UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PGMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS HEREDITÁRIAS ESTOCÁSTICAS E O PROBLEMA DE PORTFÓLIO ÓTIMO

MARIANA SILVA TAVARES

Salvador-Bahia

Fevereiro de 2014

Equações Diferenciais Hereditárias Estocásticas e o Problema de Portfólio Ótimo

Mariana Silva Tavares

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edson Alberto Coayla Teran.

Salvador-Bahia

Fevereiro de 2014

Tavares, Mariana Silva.

Equações Diferenciais Hereditárias Estocásticas e o Problema de Portfólio Ótimo / Mariana Silva Tavares. – 2014.

82 f.

Orientador: Prof. Dr. Edson Alberto Coayla Teran.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Salvador, 2014.

1. Equações diferenciais estocásticas. 2. Matemática financeira. Investimentos - Matemática. I. Teran, Edson Alberto Coayla. II. Universisade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDD : 519.23

CDU : 519.216

Equações Diferenciais Hereditárias Estocásticas e o Problema de Portfólio Ótimo

Mariana Silva Tavares

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 14 de Fevereiro de 2014.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Edson Albeto Coayla Teran (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Manuel Stadlbauer
UFBA

Prof^a. Dr^a. Giovana Oliveira Silva
UFBA

Aos meus familiares e ao meu Aderbal.

Agradecimentos

Antes de qualquer mensagem, gostaria de agradecer a Deus, por ter me dado força, paciência e fé para realizar esse trabalho. Agradeço a minha mami, Maria, por todo amor concedido. Chegar e sair de casa com a certeza que tem alguém cuidando de tudo para te deixar bem, não tem preço. Obrigada mãe! Ao meu papi, Ed, que me ajudou a tomar decisões com segurança e, mesmo sem saber, me deu carinho quando eu mais precisava. Ao meu irmão Eduardo, me enchendo a paciência até arrancar um sorriso. Minha vózinha, Isabel, simplesmente por existir e ser tão você! Todo esse agradecimento é extensivo aos meus familiares. Vocês valem ouro.

Exprimo minha gratidão imensa a Aderbal, meu companheiro e amigo. Sem você, não chegaria até aqui. Você foi meu alicerce em cada momento ao longo desses 2 anos. Obrigada por tudo, meu amor. TE AMO. Tia Rege, minha sogrita, minha segunda mãezinha, deixo um muito obrigada por cuidar de mim com tanto apreço.

Eternamente agradecida a Isis, querida prima que a todos momentos está disposta a me ouvir e me dar amor. Taise, que como demonstração da sua fiel amizade, me deu o maior presente que podia ter recebido. Ser madrinha de Sophia me fez sentir o amor mais puro e vê-la sorrir sempre enche meu coração de esperança. Zinha e Tai, vocês são como irmãs para mim. Ao meu irmãozinho de coração, Inho, que mesmo na Alemanha não me esquece. Tia Tereza, tia Selma e tia Dene, obrigada por vocês me acalentarem sempre. Eu adoro demais vocês.

Agradecimento mais do que merecido para meu professor, Edson, por todo conhecimento compartilhado e toda dedicação para me ajudar a superar os obstáculos da dissertação. O meu carinho também ao professor Raymundo Torres, por ser tão solícito, e a professora Rita de Cássia, por sempre me incentivar e acreditar no meu potencial.

Aos meus amigos do Vieira, da faculdade e da vida, o meu obrigado. Sem vocês nada teria sentido. Em especial, Aninha, Darllan, Eduardo, Fubah, Eloah, Gabi, Jeu & Bruno, Kel, Kyria, Luize, Mad, Moa, Paulinha e Vinha por simplesmente estarem ao meu lado, sempre. A Gredsvaldo e Bruninho, por me aturarem e adorarem, a Lipe, Sara e Jac que sempre serão os meus grandes companheiros de turma, a Elen, por me passar luz e paz em apenas um abraço, e claro, aos meus maravilhosos amigos da sala 18, incluindo Alejandra, Aube, Elaine, Karina, Rai e Rhully, por extrairem de mim o meu melhor sorriso.

"É melhor lançar-se à luta em busca do triunfo, mesmo expondo-se ao insucesso, do que ficar na fila dos pobres de espírito, que nem gozam muito nem sofrem muito, por viverem nessa penumbra cinzenta de não conhecer vitória e nem derrota"

Franklin D. Roosevelt

Resumo

O presente trabalho tem o intuito de estudar o problema de otimização de portfólio. O portfólio será composto por dois tipos de investimento: um sem risco, que será uma conta poupança, e outro com risco, que será uma conta de ações no mercado financeiro. O preço das ações será modelado por uma equação diferencial estocástica hereditária, e o objetivo do trabalho será encontrar uma estratégia de consumo-negociação que maximize o funcional consumo, sem causar déficit na conta poupança.

Palavras-chave: Equações Diferenciais hereditárias estocásticas; Teoria do Portfólio; Controle ótimo estocástico.

Abstract

The present work intends to study the problem of portfolio optimization. The problem consists of two investment types: a safe one, which is a savings account, and a risky one, which is an account of shares in the financial market. The shares price is modeled by a hereditary stochastic differential equation, and the main goal is to find a tranding-consumption strategy that maximizes the consumption functional leaving no deficit in the savings account.

Keywords: Stochastic functional-differential equations; Optimal stochastic control; Portfolio theory.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **3**

1.1 Preliminares Probabilísticas 3
1.2 Esperança condicional 18

2 Movimento Browniano e Integral de Itô **22**

2.1 Martingale e Tempo de Parada 22
2.2 Movimento Browniano 25
2.3 Integral Estocástica 33

3 Equação Diferencial Estocástica Hereditária com Memória Ilimitada **40**

3.1 Preliminares 40
3.2 Existência e Unicidade de Soluções 43

4 Otimização de Portfólio Hereditário **52**

4.1 O Problema de Otimização de Portfólio Hereditário 54
4.1.1 Estrutura de Preço Hereditário com Memória Ilimitada 55
4.1.2 O espaço dos inventários das ações 55
4.1.3 Estratégias de consumo-negociação 57
4.1.4 Região de Solvência 58
4.1.5 Dinâmica do Portfólio e Estratégias Admissíveis 59
4.1.6 Formulação do Problema 61
4.2 O Processo Controlado 62
4.3 A HJBQVI 65
4.3.1 O Princípio da Programação Dinâmica 65
4.3.2 Dedução da HJBQVI 66
4.3.3 Valores de fronteira da HJBQVI 70
4.4 O Teorema de Verificação 75

Conclusão **79**

Introdução

Este trabalho tratará do problema de otimização de portfólio hereditário com tempo infinito no mercado financeiro, que consiste em uma conta poupança e uma conta de ações. Vamos supor que a conta poupança tem juro composto contínuo e o processo preço unitário segue uma equação diferencial não linear estocástica hereditária com uma memória infinita, mas desaparecendo. Na dinâmica de preços de ações, assumiremos duas funções: a que representa a taxa de retorno médio e a que representa a volatilidade dos preços das ações, que vão depender de toda a história dos preços das ações sobre o intervalo de tempo $(-\infty, t]$ em vez de depender apenas do preço atual no tempo $t \geq 0$.

Trabalharemos numa região chamada região de solvência, sob os requisitos de pagamento fixo mais proporcional dos custos de transação e impostos de ganho de capital. O investidor será permitido consumir da sua conta poupança de acordo com um processo taxa de consumo e poderá fazer transações entre suas contas poupança e de ações de acordo com uma estratégia de negociação. O investidor vai seguir um conjunto de regras de consumo, transação e tributação.

Neste trabalho, queremos buscar uma estratégia de consumo-negociação ideal para o investidor, com o propósito de maximizar a utilidade esperada a partir do consumo total de desconto. Este documento contém o teorema de verificação para a melhor estratégia.

No Capítulo 1, introduziremos os conceitos básicos de probabilidade e resultados fundamentais para o entendimento futuro.

No Capítulo 2, apresentaremos a definição de movimento Browniano para que possamos definir a integral estocástica.

No Capítulo 3, estudaremos a equação diferencial hereditária estocástica com memória ilimitada mas desaparecendo. O resultado mais importante obtido neste capítulo é o teorema de existência e unicidade de soluções. Vale ressaltar que este tipo de equação é mais realístico, por envolver o passado. Explica-se então o porquê de modelarmos os preços das ações através desta equação.

No Capítulo 4, exibiremos o problema de portfólio ótimo. Em seguida, deduziremos a desigualdade quasi variacional de Hamilton Jacobi Bellman, esta que nos dá as condições necessárias que a função valor deve satisfazer. Por fim, chegaremos ao Teorema de Verificação que nos fornece as condições suficientes que a função valor deve atender.

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo, apresentaremos os conceitos elementares que serão de fundamental importância para o desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Preliminares Probabilísticas

Seja Ω um conjunto não vazio, talvez com um número finito de elementos.

Exemplo 1.1.1. *Consideremos os possíveis resultados de três moedas sendo lançadas.* $\Omega = \{KKK, KKT, KTK, KTT, TKK, TKT, TTK, TTT\}$, *$K$ representa coroa e T representa cara.*

Definição 1.1.2. *Seja $\Omega \neq \emptyset$. Uma σ-álgebra, $\mathcal{F}$, é uma coleção de subconjuntos de Ω com as propriedades:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(ii) *Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^C \in \mathcal{F}$.*

(iii) *Se $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, então $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$.*

Exemplo 1.1.3. *Olhando para Ω como no exemplo 1.1.1, temos que*

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{KKK, KKT, KTK, KTT\}, \{TTT, TTK, TKT, TKK\}\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \text{ todos os subconjuntos de } \Omega$$

são σ-álgebras.

Definição 1.1.4. *Seja $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω. Chamamos de probabilidade sobre $\mathcal{F}$ à aplicação $\mathbb{P}$, $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ tal que:*

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(ii) *Se* $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, *então* $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$.

(iii) *Se* $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, *com* $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, *então* $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$.

Observação 1.1.5. *Se* $A, B \in \mathcal{F}$, *com* $A \subset B$, *então* $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$. *De fato, como* $B = B\backslash A \cap A$, *então* $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B\backslash A) + \mathbb{P}(A)$. *Portanto,* $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$.

Definição 1.1.6. *Um espaço de probabilidade é uma tripla* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *onde* Ω *é um conjunto dado,* $\mathcal{F}$ *uma família de subconjuntos de* Ω, *que é uma* σ*-álgebra,* $\mathbb{P}$ *uma medida de probabilidade (sobre* $\mathcal{F}$*).*

Terminologia:

- Ω é chamado de espaço amostral
- os elementos A de $\mathcal{F}$ são chamados eventos
- os pontos $w \in \Omega$ são chamados pontos amostrais
- $\mathbb{P}(A)$ é a probabilidade do evento A.
- uma propriedade que é verdade exceto para um evento de probabilidade zero é chamada a ser satisfeita quase certamente.

Exemplo 1.1.7. *Seja* $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_N\}$ *finito e suponha que damos números* $0 \leq p_j \leq 1$ *para* $1 \leq j \leq N$, *tal que* $\sum\limits_{j=1}^{N} p_j = 1$. *Tomamos como* $\mathcal{F}$ *todos os subconjuntos de* Ω. *Para cada* $A = \{w_{j_1}, w_{j_2}, \ldots, w_{j_n}\} \in \mathcal{F}$, *com* $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_n \leq N$. *Definimos* $\mathbb{P}(A) := p_{j_1} + \ldots + p_{j_n}$.

Observemos que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *é espaço de probabilidade. De fato,* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. *Se*

$$\{A_i\}_{i=1}^{M\leq 2^N}, \; A_k \cap A_j = \emptyset, \; k \neq j.$$

$$A_1 = \{w_{j_{1_1}}, w_{j_{1_2}}, \ldots, w_{j_{1_n}}\}$$

$$A_2 = \{w_{j_{2_1}}, w_{j_{2_2}}, \ldots, w_{j_{2_n}}\}$$

$$\cdots$$

$$A_i = \{w_{j_{i_1}}, w_{j_{i_2}}, \ldots, w_{j_{i_n}}\}$$

Logo

$$\bigcup_{i=1}^{M} A_i = \{w_{j_1}, w_{j_2}, \ldots, w_{j_{(1_n+2_n+\ldots+M_n)}}\}.$$

Daí,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{M} A_i\right) = p_{j_1} + p_{j_2} + \ldots + p_{j_{(1_n+2_n+\ldots+M_n)}} = \mathbb{P}(A_1) + \ldots + \mathbb{P}(A_M) = \sum_{i=1}^{M} \mathbb{P}(A_i).$$

Além disto, se tomarmos B_i's disjuntos tais que $B_i \subset A_i$, $\forall i$, e $\bigcup_{i=1}^{M} A_i = \bigcup_{i=1}^{M} B_i$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{M} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{M} B_i\right) = \mathbb{P}(B_1) + \ldots + \mathbb{P}(B_M) \leq \mathbb{P}(A_1) + \ldots \mathbb{P}(A_n).$$

Definição 1.1.8. *A σ-álgebra que contém todos os subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ é chamada a σ-álgebra de Borel e é denotada por $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

Exemplo 1.1.9. *Consideremos $\Omega = \mathbb{R}^n, n \geq 1$. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ não negativa, integrável, tal que $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = 1$. Definimos*

$$\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)\,dx, \;\; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Então $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade. De fato,

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

Se $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $A_k \cap A_j = \emptyset$, $k \neq j$ então

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \int_{\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i} f(x)\,dx = \int_{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n} f(x)\,dx = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i).$$

De maneira análoga ao que fizemos no caso anterior, concluímos que $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade.

Definição 1.1.10. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. A aplicação $\mathbb{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é chamada uma variável aleatória (v.a.)n-dimensional se para $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{X}^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.*

Observação 1.1.11. *Equivalentemente dizemos que $\mathbb{X}$ é $\mathcal{F}$-mensurável. Usualmente escrevemos $\mathbb{X}$ e não $\mathbb{X}(w)$. Denotamos $\mathbb{P}(\mathbb{X}^{-1}(B))$ por $\mathbb{P}(\mathbb{X} \in B)$.*

Exemplo 1.1.12. *Seja $A \in \mathcal{F}$. Então a função indicadora de A, dada por:*

$$\mathbb{1}_A(w) = \begin{cases} 1 \text{ se } w \in A \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

é uma variável aleatória. De fato, observemos que para $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ temos:

$$\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \begin{cases} A, & B \text{ tal que } 1 \in B,\ 0 \notin B \\ \Omega, & B \text{ tal que } 1 \in B,\ 0 \in B \\ A^C, & B \text{ tal que } 1 \notin B,\ 0 \in B \\ \emptyset, & B \text{ tal que } 1 \notin B,\ 0 \notin B \end{cases}$$

Como todas as possíveis imagens inversas então em $\mathcal{F}$, é uma variável aleatória.

Exemplo 1.1.13. *Combinação linear de funções indicadoras $\mathbb{X} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, em que α_i são números e $A_i \in \mathcal{F}$, com $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, $i = 1, \ldots, n$ é uma variável aleatória.*

Lema 1.1.14. *Seja $\mathbb{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma variável aleatória. Então*

$$\mathcal{F}(\mathbb{X}) = \left\{ \mathbb{X}^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \right\}$$

é uma σ-álgebra, chamada a σ-álgebra gerada por $\mathbb{X}$. É a menor σ-álgebra de $\mathcal{F}$ com respeito a qual $\mathbb{X}$ é mensurável.

Demonstração. Como $\mathbb{X}$ é uma variável aleatória, temos que $\mathbb{X}^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{F}$. Logo $\emptyset \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$. Se $B \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ então $\mathbb{X}^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ e como $\mathcal{F}$ é σ-álgebra temos que $\mathbb{X}^{-1}(\mathbb{R}^n \backslash B) = \Omega \backslash \mathbb{X}^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, donde $\mathbb{R}^n \backslash B \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$. Finalmente, se $(B_k)_{k \geq 1}$ é uma sequência em $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ então $\mathbb{X}^{-1}(B_k) \in \mathcal{F}$ para todo $k \geq 1$ e portanto $\mathbb{X}^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{X}^{-1}(B_k) \in \mathcal{F}$, já que $\mathcal{F}$ é σ-álgebra. Logo $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$. Provamos então que $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ é uma σ-álgebra.
Vamos supor que $\mathcal{G}$ é uma σ-álgebra, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{X}$ é $\mathcal{G}$-mensurável. Pela definição do $\mathcal{F}(\mathbb{X})$, temos que $\mathbb{X}$ é $\mathcal{F}(\mathbb{X})$-mensurável. Nos resta provar que $\mathcal{F}(\mathbb{X}) \subset \mathcal{G}$. Dado $\mathbb{X}^{-1}(B) \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ com $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, como $\mathbb{X}$ é $\mathcal{G}$-mensurável, $\mathbb{X}^{-1}(B) \in \mathcal{G}$. Como $\mathbb{X}^{-1}(B)$ foi arbritário, temos que $\mathcal{F}(\mathbb{X}) \subset \mathcal{G}$. □

Observação 1.1.15. *Se uma variável aleatória $\mathbb{Y}$ é função de $\mathbb{X}$, isto é, se $\mathbb{Y} = \Phi(\mathbb{X})$ para $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, então $\mathbb{Y}$ é uma variável aleatória $\mathcal{F}(\mathbb{X})$-mensurável.*

Demonstração. Suponha $\mathbb{Y}$ uma variável aleatória em função de $\mathbb{X}$. $\mathbb{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ variável aleatória. Logo

$$\mathbb{Y} = \Phi(\mathbb{X}) \Rightarrow \mathbb{Y} = \Phi \circ \mathbb{X} \Rightarrow \mathbb{Y} : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Dado $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{Y}^{-1}(K) = (\Phi \circ \mathbb{X})^{-1}(K) = \mathbb{X}^{-1}\left(\Phi^{-1}(K)\right).$$

Como $\mathbb{X}$ é uma variável aleatória, $\mathcal{F}(\mathbb{X})$-mensurável,

$$\Phi^{-1}(K) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\ \mathbb{X}^{-1}\left(\Phi^{-1}(K)\right) \in \mathcal{F}(\mathbb{X}).$$

Logo $\mathbb{Y}$ é uma variável aleatória $\mathcal{F}(\mathbb{X})$-mensurável. $\square$

Definição 1.1.16. *Se* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *é espaço de probabilidade e* $\mathbb{X} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ *é uma função simples. Definimos a integral de* $\mathbb{X}$ *por:*

$$\int_\Omega \mathbb{X}(w)\, d\mathbb{P}(w) := \int_\Omega \mathbb{X}\, d\mathbb{P} := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{P}\left(A_i\right).$$

Para $\mathbb{X}$ *uma variável aleatória não negativa, definimos*

$$\int_\Omega \mathbb{X}(w)\, d\mathbb{P}(w) := \int_\Omega \mathbb{X}\, d\mathbb{P} := \sup_{\mathbb{Y} \le \mathbb{X}} \int_\Omega \mathbb{Y}\, d\mathbb{P},\ \mathbb{Y} \text{ função simples.}$$

E se $\mathbb{X} : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma variável aleatória definimos*

$$\int_\Omega \mathbb{X}\, d\mathbb{P} := \int_\Omega \mathbb{X}^+\, d\mathbb{P} - \int_\Omega \mathbb{X}^-\, d\mathbb{P}$$

desde que pelo menos uma das integrais do lado direito seja finita.

Neste caso, $\mathbb{X}^+ = \max\{\mathbb{X}, 0\}$ *e* $\mathbb{X}^- = \max\{-\mathbb{X}, 0\}$*, de onde* $\mathbb{X} = \mathbb{X}^+ - \mathbb{X}^-$*.*
Para $\mathbb{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$*, variável aleatória,* $\mathbb{X} = (\mathbb{X}^1, \mathbb{X}^2, \ldots, \mathbb{X}^n)$*, escrevemos*

$$\int_\Omega \mathbb{X}\, d\mathbb{P} := \left(\int_\Omega \mathbb{X}^1\, d\mathbb{P}, \int_\Omega \mathbb{X}^2\, d\mathbb{P}, \ldots, \int_\Omega \mathbb{X}^n\, d\mathbb{P}\right).$$

Definição 1.1.17. *Chamamos*

$$\mathbb{E}(\mathbb{X}) := \int_\Omega \mathbb{X}\, d\mathbb{P}$$

o valor esperado (ou valor médio) de $\mathbb{X}$*.*

Definição 1.1.18. *Chamamos*

$$\mathbb{V}(\mathbb{X}) := \int_\Omega |\mathbb{X} - \mathbb{E}(\mathbb{X})|^2\, d\mathbb{P}$$

a variância de $\mathbb{X}$*.* $|\cdot|$ *denota a norma euclidiana.*

Observação 1.1.19.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\mathbb{X}) &= \mathbb{E}(|\mathbb{X} - \mathbb{E}(\mathbb{X})|^2) \\
&= \mathbb{E}(|\mathbb{X}|^2 - 2\mathbb{X}\mathbb{E}(\mathbb{X}) + |\mathbb{E}(\mathbb{X})|^2) \\
&= \mathbb{E}(|\mathbb{X}|^2) - 2(\mathbb{E}(\mathbb{X}^1\mathbb{E}(\mathbb{X}^1)) + \ldots + \mathbb{E}(\mathbb{X}^n\mathbb{E}(\mathbb{X}^n))) + \mathbb{E}(|\mathbb{E}(\mathbb{X})|^2) \\
&= \mathbb{E}(|\mathbb{X}|^2) - 2|\mathbb{E}(\mathbb{X})|^2 + |\mathbb{E}(\mathbb{X})|^2 = \mathbb{E}(|\mathbb{X}|^2) - |\mathbb{E}(\mathbb{X})|^2
\end{aligned}$$

Afinal,

$$\mathbb{E}(\mathbb{X}^1\mathbb{E}(\mathbb{X}^1)) + \ldots + \mathbb{E}(\mathbb{X}^n\mathbb{E}(\mathbb{X}^n)) = \mathbb{E}(\mathbb{X}^1)^2 + \ldots + \mathbb{E}(\mathbb{X}^n)^2 = |\mathbb{E}(\mathbb{X})|^2$$

e

$$\mathbb{E}(|\mathbb{E}(\mathbb{X})|^2) = \int_\Omega |\mathbb{E}(\mathbb{X})|^2\, d\mathbb{P} = |\mathbb{E}(\mathbb{X})|^2 \int_\Omega d\mathbb{P} = |\mathbb{E}(\mathbb{X})|^2 \int_\Omega \mathbb{1}_\Omega\, d\mathbb{P} = |\mathbb{E}(\mathbb{X})|^2 . \mathbb{P}(\Omega) = |\mathbb{E}(\mathbb{X})|^2.$$

Lema 1.1.20 (Desigualdade de Chebyshev)**.** *Seja* $\mathbb{X}$ *uma variável aleatória e* $1 \leq p \leq \infty$*, então* $\mathbb{P}(|\mathbb{X}| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p}.\mathbb{E}(|\mathbb{X}|^p)$ *para* $\lambda > 0$*.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|\mathbb{X}|^p) &= \int_\Omega |\mathbb{X}|^p\, d\mathbb{P} \\ &= \int_{\{|\mathbb{X}|\geq\lambda\}\cup\{|\mathbb{X}|<\lambda\}} |\mathbb{X}|^p\, d\mathbb{P} \\ &= \int_{\{|\mathbb{X}|\geq\lambda\}} |\mathbb{X}|^p\, d\mathbb{P} + \int_{\{|\mathbb{X}|<\lambda\}} |\mathbb{X}|^p\, d\mathbb{P} \\ &\geq \int_{\{|\mathbb{X}|\geq\lambda\}} |\mathbb{X}|^p\, d\mathbb{P} \\ &= \int_\Omega \mathbb{1}_{\{|\mathbb{X}|\geq\lambda\}} |\mathbb{X}|^p\, d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Mas

$$\mathbb{1}_{\{|\mathbb{X}|\geq\lambda\}}|\mathbb{X}|^p = \begin{cases} |\mathbb{X}|^p & \text{se} \quad w \in \{|\mathbb{X}| \geq \lambda\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Além disso

$$\mathbb{1}_{\{|\mathbb{X}|\geq\lambda\}}\lambda^p = \begin{cases} \lambda^p & \text{se} \quad w \in \{|\mathbb{X}| \geq \lambda\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Observe que quando $w \in \{|\mathbb{X}| \geq \lambda\}$, $|\mathbb{X}|^p \geq \lambda^p$ e quando $w \in \{|\mathbb{X}| < \lambda\}$, $|\mathbb{X}|^p = \lambda^p$. Logo $\mathbb{1}_{\{|\mathbb{X}|\geq\lambda\}}|\mathbb{X}|^p \geq \mathbb{1}_{\{|\mathbb{X}|\geq\lambda\}}\lambda^p$. Temos então que

$$\mathbb{E}(|\mathbb{X}|^p) \geq \int_\Omega \mathbb{1}_{\{|\mathbb{X}|\geq\lambda\}}|\mathbb{X}|^p\, d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbb{1}_{\{|\mathbb{X}|\geq\lambda\}}\lambda^p\, d\mathbb{P} = \lambda^p\mathbb{P}(|\mathbb{X}| \geq \lambda).$$

□

Seja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ em $\mathbb{R}^n$. Denotamos $x \leq y$ quando $x_i \leq y_i$, $i \in \mathbb{N}$.

Definição 1.1.21. (i) *A função de distribuição de* $\mathbb{X}$ *é a função* $\mu^{\mathbb{X}} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ *definida por* $\mu^{\mathbb{X}}(z) := \mathbb{P}(\mathbb{X} \leq z)$ *em que* $z = (z_1, \ldots, z_n)$*.*

(ii) *Se $\mathbb{X}_1,\ldots,\mathbb{X}_m:\Omega\to\mathbb{R}^n$ são variáveis aleatórias, definimos a distribuição conjunta de $\mathbb{X}_1,\ldots,\mathbb{X}_m$ por $\mu^{\mathbb{X}_1,\ldots,\mathbb{X}_m}:(\mathbb{R}^n)^m\to[0,1]$ dada por*

$$\mu^{\mathbb{X}_1,\ldots,\mathbb{X}_m}(z_1,\ldots,z_m):=\mathbb{P}(\mathbb{X}_1\le z_1,\ldots,\mathbb{X}_m\le z_m)\ \text{com } z_i\in\mathbb{R}^n,\ i=1,\ldots,m.$$

Definição 1.1.22. *Suponha que $\mathbb{X}:\Omega\to\mathbb{R}^n$ é uma variável aleatória com função de distribuição $\mu^{\mathbb{X}}$. Se existir uma função não negativa, integrável $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tal que:*

$$\mu^{\mathbb{X}}(z)=\int_{-\infty}^{z_1}\int_{-\infty}^{z_2}\ldots\int_{-\infty}^{z_n}f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n\ldots dx_1,$$

então f é chamada função de densidade de $\mathbb{X}$.

Observação 1.1.23. *Para $z=(z_1,\ldots,z_n)$,*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathbb{X}\le z) &= \mathbb{P}(\mathbb{X}^{-1}((-\infty,z_1]\times(-\infty,z_2]\times\ldots\times(-\infty,z_n]))\\
&= \mathbb{P}(\mathbb{X}\in((-\infty,z_1]\times(-\infty,z_2]\times\ldots\times(-\infty,z_n])\\
&= \int_{-\infty}^{z_1}\int_{-\infty}^{z_2}\ldots\int_{-\infty}^{z_n}f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n\ldots dx_1\\
&= \int_{(-\infty,z_1]\times(-\infty,z_2]\times\ldots\times(-\infty,z_n]}f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Observação 1.1.24. *Podemos definir a probabilidade para $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ como*

$$\mathbb{P}_{\mathbb{X}}(B)=\mathbb{P}(\mathbb{X}^{-1}(B))=\mathbb{P}(\mathbb{X}\in B)=\int_B f(x)\,dx.$$

$\mathbb{P}_{\mathbb{X}}$ é chamada lei de $\mathbb{X}$.

Exemplo 1.1.25. *Seja $\mathbb{X}:\Omega\to\mathbb{R}$, se $\mathbb{X}$ tem função de densidade*

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.e^{\frac{-|x-m|^2}{2\sigma^2}},\ x\in\mathbb{R},$$

dizemos que $\mathbb{X}$ tem uma distribuição Gaussiana (ou normal), com média m e variância σ^2. Neste caso escrevemos $\mathbb{X}$ é uma variável aleatória $N(m,\sigma^2)$.

Exemplo 1.1.26. *Se $\mathbb{X}:\Omega\to\mathbb{R}^n$ tem densidade*

$$f(x)=\frac{1}{((2\pi)^n\det C)^{\frac{1}{2}}}.e^{\frac{1}{2}(x-m)C^{-1}(x-m)},\ x\in\mathbb{R}^n,$$

para algum $m\in\mathbb{R}^n$ e C matriz definida positiva e simétrica, dizemos que $\mathbb{X}$ tem uma distribuição Gaussiana (ou normal), com vetor de média m e matriz de covariância C.

E escrevemos $\mathbb{X}$ é uma variável aleatória $N(m, C)$.

