Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática
Programa de Pós Graduação em Matemática

Medidas conformes σ-finitas e o teorema de Ruelle para extensões por grupos

Sara Ruth Pires Bispo

Salvador-Bahia
Fevereiro de 2014

Medidas conformes σ-finitas e o teorema de Ruelle para extensões por grupos

Sara Ruth Pires Bispo

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Manuel Stadlbauer.

Salvador-Bahia

Fevereiro de 2014

Bispo, Sara Ruth Pires.

Medidas conformes σ-finitas e o teorema de Ruelle para extensões por grupos / Sara Ruth Pires Bispo.- 2014.

34 f.

Orientador: Prof. Dr. Manuel Stadlbauer.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Salvador, 2014.

1. Markov, Processos de. 2. Processo estocástico.3. Teoria dos grupos.4. Grupos finitos. I. Stadlbauer, Manuel . II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDD: 519.233

CDU: 519.217.2

Medidas conformes σ-finitas e o teorema de Ruelle para extensões por grupos

Sara Ruth Pires Bispo

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 20 de fevereiro de 2014.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Manuel Stadlbauer (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Augusto Armando de Castro Júnior
UFBA

Prof. Dr. Krerley Irraciel Martins Oliveira
UFAL

Ao meu esposo, Jhoyne.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pelo dom da vida, renovado a cada provação superada e a cada sonho que se realizou, como esse que agora se torna realidade.

Fruto de muito estudo, dedicação e persistência, este trabalho contou com o apoio e a colaboração de muitas pessoas, às quais dedico meus agradecimentos especiais:

À minha família, pela base sólida e por sempre me dar forças para encarar a vida, e pelo seu imenso amor. À minha mãe, Maria, pelos sacrifícios que fez pra que eu pudesse prosseguir nos estudos, pelo exemplo de vida, dedicação e amor. Aos meus irmãos, Raquel, Patrícia e Carlos, pela presença na minha vida e pelo auxílio nas minhas escolhas. Às minhas sobrinhas, Lívian, Sophia e a pequena Larissa, pelo amor e por me fazer sorrir nas horas difíceis: amo muito vocês!

Ao meu esposo, Jhoyne: essa vitória também é sua! Sem você tudo seria mais difícil. Amo-te! Aos meus sogros, José Carlos e Ivanete, pelo carinho e pelas palavras de incentivo no momento certo.

Ao meu orientador, Manuel Stadlbauer, por me orientar, pelos valiosos momentos de discussão e conhecimentos compartilhados. Aos professores Augusto Armando e Krerley Oliveira por terem aceitado participar da comissão julgadora desta dissertação. Ao Prof. Vítor Araújo pela disponibilidade nos momentos que precisei e pela atenção que dedica a todos alunos da pós- graduação.

Aos colegas de mestrado, Mariana, Felipe, Jacqueline, Elaine, Carol e todos da sala 18. Agradeço a amizade, o carinho e a cumplicidade, demonstrados na alegria dos bons momentos e na ansiedade das horas difíceis, dando-me forças para continuar essa trajetória. Sem dúvida, as melhores pessoas que a vida me permitiu conhecer.

Aos funcionários e professores do Departamento de Matemática da UFBA, pelo seu profissionalismo.

À CAPES pela bolsa concedida.

"A vida não dá e nem empresta, não se comove e nem se apieda. Tudo que ela faz é retribuir e transferir aquilo que nós lhe oferecemos. " - Albert Einstein

Resumo

Neste trabalho estudamos o teorema de Ruelle para extensões por grupos de uma cadeias de Markov topológicas, esse resultado foi obtido por Stadlbauer em 2013. A prova do resultado é baseado em uma construção de uma família de medidas equivalentes σ-finita conforme para uma dado potencial definido em uma extensão por grupo de uma cadeia de Markov topológica. Vimos que as derivadas de Radon-Nikodym associadas são autofunções para o operador de Ruelle e localmente log- Hölder. Além disso, a extensão por grupo não é ergódica com respeito as medidas acima na maioria dos casos.

Palavras-chave: Cadeias de Markov topológicas; Extensão por grupo; Formalismo termodinâmico; Operador de Ruelle.

Abstract

In this work, we study Ruelle's theorem for extensions groups of a topological Markov chains, a result which was obtained by Stadlbauer in 2013. The proof is based on a construction of a family of equivalent, σ-finite measures for a given potential function defined on a group extension of a topological Markov chain. Then the Radon-Nikodym derivatives associated to these measures are shown to be locally log-Hölder eigenfunctions of the Ruelle operator. It is worth noting that the group extension in most cases is not ergodic with respect the above measures.
Keywords: Group extension; Thermodynamic formalism; Topological Markov chains; Ruelle operator.

Sumário

1 Introdução

Do ponto de vista geral, o teorema de Perron-Frobenius-Ruelle pode ser visto como um resultado sobre o espectro de um operador L que preserva um cone. Ou seja, existem elementos f, ν do cone e do seu dual respectivamente, com $Lf = \rho f$ e $L^*\nu = \rho\nu$, com ρ o raio espectral de L. Além disso, nos casos clássicos o teorema de Perron-Frobenius-Ruelle afirma que $\rho^{-n}L^n$ converge para f, normalmente, através da criação de um buraco espectral.

O primeiro resultado deste tipo foi obtido por Perron (ver[18]) como um produto secundário da sua análise sobre frações contínuas periódicas. Ele mostrou que para uma matriz $A_{n\times n}$ estritamente positiva, o máximo autovalor ρ é simples. Além disso, existem vetores estritamente positivos $x, y \in \mathbb{R}^n$ tal que $x^tA = \rho x^t, Ay = \rho y$ e que $\rho^{-n}A^n$ converge para $y \cdot x^t$. Em seguida, esse resultado foi generalizado por Frobenius (ver [9]) para matrizes não negativas, derivando uma decomposição de A em blocos irredutíveis. Além disso, houve muitas contribuições importantes para o teorema de operadores positivos, por exemplo Doeblin-Fortet ([7]) e Birkhoff ([4]), cujos métodos são hoje ferramentas padrão em prova de convergência exponencialmente rápida (ver, por exemplo, [2, 16]). Foi apenas no final da década de 60 que Ruelle [20, Teorema 3] mostrou o análogo do teorema de Perron no contexto do modelo de Ising unidimensional.

No contexto de sistemas dinâmicos, como observado por Bowen, o resultado de Ruelle acima mencionado pode ser formulado em termos de espaços shift, como segue. Para $n \in \mathbb{N}$, vamos definir,

$$\Sigma_n := \{(x_i : i \in \mathbb{N}) : x_i \in \{1, \dots, n\}\ \forall i \in \mathbb{N}\},$$
$$\theta : \Sigma_n \to \Sigma_n,\ (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$$

e suponha que $\varphi : \Sigma_n \to (0, \infty)$ é uma função log-Hölder contínua em relação a métrica do shift (ver detalhes abaixo). O operador de Ruelle é definido por

$$L(f)(x) := \sum_{\theta(y)=x} \varphi(y)f(y).$$

Nesse âmbito, o teorema de Ruelle afirma que existe uma função Hölder contínua estritamente positiva h e uma medida μ tal que $L(f) = \rho f$, $L^*(\mu) = \rho\mu$ e $\lim \rho^{-n}L^n f = \int f d\mu \cdot h$, onde ρ é igual ao raio espectral de L, e L^* é o dual de L agindo sobre medidas. Hoje, sabe-se que afirmações semelhantes também valem para espaços de shift topologicamente misturadoras com respeito a um alfabeto contável (ver [24]), e que, no caso da propriedade de grandes-imagens e pré-imagens e do potencial somável, $\rho^{-n}L^n f$ converge para $\int f d\mu \cdot h$ exponencialmente rápido (ver [22]).

Este resultado pode ser visto como ponto de partida para o formalismo termodinâmico e, para sistemas dinâmicos, que deu origem a uma muitos de resultados sobre estados de equilíbrio, funções zeta ou limites probabilísticos para citar alguns exemplos. Apesar do espaço shift parecer ser uma classe muito restrita dos sistemas dinâmicos, pode ser aplicada em muitas situações, devido a uma teoria bem desenvolvida para a construção de partições de Markov e de aplicações torres associadas, como por a exemplos de Bowen, Series, Adler-Flatto e Pinheiro, Schweiger, Hofbauer e Keller, Young e muitos outros. O elemento chave dessas construções é basicamente que a geometria do sistema original de alguma forma se reflete na complexidade de φ.

Do ponto de vista abstrato, uma extensão por grupo de um espaço shift Σ é dado por um grupo discreto G, definido por

$$T : \Sigma \times G \to \Sigma \times G, (x, g) \mapsto (\theta x, g\psi(x)),$$

com $\psi : \Sigma \to G$ uma função localmente constante. Além disso, suponhamos que φ é um potencial que só depende da primeira coordenada x e que satisfaz a propriedade de grandes imagens e pré-imagens. O principal resultado deste trabalho é a seguinte versão do teorema de Ruelle. Existe uma família $\{\nu_x : x \in X\}$ de medidas equivalentes σ-finitas com $L^*(\nu_x) = \rho\nu_x$ para todo $x \in X$, onde a família é construída utilizando o método de Denker-Urbanski (ver [6]). Além disso, existe uma função h estritamente positiva com $L(h) = \rho h$. Como consequência obtemos que ν_x é ergódica se e somente se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{T^n(x,\mathrm{id})=(x,\mathrm{id})} \rho^{-n}\varphi(x)\cdots\varphi T^{n-1}(x) = \infty.$$

Ademais, uma análise detalhada da construção da medida revela que $x \longmapsto \nu_x(f)$ define uma aplicação das funções integráveis contínua em X a autofunções localmente log Hölder contínua de $\mathcal{L}_\varphi$.

Finalmente, a fim de ter exemplos específicos para os objetos cuja existência é garantida pelo teorema, empregamos o fato de que as extensões por grupos compreendem passeios aleatórios em grupos. A continuidade Hölder de φ é uma dependência de longo alcance, enquanto caminhos aleatórios possuem incrementos independentes correspondente a uma φ localmente constante. Usando um conhecido teorema do limite local para passeios aleatórios em $\mathbb{Z}^d$ e para o grupo livre, em seguida , somos capazes derivar fórmulas explicitas para $\{\nu_x : x \in X\}$ e h.

2 Cadeias de Markov Topológicas e extensões por grupos

Essa seção é baseada no artigo [26], no qual vamos estudar algumas definições sobre cadeias de Markov topológicas, e posteriormente para compreendermos os principais teoremas do artigo [26], vamos estudar a extensão por grupo para cadeias de Markov topológicas.

Sejam I um conjunto enumerável, chamado de *alfabeto* e $A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ uma matriz tal que $a_{ij} \in \{0,1\}$ para todo $i, j \in I$, e que matriz de transição A não contenha linhas ou colunas com todos os elementos iguais a 0. Vamos denotar o par (Σ_A, θ) a correspondente cadeia de Markov topológica (ou, espaço shift), o qual

$$\Sigma_A := \{(w_k)_{k=0,1,...} : w_k \in I \text{ e } a_{w_k w_{k+1}} = 1, \forall k = 0, 1, ...\},$$
$$\theta : \Sigma_A \to \Sigma_A : (w_k : \ k = 1, 2, ...) \mapsto (w_k : \ k = 2, 3, ...).$$

Será considerado neste contexto o shift completo se todas as transições são possíveis. Uma sequência finita $w = (w_1 \cdots w_n)$ com $n \in \mathbb{N}, w_k \in I$ para $k = 1, 2, ..., n$ e $a_{w_k w_{k+1}} = 1$ para $k = 1, 2, ..., n-1$ é chamada de uma *palavra de comprimento* n, e o conjunto

$$[w] := \{(v_k) \in \Sigma_A : w_k = v_k \ \forall k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

como sendo um *cilindro de comprimento* n. Denotamos como o conjunto de palavras admissíveis de comprimento n o conjunto W^n, o comprimento de $w \in W^n$ por $|w|$ e o conjunto de todas as palavras admissíveis por $W^\infty = \bigcup_n W^n$. Além disso, $\theta^n : [w] \to \theta^n([w])$ é um homeomorfismo (aplicação contínua e invertível, com inversa contínua), a sua inversa denotaremos por $\tau_w : \theta^n([w]) \to [w]$, a qual está bem definida. Para $a, b \in W^\infty$ e $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq |a|$, definimos

$$W^n_{a,b} = \{(w_1 \ldots w_n) \in W^n \text{ com } (w_1 \ldots w_{|a|}) = a, w_n b \text{ admissível } \}.$$

Temos que fazer uma escolha de uma métrica para o espaço shift, para isso, iremos aplicar a construção seguinte. Para $r \in (0,1)$, definimos

$$d_r((x_j),(y_j)) := r^{\min\{j: x_j \neq y_j\}}$$

onde $(x_j), (y_j) \in \Sigma_A$. Dessa forma d_r é uma métrica do espaço shift e Σ_A é um espaço Polonês, ou seja, espaço metrizável, separável e completo, com respeito à topologia gerada pelos cilindros. Mais ainda, Σ_A é compacto com respeito a esta topologia se, se somente se, I é um conjunto finito (ver [15]).

Diremos que Σ_A é *topologicamente transitivo* se para todo $a, b \in I$, existe $n_{a,b} \in \mathbb{N}$ tal que $W^{n_{a,b}}_{a,b} \neq \emptyset$, ou equivalentemente, podemos dizer que $\theta^{n_{a,b}}([a]) \cap [b] \neq \emptyset$. Σ_A é *topologicamente misturadora* se para todo $a, b \in I$, existe $N_{a,b} \in \mathbb{N}$ tal que $W^{n_{a,b}}_{a,b} \neq \emptyset$ para todo $n > N_{a,b}$, equivalentemente, podemos denotar por $\theta^{n_{a,b}}([a]) \cap [b] \neq \emptyset$, para todo $n > N_{a,b}$. Além disso, uma cadeia de Markov topológica é dita que possui *grandes imagens e pré-imagens*, se existe um conjunto finito $I_{g.i.p.} \subset W$ tal que para todo $v \in W$, existe

$\beta \in I_{g.i.p}$ tal que $(v\beta) \in W^2$ ou $(\beta v) \in W^2$, respectivamente. Finalmente, uma cadeia de Markov topológica é dita que possui a *propriedade (g.i.p.)* se a cadeia é topologicamente misturadora e tem grandes imagens e pré-imagens.

