{R}$.

Definição 3.1.1. *Dado $\hat{X} \subset S^1 \times I_0$ dizemos que $\hat{X}$ é segmento admissível se existe intervalo $\omega \in I$ tal que $\hat{X} = graf(X)$ com $X : \omega \to I_0$ satisfazendo a seguinte condição:*

1. *$|X'(\theta)| \leq \alpha$ e $|X''(\theta)| \leq \alpha$, para todo $\theta \in \omega$.*

Se $\omega = I$ então $\hat{X}$ é dita curva admissível.

Seja $\tilde{\theta}_0$ um ponto fixo de g próximo de $\theta = 0$. Definamos em S^1 a Partição de Markov $\mathcal{P}_n$ dada por

- $P_1 = \{[\tilde{\theta}_{j-1}, \tilde{\theta}_j); 1 \leq j \leq d\}$, onde $\tilde{\theta}_0, \cdots, \tilde{\theta}_d = \tilde{\theta}_0$ são as pré-imagens de $\tilde{\theta}_0$ por g (ordenados de acordo com a orientação de S^1);
- $P_{n+1} = \{componente\ conexa\ de\ g^{-1}(\omega), \omega \in P_n\}$, $n \geq 1$.

As curvas e segmentos admissíveis satisfazem boas propriedades que serão apresentadas a seguir. Dada uma curva admissível $\hat{X}_0 = graf(X_0)$, denotemos por $\hat{X}_j(\theta) = \varphi^j(\theta, X_0(\theta))$ para $j \geq 0$ e $\theta \in S^1$. Durante todo o texto estaremos sempre supondo $d \geq 16$. O lema a seguir nos garante que dada uma curva admissível, a sua imagem por iterados de φ ainda é uma curva admissível.

Lema 3.1.2. *Sejam ω um intervalo e $\hat{X} = graf(X|_\omega)$ segmento admissível. Se $g^n|_\omega$ é injetora então $\varphi^n(\hat{X})$ é segmento admissível. Ademais, se $\#\{g^{-1}(\theta)\} = d$ para todo $\theta \in S^1$ e $\hat{X}$ é curva admissível então $\varphi^n(\hat{X})$ é formado por d^n curvas admissíveis.*

Prova: Para a primeira parte do lema basta vermos que $\varphi(\hat{X})$ é segmento admissível.

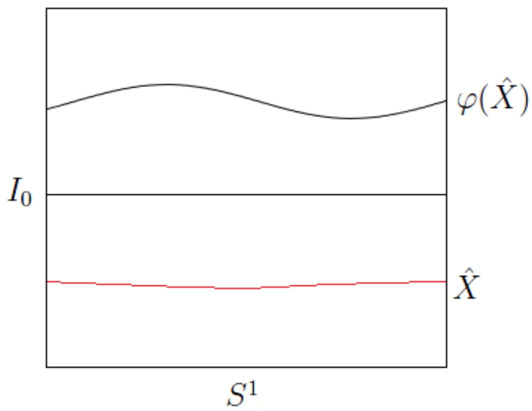

Figura 3.1: Curva Admissível

Considere $Y : g(\omega) \to I_0$ dada por $Y(g(\theta)) = f(\theta, X(\theta))$ e denotemos $\hat{Y} = graf(Y)$. Como $g|_\omega$ é injetora temos que $g(\omega) \neq \emptyset$ e portanto Y está bem definida. Além disso, $\varphi(\hat{X}(\theta)) = \varphi(\theta, X(\theta)) = (g(\theta), f(\theta, X(\theta))) = (g(\theta), Y(g(\theta))) \in \hat{Y}$.

Então derivando ambos os lados da igualdade $Y(g(\theta)) = f(\theta, X(\theta))$ obtemos $Y'(g(\theta)).g'(\theta) = \partial_\theta f(\hat{X}(\theta)) + \partial_x f(\hat{X}(\theta)).X'(\theta)$, e então

$$\begin{aligned}
|Y'(g(\theta))| &= \frac{1}{|g'(\theta)|}|\partial_\theta f(\hat{X}(\theta)) + \partial_x f(\hat{X}(\theta)).X'(\theta)| \\
&\leq \frac{1}{|g'(\theta)|}\left(|\partial_\theta f(\hat{X}(\theta))| + \underbrace{|\partial_x f(\hat{X}(\theta))|}_{<4} . \underbrace{|X'(\theta)|}_{<\alpha}\right) \\
&< \frac{1}{16}.(2\pi\alpha + 4\alpha) < \alpha
\end{aligned}$$

Calculando a segunda derivada de Y temos que

$$\begin{aligned} Y''(g(\theta)).(g'(\theta))^2 + Y'(g(\theta)).g''(\theta) &= \partial_{\theta\theta} f(\hat{X}(\theta)) + \partial_{x\theta} f(\hat{X}(\theta)).X'(\theta) \\ &+ \partial_x f(\hat{X}(\theta)).X''(\theta) + \partial_{\theta x} f(\hat{X}(\theta)).X'(\theta) \\ &+ \partial_{xx} f(\hat{X}(\theta))(X'(\theta))^2. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} |Y''(g(\theta))| &= \frac{1}{|g'(\theta)|^2}|\partial_{\theta\theta} f(\hat{X}(\theta)) + \partial_{x\theta} f(\hat{X}(\theta)).X'(\theta) + \partial_x f(\hat{X}(\theta)).X''(\theta) \\ &+ \partial_{\theta x} f(\hat{X}(\theta)).X'(\theta) + \partial_{xx} f(\hat{X}(\theta))(X'(\theta))^2 - Y'(g(\theta)).g''(\theta)| \\ &\leq \frac{1}{256}(50\alpha + 2\alpha^2 + 4\alpha + 3\alpha^2) < \alpha. \end{aligned}$$

Portanto, $\hat{Y} = \varphi(\hat{X})$ é segmento admissível, o que prova a primeira parte do lema.

Seja $\theta \in S^1$, consideremos a seguinte sequência de partições $\mathcal{P}_1 = \{[\tilde{\theta}_{j-1}, \tilde{\theta}_j), 1 \leq j \leq d\}$, onde $\tilde{\theta}_0, \dots, \tilde{\theta}_d$ são as pré-imagens de θ e $\mathcal{P}_{n+1} = \{$componente conexa de $g^{-1}(\omega)$; $\omega \in \mathcal{P}_n\}$. Seja $\omega \in \mathcal{P}_n$, pela propriedade de Markov de g temos que $g^n(\omega) = S^1$. Então, dada uma curva admissível $\hat{X}_0$ temos que $\varphi^n(\hat{X}_0|_\omega)$ é curva admissível. Como $\sharp(\mathcal{P}_n) = d^n$, segue o resultado. ■

Observação 3.1.3. *Notamos que a primeira parte do lema acima não depende da partição de Markov que definimos anteriormente. Então o que nos garante que $|Y'| \leq \alpha$ e $|Y''| \leq \alpha$ é o fato de que a derivada de g ser limitada por baixo por 16. Portanto, se substituirmos g por uma aplicação com derivada suficientemente grande para todo o domínio ainda vale o resultado. Por exemplo, podemos tomar g a modificação da transformação de Gauss do Exemplo 1.2.2.*

O próximo lema mostra que imagens de curvas admissíveis não são planas. Mais precisamente,

Lema 3.1.4. *Sejam $A_1 = \{\theta \in S^1; |\sin 2\pi\theta| \leq \frac{1}{3}\}$ e $A_2 = S^1 \backslash A_1$. Então, se $\hat{Z}(\theta) = \varphi(\hat{X}(\theta)) = (g(\theta), Z(\theta))$ vale :*

1. $|Z'(\theta)| \geq \dfrac{\alpha}{2}$ *se* $\theta \in A_1$
2. $|Z''(\theta)| \geq 4\alpha$, *se* $\theta \in A_2$

Prova: Temos que $Z(\theta) = f(\theta, X(\theta))$ então $Z'(\theta) = \partial_\theta f(\theta, X(\theta)) + \partial_x f(\theta, X(\theta)) = 2\pi\alpha \cos 2\pi\theta - 2X(\theta).X'(\theta)$. Tome $\theta \in A_1$, daí $|\cos 2\pi\theta| \geq \dfrac{11}{12}$. Logo,

$$\begin{aligned} |Z'(\theta)| &= |2\pi\alpha \cos 2\pi\theta - 2X(\theta).X'(\theta)| \\ &\geq 2\pi\alpha|\cos 2\pi\theta| - 2|X(\theta)||X'(\theta)| \\ &\geq 2\pi\alpha\tfrac{11}{12} - 4\alpha = \frac{11\pi\alpha}{6} - 4\alpha > \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

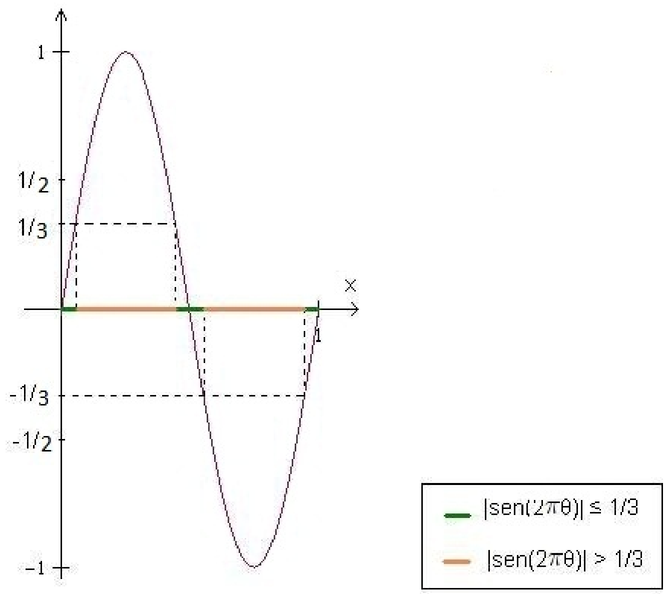

Figura 3.2: $\sin 2\pi\theta$

Por outro lado se $\theta \in A_2$ temos que $|\sin 2\pi\theta| \geq \dfrac{1}{3}$. Daí, $Z''(\theta) = -4\pi\alpha^2.\sin 2\pi\theta - 2(X'(\theta)^2 + X(\theta).X''(\theta))$ e então,

$$\begin{aligned} |Z''(\theta)| &= |-4\pi\alpha^2.\sin 2\pi\theta - 2((X'(\theta))^2 + X(\theta).X''(\theta))| \\ &\geq 4\pi\alpha^2.|\sin 2\pi\theta| - 2|(X'(\theta))^2| - 2|X(\theta)||X''(\theta)| \\ &\geq 4\pi\alpha^2.\tfrac{1}{3} - 2\alpha^2 - 4\alpha \geq 4\alpha \end{aligned}$$

∎

Proposição 3.1.5. *Sejam $\hat{X}$ um segmento admissível e $\hat{Z}(\theta) = \varphi(\hat{X}) = (g(\theta), Z(\theta))$. Então, dado qualquer intervalo $I \subset I_0$ temos*

$$Leb(\{\theta \in S^1 : \ \hat{Z}(\theta) \in S^1 \times I\}) \leq \frac{4|I|}{\alpha} + 2\sqrt{\frac{|I|}{\alpha}}.$$

Prova: Tome A_1 e A_2 como no lema anterior. Vamos mostrar que

$$Leb(\{\theta \in A_1; \ Z(\theta) \in I\}) \leq \frac{4|I|}{\alpha}$$

e

$$Leb(\{\theta \in A_2; \ Z(\theta) \in I\}) \leq 2\sqrt{\frac{|I|}{\alpha}}.$$

Note que A_1 e A_2 possuem duas componentes conexas, ver Figura 3.2. Escrevamos $A_1 = J_1 \cup J_2$ e consideremos o conjunto $\{\theta \in J_1; \ Z(\theta) \in I\}$ que por continuidade é um intervalo.

Pelo Teorema do Valor Médio temos que existe $c_1 \in \{\theta \in J_1; \ Z(\theta) \in I\} \subset A_1$ tal que

$$|I| \geq |Z'(c_1)|.|\{\theta \in J_1; \ Z(\theta) \in I\}|,$$

o que implica via o lema anterior que

$$|\{\theta \in J_1;\ Z(\theta) \in I\}| \leq \frac{2|I|}{\alpha}.$$

Analogamente temos que $|\{\theta \in J_2;\ Z(\theta) \in I\}| \leq \dfrac{2|I|}{\alpha}$. Portanto,

$$Leb(\{\theta \in A_1;\ Z(\theta) \in I\}) \leq \frac{4|I|}{\alpha}.$$

Como A_2 tem duas componentes conexas podemos escrever $A_2 = J_3 \cup J_4$. Pelo lema anterior $|Z''(\theta)| \geq 4\alpha$ para todo $\theta \in A_2$ e como consequência temos que, em cada componente conexa de A_2, a função Z não muda de concavidade, podendo ter no máximo um ponto crítico.

Como a imagem de uma curva admissível sempre tem pontos crítico, a afirmação acima mostra que de fato Z tem único ponto crítico $\tilde{\theta}$ em A_2 . Seja $\epsilon > 0$, se $\tilde{\theta} \in \{\theta \in J_3;\ Z(\theta) \in I\}$ tome $\tilde{\theta}_1 < \tilde{\theta} < \tilde{\theta}_2$ tais que $|\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}| < \epsilon$ e $|\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}| < \epsilon$. Então, o conjunto $\{\theta \in J_3;\ Z(\theta) \in I\} \backslash (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ tem duas componentes conexas que iremos chamar de D_1 e D_2. Aplicando o Teorema do Valor Médio para a segunda derivada existe $c_2 \in D_1$ tal que

$$|I| \geq |Z''(c_2)|.(|D_1|)^2.$$

Daí, $|D_1| \leq \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{|I|}{\alpha}}$. Analogamente temos que $|D_2| \leq \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{|I|}{\alpha}}$. Fazendo o mesmo processo para J_4 obtemos

$$Leb(\{\theta \in A_2;\ Z(\theta) \in I\}) \leq 2\sqrt{\frac{|I|}{\alpha}},$$

concluindo a prova do lema. ■

Corolário 3.1.6. *Existe $C_1 > 0$ tal que, dados $\hat{X}_0$ segmento admissível e $I \subset I_0$ intervalo com $|I| \leq \alpha$ temos*

$$Leb(\{\theta \in S^1 : \hat{X}_j \in S^1 \times I\}) \leq C_1\sqrt{\frac{|I|}{\alpha}},$$

para todo $j \geq 1$.

Prova: Seja $j \geq 1$ arbitrário. Sejam $\omega \in P_{j-1}$, $X_\omega = \varphi^{j-1}(\hat{X}_0|_\omega)$ e $\hat{Z}_\omega = \varphi(\hat{X}_\omega)$. Pela Proposição anterior, a medida de $J = \{\theta \in S^1 : \hat{Z}_\omega(\theta) \in S^1 \times I\}$ é limitada superiormente por

$$\frac{4|I|}{\alpha} + 2\sqrt{\frac{|I|}{\alpha}} \leq 6\sqrt{\frac{|I|}{\alpha}},$$

já que $|I| \leq \alpha$.