Lema 1.1.27. *Seja $\mathbb{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma variável aleatória. Assuma que sua função distribuição $\mu^{\mathbb{X}}$ tem função de densidade f. Suponha que $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbb{Y} = g(\mathbb{X})$ é integrável. Então*

$$\mathbb{E}(\mathbb{Y}) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x)\, dx.$$

Em particular,

$$\mathbb{E}(\mathbb{X}) = \int_{\mathbb{R}^n} x f(x)\, dx \ \text{ e } \ \mathbb{V}(\mathbb{X}) = \int_{\mathbb{R}^n} |x - \mathbb{E}(\mathbb{X})|^2 f(x)\, dx.$$

Demonstração. Vamos supor que g é uma função simples em $\mathbb{R}^n$:

$$g = \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbb{1}_{B_i},\ B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\ i = 1, \ldots, N,\ c_i \in \mathbb{R}.$$

Então

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{Y}) &= \mathbb{E}(g(\mathbb{X})) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{B_i}(\mathbb{X})\, d\mathbb{P} \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbb{1}_{\{w : \mathbb{X}(w) \in B_i\}}(w)\, d\mathbb{P}(w) \\
&= \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbb{P}(\mathbb{X} \in B_i) \\
&= \sum_{i=1}^{N} c_i \int_{B_i} f(x)\, dx \\
&= \sum_{i=1}^{N} c_i \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{B_i}(x) f(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbb{1}_{B_i}(x) f(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x)\, dx
\end{aligned}$$

Como toda função mensurável pode ser aproximada por funções simples, vale para toda g integrável.

Também para $\mathbb{X} : \Omega \to \mathbb{R}$, Tome $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x$.

$$\mathbb{E}(\mathbb{X}) = \int_{\Omega} \mathbb{X}\, d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx$$

e quando $\mathbb{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, aplicamos esperança em cada coordenada. Afinal, $\mathbb{E}(\mathbb{X}_i) = \int_{\Omega} \mathbb{X}_i\, d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} x_i f(x)\, dx$, em que f é função de $\mu^{\mathbb{X}}$. Assim,

$$\mathbb{E}(\mathbb{X}) = \left(\int_{\Omega} \mathbb{X}_1\, d\mathbb{P}, \ldots, \int_{\Omega} \mathbb{X}_n\, d\mathbb{P} \right) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} x_1 f(x)\, dx, \ldots, \int_{\mathbb{R}^n} x_n f(x)\, dx \right) = \int_{\mathbb{R}^n} x f(x)\, dx$$

Para verificarmos a variância, consideremos $g(x) = |x - \mathbb{E}(\mathbb{X})|^2$.

$$\mathbb{V}(\mathbb{X}) = \mathbb{E}\left(|\mathbb{X} - \mathbb{E}(\mathbb{X})|^2\right) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |x - \mathbb{E}(\mathbb{X})|^2 f(x)\, dx.$$

$\square$

Exemplo 1.1.28. *Se $\mathbb{X}$ é $N(m, \sigma^2)$, então* $\mathbb{E}(\mathbb{X}) = \int_{\mathbb{R}} x.\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}\, dx = m$

Definição 1.1.29. *Dizemos que os eventos A e B são independentes se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$.*

Proposição 1.1.30. *Se A e B são independentes, também são independentes A^C, B e A^C, B^C.*

Demonstração. Provemos que A^C e B são independentes. Como

$$\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A) \text{ e } B = (A \cup A^C) \cap B = (A \cap B) \cup (A^C \cap B),$$

temos que

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^C \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A^C \cap B).$$

Logo

$$\mathbb{P}(A^C \cap B) = \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(B).\mathbb{P}(A^C).$$

Provemos que A^C, B^C são independentes. Como

$$(A^C \cup A) \cap B^C = B^C \text{ então } \mathbb{P}(A^C \cap B^C) + \mathbb{P}(A \cap B^C) = \mathbb{P}(B^C).$$

Mas

$$\mathbb{P}(A^C \cap B^C) + \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B^C) = \mathbb{P}(B^C)$$

$$\mathbb{P}(A^C \cap B^C) = \mathbb{P}(B^C) - \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B^C) \Rightarrow \mathbb{P}(A^C \cap B^C) = \mathbb{P}(B^C)\left(1 - \mathbb{P}(A)\right) = \mathbb{P}(B^C).\mathbb{P}(A^C).$$

$\square$

Definição 1.1.31. *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_m$ eventos. Dizemos que estes eventos são independentes se para qualquer escolha $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_m$, temos*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_{k_i}\right) = \mathbb{P}\left(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_m}\right) = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}\left(A_{k_i}\right) = \mathbb{P}(A_{k_1}).\mathbb{P}(A_{k_2}).\ldots.\mathbb{P}(A_{k_m}).$$

Definição 1.1.32. *Sejam $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{F}$ σ-álgebras, para $i \in \mathbb{N}$. Dizemos que estas σ-álgebras $\mathcal{U}_i$, $i \in \mathbb{N}$, são independentes se para toda escolha $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_m$ de eventos $A_{k_i} \in \mathcal{U}_{k_i}$, temos*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_{k_i}\right) = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}\left(A_{k_i}\right).$$

Definição 1.1.33. *Sejam $\mathbb{X}_i : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, aleatórias. Dizemos que as variáveis aleatórias $\mathbb{X}_i$, $i \in \mathbb{N}$ são independentes se as σ-álgebras $\mathcal{U}(\mathbb{X}_i)$ são independentes.*

Definição 1.1.34. *Consideremos O conjunto não vazio e $\mathcal{O}$ coleção de subconjuntos de O, a coleção $\mathcal{O}$ é chamada de um π-system se é fechado sob interseção finita, isto é, $A, B \in \mathcal{O}$ implica de $A \cap B \in \mathcal{O}$. Este é um λ-system se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $O \in \mathcal{O}$

(ii) $A, B \in \mathcal{O}$ *e* $A \subset B \Rightarrow B - A \in \mathcal{O}$ *e*

(iii) $A_i \in \mathcal{O}$, $A_i \nearrow A$, $i = 1, 2, \ldots \Rightarrow A \in \mathcal{O}$

Lema 1.1.35. *Seja $l(\mathcal{O})$ o menor λ-system que contém $\mathcal{O}$, então $l(\mathcal{O})$ é σ-álgebra.*

Demonstração. Ver em [6] □

Lema 1.1.36. *Sejam $\mathcal{O}$ e $\tilde{\mathcal{O}}$ duas coleções de subconjuntos de O com $\mathcal{O} \subset \tilde{\mathcal{O}}$. Suponha $\mathcal{O}$ π-system e $\tilde{\mathcal{O}}$ λ-system. Então $\sigma(\mathcal{O}) \subset \tilde{\mathcal{O}}$, em que $\sigma(\mathcal{O})$ é a menor σ-álgebra contendo $\mathcal{O}$.*

Demonstração. O resultado segue do lema1.1.35 pois já que $\sigma(\mathcal{O})$ é a menor σ-álgebra contendo $\mathcal{O}$ e $l(\mathcal{O})$ é o menor λ-system contendo $\mathcal{O}$, temos $\sigma(\mathcal{O}) \subset l(\mathcal{O}) \subset \tilde{\mathcal{O}}$. □

Lema 1.1.37. *Sejam Q, Q' duas probabilidades em $(\Omega, \mathcal{F})$. Seja $\mathcal{C}$ um π-system, e $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$. Então $Q = Q'$ em $\mathcal{C}$ implica $Q = Q'$ em $\mathcal{F}$.*

Demonstração. Inicialmente vamos verificar que $\mathcal{L} := \{A \in \mathcal{F} : Q(A) = Q'(A)\}$ é λ-system. Para isso, precisamos mostrar:

(i) $\Omega \in \mathcal{L}$. De fato, $Q(\Omega) = Q'(\Omega) = 1$.

(ii) $A \in \mathcal{L} \Rightarrow A^C \in \mathcal{L}$. De fato, pois

$$Q(A^C) = Q(\Omega) - Q(A) = 1 - Q(A)$$

$$Q'(A^C) = Q'(\Omega) - Q'(A) = 1 - Q'(A).$$

Como $Q(A) = Q'(A)$ temos que $Q(A^C) = Q'(A^C)$.

(iii) $A_i \in \mathcal{L}$, $A_i \nearrow A$, $i = 1, 2, \ldots \Rightarrow A \in \mathcal{L}$. Basta usarmos a σ-aditividade e é verdadeiro para toda medida.

Usando agora o lema 1.1.36, como $\mathcal{L}$ é λ-system que contém o π-system $\mathcal{C}$ então temos que $Q(B) = Q'(B)\ \forall B \in \sigma(C) = \mathcal{F}$ □

Lema 1.1.38. *Sejam* $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \ldots$ *variáveis independentes,* $(i_1, i_2, \ldots)$, $(j_1, j_2, \ldots)$ *conjuntos disjuntos de números inteiros. Então* $\mathcal{F}_1 = \sigma(\mathbb{X}_{i_1}, \mathbb{X}_{i_2}, \ldots)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(\mathbb{X}_{j_1}, \mathbb{X}_{j_2}, \ldots)$ *são independentes.*

Demonstração. Considere qualquer conjunto $D \in \mathcal{F}_2$ de forma que

$$D = \{\mathbb{X}_{j_1} \in B_1, \ldots, \mathbb{X}_{j_m} \in B_m\},\ B_k \in \mathcal{B}_1,\ k = 1, \ldots, m.$$

Defina duas medidas Q_1 e Q_1' em $\mathcal{F}_1$, para $A \in \mathcal{F}_1$,

$$Q_1(A) = \mathbb{P}(A \in D),\ Q_1'(A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D).$$

Considere a classe de conjuntos $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}_1$ da forma

$$C = \{\mathbb{X}_{i_1} \in E_1, \ldots, \mathbb{X}_{i_n} \in E_n\},\ E_l \in \mathcal{B}_1,\ l = 1, \ldots, n.$$

em que $\mathcal{B}_1$ é a σ-algebra de Borel de subconjuntos de $[0, 1]$). Note que

$$\begin{aligned} Q_1(C) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{l=1}^{n}\{\mathbb{X}_{i_l} \in E_l\} \bigcap_{k=1}^{m}\{\mathbb{X}_{j_k} \in B_k\}\right) \\ &= \prod_{l=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathbb{X}_{i_l} \in E_l\right) \prod_{k=1}^{m} \mathbb{P}\left(\mathbb{X}_{j_k} \in B_k\right) \\ &= \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D) = Q_1'(C) \end{aligned}$$

Então $Q_1 = Q_1'$ em $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ é fechado sob interseções, $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}_1 \Rightarrow Q_1 = Q_1'$ em $\mathcal{F}_1$. (ver lema 1.1.37).
Repetindo o argumento fixamos $A \in \mathcal{F}_1$ e definimos $Q_2,\ Q_2'$ em $\mathcal{F}_2$ por $\mathbb{P}(A \cap \cdot),\ \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\cdot)$. Pelo precedente, para qualquer D, $Q_2(D) = Q_2'(D)$, implica $Q_2 = Q_2'$ em $\mathcal{F}_2$ e então para quaisquer $A_1 \in \mathcal{F}_1,\ A_2 \in \mathcal{F}_2,\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$.

□

Lema 1.1.39. *Sejam $\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_{m+n}$ variáveis aleatórias independentes com valores em $\mathbb{R}^d$. Suponha que $f : (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$ seja mensurável com relação à σ-álgebra $\mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^n)$ e $g : (\mathbb{R}^d)^m \to \mathbb{R}$ seja mensurável com relação à σ-álgebra $\mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^m)$, então $\mathbb{Y} = f(\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n)$ e $\mathbb{Z} = g(\mathbb{X}_{n+1}, \ldots, \mathbb{X}_{m+n})$ são independentes.*

Demonstração. Queremos mostrar que $\mathbb{Y}$ e $\mathbb{Z}$ são independentes. Para isso basta mostrarmos que $\sigma(\mathbb{Y})$ é independente de $\sigma(\mathbb{Z})$, ou seja,

$$\mathbb{P}[\mathbb{Y} \in B_1,\ \mathbb{Z} \in B_2] = \mathbb{P}[\mathbb{Y} \in B_1]\mathbb{P}[\mathbb{Z} \in B_2]\ \forall B_1, B_2.$$

Mas a σ-álgebra gerada do $\mathbb{Y}$ é uma sub-σ-álgebra da σ-álgebra gerada por $(\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n)$, e similarmente para $\sigma(\mathbb{Z})$ e $\sigma(\mathbb{X}_{n+1}, \ldots, \mathbb{X}_{m+n})$. De fato, notemos que para qualquer conjunto $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{Y}^{-1}(B) &= (f \circ (\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n))^{-1}(B) \\ &= (\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n)^{-1}\left(\underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \mathcal{B}\left(\left(\mathbb{R}^d\right)^n\right),\ \text{pois } f \text{ é } \mathcal{B}\left(\left(\mathbb{R}^d\right)^n\right)\text{-mensurável}}\right) \\ &= (\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n)^{-1}\,(\text{algum conjunto de Borel}) \in \sigma(\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n) \end{aligned}$$

Pelo lema 1.1.38, $\sigma(\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n)$ é independente da $\sigma(\mathbb{X}_{n+1}, \ldots, \mathbb{X}_{n+m})$. Logo

$$\sigma(\mathbb{Y}) \subset \sigma(\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n) \text{ é independente da } \sigma(\mathbb{Z}) \subset \sigma(\mathbb{X}_{n+1}, \ldots, \mathbb{X}_{n+m})$$

□

Teorema 1.1.40. *Sejam $\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_m : \Omega \to \mathbb{R}^n$ variáveis aleatórias. Estas variáveis aleatórias são independentes se e somente se*

(i) $\mu^{\mathbb{X}_1,\ldots,\mathbb{X}_m}(x_1, \ldots, x_m) = \mu^{\mathbb{X}_1}(x_1) \ldots \mu^{\mathbb{X}_m}(x_m)$ *para todos* $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$.

*Se as variáveis aleatórias possuem funções de densidades respectivas $f_{\mathbb{X}_1}, \ldots, f_{\mathbb{X}_m}$, **(i)** é equivalente a*

(ii) $f_{\mathbb{X}_1,\ldots,\mathbb{X}_m}(x_1, \ldots, x_m) = f_{\mathbb{X}_1}(x_1) \ldots f_{\mathbb{X}_m}(x_m)$ *para todos* $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Ver em [7]

□

Teorema 1.1.41. *Suponha que $\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_m : \Omega \to \mathbb{R}$ são variáveis aleatórias independentes com*

$$\mathbb{E}(|\mathbb{X}_i|) < \infty \text{ para } i = 1, \ldots, m,$$

então $\mathbb{E}(|\mathbb{X}_1\mathbb{X}_2\dots\mathbb{X}_m|) < \infty$ *e*

$$\mathbb{E}(\mathbb{X}_1\mathbb{X}_2\dots\mathbb{X}_m) = \mathbb{E}(\mathbb{X}_1)\dots\mathbb{E}(X_m).$$

Demonstração. Sejam $\mathbb{Z}_1 = \mathbb{1}_{A_1}, \dots, \mathbb{Z}_m = \mathbb{1}_{A_m} \in \mathcal{F}$. Calculemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(|\mathbb{Z}_1.\cdots.\mathbb{Z}_m|\right) &= \int_\Omega |\mathbb{1}_{A_1}(w).\cdots.\mathbb{1}_{A_m}(w)|\, d\mathbb{P} \\ &= \int_\Omega \mathbb{1}_{A_1\cap\dots\cap A_m}(w)\, d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{P}\left(A_1\cap\dots\cap A_m\right) < \infty \end{aligned}$$

Consideremos $A_1 = \mathbb{Z}_1^{-1}(D_1), \dots, A_m = \mathbb{Z}_m^{-1}(D_m)$ com $D_1, \dots, D_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Como

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbb{Z}_1\mathbb{Z}_2.\cdots.\mathbb{Z}_m) &= \int_\Omega \mathbb{1}_{A_1}(w).\cdots.\mathbb{1}_{A_m}(w)\, d\mathbb{P} \\ &= \int_\Omega \mathbb{1}_{A_1\cap\dots\cap A_m}(w)\, d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{P}\left(A_1\cap\dots\cap A_m\right) \\ &= \mathbb{P}(A_1).\cdots.\mathbb{P}(A_m) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{Z}_1).\cdots.\mathbb{E}(\mathbb{Z}_m) \end{aligned}$$

Completando a prova para funções indicadoras. O que basta para completarmos a prova, uma vez que, as funções simples são escritas como soma de funções indicadoras e são densas no espaço das funções integráveis. □

Definição 1.1.42. *Sejam* $A_1, A_2, \dots$ *eventos em um espaço de probabilidade. Então o evento* $\limsup A_n := \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n$ *para infinitos valores de* n $\}$ *é chamado* $A_n\ i-o$.

Lema 1.1.43 (Borel Cantelli)**.** *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, *então* $\mathbb{P}(A_n\ i-o) = 0$.

Demonstração. $\mathbb{P}(A_n\ i-o) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \searrow 0$, quando $k \to \infty$. Logo $\mathbb{P}(A_n\ i-o) = 0$. □

Definição 1.1.44. *Uma sequência de variáveis aleatórias* $\{\mathbb{X}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *converge para uma variável aleatória* $\mathbb{X}$ *em probabilidade se dado* ϵ, $\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(|\mathbb{X}_k - \mathbb{X}| < \epsilon\right) = 1$.

Teorema 1.1.45. *Se* $\mathbb{X}_k \to \mathbb{X}$ *em probabilidade, então existe uma subsequência* $\left\{\mathbb{X}_{k_j}\right\}_{j=1}^{\infty} \subset \{\mathbb{X}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *tal que*

$$\mathbb{X}_{k_j}(w) \to \mathbb{X}(w)$$

para quase todos w.

Demonstração. Para cada inteiro positivo j, vamos tomar k_j grande tal que

$$\mathbb{P}\left(\left|\mathbb{X}_{k_j} - \mathbb{X}\right| > \frac{1}{j}\right) \leq \frac{1}{j^2}$$

e também $\ldots < k_{j-1} < k_j < \ldots$, $k_j \to \infty$. Seja $A_j := \left\{\left|\mathbb{X}_{k_j} - \mathbb{X}\right| > \frac{1}{j}\right\}$. Já que $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty$, o lema de Borel Cantelli implica que $\mathbb{P}(A_j \text{ i-o}) = 0$. Portanto para quase todo ponto w, $\left|\mathbb{X}_{k_j}(w) - \mathbb{X}(w)\right| \leq \frac{1}{j}$ fornecido $j \geq J$, para algum J indexado dependendo de w. $\square$

Definição 1.1.46. *Seja $\mathbb{X}$ uma variável aleatória tal que $\mathbb{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Então*

$$\phi_{\mathbb{X}}(\lambda) := \mathbb{E}(e^{i\lambda\mathbb{X}}), \ \lambda \in \mathbb{R}^n,$$

é a função característica de $\mathbb{X}$.

Lema 1.1.47. **(i)** *Se $\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_m$ são variáveis aleatórias independentes, então para cada $\lambda \in \mathbb{R}^n$, então*

$$\phi_{\mathbb{X}_1+\ldots+\mathbb{X}_m}(\lambda) = \phi_{\mathbb{X}_1}(\lambda). \cdots .\phi_{\mathbb{X}_m}(\lambda).$$

(ii) *Se $\mathbb{X}$ é uma variável aleatória, $\mathbb{X} : \Omega \to \mathbb{R}$, então*

$$\phi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(\mathbb{X}^k), \ k \in \mathbb{N}.$$

(iii) *Se $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ são variáveis aleatórias e $\phi_{\mathbb{X}}(\lambda) = \phi_{\mathbb{Y}}(\lambda)$ para todo λ, então*

$$\mu^{\mathbb{X}}(x) = \mu^{\mathbb{Y}}(x), \ \textit{para todo } x.$$

Demonstração. **(i)**

$$\begin{aligned}
\phi_{\mathbb{X}_1+\ldots+\mathbb{X}_m}(\lambda) &= \mathbb{E}\left(e^{i\lambda(\mathbb{X}_1,\ldots,\mathbb{X}_m)}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(e^{i\lambda\mathbb{X}_1}, e^{i\lambda\mathbb{X}_2}, \ldots, e^{i\lambda\mathbb{X}_m}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(e^{i\lambda\mathbb{X}_1}\right). \cdots .\mathbb{E}\left(e^{i\lambda\mathbb{X}_m}\right) \text{ pela independência} \\
&= \phi_{\mathbb{X}_1}(\lambda). \cdots .\phi_{\mathbb{X}_m}(\lambda)
\end{aligned}$$

(ii) Temos que $\phi'(\lambda) = i\mathbb{E}\left(\mathbb{X}.e^{i\lambda\mathbb{X}}\right)$ e então $\phi'(0) = i\mathbb{E}(\mathbb{X})$.

Para $k = 2$, temos que $\phi^2(\lambda) = i^2\mathbb{E}\left(\mathbb{X}^2 e^{i\lambda\mathbb{X}}\right)$ e então $\phi^2(0) = i^2\mathbb{E}(\mathbb{X}^2)$.

Suponha válido para n. Logo

$$\begin{aligned}
\phi^{n+1}(\lambda) &= (\phi^n(\lambda))' = \left(i^n\mathbb{E}\left(\mathbb{X}^n e^{i\lambda\mathbb{X}}\right)\right)' \\
&= i^{n+1}\mathbb{E}\left(\mathbb{X}^{n+1} e^{i\lambda\mathbb{X}}\right)
\end{aligned}$$

e então $\phi^{n+1} = i^{n+1}\mathbb{E}(\mathbb{X}^{n+1})$.

(iii) Ver [2] para prova.

$\square$

Lema 1.1.48 (Desigualdade de Gronwall)**.** *Suponha que* $h \in L^1([t,T];\mathbb{R})$ *e* $\alpha \in L^\infty([t,T];\mathbb{R})$ *satisfazendo, para algum* $\beta \geq 0$,

$$0 \leq h(s) \leq \alpha(s) + \beta \int_t^s h(\lambda)\, d\lambda \text{ para } s \in [t,T]. \tag{1.1}$$

Então

$$h(s) \leq \alpha(s) + \beta \int_t^s \alpha(\lambda) e^{-\beta(\lambda - s)}\, d\lambda \text{ para } s \in [t,T].$$

Se em adição, α *é crescente, então* $h(s) \leq \alpha(s)e^{-\beta(s-t)}$ *para* $s \in [t,T]$.

Demonstração. Assuma que $\beta \neq 0$. Caso contrário, o lema é trivial.
Defina $z(s) := e^{-\beta(s-t)} \int_t^s h(\lambda)\, d\lambda$. Então

$$\begin{aligned} z'(s) &= -\beta e^{-\beta(s-t)} \int_t^s h(\lambda)\, d\lambda + e^{-\beta(s-t)}.h(s) \\ &= e^{-\beta(s-t)} \left(-\beta \int_t^s h(\lambda)\, d\lambda + h(s) \right) \\ &\leq e^{-\beta(s-t)} \alpha(s) \text{ para} s \in [t,T]. \end{aligned}$$

Integrando em ambos os lados,

$$z(s) \leq \int_t^s e^{-\beta(\lambda-t)} \alpha(\lambda)\, d\lambda \Rightarrow e^{-\beta(s-t)} \int_t^s h(\lambda)\, d\lambda \leq \int_t^s e^{-\beta(\lambda-t)} \alpha(\lambda)\, d\lambda.$$

Multiplicando por $e^{\beta(s-t)}$,

$$\int_t^s h(\lambda)\, d\lambda \leq e^{\beta s} \int_t^s \alpha(\lambda) e^{-\beta\lambda}\, d\lambda \text{ para } s \in [t,T].$$

Usando (1.1), chegamos ao desejado.
No caso em que α é crescente,

$$\begin{aligned} h(s) &\leq \alpha(s) + \beta \int_t^s \alpha(\lambda) e^{-\beta(\lambda - s)}\, d\lambda \\ &\leq \alpha(s) + \beta\alpha(s) \int_t^s e^{-\beta(\lambda - s)}\, d\lambda \\ &= \alpha(s) + \alpha(s) \left(-e^{-\beta(\lambda-s)}|_t^s\right) \\ &= \alpha(s) + \alpha(s) \left(1 + e^{-\beta(t-s)}\right) \\ &= \alpha(s) e^{-\beta(t-s)}. \end{aligned}$$

□

1.2 Esperança condicional

Nesta sessão vamos explorar o conceito de esperança condicional, a qual será necessária para a próxima sessão e outros. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espaço de probabilidade fixado. Para $1 \leq p < \infty$, iremos usar $L^p(\Omega)$ para denotar o espaço de todas as variáveis aleatórias $\mathbb{X}$ com $\mathbb{E}(|\mathbb{X}|^p) < \infty$. Este é um espaço de Banach com a norma

$$||\mathbb{X}||_p = \left(\mathbb{E}\left(|\mathbb{X}|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nesta seção iremos usar o espaço $L^1(\Omega)$. Em alguns momentos escreveremos $L^1(\Omega, \mathcal{F})$ para enfatizar a σ-álgebra $\mathcal{F}$.

Definição 1.2.1. *Seja $\mathbb{X} \in L^1(\Omega, \mathcal{F})$. Suponha que temos uma outra σ-álgebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. A esperança condicional de $\mathbb{X}$ dado $\mathcal{G}$ é definida como uma única variável aleatória $\mathbb{Y}$ (sob a medida $\mathbb{P}$) satisfazendo as seguintes condições:*

(i) *$\mathbb{Y}$ é $\mathcal{G}$-mensurável;*

(ii) *$\int_A \mathbb{X}\, d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{Y}\, d\mathbb{P}$ para todo $A \in \mathcal{G}$.*

Usaremos livremente $\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})$ para denotar a esperança condicional de $\mathbb{X}$ dado $\mathcal{G}$. Note que a $\mathcal{G}$-mensurabilidade na condição (i) é crucial. Caso contrário, poderíamos tomar $\mathbb{Y} = \mathbb{X}$ para satisfazer a condição (ii), e a definição acima, não seria tão significativa. A esperança condicional $\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})$ pode ser interpretada como a melhor estimativa para o valor de $\mathbb{X}$ baseada nas informações provenientes de $\mathcal{G}$.

Exemplo 1.2.2. *Suponha $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$. Seja $\mathbb{X}$ uma variável aleatória em $L^1(\Omega)$ e seja $\mathbb{Y} = \mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})$. Já que $\mathbb{Y}$ é $\mathcal{G}$-mensurável, ela deve ser uma constante, diremos $\mathbb{Y} = c$. Então basta usarmos a condição (ii) na definição acima com $A = \Omega$ para termos:*

$$\int_\Omega \mathbb{X}\, d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbb{Y}\, d\mathbb{P} = c.$$

Consequentemente, $c = \mathbb{E}(\mathbb{X})$ *e nós temos* $\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{X})$*. Essa conclusão é intuitivamente óbvia já que a* σ*-álgebra* $\mathcal{G}$ *nao fornece informação.*

Teorema 1.2.3. *Seja* $\mathbb{X}$ *uma variável aleatória integrável. Então para cada* σ*-álgebra* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$*, a esperança condicional* $\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})$ *existe e é única sobre o conjunto* $\mathcal{G}$*-mensurável de probabilidade zero.*

Demonstração. Ver em [7] □

Observe que a esperança condicional é uma variável aleatória, enquanto que a esperança é um número real. Abaixo iremos listar propriedades importantes sobre a esperança condicional.

1. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})) = \mathbb{E}(\mathbb{X})$.

   Demonstração. Para provarmos basta tomarmos $A = \Omega$ na definição de esperança condicional. □

2. Se $\mathbb{X}$ é $\mathcal{G}$-mensurável, então $\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G}) = \mathbb{X}$.

   Demonstração. Se $\mathbb{X}$ é $\mathcal{G}$-mensurável então, pela definição, é uma versão da esperança condicional de $\mathbb{X}$ dado $\mathcal{G}$. □

3. Se a, b são constantes, $\mathbb{E}(a\mathbb{X} + b\mathbb{Z}|\mathcal{G}) = a\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G}) + b\mathbb{E}(\mathbb{Z}|\mathcal{G})$.

   Demonstração. Para todo $A \in \mathcal{G}$, segue da linearidade da integral de Lebesgue e da definição de esperança condicional que

$$\begin{aligned}\int_A \mathbb{E}(a\mathbb{X} + b\mathbb{Z}|\mathcal{G})\, d\mathbb{P} &= \int_A a\mathbb{X} + b\mathbb{Z}\, d\mathbb{P} \\ &= a\int_A \mathbb{X}\, d\mathbb{P} + b\int_A \mathbb{Z}\, d\mathbb{P} \\ &= a\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\, d\mathbb{P} + b\int_A \mathbb{E}(\mathbb{Z}|\mathcal{G})\, d\mathbb{P}\end{aligned}$$

   Logo $\mathbb{E}(a\mathbb{X} + b\mathbb{Z}|\mathcal{G}) = a\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G}) + b\mathbb{E}(\mathbb{Z}|\mathcal{G})$ $\mathbb{P}$-quase sempre. □

4. Se $\mathbb{X}$ é $\mathcal{G}$-mensurável e $\mathbb{X}\mathbb{Z}$ é integrável, então $\mathbb{E}(\mathbb{X}\mathbb{Z}|\mathcal{G}) = \mathbb{X}\mathbb{E}(\mathbb{Z}|\mathcal{G})$.