Um outro objetivo fundamental para nossa analise é a função *potencial* $\varphi : \Sigma_A \to \mathbb{R}$ estritamente positiva. Para $n \in \mathbb{N}$ e $w \in W^n$, definimos

$$\phi_n := \prod_{k=0}^{n-1} \varphi \circ \theta^k \text{ e } C_w := \sup_{x,y \in [w]} \phi_n(x)/\phi_n(y). \tag{1}$$

O potencial φ é dito que tem *variação localmente limitada* se φ é contínua e existe $C > 0$ tal que $C_w \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $w \in W^n$.

Para sequências positivas $(a_n), (b_n)$, frequentemente escreveremos $a_n \ll b_n$ se existe $C > 0$ com $a_n \leq Cb_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e $a_n \asymp b_n$ se $a_n \ll b_n \ll a_n$.

Uma nova hipótese, mais forte sobre a variação é relacionada com ser localmente Hölder contínua. Portanto, definimos a n-ésima variação de uma função $f : \Sigma_A \to \mathbb{R}$ por

$$V_n(f) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x_i = y_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

A função f é referida como uma função *localmente Hölder contínua no sentido simbólico*, se existe $0 < r < 1$ e $C \geq 1$ tal que $V_n(f) \ll r^n$ para todo $n \geq 1$. Podemos mostrar a equivalência da notação mais conhecida sobre funções Hölder contínua:

$$|f(x) - f(y)| \leq c \cdot d(x, y)^{\alpha}$$

com a que acabamos de definir. Para isso basta tomar o conjunto Σ_A e a métrica $d_{1/2}$ e f tal que $V_n(f) \leq cr^n$, assim $r = (1/2)^t$ e $t = \frac{log(r)}{log(1/2)}$. Então, para x e y no mesmo cilíndro $[w]$, $w \in W^n$, temos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq cr^n \\ &= c(1/2)^{tn} \\ &= c((1/2)^n)^t \\ &\leq c \cdot d(x, y)^t \end{aligned}$$

Se uma função é localmente Hölder contínua e $\|f\|_{\infty} < \infty$ chamamos de *função Hölder contínua*. Agora, vejamos a seguinte estimativa bem conhecida (ver em [21]). Para $n \leq m$, $x, y \in [w]$ para algum $w \in W^m$, e f função localmente Hölder contínua, com constante c

$$
\begin{aligned}
\Big|\sum_{k=0}^{n-1} f\circ\theta^k(x) - f\circ\theta^k(y)\Big| &\le \sum_{k=0}^{n-1}\Big|f\circ\theta^k(x) - f\circ\theta^k(y)\Big| \\
&\le c\cdot\sum_{k=0}^{n-1} d(\theta^k(x),\theta^k(y)) = c\sum_{k=0}^{n-1} 1/(r^k) d(x,y) \\
&= c\sum_{k=0}^{n} 1/(r^k)\cdot r^m = c\sum_{k=1}^{n} r^{m-k} \\
&= c\cdot r^{m-n}\sum_{k=0}^{n-1} r^k \le c\cdot r^{m-n}\frac{1}{1-r}
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\Big|\sum_{k=0}^{n-1} f\circ\theta^k(x) - f\circ\theta^k(y)\Big| \ll \frac{1}{1-r}r^{m-n}. \tag{2}
$$

Observe que $d_r(\theta(x),\theta(y)) = \frac{1}{r}d(x,y)$, temos $r^2 = d((x_1,x_2,...),(x_1,x_2,...))$ e $r = d((\theta(x_1,x_2,...)),(\theta(x_1,x_2,...)))$. Além disso, como $1/r > 1$ o sistema é expansor . Em particular, a função $\exp(f)$ é um potencial de variação limitada. Para um dado potencial φ, o objeto básico do formalismo termodinâmico são as funções de partição. Uma vez que o espaço de estados é contável, considere as funções partições Z_a^n para um fixado $a \in I$ que são definidos por

$$
Z_a^n := \sum_{\theta^n(x)=x,\ x\in[a]} \phi_n(x).
$$

Além disso, referimos a taxa de crescimento exponencial de Z_a^n, por

$$
P_G(\theta,\varphi) := \limsup_{n\to\infty} \log\sqrt[n]{Z_a^n} = \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Z_a^n,
$$

como a *pressão de Gurevič* de $(\Sigma_A,\theta,\varphi)$. Essa noção foi introduzida em [21] para cadeias topologicamente misturadoras e φ potencial localmente log-Hölder contínua, isto é, $\log\varphi$ é localmente Hölder contínua. No qual apresenta que se $(\Sigma_A,\theta,\varphi)$ é transitiva e φ é de variação limitada, argumentos em que combinamos com a decomposição de θ^p em componentes misturadoras, onde p representa o período de (Σ_A,θ), mostra que $P_G(\theta,\varphi)$ é independente da escolha de a e que

$$
P_G(\theta,\varphi) = \lim_{n\to\infty,\ W_{a,a}^n\neq\emptyset}\frac{1}{n}\log Z_a^n.
$$

A prova de tal resultado pode ser encontrado em ([21], proposição 3.2). Além disso, é fácil ver que $P_G(\theta,\varphi)$ permanece inalterado substituindo $a \in W^1$ com algum $a \in W^n$. Temos também que, se $\log\varphi$ é Hölder contínua e o sistema é topologicamente misturadora, então possui um princípio variacional. (veja Sarig 1999).

Dois objetos básicos para nossa análise são a concepção de medida conforme e medida Gibbs relacionadas com um potencial φ. Devido ao fato que a construção canonicamente conduzirá a medidas σ-finitas, faremos uso do seguinte: uma medida de probabilidade boreliana μ σ-finita é chamada *φ-conforme* se

$$\mu(\theta(A)) = \int_A \frac{1}{\varphi} d\mu$$

para todo conjunto boreliano A tal que $\theta|_A$ é injetiva. Para $(w_1 \cdots w_{n+1}) \in W^{n+1}$ e um potencial de variação limitada, então imediatamente segue que

$$\mu([w]) \asymp \phi_n(x) C^{\pm 1} \mu(\theta([w_{n+1}])), \forall x \in [w]$$

ou, equivalentemente,

$$C^{-1}\mu(\theta([w_{n+1}])) \leq \frac{\mu([w_1 \ldots w_{n+1}])}{\phi_n(x)} \leq C\mu(\theta([w_{n+1}])) \tag{3}$$

para todo $x \in [w_1 \cdots w_{n+1}]$. Note que essa estimativa implica que $P_G(\theta, \varphi) = 0$ é uma condição necessária para a existência de uma medida conforme com respeito a um potencial de variação limitada.

A fim de introduzir um novo objeto básico, o operador de Ruelle, definimos a ação do ramo inverso de τ_v nas funções da seguinte forma. Para $v \in W^n$ e $f : \Sigma_A \to \mathbb{R}$, a aplicação

$$f \circ \tau_v : \Sigma_A \to \mathbb{R}; x \mapsto \chi_{\theta^n([v])}(x) f(\tau_v(x)),$$

que é $f \circ \tau_v(x) := f(\tau_v(x))$ para $x \in \theta^n([v])$ e $f \circ \tau_v(x) := 0$ para $x \notin \theta^n([v])$. O *operador de Ruelle* é definido por

$$L_\varphi(f) = \sum_{v \in W} \varphi \circ \tau_v \ \cdot \ f \circ \tau_v.$$

Se φ tem variação limitada, então $Z_a^n \asymp L_\varphi(\mathbf{1}_{[a]})(x)$, para todo $x \in [a]$. Além disso, há uma ação associada no espaço das medidas σ-finita medidas de Borel definido por $\int f dL_\varphi^*(\nu) := \int L_\varphi(f) d\nu$, para $f : \Sigma_A \to [0, +\infty]$ contínua.

2.1 Teorema de Ruelle e aplicações Gibbs-Markov

Nesta parte vamos enunciar o teorema de Ruelle para sistemas com a propriedade g.i.p. Note que um resultado é chamado de teorema de Ruelle, ou teorema de Ruelle-Perron-Frobenius, se garantir a existência de autofunções, automedidas ou autovetores do operador do Ruelle e o adjunto dele para o raio espectral.

Agora iremos lembrar alguns objetos da teoria ergódica infinita, nos quais serão fundamentais para a compreensão do próximo resultado. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e T uma transformação não singular, isto é, as medidas $d\mu$ e $d\mu \circ T$ são equivalentes. Um conjunto $A \in \mathcal{A}$ diz-se T invariante se $\mu(T^{-1}(A) \triangle A) = 0$, onde $\triangle$ refere-se a diferença simétrica de conjuntos. Dizemos que T é *ergódica* (com respeito a μ) se todos os conjuntos T-invariantes $A \in \mathcal{A}$ satisfazem ou $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A^c) = 0$. Além disso uma transformação T é chamada de *totalmente dissipativa* se qualquer conjunto mensurável A com $\mu(A) > 0$ contém um conjunto mensurável $B \subset A$ tal que $\mu(B) > 0$ e $\mu(T^{-n}(B) \cap T^{-m}(B)) = 0, \forall m \neq n$. Dizemos que T é *conservativa* se e somente se não é totalmente dissipativa.

Começaremos lembrando um conhecido teorema de Sarig.

Teorema 2.1 (Corolário 2 em [22]). *Suponha que θ tenha a propriedade g.i.p,* $\log \varphi$ *é Hölder contínua e φ é somável* $(\sup L_\varphi(1) < \infty)$. *Então, para $\rho = e^{P_G(\theta)}$, temos:*

1. *Existe uma única função $h > 0$, Hölder tal que $L(h) = \rho h$;*

2. *Existe uma única medida de probabilidade tal que $L^*(\mu) = \rho\mu$ se, e somente se, μ é conforme;*

3. *A medida dada por $d\nu = hd\mu$ é uma medida finita invariante.*

4. *A medida é ergódica e conservativa.*

5. *$L^n_\varphi(1)(x) \asymp \rho^n$, para todo $x \in \theta^n([v])$.*

A partir de agora , assumiremos que a transformação de base satisfaz a propriedade g.i.p e que $\sup L_\varphi(1) < \infty$, de modo que valha o teorema de Sarig. Além disso pode-se supor sem perda de generalidade que $P_G(\theta, \varphi) = 0$ e $L_\varphi(1) = 1$. De fato, defina

$$\hat{\varphi} := \frac{\varphi \cdot h}{\rho \cdot h \circ \theta}.$$

Então,

$$\begin{aligned} L_{\hat{\varphi}}(f)(x) &= \sum_{v \in W} \hat{\varphi} \circ \tau_v(x) \cdot f \circ \tau_v(x) = \sum_{v \in W} \frac{\varphi \circ \tau_v(x) \cdot (h \cdot f)(\tau_v(x))}{\rho \cdot h \circ \theta(\tau_v(x))} \\ &= \frac{1}{\rho \cdot h(x)} L_\varphi(h \cdot f) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\rho \cdot h L_{\hat{\varphi}}(f)(x) = L_\varphi(h \cdot f).$$

Em particular, $L_{\hat{\varphi}}(1)(x) = 1$. Além disso,

$$\begin{aligned}\int f \circ \theta \cdot h d\mu &= \frac{1}{\rho}\int L_{\varphi}(f \circ \theta \cdot h) d\mu \\ &= \frac{1}{\rho}\int f \cdot L_{\varphi}(h) d\mu \\ &= \frac{1}{\rho}\int f \cdot \rho h d\mu \\ &= \int f h d\mu\end{aligned}$$

o que implica que μ é θ-invariante. Ademais, se definirmos $d\nu := h d\mu$ temos,

$$\int f d\nu = \int f h d\mu = \int \frac{1}{\rho} L_{\varphi}(fh) d\mu = \int L_{\hat{\varphi}}(f) \cdot h d\mu = \int L_{\hat{\varphi}}(f) d\nu$$

assim sendo $L^*_{\varphi}(\nu) = \nu$.

Uma vez que os argumentos fazem uso da propriedade g.i.p, assumiremos a partir de agora que (Σ_A, μ, θ) é uma aplicação Gibbs-Markov, no qual foi implicitamente definido por [2] da seguinte forma.

Definição 2.2. *Seja μ uma medida de probabilidade de Borel em Σ_A tal que, para todo $w \in W^1$, μ e $\mu \circ \tau_w$ são equivalentes. Então (Σ_A, θ, μ) é chamada de uma aplicação Gibbs-Markov se*

$$\inf\{\mu(\theta([w])) : w \in W^1\} > 0$$

e existe $0 < r < 1$ tal que, para todo $m, n \in \mathbb{N}, v \in W^m, w \in W^n$ com $(vw) \in W^{m+n}$,

$$\sup_{x,y \in [w]} \left| \log \frac{d\mu \circ \tau_v}{d\mu}(x) - \log \frac{d\mu \circ \tau_v}{d\mu}(y) \right| \ll r^n \tag{4}$$

Observe que existe uma equivalência entre aplicações de Gibbs-Markov e potenciais localmente log-Hölder, visto que, se uma aplicação é Gibbs-Markov temos que $\varphi := d\mu/d\mu \circ \theta$ é localmente log-Hölder, então φ é de variação limitada e localmente log-Hölder. Da mesma forma, se θ tem a propriedade g.i.p e φ é somável, o teorema de Sarig garante a existência de uma medida μ conforme. Isto é, $\varphi/\rho = d\mu/d\mu \circ \theta$ e, em particular, μ satisfaz (4). Além disso, segue da propriedade g.i.p. que, para qualquer $w \in W^1$, existe um $b \in I_{\text{g.i.p.}}$ tal que wb é admissível. Então

$$\begin{aligned}\mu(\theta(w)) &= \sum_{a \in W^1 : wa \text{ admissível}} \mu([a]) \geq \mu([b]) \\ &\geq \min_{c \in I_{\text{g.i.p.}}} \mu([c]) > 0.\end{aligned}$$

Portanto, (Σ_A, θ, μ) é Gibbs-Markov.

Definimos o operador de transferencia $\hat{\theta} : L^1(\mu) \to L^1(\mu)$ associada a aplicação de Gibbs-Markov (Σ_A, θ, μ) por

$$\hat{\theta}(f) := \sum_{w \in W} \frac{d\mu \circ \tau_w}{d\mu} f \circ \tau_w.$$

No caso que μ é dado pelo teorema de Sarig, note que $\hat{\theta} = L_{\varphi/\rho}$, pois $\varphi \circ \tau_w / \rho = d\mu \circ \tau_w / d\mu$ para qualquer $w \in W^1$.