Como $g^j : \omega \to S^1$ é um difeomorfismo expansor temos como consequência que $g^j|_\omega$ tem distorção limitada. Daí, denotando

$$\omega' = \{\theta \in \omega : \hat{X}_j(\theta) \in S^1 \times I\}$$

temos que

$$\frac{m(\omega')}{m(\omega)} \leq K\frac{m(J)}{m(S^1)} \leq 6K\sqrt{\frac{|I|}{\alpha}} \Rightarrow m(\omega') \leq 6K\sqrt{\frac{|I|}{\alpha}}.m(\omega).$$

Então,

$$\sum_{i=0}^{j-1} m(\omega') \leq C_1\sqrt{\frac{|I|}{\alpha}}\sum_{i=0}^{j-1} m(\omega).$$

Como P_{j-1} é partição temos que somando sobre $\omega \in \mathcal{P}_j$:

$$m(\{\theta \in S^1 : \hat{X}_j(\theta) \in S^1 \times I\}) \leq C_1\sqrt{\frac{|I|}{\alpha}}.m(S^1) = C_1\sqrt{\frac{|I|}{\alpha}}.$$

■

3.2 Algumas cotas de Expansão

Dados $(\theta, x) \in S^1 \times I_0$ e $j \geq 1$ colocamos $\varphi^j(\theta, x) = (\theta_j, x_j)$. Introduzimos constantes positivas $0 < \eta \leq \frac{1}{3}$ e $0 < \kappa < 1$. Então temos o seguinte lema:

Lema 3.2.1. *Existem $\delta_1 > 0$ e $\sigma_1 > 1$ e para cada $\alpha > 0$ pequeno, existe $N = N(\alpha) \geq 1$ satisfazendo:*

a) $\displaystyle\prod_{j=0}^{N-1} |\partial_x f(\theta_j, x_j)| \geq |x|\alpha^{-1+\eta}$, *para todo $(\theta, x) \in S^1 \times I_0$ com $|x| < 2\sqrt{\alpha}$.*

b) Dado qualquer $(\theta, x) \in S^1 \times I$, se $|x| < 2\sqrt{\alpha}$, então $|x_j| > \sqrt{\alpha}$, para cada $j = 1, \ldots, N(\alpha)$.

c) Existem constantes $C_0, C_1 > 0$ tal que

$$C_0 \log\frac{1}{\alpha} \leq N(\alpha) \leq C_1 \log\frac{1}{\alpha}.$$

d) Para cada $(\theta, x) \in S^1 \times I_0$ com $\sqrt{\alpha} \leq |x| < \delta_1$ existe $p(x) \leq N$ tal que

$$\prod_{j=0}^{p(x)-1} |\partial_x f(\theta_j, x_j)| \geq \frac{1}{\kappa}\sigma_1^{p(x)}.$$

Prova: (a) Seja $l \geq 1$ o menor inteiro positivo tal que $q = h^l(0)$ é um ponto periódico repulsor de h e seja $k \geq 1$ seu período. Defina $\rho^k = |(h^k)'(q)|$ e $\rho = |h'(q)|$. Fixemos ρ_1 e ρ_2 tais que $\rho_1 < \rho < \rho_2$ e $\rho_1 > \rho_2^{1-\frac{\eta}{2}}$.

Tomemos $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeno e $y \in \mathbb{R}$ tal que $|y - q| < \delta_0$, então

$$\rho_1^k < |(h^k)'(y)| < \rho_2^k.$$

Como $|\sin 2\pi\theta| \leq 1$ temos que f está α-próxima de h e então, por continuidade

$$\rho_1^k < \prod_{j=0}^{k-1} |\partial_x f(\varphi^j(\tau, y))| < \rho_2^k,$$

para todo $(\tau, y) \in S^1 \times I_0$ tal que $|y-q| < \delta_0$ a menos de reduzir δ_0

Dado $(\theta, x) \in S^1 \times I_0$ definimos $d_i = |x_{l+ki} - q|$, para cada $i \geq 0$. Tomemos $\delta_1 > 0$ pequeno de modo que $|x| < \delta_1$ implica que

$$d_0 \leq Cx^2 + C\alpha < \delta_0,$$

onde $C > 0$ é uma constante que depende apenas de h.

Se $l = 1$ e $q = h(0) = a_0$ é fixo, isto é $h(q) = q$, então dado $\delta_1 > 0$ tal que $|x| < \delta_1$ temos

$$\begin{aligned} d_0 &= |x_1 - q| = |f(\theta, x) - a_0| \\ &= |a_0 - x^2 + \alpha \sin 2\pi\theta - a_0| \\ &= |-x^2 + \alpha \sin 2\pi\theta| \leq x^2 + \alpha < \delta_0. \end{aligned}$$

Para $l \geq 1$ temos que $q = h^l(0) = a_0 - (h^{l-1}(0))^2$ e $x_l = f(\theta_{l-1}, x_{l-1}) = a_0 + \alpha \sin 2\pi\theta_{l-1} - (x_{l-1})^2$, então

$$\begin{aligned} d_0 = |x_l - h^l(0)| &\leq \alpha + |x_{l-1} - h^{l-1}(0)||x_{l-1} + h^{l-1}(0)| \\ &\leq \alpha + 4||x_{l-1} - h^{l-1}(0)| \\ &\leq C\alpha + 4^l x^2 \\ &\leq \tilde{C}\alpha + \tilde{C}x^2 < \delta_0, \end{aligned}$$

e $\tilde{C} > 0$ é uma constante que é definida indutivamente dependendo apenas de h.

Agora seja (θ, x) e $i \geq 1$ tais que $|x| < \delta_1$ e $d_0, \ldots, d_{i-1} < \delta_0$. Fixemos $\theta \in S^1$ e consideremos $f_\theta(x) = f(\theta, x)$. Aplicando o Teorema do Valor Médio a f_θ temos que

$$d_i \leq |(f_{\theta_{i-1}})'(\cdot)| d_{i-1} \leq (\rho_2^k d_{i-1} + C\alpha)$$

e assim, por indução,

$$d_i \leq (1 + \rho_2^k + \cdots + \rho_2^{k(i-1)})C\alpha + \rho_2^{ki} d_0 \leq \rho_2^{ki}(C\alpha + Cx^2). \tag{3.2}$$

Como $|x| < 2\sqrt{\alpha} < \delta_1$, então $d_i \leq \rho_2^{ki} C\alpha$. Definimos $\tilde{N} = \tilde{N}(\alpha) \geq 1$ sendo o menor inteiro tal que $\rho_2^{k\tilde{N}} C\alpha \geq \delta_0$ e então defina $N = l + k\tilde{N}$. O argumento anterior implica que

$$d_i < \delta_0 \ \text{ para todo } 0 \leq i \leq \tilde{N} - 1. \tag{3.3}$$

Como 0 é pré-periódico para h, existe alguma constante $\epsilon > 0$ tal que $|h^j(0)| > \epsilon$ para cada $j > 0$. Daí,

$$|x_1|, \ldots, |x_{l-1}| > \frac{\epsilon}{2}, \text{ sempre que } |x| < 2\sqrt{\alpha}. \tag{3.4}$$

Como $||\varphi-\varphi_\alpha||_{C^2} \leq \alpha$, podemos escrever $\partial_x f(\theta,x) = x\psi(\theta,x)$ com $|\psi(\theta,x)+2| < \alpha$ em cada ponto $(\theta,x) \in S^1 \times I_0$. Então, tomando $\alpha < \epsilon$ segue que

$$\begin{aligned}
\prod_{j=0}^{l-1} |\partial_x f(\theta_j,x_j)| &= |x|.|\psi(\theta,x)| \prod_{j=1}^{l-1} |x_j||\psi(\theta_j,x_j)| \\
&> |x||\psi(\theta,x)| \prod_{j=1}^{l-1} \left(\epsilon - \frac{\epsilon\alpha}{2}\right) \\
&\geq |x|(2-\alpha) \prod_{j=1}^{l-1} \left(\epsilon - \frac{\epsilon\alpha}{2}\right) \\
&\geq |x| \left(\epsilon - \frac{\epsilon\alpha}{2}\right)^{l-1} \\
&\geq |x|\alpha^{\frac{\eta}{2}}.
\end{aligned}$$

Tendo em conta que

$$\prod_{j=0}^{N-1} |\partial_x f(\theta_j,x_j)| = \prod_{j=0}^{l-1} |\partial_x f(\theta_j,x_j)|. \prod_{i=0}^{\tilde{N}-1} \left(\prod_{j=0}^{k-1} |\partial_x f(\theta_{l+ki+j}, x_{l+ki+j})| \right),$$

deduzimos que

$$\prod_{j=0}^{N-1} |\partial_x f(\theta_j,x_j)| \geq |x|\alpha^{\frac{\eta}{2}}\rho_1^{k\tilde{N}} \geq |x|\alpha^{\frac{\eta}{2}}\rho_2^{(1-\frac{\eta}{2})k\tilde{N}} \geq |x|\alpha^{\frac{\eta}{2}}\alpha^{-1+\frac{\eta}{2}} \geq |x|\alpha^{-1+\eta}$$

o que prova a primeira parte do lema.

Para provar o item (b) observemos que pela desigualdade em 3.3 temos que

$$|x_{l+ki} - q| < \delta_0 \text{ para } i = 0, \ldots, \tilde{N}(\alpha) - 1. \tag{3.5}$$

Seja $q_j = h^j(q)$ para $j = 1, \ldots, k$ e reduza α e δ_0 tal que

$$|y_1 - q_1|, \ldots, |y_k - q_k| < \epsilon/2 \text{ sempre que } |y - q| < \delta_0. \tag{3.6}$$

Por (3.5) temos as seguintes implicações,

$$\begin{cases}
|x_l - q| < \delta_0 \Rightarrow |x_{l+1} - q_1|, \ldots, |x_{l+k} - q_k| < \epsilon/2; \\
|x_{l+k} - q| < \delta_0 \Rightarrow |x_{l+k+1} - q_1|, \ldots, |x_{l+2k} - q_k| < \epsilon/2; \\
\quad \vdots \\
|x_{l+k(\tilde{N}(\alpha)-1)} - q| < \delta_0 \Rightarrow |x_{l+k(\tilde{N}(\alpha)-1)+1} - q_1|, \ldots, |x_{l+k\tilde{N}(\alpha)} - q_k| < \epsilon/2.
\end{cases}$$

Daí, pela nossa escolha de ϵ obtemos que $|x_j| > \epsilon/2$ para $j = l, \ldots, N(\alpha)$ e junto com (3.4) temos $|x_j| > \epsilon/2$ para $j = 1, \ldots, N(\alpha)$. Concluímos a prova deste item tomando $2\sqrt{\alpha} < \epsilon/2$.

(c) Pela nossa escolha de $\tilde{N}(\alpha)$ temos que

$$\begin{cases} \rho_2^{\tilde{N}(\alpha)} C\alpha \geq \delta_0; \\ \rho_2^{k(\tilde{N}(\alpha)-1)} C\alpha < \delta_0. \end{cases}$$

Como $N(\alpha) = l + k\tilde{N}(\alpha)$ e l, k são fixos, isto implica que

$$C_0 \log \frac{1}{\alpha} \leq N(\alpha) \leq C_1 \log \frac{1}{\alpha},$$

para algumas constantes $C_0, C_1 > 0$ não dependentes de α.

(d) Suponha agora que $|x| \geq \sqrt{\alpha}$, então a desigualdade (3.2) nos dá que $d_i \leq \rho_2^{ki} C x^2$. Seja $\tilde{p}(x) \geq 1$ o menor inteiro positivo tal que $\rho_2^{k\tilde{p}(x)} C x^2 \geq \delta_0$ e definamos $p(x) = l + k\tilde{p}(x)$. Daí, como anteriormente temos que

$$\prod_{j=0}^{p(x)-1} |\partial_x f(\theta_j, x_j)| \geq \frac{1}{C} |x| \rho_1^{k\tilde{p}(x)} \geq \frac{1}{C} (\frac{\rho_1}{\sqrt{\rho_2}})^{k\tilde{p}(x)} \geq \frac{1}{C} \rho_2^{(\frac{1}{2} - \frac{\eta}{2})k\tilde{p}(x)} \geq \frac{1}{\kappa} \rho^{\frac{p(x)}{4}},$$

onde para a última desigualdade usamos o fato de que $\tilde{p}(x) \gg 1$ enquanto $\delta_1 \ll \delta_0$. Concluímos a prova tomando $\sigma_1 = \rho^{\frac{1}{4}}$. ■

Lema 3.2.2. *Existem $\sigma_2 > 1$, $C_2 > 0$ tais que*

$$\prod_{j=0}^{k-1} |\partial_x f(\theta_j, x_j)| \geq C_2 \sqrt{\alpha} \sigma_2^k$$

para todo $(\theta, x) \in S^1 \times I_0$ com $|x_0|, \ldots, |x_{k-1}| \geq \sqrt{\alpha}$. Se além disso $|x_k| < \delta_1$ então

$$\prod_{j=0}^{k-1} |\partial_x f(\theta_j, x_j)| \geq C_2 \sigma_2^k.$$

Prova: Seja $(\tau, y) \in S^1 \times I_0$. A aplicação $h(x) = a_0 - x^2$, com $x \in I_0$ satisfaz as seguinte condições:

1. $Sh(x) = -\dfrac{3}{2x^2} < 0$, para todo $x \in I_o$;
2. $c = 0$ é o único ponto crítico;
3. $|(h^k)'(q)| \geq \sigma \lambda_q^n$, para algum $\sigma > 0$ e $\lambda_q > 1$, pois $c = 0$ é pré-períodico;

Suponha que existe $p \in I_0$ periódico atrator. Usando o item 1 junto com o Teorema de Singer ([Si78], Teorema 2.7) existe ponto crítico c tal que $\omega(c) = \mathcal{O}(p)$. Por outro lado, temos que o único ponto crítico de h é $c = 0$. Além disso, $\omega(0) = \mathcal{O}(q)$. Absurdo, pois q é um ponto periódico repulsor e p é atrator. Logo, todos os pontos de h são repulsores. Então pelo Teorema 2.2.3 existe $m \geq 1$ tal que $|(h^m)'(y)| > 1$, para todo

$y \in I_0$ com $|y|, \ldots, |h^{m-1}| > \delta_1$. Ademais, existe σ_0 tal que para todo $y \in I_0$ na condições acima vale

$$|(h^m)'(y)| > \sigma_0^m.$$

De fato, a função $x \mapsto |(h^m)'(x)|^{1/m}$ é contínua num compacto, então admite mínimo $\sigma_0 = \min\{|(h^m)'(x)|^{1/m} : x \in I_0\}$, que é maior que 1. Logo, por continuidade o mesmo vale para $\partial_x f$:

$$\prod_{j=0}^{m-1} |\partial_x f(\tau_j, y_j)| \geq \sigma_0, \text{ sempre que } |y_0|, \ldots, |y_{m-1}| \geq \delta_1.$$

Como consequência existe $A > 0$ tal que para todo $n \geq 1$ e $(\tau, y) \in S^1 \times I_0$ com $|y_0|, \ldots, |y_{n-1}| \geq \delta_1$ temos

$$\prod_{j=0}^{n-1} |\partial_x f(\tau_j, y_j)| \geq A\sigma_0^n. \tag{3.7}$$

De fato, escrevendo $n = km + r$ tomamos $A = \min\{\sigma_0^{-r}|\partial_x f(\tau, y)|^r : y \notin (-\delta_1, \delta_1)\}$. Daí,

$$\prod_{j=0}^{n-1} |\partial_x f(\tau_j, y_j)| = \left(\prod_{j=0}^{m-1} |\partial_x f(\tau_j, y_j)|\right)^k \cdot \prod_{j=0}^{r} |\partial_x f(\tau, y)| \geq \sigma_0^{mk}.A.\sigma_0^r = A\sigma_0^n.$$

Além disso existe uma constante $0 < \kappa < 1$ tal que, reduzindo $\delta_1 > 0$ e $\sigma_0 > 1$ se necessário,

$$|(h^l)'(y)| \geq \kappa\sigma_0^l$$

sempre que $|y|, \ldots, |h^{l-1}(y)| \geq \delta_1 > |h^l(y)|$. Então restringindo $l < m$ e usando argumentos de continuidade concluímos um resultado análogo para $\partial_x f$. Segue-se que

$$\prod_{j=0}^{n-1} |\partial_x f(\tau_j, y_j)| \geq \kappa\sigma_0^n, \tag{3.8}$$

sempre que $|y_0|, \ldots, |y_{n-1}| \geq \delta_1 > |y_n|$. Isto prova a segunda parte do lema no caso em que a órbita de (θ, x) não intersecta a faixa $S^1 \times (\sqrt{\alpha}, \delta_1)$.