Demonstração. Suponha que $\mathbb{X} = \mathbb{1}_B$ para algum $B \in \mathcal{G}$. Então, para todo $A \in \mathcal{G}$ temos que

$$\begin{aligned}
\int_A \mathbb{E}(\mathbb{1}_B \mathbb{Z}|\mathcal{G})\, d\mathbb{P} &= \int_A \mathbb{1}_B \mathbb{Z}\, d\mathbb{P} \\
&= \int_{A\cap B} \mathbb{Z}\, d\mathbb{P} \\
&= \int_{A\cap B} \mathbb{E}(Z|\mathcal{G})\, d\mathbb{P} \\
&= \int_A \mathbb{1}_B \mathbb{E}(\mathbb{Z}|\mathcal{G})\, d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Logo $\mathbb{E}(\mathbb{1}_B \mathbb{Z}|\mathcal{G}) = \mathbb{1}_B \mathbb{E}(\mathbb{Z}|\mathcal{G})$. Aproximando $\mathbb{X}$ por funções simples e usando o teorema da convergência dominada obtém-se o resultado. □

5. Se $\mathbb{X}$ é independente de $\mathcal{G}$, então $\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{X})$.

   Demonstração. Como $\mathbb{X}$ é independente de $\mathcal{G}$ então $\sigma(\mathbb{X})$ é independente de $\mathcal{G}$. Logo as variáveis aleatórias $\mathbb{1}_A$ e $\mathbb{X}$ são independentes para todo $A \in \mathcal{G}$. Segue que

$$\int_A \mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})\, d\mathbb{P} = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A.\mathbb{X}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A)\mathbb{E}(\mathbb{X}) = \int_A \mathbb{E}(\mathbb{X})\, d\mathbb{P}.$$

   Como a igualdade anterior é válida para todo $A \in \mathcal{G}$ temos que $\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{X})$. □

6. Se $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ então $\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})|\mathcal{H})$.

   Demonstração. Como $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ temos que

$$\int_B \mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{H})\, d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{X}\, d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})\, d\mathbb{P},\ \forall B \in \mathcal{H}.$$

   Por outro lado, como $\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})$ é uma função $\mathcal{G}$-mensurável, a sua esperança condicional dado $\mathcal{H}$ satisfaz,

$$\int_B \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})|\mathcal{H})\, d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})\, d\mathbb{P},\ \forall B \in \mathcal{H}.$$

   □

7. Se $\mathbb{X} \leq \mathbb{Z}$ então $\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(\mathbb{Z}|\mathcal{G})$.

Demonstração. Suponha $\mathbb{X} \leq \mathbb{Z}$. Note que $\forall A \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned}\int\limits_A \mathbb{E}(\mathbb{Z}|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})\, d\mathbb{P} &= \int\limits_A \mathbb{E}(\mathbb{Z} - \mathbb{X}|\mathcal{G})\, d\mathbb{P} \\ &= \int\limits_A \mathbb{Z} - \mathbb{X}\, d\mathbb{P} \geq 0.\end{aligned}$$

Seja

$$A = \{\mathbb{E}(\mathbb{Z}|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G}) < 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left\{\mathbb{E}(\mathbb{Z}|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G}) < -\frac{1}{n}\right\}}_{A_n}.$$

$$\begin{aligned}0 &\leq \int\limits_{A_n} \mathbb{E}(\mathbb{Z}|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})\, d\mathbb{P} \\ &= \int\limits_{\Omega} \mathbb{1}_{A_n} \left(\mathbb{E}(\mathbb{Z}|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})\right)\, d\mathbb{P} \\ &\leq \int\limits_{\Omega} \mathbb{1}_{A_n} \left(-\frac{1}{n}\right)\, d\mathbb{P} \\ &= \left(-\frac{1}{n}\right) \mathbb{P}(A_n).\end{aligned}$$

Logo $\mathbb{P}(A_n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ e portanto $\mathbb{P}(A) = 0$. Afinal, $\mathbb{P}(A) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = 0$. Concluindo assim a prova. □

Lema 1.2.4. *Suponha* $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *convexa com* $\mathbb{E}\left(|\Phi(\mathbb{X})|\right) < \infty$. *Então* $\Phi\left(\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})\right) \leq \mathbb{E}\left(\Phi(\mathbb{X})|\mathcal{G}\right)$.

Demonstração. Seja $L(x) = ax + b$ uma reta tangente a curva $(x, \Phi(x))$ no ponto

$$(\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})(w), \Phi(\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})(w)).$$

Como $L(x) \leq \Phi(x)$, já que é uma curva convexa, $L(\mathbb{X}) \leq \Phi(\mathbb{X}), \forall w \in \Omega$. Então, tomando esperança condicional, temos

$$a\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})(w) + b \leq \mathbb{E}(\Phi(\mathbb{X})|\mathcal{G})(w),\ \forall w \in \Omega$$

$$a\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})(w) + b \leq \mathbb{E}(\Phi(\mathbb{X})|\mathcal{G})(w),\ \text{quase sempre.}$$

O que implica

$$\Phi(\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})(w)) \leq \mathbb{E}(\Phi(\mathbb{X})|\mathcal{G})(w),\ \text{quase sempre.}$$

□

Capítulo 2

Movimento Browniano e Integral de Itô

Neste capítulo vamos definir a integral estocástica relativa ao movimento Browniano e estudar algumas das suas propriedades. Estas integrais também são chamadas integrais de Itô. O objetivo é definir integrais do tipo

$$\int_a^b \mathbb{X}(s)\, d\mathbb{W}(s),$$

do processo estocástico $\mathbb{X} = (\mathbb{X}(t))_{t\geq 0}$ relativo ao movimento Browniano $\mathbb{W} = (\mathbb{W}(t))_{t\geq 0}$. Esta integral não pode ser definida como

$$\int_a^b \mathbb{X}(s)\dot{\mathbb{W}}(s) ds, \text{ em que } \dot{\mathbb{W}}(s) = \frac{dB(s)}{ds}$$

pois, pelo Teorema 2.2.11, as trajetórias do movimento Browniano não são diferenciáveis em qualquer dos seus pontos. Por outro lado, o movimento Browniano não tem variação limitada, usando o mesmo teorema, então esta integral não pode ser definida no sentido de Lebesgue-Stieltjes. No entanto, é possível dar um sentido rigoroso a esta integral usando o fato do movimento Browniano ter variação quadrática finita, conforme Lema 2.2.13.

2.1 Martingale e Tempo de Parada

Definição 2.1.1. *Uma coleção $\{X(t)|t \geq 0\}$ de váriaveis aleatórias é chamada um processo estocástico.*

Para um espaço genérico de Banach $(\Xi, ||\cdot||_\Xi)$, considere sub-σ-álgebra $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$. Seja $L^2(\Omega, \Xi, \mathcal{G})$ a coleção de todas variáveis aleatórias, $\mathbb{X} : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\Xi, \mathcal{B}(\Xi))$, Ξ

avaliadas que são $\mathcal{G}$-mensuráveis e satisfazem

$$||\mathbb{X}||_{L^2(\Omega,\Xi)} \equiv \mathbb{E}\left[||\mathbb{X}||_\Xi^2\right] \equiv \int_\Omega ||\mathbb{X}(w)||_\Xi \, d\mathbb{P}(w) < \infty.$$

Se $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, vamos simplificar a escrita de $L^2(\Omega, \Xi, \mathcal{F})$ para $L^2(\Omega, \Xi)$. Para $0 < T < \infty$, seja $C([0,T]; L^2(\Omega, \Xi))$ o espaço de todos os processos $\mathbb{X}(\cdot) = \{\mathbb{X}(s),\ s \in [0,T\}$ contínuos com quadrado integrável tais que

$$||\mathbb{X}(\cdot)||_{C([0,T];L^2(\Omega,\Xi))} \equiv \sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}\left[||\mathbb{X}(s)||_\Xi^2\right] < \infty.$$

Definição 2.1.2. *Uma filtração em $[0,T]$ é uma família crescente, $\boldsymbol{F} = \{\mathcal{F}(t); t \in [0,T]\}$ de σ-álgebras de $\mathcal{F}$. Um processo estocástico $\mathbb{X}(t) \in C([0,T]; L^2(\Omega, \Xi))$, $t \in T$, é dito ser adaptado a $\boldsymbol{F}$ se para cada t, a variável aleatória $\mathbb{X}(t)$ é $\mathcal{F}(t)$-mensurável. Denote por $C([0,T]; L^2(\Omega, \Xi, \boldsymbol{F}))$ o conjunto desses processos.*

Definição 2.1.3. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \boldsymbol{F})$ um espaço de probabilidade filtrado completo, em que $\boldsymbol{F} = \{\mathcal{F}(s), s \geq 0\}$ é a filtração de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$ que satisfaz as seguintes condições:*

(i) *$\boldsymbol{F}$ é completo, isto é,*

$$\mathcal{N} \equiv \{A \subset \Omega |\ \exists B \in \mathcal{F} \text{ tal que } A \subset B \text{ e } \mathbb{P}(B) = 0\} \subset \mathcal{F}(0)$$

(ii) *$\boldsymbol{F}$ é crescente, ou seja, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(\tilde{s})$, $\forall 0 \leq s \leq \tilde{s}$.*

(iii) *$\boldsymbol{F}$ é contínua à direita, isto é, $\mathcal{F}(s+) \equiv \bigcap_{\epsilon\downarrow 0} \mathcal{F}(s+\epsilon) = \mathcal{F}(s)$, $\forall s \geq 0$, em que $\equiv$ quer dizer "é definido como".*

Definição 2.1.4. *Uma variável aleatória $\tau : \Omega \to [0, \infty)$ é dita ser $\boldsymbol{F}$-tempo de parada se para cada $t \geq 0$,*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}(t).$$

Proposição 2.1.5. *A variável aleatória $\tau : \Omega \to [0, \infty)$ é uma $\boldsymbol{F}$-tempo de parada se e apenas se*

$$\{\tau < s\} \in \mathcal{F}(s),\ \forall s \geq 0.$$

Demonstração. Já que $\{\tau \leq s\} = \bigcap_{s+\epsilon>\lambda>s}\{\tau < \lambda\}$, para qualquer $\epsilon > 0$, temos

$$\{\tau \leq s\} \in \bigcap_{\lambda>s} \mathcal{F}(\lambda) = \bigcap_{\epsilon\searrow 0}(s+\epsilon) = \mathcal{F}(s).$$

Para o inverso, $\{\tau < s\} = \bigcup_{s>\epsilon>0}\{\tau \leq s-\epsilon\}$ e $\{\tau \leq s-\epsilon\} \in \mathcal{F}(s-\epsilon) \subset \mathcal{F}(s)$. □

Proposição 2.1.6. *Seja τ e τ' dois $\boldsymbol{F}$-tempos de parada. Então os seguintes também são tempos de parada:*

(i) $\tau \wedge \tau' \equiv \min\{\tau, \tau'\}$

(ii) $\tau \vee \tau' \equiv \max\{\tau, \tau'\}$

(iii) $\tau + \tau'$

(iv) $a\tau$, *em que* $a > 1$.

Seja $\mathbb{X}(\cdot) = \{\mathbb{X}(s), s \geq 0\}$ o processo estocástico Ξ-avaliado definido no espaço de probabilidade completo filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbf{F})$. Vamos definir o "hitting time"e o "exit time"$\tau : \Omega \to [0, \infty]$ como segue

Definição 2.1.7. *Seja* $\mathbb{X}(t) \notin \Lambda$ *para algum* $t \in [0, T]$. *O hitting time depois do tempo* t *do conjunto de Borel* $\Lambda \in \mathcal{B}(\Xi)$ *para* $\mathbb{X}(\cdot)$ *é definido por*

$$\tau = \begin{cases} \inf\{s > t | \mathbb{X}(s) \in \Lambda\} & se \quad \{\cdots\} \neq \emptyset \\ \infty & se \quad \{\cdots\} = \emptyset. \end{cases}$$

Definição 2.1.8. *Seja* $\mathbb{X}(t) \in \Lambda$ *para algum* $t \in [0, T]$. *O exit time depois do tempo* t *do conjunto de Borel* $\Lambda \in \mathcal{B}(\Xi)$ *para* $\mathbb{X}(\cdot)$ *é definido por*

$$\tau = \begin{cases} \inf\{s > t | \mathbb{X}(s) \notin \Lambda\} & se \quad \{\cdots\} \neq \emptyset \\ \infty & se \quad \{\cdots\} = \emptyset. \end{cases}$$

Quando $t = 0$, a variável aleatória τ definida em (2.1.7) e (2.1.8) será chamada hitting time e exit time, respectivamente, por simplicidade.

Teorema 2.1.9. *Se* $\mathbb{X}(\cdot)$ *é um processo contínuo* Ξ*-avaliado e se* Λ *é um subconjnto aberto de* Ξ*, então o hitting time de* Λ *para* $\mathbb{X}(\cdot)$ *depois do tempo* $t \geq 0$ *é um tempo de parada.*

Demonstração. Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais. Pela proposição 2.1.5 temos que $\{\tau < s\} \in \mathcal{F}(s),\ 0 \leq t \leq s < \infty$. Mas

$$\{\tau < s\} = \bigcup_{u \in \mathbb{Q} \cap [t,s]} \{\mathbb{X}(u) \in \Lambda\},$$

já que $A \subset \Xi$ é aberto e $\mathbb{X}(\cdot) = \{\mathbb{X}(s), s \in [t, T]\}$ tem partes contínuas à direita. Como

$$\{\mathbb{X}(u) \in \Lambda\} \in \mathcal{F}(u) \subset \mathcal{F}(s),$$

segue o resultado do teorema. □

Definição 2.1.10. *Seja* $\mathbb{X}$ *uma variável aleatória definida em um espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *e tomando valores em um espaço mensurável separável de Banach* $(\Xi, (\Xi))$. *Seja* $\mathcal{G}$ *uma sub-*σ*-álgebra de* $\mathcal{F}$. *Uma probabilidade condicional regular de* $\mathbb{X}$ *dada uma sub-*σ*-álgebra* $\mathcal{G}$ *é uma função* $Q : \Omega \times \mathcal{B}(\Xi) \to [0, 1]$ *tal que:*

(i) *Para cada $w \in \Omega$, $Q(w, \cdot)$ é uma probabilidade mensurável em $(\Xi, \mathcal{B}(\Xi))$.*

(ii) *Para cada $A \in \mathcal{B}(\Xi)$, a aplicação $w \to Q(w, A)$ é $\mathcal{G}$-mensurável.*

(iii) *Para cada $A \in \mathcal{B}(\Xi)$, $\mathbb{P}(\mathbb{X} \in A|\mathcal{G})(w) = Q(w, A)$, $\mathbb{P}$-quase sempre.*

A notação $\mathbb{P}(\mathbb{X} \in \cdot|\mathcal{G})$ será usada no lugar de Q por razão autoexplicativa.

Definição 2.1.11. *Seja $\mathbb{X}(t)$ um processo estocástico adaptado a $\boldsymbol{F}$ e $\mathbb{E}(|\mathbb{X}(t)|) < \infty$ para todo $t \in T$. Então $\mathbb{X}(t)$ é dito um martingale com respeito a $\{\mathcal{F}(t)\}$ se para qualquer $t \in T$,*

$$\mathbb{E}\{\mathbb{X}(t)|\mathcal{F}(s)\} = \mathbb{X}(s), \text{ quase certamente.} \tag{2.1}$$

Submartingale e supermartingale são definidas substituindo na equação (2.1) por $\geq$ e por $\leq$, respectivamente, isto é, para cada $s < t$ em T,

$$\mathbb{E}\{\mathbb{X}(t)|\mathcal{F}(s)\} \geq \mathbb{X}(s), \text{ quase sempre (submartingale)},$$

$$\mathbb{E}\{\mathbb{X}(t)|\mathcal{F}(s)\} \leq \mathbb{X}(s), \text{ quase sempre (supermartingale)}.$$

No caso em que a filtração não especificada explicitamente, então a filtração $\mathcal{F}(t)$ entende-se como uma dada por $\mathcal{F}(t) = \sigma\{\mathbb{X}(s); s \leq t\}$.

Definição 2.1.12. *Seja $\mathbb{X}(\cdot)$ processo estocástico com valor real. Então $\sigma(\mathbb{X}(s)|0 \leq s \leq t)$, a σ-álgebra gerada pela variável aleatória $\mathbb{X}(s)$ para $0 \leq s \leq t$, é chamada a história do processo até o tempo $t \geq 0$.*

Lema 2.1.13. *Suponha $\mathbb{X}(\cdot)$ uma martingale de valor real e $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é convexo. Então se $\mathbb{E}(|\Phi(\mathbb{X}(t))|) < \infty$ para todo $t \geq 0$, $\Phi(\mathbb{X}(\cdot))$ é uma submartingale.*

Demonstração. Como $\mathbb{X}$ é martingale, $\mathbb{X}$ é processo estocástico tal que $\mathbb{E}(|\mathbb{X}(t)|) < \infty$, $\forall t \geq 0$ e

$$\mathbb{X}(s) = \mathbb{E}(\mathbb{X}(t)|\mathcal{F}(s)).$$

Se $\mathbb{E}(|\Phi(\mathbb{X}(t))|) < \infty$ $\forall t \geq 0$, pelo lema 1.2.4,

$$\Phi(\mathbb{X}(s)) = \Phi\left(\mathbb{E}(\mathbb{X}(t)|\mathcal{F}(s))\right) \leq \mathbb{E}(\Phi(\mathbb{X}(t))|\mathcal{F}(s)).$$

Concluindo assim a prova. □

2.2 Movimento Browniano

Um exemplo muito importante de um processo estocástico é o movimento Browniano. Este movimento parece ter tido origem com o botânico inglês Robert Brown, o qual, em 1827, observou que pequenas partículas de pólen imersas num líquido apresentavam um movimento irregular e que os movimentos de duas partículas distintas pareciam ser independentes. Em 1905, Einstein forneceu uma explicação para este fenómeno, esclarecendo que o referido movimento deve-se às constantes colisões das partículas com as moléculas do meio ambiente em que se encontram inseridas. Contudo, apenas em 1918, Wiener deu uma definição matemática precisa do movimento Browniano, o qual, por isso, também é conhecido por processo de Wiener. Esta seção é dedicada a este processo no que concerne à sua definição e propriedades mais comuns.

Definição 2.2.1. *Uma cinco-tupla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \boldsymbol{F}, \mathbb{W}(\cdot))$ é dita ser um uni-dimensional movimento Browniano ou processo de Wiener definido em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \boldsymbol{F})$ se o processo $\mathbb{W}(\cdot) = \{\mathbb{W}(s), s \geq 0\}$ é $\boldsymbol{F}$-adaptado, e satisfaz as seguintes condições:*

(i) $\mathbb{P}\{\mathbb{W}(0) = 0\} = 1$

(ii) *Para $0 \leq s < \tilde{s} < \infty$, $\mathbb{W}(\tilde{s}) - \mathbb{W}(s)$ é independente de $\mathcal{F}(s)$.*

(iii) *Para $0 \leq s < \tilde{s} < \infty$, $\mathbb{W}(\tilde{s}) - \mathbb{W}(s)$ é uma variável aleatória normalmente distribuida com média zero e variância $\tilde{s} - s$, isto é,*

$$\mathbb{P}(a \leq \mathbb{W}(\tilde{s}) - \mathbb{W}(s) \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tilde{s} - s)}}.e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dx$$

Observação 2.2.2. *Para todo $t \geq 0$, $\mathbb{E}(\mathbb{W}(t)) = 0$ e $\mathbb{E}(\mathbb{W}(t)^2) = t$.*

Demonstração. Imediato da definição de movimento Browniano. □

Observação 2.2.3. *Se definirmos a σ-álgebra $\mathcal{F}(t) = \sigma(\mathbb{W}(s)|0 \leq s \leq \tilde{s})$ então o movimento Browniano é um martingale.*

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbb{W}(t)|\mathcal{F}(s)) &= \mathbb{E}(\mathbb{W}(t) - \mathbb{W}(s) + \mathbb{W}(s)|\mathcal{F}(s)) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{W}(t) - \mathbb{W}(s)|\mathcal{F}(s)) + \mathbb{E}(\mathbb{W}(s)|\mathcal{F}(s)). \end{aligned}$$

Mas $\mathbb{E}(\mathbb{W}(t) - \mathbb{W}(s)|\mathcal{F}(s))$ é independente de $\mathcal{F}(s)$ e portanto, $\mathbb{E}(\mathbb{W}(t) - \mathbb{W}(s)|\mathcal{F}(s)) = \mathbb{E}(\mathbb{W}(t) - \mathbb{W}(s))$. Mas $\mathbb{E}(\mathbb{W}(t)) = 0\ \forall t$. Logo $\mathbb{E}(\mathbb{W}(t) - \mathbb{W}(s)|\mathcal{F}(s)) = 0$.
Por outro lado, $\mathbb{E}(\mathbb{W}(s)|\mathcal{F}(s)) = \mathbb{W}(s)$ já que $\mathbb{W}(s)$ é $\mathcal{F}(s)$-mensurável. Assim concluímos a demonstração. □

Teorema 2.2.4. *Seja $\mathbb{W}(\cdot)$ um movimento Browniano unidimensional. Então para $n \in \mathbb{N}$ e para qualquer escolha de instantes*

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n$$

e cada função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}f(\mathbb{W}(t_1), \ldots, \mathbb{W}(t_n)) \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n) g(x_1, t_1|0). \cdots .g(x_n, t_n - t_{n-1}|\mathbb{X}_{n-1})\, dx_n. \cdots .dx_1,
\end{aligned}$$

em que $g(x,t|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}.e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$.

Demonstração. Escrevemos $\mathbb{X}_i = \mathbb{W}(t_i)$ e $\mathbb{Y}_i = \mathbb{X}_i - \mathbb{X}_{i-1}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. $\mathbb{X}_0 = \mathbb{W}(t_0) = 0$ (pela definição de movimento browniano). E definimos $h(\mathbb{Y}_1, \ldots, \mathbb{Y}_n) := f(\mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_1 + \mathbb{Y}_2, \ldots, \mathbb{Y}_1 + \mathbb{Y}_2 + \ldots + \mathbb{Y}_n)$. Então

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}h(\mathbb{Y}_1, \ldots, \mathbb{Y}_n) \\
= & \mathbb{E}f(\mathbb{W}(t_1), \ldots, \mathbb{W}(t_n)), \text{ por 1.1.27 e 1.1.40,} \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} h(y_1, \ldots, y_n) \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} e^{-\frac{y_1^2}{2t_1}} \ldots \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_n - t_{n-1})}} e^{-\frac{y_n^2}{2(t_n - t_{n-1})}}\, dy_n \ldots dy_1
\end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variáveis, tomemos $y_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1, \ldots, n,\ x_0 = 0$ e concluímos a prova. □

Corolário 2.2.5. *Nas condições do teorema anterior, temos*

$$\mathbb{P}(a_1 \leq \mathbb{W}(t_1) \leq b_1, a_n \leq \mathbb{W}(t_n) \leq b_n) = \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_n}^{b_n} g(x_1, t_1|0) \ldots g(x_n, t_n|x_{n-1})\, dx_n \ldots dx_1.$$

Demonstração. Seja $f(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{1}_{[a_1,b_1]}(x_1) \ldots \chi_{[a_n,b_n]}(x_n)$. Já que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}f(\mathbb{W}(t_1), \ldots, \mathbb{W}(t_n)) &= \int_\Omega \chi_{[a_1,b_1]}(\mathbb{W}(t_1)) \ldots \chi_{[a_n,b_n]}(\mathbb{W}(t_n))\, d\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega \chi_{B_1}(w) \ldots \chi_{B_n}(w)\, d\mathbb{P} \\
&= \mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n} B_k) \\
&= \mathbb{P}(a_1 \leq \mathbb{W}(t_1) \leq b_1, \ldots, a_n \leq \mathbb{W}(t_n) \leq b_n)
\end{aligned}$$

com $B_k = \{\mathbb{W}(t_k) \in [a_k, b_k]\}$.
Usando o teorema anterior, temos que

$$\mathbb{E}f(\mathbb{W}(t_1), \ldots, \mathbb{W}(t_n)) = \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_n}^{b_n} g(x_1, t_1|0) \ldots g(x_n, t_n|x_{n-1})\, dx_n \ldots dx_1.$$

□

Lema 2.2.6. *Suponha que* $\mathbb{W}(t)$ *é um movimento Browniano unidimensional. Então*

$$\mathbb{E}(\mathbb{W}(t)\mathbb{W}(s)) = \min\{t, s\} \text{ para } t \geq 0,\ s \geq 0.$$

Demonstração. Suponha $t \geq s$. Daí

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{W}(t)\mathbb{W}(s)) &= \mathbb{E}((\mathbb{W}(t) - \mathbb{W}(s) + \mathbb{W}(s)).\mathbb{W}(s)) \\
&= \underbrace{\mathbb{E}((\mathbb{W}(t) - \mathbb{W}(s))}_{=0}\underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{W}(s))}_{=0} + \mathbb{E}(\mathbb{W}(s)\mathbb{W}(s)) \\
&= s
\end{aligned}$$

□

Definição 2.2.7. (i) *Seja* $0 < \gamma \leq 1$. *A função* $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ *é chamada uniformemente Holder contínua com expoente* $\gamma > 0$ *se existe uma constante* k *tal que:*

$$|f(t) - f(s)| \leq k|t - s|^{\gamma},\ \text{para } s, t \in [0, T].$$

(ii) *Dizemos que* f *é Holder contínua com expoente* $\gamma > 0$ *no ponto* s *se existe uma constante* k *tal que:*

$$|f(t) - f(s)| \leq k|t - s|^{\gamma},\ \text{para } t \in [0, T].$$

Teorema 2.2.8. *Seja* $(\mathbb{X}(t))_{t\geq 0}$ *um processo estocástico com caminhos amostrais contínuos (quase certamente) tal que*

$$\mathbb{E}(|\mathbb{X}(t) - \mathbb{X}(s)|^{\beta}) \leq c|t - s|^{1+\alpha}$$

para constantes $\beta, \alpha \geq 0$, $c > 0$ *e para todo* $t, s \geq 0$. *Então para cada* $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}, T > 0$, *quase certamente* $w \in \Omega$, *existe constante* $k = k(w, T, \gamma, c)$ *tal que*

$$|\mathbb{X}(t) - \mathbb{X}(s)| \leq k|t - s|^{\gamma} \text{ para } 0 \leq t, s \leq T.$$

Portanto os caminhos amostrais $t \mapsto \mathbb{X}(t, w)$ *é uniformemente Holder contínua com expoente* γ *em* $[0, T]$.

Demonstração. A fim de simplificar consideraremos $T = 1$. Tomemos $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$ e definimos para $n = 1, 2, \ldots$

$$A_n = \left\{ \left| \mathbb{X}\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - \mathbb{X}\left(\frac{i}{2^n}\right) \right| > \frac{1}{2^{n\gamma}},\ \text{para algum inteiro } 0 \leq i \leq 2^n \right\}.$$

Então

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) &\leq \sum_{i=0}^{2^n-1} \mathbb{P}\left(\left|\mathbb{X}\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - \mathbb{X}\left(\frac{i}{2^n}\right)\right| > \frac{1}{2^{n\gamma}}\right) \\
&\underbrace{\leq}_{por 1.1.20} \sum_{i=0}^{2^n-1} \left(\frac{1}{2^{n\gamma}}\right)^{-\beta} \mathbb{E}\left(\left|\mathbb{X}\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - \mathbb{X}\left(\frac{i}{2^n}\right)\right|^{\beta}\right) \\
&\leq \sum_{i=0}^{2^n-1} \left(\frac{1}{2^{n\gamma}}\right)^{-\beta} c\left|\frac{1}{2^n}\right|^{1+\alpha} \\
&= c\sum_{i=0}^{2^n-1} 2^{n(\gamma\beta-1-\alpha)} \\
&= c(2^n-1+1)2^{n\gamma\beta-n-n\alpha} = 2^{n(\gamma\beta-\alpha)}
\end{aligned}$$

Logo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$. Pelo lema de Borel Cantelli, $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_n^C\right) = 1$ quase todo $w \in \Omega$, ou seja,

$$\left|\mathbb{X}\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - \mathbb{X}\left(\frac{i}{2^n}\right)\right| \leq \frac{1}{2^{n\gamma}}, \text{ para } 0 \leq i \leq 2^n - 1 \text{ para } n \geq m.$$

Mas então temos

$$\left|\mathbb{X}\left(\frac{i+1}{2^n}, w\right) - \mathbb{X}\left(\frac{1}{2^n}, w\right)\right| \leq k\frac{1}{2^{n\gamma}},$$

selecionando k grande para todo $n > 0$. Fixe $w \in \Omega$. Seja $t_1, t_2 \in [0,1]$ diáticos, $0 < t_2 - t_1 < 1$. Seja $n \geq 1$ tal que $2^{-n} \leq t < 2^{-(n-1)}$ para $t := t_2 - t_1$. Podemos escrever

$$t_1 = \frac{i}{2^n} - \frac{1}{2^{p_1}} - \ldots - \frac{1}{2^{p_k}} \ (n < p_1 < \ldots < p_k)$$

$$t_2 = \frac{j}{2^n} - \frac{1}{2^{q_1}} - \ldots - \frac{1}{2^{q_l}} \ (n < q_1 < \ldots < q_l)$$

para $t_1 \leq \frac{i}{2^n} \leq \frac{j}{2^n} \leq t_2$. Então $\frac{j-i}{2^n} \leq t < \frac{1}{2^{n-1}}$ e então $j = 1$ ou $i + 1$.
Em ambos os casos,

$$\left|\mathbb{X}\left(\frac{i}{2^n}, w\right) - \mathbb{X}\left(\frac{j}{2^n}, w\right)\right| \leq k\left|\frac{i-j}{2^n}\right|^{\gamma} \leq kt^{\gamma}.$$

Além disto,

$$\left|\mathbb{X}\left(\frac{i}{2^n} - \frac{1}{2^{p_1}} - \ldots - \frac{1}{2^{p_r}}, w\right) - \mathbb{X}\left(\frac{i}{2^n} - \frac{1}{2^{p_1}} - \ldots - \frac{1}{2^{p_{r-1}}}, w\right)\right| \leq k\left|\frac{1}{2^{p_r}}\right|^{\gamma},$$

para $r = 1, \ldots, k$ e consequentemente

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{X}\left(t_1, w\right) - \mathbb{X}\left(\frac{i}{2^n}, w\right)\right| &\leq k\sum_{r=1}^{k}\left|\frac{1}{2^{pr}}\right|^{\gamma} \\ &\leq \frac{k}{2^{n\gamma}}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^{r\gamma}} \\ &= \frac{c}{2^{n\gamma}} \leq ct^{\gamma}.\end{aligned}$$

A mesma dedução é feita para $\left|\mathbb{X}\left(t_2, w\right) - \mathbb{X}\left(\frac{j}{2^n}, w\right)\right| \leq ct^{\gamma}$.
Usando desigualdade triangular, temos que

$$|\mathbb{X}\left(t_1, w\right) - \mathbb{X}\left(t_2, w\right)| \leq c|t_1 - t_2|^{\gamma} \ \forall t_1, t_2 \in [0, 1]$$

e alguma constante $c = c(w)$. Já que $t \to \mathbb{X}(t, w)$ é contínua e como t_1, t_2 são densos,

$$|\mathbb{X}(t) - \mathbb{X}(s)| = \lim_{n\to\infty}|\mathbb{X}(t_n) - \mathbb{X}(s_n)| \leq c\lim_{n\to\infty}|t_n - s_n|^{\gamma}$$

vale $\forall t_1, t_2 \in [0, 1]$. □

Definição 2.2.9. **(i)** *Uma partição P do intervalo $[0, T]$ é uma coleção de pontos de $[0, T]$:*

$$P := \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T\}.$$

(ii) *Definimos a medida de P por $|P| := \max_{0\leq i\leq n-1}\{|t_{i+1} - t_i|\}$.*

(iii) *Para $0 \leq \lambda \leq 1$ e P uma partição, definimos*

$$\tau_k := (1-\lambda)t_k + \lambda t_{k+1}, \ k = 0, \ldots, n-1.$$

(iv) *Para uma partição P e para $0 \leq \lambda \leq 1$ define-se*

$$R = R(P, \lambda) := \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{W}(\tau_k)(\mathbb{W}(t_{k+1} - \mathbb{W}(t_k)).$$

Definição 2.2.10. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dizemos que f é de variação limitada no intervalo $[a, b]$ se*

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|f(x_i) - f(x_{i-1})|\right\} < \infty$$

em que $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ é uma partição de $[a, b]$, $a < b$.