2.2 Extensões por grupos de cadeias de Markov Topológicas

Vamos agora introduzir o objeto básico da nossa análise, para isso notaremos que G é um *grupo discreto enumerável* com o elemento identidade $\mathrm{id} \in G$, como o conjunto dotado de uma operação associativa $G \times G \to G$ tal que para todo $g \in G$

i) $\mathrm{id} \cdot g = g$ e $g \cdot \mathrm{id} = g$,

ii) existe um elemento inverso $g^{-1} \in G$ para o qual $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = \mathrm{id}$,

iii) G é enumerável munido com a topologia discreta.

Para definir uma extensão por grupo de uma cadeia de Markov topólogica, seja $\psi : \Sigma_A \to G$ uma aplicação tal que ψ é constante em $[w]$ para todo $w \in W^1$. Para $X := \Sigma_A \times G$ equipado com a topologia produto, a *extensão por grupo* (X, T) de (Σ_A, θ) é definida por

$$T : X \to X, (x, g) \mapsto (\theta x, g\psi(x)).$$

Note que (X, T) também é uma cadeia de Markov topológica e os conjuntos de cilindros são dados por $[w, g] := [w] \times \{g\}$, para $w \in W^\infty$ e $g \in G$. Vamos definir o conjunto X_g como $X_g := \Sigma_A \times \{g\}$ e

$$\psi_n(x) := \psi(x)\psi(\theta x) \cdots \psi(\theta^{n-1} x)$$

para $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \Sigma_A$. Observe que $\psi_n : \Sigma_A \to G$ é constante em cilindros de comprimento n e, em particular, que $\psi(w) := \psi_n(x)$, para algum $x \in [w]$ e $w \in W^n$, está bem definida. Fixe uma cadeia de Markov topológica topologicamente misturadora (Σ_A, θ), e G-extensão topologicamente transitiva (X, T). Além disso fixe um potencial (positivo) $\varphi : \Sigma_A \to \mathbb{R}$ com $P_G(\theta, \varphi) = 0$. Note que φ eleva para um potencial $\hat{\varphi}$ em X definindo $\hat{\varphi}(x, g) := \varphi(x)$. Para facilitar a notação, não será feito distinção entre $\hat{\varphi}$ e φ. Além disso, para $v \in W^\infty$, o ramo inverso dado por $[v, \cdot]$ será denotado por τ_v, que é $\tau_v(x, g) := (\tau_v(x), g\psi(v)^{-1})$. A fim de distinguir entre o operador de Ruelle e as funções de partição que diz respeito a θ e a T, estes objetos para extensão por grupo serão escritos em letras caligráficas, isto é, para $a \in W$, $\xi \in [a] \times \{\mathrm{id}\}$, $(\theta, g) \in X$, e $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{L}(f)(\xi, g) := \sum_{v \in W} \varphi(\tau_v(\xi)) f \circ \tau_v(\xi, g),$$
$$\mathcal{Z}^n_{[a,g]} := \sum_{T^n(x,g)=(x,g), x \in [a]} \phi_n(x)$$

Para obtermos alguns resultados iremos contar com a seguinte propriedade topológica da extensão. Vamos precisar que exista um subconjunto finito de W^∞ de forma que para cada dois cilindros $[a, g]$ e $[b, g]$, com $a, b \in W$ e $g \in G$ existe um elemento w do subconjunto finito, de tal modo que $\tau_w([b, g]) \subset [a, g]$. Se a transformação da base tiver a propriedade g.i.p, a existência de tal conjunto é dada pelo seguinte lema.

Lema 2.3. *Seja (X, T) uma extensão por grupo topologicamente transitiva de (Σ_A, θ), donde (Σ_A, θ) tem a propriedade de grandes imagens e pré-imagens (g.i.p). Então, existe $n \in \mathbb{N}$ e um subconjunto finito J de W^n tal que para cada par (β, β') com $\beta, \beta' \in I_{g.i.p}$ existe $w_{\beta,\beta'} \in J$ tal que $(w_{\beta,\beta'}) \in W^n$ e $\psi_n(w_{\beta,\beta'}) = id$.*

Demonstração. Como T é topologicamente transitiva, temos que existe $p \in \mathbb{N}$, p o período de (X, T) e $B_1, B_2, ..., B_p$ tal que $B_1 \dot{\cup} ... \dot{\cup} B_p = \Sigma_A$ e $T^p|_{B_i}$ é topologicamente misturadora com $i = 1, ..., p$ (ver [3], proposição 4.2.2). Então, para cada $a \in W$, $\exists N_a \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^{ps}([a, g]) \supset [a, g], \text{para todo } s \geq N_a \text{ e } g \in G.$$

Por isso, para cada par $(\beta, \beta') \in I^2_{g.i.p} \subset W^2$ com (β', β) admissível, temos $N_{\beta,\beta'}$ tal que para cada $s \geq N_{\beta,\beta'}$ existe $v_{\beta,\beta'} \in W^{ps-2}$ tal que $(\beta'\beta v_{\beta,\beta'}\beta')$ é admissível e dado que $I_{g.i.p}$ é finito, segue que existe $k := \max\{pN_{\beta,\beta'} : (\beta, \beta' \in I_{g.i.p})\}$ tal que $v_{\beta,\beta'}$ pode ser escolhido para ser um elemento de W^{k-2}. Pela possível inclusão de um número finito de estados, podemos assumir sem perda de generalidade que o subsistema de Σ_A com $I_{g.i.p}$ é topologicamente misturadora. Segue-se daí que existe algum $l \in \mathbb{N}$ tal que cada par $(\beta_0, \beta_l) \in I_{g.i.p}$ podem ser conectados por uma palavra admissível da forma

$$w_{\beta_0,\beta_l} := (\beta_0 v_{\beta_0,\beta_1} \beta_1 \beta_2 v_{\beta_2,\beta_3} \beta_3 \beta_4 ... v_{\beta_{l-1},\beta_l} \beta_l).$$

A afirmação segue com $J := \{w_{\beta,\beta'} : \beta, \beta' \in I_{g.i.p}\}$. □

3 Medidas conformes associadas a extensões por grupos

Nesse capítulo iremos fazer a construção de uma medida conforme para um G-extensão seguindo as idéias de Patterson em [17] e Denker e Urbanski em [6].

Para a construção da medida, vamos agora fixar $\xi \in \Sigma_A$, e definir, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n = E_n(\xi) := \{x \in \theta^{-n}(\xi) : \psi_n(x) = id\}, \mathscr{Z}^n(\xi) = \sum_{x \in E_n} \phi_n(x).$$

Note que $\mathscr{Z}^n(\xi)$ é relacionado com o operador de Ruelle por

$$\mathscr{Z}^n(\xi) = \mathcal{L}_\varphi^n(\mathbf{1}_{X_{id}})(\xi, id).$$

Uma vez que a construção da medida se baseia na divergência de uma determinada série, lembre-se, para uma sequência de números reais positiva (a_n), o raio de convergência da série $\sum_n a_n x^n$ é igual a $1/\rho$, onde ρ é dada pela fórmula de Hadamard,

$$\rho := \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n}.$$

Lema 3.1. *Para a sequência (a_n) com $\rho < \infty$, existe uma sequência não-decrescente $(b_n : n \in \mathbb{N})$ com $b_n \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n\to\infty} b_n/b_{n+1} = 1$ e para todo $s \geq 0$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n s^{-n} \begin{cases} = \infty & s \leq \rho \\ < \infty & s > \rho. \end{cases}$$

Além disso, existe uma sequência não crescente $(\lambda(n) : n \in \mathbb{N})$ com $\lambda(n) \geq 1$ e $\lambda(n) \to 1$ tal que $b_n = \prod_{k=1}^{n} \lambda(k)$.

Demonstração. Aqui, vamos fazer uso da construção que encontra-se em [6]. Observe que o caso em que $\sum_n a_n \rho^{-n}$ diverge, cada sequência constante estritamente positiva satisfaz a afirmação acima. Assim, vamos assumir que $\sum_n a_n \rho^{-n}$ converge. Em particular, $\lim_{n\to\infty} a_n \rho^{-n} = 0$. Fixe uma sequência (n_k) com $\lim_{k\to\infty} n_k/n_{k+1} = 0$, $a_{n_k}\rho^{-n_k} \searrow 0$ e $\lim_{k\to\infty}(\rho(a_{n_k})^{-1/n_k}) = 1$ e defina $\delta_k := \rho^{n_k}/a_{n_k}$.

A sequência (b_n) é agora definida por, para $n \leq n_1$, $b_n := 1$ e, para $n_{k-1} \leq n < n_k$,

$$b_n := \delta_{k-1}^{\overline{\frac{n_k - n}{n_k - n_{k-1}}}} \delta_k^{\overline{\frac{n - n_{k-1}}{n_k - n_{k-1}}}} \delta_1^{-1}.$$

Para $n, m \in \mathbb{N}$ com $n_{k-1} \leq n < n+m < n_k$, assim obetemos que $b_{n+m}/b_n = (\delta_k/\delta_{k-1})^{\overline{\frac{m}{n_k - n_{k-1}}}}$. Em particular, $\lim_n b_{n+m}/b_n = 1$. Dessa forma, temos uma representação de (b_n), da seguinte forma. Para $n_{k-1} < n \leq n_k$, e defina $\lambda(n) := (\delta_k/\delta_{k-1})^{1/(n_k - n_{k-1})}$ e, para $n \leq n_1$, e defina $\lambda(n) := 1$. Assim segue por indução que

$$b_n = \prod_{j=1}^{n} \lambda(j).$$

Desde que $\delta_k/\delta_{k-1} > 1$ temos que (b_n) é uma sequência estritamente crescente, pois $b_{n_k} = \rho^{n_k}/(\delta_1 a_{n_k})$, temos que $b_n \nearrow \infty$ e $\sum b_n a_n s^{-n}$ diverge para $s = \rho$. È fácil ver que como o raio de convergência da série de potência é igual a $1/\rho$, temos a convergência para $s > \rho$. Finalmente, note que $\lim_{l\to\infty}(\delta_l/\delta_k)^{1/(n_l-n_k)} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, é possível escolher uma sequência de (n_k) de tal modo que a sequência associada $\lambda(n)$ é não decrescente. $\square$

Agora, suponha que $\rho = \limsup \sqrt[n]{\mathcal{Z}^n(\xi)} < \infty$ e escolha (b_n) de acordo com o Lema 3.1 para a sequência (a_n) definida por $a_n := \mathcal{Z}^n(\xi)$. Este, em seguida, dá origem a uma família de medidas de probabilidade $\{m_s : s > \rho\}$ suportada em $X_{id} = \Sigma_A \times \{\mathrm{id}\}$, dada por

$$\begin{aligned} m_s &:= \frac{1}{\mathcal{P}(s)} \sum_{n\in\mathbb{N}} s^{-n} b_n \sum_{x\in E_n} \phi_n(x)\delta_x, \text{ onde} \\ \mathcal{P}(s) &:= \sum_{n\in\mathbb{N}} s^{-n} b_n \mathcal{Z}^n(\xi) \end{aligned} \tag{5}$$

e δ_x se refere á medida de Dirac suportada em $\{x\}$.

Para compreensão dos próximos resultados iremos definir os seguintes objetos. A σ-álgebra de Borel é definida (veja [5]) da seguinte forma. Seja X um espaço topológico. A σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ de X é definida como a menor (isto é, a intersecção) de todas as σ-álgebras que contém os abertos de X. Além disso, iremos considerar as seguinte noção de convergência de medidas.

Definição 3.2. *Dizemos que uma sequência de medidas de probabilidade $(m_k : k \in \mathbb{N})$ definida sobre a σ-álgebra de Borel de um espaço polonês converge fraca* para a medida de probabilidade m se e somente se*

$$\int f dm = \lim_{k\to\infty} \int f dm_k,$$

para toda f contínua e limitada.

Utilizando a convergência fraca* obtemos a construção de uma medida parcialmente conforme como enunciado no lema abaixo.

Lema 3.3. *Suponha que (s_l) é uma sequência tal que $s_l \searrow \rho$ e existe uma medida de probabilidade m suportada em Σ_A que é o limite fraca* de $(m_{s_l} : l \in \mathbb{N})$. Então, para o par (B, k) com $B \in \mathcal{B}(\Sigma_A)$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k(B \times \{\mathrm{id}\}) \subset X_{\mathrm{id}}$, $T^k(B \times \{\mathrm{id}\}) \in \mathcal{B}(\Sigma_A)$ e $T^k|_{B\times\{id\}}$ é invertível, segue que*

$$m(\theta^k(B)) = \int_B \rho^k/\phi_k dm. \tag{6}$$

Demonstração. Nesse contexto, iremos considerar m_s como a medida definida sobre $\mathcal{B}(\Sigma_A)$ e suponha adicionalmente que B é um cilindro. Em particular, $\mathbf{1}_B$ é contínua. Da definição,

$$m_s(B) = \frac{1}{\mathcal{P}(s)} \sum_{n=1}^{\infty} s^{-n} b_n \sum_{T^n(x,id)=(\zeta,id),x\in B} \phi_n(x)$$