Agora sejam $(\theta, x) \in S^1 \times I_0$ cuja órbita pode possivelmente intersectar a faixa $S^1 \times (\sqrt{\alpha}, \delta_1)$. Consideremos $j_1 < \ldots < j_s$ os valores de $j \in \{0, \ldots, k-1\}$ para os quais $|x_j| < \delta_1$. Podemos supor $s > 0$, caso contrário o lema segue imediatamente de (3.7) e (3.8). Quando $|x_k| < \delta_1$ também definimos $j_{s+1} = k$. Por outro lado, escrevemos $p_i = p(x_{j_i})$, $i = 1, \ldots, s$ e então pelo lema 3.2.1,

$$\prod_{j=j_i}^{j_i - p_i - i} |\partial_x f(\theta_j, x_j)| \geq \frac{1}{\kappa}\sigma_1^{p_i}, \tag{3.9}$$

para todo $i < s$.

Além disso, (9) vale também para $i = s$ se $j_s + p_s \leq k$. Note que isto é exatamente o caso $|x_k| < \delta_1$, de fato, como a definição de $p(x)$ implica $j_i + p_i \leq j_{i+1}$ para todo i. Por outro lado, por (8) $\prod_{j=0}^{j_1-1} |\partial_x f(\theta_j, x_j)| \geq \kappa\sigma_0^{j_1}$ e $\prod_{j=j_i+p_i}^{j_{i+1}-1} |\partial_x f(\theta_j, x_j)| \geq \kappa\sigma_0^{j_{i+1}-j_i-p_i}$, para todo $i < s$ e novamente a segunda desigualdade permanece para $i = s$ quando $|x_k| < \delta_1$. Tomando $\sigma_2 = \min\{\sigma_0, \sigma_1\}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\prod_{j=0}^{k-1} |\partial_x f(\theta_j, x_j)| &= \prod_{j=0}^{j_1-1} |\partial_x f(\theta_j, x_j)| . \prod_{i=1}^{s} \left(\prod_{j=j_i}^{j_i-p_i-i} |\partial_x f(\theta_j, x_j)| \prod_{j=j_i+p_i}^{j_{i+1}-1} |\partial_x f(\theta_j, x_j)| \right) \\
&\geq \kappa\sigma_0^{j_1} \prod_{i=1}^{s} (\sigma_1^{p_i} \sigma_0^{j_{i+1}-j_i-p_i}) \\
&\geq \kappa\sigma_2^{n},
\end{aligned}
$$

sempre que $|x_k| < \delta_1$. Isto prova a segunda parte do lema.

Quanto à primeira parte, segue a partir de argumento similar e a observação que em geral

$$
\prod_{j=j_s}^{k-1} |\partial_x(\theta_j, x_j)| \geq (2-\alpha)|x_{j_s}| A\sigma_0^{k-j_s-1} \geq A\sqrt{\alpha}\sigma_0^{k-j_s-1}
$$

como consequência de (3.7). ■

3.3 Retorno à região crítica

Nesta seção mostraremos o principal fato na prova do Teorema 3.0.5. Como o corolário 3.1.6, a proposição a seguir, irá nos fornecer um controle sobre os retornos de curvas admissíveis às regiões críticas, independente de α. Antes provaremos um lema técnico porém fundamental na prova da proposição.

Tendo em mente a demonstração da proposição a seguir vamos estimar o valor de η em $\dfrac{\log \sigma_2}{4 \log 32}$. Também definimos $M = M(\alpha)$ o maior inteiro tal que $32^M \alpha \leq 1$. Note que $M \approx \log \dfrac{1}{\alpha}$. Finalmente, fixado $r \geq 0$ definimos

$$
J(r) = \{x \in \mathbb{R}; |x| < \sqrt{\alpha} e^{-r}\}.
$$

Seja $\hat{X}$ uma curva admissível. Para todo $1 \leq j \leq d$ definamos $\hat{Z}_j = \varphi\left(\hat{X}|_{(\tilde{\theta}_{j-1}, \tilde{\theta}_j]}\right)$.

Lema 3.3.1. *Existem $H_1, H_2 \subset \{1, \ldots, d\}$ com $\sharp H_1, \sharp H_2 \geq [d/16]$ tais que*

$$
|Z_{j_1}(\theta) - Z_{j_2}(\theta)| \geq \frac{\alpha}{100},
$$

para todo $\theta \in S^1$, $j_1 \in H_1$ e $j_2 \in H_2$.

Prova: Sejam $\hat{Z}(\theta) = (g(\theta), Z(\theta))$ e $\chi_1 < \chi_2$ pontos críticos de Z. Definamos k_i de tal forma que $\chi_i \in (\tilde{\theta}_{k_i-1}, \tilde{\theta}_{k_i}]$, para cada $i = 1, 2$. Em toda a prova $\left[\dfrac{d}{16}\right] = a$.

Se nenhum dos χ_i pertencem a $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right]$ então

$$\chi_1 \in \left(\frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$$

pois como vimos no Lema 3.1.4 em $A_1 = \left\{\theta \in S^1 : |\sin 2\pi\theta| \leq \dfrac{1}{3}\right\}$ o segmento Z não tem pontos críticos. Então, tomamos $k_1 < d$ tal que $\tilde{\theta}_{k_1} < \dfrac{1}{4}$ e $\tilde{\theta}_{k_1-1} > \dfrac{1}{2\pi} \arcsin \dfrac{1}{3}$ e $H_1 = \{k_1+1, \ldots, k_1+a\}$, já que $\tilde{\theta}_{k_1} < \tilde{\theta}_{k_1+1} < \ldots < \tilde{\theta}_{k_1+a}$. Além disso,

$$\tilde{\theta}_{k_1+a} - \tilde{\theta}_{k_1} = |(\tilde{\theta}_{k_1}, \tilde{\theta}_{k_1+a}]| < (|g'(\theta)|)^{-1} \Rightarrow \tilde{\theta}_{k_1+a} < (d-\alpha)^{-1} + \frac{1}{4},$$

para algum $\theta \in (\tilde{\theta}_{k_1}, \tilde{\theta}_{k_1+a}]$.

Como $(d-\alpha)^{-1}$ é pequeno temos que $\tilde{\theta}_{k_1+a} < \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\pi} \arcsin \dfrac{1}{3}$.

Analogamente tomamos $H_2 = \{k_2 - a, \ldots, k_2 - 1\}$ e $\tilde{\theta}_{k_2-a} > \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\pi} \arcsin \dfrac{1}{3}$. Além disso, Z é monótona decrescente em $(\tilde{\theta}_{k_1}, \tilde{\theta}_{k_2-1}]$. Portanto, usando também que $|Z'|_{A_1}| \geq \dfrac{\alpha}{2}$, obtemos pelo Teorema do Valor Médio

$$\inf Z|_{(\tilde{\theta}_{j_1-1}, \tilde{\theta}_{j_1}]} - \sup Z|_{(\tilde{\theta}_{j_2-1}, \tilde{\theta}_{j_2}]} \geq \frac{\alpha}{2\pi} \arcsin \frac{1}{3} \geq \frac{\alpha}{100},$$

para cada $j_1 \in H_1$, $j_2 \in H_2$.

Por outro lado, se $\chi_1 \geq \dfrac{1}{4}$ respectivamente $\chi_2 \leq \dfrac{3}{4}$, tomamos $H_1 = \{k_1 - [a], \ldots, k_1 - 1\}$ e $H_2 = \{1, \ldots, a\}$ respectivamente $(H_1 = \{d - a + 1, \ldots, d\}$ e $H_2 = \{k_2 + 1, \ldots, k_2 + a\})$ e estimativas similares nos levam a mesma conclusão do caso anterior. ■

Agora estamos com todas as ferramentas para provar a seguinte proposição:

Proposição 3.3.2. *Existem constantes $C_3 > 0$ e $\beta > 0$ tais que dado qualquer segmento admissível $\hat{Y}_0$ e $r \geq \left(\dfrac{1}{2} - 2\eta\right) log \dfrac{1}{\alpha}$ temos que*

$$Leb(\{\theta \in S^1; \hat{Y}_M(\theta) \in S^1 \times J(r-2)\}) \leq C_3.e^{-5\beta r}.$$

Prova: Para aplicar diretamente o corolário 3.1.6 teríamos que ter $|J(r-2)| \leq \alpha$. Então, surge a seguinte questão: para que valores de r a desigualdade acima é válida? Como resposta temos: $\alpha \geq |J(r-2)| = \sqrt{\alpha}.e^{-(r-2)}$ se, e somente se

$$e^{-(r-2)} \leq \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow -(r-2) \leq -\frac{1}{2} \log \frac{1}{\alpha}.$$

Portanto, devemos ter $r \geq 2 + \dfrac{1}{2} \log \dfrac{1}{\alpha}$.

Por conta disto dividiremos a prova da proposição em dois casos. No primeiro assumiremos que

$$r \geq \left(\frac{1}{2} + 2\eta\right) log\frac{1}{\alpha}.$$

Daí, pelo Corolário 3.1.6 temos que,

$$Leb(\{\theta \in S^1 : \hat{Y}_M(\theta) \in S^1 \times J(r-2)\}) \leq C_1.\sqrt{\frac{|J(r-2)|}{\alpha}} = C_1\alpha^{-1/4}.e^{-(r-2)/2}.$$

Resta provar que

$$\alpha^{1/4}.e^{-(r-2)/2} \leq e^{-5\beta r}.$$

Esta desigualdade é verdadeira quando

$$r \geq \left(\frac{1}{2} - 5\beta\right)^{-1}\left(1 + \frac{1}{4}\log\frac{1}{\alpha}\right).$$

Como assumimos que $r \geq \left(\frac{1}{2} + 2\eta\right) log\frac{1}{\alpha}$, tomamos $\beta > \frac{1}{7}$ e então concluímos o resultado neste caso.

O segundo caso consideraremos que

$$\left(\frac{1}{2} - 2\eta\right) log\frac{1}{\alpha} \leq r \leq \left(\frac{1}{2} + 2\eta\right) log\frac{1}{\alpha}.$$

Seja $\hat{Y}_j(\theta) = \varphi^j(\theta, Y_0(\theta)) = (g^j(\theta), Y_j(\theta))$. Definindo $osc(Y_j) = \sup Y_j - \inf Y_j$ e sabendo que

$$Y_j(\theta) = f(g^{j-1}(\theta), Y_{j-1}(\theta)) = a_0 + \alpha \sin(2\pi g^{j-1}(\theta)) - (Y_{j-1}(\theta))^2$$

obtemos que

$$\begin{aligned} osc(Y_j) &\leq Y_j(\theta) - Y_j(\tilde{\theta}) \\ &\leq 2\alpha + (Y_{j-1}(\tilde{\theta}))^2 - (Y_{j-1}(\theta))^2 \\ &= 2\alpha + (Y_{j-1}(\tilde{\theta}) - Y_{j-1}(\theta))(Y_{j-1}(\tilde{\theta}) - Y_{j-1}(\theta)) \\ &\leq 2\alpha + 4osc(Y_{j-1}). \end{aligned}$$

Daí, por indução,

$$osc(Y_j) \leq 2.4^j.\alpha \leq 2.4^j.32^{-M}$$

e

$$osc(Y_M) \leq 2.4^M.\alpha.$$

Como por definição M é o maior inteiro tal que $32^M.\alpha \leq 1$ e $32 = 4^{5/2}$ segue que $\log 4^M \leq \log \alpha^{-\frac{2}{5}}$. Então,

$$osc(Y_M) \leq 2.\alpha^{-\frac{2}{5}}.\alpha < \sqrt{\alpha}.$$

Suponhamos que existe $\tau \in S^1$ tal que $|Y_M(\tau)| < \sqrt{\alpha}$, caso contrário o lema seria imediato. Então, dado $\theta \in S^1$ temos que

$$|Y_M(\theta)| \leq |Y_M(\tau)| + osc(Y_M) < 2\sqrt{\alpha}.$$

Denotemos por $\mathcal{O}$ o conjunto $\{h^i(0); i \geq 1\}$ e definamos $\delta_j(\theta) = dist(Y_j(\theta), \mathcal{O})$. Relembrando a desigualdade 4.2 do Lema 3.2.1 temos que

$$\delta_{i+j}(\theta) \leq C.4^i(\alpha + |Y_j(\theta)|^2),$$

para todo $\theta \in S^1$, $0 \leq j \leq M-1$ e $1 \leq i \leq M-j$.

Lema 3.3.3. *Dados $\theta \in S^1$ e $0 \leq j \leq M-1$ temos que $|Y_j(\theta)| \geq \sqrt{\alpha}$.*

Prova: Suponhamos que existe $j_0 \in M-1$ tal que $|Y_{j_0}(\theta)| < \sqrt{\alpha}$ para todo $\theta \in S^1$. Então,

$$\delta_M(\theta) \leq C.4^{M-j_0}(\alpha + |Y_{j_0}(\theta)|^2) \leq C.4^{M-j_0}.2.\alpha \leq C.4^M\alpha \leq C.\alpha^{\frac{3}{5}} < C.\sqrt{\alpha}.$$

Contradição, pois tomando α tão pequeno quanto queira temos que para cada $\theta \in S^1$, $Y_M(\theta)$ está próximo de $\mathcal{O}$, porém $\mathcal{O}$ é finito e não contém o 0, ou seja, está longe da região crítica. ∎

Ademais, assumindo que $C \gg \dfrac{1}{dist(0, \mathcal{O})}$ e $2\sqrt{C} < C$, junto com o fato de que $|Y_j(\theta)| \geq \sqrt{\alpha}$ temos

$$4^{M-j}|Y_j(\theta)|^2 \geq \frac{1}{C}$$

para todo $\theta \in S^1$ e $0 \leq j \leq M-1$.

Agora vamos obter distorção limitada para os iterados de Y_0. Sejam (θ_j, x_j), $(\tau_j, y_j) \in \hat{Y}_j$, $0 \leq j \leq M-1$ e $1 \leq i \leq M-j$. Então,

$$\frac{|\partial_x f^i(\theta_j, x_j)|}{|\partial_x f^i(\tau_j, y_j)|} = \prod_{m=j}^{j+i-1} \left|\frac{x_m}{y_m}\right| \prod_{m=j}^{j+i-1} \left|\frac{\psi(\theta_m, x_m)}{\psi(\tau_m, y_m)}\right|. \tag{3.10}$$

Diante das estimativas anteriores temos que:

$$\left|\frac{x_m}{y_m} - 1\right| \leq \frac{osc(Y_m)}{\sqrt{4^{m-M}/C}} \leq 2.4^m.\alpha.\sqrt{C}\frac{1}{\sqrt{4^{m-M}}} \leq 2.\sqrt{C}.4^M.\alpha \leq C.4^M.\alpha < \sqrt{\alpha},$$

e

$$\left|\frac{\psi(\theta_m, x_m)}{\psi(\tau_m, y_m)} - 1\right| \leq \frac{2\alpha}{2-\alpha}.$$

Logo,

$$(3.10) \leq (1+\sqrt{\alpha})^{2i} = e^{2i\log(1+\sqrt{\alpha})} \leq e^{2M\log(1+\sqrt{\alpha})} \leq e^{2M\sqrt{\alpha}} \leq 2,$$

porque estamos assumindo $\alpha > 0$ pequeno.