Teorema 2.2.11. **(i)** *Para cada $\frac{1}{2} \leq \gamma < 1$ e quase todo w, $t \longmapsto \mathbb{W}(t, w)$, não é Holder contínua com expoente γ em nenhum lugar.*

(ii) *Em particular, para quase todo w, o caminho amostral $t \longmapsto \mathbb{W}(t,w)$ não é diferenciável em todo ponto e tem variação infinita em cada subintervalo.*

Demonstração. Ver em [7] $\square$

Definição 2.2.12. *Uma sequência de variáveis aleatórias $\{\mathbb{X}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge para uma variável aleatória $\mathbb{X}$ em L^p se $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{|\mathbb{X}_k - \mathbb{X}|^p\} = 0$.*

Lema 2.2.13 (Variação Quadrática)**.** *Seja $[a,b]$ um intervalo em $[0,\infty)$ e suponha $p^n := \{a = t_0 < t_1^n < \ldots < t_{m_n-1}^n < t_{m_n}^n = b\}$ partições de $[a,b]$ com $|p^n| \to 0$ quando $n \to \infty$. Então $\sum_{k=0}^{m_n-1} \left(\mathbb{W}(t_{k+1}^n) - \mathbb{W}(t_k^n)\right)^2 \to b-a$ em $L^2(\Omega)$ quando $n \to \infty$.*

Demonstração. Seja $Q_n := \sum_{k=0}^{m_n-1} \left(\mathbb{W}(t_{k+1}^n) - \mathbb{W}(t_k^n)\right)^2$. Então

$$Q_n - (b-a) = \sum_{k=0}^{m_n-1} \left(\left(\mathbb{W}(t_{k+1}^n) - \mathbb{W}(t_k^n)\right)^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n) \right).$$

Calculemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left((Q_n - (b-a))^2\right) &= \sum_{k=0}^{m_n-1} \sum_{j=0}^{m_n-1} \mathbb{E}\left(\left[(\mathbb{W}(t_{k+1}^n) - \mathbb{W}(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n) \right] \right. \\ &\quad \cdot \left. \left[(\mathbb{W}(t_{j+1}^n) - \mathbb{W}(t_j^n))^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n) \right] \right). \end{aligned}$$

Para $k \neq j$, o termo na soma dupla é

$$\mathbb{E}\left((\mathbb{W}(t_{k+1}^n) - \mathbb{W}(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n) \right) \mathbb{E}\left((\mathbb{W}(t_{j+1}^n) - \mathbb{W}(t_j^n))^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n) \right),$$

de acordo com os incrementos independentes e, portanto, igual a 0, quando $\mathbb{W}(t) - \mathbb{W}(s)$ é $N(0, t-s)$ para todo $t \geq s \geq 0$. Portanto

$$\mathbb{E}((Q_n - (b-a))^2) = \sum_{k=0}^{m_n-1} \mathbb{E}((Y_k^2 - 1)(t_{k+1}^n - t_k^n)^2),$$

em que

$$Y_k = Y_k^n := \frac{\mathbb{W}(t_{k+1}^n) - \mathbb{W}(t_k^n)}{\sqrt{t_{k+1}^n - t_k^n}} \text{ é } N(0,1).$$

Portanto para alguma constante C temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((Q_n - (b-a))^2) &\leq C \sum_{k=0}^{m_n-1} (t_{k+1}^n - t_k^n)^2 \\ &\leq C|p^n|(b-a) \to 0, \text{ quando } n \to \infty. \end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.2.14. *Se* $\mathbb{X}_k \to \mathbb{X}$ *em* $L^2(\Omega)$ *então* $\mathbb{X}_k \to \mathbb{X}$ *em probabilidade.*

Demonstração. Como $\mathbb{X}_k \to \mathbb{X}$ em $L^2(\Omega)$ então $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{|\mathbb{X}_k - \mathbb{X}|^2\} = 0$. Pela desigualdade de Chebyshev, para $\mathbb{X}_k - \mathbb{X}$ variável aleatória e $p = 2$, temos

$$\mathbb{P}(\mathbb{X}_k - \mathbb{X}| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}(|\mathbb{X}_k - \mathbb{X}|^2)$$

mas quando $k \to \infty$, $\mathbb{E}(|\mathbb{X}_k - \mathbb{X}|^2) \to 0$. Logo

$$\mathbb{P}(|\mathbb{X}_k - \mathbb{X}| > \epsilon) \to 0 \text{ quando } k \to \infty.$$

□

Lema 2.2.15. *Se* p^n *denota uma partição de* $[0, T]$ *e* $0 \leq \lambda \leq 1$ *é fixada, defina*

$$R_n := \sum_{k=0}^{m_n-1} \mathbb{W}(\tau_k^n)(\mathbb{W}(t_{k+1})^n - \mathbb{W}(t_k^n)).$$

Então $\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{\mathbb{W}(T)^2}{2} + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)T$*, o limite tomado em* $L^2(\Omega)$.

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} R_n &:= \sum_{k=0}^{m_n-1} \mathbb{W}(\tau_k^n)(\mathbb{W}(t_{k+1})^n - \mathbb{W}(t_k^n)) \\ &= \frac{\mathbb{W}^2(T)}{2} \underbrace{- \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m_n-1} (\mathbb{W}(t_{k+1}^n) - \mathbb{W}(t_k^n))^2}_{=:A} \\ &+ \underbrace{\sum_{k=0}^{m_n-1} (\mathbb{W}(\tau_k^n) - \mathbb{W}(t_k^n))^2}_{=:B} + \underbrace{\sum_{k=0}^{m_n-1} (\mathbb{W}(t_{k+1}^n) - \mathbb{W}(\tau_k^n))(\mathbb{W}(\tau_k^n) - \mathbb{W}(t_k^n))}_{=:D}. \end{aligned}$$

Pelo Lema que vimos acima, temos que

$$A \to -\frac{1}{2}(T - 0) = -\frac{1}{2}T \text{ em } L^2(\Omega) \text{ quando } n \to \infty$$

Além disto, temos que $B \to \lambda T$ em $L^2(\Omega)$ quando $n \to \infty$. De fato,

$$B - \lambda T = B - \left(\sum_{k=0}^{m_n-1} \lambda \left(t_{k+1}^n - t_k^n\right) \right).$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((B-\lambda T)^2\right) &= \sum_{k,j=0}^{m_n-1} \mathbb{E}\left(\left[(\mathbb{W}(\tau_k^n)-\mathbb{W}(t_k^n))^2-\lambda(t_{k+1}^n-t_k^n)\right]\right.\\ &\cdot \quad \left.\left[(\mathbb{W}(\tau_j^n)-\mathbb{W}(t_j^n))^2-\lambda(t_{j+1}^n-t_j^n)\right]\right)\end{aligned}$$

Analisando agora como foi feito na demonstração do Lema 2.2.13, temos que

$$\mathbb{E}\left((B-\lambda T)^2\right) \leq C \sum_{k=0}^{m_n-1} \lambda^2 (t_{k+1}^n - t_k^n)^2 \leq CT|p^n| \to 0.$$

Agora nos resta estudar o comportamento do termo D.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\left[\sum_{k=0}^{m_n-1}(\mathbb{W}(t_{k+1}^n)-\mathbb{W}(\tau_k^n))(\mathbb{W}(\tau_k^n)-\mathbb{W}(t_k^n))\right]^2\right)\\ = & \sum_{k=0}^{m_n-1}\mathbb{E}([\mathbb{W}(t_{k+1}^n)-\mathbb{W}(\tau_k^n)]^2)\mathbb{E}([\mathbb{W}(\tau_k^n)-\mathbb{W}(t_k^n)]^2)\\ \underbrace{=}_{\text{incrementos independentes}} & \sum_{k=0}^{m_n-1}(1-\lambda)(t_{k+1}^n-t_k^n)\lambda(t_{k+1}^n-t_k^n)\\ \leq & \lambda(1-\lambda)T|p^n| \to 0.\end{aligned}$$

Portanto

$$D \to 0 \text{ em } L^2(\Omega) \text{ quando } n \to \infty.$$

Combinando os limites das expressões $A,\ B,\ D$, concluímos o lema. □

2.3 Integral Estocástica

Para definir a integral em relação ao movimento Browniano é natural começarmos com processos mais simples e então estender a definição para processos mais gerais por procedimentos de aproximação.

Definição 2.3.1. *Um processo estocástico $g : [a,b]\times\Omega \to \mathbb{R}$ é dito simples de for constante por partes na variável t, isto é, se existir uma partição*

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

do intervalo $[a,b]$ tal que

$$g(t) = g(t_i) \text{ se } t_i \leq t < t_{i+1},\ 0 \leq i \leq n-1$$

Para um processo simples g definido em $[a, b]$, tendo a forma

$$g(s) = \sum_{k \geq 0} g(t_k) \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t), \tag{2.2}$$

em que $\mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t)$ é a função indicadora do intervalo $[t_k, t_{k+1})$, é natural definirmos

$$\int_a^b g(t)\, d\mathbb{W}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} g(t_k)(\mathbb{W}(t_i + 1) - \mathbb{W}(t_i)). \tag{2.3}$$

O próximo exemplo indica uma dificuldade que surge quando tentamos estender esta definição para processos mais gerais procedendo por aproximação conforme a integral de Riemann-Stieltjes. Está dificuldade está relacionada com o fato das trajetórias do movimento Browniano terem variação ilimitada.

Exemplo 2.3.2. *Dado um movimento Browniano $\{\mathbb{W}(t)\}$ e um intervalo $[0, b]$ consideramos, para cada $n = 1, 2, \ldots$, os seguintes processos:*

$$g^n(s) = \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{W}_{\frac{k}{2^n}} \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})}(s) + \mathbb{W}_{\frac{m}{2^n}} \mathbb{1}_{[\frac{m}{2^n}, b)}(s) \text{ se } \frac{m}{2^n} \leq \frac{m+1}{2^n};$$

$$h^n(s) = \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{W}_{\frac{k+1}{2^n}} \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})}(s) + \mathbb{W}_b \mathbb{1}_{[\frac{m}{2^n}, b)}(s) \text{ se } \frac{m}{2^n} \leq \frac{m+1}{2^n}.$$

Então, de acordo com (2.4), temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^b g^n(s)\, d\mathbb{W}(s)\right] &= \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{E}\left[\mathbb{W}_{\frac{k}{2^n}} \left(\mathbb{W}_{\frac{k+1}{2^n}} - \mathbb{W}_{\frac{k}{2^n}}\right)\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{W}_{\frac{m}{2^n}} \left(\mathbb{W}_b - \mathbb{W}_{\frac{m}{2^n}}\right)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{E}\left(\mathbb{W}_{\frac{k}{2^n}}\right) \mathbb{E}\left(\mathbb{W}_{\frac{k+1}{2^n}} - \mathbb{W}_{\frac{k}{2^n}}\right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{W}_{\frac{m}{2^n}}\right) \mathbb{E}\left(\mathbb{W}_b - \mathbb{W}_{\frac{m}{2^n}}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

pela independência dos incrementos do movimento Browniano, os quais têm média zero. Por outro lado

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^b h^n(s)\, d\mathbb{W}(s)\right] &= \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{E}\left[\mathbb{W}_{\frac{k+1}{2^n}} \left(\mathbb{W}_{\frac{k+1}{2^n}} - \mathbb{W}_{\frac{k}{2^n}}\right)\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{W}_b \left(\mathbb{W}_b - \mathbb{W}_{\frac{m}{2^n}}\right)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \left[\mathbb{E}\left(\mathbb{W}^2_{\frac{k+1}{2^n}}\right) - \mathbb{E}\left(\mathbb{W}_{\frac{k+1}{2^n}} \mathbb{W}_{\frac{k}{2^n}}\right)\right] + \mathbb{E}\left(\mathbb{W}_b^2\right) - \mathbb{E}\left(\mathbb{W}_b \mathbb{W}_{\frac{m}{2^n}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{k+1}{2^n} - \frac{i}{2^n}\right] + b - \frac{m}{2^n} = b,
\end{aligned}$$

em que usamos a proposição 2.2.6 e notamos que o somatório é telescópico.

Percebe-se neste exemplo que, embora os processos g^n e h^n aparentem ambos serem boas aproximações para o processo $(\mathbb{W}(s))$, suas integrais de acordo com (2.3) não são próximas entre si, não importanto quão grande n seja escolhido. É razoável, conforme fizemos no exemplo acima, aproximar um dado processo $(\mathbb{X}(t))$ considerando-se processos simples $\sum_{j=0}^{m_n-1} \mathbb{X}(\xi_j^n)\mathbb{1}_{[t_j^n,t_{j+1}^n)}(t)$, em que $P_n = \{a = t_0^n < \ldots < t_{m_n}^n = b\}$ é uma partição de $[a,b]$ e ξ_j^n é um ponto do intervalo $[t_j^n, t_{j+1}^n]$. A partir disso, esperaríamos definir $\int_a^b \mathbb{X}(t)\, d\mathbb{W}(t)$ como o limite das integrais destes processos simples quando a norma da partição tende a zero. Entretanto, o exemplo acima mostra que este limite vai depender dos pontos ξ_j^n's escolhidos. A integral estocástica de Itô corresponderá, como veremos a seguir, à escolha $\xi_j^n = t_j^n$, o extremo esquerdo do intervalo $[t_j^n, t_{j+1}^n]$.

Fixemos agora um movimento browniano $\mathbb{W}(\cdot)$ e uma filtração $\mathbf{F}$. Seja $L^2_{\mathbf{F}}(0,\infty;\mathbb{R})$ o espaço de Hilbert de todos processos $\mathbb{R}$-avaliados (também definidos em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbf{F})$) $g(\cdot) = \{g(s), s \geq 0\}$ tais que satisfazem os seguintes:

(i) $g(\cdot)$ é mensurável; isto é, a aplicação $(s,w) \mapsto g(s,w)$ é $\mathcal{B}([0,\infty)) \times \mathcal{F}$, em que $\mathcal{B}([0,\infty))$ é a σ-álgebra de Borel de subconjuntos do intervalo $[0,\infty)$.

(ii) $g(\cdot)$ é $\mathbf{F}$-adaptado.

(iii) $g(\cdot)$ satisfaz a seguinte propriedade global de integrabilidade:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty |g(s)|^2\, ds\right] < \infty.$$

Vamos considerar também a extensão do espaço $L^{2,loc}_{\mathbf{F}}(0,\infty;\mathbb{R})$ de todos os processos $g(\cdot) = \{g(s), s \geq 0\}$ tais que as condições (i), (ii) e (iii') são satisfeitas para todo $0 \leq a < b < \infty$.

(iii') $g(\cdot)$ satisfaz a seguinte propriedade local de integrabilidade:

$$\mathbb{E}\left[\int_a^b |g(s)|^2\, ds\right] < \infty, \ \mathbb{P}\text{-quase sempre}, \forall 0 \leq a < b < \infty.$$

Nesta seção nós iremos usar a idéia original de Itô, em seu artigo [9], para definir a integral estocástica.

Primeiro passo, $\int_a^b g(s)\, d\mathbb{W}(s)$ é definido como

$$\int_a^b g(s)\, d\mathbb{W}(s) = \sum_{k\geq 0} g_k(w)[\mathbb{W}(t_{k+1}, w) - \mathbb{W}(t_k, w)] \tag{2.4}$$

para toda $g(\cdot) \in L^{2,loc}_{\mathbf{F}}(0,\infty;\mathbb{R})$ elementar que tem a seguinte forma:

$$g(s) = \sum_{k\geq 0} g_k(w)\mathbb{1}_{[t_k,t_{k+1})}(s), \tag{2.5}$$

em que

$$t_k = t_k^{(n)} = \begin{cases} k2^{-n} & \text{se} \quad a \leq k2^{-n} \leq b \\ a & \text{se} \quad k2^{-n} < a \\ b & \text{se} \quad k2^{-n} > b, \end{cases}$$

g_k são variáveis aleatórias que são $\mathcal{F}(t_k)$-mensuráveis para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$, e $\mathbb{1}_{[t_k,t_{k+1})}$ é a função indicadora no intervalo $[t_k, t_{k+1})$.

Lema 2.3.3. *Se $g(\cdot) \in L^{2,loc}_{\boldsymbol{F}}(0,\infty;\mathbb{R})$ é limitado e elementar então $\mathbb{E}\left[\int\limits_a^b g(s)\,d\mathbb{W}(s)\right] = 0$ e*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int\limits_a^b g(s)\,d\mathbb{W}(s)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int\limits_a^b g^2(s)\,ds\right]. \tag{2.6}$$

A igualdade (2.6) é chamada de Isometria de Itô.

Demonstração. Para cada $0 \leq k \leq m-1$ temos $\int g\,d\mathbb{W} = \sum_{k=0}^{m-1} g_k(w)\,[\mathbb{W}(t_{k+1}) - \mathbb{W}(t_k)]$.

Logo

$$\mathbb{E}\left[g_k(\mathbb{W}(t_{k+1}) - \mathbb{W}(t_k))\right] = \mathbb{E}(g_k)\mathbb{E}\left[\mathbb{W}(t_{k+1}) - \mathbb{W}(t_k)\right] = 0,$$

pela independência das σ's álgebras.

Para provar a Isometria de Itô, temos que $\int_a^b g\,d\mathbb{W} = \sum_{k\geq 0}^{m-1} g_k \left[\underbrace{\mathbb{W}(t_{k+1}) - \mathbb{W}(t_k)}_{D_k}.\right]$, em que $\mathbb{E}(D_k) = 0$ e diferentes D_k's são independentes.

Logo

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b g\,d\mathbb{W}\right)^2 &= \left(\sum_{k\geq 0}^{m-1} g_k D_k\right)^2 \\ &= \sum_{k\geq 0}^{m-1} g_k^2 D_k^2 + 2\sum_{k\geq 0}^{m-1} g_j g_k D_j D_k. \end{aligned}$$

Mas se $j < k$, então D_k é independente de $g_k g_j D_j$. Daí,

$$\mathbb{E}(g_k g_j D_j D_k) = \mathbb{E}(g_k g_j D_j).\mathbb{E}(D_k).$$

Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_a^b g(s)\, d\mathbb{W}(s)\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left(\sum_{k\geq 0}^{m-1} g_k^2 D_k^2\right) \\
&= \sum_{k\geq 0}^{m-1} \mathbb{E}(g_k^2)\mathbb{E}(D_k^2) \\
&= \sum_{k\geq 0}^{m-1} \mathbb{E}(g_k^2)\mathbb{E}\left[(\mathbb{W}(t_{k+1}) - \mathbb{W}(t_k))^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k\geq 0}^{m-1} g_k^2(t_{k+1} - t_k\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k\geq 0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} g_s^2\, ds\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_a^b g_s^2\, ds\right)
\end{aligned}
$$

□

Segundo passo, precisamos mostrar um lema de aproximação a fim de sermos capazes de definir integral estocástica para processos estocásticos em geral, ou seja, $g(\cdot) \in L_{\mathbf{F}}^{2,loc}(0,\infty;\mathbb{R})$.

Lema 2.3.4. *Suponha* $f(\cdot) \in L_{\boldsymbol{F}}^{2,loc}(0,\infty;\mathbb{R})$. *Então existe uma sequência de processos elementares limitados* $\Phi_k(\cdot) \in L_{\boldsymbol{F}}^{2,loc}(0,\infty;\mathbb{R})$ *tais que*

$$
\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left(\int\limits_a^b (f(s) - \Phi_k(s))^2\, ds\right) = 0. \tag{2.7}
$$

Demonstração. Ver em [10] □

Terceiro passo, usando o que vimos nos passos anteriores, vamos definir a integral estocástica. Aplicando o lema de aproximação temos uma sequência de processos estocásticos elementares Φ_k tais que a equação (2.7) acontece. Para cada k, $\int\limits_a^b(\Phi_k)$ é definido pelo primeiro passo. Pelo lema 2.3.3 temos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left|\int_a^b \Phi_k(t)\, d\mathbb{W}(t) - \int_a^b \Phi_m(t)\, d\mathbb{W}(t)\right|^2\right) &= \mathbb{E}\left(\int_a^b |\Phi_k(t) - \Phi_m(t)|^2\, dt\right) \\
&\to 0, \text{ quando } k, m \to \infty.
\end{aligned}
$$

Portanto a sequência $\int_a^b \Phi_k(t)\, d\mathbb{W}(t)$ é de Cauchy em $L^2(\Omega)$. Além disso, o limite não depende da sequência escolhida.

Definição 2.3.5 (Integral de Itô)**.** *Seja* $f(\cdot) \in L^{2,loc}_{\boldsymbol{F}}(0,\infty;\mathbb{R})$*. Então a integral de Itô,* $\int\limits_a^b f(s)\,d\mathbb{W}(s)$*, de* $f(\cdot)$ *com respeito ao movimento browniano* $\mathbb{W}(\cdot)$ *de* a *até* b *é definida por*

$$\int\limits_a^b f(s)\,d\mathbb{W}(s) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_a^b \Phi_k(s)\,d\mathbb{W}(s), \text{ em } L^2(\Omega). \tag{2.8}$$

em que $\{\Phi_k(\cdot)\} \subset L^{2,loc}_{\boldsymbol{F}}(0,\infty;\mathbb{R})$ *é a sequência de processos elementares limitados tais que*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left(\int\limits_a^b (f(s)-\Phi_k(s))^2\,ds\right) = 0, \tag{2.9}$$

e $\int\limits_a^b \Phi_k(s)\,d\mathbb{W}(s)$ *é definido em (2.4) para cada* k*.*

Exemplo 2.3.6. *Um exemplo de cálculo de integral estocástica do movimento Browniano é o lema 2.2.15. Basta considerar que* $\lambda = 0$ *e temos*

$$\int_0^T \mathbb{W}\,d\mathbb{W} = \frac{\mathbb{W}^2(T)}{2} - \frac{T}{2}.$$

Teorema 2.3.7. *Se* $g \in L^{2,loc}_{\boldsymbol{F}}(0,\infty;\mathbb{R})$*, então o processo estocástico*

$$\mathbb{X}(t) = \int_0^t g(s)\,d\mathbb{W}(s),\ 0 \le t < \infty,$$

é um martingale com relação a filtração $\boldsymbol{F}$*.*

Demonstração. Ver em [10] $\square$

Teorema 2.3.8. *Seja* $f(\cdot)$*,* $g(\cdot) \in L^{2,loc}_{\boldsymbol{F}}(0,\infty;\mathbb{R})$ *e seja* $0 \le a \le c \le b$*.Então*

(i) $\int_a^b f(s)\,d\mathbb{W}(s) = \int_a^c f(s)\,d\mathbb{W}(s) + \int_c^b f(s)\,d\mathbb{W}(s)$*,* $\mathbb{P}$*-quase sempre.*

(ii) $\int_a^b (\alpha f(s) + \beta g(s))\ d\mathbb{W}(s) = \alpha \int_a^b f(s)\,d\mathbb{W}(s) + \beta \int_a^b g(s)\,d\mathbb{W}(s),\ \forall\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$

(iii) $\mathbb{E}\left[\int_a^b f(s)\,d\mathbb{W}(s)\right] = 0.$

Demonstração. Ver em [11]. $\square$

Teorema 2.3.9 (Desigualdades de Burkholder-Davis-Gundy)**.** *Seja* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},\boldsymbol{F},\mathbb{W}(\cdot))$ *um movimento Browniano uni-dimensional e seja* $g(\cdot) \in L^{2,loc}_{\boldsymbol{F}}(0,\infty;\mathbb{R})$*. Então, para cada*

$p > 0$, existe uma constante $K(p) > 0$ tal que para qualquer $\boldsymbol{F}$-tempo de parada, τ,

$$\frac{1}{K(p)}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\tau |g(s)|^2\,ds\right)^p\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq\tau}\left|\int_0^\tau g(s)\,d\mathbb{W}(s)\right|^{2p}\right] \tag{2.10}$$

$$\leq K(p)\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\tau |g(s)|^2\,ds\right)^p\right]. \tag{2.11}$$

Corolário 2.3.10 (Desigualdade Maximal de Doob). *Seja $g(\cdot) \in L^{2,loc}_{\boldsymbol{F}}(0,\infty;\mathbb{R})$. Então, para cada $T > 0$, existe uma constante K tal que*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,T]}\left|\int_0^s g(t)\,d\mathbb{W}(t)\right|^2\right] \leq K\int_0^T \mathbb{E}[|g(s)|^2]\,ds. \tag{2.12}$$

Capítulo 3

Equação Diferencial Estocástica Hereditária com Memória Ilimitada

O objetivo deste capítulo é demonstrar a existência e unicidade de solução da Equação Diferencial Estocástica Hereditária com Memória Ilimitada.