Então,

$$\begin{aligned} m_s(T^k(B)) &= \frac{1}{\mathcal{P}(s)} \sum_{n=1}^{\infty} s^{-n} b_n \sum_{T^n(x,\mathrm{id})=(\zeta,\mathrm{id}),(x,\mathrm{id})\in T^k(B)} \phi_n(x) \\ &= \frac{1}{\mathcal{P}(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{b_{n+k}} b_{n+k} s^k \cdot s^{-(n+k)} \sum_{T^{n+k}(y,\mathrm{id})=(\zeta_0,\mathrm{id}),(y,\mathrm{id})\in B} \phi_{n+k}(y)(\phi_k(y))^{-1}. \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \int_B \rho^k/\phi_k dm_s &= \frac{1}{\mathcal{P}(s)} \sum_{n=1}^{\infty} b_n s^{-n} \sum_{T^k(x,\mathrm{id})=(\zeta,\mathrm{id}),(x,\mathrm{id})\in B} \phi_k(x) \cdot \rho^k/\phi_k(x) \\ &= \frac{1}{\mathcal{P}(s)} \left(\sum_{n=1}^{k} b_n s^{-n} \sum_{T^k(x,\mathrm{id})=(\zeta,\mathrm{id}),(x,\mathrm{id})\in B} \phi_k(x) \cdot \rho^k/\phi_k(x) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=k+1}^{\infty} b_n s^{-n} \sum_{T^k(x,\mathrm{id})=(\zeta,\mathrm{id}),(x,\mathrm{id})\in B} \phi_k(x) \cdot \rho^k \phi_k(x)^{-1} \right) =: I + II \end{aligned}$$

onde I refere-se a primeira expressão e II a segunda expressão. Note que a soma I é finita e converge para 0 quando $s \to \rho$, pois $\lim_{s\to\rho} \mathcal{P}(s) = \infty$. Portanto,

$$\begin{aligned} &\lim_{l\to\infty} \left| m_{s_l}(T^k(B)) - \int_B \frac{\rho^k}{\phi_k} dm_{s_l} \right| \\ &= \lim_{l\to\infty} \frac{1}{\mathcal{P}(s_l)} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{b_{n+k}} b_{n+k} s^k s_l^{-(n+k)} \sum_{\substack{T^{n+k}(y,\mathrm{id})=(\zeta_0,\mathrm{id}),\\ (y,\mathrm{id})\in B}} \phi_{n+k}(y)(\phi_k(y))^{-1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=k+1}^{\infty} b_n s_l^{-n} \sum_{T^{n+k}(y,\mathrm{id})=(\zeta_0,\mathrm{id}),(y,\mathrm{id})\in B} \rho^k \phi_{n+k}(y)(\phi_k(y))^{-1} \right|. \end{aligned}$$

Considerando $m = n + k$,

$$\lim_{l\to\infty}\left|m_{s_l}(T^kB) - \int_B \frac{\rho^k}{\phi_k}dm_{s_l}\right|$$
$$= \lim_{l\to\infty}\frac{1}{\mathcal{P}(s_l)}\left|\sum_{m=k+1}^{\infty}\left(\frac{b_{m-k}}{b_m}s_l^{-m}\cdot s_l^k b_m \sum_{T^m(y,\mathrm{id})=(\zeta_0,\mathrm{id}),(y,\mathrm{id})\in B}\phi_m(x)(\phi_k(x))^{-1}\right.\right.$$
$$\left.\left. -b_m s_l^{-m}\sum_{T^{n+k}(y,\mathrm{id})=(\zeta_0,\mathrm{id}),(y,\mathrm{id})\in B}\phi_m(\phi_k(x))^{-1}\rho^k\right)\right|$$
$$= \lim_{l\to\infty}\frac{1}{\mathcal{P}(s_l)}\left|\sum_{m=k+1}^{\infty}\left(\frac{b_{m-k}}{b_m}s_l^k - \rho^k\right)s_l^{-m}b_m\sum_{\substack{T^{n+k}(y,\mathrm{id})=(\zeta_0,\mathrm{id}),\\(y,\mathrm{id})\in B}}\frac{\phi_m(x)}{\phi_k(x)}\right|.$$

Aplicando a informação de que $s \to \rho$ e para todo $\epsilon > 0$, existe m_0 tal que $1-\epsilon \leq \dfrac{b_{m-k}}{b_m} \leq 1$ para todo $m \geq m_0$, alcançamos a desigualdade abaixo. Portanto,

$$\left|\left(\frac{b_{m-k}}{b_m}s_l^k - \rho^k\right)\right| = \left|\left(\frac{b_{m-k}}{b_m}s_l^k - s_l^k + s_l^k - \rho^k\right)\right|$$
$$\leq s_l^k\cdot\epsilon + s_l^k\left|1 - \frac{\rho^k}{s_l^k}\right|$$

para todo $m \geq m_0$.

Assim, pela desigualdade acima e fazendo uso de argumentos já explorados, chegamos que o limite das (m_{s_l}) é conforme no sentido de (5).

$$\lim_{s_l\to\infty}\left|m_{s_l}(T^kB) - \int_B\frac{\rho^k}{\phi_k}dm_{s_l}\right|$$
$$= \lim_{s_l\to\infty}\frac{1}{\mathcal{P}(s_l)}\left|\sum_{m=m_0+1}^{\infty}\left(\frac{b_{m-k}}{b_m}\cdot s_l^k - \rho^k\right)s_l^{-m}b_m\sum_{T^{n+k}(y,\mathrm{id})=(\zeta_0,\mathrm{id}),(y,\mathrm{id})}\phi_m(x)(\phi_k(x))^{-1}\right|$$
$$\leq \lim_{s_l\to\infty}\frac{1}{\mathcal{P}(s_l)}\left(\sup_{m\geq m_0}\left|\frac{b_{m-k}}{b_m}s_l^k - \rho^k\right|\right)\cdot\left|\sum_{m=m_0+1}s_l^{-m}b_m\sum_{T^{n+k}(y,\mathrm{id})=(\zeta_0,\mathrm{id}),(y,\mathrm{id})}\phi_m(x)(\phi_k(x))^{-1}\right|$$
$$\leq \rho^k\cdot\epsilon\int_B\frac{1}{\phi_k}dm \leq c\cdot\rho^k\cdot\epsilon.$$

Como ϵ é arbritário, segue que

$$\left|m_s(T^kB) - \int_B\frac{\rho^k}{\phi_k}dm_s\right| \to 0.\ \text{Então}\ m(T^kB) = \int_B\rho^k/\phi_k dm.$$

$\square$

Afim de aplicar o lema acima, vamos analisar os seguintes casos.

1º Caso: Se o espaço X for compacto, qualquer sequência de medidas de probabilidade tem um ponto de acumulação, devido ao teorema de Banach-Alaoglu e pelo fato do espaço das funções contínuas ser separável. Isso garante a convergência das medidas $\{m_s\}$.

2º Caso: Caso contrário, idéia é mostrarmos que a família de medidas $\{m_s\}$ é rígida, isto é, $\forall \epsilon > 0, \exists K$ compacto tal que $m_s(K) \geq 1-\epsilon$, e em seguida usarmos o seguinte Teorema de Prohorov: Seja $\{m_s : m_s$ medida de probabilidade $\}$ e X espaço Polonês, isto é, X é metrizável, separável e completo. Se $\{m_s\}$ for rígida, então $\exists s_k \nearrow \infty$ e uma medida m tal que

$$m_{s_k} \xrightarrow{\text{fraca}^*} m.$$

Como foi notado na subseção 2.1, podemos sem perda da generalidade substituir potenciais localmente log-Hölder e somáveis por aplicação de Gibbs-Markov com a propriedade g.i.p.

Teorema 3.4. *Seja (X,T) uma extensão de um aplicação de Gibbs-Markov por grupo topologicamente transitivo com propriedade g.i.p. Então existe uma medida σ- finita, não atômica, (ρ/φ)- conforme com medida ν com $\nu(X_g) < \infty$, para cada $g \in G$. Além disso, existe uma sequência (s_k) com $s_k \searrow \rho$ tal que, para cada função contínua não-negativa $f : X \to \mathbb{R}$,*

$$\int f d\nu = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\mathcal{P}(s_k)} \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n s_k^{-n} (\mathcal{L}_\varphi^n f)(\xi, \mathrm{id}) \tag{7}$$

Demonstração. Primeiro vamos mostrar a conformalidade da medida. Para isso iremos mostrar a rigidez da medida para posteriormente podermos usar o teorema de Prohorov.

Para $x \in \Sigma_A$ defina o conjunto $k := \eta_{\mathrm{id}}(x) = min\{n > 1; \psi_n(x) = \mathrm{id}\}$. Então existe $w \in W^k$ tal que $x \in [w]$ e $\eta_{\mathrm{id}}|_{[w]} = k$, k é o primeiro tempo de retorno. Observe que definimos $\phi_n := \prod_{k=0}^{n-1} \varphi(\theta^k)$. Dessa forma

$$\phi_n(y) = \underbrace{\varphi(y)\cdot\varphi(\theta y)\cdots\varphi(\theta^{k-1}y)}_{\phi_k(y)} \cdot \underbrace{\varphi(\theta^k y)\cdots\varphi(\theta^{n-1}y)}_{\phi_{n-k}(\theta^k(y))}.$$

o que implica $\phi_n(y) \asymp \phi_k(x)\cdot\phi_{n-k}(\theta^k y)$. Outra observação a ser feita é se $\phi_k|_{[w]}$ é injetiva, então $y \in E_n \cap [w] \Leftrightarrow \theta^k y \in E_{n-k} \cap [\theta^k w]$. Assim,

$$\begin{aligned} m_s([w]) &= \frac{1}{\mathcal{P}(s)} \sum_{n\geq k} b_n s^{-n} \sum_{y\in E_n\cap[w]} \phi_n(y) \asymp \frac{\phi_k(x)}{\mathcal{P}(s)} \sum_{n\geq k} b_n s^{-n} \sum_{y\in E_{n-k}\cap\theta^k[w]} \phi_{n-k}(y) \\ &\asymp \frac{\mu([w])}{\mathcal{Z}^k\mathcal{P}(s)} \sum_{n\geq k} b_n s^{-n} \mathcal{Z}^k \sum_{y\in E_{n-k}\cap\theta^k[w]} \phi_{n-k}(y). \end{aligned} \tag{8}$$

Observe que usamos (3) que implicitamente faz uso da propriedade de grandes imagens e pré-imagens por aplicação do Teorema de Ruelle. Aplicando o Lema 2.3, com n_0 dado, com $J \subset W^{n_0}$, podemos conectar palavras de modo que alcançamos o seguinte resultado

$$\mathcal{Z}^k \sum_{y \in E_{n-k} \cap \theta^k[w]} \phi_{n-k}(y) \ll \sum_{\substack{v_1 \in W^k, u \in \mathcal{J}, v_2 \in W^{n-k} \\ (v_1 u v_2) \in W^\infty, \psi_{n+n_0}(v_1 u v_2) = \mathrm{id}}} \phi_{n+n_0} \circ \tau_{v_1 u v_2}(\xi) \leq \mathcal{Z}^{n+n_0}. \tag{9}$$

Denote $\hat{W}^k \subset W^k$ o conjunto de palavras de comprimento k com $\eta_{id}|_{[w]} = k$ para cada $w \in \hat{W}^k$. Observe que por (8) e (9) temos que

$$\begin{aligned} m_s([w]) &\asymp \frac{\mu([w])}{\mathcal{Z}^k \mathcal{P}(s)} \sum_{n \geq k} b_n s^{-n} \mathcal{Z}^k \sum_{y \in E_{n-k} \cap \theta^k[w]} \phi_{n-k}(y) \\ &\ll \frac{\mu([w])}{\mathcal{Z}^k} \cdot \frac{1}{\mathcal{P}(s)} \sum_{n=1}^{\infty} b_n s^{-n} \mathcal{Z}^{n+n_0} \end{aligned} \tag{10}$$

Observe que, para qualquer $s > \rho$, temos

$$\frac{1}{\mathcal{P}(s)} \sum_{n=1}^{\infty} b_n s^{-n} \mathcal{Z}^n = 1.$$

Desta forma podemos igualar os objetos abaixo

$$\frac{1}{\mathcal{P}(s)} \sum_{n=1}^{\infty} b_n s^{-n} \mathcal{Z}^{n+n_0} = \frac{1}{\mathcal{P}(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{b_{n+n_0}} b_{n+n_0} s^{n_0} s^{-(n+n_0)} \mathcal{Z}^{n+n_0}.$$

E assim obtermos por argumentos já conhecido que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mathcal{P}(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{b_{n+n_0}} \cdot b_{n+n_0} s^{n_0} \cdot s^{-(n+n_0)} \cdot \mathcal{Z}^{n+n_0} \\ &= \frac{s^{n_0}}{\mathcal{P}(s)} \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+n_0} s^{-n-n_0} \mathcal{Z}^{n+n_0} \\ &= \frac{s^{n_0}}{\mathcal{P}(s)} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} s^{-n} b_n \mathcal{Z}^n = s^{n_0} \frac{1}{\mathcal{P}(s)} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} s^{-n} b_n \mathcal{Z}^n \end{aligned}$$

Daí,

$$m_s([w]) \ll s^{n_0} \frac{\mu([w])}{\mathcal{Z}^k}. \tag{11}$$

Vamos agora usar essa estimativa para um dado $\epsilon > 0$, para a construção de um conjunto compacto $K \subset \Sigma_A$ com $m_s(K) > 1 - \epsilon, \forall s \in (\rho, s_0]$, para um arbitrário mas fixo s_0. Portanto, para $k \in \mathbb{N}$, escolha um subconjunto finito j_k de W^k tal que

$$\sum_{(w_1\cdots w_k)\in\hat{W}^k, w_k\notin j_k} \mu([w]) \leq \epsilon\cdot\mathcal{Z}^k 2^{-k}. \tag{12}$$

Defina $K := \{(w_1, w_2, ...) \in \sum_A : w_k \in j_k, \forall k \in \mathbb{N}\}$. Segue pela construção que K é compacto, pois escolhemos j_k um subconjunto finito de W^k e para $s \in (\rho, s_0]$, temos

$$\begin{aligned}
m_s(K^c) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} m_s(\{x \in k^c : \eta|_{id}(x) = k\}) + m_s(\{x \in k^c : \eta|_{id}(x) = \infty\}) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{w\in\hat{W}^k w_k\notin j_k} m_s([w]) \underbrace{\ll}_{\text{por (11)}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{w\in\hat{W}^k w_k\notin j_k} \frac{s^{n_0}}{\mathcal{Z}}\mu([w]) \\
&= \sum_{k} \frac{s^{n_0}}{\mathcal{Z}} \sum_{w\in\hat{W}^k, w_k\notin j_k} \mu([w]) \underbrace{\leq}_{\text{por (12)}} \sum_{k} \frac{s^{n_0}}{\mathcal{Z}^k}\cdot\epsilon\cdot\mathcal{Z}^k\cdot 2^{-k} \\
&\leq \epsilon\cdot s^{n_0}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}.
\end{aligned}$$

Ou seja, $m_s(K^c) \leq \epsilon\cdot s^{n_0}$. Então $m_s \ll \epsilon$. Portanto

$$m_s(K) = 1 - m_s(K^c) \geq 1 - c\cdot\epsilon.$$

Note que o resultado é válido quando $m_s(X_{\text{id}}) = 1$ e $m_s(X_{\text{id}}^c) = 0$, onde $X_{\text{id}} := \Sigma_A \times \{\text{id}\}$. Portanto, m_s é rígida, assim pelo teorema de Prohorov temos a convergência $fraca^*$ e daí podemos usar o lema acima.