Fixemos $\hat{y} \in \hat{Y}_0$ e definamos $\lambda_j = |\partial_x f^{M-j}(\varphi^j(\hat{y}))|$. Pela afirmação 3.3.3 podemos aplicar o lema 3.2.2 a $\hat{Y}_0$, daí

$$\lambda_j \geq C_2.\sigma_2^{M-j},$$

para todo $0 \leq j \leq M-1$. Por outro lado como consequência da distorção limitada temos que

$$\frac{1}{2}\frac{\lambda_j}{\lambda_{j+i}} \leq |\partial_x f^i(\theta_j, x_j)| \leq 2\frac{\lambda_j}{\lambda_{j+i}}, \tag{3.11}$$

para todo $(\theta_j, x_j) \in \hat{Y}_j$. De fato,

$$\partial_x f^{M-(i+j)}(\varphi^{i+j}(\hat{y})).\partial_x f^i(\theta_j, x_j) = \partial_x f^{M-(i+j)}(\theta_{i+j}, x_{i+j}).\partial_x f^i(\theta_j, x_j).\frac{\partial_x f^{M-(i+j)}(\varphi^{i+j}(\hat{y}))}{\partial_x f^{M-(i+j)}(\theta_{i+j}, x_{i+j})}$$

Então,

$$|\partial_x f^{M-(i+j)}(\varphi^{i+j}(\hat{y}))||\partial_x f^i(\theta_j, x_j)| \leq |\partial_x f^{M-j}(\theta_j, x_j)|.2,$$

isto é,

$$\lambda_{i+j}|\partial_x f^i(\theta_j, x_j)| \leq 2.\lambda_j,$$

o que implica $|\partial_x f^i(\theta_j, x_j)| \leq 2.\dfrac{\lambda_j}{\lambda_{i+j}}$. A outra desigualdade segue analogamente.

Sejam $K = 400e^2$ e $t_1 < t_2 < \ldots \leq M$ tais que $t_1 = 1$ e

$$t_{i+1} = \min\{s; t_i < s \leq M \ e \ \lambda_{t_i} \geq 2K\lambda_s\}.$$

Observemos que para $j = 0$ temos que $|\partial_x f^M(\hat{y})| = \lambda_0 \geq C_2.\sigma_2^M$ e para $j = M-1$ temos $|\partial_x f(\varphi^M(\hat{y}))| = \lambda_{M-1} \geq C_2\sigma_2$. Isto significa que até o iterado M estamos vendo contração para o passado.

Além disso, definamos $k = k(r) = \max\{i; \lambda_{t_i} \geq 2Ke^{-r}/\sqrt{\alpha}\}$. Temos que $k(r) \geq \gamma_1.r$, onde $\gamma_1 > 0$ é constante. Por um lado $\lambda_{t_i} \leq 2K.\lambda_{t_{i+1}-1}$. Indutivamente

$$\lambda_{t_{k+1}} \geq \frac{\lambda_{t_k}}{8K} \geq \frac{\lambda_{t_k-1}}{(8K)^2} \geq \cdots \geq \frac{\lambda_0}{(8K)^k}.$$

Daí, $\lambda_{t_{k+1}} \geq (8K)^{-k}\lambda_0 \geq (8K)^{-k}C_2\sigma_2^M$, onde para a última desigualdade usamos o Lema 3.2.2.

Por outro lado, por definição de $k(r)$, $\lambda_{t_{k+1}} \leq 2Ke^{-r}/\sqrt{\alpha}$. Isto com a desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
k(r)\log 8K &\geq \log C_2 + M\log\sigma_2 - \frac{1}{2}\log\frac{1}{\alpha} + r - \log 2K \\
&= \log C_2 - \log 2K + M\log\sigma_2 - \frac{1}{2}\log\frac{1}{\alpha} + r \\
&\geq \tilde{C} + M\log\sigma_2 - \frac{1}{2}\log\frac{1}{\alpha} + r \\
&\geq r - \left(\frac{1}{2} - 4\eta\right)\log\frac{1}{\alpha} + \tilde{C} \\
&\geq r\left(1 - \frac{\frac{1}{2} - 4\eta}{\frac{1}{2} - 2\eta}\right) + \tilde{C} \\
&\geq r\left(\frac{2\eta}{\frac{1}{2} - 2\eta}\right) + \tilde{C} \geq \eta r.
\end{aligned}$$

Para cada $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_M) \in \{1, \ldots, d\}^M$ denotemos por $\omega(\bar{l})$ o único $\omega \in P_M$ tal que $g^{i-1}(\omega) \subset [\theta_{l_i} - 1, \theta_{l_i})$, com $i = 1, \ldots, M$. Definamos

$$\hat{Y}_j(\bar{l}) = graf(Y_j(\bar{l})) = \varphi^j(\hat{Y}_0|_{\omega(\bar{l})}).$$

Dizemos que $\bar{l}, \overline{m} \in \{1, \ldots, d\}^M$ são incompatíveis se

$$|Y_M(\bar{l}, \theta) - Y_M(\overline{m}, \theta)| \geq 4.e^{2-r}\sqrt{\alpha},$$

para todo $\theta \in S^1$. Se duas M-palavras $\bar{l}$ e $\overline{m}$ são incompatíveis, então no máximo uma das curvas $\hat{Y}_M(\bar{l})$ e $\hat{Y}_M(\overline{m})$ podem tocar $S^1 \times J(r-2)$. De fato, o lado direito da inequação é escolhido de forma que seja maior que a soma da altura de $S^1 \times J(r-2)$ e a largura vertical da curva admissível $\hat{Y}_M(\bar{l})$.

Um limite para o mínimo de palavras compatíveis dará o limite para os tipos procurados. Para estimar este número vamos primeiro estabelecer uma condição suficiente para incompatibilidade.

Pelo Lema 3.3.1 existem $H_1', H_1'' \subset \{1, \ldots, d\}$, com $\#H_1', \#H_1'' \geq [d/16]$, tais que dados $l_1' \in H_1'$, $l_1'' \in H_1''$ temos

$$|Y_1(l_1' \ldots, l_M, \theta) - Y_1(l_1'' \ldots, l_M, \theta)| \geq \frac{\alpha}{100},$$

para todo $(l_2, \ldots, l_M)$ e $\theta \in g(\omega(l_1' \ldots, l_M)) = g(\omega(l_1'' \ldots, l_M))$.

Além disso, $g^j(\omega(l_1' \ldots, l_M)) = g^j(\omega(l_1'' \ldots, l_M))$ para cada $1 \leq j \leq M$. Segue que

$$\begin{aligned}
|Y_M(l_1' \ldots, l_M\theta) - Y_M(l_1'' \ldots, l_M, \theta)| &= \\
&= |\partial_x f^{M-1}(\varphi(\theta, x))|.|Y_1(l_1' \ldots, l_M, \theta) - Y_1(l_1'' \ldots, l_M, \theta)|.
\end{aligned}$$

Supondo $k(r) \geq 1$ e usando 3.11 segue que

$$\begin{aligned}
|Y_M(l_1' \ldots, l_M, \theta) - Y_M(l_1'' \ldots, l_M, \theta)| &\geq \frac{\lambda_1}{2}\frac{\alpha}{100} \geq 2.400.e^2.e^{-r}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}.\frac{\alpha}{100} \\
&= 4e^{2-r}\sqrt{\alpha}.
\end{aligned}$$

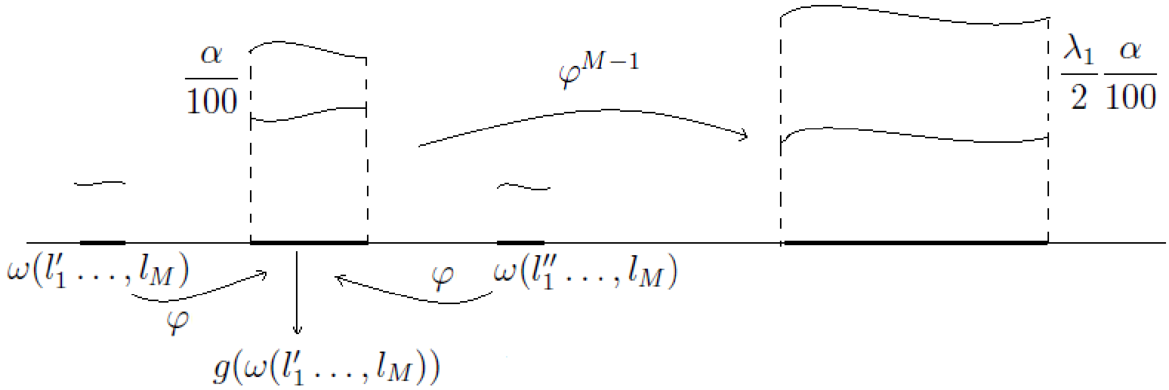

Figura 3.3: Dinâmica dos segmentos admissíveis

Portanto, $(l_1', \ldots, l_M)$ e $(l_1'', \ldots, l_M)$ são incompatíveis para cada $l_2, \ldots, l_M$ fixos.

Todos os pares $(l_1', \ldots, l_{t_2-1}, l_{t_2}', \ldots, l_M')$, $(l_1'', \ldots, l_{t_2-1}, l_{t_2}'', \ldots, l_M'')$, com $l_1', l_{t_2}', \ldots, l_M' \in H_1'$ e $l_1'', l_{t_2}'', \ldots, l_M'' \in H_1''$, são incompatíveis.

Para os pares $(l_1', \ldots, l_M)$ e $(l_1'', \ldots, l_M)$ temos que

$$|Y_M(l_1' \ldots, l_M, \theta) - Y_M(l_1'' \ldots, l_M, \theta)| = |\partial_x f^{M-t_2}(\varphi^{t_2}(\theta, x))|.|Y_{t_2}(l_1' \ldots, l_M, \theta) - Y_{t_2}(l_1'' \ldots, l_M, \theta)|$$

e

$$\begin{aligned} |Y_{t_2}(l_1' \ldots, l_M, \theta) - Y_{t_2}(l_1'' \ldots, l_M, \theta)| &\geq |\partial_x f^{t_2-1}(\varphi(\theta, x))|.|Y_1(l_1' \ldots, l_M, \theta) - Y_1(l_1'' \ldots, l_M, \theta)| \\ &\geq \frac{\lambda_1}{2\lambda_{t_2}} \frac{\alpha}{100} \geq 4e^2\alpha. \end{aligned}$$

Podemos escrever o lado esquerdo da igualdade da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &|Y_M(l_1', \ldots, l_{t_2-1}, l_{t_2}', \ldots, l_M', \theta) - Y_M(l_1', \ldots, l_{t_2-1}, l_{t_2}', \ldots, l_M', \theta) + Y_M(l_1' \ldots, l_M, \theta) \\ &- Y_M(l_1'' \ldots, l_M, \theta) + Y_M(l_1'', \ldots, l_{t_2-1}, l_{t_2}'', \ldots, l_M'', \theta) - Y_M(l_1'', \ldots, l_{t_2-1}, l_{t_2}'', \ldots, l_M''\theta)| \\ &\leq |Y_M(l_1', \ldots, l_{t_2-1}, l_{t_2}', \ldots, l_M', \theta) - Y_M(l_1'', \ldots, l_{t_2-1}, l_{t_2}'', \ldots, l_M'', \theta)| + 2\sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

Logo, supondo $k(r) \geq 2$ temos

$$\begin{aligned} &|Y_M(l_1', \ldots, l_{t_2-1}, l_{t_2}', \ldots, l_M', \theta) - Y_M(l_1'', \ldots, l_{t_2-1}, l_{t_2}'', \ldots, l_M'', \theta)| \\ &\geq |\partial_x f^{M-t_2}(\varphi^{t_2}(\theta, x))|.|Y_{t_2}(l_1' \ldots, l_M, \theta) - Y_{t_2}(l_1'' \ldots, l_M, \theta)| - 2\sqrt{\alpha} \\ &\geq \tfrac{\lambda_{t_2}}{2}.4e^2\alpha - 2\sqrt{\alpha} \geq 4Ke^{-r}e^2\tfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha}} - 2\sqrt{\alpha} \\ &\geq 4Ke^{2-r}\sqrt{\alpha} - 2\sqrt{\alpha} \geq 4e^{2-r}\sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

Repetimos o argumento para cada um dos $t_i's$. Na i-ésima etapa, fixado $L_i = (l_1, \ldots, l_{t_{i-1}})$, encontramos H_i', H_i'' com $\#H_i', \#H_i'' \geq [d/16]$ tais que dados qualquer $l_{t_i}' \in H_i'$ e $l_{t_i}'' \in H_i''$, todos os pares $(L_i, l_{t_i}', l_{t_{i+1}}, \ldots, l_M)$, $(L_i, l_{t_i}'', l_{t_{i+1}}, \ldots, l_M)$ são incompatíveis e o mesmo acontece para os pares

$$(L_i, l_{t_i}', l_{t_{i+1}}, \ldots, l_{t_{i+1}-1}, l_{t_{i+1}}', \ldots, l_M'), (L_i, l_{t_i}'', l_{t_{i+1}}, \ldots, l_{t_{i+1}-1}, l_{t_{i+1}}'', \ldots, l_M'')$$

enquanto $k(r) \geq i + 1$.

Observação 3.3.4. *Como M é da ordem de $\log 1/\alpha$, para $r \approx \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1}{\alpha}$ temos $k(r) \leq M(\alpha)$ e que $k(r) \geq \frac{\gamma_1}{2}.M$. Isto é, $k(r)$ é uma proporção de M.*

Seja C_M o conjunto formado por todas as sequências $\bar{l} \in \{1, \ldots, d\}^M$ tais que $\hat{Y}_M(\bar{l})$ intersecta $S^1 \times J(r-2)$. Note que nenhum par $\bar{l}$, $\overline{m}$ em C_M pode ser incompatível.

Para concluir a prova da proposição temos que estimar a quantidade de elementos de C_M. Para isso, introduzimos o seguinte conceito: dizemos que $\bar{l}, \overline{m} \in C_M$ são i-equivalentes para algum $1 \leq i \leq k(r)$ se $l_j = m_j$ para todo $j < t_i$. Observemos que se $\bar{l}, \overline{m}$ são i-equivalentes, então $\omega(\bar{l})$ e $\omega(\overline{m})$ estão contidos em $\omega(l_1, \ldots, l_{t_i}) \in P_{t_i}$ e $\hat{Y}(\omega(\bar{l}))$, $\hat{Y}(\omega(\overline{m}))$ pertencem a mesma curva admissível.

Fixemos $L_i = (l_1, \ldots, l_{t_i})$. Dizemos que $Q(L_i)$ é uma classe i-equivalente se todo $\bar{l} \in Q(L_i)$ é da forma $\bar{l} = (L_i, l'_{t_{i+1}}, \ldots, l'_M)$, onde $l'_{t_{i+1}}, \ldots, l'_M$ são arbitrários. Seja C_i o conjunto de todas as classes i-equivalentes em C_M.

Da forma como os $t_i's$ foram definidos, sabemos que se não houve afastamento vertical até o tempo t_k, então não haverá afastamento de t_k até M. Por conta disso começaremos a fazer a contagem do último tempo, antes de M, que podemos ver expansão vertical, t_k. Idutivamente, vamos contar todas as possibilidades até o tempo t_1.

Claramente $\#C_M \leq d^M$, $\#C_k \leq d^{t_k}$ e $\#C_M \leq \#C_k d^{M-t_k}$.

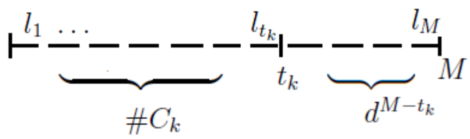

Figura 3.4: Esquema de contagem

Além disso, $\#C_k \leq \#C_{k-1}.d^{t_k - t_{k-1}}\left(d - \left[\dfrac{d}{16}\right]\right)$. Então,

$$
\begin{aligned}
\#C_M &\leq \#C_k d^{M-t_k} \\
&\leq \#C_{k-1} d^{M-t_k}.d^{t_k-t_{k-1}}\left(d - \left[\frac{d}{16}\right]\right) \\
&\leq \prod_{i=1}^{k(r)-1}\left(\left(d^{t_{i+1}-t_i}\right)\left(d - \left[\frac{d}{16}\right]\right)\right).d^{M-t_k} \\
&\leq \left(d - \left[\frac{d}{16}\right]\right)^{k(r)} \cdot d^{M-k(r)} \\
&\leq d^M \cdot \left(d - \left[\frac{d}{16}\right]\right)^{k(r)}.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Portanto,

$$Leb(\{\theta \in S^1; \hat{Y}_M(\theta) \in S^1 \times J(r-2)\}) \leq \#C_M \sum_{\hat{Y}_M|_\omega \cap \hat{J}(r-2)=\emptyset} |\omega|,$$

onde $\hat{J}(r-2) = S^1 \times J(r-2)$.