3.1 Preliminares

Vamos trabalhar com espaço de Hilbert com peso ρ, $\mathbf{M} \equiv \mathbb{R} \times L^2_\rho((-\infty, 0]; \mathbb{R})$ equipado com o produto interno

$$\langle (x, \phi), (y, \varphi) \rangle_\rho = xy + \langle \phi, \varphi \rangle_2 = xy + \int_{-\infty}^{0} \rho(\theta)\phi(\theta)\varphi(\theta)\, d\theta,$$

$\forall (x, \phi), (y, \varphi) \in \mathbb{R} \times L^2_\rho((-\infty, 0]; \mathbb{R})$, e a norma Hilbertiana

$$||(x, \phi)||_\rho = \langle (x, \phi), (y, \varphi) \rangle_\rho^{\frac{1}{2}},$$

onde L^2_ρ é o espaço de Hilbert das funções mensuráveis $\phi : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ tais que $\int_{-\infty}^{0} |\phi(\theta)|^2 \rho(\theta)\, d\theta < \infty$ e $\rho : (-\infty, 0] \to [0, \infty)$ é uma função que satisfaz as seguintes suposições:

Suposição 3.1.1. *A função ρ satisfaz as seguintes condições:*

1. *ρ é somável em $(-\infty, 0]$, isto é,*

$$0 < \int_{-\infty}^{0} \rho(\theta)\, d(\theta) < \infty \tag{3.1}$$

2. Para todo $t \leq 0$ tem um

$$\overline{K}(t) = ess \sup_{\theta \in (-\infty,0]} \frac{\rho(t+\theta)}{\rho(\theta)} \leq \overline{K} < \infty, \tag{3.2}$$

$$\underline{K}(t) = ess \sup_{\theta \in (-\infty,0]} \frac{\rho(\theta)}{\rho(t+\theta)} < \infty. \tag{3.3}$$

Lema 3.1.2. *Para cada $0 < T < \infty$, a função memória $m : [0,T] \times L^2_\rho(-\infty, T; \mathbb{R}) \to \boldsymbol{M}$ definida por $m(t,\psi) = (\psi(t), \psi_t)$, $(t,\psi) \in [0,T] \times L^2_\rho(-\infty, T; \mathbb{R})$ é juntamente contínua.*

Demonstração. Para $0 \leq T \leq \infty$, nós vamos extender a função $\rho : (-\infty] \to [0,\infty)$ a um domínio maior $(-\infty, T]$ colocando $\rho(t) = \rho(0)$ $\forall t \in [0,T]$. Seja $C_\rho((-\infty,T],\mathbb{R})$ ($0 \leq T \leq \infty$) o espaço das funções contínuas $\phi : (-\infty, T] \to \mathbb{R}$ tais que $\lim_{\theta \to -\infty} \sqrt{\rho(\theta)}\phi(\theta) = 0$. Como o espaço $C_\rho((\infty,T],\mathbb{R})$ é denso, pode ser continuamente encaixado em $L^2_\rho((-\infty,0];\mathbb{R})$. Para mostrarmos que $m(t,\psi]) = (\psi(t),\psi_t)$, $(t,\psi) \in [0,T] \times L^2_\rho(-\infty,T;\mathbb{R})$ é juntamente contínua, tomemos $t, s \in [0,T]$ e $\phi^{(i)} \in L^2_\rho(-r,T;\mathbb{R}^n)$ para $i = 1,2,\ldots$. Para qualquer $\epsilon > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que se $|t-s| < \delta$ e $||\psi^{(1)} - \psi^{(2)}||_{\rho,2} < \delta$ então $|\psi^{(1)}(t) - \psi^{(2)}(s)| + ||\psi^{(1)}_t - \psi^{(2)}_s||_{\rho,2} < \epsilon$.

Seja $\phi^{(i)} \in C_\rho((-\infty,T];\mathbb{R})$ para $i = 1,2,\ldots$ tal que

$$||\psi^{(i)} - \phi^{(i)}||_{\rho,2} < \epsilon_0, \ i = 1,2,\ldots,$$

em que $\epsilon_1 > \sqrt{\bar{K}}\epsilon_0 > 0$ pode ser abitrariamente pequeno. Assim, para $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
||\psi^{(i)}_t - \psi^{(i)}_s||_{\rho,2} &= \left[\int_{-\infty}^{0} \rho(\theta)\left|\psi^{(i)}(t+\theta) - \phi^{(i)}(t+\theta)\right|^2 d\theta\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\int_{-\infty}^{0} \frac{\rho(\theta)}{\rho(t+\theta)}\rho(t+\theta)\left|\psi^{(i)}(t+\theta) - \phi^{(i)}(t+\theta)\right|^2 d\theta\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\bar{K}}\left[\int_{-\infty}^{t} \rho(\theta)\left|\psi^{(i)}(\theta) - \phi^{(i)}(\theta)\right|^2 d\theta\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{\bar{K}}\left[\int_{-\infty}^{T} \rho(s)\left|\psi^{(i)}(s) - \phi^{(i)}(s)\right|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\bar{K}}||\psi^{(i)} - \phi^{(i)}||_{\rho,2} \\
&< \sqrt{\bar{K}}\epsilon_0 \\
&< \epsilon_1.
\end{aligned}$$

Tomando $\delta < \epsilon_1$,

$$\begin{aligned} ||\phi^{(2)} - \phi^{(1)}||_{\rho,2} &\leq ||\phi^{(2)} - \psi^{(2)}||_{\rho,2} + ||\psi^{(2)} - \psi^{(1)}||_{\rho,2} + ||\psi^{(1)} - \phi^{(1)}||_{\rho,2} \\ &< 3\epsilon_1. \end{aligned}$$

Já que $\sqrt{\rho}\phi^{(i)}$, $i = 1, 2$, são uniformemente contínuas em $(-\infty, T]$, podemos escolher $\delta_0 > 0$ tal que, se $t, s \in (-\infty, T]$ e $|t - s| < \delta_0$, então $|\sqrt{\rho(t)}\phi^{(i)}(t) - \sqrt{\rho(s)}\phi^{(i)}(s)| < \epsilon_1$. Suponha $t, s \in [0, T]$ tais que $|t - s| < \delta_0$. Então

$$||\phi_t^{(i)} - \phi_s^{(i)}||_{\rho,2} = \left[\int_{-\infty}^{0} \rho(\theta)|\phi^{(i)}(t+\theta) - \phi^{(i)}(s+\theta)|^2 \, d\theta\right]^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon_1.$$

Suponha $|t - s| < \delta < \min\{\delta_0, \epsilon_1\}$. Então as desigualdades acima implicam que

$$\begin{aligned} ||\phi_t^{(2)} - \phi_s^{(1)}||_{\rho,2} &\leq ||\phi_t^{(2)} - \phi_t^{(1)}||_{\rho,2} + ||\phi_t^{(1)} - \psi_s^{(1)}||_{\rho,2} \\ &\leq ||\phi^{(2)} - \phi^{(1)}||_{\rho,2} + ||\sqrt{\rho}\phi_t^{(1)} - \sqrt{\rho}\phi_s^{(1)}|| \\ &\leq 3\epsilon_1 + \epsilon_1 = 4\epsilon_1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} ||\psi_t^{(2)} - \psi_s^{(1)}||_{\rho,2} &\leq ||\psi_t^{(2)} - \phi_t^{(2)}||_{\rho,2} + ||\phi_t^{(2)} - \phi_s^{(1)}||_{\rho,2} + ||\phi_s^{(1)} - \psi_s^{(1)}||_{\rho,2} \\ &\leq \epsilon_1 + 4\epsilon_1 + \epsilon_1 = 6\epsilon_1. \end{aligned}$$

Tomando $\epsilon_1 < \frac{\epsilon}{6}$, o resultado segue. A análise acima também implica que $|\psi^{(1)}(t) - \psi^{(2)}(t)|^2$ também pode ser arbitrariamente pequeno. Isso prova o lema. □

Corolário 3.1.3. *A aplicação memória estocástica*

$$m^* : [0, T] \times L^2(\Omega, L^2_\rho((-\infty, T], \mathbb{R})) \to L^2(\Omega, \mathbb{R} \times L^2_\rho((-\infty, 0], \mathbb{R}))$$

definida por $(t, \psi(\cdot)) \longmapsto (\psi(t), \psi_t)$ *é aplicação contínua.*

Demonstração. Ver em [4] □

NOTAÇÃO:

$\Xi = \mathbf{M} \equiv \mathbb{R} \times L^2_\rho((-\infty, 0], \mathbb{R})$. Por exemplo, $L^2(\Omega, \mathbf{M})$ é o espaço de variáveis aleatórias (x, Υ) $\mathbf{M}$-avaliadas definidas no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tais que

$$\begin{aligned} ||(x, \Upsilon)||_{L^2(\Omega,\mathbf{M})} &\equiv \mathbb{E}\left[|x|^2 + ||\Upsilon||_\rho^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[|x|^2 + \int_{-\infty}^{0} |\Upsilon(\theta)|^2 \rho(\theta) \, d\theta\right] < \infty. \end{aligned}$$

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbf{F}, \mathbb{W}(\cdot))$ o movimento Browniano padrão uni-dimensional. Queremos estabelecer existência e unicidade de soluções fortes para o processo $S(\cdot) = \{S(s),\ s \in (-\infty, \infty)\}$ do seguinte tipo da equação diferencial hereditária estocástica uni-dimensional com memória infinita mas desaparecendo ($r = \infty$):

$$\frac{dS(s)}{S(s)} = f(S_s)ds + g(S_s)d\mathbb{W}(s),\ s \in [0, \infty), \tag{3.4}$$

com estado inicial $(S(0), S_0) = (\psi(0), \psi) \in L^2(\Omega, \mathbf{M})$.

Suposição 3.1.4 (Continuidade Lipschitz)**.** *Existe uma constante* $k_{lip} > 0$ *tal que*

$$\begin{aligned} & |\phi(0)f(\phi) - \psi(0)f(\psi)| + |\phi(0)g(\phi) - \psi(0)g(\psi)| \\ \leq\ & k_{lip}\left(||\phi(0),\phi) - (\psi(0),\psi)||_{\boldsymbol{M}}\right),\ \forall(\phi(0),\phi),\ (\psi(0),\psi) \in \boldsymbol{M}. \end{aligned}$$

Suposição 3.1.5 (Crescimento Linear)**.** *Existe uma constante* K_G *tal que*

$$|\psi(0)f(\psi)| + |\psi(0)g(\psi)| \leq K_G(1 + ||\psi(0),\psi||_{\boldsymbol{M}}),\ \forall(\psi(0),\psi) \in \boldsymbol{M}.$$

3.2 Existência e Unicidade de Soluções

Definição 3.2.1. *Seja* $(\phi(0), \phi) \in \boldsymbol{M} \equiv \mathbb{R} \times L^2_\rho((-\infty, 0]; \mathbb{R})$. *Um processo uni-dimensional* $S(\cdot) = \{S(s), s \in (-\infty, \infty)\}$ *é dito ser uma solução forte de (3.4) no intervalo infinito* $(-\infty, \infty)$ *e através da condição inicial* $(\phi(0), \phi) \in \boldsymbol{M}$ *se satisfaz as seguintes condições:*

1. $S(\theta) = \phi(\theta),\ \forall\theta \in (-\infty, 0]$
2. $S(\cdot) = \{S(s), s \in [0, \infty)\}$ *é* $\boldsymbol{F}$*-adaptado em* $[0, \infty)$.
3. $\mathbb{P}\left[\int_0^\infty (|S(t)f(s_t)| + S^2(t)g^2(s_t))\ dt < \infty\right] = 1$.
4. *Para cada* $s \in [0, \infty)$, *o processo* $\{S(s), s \in [0, \infty)\}$ *satisfaz a seguinte equação integral estocática* $\mathbb{P}$*-quase sempre*

$$S(s) = \phi(0) + \int_0^s S(t)f(S_t)\, dt + \int_0^s S(t)g(S_t)\, d\mathbb{W}(t) \tag{3.5}$$

Definição 3.2.2. *Uma solução forte* $\{S(s), s \in (-\infty, \infty)\}$ *da equação (3.4) é dita única se* $\{\tilde{S}(s), s \in (-\infty, \infty)\}$ *é também uma solução forte de (3.4) no intervalo* $(-\infty, \infty)$ *e, através da mesma condição inicial* $(\phi(0), \phi) \in \boldsymbol{M}$, *tem-se*

$$\mathbb{P}\left\{S(s) = \tilde{S}(s)\ \forall s \in [0, \infty)\right\} = 1.$$

O próximo lema é necessário para estabelecer a existência e unicidade do processo solução forte $\{S(s), s \in (-\infty, \infty)\}$ de (3.4).

Lema 3.2.3. *Assuma que* $f, g : L^2_\rho((-\infty, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *satisfazem a condição lipschitz. Seja* $x(\cdot) = \{x(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ *e* $y(\cdot) = \{y(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ *dois processos* $\boldsymbol{F}$*-adaptados que são contínuos para* $t \geq 0$ *e tais que*

$$(x(0), x_0),\ (y(0), y_0) \in \boldsymbol{M} \textit{ quase sempre.}$$

Denote

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(s, x(\cdot)) &= \int_0^s x(t) f(x_t)\, dt + \int_0^s x(t) g(x_t)\, d\mathbb{W}(t) \\ &\equiv R(s, x(\cdot)) + Q(s, x(\cdot)). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(s, y(\cdot)) &= \int_0^s y(t) f(y_t)\, dt + \int_0^s y(t) g(y_t)\, d\mathbb{W}(t) \\ &\equiv R(s, y(\cdot)) + Q(s, y(\cdot)). \end{aligned}$$

Seja $\delta(\cdot) = x(\cdot) + y(\cdot)$*. Então a seguinte desigualdade acontece para* $T > 0$*:*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} |\mathcal{R}(s, x(\cdot)) - \mathcal{R}(s, y(\cdot))|^2\right] \leq A\mathbb{E}\left[||(\delta(0), \delta_0)||^2_\rho\right] + B\mathbb{E}\left[\int_0^T |\delta(s)|^2\, ds\right], \tag{3.7}$$

em que A *e* B *são constantes positivas que dependem apenas de* L*,* T *e* $||\rho||_1$*.*

Demonstração. Pelo lema 3.1.2 temos que $(x(s), x_s), (y(s), y_s) \in \mathbf{M}$ para cada $s \in [0, T]$. Os processos $\mathbf{M}$-avaliados $\{(x(s), x_s), s \geq 0\}$ e $\{(y(s), y_s), s \geq 0\}$ são contínuos e progressivamente mensuráveis com respeito a $\mathcal{G}(0) \vee \mathcal{F}(s)$. Usando o teorema 2.3.9 temos:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\mathcal{R}(t, x(\cdot)) - \mathcal{R}(t, y(\cdot))|^2\right] \\ = \ & \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |R(t, x(\cdot)) + Q(t, x(\cdot)) - R(t, y(\cdot)) - Q(t, y(\cdot))|^2\right] \\ \leq \ & k_2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |R(t, x(\cdot)) - R(t, y(\cdot))|^2 + \sup_{0\leq t\leq T} |Q(t, x(\cdot)) - Q(t, y(\cdot))|^2\right] \\ \leq \ & k_2\mathbb{E}\left[T\int_0^T |x(s)f(x_s) - y(s)f(y_s)|^2\, ds + c\int_0^T |x(s)g(x_s) - y(s)g(y_s)|^2\, ds\right] \\ \leq \ & k_2\mathbb{E}\left[TL\int_0^T ||(x(s), x_s) - (y(s), y_s)||^2_\rho\, ds\right] + k_2cL\mathbb{E}\left[\int_0^T ||(x(s), x_s) - (y(s), y_s)||^2_\rho\, ds\right] \\ \leq \ & k_2L(T + c)\mathbb{E}\left[\int_0^T ||(\delta(s), \delta_s)||^2_\rho\, ds\right]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Agora,

$$||(\delta(s),\delta_s)||_\rho^2 = |\delta(s)|^2 + \int_{-\infty}^0 |\delta(s+\theta)|^2 \rho(\theta)\, d\theta$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 |\delta(s+\theta)|^2\rho(\theta)\,d\theta &= \int_{-\infty}^{-s} |\delta(s+\theta)|^2\rho(\theta)\,d\theta + \int_{-s}^0 |\delta(s+\theta)|^2\rho(\theta)\,d\theta \\
&\leq \int_{-\infty}^{-s} |\delta(s+\theta)|^2 \frac{\rho(\theta)}{\rho(s+\theta)}\,d\theta + \int_0^s |\delta(\nu)|^2\rho(\nu-s)\,d\nu \\
&\leq \bar{K}\int_{-\infty}^{-s} |\delta(s+\theta)|^2\rho(s+\theta)\,d\theta + \int_0^s |\delta(\nu)|^2\rho(\nu-s)\,d\nu \\
&= \bar{K}\int_{-\infty}^{0} |\delta(\theta)|^2\rho(\theta)\,d\theta + \int_0^s |\delta(\nu)|^2\rho(\nu-s)\,d\nu
\end{aligned}$$

em que $\bar{K}$ é a constante da suposição 3.1.1.

Portanto

$$||(\delta(s),\delta_s)||_\rho^2 \leq |\delta(s)|^2 + \bar{K}\int_{-\infty}^0 |\delta(\theta)|^2\rho(\theta)\,d\theta + \int_0^s |\delta(\nu)|^2\rho(\nu-s)\,d\nu.$$

Substituindo a desigualdade acima em (3.8) temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\mathcal{R}(t,x(\cdot)) - \mathcal{R}(t,y(\cdot))|^2\right] &\leq k_2L(T+c)\mathbb{E}\left[\int_0^T ||(\delta(s),\delta_s||_\rho^2\,ds\right] \\
&\leq k_2L(T+c)\mathbb{E}\left[\int_0^T |\delta(s)|^2\,ds\right] \\
&+ k_2L(T+c)\mathbb{E}\left[\bar{K}\int_0^T \left(\int_{-\infty}^0 |\delta(\theta)|^2\rho(\theta)\,d\theta\right)\,ds\right] \\
&+ k_2L(T+c)\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\int_0^s |\delta(\nu)|^2\rho(\nu-s)\,d\nu\right)\,ds\right]
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left(\int_0^s |\delta(\nu)|^2\rho(\nu-s)\,d\nu\right)\,ds &\leq \left(\int_{-\infty}^0 \rho(\theta)\,d\theta\right)\left(\int_0^T |\delta(s)|^2\,ds\right) \\
&= ||\rho||_1\left(\int_0^T |\delta(s)|^2\,ds\right)
\end{aligned}$$

Segue então que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|\mathcal{R}(t,x(\cdot))-\mathcal{R}(t,y(\cdot))|^2\right] &\le k_2L(T+c)\mathbb{E}\left[\int_0^T|\delta(s)|^2\,ds\right]\\
&+ \bar{K}\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_{-\infty}^0|\delta(\theta)|^2\rho(\theta)\,d\theta\right)ds\right]\\
&+ ||\rho||_1\mathbb{E}\left[\int_0^T|\delta(s)|^2\,ds\right]\\
&\le L(T+c)\left[\mathbb{E}\left[\int_0^T|\delta(s)|^2\,ds\right](1+||\rho||_1)\right]\\
&+ L(T+c)\bar{K}T\mathbb{E}\left[||\delta(0),\delta_0)||_\rho^2\right]
\end{aligned}
$$

Chamemos $A=k_2L\bar{K}T(T+c)$ e $B=k_2L(T+c)(1+||\rho||_1)$ e isto prova o lema. □

Corolário 3.2.4. *Sob as condições do lema 3.2.3, as seguintes desigualdades são satisfeitas para cada $T>0$:*

$$
\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,T]}|\mathcal{R}(s,x(\cdot))-\mathcal{R}(s,y(\cdot))|^2\right]\le A\mathbb{E}\left[||(\delta(0),\delta_0)||_\rho^2\right]+M(T)\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,T]}|\delta(s)|^2\right],\quad(3.9)
$$

em que A é o mesmo acima, $M(T)$ depende apenas de T e B, e

$$M(T)\to 0 \text{ quando } T\to 0.$$

Demonstração. Inserindo $|\delta(t)|\le\sup_{0\le t\le T}\delta(t)$ com $0\le t\le T$ em (3.7), obtém-se (3.9) com as apropriadas constantes A e $M(T)$. □

Teorema 3.2.5. *Assuma as Suposições 3.1.4 e 3.1.5 são satisfeitas. Então para cada $(\psi(0),\psi)\in\boldsymbol{M}$, existe um único e não negativo processo solução forte $\{S(t),\ t\in(-\infty,\infty)\}$ através da condição inicial $(\psi(0),\psi)\in\boldsymbol{M}$.*

Demonstração. A existência e a unicidade do processo solução forte $\{S(t),\ t\in(-\infty,\infty)\}$ segue usando o método padrão de aproximações sucessivas.

Existência

Vamos assumir que o processo inicial $(\psi(0),\psi)\in\mathbf{M}$ é $\mathcal{F}(0)$-mensurável. Para cada $T>0$, defina uma sequência de processos $\{S^{(k)}(s),\ s\in(-\infty,T]\}$ para $k=0,1,\ldots$, como segue:

$$
S^{(0)}(s,w)=\begin{cases}\psi(0) & \text{se}\quad s\ge 0\\ \psi(s) & \text{se}\quad s\le 0,\end{cases}
$$

e para $k=1,2,\ldots$,

$$S^{(k)}(s,w) = \begin{cases} \psi(0) + \mathcal{R}(s, S^{(k-1)}(\cdot)) & \text{se} \quad s \in [0,T] \\ \psi(s) & \text{se} \quad s \leq 0, \end{cases}$$

em que $\mathcal{R}(s, S^{(k-1)}(\cdot))$ é definido em (3.7) e, novamente, $S_s^{(k)}(\theta) = S^{(k)}(s+\theta)$, $\theta \in [-\infty, 0]$. A partir dessa definição, das condições (veja 3.1.4 e 3.1.5) e do lema 3.1.2, segue que os processos $\{S^{(k)}(s),\ s \in [0,T]\}$, $k = 0, 1, \ldots$ são $\mathbf{F}$ adaptados, mensuráveis e contínuos, e $(S^{(k)}(s), S_s^{(k)}) \in \mathbf{M}$, para $s \geq 0$.

Por indução, iremos provar que para qualquer $T > 0$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} |S^{(k)}(s)|^p\right] < \infty.$$

Inicialmente, para $k = 0$, temos $(S^{(0)}(0), S_0^{(0)}) \in \mathbf{M}$, e pela construção acima para $t \in [0,T]$,

$$||(S^{(0)}(0), S_0^{(0)})||_{\mathbf{M}} \leq K||(S(0), S_0)||_{\mathbf{M}},\ \forall t \in [0,T]$$

para uma constante $K > 0$ dependendo de $\bar{K}$.Portanto,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} |(S^{(0)}(0), S_0^{(0)})|_{\mathbf{M}}^p\right] \leq K\mathbb{E}\left[||(S(0), S_0)||_{\mathbf{M}}\right] < \infty.$$

Pelo processo de indução, suponha que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} |S^{(k-1)}(s)|^p\right] < \infty.$$

Avaliando como no lema 3.2.3 e a desigualdade de Holder, temos

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} ||(S^{(k)}(t), S_t^{(k)})||_{\mathbf{M}}^p\right] \\
\leq \;& \bar{k}_p\mathbb{E}\left[|\psi(0)|^p + T^{p-1}\int_0^T |S^{(k-1)}(t)f(S_t^{(k-1)})|^p\, dt\right. \\
+ \;& \left. c_p\left(\int_0^T |S^{(k-1)}(t)g(S_t^{(k-1)})|^2\, dt\right)^{\frac{p}{2}}\right] \\
\leq \;& \bar{k}_p\mathbb{E}\left[|\psi(0)|^p + T^{p-1}c_2\int_0^T (1 + ||(S^{(k-1)}(t), S_t^{(k-1)})||_{\mathbf{M}}^p\, dt\right. \\
+ \;& \left. c_2^p c_p\left(\int_0^T (1 + ||(S^{(k-1)}(t), S_t^{(k-1)})||_{\mathbf{M}}^p\, dt\right)^{\frac{p}{2}}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \bar{k}_p \mathbb{E}\left[|\psi(0)|^p + c_2^p(T^p + c_p T^{\frac{p}{2}})\right.\\
&\times \left.\left(1 + \sup_{t\in[0,T]} ||(S^{(k-1)}(t), S_t^{(k-1)})||_{\mathbf{M}}\right)^p\right] < \infty.
\end{aligned}
$$

Com isso garantimos que essas iterações estão no espaço das funções contínuas tais que $\mathbb{E}\left[\sup |S(s)|^2\right] < \infty$.

Vamos provar por indução que

$$
\mathbb{E}\left[|S^{(k+1)}(t) - S^k(t)|^2\right] \leq \frac{4(BT)^{k+1}K_G^2(t+K(2))^{k+2}}{(k+2)!}.
$$

Para $k = 0$ temos,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(|S^1(t) - S^0(t)|^2\right) &= \mathbb{E}\left(|\mathcal{R}(t, S^0(\cdot))|^2\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\left|\int_0^t S^{(0)}(s) f(S_s^{(0)})\, ds + \int_0^t S^{(0)}(s) g(S_s^{(0)})\, d\mathbb{W}(s)\right|^2\right)\\
&\leq 2\mathbb{E}\left(\left|\int_0^t \psi(0) f(\psi(s))\right|^2 + \left|\int_0^t \psi(0) g(\psi(s))\, d\mathbb{W}(s)\right|^2\right)\\
&\leq 2\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t |\psi(0) f(\psi(s))|\right)^2 + K(2)\left(\int_0^t |\psi(0) g(\psi(s))|^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}}\right)\\
&\leq 2\mathbb{E}\left(\left(\left(\int_0^t 1^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t K_G^2(1 + ||\psi(0), \psi(s)||_{\mathbf{M}})^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right)\\
&+ 2K(2)\mathbb{E}\left(\int_0^t K_G^2(1 + ||\psi(0), \psi(s)||_{\mathbf{M}})^2\, ds\right)\\
&\leq 2\mathbb{E}\left(2tK_G^2 \int_0^t 1 + ||\psi(0), \psi(s)||_{\mathbf{M}}^2\, ds\right)\\
&+ 2K(2)\mathbb{E}\left(2K_G^2 \int_0^t 1 + ||\psi(0), \psi(s)||_{\mathbf{M}}^2\, ds\right)\\
&= 4tK_G^2\mathbb{E}\left(\int_0^t 1 + ||\psi(0), \psi(s)||_{\mathbf{M}}^2\, ds\right)\\
&+ 4K(2)K_G^2\mathbb{E}\left(\int_0^t 1 + ||\psi(0), \psi(s)||_{\mathbf{M}}^2\, ds\right)\\
&= 4K_G^2(t + K(2))\mathbb{E}\left(\int_0^t 1 + ||\psi(0), \psi(s)||_{\mathbf{M}}^2\, ds\right)\\
&= 4K_G^2(t + K(2))\Delta
\end{aligned}
$$

Lembrando que a passagem da primeira para a segunda desigualdade foi obtida ao aplicar o supremo e em seguida utilizar a desigualdade de Burkholder-Davis-Gundy.

Pelo processo de indução, suponha que

$$\mathbb{E}\left[|S^{(k)}(t) - S^{(k-1)}(t)|^2\right] \leq \frac{4(BT)^k K_G^2 (t + K(2))^{k+1}\Delta}{(k+1)!}$$

Usando o lema 3.2.3 e o corolário 3.2.4, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|S^{(k+1)}(t) - S^{(k)}(t)|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[\left|\mathcal{R}\left(t, S^{(k)}(\cdot)\right) - \mathcal{R}\left(t, S^{(k-1)}(\cdot)\right)\right|^2\right] \\
&\leq B\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|S^{(k)}(s) - S^{(k-1)(s)}\right|^2 ds\right] \\
&\leq BT4K_G^2\Delta \int_0^t \frac{(s+K(2))^{k+1}(BT)^k}{(k+1)!} ds \\
&\leq \frac{4(BT)^{k+1}K_G^2(t+K(2))^{k+2}\Delta}{(k+2)!}
\end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |S^{(k+1)}(t) - S^{(k)}(t)|^2\right] \leq \frac{4(BT)^{k+1}K_G^2(T+K(2))^{k+2}\Delta}{(k+2)!}.$$

Pela Desigualdade de Chebyshev e pelo Lema de Borel Cantelli, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T} \left|S^{(k+1)}(t) - S^{(k)}(t)\right| \geq \lambda\right) &\leq \frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|S^{(k+1)}(t) - S^{(k)}(t)\right|^2\right] \\
&\leq \frac{1}{\lambda^2}\frac{4(BT)^k K_G^2(T+K(2))^{k+1}\Delta}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

e

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2}\frac{4(BT)^k K_G^2(T+K(2))^{k+1}\Delta}{(k+1)!} < \infty.$$

À luz disto, para quase todos os w,

$$S^{(k)} = S^{(0)} + \sum_{j=0}^{k-1} \left(S^{(k+1)} - S^{(k)}\right),$$

converge em $[0, T]$ para algum processo $S(\cdot) \in L^2(\Omega, M)$ e que o processo limitante $S(\cdot)$

satisfaz (3.4). De fato, usando as suposições 3.1.4 e o teorema 2.3.9,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t g(S_s^{(k)})S^{(k)}(s) - g(S_s)S(s)\, d\mathbb{W}(s)\right|^2\right] \\
\le\ & K(2)\mathbb{E}\left[\int_0^T |g(S_s^{(k)})S^{(k)}(s) - S(s)g(S_s)|^2\, ds\right] \\
\le\ & K(2)K_{lip}\mathbb{E}\left[\int_0^T ||(S^{(k)}(s) - S(s), S_s^{(k)} - S_s)||_{\mathbf{M}}\, ds\right] \\
\le\ & K(2)K_{lip}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(|S^{(k)}(s) - S(s)|^2 + \int_{-\infty}^0 \rho(\theta)|S_s^{(k)}(\theta) - S_s(\theta)|^2\, d\theta\right)\, ds\right] \\
\longrightarrow\ & 0 \text{ quando } k \to \infty.
\end{aligned}$$

Afinal, quando $|S_s^{(k)}(\theta) - S_s(\theta)| = 0\ \forall \theta \in (-\infty, 0)$. Assim como,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t f(S_s^{(k)})S^{(k)}(s) - f(S_s)S(s)d(s)\right|^2\right] \\
\le\ & K_{lip}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\int_0^t ||(S^{(k)}(s) - S(s), S_s^{(k)} - S_s)||_{\mathbf{M}}\, ds\right] \\
\longrightarrow\ & 0 \text{ quando } k \to \infty.
\end{aligned}$$

Além disto, temos que o processo $S(\cdot)$ é $\mathbf{F}$-adaptado, uma vez que é limite de sequências em que cada elemento é $\mathbf{F}$-adaptado. Para completarmos a prova da existência de solução forte, devemos provar que

$$\mathbb{P}\left[\int_0^\infty \left(|S(t)f(S_t)| + S^2(t)g^2(S_t)\right)\, dt < \infty\right] = 1.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left(|S(t)f(S_t)| + S^2(t)g^2(S_t)\right)\, dt \\
\le\ & \int_0^\infty K_G\,(1 + ||S(t), S_t||_{\mathbf{M}})\, dt + \int_0^\infty K_G\,(1 + ||S(t), S_t||_{\mathbf{M}})^2\, dt \\
\le\ & K_G\int_0^\infty \underbrace{\left(1 + |S(t)|^2 + \int_{-\infty}^0 \rho(\theta)|S_t(\theta)|^2\, d\theta\right)}_{<\infty}\, dt \\
+\ & K_G\int_0^\infty \underbrace{\left(1 + |S(t)|^2 + \int_{-\infty}^0 \rho(\theta)|S_t(\theta)|^2\, d\theta\right)^2}_{<\infty}\, dt \\
<\ & \infty.
\end{aligned}$$

Unicidade

Sejam $\{S(t),\ t \in (-\infty,\infty)\}$ e $\{\bar{S}(t),\ t \in (-\infty,\infty)\}$ dois processos solução fortes de (3.4) através da condição inicial $(\psi(0),\psi) \in \mathbf{M}$. Nós precisamos mostrar que

$$\mathbb{P}\{S(s) = \bar{S}(s),\ \forall s \geq 0\} = 1.$$

Observe que $S(t) - \bar{S}(t) = 0\ \forall t \leq 0$, afinal para todo $t \in (-\infty, 0)$ temos $S(t) = \psi(t)$. Temos

$$S(t) - \bar{S}(t) = \int_0^t S(\lambda)f(S_\lambda) - \bar{S}(\lambda)f(\bar{S}_\lambda)\,dt + \int_0^s S(\lambda)g(S_\lambda) - \bar{S}(\lambda)g(\bar{S}_\lambda)d\mathbb{W}(\lambda)$$

Logo, pelo lema 3.2.3, temos $\forall T > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|S(t) - \bar{S}(t)|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |S(t) - \bar{S}(t)|^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|\mathcal{R}(t, S(\cdot)) - \mathcal{R}(t, \bar{S}(\cdot))\right|^2\right] \\
&\leq A\mathbb{E}\left[||S(0) - \bar{S}(0), S_0 - \bar{S}_0||_\rho^2\right] + B\mathbb{E}\left[\int_0^T |S(t) - \bar{S}(t)|^2\ ds\right].
\end{aligned}$$

Mas

$$A\mathbb{E}\left[||S(0) - \bar{S}(0), S_0 - \bar{S}_0||_\rho^2\right] = 0,$$

uma vez que $S(0) = \bar{S}(0)$ e $S(\theta) = \bar{S}(\theta), \theta \in (-\infty, 0)$.