Para provar a segunda parte, que prova a construção da medida para todo X, usaremos a definição de convergência fraca* que já foi definida anteriormente. Para $b \in W^1$ e $g \in G$, existe por transitividade $j \in \mathbb{N}$ e $u \in W^{j+1}$ com $T^j([\mu, \text{id}]) = [b, g]$. A restrição de ν em $[g, h]$ é definido por

$$\int_{[b,g]} f(x)d\nu(x,h) := \int_{[u]} f\circ\theta^j\rho^j/\phi_j dm,$$

onde $f : X_g \to \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{[u]} f\circ\theta^j\rho^j\phi_j dm &= \lim_{k\to\infty}\int_{[u]} f\theta^j\rho^j/\phi_j dm_{s_k} = \lim_{k\to\infty}\int_{[u]} f\circ\theta^j\rho^j/(\phi_j(x))^{-1}dm_{s_k}\\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\mathcal{P}(s_k)}\sum_{n\in\mathbb{N}} s_k^{-n}b_n\sum_{x\in E_n}\phi_n(x)\int_{[u]} f\circ\theta^j\rho^j/(\phi_j(x))^{-1}dm_{s_k}\\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\mathcal{P}(s_k)}\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n\rho^j s_k^{-n}\sum_{x\in E_n} f\circ\theta^j(x)(\phi_j(x))^{-1}\cdot\phi_n(x)\\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\mathcal{P}(s_k)}\sum_{n>j} b_{n-j}s_k^{j-n}\sum_{(y,g)\in T^{j-n}(\zeta,\mathrm{id})\cap[b,g]}\phi_{n-j}(y)f(y)\\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\mathcal{P}(s_k)}\sum_{n>j} b_{n-j}s_k^{j-n}(\mathcal{L}_\varphi^n f)(\xi,\mathrm{id})\\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\mathcal{P}(s_k)}\sum_{n\in\mathbb{N}} s_k^{n}(\mathcal{L}_\varphi^n f)(\xi,\mathrm{id}).
\end{aligned}$$

O que prova a equação (7). Por fim, usando a construção de m para ν e a propriedade g.i.p. obtemos que $\nu(X_g) < \infty$ para todo $g \in G$. □

Proposição 3.5. *A medida ν é uma automedida para o operador de Ruelle, ou seja, $\mathcal{L}^*(\nu) = \rho\nu$.*

Demonstração. Para provarmos esse resultado iremos usar o teorema acima , como automedidas são conformes, conseguimos mostrar a conformalidade para todo X, pois até agora tinhamos a conformalidade só em X_{id}. Em particular, uma vez que $\lim b_n/b_{n+1} = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int \mathcal{L}(f)d\nu &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\mathcal{P}(s_k)}\sum_{n=1}^{\infty} s_k^{-n}b_n\mathcal{L}^n(\mathcal{L}(f))(\xi,\mathrm{id})\\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{s_k}{\mathcal{P}(s_k)}\sum_{n=1}^{\infty} s_k^{-(n+1)}\frac{b_n}{b_{n+1}}b_{n+1}\mathcal{L}^{n+1}(f)(\zeta,\mathrm{id}) + \frac{1}{\mathcal{P}(s_k)}s_k^{-1}b_1\mathcal{L}(f)(\xi,\mathrm{id})\right)\\
&= \rho\lim_{k\to\infty}\nu_{s_k}(f) = \rho\nu(f) = \rho\int f d\nu.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\int f d\mathcal{L}^*(\nu) := \int \mathcal{L}(f)d\nu = \rho\int f d\nu$$

Como queríamos,

$$\mathcal{L}^*(\nu) = \rho\nu$$

Com esse resultado conseguimos provar que ν é uma automedida para o operador de Ruelle, o que implica que ν é conforme. □

Proposição 3.6. *Para a medida ν dada pelo teorema 3.4, temos o seguinte:*

i) Se $\lim_n \mathcal{Z}^n \rho^{-n} = 0$, *então* $\nu(X) = \infty$

ii) Se μ *é* θ*- invariante, então* $d\nu \circ T^{-1} = \rho^{-1} d\nu$

iii) Para $w \in W^n$ *e* $g \in G$, *temos* $\rho^n \nu([w, g]) \asymp \phi_n(x) \cdot \nu(X_{g\psi_n(x)})$ *para qualquer* $x \in [w]$.

Demonstração. Para provarmos (i) vamos usar o Teorema 2.1, e assim obtermos que existe $c > 0$ tal que

$$c^{-1} \leq L_\varphi^n(1)\rho^{-n} \leq c \Rightarrow c^{-1}\rho^n \leq \mathcal{L}_\varphi(1) \leq c\rho^n. \tag{13}$$

Pelo teorema 3.4 temos que

$$\int f d\nu = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\mathcal{P}(s_k)} \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n s_k^{-n} (\mathcal{L}_\varphi^n f)(\xi, \mathrm{id}).$$

Tome $f = 1$, assim pela equação (13) obtemos,

$$\begin{aligned} \nu(X) = \int 1 d\nu &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\mathcal{P}(s_k)} \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n s_k^{-n} (\mathcal{L}_\varphi^n 1)(\zeta, \mathrm{id}) \\ &\asymp \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\mathcal{P}(s_k)} \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n s_k^{-n} \rho^n \asymp \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\mathcal{P}(s_k)} \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n s_k^{-n} \rho^n. \end{aligned}$$

Vamos analisar $1/\nu(x)$. Assim

$$\frac{1}{\nu(x)} \asymp \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n s_n^{-k} \mathcal{Z}^n}{\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n s_k^{-n} \rho^n} \asymp \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\sum_{n=1}^N b_n s_k^{-n} \mathcal{Z}^n}{\sum_{n=1}^\infty b_n s_k^{-n} \rho^n} + \frac{\sum_{n=N+1}^\infty b_n s_n^{-k} \mathcal{Z}^n}{\sum_{n=1}^\infty b_n s_k^{-n} \rho^n} \right).$$

Para $\epsilon > 0$, escolha N_ϵ talque $\mathcal{Z}^n \cdot \rho^{-n} < \epsilon$ para todo $n > N_\epsilon$, assim $\lim_{n\to\infty} \mathcal{Z}^n \rho^{-n} = 0$, então $\mathcal{Z}^n < \epsilon\rho^n$ para todo $n > N_\epsilon$. Portanto,

$$\frac{1}{\nu(X)} \asymp \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\sum_{n=N_\epsilon+1}^\infty b_n s_k^{-n} \rho^n \cdot \epsilon}{\sum_{n=1}^\infty b_n s_k^{-n} \rho^n} \right).$$

Como

$$\sum_{n=1}^\infty b_n s_k^{-n} \rho^n \geq \sum_{n=N_\epsilon+1}^\infty b_n s_k^{-n} \rho^n,$$

então

$$\frac{\sum_{n=N_\epsilon+1}^\infty b_n s_k^{-n} \rho^n}{\sum_{n=1}^\infty b_n s_k^{-n} \rho^n} \leq 1$$

o que implica $1/\nu(X) \leq c \cdot \epsilon$. Daí, $\lim 1/\nu(X) = 0$, ou seja, $\nu(X) = \infty$. Assim, provamos o item (i).

Para provarmos (ii) iremos usar o seguinte resultado. $\mathcal{L}_\varphi(1) = 1$ se e somente se μ é invariante. Suponha que $\mathcal{L}_\varphi(1) = 1$ então

$$\int f \circ \theta d\mu = \int \mathcal{L}(f \circ \theta) d\mu = \int f \mathcal{L}_\varphi(1) d\mu = \int f d\mu$$

então μ é invariante.

Reciprocamente, suponha que μ é invariante, como μ é conforme, temos

$$\int f \circ \theta d\mu = \int f \mathcal{L}_\varphi(1) d\mu,$$

mas μ é invariante então $\mathcal{L}_\varphi(1) = 1$. Note que,

$$\mathcal{L}^n(f \circ T) = \mathcal{L}^{n-1}(\mathcal{L}(f \circ T)) = \mathcal{L}^{n-1}(f \cdot \mathcal{L}(1)) = \mathcal{L}^{n-1} f.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int f \circ T d\nu &= \frac{1}{\mathcal{P}(s)} \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n s^{-n} (\mathcal{L}_\varphi^n f \circ T(\xi, \mathrm{id})) = \frac{1}{\mathcal{P}(s)} \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n s^{-n} (\mathcal{L}_\varphi^{n-1} f)(\xi, \mathrm{id}) \\ &= \frac{s^{-1}}{\mathcal{P}(s)} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{b_n}{b_{n-1}} b_{n-1} s^{-n+1} (\mathcal{L}_\varphi^{n-1} f)(\xi, \mathrm{id}).\end{aligned}$$

Uma vez que $\mathcal{P}(s) \nearrow \infty$ e $s \to \rho$ e $\lim b_n/b_{n-1} = 1$ como $s \to \infty$, obtemos que

$$\begin{aligned}\int f \circ T d\nu &= \lim \frac{1}{\mathcal{P}(s)} \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n s^{-n} (\mathcal{L}_\varphi^n f \circ T(\zeta, \mathrm{id})) \\ &= s^{-1} \lim \frac{1}{\mathcal{P}(s)} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{b_n}{b_{n-1}} b_{n-1} s^{-n+1} (\mathcal{L}_\varphi^{n-1} f)(\xi, \mathrm{id}) = \rho^{-1} \int f d\nu.\end{aligned}$$

Chegamos que $\int f \circ T d\nu = \rho^{-1} \int f d\nu$ então ν é invariante ao menos de uma constante ρ^{-1}, assim $d\nu \circ T^{-1} = \rho^{-1} d\nu$, o que prova o item (ii).

Por fim, vamos provar que $\rho^n \nu([w, g]) \asymp \phi_n(x) \cdot \nu(X_{g\psi_n(x)})$ para qualquer $x \in [w]$. Para isso, vamos fazer uso da conformalidade, assim

$$\begin{aligned}\nu([w, g]) &= \int_{T^n([w,g])} \rho^{-n} \phi_n \circ \tau_w d\nu \\ &\asymp \rho^{-n} \phi_n(x) \cdot \int_{T^n([w,g])} d\nu = \rho^{-n} \phi_n(x) \cdot \nu(T^n([w, g])).\end{aligned}$$

Ou seja, $\rho^n \nu([w, g]) \asymp \phi_n(x) \cdot \nu(T^n([w, g]))$. Assim, basta mostrarmos que $\nu(T^n([w, g])) \asymp \nu(X_{g\psi_n(x)})$.

Observe que, $T^n([w, g]) = \theta^n([w]) \times \{g \cdot \psi_n(x)\} \subset X_{g \cdot \psi_n(x)}$. Daí, $\nu(T^n[w, g]) \leq \nu(X_{g\psi_n(x)})$.

Fazendo uso propriedade g.i.p, temos que existe $b \in I_{g.i.p}$ tal que $[b] \subset \theta^n([w])$, para $w \in W^n$. Agora considere $w_{b,b'} \in J$, onde J é o conjunto finito de W^k, para k e J dado do lema 2.3 e $h := g \cdot \psi_n(x)$ temos que

$$T^k([w,h]) = \theta^k([w]) \times \{h\} = \theta([b]) \times \{h\}$$

Como $\Sigma_A = \bigcup_{b' \in I_{g.i.p}} \theta([b'])$ segue que,

$$\begin{aligned} T^k([w_{b,b'}, h] : b' \in I_{g.i.p}, w_{b,b'} \in J) &= \bigcup_{b' \in I_{g.i.p}} T^k([w_{b,b'}, h]) \\ &= \bigcup_{b' \in I_{g.i.p}} \theta([b']) \times \{h\} = \Sigma_A \times \{h\} = X_h \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \nu(X_h) &\leq \nu(\bigcup_{b' \in I_{g.i.p}} \theta(b) \times \{h\}) \\ &\leq \sum_{b' \in I_{g.i.p} \in J} \nu((\theta(b')) \times \{h\}) \\ &\leq \sum_{b' \in I_{g.i.p}} \rho^{-n} \sup_{x \in [w_{b,b'}]} \phi_k(x) \cdot \nu([b,h]) \\ &= \nu([b,h]) \cdot \sum_{b' \in I_{g.i.p}} \rho^{-n} \sup_{x \in [w_{b,b'}]} \phi_k(x). \end{aligned}$$

Como J é finito, segue que existe $c > 0$ tal que $\nu(X_h) \leq c \cdot \nu([b,h])$, para todo $b \in I_{gi.p}$.

□

4 O Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius para extensões por grupos

Nesse capítulo temos como principal resultado o teorema de Ruelle-Perron-Frobenius para extensão por grupos de cadeias de Markov topológicas do artigo [26]. Para uma família de medidas equivalentes σ- finita conforme, temos como resuldado que suas derivadas de Radon-Nikodym são autofunções para o operador de Ruelle e localmente log-Hölder. Apresentaremos também um resultado da teoria ergódica que diz que a extensão por grupo é conservativa e ergódica se, e somente se $\sum_n \rho^{-n} \mathcal{Z}_w^n(\xi)$ diverge. No final do capitulo faremos aplicações para tornar os resultados mais concretos. Iremos agora definir alguns objetos da teoria da medida e integração e enunciar um importante teorema da teoria da medida, que é o teorema de Radon- Nikodym, tomamos como principal referência [5]. No qual define medida absolutamente contínua da seguinte forma. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $\nu : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}$. ν é dita absolutamente contínua com respeito a μ se para todo $A \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) = 0$, temos $\nu(A) = 0$. Se, além disso, μ for absolutamente contínua em relação a ν então as medidas são equivalentes.

Comentário: Não vamos nos referir a medidas absolutamente contínua por essa notação $\nu \ll \mu$ pois já usamos essa notação em outro contexto.

Teorema 4.1 (Radon-Nikodym). *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida σ-finita. Seja $\nu : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}\sigma$- finita absolutamente contínua com respeito a μ. Então existe uma função mensurável $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ integrável (no caso complexo) ou semi-integrável (caso ν seja medida com sinal) tal que*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \forall A \in \mathcal{A}.$$

Além disso, quaisquer funções que satisfaçam tais condições, coincidem em μ-quase todo ponto.