Mas, $\omega = \omega(l_1, \ldots, l_M) = \omega(l_1, \ldots, l_M) \cap g^{-1}(\omega(l_2, \ldots, l_M)) \cap \ldots \cap g^{-M}(\omega(l_M))$. Seja $\theta \in \omega_{l_M}$, então

$$|\omega| \leq |(g^{-M})'(\theta)| = \frac{1}{|(g^M)'(\theta)|} \leq \frac{1}{\prod_{j=0}^{M} g'(g^j(\theta))} \leq (d-\alpha)^{-M} \leq d^{-M}.$$

Daí,

$$Leb(\{\theta \in S^1; \hat{Y}_M(\theta) \in S^1 \times J(r-2)\}) \leq \left(d - \left[\frac{d}{16}\right]\right)^{k(r)} \leq C_3 \left(\frac{99}{100}\right)^{k(r)}.$$

Como $k(r) \geq \gamma_1 r$ e tomando $\beta = \dfrac{\gamma_1}{5} \log \dfrac{100}{99}$ concluímos o resultado para o segundo caso.
■

3.3.1 Tempos Hiperbólicos

Na demonstração da proposição anterior consideramos tempos t_i com $t_1 < t_2 < \ldots \leq M$ que são definidos da seguinte forma:

$$t_{i+1} = \min\{s; t_i < s \leq M \text{ } e \text{ } \lambda_{t_i} \geq 2K\lambda_s\}.$$

Estes $t_{i's}$ se comportam como tempos hiperbólicos que é o assunto central desta seção. Vamos mostrar importantes consequências da existências de tais tempos.

Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo exceto em um conjunto $\mathcal{C} \subset M$ de pontos críticos.

Definição 3.3.5. *Dizemos que $\mathcal{C} \subset M$ é um conjunto crítico não degenerado se vale as seguintes condições:*

1. *Existe $B > 1$ e $\beta > 0$ tais que para todo $x \in M \setminus \mathcal{C}$*
$$\frac{1}{B} dist(x, \mathcal{C})^{\beta} \leq \frac{||Df(x)v||}{||v||} \leq B dist(x, \mathcal{C})^{-\beta},$$
para todo $v \in T_x M$;

2. *as funções $\log|detDf(x)|$ e $\log||Df^{-1}||$ são localmente Lipschitz em $x \in M \setminus C$ com constante de Lipschitz dependendo de $dist(x, \mathcal{C})$.*

Definição 3.3.6. *Dado $\delta > 0$ e $x \in \mathcal{C} \subset M$ definimos a distância δ-truncada de x para $\mathcal{C}$ por*

$$dist_{\delta}(x, \mathcal{C}) = \begin{cases} 1, & dist(x, \mathcal{C}) \geq \delta; \\ dist(x, \mathcal{C}), & c.c.. \end{cases}$$

Sejam $B > 0$ e $\beta > 0$ como na definição de conjunto não degenerado. Considere $b > 0$ tal que $2b < \min\{1, \beta^{-1}\}$.

Definição 3.3.7. *Dados $\sigma < 1$ e $\delta > 0$ dizemos que n é um (σ, δ)- tempo hiperbólico para $x \in M$ se para cada $1 \leq k \leq n$ vale o seguinte*

$$\prod_{j=n-k}^{n-1} ||Df(f^j(x))^{-1}|| \leq \sigma^k \quad e \quad dist_\delta(f^{n-k}(x), \mathcal{C}) \geq \sigma^{bk}.$$

Os Tempos hiperbólicos de um dado ponto correspondem aos iterados onde a aplicação, localmente, se comporta como uma aplicação uniformemente expansora.

A partir da existência de tempos hiperbólicos para um dado ponto $x \in M$ conseguimos garantir a existência de ramos inversos contrativos para o passado, em uma vizinhança do ponto x. Precisamente,

Proposição 3.3.8. *Dado $0 < \sigma < 1$ e $\delta > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que se n é um (σ, δ)- tempo hiperbólico para x, então existe uma vizinhança V_n de x tal que:*

1. *$f^n|_{V_n} : V_n \longrightarrow B(f^n(x), \delta_1)$ é um difeomorfismo;*
2. *para cada $1 \leq k \leq n$ e $y, z \in V_n$*

$$dist(f^{n-k}(y), f^{n-k}(z)) \leq \sigma^{k/2} dist(f^n(y), f^n(z)).$$

Prova: Ver [Al03] página 24.

Chamamos V_n de pré-bolas hiperbólicas e suas imagens $f^n(V_n)$ de bolas hiperbólicas.

Outra consequência importante da existência de tempos hiperbólicos é a propriedade de distorção limitada.

Corolário 3.3.9 (Distorção Limitada)**.** *Existe $C_0 > 0$ tal que para cada pré-bola hiperbólica V_n e cada $y, z \in V_n$*

$$\log \frac{|\det Df^n(y)|}{|\det Df^n(z)|} \leq C_0 dist(f^n(y), f^n(z)).$$

Prova: Ver [Al03] página 25.

Corolário 3.3.10. *Existe uma constante $C_2 > 0$ (dependendo apenas de δ_1 e C_1) tal que para cada $n \geq 0$*

$$\frac{d}{dm} f_*^n\big(m \mid H_n\big) \leq C_2,$$

onde H_n é o conjunto de pontos que tem $n \in \mathbb{N}$ como (σ, δ)-tempo hiperbólico.

Prova: Ver [Al03] página 26.

Vamos ver algumas consequências da existência de muitos pontos no espaço de fase com freqüência positiva de tempos hiperbólicos, e que aplicações não-uniformemente expansoras têm freqüência positiva de tempos hiperbólicos para Lebesgue quase todos os pontos. Antes é preciso definir o seguinte,

Definição 3.3.11. *Dizemos que a frequência do* (σ, δ)*-tempo hiperbólico para* $x \in M$ *é positiva, se existe algum* $\theta > 0$ *tal que para* $n \in \mathbb{N}$ *grande existem* $l \geq \theta n$ *e inteiros* $1 \leq n_1 < n_2 \cdots < n_l \leq n$ *que são* (σ, δ)*- tempos hiperbólicos para* x.

Teorema 3.3.12. *Seja* $f\colon M \to M$ *um difeomorfismo local* C^2 *exceto em um conjunto crítico não-degenerado* $\mathcal{C} \subset M$. *Se existe* $H \subset M$ *com* $m(H) > 0$ *cujos pontos tem frequência positiva de* (σ, δ)*- tempos hiperbólicos, então* f *tem alguma medidade de probabilidade invariante absolutamente contínua* μ. *Além disso, se* H *é fechado e* $f(H) \subset H$, *então o suporte de* μ *está contido em* $\bigcap_{j \geq 1} f^j(H)$.

Prova: Ver [Al03] página 28.

O próximo resultado nos dirá que os tempos hiperbólicos aparecem com freqüência positiva para aplicações não-uniformemente expansoras. O seguinte lema, devido a Pliss [PL72], desempenha um papel crucial no resultado principal que nós vamos apresentar nessa direção.

Lema 3.3.13 (Pliss[Pl72])**.** *Sejam* $0 < c_1 < c_2 < A$ *e* $\theta = (c_2 - c_1)/(A - c_1)$. *Dados números reais* $a_1, \ldots, a_N$ *satisfazendo* $a_j \leq A$ *para cada* $1 \leq j \leq N$ *e*

$$\sum_{j=1}^{N} a_j \geq c_2 N,$$

existem $l > \theta N$ *e* $1 < n_1 < \cdots < n_l \leq N$ *tais que*

$$\sum_{j=n+1}^{n_i} a_j \geq c_1(n_i - n)$$

para cada $0 \leq n < n_i$ *e* $i = 1, \ldots, l$.

Proposição 3.3.14. *Suponha que* $f\colon M \to M$ *é não-uniformemente expansora em* $H \subset M$. *Então existem* $0 < \sigma < 1$, $\delta > 0$ *e* $\theta > 0$ *(dependendo apenas de* λ *e da aplicação* f*) tal que a frequência dos* (σ, δ)*-tempos hiérbólicos para pontos em* H *é maior que* θ.

Como consequência imediata do Teorema 3.3.12 e da Proposição 3.3.14 temos o seguinte,

Corolário 3.3.15. *Se* $f\colon M \to M$ *é não-uniformemente expansora e* $H \subset M$ *com* $m(H) > 0$, *então* f *tem alguma medida invariante absolutamente contínua.*

3.4 Prova do Teorema 3.0.5

Agora usaremos os lemas e proposições anteriores para concluir a prova do Teorema 3.0.5. Veremos que uma estimativa de grandes desvios da profundidade dos retornos nos fornece todas as informações necessárias para comprovar a positividade do expoente de Lyapunov vertical.

Provaremos que existem constantes positivas c, C e γ tal que para cada n suficientemente grande temos

$$\left\| D\varphi^n(\hat{X}_1(\theta))\frac{\partial}{\partial x}\right\| = \prod_{j=1}^{n} |\partial_x f(\hat{X}_j(\theta))| \geq e^{cn},$$

exceto para um conjunto E_n de valores de θ com medida de Lebesgue $Leb(E_n) \leq C.e^{-\gamma\sqrt{n}}$. Tomemos $E = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} E_k$ e então

$$Leb\left(\bigcup_{k\geq n} E_k\right) \leq \sum_{k\geq n} C.e^{-\gamma\sqrt{n}} \leq \lambda.e^{-\gamma\sqrt{n}},$$

para todo n e algum $\lambda > 0$. Então por Borel-Cantelli (ver Lema 1.1.7) , temos que $Leb(E) = 0$, obtendo a prova do Teorema.

Fixemos $n \gg 1$ suficientemente grande. Definimos $m \geq 1$ tal que

$$m^2 \leq n \leq (m+1)^2$$

e tomamos $l = m - M$. Considerando $n \gg \log 1/\alpha$ temos que $l \approx m \approx \sqrt{n}$.

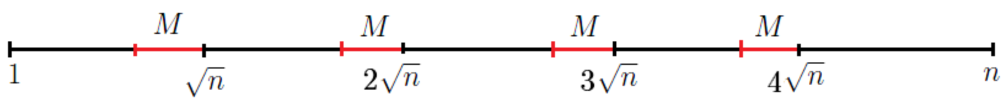

Figura 3.5: $\sqrt{n}$ lançamentos

Sejam $1 \leq \nu \leq n$, $\hat{X}_0$ curva admissível e $\omega_{\nu+l} \in P_{\nu+l}$. Temos pelo lema 3.1.2 que $\gamma := \varphi^\nu(\hat{X}_0|_{\omega_{\nu+l}})$ é um segmento admissível, ou seja, gráfico de uma função $Y : g^\nu(\omega_{\nu+l}) \to I_0$ com derivada primeira e segunda $\leq \alpha$.

Dado $\theta \in S^1$, dizemos que ν é uma I_n-situação para θ se, e somente se

$$\gamma(\theta) \cap J(0) \neq \emptyset \text{ mas } \gamma(\theta) \cap J(m) = \emptyset.$$

Por outro lado, dizemos que ν é uma II_n-situação para θ se, e somente se $\gamma(\theta) \cap J(m) \neq \emptyset$.

Definamos $B_2(n) = \{\theta \in S^1; algum\ \nu\ é\ II_n - sit.\ para\ \theta\}$. Primeiro observemos que o diâmetro de γ na direção x é limitado por $\alpha(d-\alpha)^{-l} \ll \sqrt{\alpha}e^{-m}$. De fato,

$$|(g^\nu(\theta))'| = \prod_{j=0}^{\nu-1} |g'(g^j(\theta))| \leq \prod_{j=0}^{\nu-1} (d-\alpha)^{-1} = (d-\alpha)^{-\nu}.$$

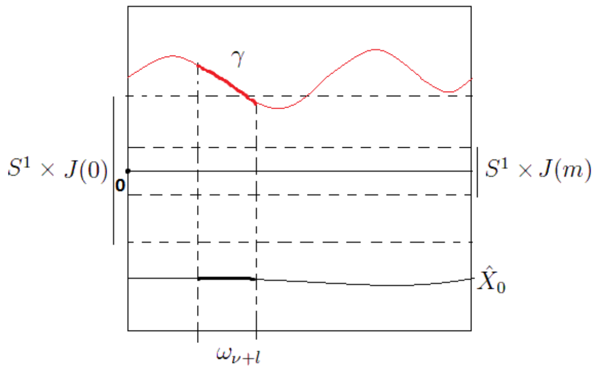

Figura 3.6: I_n-situação

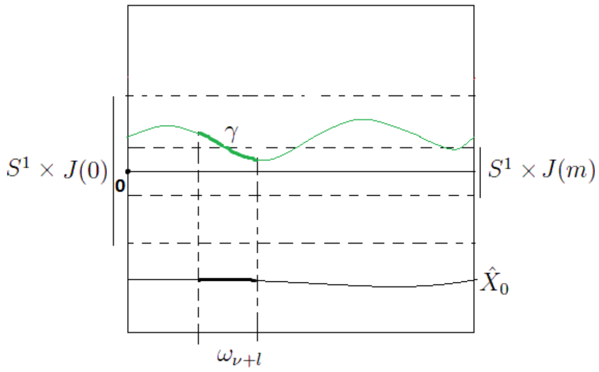

Figura 3.7: II_n-situação

Então, sempre que ν é uma II_n-situação em $\omega_{\nu+l}$ teremos que $\gamma \subset (S^1 \times J(m-1))$. Por isso, podemos escrever

$$B_2(n) = \bigcup_{\nu=1}^{n} \{\theta \in S^1; \gamma(\theta) \in S^1 \times J(m-1)\}.$$

Pelo Corolário 3.1.6,

$$Leb(B_2(n)) \leq \sum_{\nu=1}^{n} Leb(\{\theta \in S^1; \gamma(\theta) \in S^1 \times J(m-1)\}) \leq n.C_1 \sqrt{\frac{|J(m-1)|}{\alpha}} \leq \overline{C}.e^{\frac{-\sqrt{n}}{4}}.$$

Agora consideraremos apenas $\theta \in S^1 \backslash B_2(n)$. Sejam

$$1 \leq \nu_1 \leq \ldots \leq \nu_s \leq n,$$

I_n-situações de θ. A definição de N implica que para cada i, $\nu_{i+1} \geq \nu_i + N$, em particular $(s-1)N \leq n$. Para cada $\nu = \nu_i$ defina $r = r_i \in \{1, \ldots, m\}$ mínimo tal que

$$\gamma \cap (S^1 \times J(r)) = \emptyset.$$

Note que cada r_i depende de θ.