Basta então definir $h(t) := \mathbb{E}\left[|S(t) - \bar{S}(t)|^2\right]$, e temos

$$h(t) \leq B\int_0^t \mathbb{E}\left[|S(\lambda) - \bar{S}(\lambda)|^2\right] d\lambda \text{ para todo } 0 \leq t \leq T.$$

Assim, pelo lema de Gronwall, com $\alpha(t) = 0$, implica $h \equiv 0$. Portanto $S(t) = \bar{S}(t)$ quase sempre para todo $t \in \mathbb{Q}\bigcap[0,T]$. Pela continuidade dos processos S e $\bar{S}$, concluímos que

$$\mathbb{P}\{S(t) = \bar{S}(t),\ \forall t \in [0,T]\} = 1.$$

□

Capítulo 4

Otimização de Portfólio Hereditário

Este capítulo irá tratar do problema de otimização de portfólio hereditário com tempo infinito no mercado financeiro, que consiste em uma conta poupança e uma conta de ações. Supõe-se que a conta poupança tem juro $\lambda > 0$ composto contínuo, e o processo preço unitário da ação tratada em questão, $\{S(t), t \geq 0\}$, satisfaz a equação

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = f(S_t)dt + g(S_t)\, d\mathbb{W}(t), \; t \in [0, \infty). \tag{4.1}$$

O objetivo principal da conta de ações é manter o controle dos inventários, isto é, controlar os instantes de tempo onde foram compradas partes de ações ou onde houveram vendas a descoberto para efeitos de cálculo dos impostos sobre o capital ganho e créditos sobre a perda de capital. Na região de solvência $\mathcal{S}_k$ (que será tratada na em 4.1.4) e sob as exigências de pagar os custos de transação fixo mais proporcional e impostos sobre o capital ganho, o investidor é permitido consumir a partir da sua conta poupança de acordo com um processo taxa de consumo $C = \{C(t), t \geq 0\}$ e pode fazer transações entre suas contas poupança e de ações de acordo com a estratégia de negociação: $\mathcal{T} = \{(\tau(i), \zeta(i)), i = 1, 2, \ldots\}$, onde $\tau(i)$, $i - 1, 2, \ldots$, denota a sequência de tempos de transação e $\zeta(i)$ representa a quantidade de transações no tempo $\tau(i)$ (ver definição (4.3)). Neste capítulo deduziremos também a desigualdade quase-variacional de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJBQVI) para a função valor (definida em 4.13), o que será de extrema importância para chegarmos ao Teorema de Verificação, este que nos dá a condição suficiente para obtermos uma estratégia de consumo-negociação ótima.

Consideremos alguns conceitos básicos de economia:

- **POSIÇÕES**:
  - **Curta:** Quando o investidor vende algo que não tem, para ser liquidado em data futura.
  - **Longa:** Quando o investidor compra algo.

- **VENDA A DESCOBERTO**: prática financeira que consiste na venda de um ativo financeiro que não se possui esperando que o preço caia para recomprá-lo e lucrar na transação com a diferença.

- **INVENTÁRIO**: Estoque de ações.

O investidor vai seguir o seguinte conjunto de regras de consumo, transação e de tributação (regras (a)-(f)). A ação do investidor no mercado é chamada uma transação se envolve negociação de ações, como compra e venda.

Regra (a) No momento de cada transação, o investidor tem de pagar um custo de transação, que consiste de um custo fixo $\kappa > 0$ e um custo de transação proporcional com a taxa de $\mu \geq 0$ tanto para compra e venda de ações da conta de ações. Todas as compras e vendas de qualquer quantidade de ações será considerada uma transação se forem executadas no mesmo instante de tempo e, portanto, incorrerá apenas uma taxa fixa $\kappa > 0$ (além de um custo de transação proporcional).

Regra (b) Dentro da região de solvência $\mathcal{S}_k$, o investidor é permitido consumir e pedir o dinheiro de sua conta de poupança para a compra de ações. Ele também pode vender e/ou recomprar as ações pelo preço que ele comprou e/ou vendeu a descoberto em um momento anterior.

Regra (c) As receitas das vendas de ações menos os custos de transação e impostos sobre o capital ganho serão alocadas em sua conta poupança e as compras de participações acionárias em conjunto com os custos de transação associados e imposto sobre o capital ganho (nas operações curtas da conta de ações foram compradas de volta com um lucro) será financiada a partir de sua conta poupança.

Regra (d) Sem perda de generalidade, assume-se que a receita de juros na conta poupança corresponde à taxa líquida $\lambda > 0$, onde esta taxa de juros é igual à taxa de juros paga pelo banco, menos a taxa de imposto correspondente a respectiva receita.

Regra (e) No momento de uma transação (digamos $t \geq 0$), o investidor é obrigado a pagar um imposto sobre o capital ganho (a ser pago respectivamente como crédito perda de capital), no valor que é proporcional à quantidade de lucro (respectivamente, perda ou prejuízo). A venda de ações é dita resultar em lucro se o preço atual da ação $S(t)$ for maior do que o preço base $B(t)$ da ação e caso contrário, é dita resultar em um prejuízo. O preço base $B(t)$ é definido como sendo o preço pelo qual as ações foram previamente compradas ou vendidas a descoberto, isto é, $B(t) = S(t - \tau(t))$, em que $\tau(t) > 0$ é o tempo de duração para que essas ações (de longa ou curta duração) têm sido mantidas até o tempo t. O investidor também vai pagar imposto sobre o capital ganho (a ser pago respectivamente como crédito sobre a perda de capital) pela quantidade de lucro (respectivamente, prejuízo) por venda de ações a descoberto e, em seguida, comprar de volta as ações a um menor (respectivamente, maior) preço em um momento posterior. O imposto será pago (ou o crédito será dado) no momento da recompra. Ao final, um valor negativo de imposto será interpretado como crédito de perda de capital. O imposto sobre o capital ganho e a taxa de crédito sobre a perca de capital são considerados o mesmo que $\beta > 0$ por simplificação. Portanto, se $|m|$ ($m > 0$ significa comprar e $m < 0$ significa vender) ações da bolsa são negociadas ao preço atual $S(t)$ na base $B(t) = S(t - \tau(t))$, então o valor do imposto devido no tempo de transação é dada por

$$|m|\beta(S(t) - S(t - \tau(t)))$$

Regra (f) O imposto e/ou crédito não poderá exceder todas as outras receitas brutas e/ou custos totais das partes de ações, isto é,

$$m(1 - \mu)S(t) \geq \beta m|S(t) - S(t - \tau(t))| \quad \text{se} \quad m \geq 0$$

e

$$m(1 + \mu)S(t) \leq \beta m|S(t) - S(t - \tau(t))| \quad \text{se} \quad m \leq 0,$$

em que $m \in \mathbb{R}$ denota a quantidade de ações negociadas, com $m \geq 0$ é o número de ações compradas e $m < 0$ é o número de ações vendidas.

Assumiremos que $\mu + \beta < 1$. Isto implica que as despesas associadas com uma negociação não excederá os proventos.

Sob todas as condições e regras acima, o objetivo do investidor é buscar uma estratégia ideal de consumo-negociação a fim de maximizar a seguinte utilidade esperada a partir do consumo total de desconto:

$$\mathcal{J}_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi; \pi) = \mathbb{E}^{x,\xi,\psi(0),\psi;\pi} \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{C^\gamma(t)}{\gamma} \, dt \right], \tag{4.2}$$

em que $\alpha > 0$ representa a taxa de desconto e $0 < \gamma < 1$ representa o fator de aversão ao risco do investidor.

Definição 4.0.6. *Se $t \geq 0$ e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é função mensurável, defina $\phi_t : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ por $\phi_t(\theta) = \phi(t + \theta)$, $\theta \in (-\infty, 0]$.*

4.1 O Problema de Otimização de Portfólio Hereditário

Esta seção é dedicada a formulação do problema de otimização de portfólio hereditário com impostos sobre capital ganho e custos de transação fixo mais proporcional.

4.1.1 Estrutura de Preço Hereditário com Memória Ilimitada

Sejam ρ a função influência que satisfaz a suposição 3.1.1 e $\mathbf{M} = \mathbb{R} \times L^2_\rho$ o espaço do histórico da dinâmica dos preços das ações. Para $t \in (-\infty, \infty)$, seja $S(t)$ o preço unitário da ação no tempo t. É assumido que o processo preço unitário da ação $\{S(t), t \geq 0\}$ satisfaz a equação (3.4):

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = f(S_t)dt + g(S_t)d\mathbb{W}(t), \ t \in [0, \infty).$$

Assumiremos que $f(S_t)$ e $g(S_t)$ representam respectivamente a taxa de retorno médio e a volatibilidade dos preços das ações no tempo $t \geq 0$. Note que a ação é dita ter estrutura de preço hereditário com memória infinita mas desaparecendo porque os termos $S(t)f(S_t)$ e $S(t)g(S_t)$ dependem explicitamente do histórico do preços $(S(t), S_t) \in [0, \infty) \times L^2_{\rho,+}$. Usamos a seguinte notação:

$$L^2_{\rho,+} = \{\phi \in L^2_\rho | \phi(\theta) \geq 0, \ \forall \theta \in (-\infty, 0)\}.$$

É assumido por simplicidade e para garantir a existência e unicidade de solução forte $S(t)$, $t \geq 0$ que a função preço inicial $(S(0), S_0) = (\psi(0), \psi) \in \mathbb{R}_+ \times L^2_{\rho,2}$ é dado e as funções $f, g : L^2_\rho \to [0, \infty)$ são contínuas e satisfazem as suposições 3.1.4, 3.1.5 e

Suposição 4.1.1 (Limites superior e inferior). *Existem constantes positivas α e σ tais que*

$$0 < \lambda < b \leq f(\phi) \leq \bar{b} \ e \ 0 < \sigma \leq g(\phi); \ \forall \phi \in L^2_{\rho,+}.$$

4.1.2 O espaço dos inventários das ações

O espaço dos inventários das ações, $\mathbf{N}$, será o espaço da funções limitadas $\xi : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$\xi(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} n(-k)\mathbb{1}_{\{\tau(-k)\}}(\theta), \theta \in (-\infty, 0], \tag{4.3}$$

em que $\{n(-k), k = 0, 1, 2, \ldots\}$ é uma sequência em $\mathbb{R}$ com $n(-k) = 0$ para todos exceto para um número finito de k,

$$-\infty < \ldots < \tau(-k) < \ldots < \tau(-1) < \tau(0) = 0,$$

e $\mathbb{1}_{\{\tau(-k)\}}$ é função indicadora para $\tau(-k)$. Seja $||\cdot||_N$ a norma no espaço $\mathbf{N}$ definida por

$$||\xi||_N = \sup_{\theta \in (-\infty, 0]} |\xi(\theta)|, \forall \xi \in \mathbf{N}. \tag{4.4}$$

A função $\xi : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ definida acima denota o inventário da conta de ações do investidor. $n(-k) > 0$ (respectivamente, $n(-k) < 0$) representa o número de partes compradas (respectivamente, vendidas a descoberto)no tempo $\tau(-k)$. A suposição que $n(-k) = 0$ para todos exceto para um número finito de k, implica que o investidor só pode ter um número finito de posições longas ou curtas abertas em sua conta de ações. Portanto, o número de posições longas e/ou curtas abertas pode aumentar ao longo do tempo. O investidor é dito ter uma posição longa (respectivamente, curta) no tempo τ se ele ainda possui (respectivamente, deve) todas ou parte das ações que foram originalmente adquiridas (respectivamente, vendidas a descoberto) num momento anterior τ. A única maneira de fechar uma posição é vender tudo o que possui e comprar de volta tudo o que ele deve.

Observação 4.1.2. *O inventário no tempo $t = 0$ descrito em (4.3) também pode ser escrito como segue a sequência dupla:*

$$\xi = \{(n(-k), \tau(-k)),\ k = 0, 1, 2, \ldots\},$$

em que $n(-k) > 0$ (rescpectivamente, $n(-k) < 0$) denota o número de ações compradas (respectivamente, vendidas a descoberto) pelo investidor no tempo $\tau(-k)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Se $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função limitada da forma

$$\eta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} n(k)\mathbf{1}_{\{\tau(k)\}}(t),\ -\infty < t < \infty,$$

em que

$$-\infty < \cdots < \tau(-k) < \cdots < 0 = \tau(0) < \tau(1) < \cdots < \tau(k) < \cdots < \infty,$$

então para cada $t \geq 0$, definimos, usando a definição 4.0.6, a função $\eta_t : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ por

$$\eta_t(\theta) = \eta(t + \theta),\ \theta \in (-\infty, 0].$$

Neste caso,

$$\begin{aligned}\eta_t(\theta) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} n(k)\mathbf{1}_{\{\tau(k)\}}(t + \theta) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{Q(t)} n(k)\mathbf{1}_{\{\tau(k)-t\}}(t),\ \theta \in (-\infty, 0],\end{aligned}$$

em que $Q(t) = \sup\{k \geq 0 | \tau(k) \leq t\}$. Note que se η_t representa o inventário da conta de ações do investidor, então η_t pode ser expressa como uma sequência dupla:

$$\eta_t = \{(n(k), \tau(k)),\ k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, Q(t)\}.$$

4.1.3 Estratégias de consumo-negociação

Para descrevermos o nosso problema e os resultados obtidos , considere

$$((X(0-), N_{0-}, S(0), S_0) = (x, \xi, \psi(0), \psi) \in \mathbb{R} \times \mathbf{N} \times \mathbb{R}_+ \times L^2_{\rho,+} \equiv \mathbf{S}$$

o portfólio inicial do investidor imediatamente antes a $t = 0$; que é, o investidor começa com $x \in \mathbb{R}$ doláres em sua conta poupança, o inventário da ação inicial

$$\xi(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} n(-k) \mathbb{1}_{\{\tau(-k)\}}(\theta), \theta \in (-\infty, 0],$$

e o perfil inicial do histórico dos preços das ações $(\psi(0), \psi) \in \mathbb{R}_+ \times L^2_{\rho,+}$. Dentro da região de solvência $\mathcal{S}_k$, o investidor é permitido consumir a partir da sua conta de poupança e pode fazer transações entre sua conta poupança e sua conta de ações sob as regras (a) - (f) e de acordo com a estratégia de consumo-negociação $\pi = (C, \mathcal{T})$, definida a seguir:

Definição 4.1.3. *1. O processo taxa de consumo $C = \{C(t), t \geq 0\}$ é não negativo $\boldsymbol{G}$-progressivamente mensurável tal que*

$$\int_0^T C(t)\, dt < \infty\ \mathbb{P} - \textit{quase sempre}, \quad \forall T > 0$$

.

2. $\mathcal{T} = \{(\tau(i), \zeta(i)), i = 1, 2, \ldots\}$ é uma estratégia de negociação, com $\tau(i), i = 1, 2, \ldots$, sendo uma sequência de tempos de negociação, que são $\boldsymbol{G}$-tempos de parada tais que

$$0 = \tau(0) \leq \tau(1) < \ldots < \tau(i) < \ldots$$

e para cada $i = 0, 1, \ldots$,

$$\zeta(i) = (\ldots, m(i-k), \ldots, m(i-2), m(i-1), m(i))$$

é uma vetor aleatório $\boldsymbol{N}$-avaliado $\mathcal{G}(\tau(i))$-mensurável que representa a quantidade negociada no tempo de negociação $\tau(i)$. Acima, $\boldsymbol{G} = \{\mathcal{G}(t), t \geq 0\}$ é a filtração gerada pelos preços das ações $\{S(t), t \geq 0\}$ e $m(i) > 0$ (respectivamente,$m(i) < 0$) é o número de ações recém adquiridas (respectivamente, vendidas a descoberto) no momento atual $\tau(i)$ e no preço atual $S(\tau(i))$ e, para $k = 1, 2, \ldots, m(i-k) > 0$

(respectivamente, $m(i-k)<0$) é o número de ações recompradas (respectivamente, vendidas) no momento atual $\tau(i)$ e no preço atual $S(\tau(i))$ em sua posição curta aberta (respectivamente, longa) no momento anterior $\tau(i-k)$ e no preço base $S(\tau(i-k))$.

Para cada inventário da ação ξ com sua forma expressa em (4.3), as regras de (a)-(f) também determinam que o investidor pode comprar ou vender a descoberto novas ações (isto é, $(-\infty < m(0) < \infty)$), pode vender tudo ou parte do que ele possui, isto é,

$$m(-k) \leq 0 \text{ e } n(-k)+m(-k) \geq 0 \text{ se } n(-k) > 0,$$

e/ou pode comprar de volta tudo ou parte do que ele deve, isto é,

$$m(-k) \geq 0 \text{ e } n(-k)+m(-k) \leq 0 \text{ se } n(-k) < 0,$$

tudo no mesmo instante. Portanto, a quantidade de negociação $\{m(-k), k=0,1,\ldots\}$ devem satisfazer o conjunto restrição $\mathcal{R} \subset \mathbf{N}$ definido por

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\xi) = \quad & \{\zeta \in \mathbf{N} | \zeta = \sum_{k=0}^{\infty} m(-k)\mathbb{1}_{\{\tau(-k)\}}, -\infty < m(0) < \infty, \quad \text{e} \\ & \text{ambos } n(-k) > 0, m(-k) \leq 0, \text{e } n(-k)+m(-k) \geq 0 \\ & \text{ou } n(-k) < 0, m(-k) \geq 0 \text{ e } n(-k)+m(-k) \leq 0 \text{ para } k \geq 1\}.\end{aligned}$$

4.1.4 Região de Solvência

Assumiremos que o espaço de estados do investidor $\mathbf{S}$ é dado por $\mathbf{S} = \mathbb{R} \times \mathbb{N} \times [0,\infty) \times L^2_{\rho,+}$. Um elemento $(x, \xi, \psi(0), \psi) \in \mathbf{S}$ é chamado portfólio, em que $x \in \mathbb{R}$ é a participação do investidor na conta poupança, ξ é o inventário da ação do investidor e $(\psi(0), \psi) \in [0,\infty) \times L^2_{\rho,+}$ é o perfil histórico dos preços das ações. Defina a função $H_\kappa : \mathbf{S} \to \mathbb{R}$ como segue:

$$H_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi) = \max\left\{G_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi), \min\{x, n(-k)\psi(\tau(-k)), k=0,1,2,\ldots\}\right\}, \tag{4.5}$$

em que $G_\kappa : \mathbf{S} \to \mathbb{R}$ é a função liquidação definida por

$$\begin{aligned}G_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi) = \quad & x - \kappa + \sum_{k=0}^{\infty}[min\{(1-\mu)n(-k), (1+\mu)n(-k)\}\psi(0) \\ & -n(-k)\beta(\psi(0) - \psi(\tau(-k)))],\end{aligned}$$

que representa o valor em dinheiro depois de fechar todas as posições abertas e pagar todos os custos de transação.

Do lado direito da expressão acima,

- $x - \kappa$ representa a quantidade na sua conta poupança depois de deduzir o custo de transação fixo,

e para cada $k = 0, 1, \dots$

- $\min\{(1-\mu)n(-k), (1+\mu)n(-k)\}\psi(0)$ representa os custos proporcionais de transação para venda $(n(-k) > 0$ ou recompra $n(-k) < 0$ de ações;
- $-n(-k)\beta(\psi(0) - \psi(\tau(-k)))$ representa o imposto sobre o capital ganho a ser pago pela venda de $n(-k)$ partes das ações com preço atual de $\psi(0)$ e preço base de $\psi(\tau(-k))$.

A região de solvência $\mathcal{S}_k$ de um problema de otimização de porfólio é definida como:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\kappa &= \{(x, \xi, \psi(0), \psi) \in \mathbf{S} | H_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi) \geq 0\} \\ &= \{(x, \xi, \psi(0), \psi) \in \mathbf{S} | G_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi) \geq 0\} \cup \mathbf{S}_+ \end{aligned} \tag{4.6}$$

em que $\mathbf{S}_+ = \mathbb{R}_+ \times \mathbf{N}_+ \times \mathbb{R}_+ \times L^2_{\rho,+}$ e $\mathbf{N}_+ = \{\xi \in \mathbf{N} | \xi(\theta) \geq 0, \forall \theta \in (-\infty, 0]\}$.

Note que dentro da região de solvência $\mathcal{S}_\kappa$ existem posições que não são fechadas, nomeadamente aqueles $(x, \xi, \psi(0), \psi) \in \mathcal{S}_\kappa$, tais que

$$(x, \xi, \psi(0), \psi) \in \mathbf{S}_+ \text{ e } G_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi) < 0.$$

Isto é devido à insuficiência de recursos para pagar os custos de transação e/ou impostos.

4.1.5 Dinâmica do Portfólio e Estratégias Admissíveis

No tempo $t \geq 0$, o portfólio do investidor no mercado financeiro será denotado pela quádrupla $(X(t), N_t, S(t), S_t))$, em que $X(t)$ denota as participações do investidor em sua conta poupança, $N_t \in \mathbf{N}$ é o inventário da sua conta de ações, e $(S(t), S_t)$ descreve o perfil dos preços unitários das ações sobre a história do passado $(-\infty, t]$ como descrito em (3.4).
Dado o portfólio inicial $(X(0-), N_{0-}, S(0), S_0) = (x, \xi, \psi(0), \psi) \in \mathcal{S}_k$ e aplicando uma estratégia de consumo-negociação $\pi = (C, \mathcal{T})$, a dinâmica do portfólio

$$\{Z(t) = (X(t), N_t, S(t), S_t),\ t \geq 0\}$$

pode ser descrita como segue:

Primeiro, a conta de poupança $\{X(t), t \geq 0\}$ satisfaz a seguinte equação diferencial entre os tempos de negociação:

$$dX(t) = [\lambda X(t) - C(t)]dt, \tau(i) \leq t < \tau(i+1), i = 0, 1, 2, \dots, \tag{4.7}$$

e a seguinte quantidade de saltos no momento de negociação $\tau(i)$:

$$\begin{aligned} X(\tau(i)) = X(\tau(i)-) - \kappa - \sum_{k=0}^{\infty} m(i-k)[(1-\mu)S(\tau(i)) \\ -\beta(S(\tau(i)) - S(\tau(i-k)))]\mathbb{1}_{\{n(i-k)>0,-n(i-k)\leq m(i-k)\leq 0\}} \\ -\sum_{k=0}^{\infty} m(i-k)[(1+\mu)S(\tau(i)) \\ -\beta(S(\tau(i)) - S(\tau(i-k)))]\mathbb{1}_{\{n(i-k)>0,0\leq m(i-k)\leq -n(i-k)\}} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Como um lembrete, $m(i) > 0$ (resp., $m(i) < 0$) significa a compra (respectivamente, de venda) de novas ações em $\tau(i)$ e $m(i-k) > 0$ (respectivamente, $m(i-k) < 0$) significa comprar de volta (respectivamente, revender) alguns ou todos o que devia (respectivamente, que possuia).

Segundo, o inventário da conta de ações do investidor no momento $t \geq 0$, $N_t \in \mathbf{N}$, não muda entre os tempos de troca e pode ser expresso como a seguinte equação:

$$N_t = N_{\tau(i)} = \sum_{k=-\infty}^{Q(t)} n(k)\mathbb{1}_{\tau(k)} \text{ se } \tau(i) \leq t < \tau(i+1), i = 0, 1, \ldots, \tag{4.9}$$

em que $Q(t) = \sup\{k \geq 0 | \tau(k) \leq t\}$.

Este tem a seguinte quantidade de saltos no tempo de negociação $\tau(i)$:

$$N_{\tau(i)} = N_{\tau(i)-} \oplus \zeta(i), \tag{4.10}$$

em que $N_{\tau(i)-} \oplus \zeta(i) : (-\infty, 0] \to \mathbf{N}$ é definido, para $\theta \in (-\infty, 0]$, por

$$\begin{aligned} (N_{\tau(i)-} \oplus \zeta(i))(\theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{n}(i-k)\mathbb{1}_{\{\tau(i-k)\}}(\tau(i)+\theta) \\ &= m(i)\mathbb{1}_{\{\tau(i)\}}(\tau(i)+\theta) + \sum_{k=1}^{\infty}[n(i-k) \\ &+ m(i-k)(\mathbb{1}_{\{n(i-k)>0,0\leq m(i-k)\leq -n(i-k)\}} \\ &+ \mathbb{1}_{\{n(i-k)>0,-n(i-k)\leq m(i-k)\leq 0\}}]\mathbb{1}\{\tau(i-k)\}(\tau(i)+\theta). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Terceiro, uma vez que o investidor é pequeno, o processo unitário do preço das ações, $\{S(t), t \geq 0\}$, não será de forma alguma afetado pela ação do investidor no mercado e é novamente descrito como em (3.4).

Definição 4.1.4. *Se o investidor começa com o portfólio inicial*

$$(X(0-), N_{0-}, S(0), S_0) = (x, \xi, \psi(0), \psi) \in \mathcal{S}_k$$

a estratégia de consumo-negociação $\pi = (C, \mathcal{T})$ *é dita ser admissível a* $(x, \xi, \psi(0), \psi)$ *se*

$$\zeta(i) \in \mathcal{R}(N_{\tau(i)-}), \forall i = 1, 2, \ldots,$$

e

$$(X(t), N_t, S(t), S_t) \in \mathcal{S}_k, \forall t \geq 0.$$

A classe das estratégias de consumo-negociação em $(x, \xi, \psi(0), \psi) \in \mathcal{S}_k$ *será denotada por* $\mathcal{U}_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi)$.

4.1.6 Formulação do Problema

Dado o estado inicial $(X(0-), N_{0-}, S(0), S_0) = (x, \xi, \psi(0), \psi) \in \mathcal{S}_k$, o objetivo do investidor é encontrar uma estratégia consumo-negociação admissível $\pi^* \in \mathcal{U}_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi)$ que maximiza a seguinte utilidade esperada a partir do consumo total de desconto:

$$\mathcal{J}_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi; \pi) = \mathbb{E}^{x,\xi,\psi(0),\psi;\pi} \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{C^\gamma(t)}{\gamma} \, dt \right], \tag{4.12}$$

entre a classe das estratégias de consumo-negociação admissíveis $\mathcal{U}_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi)$, em que $\mathbb{E}^{x,\xi,\psi(0),\psi;\pi}[\cdots]$, é a esperança com respeito a $\mathbb{P}^{x,\xi,\psi(0),\psi;\pi}\{\cdots\}$, a medida de probabilidade induzida pelo processo controlado $\{(X(t), N_t, S(t), S_t), t \geq 0\}$ (por π) e condicionada pelo estado inicial

$$(X(0-), N_{0-}, S(0), S_0) = (x, \xi, \psi(0), \psi).$$

$\alpha > 0$ indica o fator de desconto, e $0 < \gamma < 1$ indica que a utilidade da função $U(c) = \frac{c^\gamma}{\gamma}$, para $c > 0$, é uma função do tipo HARA (aversão ao risco absoluto hiperbólica). A estratégia admissível $\pi^* \in \mathcal{U}_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi)$ que maximiza $\mathcal{J}_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi; \pi)$ é chamada de uma estratégia ótima (negociação-consumo) e a função $V_\kappa : \mathcal{S}_k \to \mathbb{R}_+$ definida por

$$V_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi) = \sup_{\pi \in \mathcal{U}_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi)} \mathcal{J}_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi; \pi) = \mathcal{J}_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi; \pi^*) \tag{4.13}$$

é chamada a função valor do problema de otimização de portfólio.