A função f obtida no teorema de Radon-Nikodym é chamada de derivada de Radon-Nikodym de ν em relação a μ, e denotada por $f = \frac{d\nu}{d\mu}$. Observe que X é um espaço de Besicovich (ver [8]), logo

$$\frac{d\mu}{d\nu}(x, g) = \lim_{n \to 0} \frac{\nu[(x_1 ... x_n, g)]}{\mu([x_1 ... x_n, g)]}$$

em quase todo ponto $(x, g) = ((x_1, x_2, \ldots), g)$.

Teorema 4.2 (Stadlbauer, 2013). *Seja (X, T) uma extensão de uma aplicação de Gibbs-Markov com a propriedade g.i.p do grupo topologicamente transitiva. Então existe sequencia (s_k) com $s_k \searrow \rho$ tal que*

$$\int f d\nu_\zeta = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\mathcal{P}(s_k)} \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n s_k^{-n} (\mathcal{L}_\varphi^n f)(\zeta)$$

define um (ρ/φ)-medida conforme e σ-finita ν_ζ para qualquer $\zeta \in X$. Além disso, $\{\nu_\zeta; \zeta \in X\}$ é uma família de medidas equivalentes e para as derivadas de Radon-Nikodym $h : X \times X \to \mathbb{R}$, $(\zeta, z) \mapsto (d\nu_\zeta / d\nu)(z)$, temos o seguinte.

1. *Para todo $z \in X$, a aplicação $\log h(\cdot, z) : \zeta \mapsto \log h(\zeta, z)$ é localmente Hölder contínua. Além disso, as constantes associadas a continuidade Hölder são uniformes.*

2. *Para todo $z \in X$, a aplicação $h(\cdot, z) : \zeta \mapsto h(\zeta, z)$ é uma autofunção para $\mathcal{L}_\varphi$, que é $\mathcal{L}_\varphi(h(\cdot, z)) = \rho\, h(\cdot, z)$.*

3. *$h((x, g), z) \asymp \nu(X_g^{-1})$.*

Demonstração. Comecemos com a construção de ν_ζ para elementos em

$$E(\xi) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T^{-n}(\{(\xi, \mathrm{id})\}),$$

para $\xi \in \Sigma_A$. Dessa forma, se $\zeta \in E(\xi)$ então satisfaz $T^n(\zeta) = (\xi, \mathrm{id})$.

Para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ contínua não-negativa e $s > \rho$, vamos definir

$$M^s_\zeta(f) = \frac{1}{\mathcal{P}(s)} \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n s^{-n} (\mathcal{L}^n_\varphi f)(\zeta)$$

Decorre da prova do Teorema 3.4 que M^s_ζ restrita as funções com suporte em $X_{\mathrm{id}} := \Sigma_A \times id$ define uma família de medida rígida e, portanto, para uma subsequência $(s_{k_j}, j \in \mathbb{N})$ de (s_k) dada pelo Teorema 3.4,

$$M_\zeta = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\mathcal{P}(s_{k_j})} \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n s_{k_j}^{-n} (\mathcal{L}^n_\varphi f)(\zeta) \tag{14}$$

existe para cada função contínua não-negativa $f : X \to \mathbb{R}$. Pelo teorema de Riesz-Markov (ver [5]), o operador linear positivo M_ζ define uma medida ν_ζ. Ademais, $E(\xi)$ é contável e é possível escolher a subsequência (s_{k_j}) de tal modo que o limite em (14) exista para todo $\zeta \in E(\xi)$ e f contínua não-negativa.

Primeiro iremos provar que essas medidas são absolutamente contínuas.

Observe que se $T^k(\zeta) = (\xi, id)$ então, existe $v \in W^k$ tal que $\zeta = \tau_v(\xi, id)$.

$$\begin{aligned}
\nu_{\xi,id} &= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\mathcal{P}(s_{k_j})} \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n s_{k_j}^{-n} (\mathcal{L}^n_\varphi \mathbf{1}_A)(\xi, id) \\
&= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\mathcal{P}(s_{k_j})} \sum_{n=1}^{k} b_n s_{k_j}^{-n} (\mathcal{L}^n_\varphi \mathbf{1}_A)(\xi, id) + \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\mathcal{P}(s_{k_j})} \sum_{n>k} b_n s_{k_j}^{-n} (\mathcal{L}^n_\varphi \mathbf{1}_A)(\xi, id) \\
&= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\mathcal{P}(s_{k_j})} \sum_{n>k} b_n s_{k_j}^{-n} \mathcal{L}^k (\mathcal{L}^{n-k}_\varphi \mathbf{1}_A)(\xi, id)
\end{aligned}$$

Note que para qualquer f, temos

$$\mathcal{L}^k(f)(\xi, \mathrm{id}) = \sum_{w\in W^k} \phi_k(\tau_w(\xi, \mathrm{id})) f \circ \tau_w(\xi, \mathrm{id}) \geq \phi_k(\tau_v(\xi, \mathrm{id})) f \circ \tau_v(\xi, \mathrm{id})$$

Dessa forma,

$$\mathcal{L}^k(\mathcal{L}^{n-k}_\varphi \mathbf{1}_A)(\xi, \mathrm{id}) \geq \phi_k(\tau_v(\xi, \mathrm{id})) \mathcal{L}^{n-k}_\varphi(\mathbf{1}_A) \circ (\tau_v(\xi, \mathrm{id})) = \phi_k(\zeta)(\mathcal{L}^{n-k}_\varphi \mathbf{1}_A)(\zeta).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\nu_{\xi,\mathrm{id}}(A) &\geq \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\mathcal{P}(s_{k_j})} \sum_{n>k} b_n s_{k_j}^{-n} \phi_k(\zeta)(\mathcal{L}^{n-k} \mathbf{1}_A)(\zeta) \\
&= \phi_k(\zeta) s_{k_j}^{-k} \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\mathcal{P}(s_{k_j})} \sum_{n>k} b_{n-k} \cdot \frac{b_n}{b_{n-k}} s_{k_j}^{-(n-k)} \mathcal{L}^{n-k}(\mathbf{1}_A)(\zeta).
\end{aligned}$$

Por argumento já aplicado e fazendo $s \to \rho$, temos

$$\nu_{\xi,\mathrm{id}}(A) := \nu(A) \geq \phi_k(\zeta)\rho^{-k}\nu_\zeta(A) \tag{15}$$

para cada conjunto de Borel A. Daí, se $\nu_{\xi,id}(A) = 0$ então $\nu_\zeta(A) = 0$, portanto ν_ζ é absolutamente contínua em relação a $\nu_{\xi,id}$. Falta mostrarmos a reciproca para termos a equivalência das medidas.

Segue-se a partir de transitividade que existem $v \in W^m, m \in \mathbb{N}$ tal que $\tau_v(\zeta)$ e (ξ, id) estão no mesmo cilindro, essa informação nos será útil para provarmos a equivalência da medida. Suponha que A é um cilindro.

$$\begin{aligned}
\nu_{\tau_v(\zeta)}(A) &= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\mathcal{P}(s_{k_j})} \sum_{n\in\mathbb{N}} s_{k_j}^{-n} b_n (\mathcal{L}_\varphi^n \mathbf{1}_A)(\tau_v(\zeta)) \\
&= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\mathcal{P}(s_{k_j})} \sum_{n\in\mathbb{N}} s_{k_j}^{-n} b_n \sum_{w\in W^n} \phi_n \circ \tau_w(\tau_v(\zeta)) \cdot \mathbf{1}_A \circ (\tau_w \circ \tau_v(\zeta)) \\
&= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\mathcal{P}(s_{k_j})} \sum_{n\in\mathbb{N}} s_{k_j}^{-n} b_n \sum_{w\in W^n} \frac{\phi_n \circ \tau_w(\tau_v(\zeta))}{\phi_n \circ \tau_w(\xi,\mathrm{id})} \cdot \phi_n \circ \tau_w(\xi,\mathrm{id}) \mathbf{1}_A \circ (\tau_w \circ \tau_v(\zeta)) \\
&\asymp \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\mathcal{P}(s_{k_j})} \sum_{n\in\mathbb{N}} s_{k_j}^{-n} b_n \sum_{w\in W^n} \phi_n \circ \tau_w(\xi,\mathrm{id}) \mathbf{1}_A \circ \tau_w(\xi,\mathrm{id}) \asymp \nu_{\xi,\mathrm{id}}(A),
\end{aligned}$$

onde a constante associada a $\asymp$ vem da distorção limitada. Já provamos que

$$\nu_\zeta(A) \geq \phi_m(\tau_v(\zeta)) \cdot \rho^{-m} \nu_{\tau_v(\zeta)}(A) \asymp \phi_m(\tau_v(\zeta)) \cdot \rho^{-m} \cdot \nu_{\xi,id}(A)$$

entaõ,

$$\nu_{\xi,\mathrm{id}}(A) \asymp \phi_m(\tau_v(\zeta))^{-1} \cdot \rho^m \nu_\zeta(A) \asymp (\phi_m(\xi))^{-1} \cdot \rho^m \nu_\zeta(A).$$

Ou seja,

$$\rho^m \phi(\xi)^{-1} \nu_\zeta(A) \ll \nu_{\xi,id}(A) \geq \phi_n(\zeta)\nu_\zeta(A) \cdot \rho^{-n}.$$

Então, se $\nu_\zeta(A) = 0$ então $\nu_{\xi,id}(A) = 0$. Portanto as medidas são equivalentes, o que implica que a derivada de Radon-Nikodym existe e iremos denota-la por $h(\zeta, .) := d\nu_\zeta / d\nu_{(\xi,id)}$.

Afim de estender $h(\zeta, \cdot)$ para uma função globalmente definida, nosso objetivo é mostar que $h(\cdot, z)$ é log-Hölder. Para isso iremos tomar $k, m, n \in \mathbb{N}$, $\zeta_1, \zeta_2 \in [a, g] \cap E(\xi)$, $a \in W^m, b \in W^k$ com $k \leq n$, $h \in G$ e $r \leq 1$ dada pela continuidade Hölder de $\log \varphi$, assim obtemos que

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{L}_\varphi^n(f)(\zeta_1)-\mathcal{L}_\varphi^n(f)(\zeta_2)\right| &= \left|\sum_{w\in W^n}\phi_n\circ\tau_w(\zeta_1)\cdot f\circ\tau_w(\zeta_1)-\sum_{w\in W^n}\phi_n\circ\tau_w(\zeta_2)\cdot f\circ\tau_w(\zeta_2)\right|\\
&\leq \left|\sum_{w\in W^n}\phi_n\circ\tau_w(\zeta_1)\cdot f\circ\tau_w(\zeta_1)-\sum_{w\in W^n}\phi_n\circ\tau_w(\zeta_2)\cdot f\circ\tau_w(\zeta_1)\right|\\
&+\left|\sum_{w\in W^n}\phi_n\circ\tau_w(\zeta_2)\cdot f\circ\tau_w(\zeta_1)-\sum_{w\in W^n}\phi_n\circ\tau_w(\zeta_2)\cdot f\circ\tau_w(\zeta_2)\right|\\
&=\sum_{w\in W^n}\left|\phi_n\circ\tau_w(\zeta_1)-\phi_n\circ\tau_w(\zeta_2)\right|\cdot\left|f\circ\tau_w(\zeta_1)\right|\\
&+\sum_{w\in W^n}\phi_n\circ\tau_w(\zeta_2)\left|f\circ\tau_w(\zeta_1)-f\circ\tau_w(\zeta_2)\right|\\
&=\sum_{w\in W^n}\phi_n(\tau_w(\zeta_1))\left|1-\frac{\phi_n(\tau_w(\zeta_2))}{\phi_n(\tau_w(\zeta_1))}\right|\cdot\left|f\circ\tau_w(\zeta_1)\right|\\
&+\sum_{w\in W^n}\phi_n(\tau_w(\zeta_2))\underbrace{\left|f\circ\tau_w(\zeta_1)-f\circ\tau_w(\zeta_2)\right|}_{I}
\end{aligned}$$

Para $f=\mathbf{1}_{[b,h]}$ e ζ_1,ζ_2 no mesmo cilindro temos que $I=0$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{L}_\varphi^n(f)(\zeta_1)-\mathcal{L}_\varphi^n(f)(\zeta_2)\right| &= \sum_{w\in W^n}\phi_n(\tau_w(\zeta_1))\left|1-\frac{\phi_n(\tau_w(\zeta_2))}{\phi_n(\tau_w(\zeta_1))}\right|\cdot\mathbf{1}_{[b,h]}(\tau_w(\zeta_1))\\
&=\left|1-\frac{\phi_n(\tau_w(\zeta_2))}{\phi_n(\tau_w(\zeta_1))}\right|\cdot\sum_{w\in W^n}\phi_n(\tau_w(\zeta_1))\cdot\mathbf{1}_{[b,h]}(\tau_w(\zeta_1))\\
&=\left|1-\frac{\phi_n(\tau_w(\zeta_2))}{\phi_n(\tau_w(\zeta_1))}\right|\cdot\mathcal{L}_\varphi^n(\mathbf{1}_{[b,h]})(\zeta_1)\\
&\leq\sup\left(\left|1-\frac{\phi_n(\tau_w(\zeta_2))}{\phi_n(\tau_w(\zeta_1))}\right|\right)\mathcal{L}_\varphi^n(\mathbf{1}_{[b,h]})(\zeta_1)\\
&\ll d(\zeta_1,\zeta_2)\cdot\mathcal{L}_\varphi^n(\mathbf{1}_{[b,h]})(\zeta_1)\ll r^m\mathcal{L}_\varphi^n(\mathbf{1}_{[b,h]})(\zeta_1)
\end{aligned}$$

o que implica,

$$\left|M_{\zeta_1}(\mathbf{1}_{[b,h]})-M_{\zeta_2}(\mathbf{1}_{[b,h]})\right|\ll d(\zeta_1,\zeta_2)\cdot M_{\zeta_1}(\mathbf{1}_{[b,h]}).$$

Pelo Teorema de Besicovich quando $[b,h]\to(z,h)\in\Sigma_A$ temos que existem $c_1,c_2>0$ tal que

$$\left|\log\frac{d\nu_{\zeta_2}([b,h])}{d\nu_{\zeta_1}([b,h])}(z)\right|\leq c_1\cdot c_2\cdot d(\zeta_1,\zeta_2).$$

Logo,

$$\left|\log\frac{d\nu_{\zeta_2}}{d\nu}(z)-\log\frac{d\nu_{\zeta_1}}{d\nu}(z)\right|\ll d(\zeta_1,\zeta_2).$$

Como $h(\zeta,.)=d\nu_\zeta/d\nu_{(\xi,id)}$, então $\zeta\longmapsto\log h(\zeta,(x,g))$ é localmente log-Hölder contínua para $\zeta\in E(\xi)$. Observe que os coeficientes são independentes de (x,g). Com isso provamos o Item (1).