Denotemos $\hat{X}_j(\theta) = (\theta_j, X_j(\theta))$, $\theta \in \omega_{\nu+l}$. Pelo Lema 3.2.1 temos que para cada

$(\theta, X_0(\theta)) \in \omega_{\nu+l} \times I_0$ com $|X_0(\theta)| < 2\sqrt{\alpha}$, existe $N \geq 1$ tal que

$$\prod_{j=\nu_i}^{\nu_i+N-1} |\partial_x f(\hat{X}_j(\theta))| \geq |X_0(\theta)|\alpha^{-1+\eta}.$$

Do modo como os $r_i's$ foram definidos temos que $|X_0(\theta)| \geq \sqrt{\alpha}e^{-r_i}$. Então,

$$\prod_{j=\nu_i}^{\nu_i+N-1} |\partial_x f(\hat{X}_j(\theta))| \geq e^{-r_i}.\alpha^{-\frac{1}{2}+\eta}$$

Por outro lado, de 1 até $\nu_1 - 1$ e $\nu_i + N$ até $\nu_{i+1} - 1$ não há retorno a faixa crítica $S^1 \times [-\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha}]$, então $|x_0|, \ldots, |x_{\nu_1-1}| > \sqrt{\alpha}$. Além disso, $|x_{\nu_i}| < e^{-r_i}\sqrt{\alpha} < 2\sqrt{\alpha} < \delta_1$, para $i = 1, \ldots, s$. Portanto, o Lema 3.2.2 nos dá que

$$\prod_{j=1}^{\nu_1-1} |\partial_x f(\hat{X}_j(\theta))| \geq C_2\sigma_2^{\nu_1-1}$$

e

$$\prod_{j=\nu_i+N}^{\nu_{i+1}-1} |\partial_x f(\hat{X}_j(\theta))| \geq C_2\sigma_2^{\nu_{i+1}-\nu_i-N},$$

para todo $1 \leq i \leq s-1$. Além disso,

$$\prod_{j=\nu_s}^{n} |\partial_x f(\hat{X}_j(\theta))| \geq (2-\alpha)|x_{\nu_s}|C_2\sigma_2^{n-\nu_s} \geq \overline{c}\alpha e^{-r_s}\sigma_2^{n-\nu_s}.$$

Então, $\log\prod_{j=1}^{n} |\partial_x f(\hat{X}_j(\theta))| \geq \log C_2 + (\nu_1 - 1)\log\sigma_2 + \sum_{i=1}^{s-1}\left(\left(\frac{1}{2}-\eta\right)\log\frac{1}{\alpha} - r_i\right) + \sum_{i=1}^{s-1}(\log\sigma_2 + (\nu_{i+1} - \nu_i - N)\log\sigma_2) - \log\frac{1}{\alpha} - r_s + (n - \nu_s)\log\sigma_2 \geq (s+1)\log\sigma_2 + \left[\sum_{i=1}^{s-1}(\nu_{i+1} - \nu_i - N) + \nu_1 - 1 + n - \nu_s\right]\log\sigma_2 + \sum_{i=1}^{s}((\frac{1}{2}-\eta)\log\frac{1}{\alpha} - r_i) - \frac{3}{2}\log\frac{1}{\alpha} \geq (n - (s-1)N)\log\sigma_2 + \sum_{i=1}^{s}\left(\left(\frac{1}{2}-\eta\right)\log\frac{1}{\alpha} - r_i\right) - t.s - \frac{3}{2}\log\frac{1}{\alpha}$.

Consideremos $G := \left\{i; r_i \geq \left(\frac{1}{2} - 2\eta\right)\log\frac{1}{\alpha}\right\}$, que depende de θ. Daí,

$$\sum_{i=1}^{s}\left(\left(\frac{1}{2}-\eta\right)\log\frac{1}{\alpha} - r_i\right) \geq -\sum_{i\in G} r_i + s\eta\log\frac{1}{\alpha} \geq -\sum_{i\in G} r_i + \gamma_2 Ns$$

para algum $\gamma_2 > 0$ independente de α ou n, e $N \approx \log\frac{1}{\alpha}$. Segue então que,

$$\log\prod_{j=1}^{n} |\partial_x f(\hat{X}_j(\theta))| \geq 3cn - \sum_{i\in G} r_i - s.t - \frac{3}{2}\log\frac{1}{\alpha} \geq 2cn - \sum_{i\in G} r_i,$$

onde $c = \dfrac{1}{3}min\{\gamma_2, \log\sigma_2\}$ e $n \gg \log\frac{1}{\alpha} \approx N \gg 1$.

Definindo $B_1(n) = \{\theta \in S^1; \sum_{i\in G} r_i \geq cn\}$ e $E_n = B_1(n) \cup B_2(n)$ temos que

$$\log \prod_{j=1}^{n} |\partial_x f(\hat{X}_j(\theta))| \geq cn,$$

para todo $\theta \in S^1 \backslash E_n$.

3.4.1 Grandes Desvios

Para completar a prova sob a hipótese (3.1), falta provar que

$$Leb(B_1(n)) \leq \tilde{\lambda} e^{-\gamma\sqrt{n}},$$

para algum $\gamma > 0$. Isto será deduzido via Lema 3.3.2 juntamente com um argumento de grande desvios.

Seja $0 \leq q \leq m-1$ fixado e denote $G_q = \{i \in G : \nu_i \equiv q(mod\ m)\}$. Tomemos também $m_q = \max\{j : mj + q \leq n\}$. Para cada $0 \leq j \leq m_q$ seja

$$\begin{cases} \hat{r}_j = r_i, \ se\ mj + q = \nu_i \\ \hat{r}_j = 0, \ c.c. \end{cases}$$

Introduzimos

$$\Omega_q(\rho_0, \ldots, \rho_{m_q}) = \{\theta \in S^1 \backslash B_2(n); \hat{r}_j = \rho_j\ para\ 0 \leq j \leq m_q\},$$

onde para cada j ou $\rho_j = 0$ ou $\rho_j \geq \left(\dfrac{1}{2} - 2\eta\right) \log \dfrac{1}{\alpha}$. Assumimos que os ρ_j não são simultaneamente todos nulos.

Note que $\theta \in B_1(n)$, então $\displaystyle\sum_{i \in G_q} r_i \geq \frac{cn}{m}$ para algum q. De fato, suponha que para todo $q \in [1, n]$, $\displaystyle\sum_{i\in G_q} r_i < c\frac{n}{m}$. Mas, $G = \displaystyle\bigcup_{q=0}^{m-1} G_q$, então

$$\sum_{q=0}^{m-1} \sum_{i\in G_q} r_i < \sum_{q=0}^{m-1} c\frac{n}{m} = cn,$$

isto é, $\displaystyle\sum_{i\in G} r_i < cn$. Uma contradição da definição de $B_1(n)$.

Então temos que

$$Leb(B_1(n)) \leq \sum_{q=0}^{m-1} Leb\left(\left\{\theta : \sum_{i\in G_q} r_i \geq \frac{cn}{m}\right\}\right).$$

Pela desigualdade de Markov obtemos,

$$Leb\left(\left\{\theta : \sum_{i\in G_q} r_i \geq \frac{cn}{m}\right\}\right) \leq e^{-2c\beta\frac{n}{m}} \int e^{2\beta\sum_{i\in G_q} r_i} d\theta, \tag{3.13}$$

onde a integral é tomada sobre a união de todos os conjuntos $\Omega_q(\rho_0,\dots,\rho_q)$ para todas as possibilidades $(\rho_0,\dots,\rho_q)$.

Considere $0 \leq j \leq m_q$ e $\omega_{mj+q+l} \in \mathcal{P}_{mj+q+l}$. Então

$$\hat{Y}_0 = \varphi^{mj+q+l}\left(\hat{X}_0|_{\omega_{mj+q+l}}\right)$$

é curva admissível e l é tal que $mj+q+l = m(j+1)+q-M$. Lembre-se que a construção é tal que o valor de $\hat{r}_j$ é constante em ω_{mj+q+l}.

Temos que $Leb(\{\theta \in \omega_{mj+q+l} : \hat{r}_{j+1} = \rho\}) \leq C_* C_3 e^{-5\beta\rho}|\omega_{mj+q+l}|$, para todo $\rho \geq \left(\frac{1}{2} - 2\eta\right)\log\frac{1}{\alpha}$.

De fato, seja $\theta \in \omega_{mj+q+l}$, então $\theta = g^{-m(j+1)-q+M}(\tilde{\theta})$, onde $\tilde{\theta}$ pertence a algum elemento da partição $\mathcal{P}_M$. A igualdade $\hat{r}_{j+1} = \rho$ significa que para $\nu = m(j+1)+q$,

$$\varphi^\nu(\theta,x) \in S^1 \times J(\rho).$$

Mas,

$$\varphi^\nu(\theta,x) = \varphi^{m(j+1)+q}(g^{-m(j+1)-q+M}(\tilde{\theta}),x) = (g^M(\tilde{\theta}), Y_M(\tilde{\theta})).$$

Ou seja, estamos em condições de aplicar a Proposição 3.3.2 para a curva $\hat{Y}_0$ e obter um limite superior para o conjunto $\{\theta \in S^1 : \hat{r}_{j+1} = \rho\}$. Por distorção limitada temos que

$$|\{\theta \in \omega_{mj+q+l} : \hat{r}_{j+1} = \rho\}| \leq C_* \frac{|\omega_{mj+q+l}|}{|S^1|}.|\{\theta \in S^1; \hat{r}_{j+1} = \rho\}| \leq C_* C_3 e^{-5\beta\rho}|\omega_{mj+q+l}|.$$

Assim, concluímos a afirmação.

Denotando $\mathcal{P}_{m.j+q-M}^{(\rho_1,\dots,\rho_{m_j})} = \{\omega \in \mathcal{P}_{m.j+q-M}\ e\ \hat{r}_j = \rho_j, 1 \leq j \leq m_q\}$, temos que

$$Leb(\Omega(\rho_1,\dots,\rho_2)) = \sum_{\omega\in\mathcal{P}^{m.m_q+q-M}_{(\rho_1,\dots,\rho_{m_q-1})}} Leb(\{\theta \in \omega; \hat{r}_{m_q} = \rho_{m_q}\})$$

Por distorção limitada obtemos,

$$\frac{Leb(\{\theta \in \omega; \hat{r}_{m_q} = \rho_{m_q}\})}{Leb(\omega)} \leq C_* \frac{Leb(\{\theta \in S^1; \hat{r}_{m_q} = \rho_{m_q}\})}{Leb(S^1)}.$$

Então, $Leb(\{\theta \in \omega; \hat{r}_{m_q} = \rho_{m_q}\}) \leq C_* C_3 e^{-5\beta\rho_{m_q}}.Leb(\omega)$. Daí,

$$\begin{aligned} Leb(\Omega(\rho_1,\dots,\rho_{m_q})) &= \sum_{\omega\in\mathcal{P}^{m.m_q+q-M}_{(\rho_1,\dots,\rho_{m_q-1})}} \tilde{C}e^{-5\beta\rho_{m_q}} Leb(\omega) \\ &= \tilde{C}e^{-5\beta\rho_{m_q}} \sum_{\omega\in\mathcal{P}^{m.m_q+q-M}_{(\rho_1,\dots,\rho_{m_q-1})}} Leb(\omega) \\ &= \tilde{C}e^{-5\beta\rho_{m_q}} Leb(\Omega(\rho_1,\dots,\rho_{m_q-1})). \end{aligned}$$

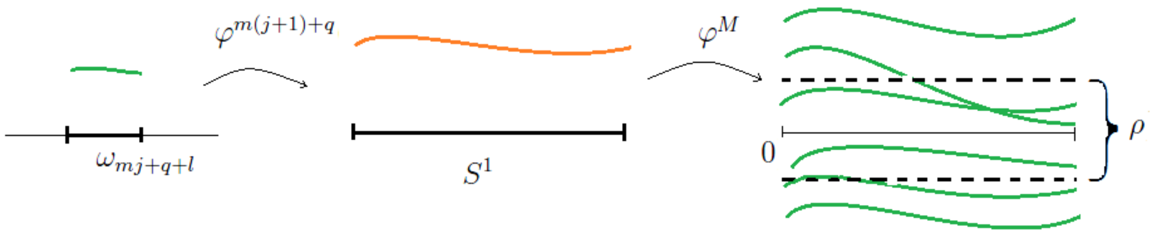

Figura 3.8: Independência dos eventos $\hat{r}_j = \rho_j$.

Repetindo o processo anterior para cada ρ_j e observando que os eventos $\hat{r}_j = \rho_j$ são independentes uns dos outros, temos que

$$Leb(\Omega_q(\rho_0, \ldots, \rho_{m_q})) \leq C_4^\tau e^{-5\beta \sum_{\rho_j \neq 0} \rho_j},$$

onde $C_4 = C_* C_3$ e $\tau = \sharp\{j : \rho_j \neq 0\}$.

Como consequência podemos estimar a integral na equação em (3.13),

$$\begin{aligned} \int e^{2\beta \sum_{i \in G_q} r_i} d\theta &\leq \sum_{(\rho_0, \ldots, \rho_{m_q})} e^{2\beta \sum_{\rho_j \neq 0} \rho_j} Leb(\Omega(\rho_0, \ldots, \rho_{m_q})) \\ &\leq \sum_{(\rho_0, \ldots, \rho_{m_q})} C_4^\tau e^{-3\beta \sum_{\rho_j \neq 0} \rho_j} \\ &\leq \sum_{\tau, R} C_4^\tau \xi(\tau, R) e^{-3\beta R}, \end{aligned}$$

onde $\xi(\tau, R)$ é o número de soluções inteiras da equação $x_1 + \cdots + x_\tau = R$, com

$$x_j \geq \left(\frac{1}{2} - 2\eta\right) \log \frac{1}{\alpha}$$

para todo j existe constante $K > 0$ tal que usando a Fórmula de Stirling obtemos

$$\xi(\tau, R) \leq \frac{(R+\tau)!}{R!\tau!} \leq K \frac{(R+\tau)^{R+\tau}}{R^R \tau^\tau} \leq \left(K^{\tau/R} \left(1 + \frac{\tau}{R}\right) \left(1 + \frac{R}{\tau}\right)^{\tau/R} \right)^R \leq e^{\beta R},$$

onde, para a última desigualdade usa-se o fato de que $R/\tau \geq const \log \frac{1}{\alpha}$, o que nos garante que os três fatores acima podem ser tomados arbitrariamente próximos de 1, com α suficientemente pequeno. Por esta mesma razão, também podemos supor $C_4^\tau \leq e^{\beta R}$.

Então, segue que

$$\int e^{2\beta \sum_{i \in G_q} r_i} d\theta \leq \sum_{\tau, R} e^{-\beta R} \leq \sum_R R e^{-\beta R} \leq 1,$$

onde $\tau \leq R$ e $R \geq \left(\frac{1}{2} - 2\eta\right) \log \frac{1}{\alpha} \gg 1$, pois $\tau \geq 1$. Substituindo em (3.13) obtemos,

$$Leb(B_1(n)) \leq m e^{-2c\beta n/m} \leq e^{-\gamma\sqrt{n}},$$

para $\gamma = c\beta$. Isto conclui a prova do teorema quando estamos supondo

$$||\varphi - \varphi_\alpha||_{C^2} \leq \alpha \ em \ S^1 \times I_0.$$

Capítulo 4

Conclusão da Prova

Neste capítulo concluiremos a prova do Teorema 3.0.5 retirando a hipótese 3.1. Tomamos φ uma aplicação C^3 qualquer da forma

$$\varphi(\theta, x) = (g(\theta, x), f(\theta, x)),$$

satisfazendo $||\varphi - \varphi_\alpha||_3 \leq \epsilon$, onde $\epsilon > 0$ é pequeno com respeito a α.

A conclusão do Teorema 3.0.5 será obtida para φ como acima, por uma variação do argumento anterior. A primeira etapa é mostrar a existência de uma folheação invariante $\mathcal{F}$ de $S^1 \times I_0$. A existência de uma tal folheação invariante irá substituir a hipótese de skew-product $\varphi_\alpha(\theta, x) = (g(\theta), f(\theta, x))$.