PROBLEMA: Para cada estado dado inical $(x, \xi, \psi(0), \psi) \in \mathcal{S}_\kappa$, indentificar a estratégia ótima π^* e sua função correspondente $V_\kappa : \mathcal{S}_\kappa \to [0, \infty)$.

4.2 O Processo Controlado

Considere os processos soluções $\{(S(t)), S_t); t \geq 0\}$, $[0, \infty) \times L^2_\rho$-avaliados, onde $S_t(\theta) = (t + \theta)$, $\theta \in (-\infty, 0]$, e $(S(0), S_0) = (\psi(0), \psi)$. Nós precisamos das seguintes notações e resultados auxiliares:

Seja $\mathbf{M}^*$ o espaço dos funcionais lineares limitados equipado com a norma do operador $\| \,.\, \|^*_{\mathbf{M}}$ definido por:

$$\| \Phi \|^*_{\mathbf{M}} = \sup_{(\phi(0),\phi)\neq(0,0)} \frac{| \Phi(\phi(0), \phi) |}{\| (\phi(0), \phi) \|_{\mathbf{M}}}, \Phi \in \mathbf{M}^*.$$

Note que $\mathbf{M}^*$ pode ser identificado com $\mathbf{M} = \mathbb{R} \times L^2_\rho$, pelo teorema de representação de Riez, este que garante a identificação de um funcional por uma integral de medida regular.

Seja $\mathbf{M}^+$ o espaço dos funcionais lineares limitados $\Phi : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbb{R}$; isto é, $\Phi((\phi(0), \phi), (\cdot, \cdot)), \Phi((\cdot, \cdot), (\phi(0), \phi)) \in \mathbf{M}^*$ para cada $(\phi(0), \phi)) \in \mathbf{M}$, equipado com a norma do operador $\| \,.\, \|^+_{\mathbf{M}}$ definido por

$$\begin{aligned} \| \Phi \|^+_{\mathbf{M}} &= \sup_{(\phi(0),\phi)\neq(0,0))} \frac{\| \Phi((\cdot, \cdot)\phi(0), \phi)) \|^*_{\mathbf{M}}}{\| ((\cdot, \cdot), (\phi(0), \phi)) \|_{\mathbf{M}}}, \Phi \in \mathbf{M}^* \\ &= \sup_{((\phi(0),\phi)\neq(0,0))} \frac{\| \Phi((\cdot, \cdot)\phi(0), \phi)) \|^*_{M}}{\| (\phi(0), \phi) \|_{\mathbf{M}}}, \Phi \in \mathbf{M}^*. \end{aligned}$$

Seja $\Phi : \mathbf{M} \to \mathbb{R}$. A função Φ é dita ser Fréchet diferenciável em $(\phi(0), \phi) \in \mathbf{M}$ se para cada $(\phi(0), \phi) \in \mathbf{M}$,

$$\Phi((\phi(0), \phi) + (\phi(0), \phi)) - \Phi(\phi(0), \phi) = D\Phi(\phi(0), \phi)(\phi(0), \phi) + o(\| (\phi(0), \phi) \|_{\mathbf{M}}),$$

onde $D\Phi : \mathbf{M} \to \mathbf{M}^*$ e $o : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função tal que $\frac{o(\|(\phi(0),\phi)\|_{\mathbf{M}}}{\|(\phi(0),\phi)\|_{\mathbf{M}}} \to 0$ quando $\| (\phi(0), \phi) \|_{\mathbf{M}} \to 0$.

Neste caso, $D\Phi(\phi(0), \phi) \in \mathbf{M}^*$ é dita derivada de Fréchet (primeira ordem) de Φ em $(\phi(0), \phi) \in \mathbf{M}$. A função Φ é dita ser continuamente Fréchet diferenciável se sua derivada de Fréchet $D\Phi : \mathbf{M} \to \mathbf{M}^*$ é contínua sob a norma do operador $\| \,.\, \|^*_{\mathbf{M}}$. A função Φ é dita ser duas vezes Fréchet diferenciável em $(\phi(0), \phi) \in \mathbf{M}$ se sua derivada de Fréchet $D\Phi(\phi(0), \phi) : \mathbf{M} \to \mathbb{R}$ existe e se existe um funcional bilinear limitado $D^2\Phi(\phi(0), \phi) : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbb{R}$, onde para cada $(\phi(0), \phi), (S(0), S) \in \mathbf{M}$,

$$D^2\Phi(\phi(0), \phi)((\cdot, \cdot), (\phi(0), \phi)), D^2\Phi(\phi(0), \phi)((\phi(0), \phi), (S(0), S)) \in \mathbf{M}^+$$

e onde

$$\begin{aligned}
& (D\Phi((\phi(0),\phi)+(\varphi(0),\varphi))-D\Phi(\phi(0),\phi))\,(\varsigma(0),\varsigma) \\
= \; & D^2\Phi(\phi(0),\phi)((\varsigma(0),\varsigma),(\varphi(0),\varphi))+o(\parallel (\varsigma(0),\varsigma) \parallel_{\mathbf{M}}, \parallel (\varphi(0),\varphi) \parallel_{\mathbf{M}}).
\end{aligned}$$

Aqui, $o : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que

$$\frac{o(\cdot, \parallel (\varphi(0),\varphi) \parallel_{\mathbf{M}})}{\parallel (\varphi(0),\varphi) \parallel_{\mathbf{M}}} \to 0 \text{ quando } \parallel (\varphi(0),\varphi) \parallel_{\mathbf{M}} \to 0$$

e

$$\frac{o(\parallel \varphi(0),\varphi) \parallel_{\mathbf{M}}, .)}{\parallel (\varphi(0),\varphi) \parallel_{\mathbf{M}}} \to 0 \text{ quando } \parallel (\varphi(0),\varphi) \parallel_{\mathbf{M}} \to 0.$$

Neste caso, o funcional bilinear limitado $D^2\Phi(\phi(0),\phi) : \mathbf{M}\times\mathbf{M} :\to \mathbb{R}$ é a derivada de Fréchet de segunda ordem de Φ em $(\phi(0),\phi)\in\mathbf{M}$.

A derivada de segunda ordem de Fréchet $D^2\Phi$ é dita ser globalmente Lipschitz em $\mathbf{M}$ se existe uma constante $K>0$ tal que

$$\parallel D^2\Phi(\phi(0),\phi) - D^2(\phi(0),\phi) \parallel^{+}_{\mathbf{M}} \leq K \parallel (\phi(0),\phi) - (\phi(0),\phi) \parallel_{\mathbf{M}}$$

$$\forall (\phi(0),\phi),(\varphi(0),\varphi)\in\mathbf{M}.$$

Seja $C^{2,2}(\mathbb{R}\times L^2_\rho) \equiv C^2(\mathbf{M})$ o espaço das funções $\Phi : \mathbb{R}\times L^2_\rho \to \mathbb{R}$ que são duas vezes continuamente diferenciáveis com respeito a primeira e a segunda variável. O espaço de $\Phi\in C^{2,2}(\mathbb{R}\times L^2_\rho)$ com $D^2\Phi$ sendo globalmente Lipschitz será denotado por $C^{2,2}_{lip}(\mathbb{R}\times L^2_\rho)$ (ou equivalentemente $C^2_{lip}(\mathbf{M})$).

O gerador fraco infinitesimal Γ

Para cada $(\phi(0),\phi)\in\mathbb{R}\times L^2_\rho$, defina $\tilde{\phi} : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por

$$\tilde{\phi}(t) = \begin{cases} \phi(0) & \text{para } t\in[0,\infty) \\ \phi(t) & \text{para } t\in(-\infty,0) \end{cases}$$

Então para cada $\theta\in(-\infty,0]$ e $t\in[0,\infty)$,

$$\tilde{\phi}_t(\theta) = \tilde{\phi}(t+\theta) = \begin{cases} \phi(0) & \text{para } t+\theta \geq 0 \\ \phi(t+\theta) & \text{para } t+\theta < 0) \end{cases}$$

Uma função mensurável limitada $\Phi : \mathbb{R}\times L^2_\rho \to \mathbb{R}$ (i.e., $\Phi\in C_b(\mathbb{R}\times L^2_\rho)$), é dita pertencer a $\mathcal{D}(\Gamma)$, o domínio do operador fraco infinitesimal Γ, se existir o seguinte limite para cada $(\phi(0),\phi)\in\mathbb{R}\times L^2_\rho$ fixado:

$$\Gamma\Phi(\phi(0),\phi)=\frac{\lim_{t\downarrow 0}\Phi(\phi(0),\tilde{\phi}_t)-\Phi(\phi(0),\phi)}{t} \tag{4.14}$$

Teorema 4.2.1. *Se $\Phi\in C^{2,2}_{lip}(\mathbb{R}\times L^2_\rho)\cap\mathcal{D}(\Gamma)$, então*

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{\mathbb{E}[\Phi(S(t),S_t)-\Phi(\psi(0),\psi)]}{t}=\boldsymbol{A}\Phi(\psi(0),\psi), \tag{4.15}$$

onde

$$\boldsymbol{A}\Phi(\psi(0),\psi)=\Gamma\Phi(\psi(0),\psi)\frac{1}{2}\delta_x^2\Phi(\psi(0),\psi)\psi^2(0)g^2(\psi)+\delta_x\Phi(\psi(0),\psi)\psi(0)f(\psi) \tag{4.16}$$

e $\Gamma(\Phi)(\psi(0),\psi)$ definido em (4.14).

NOTAÇÃO:

Seja $C^{1,0,2,2}_{lip}(\mathcal{O})$ a coleção de funções contínuas $\Phi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}(\mathcal{S}_\kappa\subset\mathcal{O})$ tal que $\Phi(\cdot,\xi,\psi(0),\psi)\in C^1(\mathbb{R})$ para cada $(\xi,\psi(0),\psi)$, e $\Phi(x,\xi,\cdot,\psi)\in C^{2,2}_{lip}(\mathbb{R}\times L^2_\rho)\cup\mathcal{D}(\Gamma)$ para cada (x,ξ).

Proposição 4.2.2 (Fórmula de Dynkin). *Seja o processo controlado $\mathcal{S}_\kappa$-avaliado $\{Z(t)=(\mathbb{X}(t),N_t,S(t),S_t),\ t\geq 0\}$ (pela estratégia admissível π). Então*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{-\alpha\tau}\Phi(Z(\tau))] &= \Phi(Z(0-))+\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-\alpha t}\mathcal{L}^{C(t)}\Phi(Z(t))\,dt\right]\\ &+ \mathbb{E}\left[\sum_{0\leq t\leq\tau}e^{-\alpha t}\left(\Phi(Z(t))-\Phi(Z(t-))\right)\right],\end{aligned} \tag{4.17}$$

para todo $\Phi:\mathbb{R}\times\boldsymbol{N}\times\mathbb{R}\times L^2_\rho\to\mathbb{R}$ tal que $\Phi(\cdot,\xi,\psi(0),\psi)\in C^1(\mathbb{R})$ para todo $(\xi,\psi(0),\psi)\in\boldsymbol{N}\times\mathbb{R}\times L^2_\rho$ e $\Phi(x,\xi,\cdot,\cdot)\in C^{2,2}_{lip}(\mathbb{R}\times L^2_\rho)\cup\mathcal{D}(\Gamma)$ para todo $(x,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}$, onde

$$\mathcal{L}^c\Phi(x,\xi,\psi(0),\psi)=(\boldsymbol{A}-\alpha I+(rx-c)\partial_x)\Phi(x,\xi,\psi(0),\psi) \tag{4.18}$$

e $\boldsymbol{A}$ definido em (4.16). *Note que $\mathbb{E}[\cdots]$ acima representa $\mathbb{E}^{x,\xi,\psi(0),\psi;\pi}[\cdots]$*

Demonstração. Ver em [4] □

Definição 4.2.3. *Uma função tame $\Phi:\mathbb{R}\times C(-\infty,0]\to\mathbb{R}$ é definida da seguinte forma:*

$$\Phi(\phi(0),\phi)=h(q(\phi(0),\phi))=h(\phi(0),\phi(-\theta_1),\ldots,\phi(-\theta_k))$$

onde $C(-\infty, 0]$ é o espaço das funções contínuas $\phi : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ equipadas com a topologia uniforme, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_k < \infty$, e $h(x, y_1, \ldots, y_k)$ é tal que $h \in C^\infty(\mathbb{R}^{k+1})$.

Observação 4.2.4. *No caso em que $\Phi \in C(\mathbb{R} \times \boldsymbol{N} \times \mathbb{R} \times L^2_\rho)$ é tal que $\Phi(x, \xi, \cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times L^2_\rho \to \mathbb{R}$ é uma tame em $\mathbb{R} \times L^2_\rho$, então a seguinte fórmula de Itô para o processo controlado $\{Z(t) = (X(t), N_t, S(t), S_t), t \geq 0\}$ acontece.*

Teorema 4.2.5. *Se $\Phi \in C(\mathbb{R} \times \boldsymbol{N} \times \mathbb{R} \times L^2_\rho)$ é tal que $\Psi(x, \xi, \cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times L^2_\rho \to \mathbb{R}$ é uma função tame em $\mathbb{R} \times L^2_\rho$, então*

$$\begin{aligned} e^{-\alpha\tau}\Phi(Z(\tau)) &= \Phi(Z(0-)) + \int_0^\tau e^{-\alpha t}\mathcal{L}^{C(t)}\Phi(Z(t))\,dt \\ &+ \int_0^\tau e^{-\alpha t}\delta_{\psi(0)}\Phi(Z(t))S(t)f(S_t)\,dW(t) \\ &+ \left[\sum_{0\leq t\leq\tau} e^{-\alpha t}\left(\Phi(Z(t)) - \Phi(Z(t-))\right)\right], \end{aligned} \tag{4.19}$$

para todo τ $\boldsymbol{G}$-tempo de parada finito $\mathbb{P}$ quase certamente.

4.3 A HJBQVI

4.3.1 O Princípio da Programação Dinâmica

O princípio da programação dinâmica é uma propriedade importante da função valor, que se traduz na idéia de que, para otimizar é necessário otimizar a cada instante.

Proposição 4.3.1. *Seja $(x, \xi, \psi(0), \psi) \in \mathcal{S}_\kappa$ dado e seja $\mathcal{O}$ um subconjunto aberto de $\mathcal{S}_\kappa$ contendo $(x, \xi, \psi(0), \psi)$. Para $\pi = (C, \mathcal{T}) \in \mathcal{U}_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi)$, seja $\{(X(t), N_t, S(t), S_t), t \geq 0\}$ dado por (7.7)-(7.11) e (3.4). Defina*

$$\tau = \inf\{t \geq 0 | (X(t), N_t, S(t), S_t) \notin \bar{\mathcal{O}}\},$$

onde $\bar{\mathcal{O}}$ denota o fecho de $\mathcal{O}$. Então, para cada $t \in [0, \infty)$, nós temos a seguinte equação de otimização:

$$\begin{aligned} V_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi) &= \sup_{\pi\in\mathcal{U}_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi)} \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau} e^{-\alpha s}\frac{C^\gamma(s)}{\gamma}\,ds\right. \\ &\left. + \boldsymbol{1}_{\{t\wedge\tau<\infty\}}e^{-\alpha(t\wedge\tau)}V_\kappa(X(t\wedge\tau)), N_{t\wedge\tau}, S(t\wedge\tau), S_{t\wedge\tau}\right], \end{aligned} \tag{4.20}$$

onde usamos a notação $a \wedge b = \min\{a, b\}$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Ver em [4] $\square$

4.3.2 Dedução da HJBQVI

(A) Consumo sem transação

Assuma inicialmente que não há transação. Então o processo de estado correspondente $\{Z(t) = (X(t), N_t, S(t), S_t), t \geq 0\}$ satisfaz o seguinte conjunto de equações:

$$dX(t) = [\lambda X(t) - C(t)]dt, t \geq 0, \tag{4.21}$$

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = f(S_t)dt + g(S_t)dW(t), t \geq 0, \tag{4.22}$$

$$N_t = \xi, t \geq 0, \tag{4.23}$$

com estado inicial $(X(0-), N_{0-}, S(0), S_0) = (x, \xi, \psi(0), \psi) \in \mathcal{S}_\kappa$. Neste caso,

$$V_\kappa(X(t), N_t, S(t), S_t) = V_\kappa(X(t-), N_{t-}, S(t), S_t)$$

para todo $t \geq 0$, já que não há saltos de transação. Assuma que a função valor $V_\kappa : \mathcal{S}_k \to \mathbb{R}_+$ é suficientemente suave. Pela proposição 4.3.1 e (4.15) temos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{t\downarrow 0} \frac{\mathbb{E}[e^{-\alpha t} V_\kappa(X(t), N_t, S(t), S_t) - V_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi)]}{t} \\ &+ \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-\alpha s}\frac{C^\gamma(s)}{\gamma}\, ds\right] \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{t\downarrow 0} \frac{\mathbb{E}[e^{-\alpha t} (V_\kappa(X(t), N_t, S(t), S_t) + V_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi))]}{t} \\ &+ \lim_{t\downarrow 0} \frac{[(e^{-\alpha t} - 1)V_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi)]}{t} \\ &+ \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-\alpha s}\frac{C^\gamma(s)}{\gamma}\, ds\right]. \end{aligned}$$

Primeiro, notemos que

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-\alpha s}\frac{C^\gamma(s)}{\gamma}\, ds\right] = \frac{c^\gamma}{\gamma},$$

já que a estratégia de consumo $C(\cdot) = \{C(t), t \geq 0\}$ é contínua à direita no $t = 0$ com

$\lim_{t\downarrow 0} C(t) = c$.

Segundo, notemos que

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{[(e^{-\alpha t}-1)V_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi)]}{t} = -\alpha V_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi).$$

Terceiro, notemos que

$$\begin{aligned} & \lim_{t\downarrow 0} \frac{\mathbb{E}[e^{-\alpha t}(V_\kappa(X(t),N_t,S(t),S_t) - V_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi))]}{t} \\ = & \lim_{t\downarrow 0} \frac{[e^{-\alpha t}(V_\kappa(X(t),N_t,S(t),S_t) - V_\kappa(x,N_t,S(t),S_t))]}{t} \\ + & \lim_{t\downarrow 0} \frac{\mathbb{E}[e^{-\alpha t}(V_\kappa(x,N_t,S(t),S_t) - V_\kappa(x,\xi,S(t),S_t))]}{t} \\ + & \lim_{t\downarrow 0} \frac{\mathbb{E}[e^{-\alpha t}(V_\kappa(x,\xi,S(t),S_t) - V_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi))]}{t}. \end{aligned}$$

Usando (4.21) e (4.23), temos

$$\begin{aligned} & \lim_{t\downarrow 0} \frac{\mathbb{E}[e^{-\alpha t}(V_\kappa(X(t),N_t,S(t),S_t) - V_\kappa(x,\xi,S(t),S_t))]}{t} \\ = & (\lambda x - c)\partial_x V_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi) \end{aligned}$$

e

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{\mathbb{E}[e^{-\alpha t}(V_\kappa(x,N_t,S(t),S_t) - V_\kappa(x,\xi,S(t),S_t))]}{t} = 0$$

Também por (4.15), temos

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{\mathbb{E}[e^{-\alpha t}(V_\kappa(x,\xi,S(t),S_t) - V_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi))]}{t} = \mathcal{A}V_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi).$$

Combinando os termos acima, chegamos que

$$0 \geq (A + (\lambda x - c)\partial_x - \alpha\mathcal{I})V_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi) + \frac{c^\gamma}{\gamma}, \forall c \geq 0$$

Isso mostra que

$$\begin{aligned}
0 &\geq \mathcal{A}V_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi) \\
&\equiv \sup_{c\geq 0}\left(\mathcal{L}^c V_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi) + \frac{c^\gamma}{\gamma}\right) \\
&= (\mathcal{A} + \lambda x\partial_x V_\kappa - \alpha I)V\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi) \\
&+ \sup_{c\geq 0}\left(\frac{c^\gamma}{\gamma} - c\partial_x V_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi)\right) \\
&= (\mathcal{A} + \lambda x\partial_x - \alpha\mathcal{I})V_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi) \\
&+ \frac{1-\gamma}{\gamma}(\partial_x V_\kappa)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(x,\xi,\psi(0),\psi),
\end{aligned}$$

já que o máximo da expressão acima é alcançado em

$$c^* = (\partial_x V_\kappa)^{\frac{1}{\gamma-1}}(x,\xi,\psi(0),\psi).$$

Note que o operador diferencial de Fréchet $\mathbf{A}$ e $\mathcal{S}$ são definidos em (4.15) e (4.14) respectivamente.

(B) Transações sem consumo

No próximo caso vamos considerar que existem transações e não há consumo.

Para cada $\Phi : \mathcal{S}_\kappa \to [0,\infty)$ localmente limitada e cada $(x,\xi,\psi(0),\psi) \in \mathcal{S}_\kappa$ defina o operador intervenção

$$\mathcal{M}_\kappa\Phi(x,\xi,\psi(0),\psi) = \sup\left\{\Phi(\hat{x},\hat{\xi},\hat{\psi(0)},\hat{\psi})|\zeta \in \mathcal{R}(\xi) - \{\mathbf{0}\}, (\hat{x},\hat{\xi},\hat{\psi(0)},\hat{\psi}) \in \mathcal{S}_\kappa\right\} \tag{4.24}$$

onde $(\hat{x},\hat{\xi},\hat{\psi(0)},\hat{\psi})$ é definido como segue:

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= x - \kappa - (m(0) + \mu|m(0)|)\psi(0) \\
&- \sum_{k=1}^{\infty}[(1+\mu)m(-k)\psi(0) \\
&- \beta m(-k)(\psi(0) - \psi(\tau(-k)))]\,\mathbf{1}_{\{n(-k)<0,0\leq m(-k)\leq -n(-k)\}} \\
&- \sum_{k=1}^{\infty}[(1-\mu)m(-k)\psi(0) - \beta m(-k)(\psi(0) - \psi(\tau(-k)))] \\
&\cdot\ \mathbf{1}_{\{n(-k)>0,-n(-k)\leq m(-k)\leq 0\}},
\end{aligned} \tag{4.25}$$

e para todo $\theta \in (-\infty, 0]$,

$$
\begin{aligned}
\hat{\xi}(\theta) &= (\xi \oplus \zeta)(\theta) \\
&= m(0)\mathbf{1}_{\{\tau(0)\}}(\theta) \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \big(n(-k) + m(-k)\,\big[\mathbf{1}_{n(-k)<0,0\leq m(-k)\leq -n(-k)} \\
&+ \mathbf{1}_{\{n(-k)>0,-n(-k)\leq m(-k)\leq 0\}}\big]\big)\,\mathbf{1}_{\{\tau(-k)\}}(\theta), \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

e, novamente,

$$(\hat{\psi}(0), \hat{\psi}) = (\psi(0), \psi). \qquad (4.27)$$

Se $(\hat{x}, \hat{\xi}, \hat{\psi}(0), \hat{\psi}) \notin \mathcal{S}_\kappa$ para todo $\zeta \in \mathcal{R}(\xi) - \{0\}$, fazemos $\mathcal{M}_\kappa \Phi(x, \xi, \psi(0), \psi) = 0$. Se para todo $(x, \xi, \psi(0), \psi) \in \mathcal{S}_\kappa$ existe $(\hat{x}, \hat{\xi}, \hat{\psi}(0), \hat{\psi}) \in \mathcal{S}_\kappa$ tal que

$$\mathcal{M}_\kappa \Phi(x, \xi, \psi(0), \psi) = \Phi(\hat{x}, \hat{\xi}, \hat{\psi}(0), \hat{\psi}),$$

então fazemos

$$\hat{\zeta}(x, \xi, \psi(0), \psi) = \hat{\zeta}_\Phi(x, \xi, \psi(0), \psi) = (\hat{x}, \hat{\xi}, \hat{\psi}(0), \hat{\psi}) \in \mathcal{S}_\kappa. \qquad (4.28)$$

Vamos denotar $\hat{\zeta}(x, \xi, \psi(0), \psi)$ por uma selação mensurável da aplicação

$$(x, \xi, \psi(0), \psi) \longmapsto (\hat{x}, \hat{\xi}, \hat{\psi}(0), \hat{\psi})$$

definida em (4.28).

Fazemos o seguinte pressuposto técnico sobre a existência de uma seleção mensurável

$$\hat{\zeta}(x, \xi, \psi(0), \psi) = \hat{\zeta}_{V_\kappa}(x, \xi, \psi(0), \psi)$$

para a função valor $V_\kappa : \mathcal{S}_\kappa \to \mathbb{R}$; isto é, existe uma função mensurável $\hat{\zeta}_{V_\kappa} : \mathcal{S}_\kappa \to \mathbb{R}$ tal que

$$V_\kappa(\hat{\zeta}(x, \xi, \psi(0), \psi)) = \mathcal{M}_\kappa V_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi),\ \forall (x, \xi, \psi(0), \psi) \in \mathcal{S}_\kappa. \qquad (4.29)$$

Suposição 4.3.2. *Para cada $(x, \xi, \psi(0), \psi) \in \mathcal{S}_\kappa$, existe uma função mensurável $\hat{\zeta}_{V\kappa} : \mathcal{S}_\kappa \to \mathbb{R}$ tal que (4.29) é satisfeita para todo $(x, \xi, \psi(0), \psi) \in \mathcal{S}_\kappa$.*

Assuma sem perda de generalidade que o portfólio do investidor imediatamente antes do tempo t é $(X(t-), N_{t-}, S(t), S_t) = (x, \xi, \psi(0), \psi) \in \mathcal{S}_\kappa$. Uma transação imediata da quantidade $\zeta \in \mathcal{R} - \{0\}$ sem consumo no tempo t (isto é, $C(t) = 0$) rende que

$(\mathcal{X}(t), N_t, S(t), S_t) = (\hat{x}, \hat{\xi}, \hat{\psi}(0), \hat{\psi})$, onde $\hat{x}$, $\hat{\xi}$ e $(\hat{\psi}(0), \hat{\psi})$ são dadas em (4.25)-(4.27). É claro que

$$V_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi) \geq \mathcal{M}_\kappa V_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi), \ \forall (x, \xi, \psi(0), \psi) \in \mathcal{S}_\kappa.$$

Combinando as seções 4.3.2(A) e 4.3.2(B), temos a seguinte desigualdade:

$$\max\{\mathcal{A}V_\kappa, \mathcal{M}_\kappa V_\kappa - V_\kappa\} \leq 0 \text{ em } \mathcal{S}_\kappa^\circ,$$

onde $\mathcal{S}_\kappa^\circ$ denota o interior da região de solvência $\mathcal{S}_\kappa$.

Usando uma técnica padrão em deduzir a desigualdade HJBQVI (ver em [4]), mostra-se que no conjunto.

$$\{(x, \xi, \psi(0), \psi) \in \mathcal{S}_\kappa^\circ | \mathcal{M}_\kappa V_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi) < V_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi)\},$$

temos $\mathcal{A}_\kappa V_\kappa = 0$, e no conjunto

$$\{(x, \xi, \psi(0), \psi) \in \mathcal{S}_\kappa^\circ | \ \mathcal{A}V_\kappa < 0\},$$

temos $\mathcal{M}_\kappa V_\kappa = V_\kappa$. Portanto temos a seguinte HJBQVI em $\mathcal{S}_\kappa^\circ$:

$$\max\{\mathcal{A}V_\kappa, \mathcal{M}_\kappa V_\kappa - V_\kappa\} = 0 \text{ em } \mathcal{S}_\kappa^\circ, \tag{4.30}$$

onde

$$\mathcal{A}\Phi = (\mathbf{A} + rx\partial_x - \alpha)\Phi + \sup_{c \geq 0} \left(\frac{c^\gamma}{\gamma} - c\partial_x \Phi \right), \tag{4.31}$$

$\mathcal{M}_\kappa \Phi$ é dado em (4.24), e o operador $\mathbf{A}$ é dado em (4.16).

4.3.3 Valores de fronteira da HJBQVI

(A) A região de solvência para $\kappa = 0$ e $\mu > 0$.