Agora provaremos o Item (2). Desde que $b_n/b_{n+1} = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\nu_\zeta([b,h]) &= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\mathcal{P}(s_{k_j})} \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n s_{k_j}^{-n} (\mathcal{L}_\varphi^n \mathbf{1}_{[b,h]})(\zeta) \\
&= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\mathcal{P}(s_{k_j})} \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n s_{k_j}^{-n} \mathcal{L}(\mathcal{L}_\varphi^{n-1} \mathbf{1}_{[b,h]})(\zeta) \\
&= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\mathcal{P}(s_{k_j})} \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n s_{k_j}^{-n} \sum_{v\in W^1} \varphi\circ(\tau_v(\zeta)) \cdot (\mathcal{L}_\varphi^{n-1} \mathbf{1}_{[b,h]})(\tau_v(\zeta)) \\
&= \sum_{v\in W^1} \varphi\circ(\tau_v(\zeta)) \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\mathcal{P}(s_{k_j})} \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n s_{k_j}^{-n} \cdot (\mathcal{L}_\varphi^{n-1} \mathbf{1}_{[b,h]})(\tau_v(\zeta)) \\
&= \sum_{v\in W^1} \varphi\circ(\tau_v(\zeta)) \rho^{-1} \nu_{\tau_v(\zeta)}([b,h]) = \rho^{-1} \sum_{v\in W^1} \varphi\circ(\tau_v(\zeta)) \nu_{\tau_v(\zeta)}([b,h]) \\
&= \rho^{-1} \mathcal{L}_\varphi(\nu_\bullet([b,h])(\zeta)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\rho h_\zeta(z) = \mathcal{L}_\varphi(h_\bullet(z)), \forall \zeta, z \in X.$$

Por fim, para provar o item (3) basta observar que

$$\begin{aligned}
\nu_{(\zeta,\mathrm{id})}(X_{g^{-1}}) &= \nu_{(\zeta,g\cdot\mathrm{id})}(X_{g\cdot g^{-1}}) \\
&= \nu_{(\zeta,g\cdot\mathrm{id})}(X_{\mathrm{id}}) \\
&= \int_{X_{\mathrm{id}}} h((\zeta,g),z) d\nu_{(\zeta,\mathrm{id})}(z) \\
&\asymp h((\zeta,g),z)\nu(X_{\mathrm{id}}) = h((\zeta,g),z).
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$h((\zeta,g),z) \asymp \nu(X_{g^{-1}})$$

como queríamos.

□

Além disso uma transformação T é chamada de *totalmente dissipativa* se qualquer conjunto mensurável A com $\mu(A) > 0$ contém um conjunto mensurável $B \subset A$ tal que $\mu(B) > 0$ e $\mu(T^{-n}(B) \cap T^{-m}(B)) = 0, \forall m \neq n$. Dizemos que T é *conservativa* se e somente se não é totalmente dissipativa.

Lembre que o teorema de Sarig implica ergódicidade. No nosso caso, a extensão só é ergódica perante algumas condições, como estabelece a proposição abaixo.

Proposição 4.3. *A aplicação T ou é conservativa e ergódica ou totalmente dissipativa em relação a ν. Além disso, T é conservativa e ergódica se, e somente se,*

$$\sum_n \rho^{-n} \mathcal{Z}_w^n(\xi) = \infty.$$

Demonstração. Seja T uma cadeia de Markov topologicamente transitiva. Pelo fato de ν ser conforme temos

$$\nu(T(A)) = \int T(A)d\nu = \int_A \frac{\rho}{\varphi} d\nu.$$

Esse igualdade implica que para $x = (x_1, x_2, \ldots)$ obtemos

$$\frac{d\nu}{d\nu \circ T}(x, g) = \lim_{n\to\infty} \frac{\nu([(x_1, \ldots, x_n), g])}{\nu(T([(x_1, \ldots, x_n), g]))} = \frac{\varphi}{\rho}(x).$$

Essa estimativa combinada com a continuidade Hölder local de φ implica que $(d\nu/d\nu \circ T)$ é um potêncial de variação limitada. Daí, conseguimos mostrar que $(d\nu/d\nu \circ T)$ tem distorção forte e portanto, (T, ν) é um sistema de Markov fibrado com a propriedade distorção limitada como em [1]. Portanto, (T, ν) ou é totalmente dissipativa ou conservativa e ergódica (ver [1], Teorema 4.4.4). Assim conseguimos nosso primeiro objetivo.

Observe que $\rho^{-1}\mathcal{L}_\varphi$ atua como o operador de transfêrencia em $L^1(\nu)$. Portanto para W mensurável e $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\int \mathbf{1}_W \rho^{-n} \mathcal{L}_\varphi^n(x, g) d\nu(x, g) = \int \mathbf{1}_W \circ T^n \mathbf{1}_{X_{\mathrm{id}}} d\nu = \nu(T^{-n}(W) \cap X_{\mathrm{id}}). \tag{16}$$

Agora vamos supor $\sum_n \rho^{-n} \mathcal{Z}_w^n = \infty$. Defina $W := \{z \in X_{\mathrm{id}} : T^n(z) \notin X_{\mathrm{id}}, \forall n \geq 1\}$, por (16) temos que $\nu(W) = 0$, o que implica que a aplicação de retorno

$$T_{X_{\mathrm{id}}} : X_{\mathrm{id}} \to X_{\mathrm{id}}, (x, \mathrm{id}) \mapsto T^{n_x}(x, g), \text{ com } n_x := \min\{n \geq 1, T^n(X, \mathrm{id}) \in X_{\mathrm{id}}\}$$

está bem definida. Além disso, pela proposição 3.6 e pelo teorema 2.1 chegamos que $hd\nu$ é invariante e como $T_{X_{\mathrm{id}}}$ é bem definida temos que $hd\nu$ restrita a X_{id} é invariante e finita, dessa forma $T_{X_{\mathrm{id}}}$ é conservativa. Como $T_{X_{\mathrm{id}}}$ é também um sistema de Markov fibrado com a propriedade distorção limitada, $T_{X_{\mathrm{id}}}$ é ergódica.

A afirmação restante é consequência do resultado padrão em teoria ergódica, que T é ergódica e conservadora se e somente se $\sum_n \rho^{-n} \mathcal{L}_\varphi^n$ diverge para todo $f \geq 0$ e $\int f d\nu > 0$. (ver [1], Prop. 1.3.2). □

A família $\{\nu_\zeta : \zeta \in X\}$ dá origem a uma nova construção de autofunções. Ou seja, para uma função integrável $f : X \to \mathbb{R}$ e $\Theta : z \to \nu_z(f)$ é fácil ver que $\mathcal{L}_\varphi(\Theta(f)) = \rho\Theta(f)$.

No entanto a fim de controlar a regularidade de $\Theta(f)$ temos que considerar a restrição de Θ ao conjunto

$$\mathcal{D}(\nu) := \{f : X \to [0, \infty) : \int |f| d\nu < \infty, \log f \text{ é uniformemente contínua}$$
$$\text{e existe } n(f) \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^{-1}(0) \text{ é } \{[w] \in W^{n(f)}\} - \text{ mensurável}\}.$$

Desde que φ é log-Hölder decorre da estimativa em (2) que existe $r \in (0, 1)$ com

$$C_\varphi := \sup\left\{ r^{-k} \left| \frac{\phi_n \circ \tau_v(z_1)}{\phi_n \circ \tau_v(z_2)} - 1 \right| : z_1, z_2 \in [w, g], w \in W^k, g \in G, n, k \in \mathbb{N} \right\} < \infty.$$

A proposição abaixo estabelece log-Hölder continuidade para funções positivas de $\mathcal{D}(\nu)$ por obtenção de um limite superior

$$D(f) := \limsup_{k\to\infty} \left(r^{-k} \sup \left\{ \left| \tfrac{f(z_1)}{f(z_2)} - 1 \right| : z_1, z_2 \in [w,g], w \in W^k, g \in G \right\} \right),$$

para $f : X \to \mathbb{R}$. Para provarmos esse resultado iremos utilizar um argumento parecido com o que usamos para provar log-Hölder continuidade de $h(.,z)$ no teorema 4.2 acima.

Proposição 4.4. *Suponha que* $f \in \mathcal{D}(\nu)$*. Se* $f \geq 0$*, então* $\mathcal{L}_\varphi(\Theta(f)) = \rho\Theta(f)$ *e* $D(\Theta(f)) \leq C_\varphi$*. Se* $\|\Theta(|f|)\|_\infty < \infty$*, então* $\log\Theta(f)$ *é localmente Hölder contínua e* $\mathcal{L}_\varphi(\Theta(f)) = \rho\Theta(f)$*.*

Demonstração. Para facilitar a notação, vamos definir

$$f_v := f \circ \tau_v \text{ e } \phi_{n,v} := \phi_n \circ \tau_v$$

para $v \in W^n$ e $n \in \mathbb{N}$.

Suponha que $z_1, z_2 \in [w,g]$ com $w \in W^k, g \in G$ e $n + k > n(f)$. Então, para $v \in W^n$ ou $f_v(z_1), f_v(z_2) \in f^{-1}(\{0\})$ ou não. Ou seja, ou $f_v(z_1) = f_v(z_2) = 0$ ou $f_v(z_1), f_v(z_2) \neq 0$. Defina $0/0 := 1$ e $C_n := \sup_{v\in W^n} \left| \frac{f_v(z_1)}{f_v(z_2)} - 1 \right|$. Obtemos que

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{L}_\varphi^n(f)(z_1) - \mathcal{L}_\varphi^n(f)(z_2)\right| &\leq \left| \sum_{v\in W^n} \left(\phi_{n,v}(z_1) - \phi_{n,v}(z_2)\right) f_v(z_1) \right| \\
&+ \left| \sum_{v\in W^n} \phi_{n,v}(z_2) \left(f_v(z_1) - f_v(z_2)\right) \right| \\
&\leq \left| \sum_{v\in W^n} \left(1 - \tfrac{\phi_{n,v}(z_2)}{\phi_{n,v}(z_1)}\right) \phi_{n,v}(z_1) f_v(z_1) \right| \\
&+ \left| \sum_{v\in W^n} \phi_{n,v}(z_2) f_v(z_2) \left(\tfrac{f_v(z_1)}{f_v(z_2)} - 1\right) \right| \\
&\leq \left| 1 - \tfrac{\phi_{n,v}(z_2)}{\phi_{n,v}(z_1)} \right| \cdot \mathcal{L}_\varphi^n(|f|)(z_1) + \sup_{v\in W^n} \left| \tfrac{f_v(z_1)}{f_v(z_2)} - 1 \right| \cdot \mathcal{L}_\varphi^n(|f|)(z_2) \\
&\leq C_\varphi r^k \cdot \mathcal{L}_\varphi^n(|f|)(z_1) + C_n \cdot \mathcal{L}_\varphi^n(|f|)(z_2).
\end{aligned}$$

Desde que $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$, temos

$$\begin{aligned}
|\Theta(f)(z_1) - \Theta(f)(z_2)| &= |\nu_{z_1}(f) - \nu_{z_2}(f)| \\
&\leq C_\varphi r^k \nu_{z_1}(|f|) + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\mathcal{P}(s_k)} \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n s_k^{-n} C_n \mathcal{L}_\varphi^n(|f|)(z_2) \\
&= C_\varphi r^k \nu_{z_1}(|f|) = C_\varphi r^k \Theta(|f|)(z_1).
\end{aligned}$$

Além disso, se f for positiva, então $\Theta(|f|) = \Theta(f)$ e em particular

$$\left|1 - \frac{\Theta(f)(z_2)}{\Theta(f)(z_1)}\right| \leq C_\varphi \cdot r^k,$$

ou seja

$$r^{-k}\left|1 - \frac{\Theta(f)(z_2)}{\Theta(f)(z_1)}\right| \leq C_\varphi,$$

implicando que $D(\Theta(f)) \leq C_\varphi$. Como $\|\Theta(|f|)\|_\infty < \infty$, basta procedermos de forma análoga a prova para mostrar que $\log h(\zeta, z)$ é localmente Hölder contínua, para chegarmos que $\log \Theta(f))$ é localmente Hölder contínua, e além disso $\mathcal{L}_\varphi(\Theta(f)) = \rho\Theta(f)$. □

4.1 Caminhos aleatórios sobre grupos

Para ilustração dos resultados, vamos estudar dois exemplos da Teoria da probabilidade e aplicar teoremas de limites locais a fim de ter exemplos concretos. Para isso, primeiro faremos uma breve introdução a caminhos aleatórios sobre grupos.

Vamos considerar aqui sempre G um grupo enumerável e μ uma medida de probabilidade sobre G. Vejamos a definição de caminhos aleatórios sobre grupos segundo o trabalho de Kaimanovich e Vershik (ver em [12]).

Definição 4.5. *Um* processo estocástico $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma coleção de variáveis aleatórias* $X_n : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *tal que* $w \mapsto (X_n(w) : n \in \mathbb{N})$ *é mensurável em relação a* σ*-álgebra* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

Observe que X_n representa o estado do processo no tempo n. Como $\mathbb{N}$ é um conjunto enumerável, então $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dito um processo estocástico discreto no tempo. Portanto, um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias que descreve a evolução de algum processo através do tempo.

Definição 4.6. *O* caminho aleatório *sobre* G *é definido por* Ω *espaço mensurável,* $\{P_g : g \in G\}$ *medidas de probabilidade sobre* Ω *e uma sequência* $X_n : \Omega \to G$ *com* $n \in \mathbb{N}$ *tal que para cada* $n \in \mathbb{N}, g_i \in G$,

$$P_g(X_1 = g_1, ..., X_n = g_n) = \prod_{i=1}^{n-1} \mu(g_i^{-1} g_{i+1}) \tag{17}$$

Em outras palavras, a posição de um caminho aleatório pode ser obtido a partir do anterior, através da multiplicação à direita com um elemento aleatório do grupo distribuição μ. Note que a definição de caminhos aleatórios segue apenas pela sua probabilidade de transição (sem qualquer distribuição inicial fixada), assim o caminho aleatório pode ser identificado com o par (G, μ). O caminho aleatório esquerdo pode ser definido similarmente com a probabilidade de transição $P(g|h) = \mu(gh^{-1})$. Evidentemente,

$P(g^{-1}|h^{-1}) = \mu(h^{-1}g)$ e substituindo a medida μ por uma reflexão reduz o estudo do caminho aleatório a esquerda ao estudo da direita somente.