Definição 4.0.1. *Uma folheação contínua L de uma variedade M é uma decomposição disjunta de M em subvariedades conexas injetivamente imersas tal que M é coberta por cartas C^0. A folheação é de classe C^r se a carta ϕ pode ser escolhida de classe C^r. Cada subvariedade é chamada de folha.*

Definição 4.0.2. *Uma transformação f de M preserva a folheação L se e somente se, envia a folha que passa por $p \in M$ na folha que passa por $f(p)$.*

Seja $\mathbb{X}$ o espaço das aplicações contínuas $\xi : S^1 \times I_o \to [-1, 1]$ munido com a norma $|| \cdot ||$ do sup. Consideremos o campo vetorial $X_\xi : S^1 \times I_0 \to [-1, 1] \times \{1\}$ dado por $X_\xi(z) = (\xi(z), 1)$. As curvas integrais de tal campo se existirem e forem únicas formam uma folheação $\mathcal{F}$ do cilindro $S^1 \times I_0$. No caso anterior o campo que gerava a folheação invariante pela φ definida pelo skew-product, era dado pelo campo constante X_0, $z \mapsto (0, 1)$.

Para que $\mathcal{F}$ seja φ- invariante o campo X_ξ deve ser $D\varphi$-invariante. Definamos $F : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ por

$$(F\xi)(z) = \frac{\partial_x f(z)\xi(\varphi(z)) - \partial_x g(z)}{-\partial_\theta f(z)\xi(\varphi(z)) + \partial_\theta g(z)},$$

$z = (\theta, x) \in S^1 \times I_0$.

A aplicação F está bem definida. Lembrando que $\varphi_\alpha(\theta, x) = (d\theta(mod 1), a_0 + \alpha \sin 2\pi\theta - x^2)$ e que $||\varphi - \varphi_\alpha||_3 \leq \epsilon$, obtemos as seguinte estimativas:

$$\begin{aligned} |\partial_x f(z).\xi(\varphi(z)) - \partial_x g(z)| &\leq |\partial_x f(z)| \underbrace{|\xi(\varphi(z))|}_{\leq 1} + |\partial_x g(z)| \\ &\leq (4+\epsilon) + \epsilon. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |-\partial_\theta f(z)\xi(\varphi(z)) + \partial_\theta g(z)| &\geq -|\partial_\theta f(z)||\xi(\varphi(z))| + |\partial_\theta g(z)| \\ &\geq -|\partial_\theta f(z)| + |\partial_\theta g(z)| \\ &> -(2\pi\alpha + \epsilon) + (d - \epsilon). \end{aligned}$$

Portanto,

$$|F(\xi(z))| \leq \frac{(4+\epsilon)+\epsilon}{-(2\pi\alpha+\epsilon)+(d-\epsilon)} = \frac{4+2\epsilon}{-2\pi\alpha - \epsilon + d - \epsilon} = \frac{4+2\epsilon}{d - 2\epsilon - 2\pi\alpha} < 1,$$

para α e ϵ suficientemente pequenos. Logo $F(\xi)$ é uma função contínua e limitada por 1 em valor absoluto, isto é, $F(\xi) \in \mathbb{X}$. ■

Proposição 4.0.3. *X_ξ é $D\varphi$-invariante se e somente se ξ é ponto fixo de F.*

Prova: Suponha que X_ξ é $D\varphi$-invariante. Então, existe λ tal que $X_\xi = \varphi_* \lambda^{-1} X_\xi$, ou seja

$$X_\xi(\varphi(z)) = \lambda^{-1} D\varphi(z) X_\xi(z) = \lambda^{-1} \begin{pmatrix} \partial_\theta g(z) & \partial_x g(z) \\ \partial_\theta f(z) & \partial_x f(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(z) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daí, $(\xi(\varphi(z)), 1) = \lambda^{-1}(\partial_\theta g(z)\xi(z) + \partial_x g(z), \partial_\theta f(z)\xi(z) + \partial_x f(z))$ o que implica em:

$$\begin{cases} \xi(\varphi(z)) = \lambda^{-1}(\partial_\theta g(z)\xi(z) + \partial_x g(z)); \\ \lambda^{-1}(\partial_\theta f(z)\xi(z) + \partial_x f(z)) = 1. \end{cases}$$

Fazendo $1.\xi(\varphi(z))$, obtemos $\partial_\theta f(z)\xi(z)\xi(\varphi(z)) + \partial_x f(z)\xi(\varphi(z)) = \partial_\theta g(z)\xi(z) + \partial_x g(z) \Leftrightarrow \partial_x f \xi(\varphi(z)) - \partial_x g(z) = (\partial_\theta g(z) - \partial_\theta f \xi(\varphi(z)))\xi(z)$. Portanto,

$$\xi(z) = \frac{\partial_x f(z)\xi(\varphi(z)) - \partial_x g(z)}{\partial_\theta g(z) - \partial_\theta f(z)\xi(\varphi(z))} = (F\xi)(z).$$

Reciprocamente, se ξ é ponto fixo de F então por cálculos similares aos anteriores

$$\xi(\varphi(z))[\partial_\theta f(z)\xi(z) + \partial_x f(z)] = \partial_\theta g(z)\xi(z) + \partial_x g(z).$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
(\xi(\varphi(z)),1) &= \left(\frac{\partial_\theta g(z)\xi(z)+\partial_x g(z)}{\partial_\theta f(z)\xi(z)+\partial_x f(z)},1\right)\\
&= \frac{1}{\partial_\theta f(z)\xi(z)+\partial_x f(z)}(\partial_\theta g(z)\xi(z)+\partial_x g(z),\partial_\theta f(z)\xi(z)+\partial_x f(z))\\
&= \lambda^{-1}D\varphi(z)X_\xi(z).
\end{aligned}
$$

Portanto $X_\xi(z)$ é $D\varphi$-invariante.

Diante disso precisamos mostrar a existência de tal ponto fixo, para isto mostraremos que F é uma contração definida num espaço de Banach. Sejam $\xi,\eta\in\mathbb{X}$ e $z\in S^1\times I_0$.

$$
\begin{aligned}
|F\xi(z)-F\eta(z)| &= \left|\frac{\partial_x f(z)\xi(\varphi(z))-\partial_x g(z)}{-\partial_\theta f(z)\xi(\varphi(z))+\partial_\theta g(z)}-\frac{\partial_x f(z)\eta(\varphi(z))-\partial_x g(z)}{-\partial_\theta f(z)\eta(\varphi(z))+\partial_\theta g(z)}\right|\\
&= \left|\frac{A-B}{(-\partial_\theta f(z)\xi(\varphi(z))+\partial_\theta g(z))(-\partial_\theta f(z)\eta(\varphi(z))+\partial_\theta g(z))}\right|,
\end{aligned}
$$

onde

$$A=(-\partial_\theta f(z)\eta(\varphi(z))+\partial_\theta g(z))(\partial_x f(z)\xi(\varphi(z))-\partial_x g(z))$$

e

$$B=(-\partial_\theta f(z)\xi(\varphi(z))+\partial_\theta g(z))(\partial_x f(z)\eta(\varphi(z))-\partial_x g(z)).$$

Além disso, temos que

$$D\varphi(z)=\begin{pmatrix}\partial_\theta g(z) & \partial_x g(z)\\ \partial_\theta f(z) & \partial_x f(z)\end{pmatrix}$$

Com,

$$detD\varphi(z)=\partial_\theta g(z)\partial_x f(z)-\partial_x g(z)\partial_\theta f(z).$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
A-B &= -\partial_\theta f(z)\eta(\varphi(z)).\partial_x f(z)\xi(\varphi(z))+\partial_\theta f(z)\eta(\varphi(z)).\partial_x g(z)\\
&+ \partial_\theta g(z)\partial_x f(z).\xi(\varphi(z))+\partial_\theta f(z)\xi(\varphi(z))\partial_x f(z)\eta(\varphi(z))\\
&- \partial_\theta f(z)\xi(\varphi(z))\partial_x g(z)-\partial_\theta g(z)\partial_x f(z)\eta(\varphi(z))\\
&= \partial_\theta g(z)\partial_x f(z).\xi(\varphi(z))-\partial_\theta f(z)\xi(\varphi(z))\partial_x g(z)\\
&+ \partial_\theta f(z)\eta(\varphi(z)).\partial_x g(z)-\partial_\theta g(z)\partial_x f(z)\eta(\varphi(z))\\
&= (detD\varphi(z)).(\xi(\varphi(z))-\eta(\varphi(z))).
\end{aligned}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
|detD\varphi(z)| &= |\partial_\theta g(z)\partial_x f(z)-\partial_x g(z)\partial_\theta f(z)|\\
&\le |\partial_\theta g(z)||\partial_x f(z)|+|\partial_x g(z)||\partial_\theta f(z)|\\
&\le (d+\epsilon)(4+\epsilon)+\epsilon,
\end{aligned}
$$

temos que,

$$\begin{aligned}
|F\xi(z) - F\eta(z)| &= \frac{|detD\varphi(z)|.|\xi(\varphi(z)) - \eta(\varphi(z))|}{|(-\partial_\theta f(\varphi(z)) + \partial_\theta g(z))(-\partial_\theta f(z)\eta(\varphi(z)) + \partial_\theta g(z))|} \\
&\le \frac{((d+\epsilon)(4+\epsilon)+\epsilon)|\xi(\varphi(z)) - \eta(\varphi(z))|}{(d-\lambda\alpha)^2} \\
&\le \frac{1}{2}|\xi - \eta|.
\end{aligned}$$

■

Pelo Teorema do ponto fixo para contrações existe um único ponto fixo $\xi_0 \in \mathbb{X}$ para F. Note que como o mapa F depende continuamente da dinâmica φ e para φ_α o ponto fixo coincide com zero, então para φ próximo de φ_α o ponto fixo ξ_0 de F está próximo de zero.

Seja $\mathcal{F}$ conjunto de curvas integrais dados pelo campo X_ξ. Como o campo é tomado de classe C^0, não é imediato que as curvas integrais são únicas. No entanto, podemos provar a unicidade das soluções usando a expansão de φ na direção horizontal.

Poderíamos mostrar a existência da folheação invariante $\mathcal{F}$ usando o fato de que as retas $\{\theta = const\}$ constituem uma folheação invariante normalmente expansora por φ_α, veja [HPS77] (p.120, Teo. 7.1). Apresentaremos uma prova alternativa para tal fato.

Começamos por observar a propriedade de curvas admissíveis para transformações que não são skew-products.

Lema 4.0.4. *Se $\omega \subset S^1$ é uma componente conexa com $|\omega| < \dfrac{1}{(d-\epsilon)}$, $g|_{\omega\times I_0}$ é injetora e $\hat{X}$ é uma curva admissível, então $\varphi\left(\hat{X}|_\omega\right)$ é segmento admissível. Além disso, para todo $n \ge 1$ tal que $|g^n(\omega \times I_0)| < 1$, temos que $\varphi^n\left(\hat{X}|_\omega\right)$ é segmento admissível.*

Prova: Definamos $Y : g(\omega \times X(\omega)) \to I_0$ dada por $Y(g(\theta, X(\theta))) = f(\theta, X(\theta))$. Observemos que $\varphi\left(\hat{X}|_\omega\right) = graf(Y)$. Além disso,

$$Y'(g(\theta, X(\theta))) = \frac{\partial_\theta f(\theta, X(\theta)) + \partial_x f(\theta, X(\theta)).X'(\theta)}{\partial_\theta g(\theta, X(\theta)) + \partial_x g(\theta, X(\theta)).X'(\theta)}.$$

Estimando a norma do numerador e o denominador obtemos,

$$\begin{aligned}
|\partial_\theta f(\theta, X(\theta)) + \partial_x f(\theta, X(\theta)).X'(\theta)| &\le |\partial_\theta f(\theta, X(\theta))| + |\partial_x f(\theta, X(\theta))|.|X'(\theta)| \\
&\le (2\pi\alpha + \epsilon) + 4\alpha \\
&= (2\pi + 4)\alpha + \epsilon
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\partial_\theta g(\theta, X(\theta)) + \partial_x g(\theta, X(\theta)).X'(\theta)| &\ge |\partial_\theta g(\theta, X(\theta))| - |\partial_x g(\theta, X(\theta))|.|X'(\theta)| \\
&\ge (d-\epsilon) - \epsilon\alpha \\
&= d - (1+\alpha)\epsilon
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|Y'(g(\theta, X(\theta)))| \leq \frac{(2\pi + 4)\alpha + \epsilon}{d - (1+\alpha)\epsilon} \leq \alpha.$$

Derivando a expressão

$$Y'(g(\theta, X(\theta)))(\partial_\theta g(\theta, X(\theta)) + \partial_x g(\theta, X(\theta)).X'(\theta)) = \partial_\theta f(\theta, X(\theta)) + \partial_x f(\theta, X(\theta)).X'(\theta),$$

obtemos:

$$|Y''(g(\theta, X(\theta)))| \leq \frac{(4\pi^2 + 4 + 4\epsilon + \epsilon\alpha)\alpha^2 + (4 + 2\epsilon)\alpha}{(d-\epsilon)^2} \leq \alpha.$$

Isto completa a prova do lema. ∎

Provaremos agora a unicidade das curvas integrais, isto é, que $\mathcal{F}$ é de fato folheação. Suponha por contradição que existem duas curvas integrais distintas $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}$ com um ponto em comum, isto é, $Y_1 \neq Y_2 \in \mathcal{F}$ e $\sup d(Y_1, Y_2) = 0$, onde

$$d(Y_1, Y_2) = \min_{x \in I_0}\{|Y_1 \cap (S^1 \times \{x\}) - Y_2 \cap (S^1 \times \{x\})|\}.$$

Sejam $z_0, z_1, z_2 \in S^1 \times I_0$ distintos tais que $z_0 \in Y_1 \cap Y_2$, $z_1 = (\theta_1, x) \in Y_1$, $z_2 = (\theta_2, x) \in Y_2$. Além disso, seja $\epsilon > 0$ tal que $|\theta_1 - \theta_2| \leq 2\epsilon$.

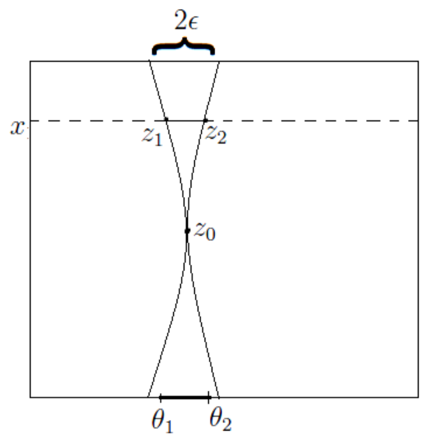

Figura 4.1: $z_0, z_1, z_2 \in S^1 \times I_0$

Consideremos o segmento admissível $\hat{X}$ ligando z_1 a z_2. Observe que $|\theta_1 - \theta_2| \leq 2\epsilon < \dfrac{1}{2(d-\epsilon)}$ então pelo Lema 4.0.4 a imagem de $\hat{X}|_{(\theta_1,\theta_2)}$ é curva admissível.

Sejam $(\theta_1, x_1), (\theta_2, x_2) \in \hat{X}|_\omega$, então

$$|g(\theta_1, x_1) - g(\theta_2, x_2)| \geq (d - \epsilon - 4\alpha - \epsilon\alpha)|\theta_1 - \theta_2|.$$

Considere o ponto $(\theta_2, x_1) \in \hat{X}|_\omega$, então:

$$\begin{aligned}
|g(\theta_1, x_1) - g(\theta_2, x_2)| &\geq |g(\theta_1, x_1) - g(\theta_2, x_1)| - |f(\theta_2, x_2) - f(\theta_2, x_1)| \\
&\geq |\partial_\theta g(.)||\theta_1 - \theta_2| - |\partial_x f(.)||x_2 - x_1| \\
&\geq (d-\epsilon)|\theta_1 - \theta_2| - (4+\epsilon)\alpha|\theta_1 - \theta_2| \\
&\geq (d - \epsilon - 4\alpha - \epsilon\alpha)|\theta_1 - \theta_2|.
\end{aligned}$$

■

Pela afirmação anterior temos que vale a seguinte desigualdade:

$$|g(\theta_1, x) - g(\theta_2, x)| \geq (d - \epsilon - 4\alpha - \epsilon\alpha)|\theta_1 - \theta_2|.$$

Então, existem $z' = (\theta', x') \in \varphi(Y_1)$ e $z'' = (\theta'', x'') \in \varphi(Y_2)$ tais que $|\theta'' - \theta'| \geq 4\epsilon$. Por outro lado, $\varphi(z_0) \in \varphi(Y_1) \cap \varphi(Y_2)$ o que implicaria em $\sup d(\varphi(Y_1), \varphi(Y_2)) = 0$. Isto nos dá uma contradição. Assim, temos unicidade das soluções do campo vetorial $z \mapsto (\xi_0(z), 1)$.