Quando existe custo de transação proporcional mas não existe custo de transação fixo, a região de solvência pode ser escrita como

$$\mathcal{S}_0 = \{(x, \xi, \psi(0), \psi) | G_0(x, \xi, \psi(0), \psi) \geq 0\} \cup S_+,$$

onde G_0 é a função liquidação dada em (4.6) com $\kappa = 0$, isto é,

$$\begin{aligned} G_0((x,\xi,\psi(0),\psi)) &= x+\sum_{k=0}^{\infty}[\min\{(1-\mu)n(-k),\ (1+\mu)n(-k)\}\psi(0) \\ &- n(-k)\beta(\psi(0)-\psi(\tau(-k)))]\,. \end{aligned} \tag{4.32}$$

No caso $\kappa = 0$, afirmamos que

$$S_+ \subset \{(x,\xi,\psi(0),\psi)|G_0(x,\xi,\psi(0),\psi) \geq 0\}.$$

Isto acontece pois

$$x \geq 0 \text{ e } n(-i) \geq 0,\ \forall i = 0,1,2,\ldots \Rightarrow G_0(x,\xi,\psi(0),\psi) \geq 0.$$

Neste caso, todas as ações que possua ou deva poderão ser liquidadas quando há uma ausência de custo fixo de transação $\kappa = 0$. Portanto,

$$\mathcal{S}_0 = \{(x,\xi,\psi(0),\psi)|G_0(x,\xi,\psi(0),\psi) \geq 0\}.$$

(B) Decomposição da $\partial\mathcal{S}_\kappa$

Para $I \subset N_0 \equiv \{0,1,2,\ldots\}$, a fronteira $\partial\mathcal{S}_\kappa$ de $\mathcal{S}_\kappa$ pode ser decomposta como segue:

$$\partial\mathcal{S}_\kappa = \bigcup_{I\subset N_0}(\partial_{-,I}\mathcal{S}_\kappa \cup \partial_{+,I}\mathcal{S}_\kappa), \tag{4.33}$$

onde

$$\partial_{-,I}\mathcal{S}_\kappa = \partial_{-,I,1}\mathcal{S}_\kappa \cup \partial_{-,I,2}\mathcal{S}_\kappa, \tag{4.34}$$

$$\partial_{+,I}\mathcal{S}_\kappa = \partial_{+,I,1}\mathcal{S}_\kappa \cup \partial_{+,I,2}\mathcal{S}_\kappa, \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned} \partial_{+,I,1}\mathcal{S}_\kappa = \quad & \{(x,\xi,\psi(0),\psi)|G_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi) = 0, x \geq 0, n(-i) < 0 \\ & \text{para todo } \ i \in I \text{ e } n(-i) \geq 0 \text{ para todo } i \notin I\}\,, \end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}\partial_{+,I,2}\mathcal{S}_\kappa = \quad & \{(x,\xi,\psi(0),\psi)|G_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi)<0, x\geq 0, n(-i)=0 \\ & \text{para todo } \ i\in I \text{ e } n(-i)\geq 0 \text{ para todo } i\notin I\}\,, \end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}\partial_{-,I,1}\mathcal{S}_\kappa = \quad & \{(x,\xi,\psi(0),\psi)|G_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi)=0, x< 0, n(-i)<0 \\ & \text{para todo } \ i\in I \text{ e } n(-i)\geq 0 \text{ para todo } i\notin I\} \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}\partial_{-,I,2}\mathcal{S}_\kappa = \quad & \{(x,\xi,\psi(0),\psi)|G_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi)<0, x< 0, n(-i)=0 \\ & \text{para todo } \ i\in I \text{ e } n(-i)\geq 0 \text{ para todo } i\notin I\} \end{aligned} \tag{4.39}$$

Por exemplo, se $I = N_0$, então $n(-i) < 0$, $\forall i = 01, 2, \ldots$ e

$$G_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi)\geq 0 \Rightarrow x\geq \kappa.$$

Neste caso, $\partial_{-,N_0}\mathcal{S}_\kappa = \emptyset$,

$$\begin{aligned}\partial_{+,N_0,1}\mathcal{S}_\kappa = \quad & \{(x,\xi,\psi(0),\psi)|G_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi)=0, x\geq 0, n(-i)<0 \\ & \text{e } n(-i)<0 \text{ para todo } i\in N_0\}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_{+,N_0,2}\mathcal{S}_\kappa = \quad & \{(x,\xi,\psi(0),\psi)|G_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi)<0, x\geq 0, \\ & \text{e } n(-i)=0 \text{ para todo } i\in N_0\} \\ = \quad & \{(x,\mathbf{0},\psi(0),\psi)|0\leq x\leq \kappa\}. \end{aligned}$$

(C) Condições de fronteira para a função valor

Agora vamos examinar a função valor $V_\kappa : \mathcal{S}_\kappa \to \mathbb{R}_+$ na fronteira de $\partial\mathcal{S}_\kappa$ da região de solvência $\mathcal{S}_\kappa$ definida em (4.33)-(4.39).

Faremos as seguintes observações sobre o comportamento da função valor na fronteira $\partial\mathcal{S}_\kappa$.

Lema 4.3.3. *Seja $(x,\xi,\psi(0),\psi)\in\mathcal{S}_\kappa$ e seja $\hat{x}$, $\hat{\xi}$, e $(\hat{\psi}(0),\psi)$ como foi definido em (4.25)-(4.27). Então*

$$G_0(\hat{x},\hat{\xi},\hat{\psi}(0),\psi) = G_0(x,\xi,\psi(0),\psi)-\kappa \tag{4.40}$$

Demonstração. Suponha que $(x, \xi, \psi(0), \psi) \in \mathcal{S}_\kappa$ seja o portfólio inicial do investidor. Então, uma transação instantânea da quantidade $\zeta = \{m(-k),\ k = 0, 1, \ldots\} \in \mathcal{R}(\xi)$ irá resultar um pulo do estado $(x, \xi, \psi(0), \psi)$ para o novo estado $(\hat{x}, \hat{\xi}, \hat{\psi}(0), \psi)$. O resultado segue ao substituir $(\hat{x}, \hat{\xi}, \hat{\psi}(0), \psi)$ em G_0 definido em (4.32). □

Lema 4.3.4. *Se não há custo de transação fixo e se* $(x, \xi, \psi(0), \psi) \in \partial_{I,1}\mathcal{S}_0$*, isto é,*

$$G_0(x, \xi, \psi(0), \psi) = 0,$$

então a única estratégia admissível é de não fazer consumo mas fechar todas as posições abertas, a fim de trazer seu portfólio para $\{0\} \times \{\boldsymbol{0}\} \times [0, \infty) \times L^2_{\rho,+}$ *depois de pagar os custos proporcionais de transações, impostos sobre o capital ganho e assim por diante.*

Demonstração. Ver em [4] □

Teorema 4.3.5. *Sejam* $\kappa > 0$ *e* $\mu > 0$*. Em* $\partial_{I,1}\mathcal{S}_\kappa$ *para* $I \subset \mathbb{N}$*. Então o investidor não poderá consumir mas fechar todas as posições abertas a fim de trazer seu portfólio para* $\{0\} \times \{\boldsymbol{0}\} \times [0, \infty) \times L^2_{\rho,+}$*. Neste caso a função valor* $V_\kappa : \partial_{I,1}\mathcal{S}_\kappa \to \mathbb{R}_+$ *satisfaz a seguinte equação:*

$$\left(\mathcal{M}_\kappa \Phi - \Phi\right)(x, \xi, \psi(0), \psi) = 0.$$

Demonstração. Suponha que o portfólio inicial do investidor é $(x, \xi, \psi(0), \psi) \in \partial_{I,1}\mathcal{S}_\kappa$ para algum $I \subset N_0$. Uma transação da quantidade $\zeta = \{m(-k),\ k = 0, 1, 2, \ldots\} \in \mathcal{R}(\xi) - \{0\}$ irá facilitar um pulo do estado $(x, \xi, \psi(0), \psi)$ para o novo estado $(\hat{x}, \hat{\xi}, \hat{\psi}(0), \hat{\psi})$ dado em (4.25)-(4.27).

Observamos que já que $\zeta = \{m(-k),\ k = 0, 1, 2, \ldots\} \in \mathcal{R}(\xi) - \{0\}$, $n(-k) < 0$ implica $\hat{n}(-k) = n(-k) + m(-k) \leq 0$ e $n(-k) > 0$ implica que $\hat{n}(-k) = n(-k) + m(-k) \geq 0$ para $k = 0, 1, \ldots$.

Levando em conta o novo portfólio $(\hat{x}, \hat{\xi}, \hat{\psi}(0), \psi)$, nós temos pelo lema 4.3.3 que

$$G_0(\hat{x}, \hat{\xi}, \hat{\psi}(0), \psi) = G_0(x, \xi, \psi(0), \psi) - \kappa.$$

Portanto, se $(x, \xi, \psi(0), \psi) \in \partial_{I,1}\mathcal{S}_\kappa$ para algum $I \subset N_0$, então

$$G_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi) = G_0(x, \xi, \psi(0), \psi) - \kappa = 0 = G_0(\hat{x}, \hat{\xi}, \hat{\psi}(0), \hat{\psi}).$$

Isso implica que $(\hat{x}, \hat{\xi}, \hat{\psi}(0), \hat{\psi}) \in (x, \xi, \psi(0), \psi) \in \partial_{I,1}\mathcal{S}_0$. Pelo lema 4.3.4, provamos que a única estratégia admissível é de não fazer consumo mas fazer uma transação para o novo estado $(\hat{x}, \hat{\xi}, \hat{\psi}(0), \hat{\psi}) \in (x, \xi, \psi(0), \psi) \in \partial_{I,1}\mathcal{S}_0$. Portanto, começando em $(x, \xi, \psi(0), \psi) \in \partial_{I,1}\mathcal{S}_\kappa$, fazemos duas transações imediatas (as quais serão contadas como uma única transação), com a quantidade total especificada pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} 0 &= x - \kappa + \sum_{i \in I^C} \left[n(-i)(1-\mu-\beta)\psi(0) + \beta n(-i)\psi(\tau(-i)) \right] \\ &+ \sum_{i \in I} \left[n(-i)(1+\mu-\beta)\psi(0) + \beta n(-i)\psi(\tau(-i)) \right], \end{aligned}$$

$$\mathbf{0} = \xi \oplus \zeta$$

para chegar no destino final $(0, \mathbf{0}, \psi(0), \psi)$. Isto prova o teorema. $\square$

Condição de Fronteira (i)

No hiperplano

$$\partial_{-,\emptyset,2}\mathcal{S}_\kappa = \{(0, \xi, \psi(0), \psi) \in \mathcal{S}_\kappa | G_\kappa(0, \xi, \psi(0), \psi) < 0, n(-i) \geq 0 \forall i\},$$

a única estratégia para o investidor é de não fazer transação e não consumir, já que $x < 0$ e $G_\kappa(0, \xi, \psi(0), \psi) < 0$, mas deixar que o preço das ações cresçam como em (3.4). Portanto, a função valor V_κ em $\partial_{-,\emptyset,2}\mathcal{S}_\kappa$ satisfaz a equação

$$\mathcal{L}^0\Phi \equiv (\mathbf{A} - \alpha + rx\partial_x)\Phi = 0,$$

desde que seja suficientemente suave.

Condição de Fronteira (ii)

Em $\partial_{I,1}\mathcal{S}_\kappa$ para $I \subset N_0$, o investidor não poderá consumir mas recomprar $n(-i)$ partes de ações para $i \in I$ e vender $n(-i)$ partes de ações para $i \in I^C$ afim de trazer seu portfólio para $\{0\} \times \{\mathbf{0}\} \times [0, \infty) \times L^2_{\rho,+}$ depois de pagar os custo de transação, taxas sobre o capital ganho e assim por diante. Neste caso a função valor $V_\kappa : \partial_{I,1}\mathcal{S}_\kappa \to \mathbb{R}$ satisfaz a seguinte equação

$$(\mathcal{M}_\kappa\Phi - \Phi)(x, \xi, \psi(0), \psi) = 0.$$

Condição de Fronteira (iii)

Em $\partial_{+,I,2}\mathcal{S}_\kappa$ para $I \in \mathbb{N}$, a única estratégia admissível é de não fazer transação mas consumir otimamente de acordo com a função taxa de consumo ótima

$$c^*(x, \xi, \psi(0), \psi) = \left(\frac{\partial V_\kappa}{\partial_x}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} (x, \xi, \psi(0), \psi),$$

na qual é obtida por

$$\operatorname*{argmax}_{c \geq 0} \left\{ \mathcal{L}^c V_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi) + \frac{c^\gamma}{\gamma} \right\},$$

onde $\mathcal{L}^c$ é definido em (4.18) e $\operatorname{argmax} f(x) := \{x | \forall y : f(y) \leq f(x)\}$.

Isto acontece pois o dinheiro na conta poupança não é suficiente para recomprar qualquer parte de ações mas sim de consumir otimamente. Neste caso, a função valor $V_\kappa : \partial_{+,I,2}\mathcal{S}_\kappa \to \mathbb{R}_+$ satisfaz a equação

$$\mathcal{A}\Phi \equiv (\mathbf{A} - \alpha + rx\partial_x)\,\Phi + \frac{1-\gamma}{\gamma}\,(\partial_x\Phi)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0$$

desde que seja suficientemente suave.

Condição de Fronteira (iv)

Em $\partial_{-,I,2}\mathcal{S}_\kappa$ a única estratégia admssível de consumo-investimento é de não consumir e de não fazer transação mas deixar que o preço das ações cresçam como na Condição de Fronteira (i).

Condição de Fronteira (v)

Em $\partial_{+,N_0,2}\mathcal{S}_\kappa = \{(x, \xi, \psi(0), \psi) | 0 \leq x \leq \kappa, n(-i) = 0,\ \forall i = 0, 1, \ldots\}$, a única estratégia admissível de consumo-investimento é de não fazer transação mas consumir otimamente como na Condição de Fronteira (iii).

(D) A HJBQVI com Condições de Fronteira

Concluímos a partir do que vimos acima que a HJBQVI pode ser expressa como

$$HJBQVI(*) = \begin{cases} \max\{\mathcal{A}\Phi, \mathcal{M}_\kappa\Phi - \Phi\} = 0 & \text{em} \quad \mathcal{S}_\kappa^\circ \\ \mathcal{A}\Phi = 0 & \text{em} \quad \bigcup_{I\subset N_0} \partial_{+,I,2}\mathcal{S}_\kappa \\ \mathcal{L}^0\Phi = 0 & \text{em} \quad \bigcup_{I\subset N_0} \partial_{-,I,2}\mathcal{S}_\kappa \\ \mathcal{M}_\kappa\Phi - \Phi = 0 & \text{em} \quad \bigcup_{I\subset N_0} \partial_{I,1}\mathcal{S}_\kappa \end{cases}$$

onde $\mathcal{A}\Phi$, $\mathcal{L}^0$, e $\mathcal{M}_\kappa$ são definidos em (4.31), (4.18), e (4.24), respectivamente.

Observe que a HJBQVI que acabamos de deduzir nos dá a condição necessária que a função valor deve satisfazer, isto é, com a HJBQVI conseguimos encontrar bons candidatos a função valor.

4.4 O Teorema de Verificação

Definição 4.4.1. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Uma família $\{f(j)\}_{j\in J}$ de funções reais mensuráveis é chamada uniformemente integrável se*

$$\lim_{M\to\infty}\left(\sup_{j\in J}\left\{\int_{\{|f_j|>M\}} |f_j|\, d\mathbb{P}\right\}\right) = 0.$$

Teorema 4.4.2. *Suponha* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *sequência de funções reais mensuráveis em* Ω *tais que*

$$\lim_{k\to 0} f_k(w) = f(w) \text{ quase todos } w.$$

Então as seguintes são equivalentes:

1. $\{f_k\}$ *é uniformemente integrável*

2. $\int f_k d\mathbb{P} \to \int f\, d\mathbb{P}$ *quando* $k \to \infty$

Teorema 4.4.3. **(a)** *Seja* $U_\kappa = \mathcal{S}_\kappa - \bigcup_{I\subset\mathbb{Z}_+} \partial_{I,1}\mathcal{S}_\kappa$. *Suponha que existe uma função não negativa localmente limitada* $\Phi \in C_{lip}^{1,0,2,2}(\mathcal{S}_\kappa) \cap \mathcal{D}(\Gamma)$ *tal que*

$$\tilde{\mathcal{A}}\Phi \leq 0 \text{ em } U_\kappa, \tag{4.41}$$

$$\Phi \geq \mathcal{M}_\kappa \Phi \text{ em } U_\kappa, \tag{4.42}$$

onde

$$\tilde{\mathcal{A}}\Phi = \begin{cases} \mathcal{A}\Phi & \text{em} \quad \mathcal{S}_\kappa^o \cup \bigcup\limits_{I\subset\mathbb{Z}_+} \partial_{+,I,2}\mathcal{S}_\kappa \\ \mathcal{L}^0\Phi & \text{em} \quad \bigcup\limits_{I\subset\mathbb{Z}_+} \partial_{-,I,2}\mathcal{S}_\kappa \end{cases}$$

então $\Phi \geq V_\kappa$ *em* $\mathcal{U}_\kappa$

(b) *Defina* $D \equiv \{(x,\xi,\psi(0),\psi) \in U_\kappa | \Phi(x,\xi,\psi(0),\psi) > \mathcal{M}_k\Phi(x,\xi,\psi(0),\psi)\}$. *Suponha*

$$\tilde{\mathcal{A}}\Phi(x,\xi,\psi(0),\psi) = 0 \text{ em } D \tag{4.43}$$

e que $\hat{\zeta}(x,\xi,\psi(0),\psi) = \hat{\zeta}_\Phi(x,\xi,\psi(0),\psi)$ *existe para todo* $(x,\xi,\psi(0),\psi) \in \mathcal{S}_\kappa$. *Defina*

$$c^* = \begin{cases} (\partial_x\Phi)^{\frac{1}{\gamma-1}} & \text{em} \quad \mathcal{S}_\kappa^o \cup \bigcup_{I\subset\mathbb{Z}_+} \partial_{+,I,2}\mathcal{S}_\kappa \\ 0 & \text{em} \quad \bigcup_{I\subset\mathbb{Z}_+} \partial_{-,I,2}\mathcal{S}_\kappa \end{cases}$$

e defina a estratégia de negociação $\mathcal{T}^* = \{(\tau^*(i),\zeta^*(i)), i = 1,2,\ldots\}$ *indutivamente como se segue.*
Primeiro, ponha $\tau^*(0) = 0$ *e indutivamente*

$$\tau^*(i+1) = \inf\{t > \tau^*(i) | X^{(i)}(t), N_t^{(i)}, S(t), S_t)) \notin D\}, \tag{4.44}$$

$$\zeta^*(i+1) = \hat{\zeta}(X^{(i)}(\tau^*(i+1)-), N_{\tau^*(i+1)}^{(i)}, S(\tau^*(i+1)), S_{\tau^*(i+1)}), \tag{4.45}$$

onde $\{(X^{(i)}(t), N_t^{(i)}, S(t), S_t, t \geq 0)\}$ *é o estado do processo controlado obtido aplicando a combinação de controles*

$$\tau^*(i) = (c^*, (\tau^*(1), \tau^*(2), \ldots, \tau^*(i); \zeta^*(1), \zeta^*(2), \ldots, \zeta^*(i))), \; i = 1,2,\ldots.$$

Suponha $\pi^* = (C^*, \mathcal{T}^*) \in \mathcal{U}_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi)$ *e que*

$$e^{-\delta t}\Phi(X^*(t), N_t^*, S(t), S_t) \to 0, \ \textit{como } t \to \infty \textit{ quase sempre}$$

e que a família

$$\{e^{-\delta\tau}\Phi(X^*(\tau), N_\tau^*, S(\tau), S_\tau) | \tau \textit{ é } \boldsymbol{G}\textit{-tempo de parada}\} \tag{4.46}$$

é uniformemente integrável. Então $\Phi(x, \xi, \psi(0), \psi) = V_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi)$ *e* π^* *obtida em (4.44)-(4.45) é ótima.*

Demonstração. **(a)** Suponha $\pi = (C, \mathcal{T}) \in \mathcal{U}_\kappa(x, \xi, \psi(0), \psi)$, onde $C = \{C(t),\ t \geq 0\}$ é o processo taxa de consumo e $\mathcal{T} = \{(\tau(i), \zeta(i)),\ i = 1, 2, \ldots\}$ é a estratégia de negociação. Denote o processo controlado (por π) com estado inicial $(x, \xi, \psi(0), \psi)$ por

$$\{Z(t) = (X(t), N_t, S(t), S_t),\ t \geq 0\}.$$

Para $R > 0$, ponha

$$T(R) = R \wedge \inf\{t > 0 |\ ||Z(t)|| \geq R\},$$

e defina $\theta(i+1) = \theta(i+1; R) = \tau(i) \vee (\tau(i+1) \wedge T(R))$, onde $||Z(t)||$ é a norma de $Z(t)$ em $\mathbb{R} \times \mathbf{N} \times \mathbb{R} \times L_\rho^2$ na topologia produto. Então pela fórmula de Dynkin (4.17), temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{-\alpha\theta(i+1)}\Phi(Z(\theta(i+1)-)\right] &= \mathbb{E}\left[e^{-\alpha\tau(i)}\Phi(Z(\tau(i)))\right. \\
&+ \left.\int_{\tau(i)}^{\theta(i+1)} e^{-\alpha t}\mathcal{L}^{C(t)}\Phi(Z(t))\,dt\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[e^{-\alpha\tau(i)}\Phi(Z(\tau(i)))\right] \\
&- \mathbb{E}\left[\int_{\tau(i)}^{\theta(i+1)} e^{-\delta t}\frac{C^\gamma(t)}{\gamma}\,dt\right],
\end{aligned} \tag{4.47}$$

já que $\tilde{\mathcal{A}}\Phi \leq 0$.

Equivalentemente, nós temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{-\alpha\tau(i)}\Phi(Z(\tau(i)))\right] &- \mathbb{E}\left[e^{-\alpha\theta(i+1)}\Phi(Z(\theta(i+1)-))\right] \\
&\geq \mathbb{E}\left[\int_{\tau(i)}^{\theta(i+1)} e^{-\alpha t}\frac{C^\gamma(t)}{\gamma}\,dt\right].
\end{aligned}$$

Tomando $R \to \infty$, usando o lema de Fatou, temos que

$$\mathbb{E}\left[e^{-\alpha\tau(i+1)}\Phi(Z(\tau(i+1)-))\right] \leq \liminf \mathbb{E}\left[e^{-\alpha\theta(i+1)}\Phi(Z(\theta(i+1)-))\right].$$

Dado $\epsilon > 0$, $\exists R_0$ fixado tal que

$$\mathbb{E}\left[e^{-\alpha\tau(i+1)}\Phi(Z(\tau(i+1)-))\right] - \frac{\epsilon}{k} < \liminf \mathbb{E}\left[e^{-\alpha\theta(i+1)}\Phi(Z(\theta(i+1)-))\right].$$

Pela definição de $\liminf$ tem-se que

$$-\mathbb{E}\left[e^{-\alpha\theta(i+1)}\Phi(Z(\theta(i+1)-))\right] < -\mathbb{E}\left[e^{-\alpha\tau(i+1)}\Phi(Z(\tau(i+1)-))\right] + \frac{\epsilon}{k}.$$

Somando então de $i = 0$ a $i = k$ nos dá que

$$\begin{aligned}
\epsilon + \Phi(x, \xi, \psi(0), \psi) \quad &+ \quad \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left[e^{-\alpha\tau(i)}\left(\Phi(Z(\tau(i))) - \Phi(Z(\tau(i-)))\right)\right] \\
&- \quad \mathbb{E}[e^{-\alpha\tau(k+1)}\Phi(Z(\tau(k+1)-))] \\
&\geq \quad \mathbb{E}\left[\int_0^{\theta(k+1)} e^{-\delta t}\frac{C^\gamma(t)}{\gamma}\, dt\right].
\end{aligned}$$

Agora,

$$\Phi(Z(\tau(i))) \leq \mathcal{M}_\kappa \Phi(Z(\tau(i)-)) \text{ para } i = 1, 2, \ldots$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
&\epsilon + \Phi(x, \xi, \psi(0), \psi) + \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left[e^{-\alpha\tau(i)}\left(\mathcal{M}_\kappa\Phi(Z(\tau(i)-)) - \Phi(Z(\tau(i)-))\right)\right] \\
\geq\ &\mathbb{E}\left[\int_0^{\theta(k+1)} e^{-\delta t}\frac{C^\gamma(t)}{\gamma}\, dt + e^{-\alpha\tau(k+1)}\Phi(Z(\tau(k+1)-))\right]. \qquad (4.48)
\end{aligned}$$

É claro que

$$\mathcal{M}_\kappa\Phi(Z(\tau(i)-)) - \Phi(Z(\tau(i)-)) \leq 0. \qquad (4.49)$$

logo,

$$\begin{aligned}
\epsilon + \Phi(x, \xi, \psi(0), \psi) \quad &\geq \quad E\left[\int_0^{\theta(k+1)} e^{-\delta t}\frac{C^\gamma(t)}{\gamma}\, dt\right. \\
&+ \quad \left. e^{-\alpha\tau(k+1)}\Phi(Z(\tau(k+1)-))\right]. \qquad (4.50)
\end{aligned}$$

Tomando $k \to \infty$ e $\epsilon \to 0$ (já que foi tomado arbitrariamente), temos

$$\Phi(x, \xi, \psi(0), \psi) \geq \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{C^\gamma(t)}{\gamma}\, dt\right], \qquad (4.51)$$

já que Φ é função não negativa localmente limitada. Portanto,

$$\Phi(x,\xi,\psi(0),\psi) \geq J_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi), \ \forall \pi \in \mathcal{U}_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi). \tag{4.52}$$

Daí,

$$\Phi(x,\xi,\psi(0),\psi) \geq V_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi).$$

(b) Defina $\pi^* = (C^*, \mathcal{T}^*)$, onde $\mathcal{T}^* = \{(\tau^*(i), \zeta^*(i)), \ i = 1, 2, \ldots\}$ por (4.44) e (4.45). Repetindo o argumento da parte **(a)** para $\pi = \pi^*$ e usando o fato da família (4.46) ser uniformemente integrável, temos que

$$\begin{aligned} \Phi(x,\xi,\psi(0),\psi) &= E\left[\int_0^{\theta(k+1)} e^{-\delta t}\frac{C^\gamma(t)}{\gamma}\,dt\right. \\ &+ \left. e^{-\alpha\tau(k+1)}\Phi(Z(\tau^*(k+1)-))\right]. \end{aligned}$$

e então as desigualdades seguintes tornam-se igualdades. Tomando $k \to \infty$ em (4.53), por (4.46) temos

$$\Phi(x,\xi,\psi(0),\psi) = J_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi;\pi^*).$$

Combinando isso com (4.52), obtemos

$$\begin{aligned} \Phi(x,\xi,\psi(0),\psi) &\geq \sup J_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi;\pi) \\ &\geq J_\kappa(x,\xi,\psi(0),\psi;\pi^*) \\ &= \Phi(x,\xi,\psi(0),\psi). \end{aligned}$$

$\square$

Conclusão

Nos concentramos em um problema específico que surge de um problema de otimização de portfólio hereditário em que um pequeno investidor deseja encontrar a melhor estratégia de consumo-negociação, π, que lhe dê a função valor. Para isto, deduzimos a desigualdade de Hamilton Jacobi Bellman, juntamente com as condições de fronteira e em seguida, estabelecemos o teorema de verificação para a estratégia de consumo-negociação ótima.

Neste trabalho, conseguimos ver que um pequeno investidor sob certas condições consegue traçar uma estratégia de negociação-consumo ideal. Basta consideramos um conjunto que representa a região de solvência menos uma região onde a função de liquidação se anula. Em seguida usamos uma função não negativa localmente limitada, Φ, que satisfaz algumas desigualdades, e definimos uma estratégia de negociação, π^*, de forma conveniente. Fazendo isso temos que Φ é a função valor e π^* é ótima.

Além disso, concluímos que a equação diferencial estocástica hereditária, que o preço das ações satisfaz, sob as hipóteses de continuidade Lipschitz e crescimento linear, tem solução e esta é única.

Referências

[1] Braumann, C. A. *Uma introdução às equações diferenciais estocásticas e aplicações*. Sociedade Portuguesa de Estatística (2005).

[2] Breiman, L.: Probability, Addison Wesley (1968).

[3] Chang, M-H.: *Stochastic Control of Hereditary Systems and Applications*. Springer (2000).

[4] Chang, M. H.: Hereditary Portfolio Optimization with taxes and fixed plus proportional transaction costs - Part I. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, USA (2007).

[5] Chang, M. H.: Hereditary Portfolio Optimization with taxes and fixed plus proportional transaction costs - Part II. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, USA (2007).

[6] Durrett, R.: *Probabilidade. Teoria e exemplos*. Wadsworth & Brooks / Cole, Pacific Grove, CA (2005).

[7] Evans, L. C.: *An Introduction to Stochastic Differential Equations*. University of California, Berkeley (2006).

[8] Hale, J. K., Lunel, S. M. V.: *Introduction to Differential Equations*. Springer-Verlag (1977).

[9] Itô,K.: Stochastic integral; Proc. Imp. Acad. Tokyo **20** 519-524 (1944).

[10] Kuo, Hui-Hsiung.: *Introduction to Stochastic Integration*. Springer (2008).

[11] Karatzas, I.: Lectures on Mathematical Finance. CMR Series, American Mathematical Society (1996).

[12] Kuang, Y.: *Delay Differential Equations: with applications in population dynamics*. Academic Press (1993).

[13] Mohammed, S.E.A.: *Stochastic Functional Differential Equations*. Pitman Advanced Program Publishing (1884).

[14] Shreve, S.: *Stochastic Calculus and Finance I: the binomial asset pricing model*. Springer (2004).

[15] Shreve, S.: *Stochastic Calculus and Finance II: continuous - time models*. Springer (2004).

[16] Sondermann, D.: *Introduction to Stochastic Calculus for Finance*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer (2006).