Exemplo 1 Este exemplo é baseado em caminhos aleatórios de Polya (ver [19]) em $\mathbb{Z}^d$. Para $p_i \in (0,1) : i \in (\{\pm 1, \ldots, \pm d\})$ com $\sum_{i=1}^{d}(p_i + p_{-i}) = 1$, considere o caminho aleatório em $\mathbb{Z}^d$ com a probabilidade de transição $P(\pm e_i) = p_{\pm i}$ onde e_i refere-se ao i-ésimo elemento da base canônica de $\mathbb{Z}^d$. Este passeio aleatório tem uma descrição equivalente através da seguinte extensão por grupo.

Seja Σ o shift completo com $2d$ símbolos $\{-d, \ldots, -1, 1, \ldots, d\}$ e φ a função localmente constante definida por $\varphi|_{[\pm i]} := p_{\pm i}$. Note que $\sum_{i=1}^{d}(p_i + p_{-i}) = 1$ implica que $L_\varphi(1) = 1$. Além disso, sabemos que a medida é definida por $\mu([i_1 \ldots i_n]) := p_{i_1} \cdots p_{i_n}$. É fácil ver que μ é θ-invariante, ergódica e $1/\varphi$-conforme. Finalmente a extensão por grupo é definida por

$$\psi : \Sigma \to \mathbb{Z}^d,\ (i_1 i_2 \cdots) \mapsto \begin{cases} e_{i_1} & : i_1 > 0 \\ -e_{-i_1} & : i_1 < 0 \end{cases}.$$

Por construção de $\nu_{(x,g)}$ e o fato de Σ ser shift completo, φ localmente constante temos que $\nu_{(x,g)} = \nu_{(y,g)}$, para todo $x, y \in \Sigma$ e $g \in G$. Além disso vamos escrever ν_g para $\nu_{(x,g)}$. Afim de aplicar o conhecido resultado sobre o teorema do limite local a partir da teoria da probabilidade note que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varphi^n(\mathbf{1}_{X_{\mathrm{id}}})(x,g) &= \sum_{w \in \mathcal{W}^n :\, \psi_n(w) = g} \phi_n(\tau_w(x)) \\ &= \sum_{(i_1 \cdots i_n) :\, \psi_n(i_1 \cdots i_n) = g} p_{i_1} \cdots p_{i_n} = P(X_n = g), \end{aligned}$$

com $X_n = h$ refere-se ao passeio aleatório no tempo n começando na identidade com a distribuição (P_i) e P a probabilidade do processo de Markov associado. No entanto, o teorema do limite local para passeios aleatórios de Polya em ([30] , teorema 13.12) temos que $(k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - (k_1 + \cdots + k_d)$ temos,

$$P(X_n = (k_1, \ldots, k_d)) \sim C n^{-d/2} \left(2 \textstyle\sum_{i=1}^{d} \sqrt{p_i p_{-i}}\right)^n \displaystyle\prod_{i=1}^{d} \left(\sqrt{p_i / p_{-i}}\right)^{k_i}.$$

Assim, para $\rho = 2\sum_{i=1}^{d} \sqrt{p_i p_{-i}}$ e, com $\lambda_i := \sqrt{p_i / p_{-i}}$, podemos concluir que

$$\mathcal{L}_\varphi^n(\mathbf{1}_{X_{(k_1, \ldots, k_d)}})(x, \mathrm{id}) \sim C n^{-d/2} \rho^n \prod_{i=1}^{d} \lambda_i^{-k_i}.$$

Lembre-se que um passeio aleatório é chamado de simétrico se $p_i = p_{-i}$, para todo $i = 1, ..., d$ é então imediato que $\rho = 1$ se e somente se o passeio aleatório é simétrico. Além disso pela proposição 4.3, o termo $n^{\frac{-d}{2}}$ implica que a extensão por grupo é ergódica e conservativa no que diz respeito a ν se e somente se $d = 1$ ou $d = 2$. Observe que a conclusão não depende da simetria. A fim de obter estimativas para $\nu_{\mathrm{id}}(X_{(k_1,\ldots,k_d)})$, note que a estimativa acima implica que

$$\nu_{\mathrm{id}}(X_{(k_1,\ldots,k_d)}) = \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n s_k^{-n} (\mathcal{L}_\varphi^n \mathbf{1}_{X_{(k_1,\ldots,k_d)}})(x, \mathrm{id})}{\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n s_k^{-n} (\mathcal{L}_\varphi^n \mathbf{1}_{X_{\mathrm{id})}})(x, \mathrm{id})} = \prod_{i=1}^{d} \lambda_i^{-k_i}.$$

Pela conformalidade de ν_{id}, obtemos para o cilindro $[(i_1, \ldots, i_n), z]$ em $\Sigma \times \mathbb{Z}^d$, que

$$\begin{aligned} \nu_{\mathrm{id}}([(i_1 \ldots i_n), z]) &= \rho^{-n} p_{i_1} \cdots p_{i_n} \nu_{\mathrm{id}}(X_{z+\psi_n(i_1\ldots i_n)}) \\ &= \rho^{-n} p_{i_1} \cdots p_{i_n} \nu_{\mathrm{id}}(X_z) \prod_{k=1}^{n} \lambda_{i_k}^{-1} = \rho^{-n} \nu_{\mathrm{id}}(X_z) \prod_{k=1}^{n} \sqrt{p_{i_k} p_{-i_k}} \\ &= \frac{1}{2^n} \nu_{\mathrm{id}}(X_z) \prod_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{p_{i_k} p_{-i_k}}}{\sum_{i=1}^{d} \sqrt{p_i p_{-i}}} \end{aligned} \tag{18}$$

Em particular, o último termo em (18) revela a simetria local

$$\nu_{\mathrm{id}}([(i_1 \ldots i_k \ldots i_n), z]) = \nu_{\mathrm{id}}([(i_1 \ldots - i_k \ldots i_n), z]), \quad (k \in 1, \ldots, n),$$

Enquanto que a nível global, a medida é multiplicativa com respeito ao último componente que é

$$\nu_{\mathrm{id}}([(i_1 \ldots i_n), z_1 + z_2]) = \nu_{\mathrm{id}}([(i_1 \ldots i_n), z_1]) \nu_{\mathrm{id}}([(i_1 \ldots i_n), z_2])$$

Por fim , (18) implica que a função do teorema 4.2 é dada por

$$h((x, g), (y, z)) = \frac{d\nu_g}{d\nu_{\mathrm{id}}}(y, z) = \nu(X_g).$$

Estas considerações podem ser resumidas como se segue. Se φ é simétrica, então $\lambda_i = 1$ Para todo $i = 1, \ldots, d$. Em particular $\rho = 1$ e $\nu(X_g) = 1$ para todo $g \in \mathbb{Z}^d$. Se φ não é simétrica, então $\rho < 1$ e $\{\nu_{\mathrm{id}}(X_g) : g \in \mathbb{Z}^d\}$ não é limitada inferiormente nem superiormente. No entanto, a função h definida por $h(x, g) := \nu_g(X_{\mathrm{id}})$ é uma função $\mathcal{L}_\varphi$ adequada pela proposição 4.4 e portanto $dm := h d\nu$ e T-invariante.

No entanto como facilmente pode ser verificado, $m(X_g) = 1$, para todo $g \in \mathbb{Z}^d$. e, em particular, m é a medida associada ao passeio aleatório simétrico com probabilidade de transição $P(\pm e_i) = \sqrt{p_i p_{-i}} / (2 \sum_k \sqrt{p_k p_{-k}})$.

Exemplo 2 Neste exemplo vamos substituir o grupo $\mathbb{Z}^d$ pelo grupo livre $\mathbb{F}_d$ com os geradores $g_1, ..., g_d$. Para isso, primeiro vamos dar a definição de grupo livre. Seja $\mathcal{F}_d = \{e_1, e_1^{-1}, \ldots, e_d, e_d^{-1}\}$. O *grupo livre* $\mathbb{F}_d$ é definido por

$$\mathbb{F}_d := \cup_{m\in\mathbb{N}} \{(v_1, \ldots, v_m) \in \mathcal{F}_d^m : v_i \neq v_{i+1}^{-1}, \forall i = 1, \ldots, m-1\}.$$

Assim, $\mathbb{F}_d \times \mathbb{F}_d \to \mathbb{F}_d$, onde $(v_1, \ldots, v_m).(w_1, \ldots, w_n) = (v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n)$, o qual pertence a $\mathbb{F}_d$ e a palavra reduzida por $e_i e_i^{-1} = e_i^{-1} e_i = \emptyset$.

Em analogia com o exemplo acima, as transições são dadas por $P(g_{\pm i}) = p_{\pm i}$ com $g_{-i} := g_i^{-1}$. A extensão por grupos associada é definindo através de

$$\psi : \Sigma \to \mathbb{F}_d,\ (i_1 i_2 \cdots) \mapsto g_{i_1}.$$

Como acima, podemos agora aplicar o teorema do limite local para o grupo livre de Gerl e Woess em [10]. Este resultado é aplicável para probabilidades de transição arbitrárias, no entanto, para facilitar a exposição, nos restringimos ao caso especial em que $q := \sqrt{p_i p_{-i}}$ não depende de i. Então, por (5.3) e (5.4) em [10], temos que $\rho = 2q\sqrt{2d-1}$ e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(X_n = g_{i_1} \cdots g_{i_k})}{P(X_n = \mathrm{id})} = \left(1 + \tfrac{d-1}{d} k\right) (2d-1)^{-k/2} \prod_{i=1}^{k} \lambda_{i_k}, \tag{19}$$

para n e k e $g_{i_1} \cdots g_{i_k}$ em forma reduzida, ou seja, $g_{i_l} \neq g_{i_{l+1}}^{-1}$ para $l = 1, \ldots, k-1$. Usando os mesmos argumentos que no exemplo 1, obtemos que

$$\nu_{\mathrm{id}}(X_{g_{i_1} \cdots g_{i_k}}) = \left(1 + \tfrac{d-1}{d} k\right) (2/\rho)^k \prod_{i=1}^{k} q\lambda_{-i_k} = \left(1 + \tfrac{d-1}{d} k\right) (2/\rho)^k \prod_{i=1}^{k} p_{-i_k}.$$

Observe que os mesmos objetos que calculamos no exemplo 1, podemos calcular de forma semelhante para $\mathbb{F}_d$.

Referências

[1] J. Aaronson. *An introduction to infinite ergodic theory*, Mathematical Surveys and Monographs 50, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[2] J. Aaronson, M. Denker e M. Urbanski. Ergodic theory for Markov fibred systems and parabolic rational maps, *Trans. Amer. Math* **337** (1993) 495-548.

[3] J.Aaronson e M.Denker; The Poincaré series of $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. *Ergod. Th. Dynam. Sys.* **19** (1999) 1-20.

[4] G. Birkhoff. Extensions of Jentzsch's theorem. *Trans. Amer. Math. Soc.*. **85** (1957) 219–227.

[5] A. Castro Jr., *Curso de Teoria da Medida*, Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

[6] M.Denker and M.Urbanski. On the existence of conformal measures. *Trans. Am. Math. Soc.* **328** (1991) 563-587 1991.

[7] W. Doeblin and R. Fortet. Sur des chaînes à liaisons complètes. *Bull. Soc. Math. France.* **65** (1937) 132–148.

[8] Evans, L. C. e Gariepy, R.J, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, 1992.

[9] G. Frobenius. Über Matrizen aus nicht negativen Elementen. *Berl. Ber.*, (1912) 456–477.

[10] P.Gerl e W.Woess.Local limits and harmonic functions for nonisotropic random walks on free groups. *Probab. Theory Relat. Fields* **71** 1986 341-355.

[11] M. Gromov, Groups of polynomial growth and expanding maps. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* No. **53** (1981), 53–73.

[12] V.A. Kaimanovich e A.M. Vershik. Random walks on discrete groups: boundary and entropy.*Ann. Probab.*, **11** (1983) 457-490.

[13] H.Kesten; Full Banach mean values on countable groups. *Math. Scand.* **7** (1959) 146–156.

[14] H. Kesten; Symmetric random walks on groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **92** (1959) 336–354.

[15] B. Kitchens, *Symbolic Dynamics: One-sided, Two-sided and Countable State Markov Shifts*, Springer, 1998.

[16] C. Liverani. Decay of correlations. *Ann. of Math. (2).* **142** (1995) 239–301.

[17] S. J. Patterson. The limit set of a Fuchsian group. *Acta Math.* **136** (1976) 241–273.

[18] O. Perron. Zur Theorie der Matrices. *Math. Ann.* **64** (1907) 248–263.

[19] G. Pólya. Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz. *Math. Ann.* **84** (1921) 149–160.

[20] D. Ruelle. Statistical mechanics of a one-dimensional lattice gas. *Comm. Math. Phys.* **9** (1968) 267–278.

[21] O. Sarig; Lecture notes on Thermodynamic Formalism for Topological Markov shifts. *Penn State University*, 2009.

[22] O.M. Sarig; Existence of Gibbs measures for countable Markov shifts. *Proc. Am. Math. Soc.*, **131** (2003) 1751-1758.

[23] O.M. Sarig; Invariant Radon measures for horocycle flows on Abelian covers. *Invent. Math.* **157** (2004) 519-551.

[24] O. M. Sarig. Thermodynamic formalism for countable Markov shifts. *Ergodic Theory Dyn. Syst.*. **19** (1999) 1565–1593.

[25] M. Stadlbauer, An extension of Kesten's criterion for amenability to topological Markov chains. *Advances in Mathematics* **235** (2013) 450–468.

[26] M. Stadlbauer, On group extensions of topological Markov chains, 2013, preprint.

[27] D. Sullivan. The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*. **50** (1979) 171–202.

[28] N. Varopoulos, Long range estimates for Markov chains. *Bull. Sci. Math.* **109** (1985) 225–252.

[29] R. J. Zimmer, Amenable ergodic group actions and an application to Poisson boundaries of random walks, *J. Functional Analysis* **27** (1978) 350–372.

[30] W. Woess; *Random walks on infinite graphs and groups*, Cambridge Tracts in Mathematics 138. Cambridge University Press 2000.