Pelo Teorema de Depêndencia contínua com respeito às condições iniciais segue que as folhas de $\mathcal{F}$ são tão suaves quanto o mapa φ. Além disso, elas convergem uniformemente para segmentos verticais quando $\epsilon \to 0$. Note que em geral $\mathcal{F}$ não é uma folheação suave, suas holonomias não podem ser nem mesmo Lipschitz contínua.

Deste ponto em diante vamos mostrar que quase todo ponto $z = (\theta, x) \in S^1 \times I_0$ tem Expoente de Lyapunov positivo ao longo da direção gerada pelo vetor $(\xi_0(z), 1)$. Para isso introduzimos $\Delta(z)$ tal que $D\varphi(z)(\xi_0(z), 1) = \Delta(z)(\xi_0(\varphi(z)), 1)$, isto é, $\Delta(z) = \partial_\theta f(z)\xi_0(z) + \partial_x f(z)$. Também precisamos de um análogo para a hipótese $\partial_x f(\theta, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Definamos o conjunto crítico de φ por

$$\mathcal{C} = \{z \in S^1 \times I_0 : \Delta(z) = 0\}.$$

Lema 4.0.5. *Temos que $\mathcal{C} = graf(\eta)$, para algum mapa $\eta : S^1 \to I_0$, de classe C^2, que está C^2 próxima de zero quando $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno.*

Prova: Primeiro vamos provar que $z \in \mathcal{C} \Leftrightarrow detD\varphi(z) = 0$. De fato, se $z \in \mathcal{C}$, então $D\varphi(z)(\xi_0(z), 1) = 0$, pois $\Delta(z) = 0$ por definição de $\mathcal{C}$. Ou seja,

$$\begin{pmatrix} \partial_\theta g(z) & \partial_x g(z) \\ \partial_\theta f(z) & \partial_x f(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(z) \\ 1 \end{pmatrix} = (0, 0)$$

Isto nos dá,

$$\begin{cases} \partial_\theta g(z)\xi(z) + \partial_x g(z) = 0 \Rightarrow \partial_x g(z) = -\partial_\theta g(z)\xi(z) \\ \partial_\theta f(z)\xi(z) + \partial_x f(z) = 0 \end{cases}$$

Temos que

$$\begin{aligned} detD\varphi(z) &= \partial_\theta g(z)\partial_x f(z) - \partial_\theta f(z)\partial_x g(z) \\ &= \partial_\theta g(z)\partial_x f(z) + \partial_\theta f(z)\partial_\theta g(z)\xi(z) \\ &= \partial_\theta g(z)(\partial_x f(z) + \partial_\theta f(z)\xi(z)) \\ &= \Delta(z)\partial_\theta g(z) = 0. \end{aligned}$$

Reciprocamente, seja $z \in S^1 \times I_0$ tal que $detD\varphi(z) = 0$. Então temos três possibilidades para a dimensão da imagem de $D\varphi(z)$, a saber 2, 1 e 0. Não podemos ter a dimensão nula pois claramente a imagem de $D\varphi(z)$ possui pelo menos um elemento não trivial. Também não pode ser dois, pois caso fosse teríamos que $D\varphi(z)$ é invertível, o que não é verdade já que $detD\varphi(z) = 0$. Portanto, a imagem da $D\varphi(z)$ é um subespaço unidimensional.

Além disso, seu declive $\left|\dfrac{\partial_\theta f(z)}{\partial_\theta g(z)}\right| \ll 1$. De fato,

$$detD\varphi_\alpha(z) = 0 \Leftrightarrow \partial_\theta g(z).\partial_x f(z) = 0 \Leftrightarrow \partial_x f(z) = 0.$$

Então, $Im(D\varphi(z))$ é gerada pelos vetores $(\partial_\theta g(z), 0), (\partial_\theta f(z), 0)$.

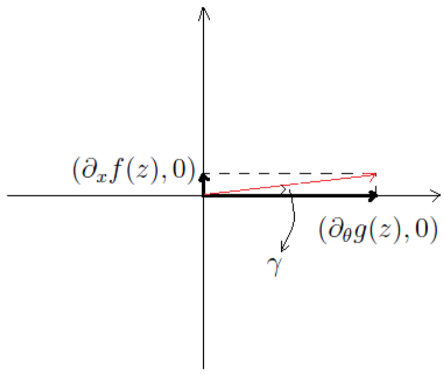

Figura 4.2: $ImD\varphi(z)$

Logo, $\gamma = \dfrac{\partial_\theta f(z)}{\partial_\theta g(z)} \Rightarrow \left|\dfrac{\partial_\theta f(z)}{\partial_\theta g(z)}\right| = \dfrac{\pi\alpha}{d} \ll 1.$

Por outro lado, $D\varphi(z)(\xi_0(z), 1) = \Delta(z)(\xi_0(\varphi(z)), 1)$, Como $(\xi_0(\varphi(z)), 1)$ é um vetor quase vertical temos que $\Delta(z) = 0$. De fato, suponhamos que $0 < \Delta(z) \ll 1$, podemos ter $\xi(\varphi(z)) \ll 1 \Rightarrow \Delta(z).\xi(\varphi(z)) \ll 1$, ou seja, $\Delta(z)(\xi_0(\varphi(z)), 1)$ seria um vetor quase vertical. Absurdo, já que a imagem de $D\varphi(z)$ é uma reta quase horizontal.

Seja $z \in \mathcal{C}$, então pelo lema acima temos que $detD\varphi(z) = 0$. Além disso, $\partial_x(detD\varphi(z)) \neq 0$, para todo $z \in S^1 \times I_0$. Assim, pelo Teorema da Função Implícita $\mathcal{C}$ é o gráfico de uma função $\eta : S^1 \to I_0$, que é tão regular quanto $detD\varphi$. ∎

Continuamos com a mesma definição de Curvas Admissíveis, mas precisamos fazer algumas modificações relativas à definição das partições $\mathcal{P}_n$.

Para cada $n \geq 1$ definimos a partição $\mathcal{P}_n$ de $S^1 \times \{0\}$ da seguinte forma: consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \hat{X}_n \ : \ S^1 \times \{0\} & \longrightarrow & S^1 \times I_0 \\ (\theta, 0) & \longmapsto & \varphi^n(\theta, 0) \end{array}$$

e seja F_0 a folha de $\mathcal{F}$ próxima de $\{\theta = 0\}$ que é fixa por φ. Então definimos,

$$\mathcal{P}_n = \{[\theta', \theta'') : (\theta', \theta'') \textit{ uma componente conexa de } \hat{X}_n^{-1}((S^1 \times I_0) \backslash F_0)\}.$$

Esta partição induz uma partição de $S^1 \times I_0$ em curvas quase verticais

$$\hat{\mathcal{P}}_n = \left\{ F = \bigcup_{\theta \in \omega} F_\theta : \omega \in \mathcal{P}_n \right\},$$

onde cada F_θ é a folha de $\mathcal{F}$ que contém o ponto $(\theta, 0) \in S^1 \times I_0$. Note que para cada $x \in I_0$ e $F \in \hat{\mathcal{P}}_n$ o comprimento de $\omega = (S^1 \times \{x\}) \cap F$ depende de x de uma forma sem importância. De fato,

$$(d + c_1\alpha)^{-n} \leq |\omega| \leq (d - c_1\alpha)^{-n}$$

para cada $x \in I_0$ e $n \geq 1$.

Consideremos a mudança de coordenadas $(\theta, x) \mapsto (\theta, x + \eta(\theta))$, então $\{x = 0\} \mapsto graf(\eta)$, isto significa que podemos supor $\eta \equiv 0$. Seja $\varphi_{X_{\xi_0}}$ uma curva integral do campo vetorial X_{ξ_0}, construímos a aplicação $\psi : S^1 \times I_0 \to S^1 \times I_0$ dada por

$$(\theta, x) \mapsto \varphi_{X_{\xi_0}}(x, (\theta, \eta(\theta))).$$

Observemos que ψ é uma bijeção entre a folheação dada pelo campo constante $z \mapsto (0, 1)$ e a folheação $\mathcal{F}$.

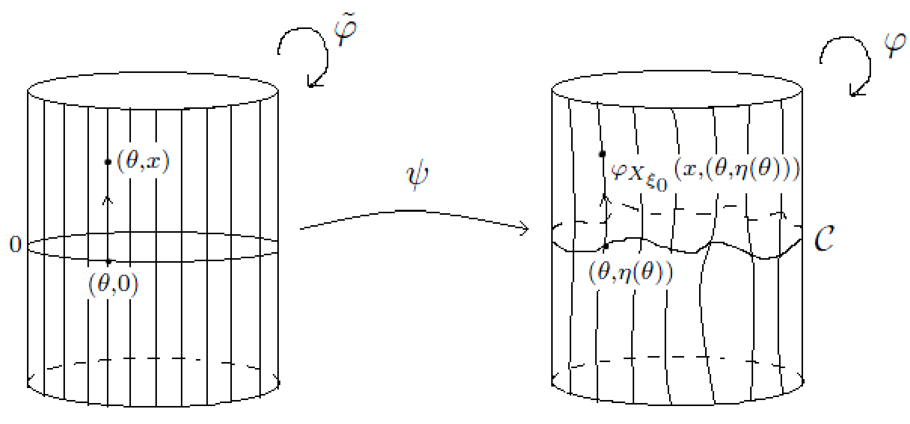

Figura 4.3: Conjugação

Então, induzimos uma aplicação no espaço das folhas verticais

$$\tilde{\varphi}(\theta, x) = (\tilde{g}(\theta), \tilde{f}(\psi^{-1}\varphi_{X_{\xi_0}}(x, (\theta, \eta(\theta))))),$$

satisfazendo as seguintes condições:

- $\tilde{\varphi}$ é um skew-product de classe C^2;
- $\partial_x \tilde{f}(\theta, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $|\tilde{g}'(\theta)| \geq d - \varrho.\epsilon$, com ϱ suficientemente pequeno.

Então, $\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} \partial_x \tilde{f}(\theta_j, x_j)$ cresce exponencialmente rápido em quase todo ponto de $S^1 \times I_0$. Assim temos que $\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} \Delta(\theta_j, x_j)$ também cresce exponencialmente rápido em quase todo ponto de $S^1 \times I_0$.

A aplicação quadrática $h(x) = a_0 - x^2$ pode ser substituída por qualquer mapa unimodal e multimodal com derivada Schwarziana negativa e tendo todos os pontos críticos não degenerados e pré-periódicos. Em particular, podemos tomar tal mapa definido círculo, a saber $h(x) = x + a_0 \sin 2\pi x (mod 1)$ com $a_0 = 3/4$. Então, os mesmo argumentos anteriores nos rendem um conjunto aberto de mapas C^3 no toro $T^2 = S^1 \times S^1$ exibindo com comportamento expansor multidimensional em T^2.

Referências

[Al00] Alves, J. *SRB measures for non-hyperbolic systems with multidimensional expasion.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 33 (2000), n° 1, 1-32.

[Al03] Alves, J. *Statistical analysis of non-uniformly expanding dynamical systems.* 24th Braz. Math. Colloq., IMPA, Rio de Janeiro, 2003.

[AS11] Araújo, V. Solano, J. *Absolutely Continuous Invariant Measures for Non-expanding Maps.* arXiv:1111.4540v1, 2011.

[BC85] Benedicks, M. Carleson, L. *On iterations of* $1 - ax^2$ *on (-1,1).* Ann. Math. 122 (1985), 1-25.

[BC91] Benedicks, M. Carleson, L. *The dynamics of the Hénon map.* Ann. Math. 133 (1991), 73-169.

[BST02] Buzzi, J. Sester, O. Tsujii, M. *Weakly expanding skew-products of quadratic maps.*(ver onde foi publicado) 2002

[CJ08] Castro Junior, A. A. . *Curso de Teoria da Medida.* Edição Ampliada. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA- Projeto Euclides, 2008. v. 1. 190 p.

[Cm85] Craizer, M. *Teoria Ergódica das Transformações Expansoras.* Dissertação (Mestrado em Matemática)-Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1985.

[Fr06] Freitas, J. *Statistical Stability for Chaotic Dynamical Systems.* Tese (Doutorado em Matemática)- Departamento de Matemática Pura- Universidade do Porto, 2006

[GS97] J. Graczyk and G. Światek, *Generic hyperbolicity in the logistic family. Annals of Math.* **146** (1997) 1–52.

[He76] Hénon, M. *A two dimensional mapping with a strange attractor*, Comm. Math. Phys. 50 (1976),69-77.

[HPS77] Hirsch, M. Pugh, C. Shub, M. *Invariant Manifolds.* Lect. Notes Math. 583, Springer Verlag, 1977.

[MS93] De Melo, W. . Van Strien, S.*One-dimensional dynamics.* Springer-Verlag, 1993.

[Ja81] Jakobson, M.V. *Absolutely Continuous Invariant Measures for One- Parameter Families of One-Dimensional Maps*, Comm. Math.Phys. 81 (1981),39-88.

[Ke90] Keller, G. *Exponents, attractors and Hopf decompositions.* Ergod. Th. and Dynam. Sys., 10:717-744, 1990.

[Le81] Ledrappier. F. *Some properties of absolutely continuous invariant measures of an interval.* Ergod. Th. and Dynam. Sys. 1, 7793.

[Ly97] Lyubich, M. *Dynamics of quadratic polynomials*, I-II, Acta Math. 178 (1997), 185-297.

[M83] Mañé, R. , *Introdução à Teoria Ergódica.* (1). ed. (Rio de Janeiro): Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1983. (Projeto Euclides).

[OV11] Oliveira, K. Viana, M. *Introdução à Teoria Ergódica.* Disponível em: http://w3.impa.br/ viana/out/ite.pdf.

[Pl72] Pliss. V. *On a conjecture due to Smale.* Diff. Uravnenija, 8:262–268, 1972.

[PU10] Przytycki, F., Urbański, M. *Conformal Fractals: Ergodic Theory Methods* Cambridge, New York. Cambridge University Press, 2010.

[Ru79] Ruelle. D. *D. Ruelle (1979): Sensitive dependence on initial conditions and turbulent behavior of dynamical systems.* In: "Bifurcation Theory and its Applications in Scientific Disciplines". New York Acad. of Sci. 317.

[Sc08] Schnellman, D. *Non-continuous weakly expanding skew-products of quadratic maps with two positive Lyapunov exponents.* Ergodic Theory and Dynam. Systems, 28(1):245-266, 2008.

[Si78] Singer, D. *Stable orbits and birfucations of maps the interval.* SIAM J. Appl. Math. 35. 260-267, (1978)

[TTY94] Thieullen, P.. Tresser, C. and Young, L.S..*Positive Lyapunov exponent for generic one-parameter families of unimodal maps*, J. d'Analyse Mathématique 64, (1994) 121–172.

[Va12] Varandas, P. *Statistical properties of generalized Viana maps.* Preprint 2012.

[Vi97] Viana, M. *Multidimensional nonhyperbolic attractors.* Publ. Math. IHES 85 (1997), 63-96.

[V97] Viana, M. *Stochastic Dynamics of Deterministic Systems.* Braz. Math. Colloq., Vol. 21, IMPA, Rio de Janeiro, 1997

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170 -110
<http://www.pgmat.ufba.br>