Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Dissertação de Mestrado

A Propriedade do Normalizador em alguns Produtos Orlados

Jacqueline Costa Cintra

Salvador-Bahia
Março de 2014

A Propriedade do Normalizador em alguns Produtos Orlados

Jacqueline Costa Cintra

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Thierry Corrêa Petit Lobão.

Salvador-Bahia

Março de 2014

Cintra, Jacqueline Costa, 1988

A Propriedade do Normalizador em alguns Produtos Orlados / Jacqueline Costa Cintra. – Salvador: UFBA, 2014.

52 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Thierry Corrêa Petit Lobão.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2014.

Referências bibliográficas.

1. Anéis (Álgebra). 2. Anéis de Grupo. 3. Teoria de Grupos. I. Petit Lobão, Thierry. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 512.552.7

A Propriedade do Normalizador em alguns Produtos Orlados

Jacqueline Costa Cintra

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 14 de março de 2014.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Thierry Corrêa Petit Lobão (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Raul Antonio Ferraz
IME-USP

Prof^a. Dr^a. Carmela Sica
UFBA

Aos meus pais Mariana e José, meu companheiro Edward e meus irmãos Jucelia e Jailton.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pela vida, por todas as minhas conquistas e por todas as pessoas que fazem parte da minha história. Um agradecimento especial para minha família, pelo carinho e compreensão de meus irmãos Jucelia Costa e Jailton de Cintra, pelo apoio do meu pai José Vitorino e pela companhia e dedicação da minha mãe Mariana Costa, que considero minha guerreira.

Agradeço a meu companheiro Edward, que sempre esteve ao meu lado me apoiando em minhas decisões e me ajudando nos momentos difíceis. Por ser uma pessoa admirável e especial em minha vida, fazendo-a mais feliz a cada dia em que estamos juntos. Pela linda história que começou com uma bela amizade e desde o início com cumplicidade, companheirismo e confiança.

Agradeço ao professor Thierry Petit Lobão não só pela sua disposição para me orientar, mas pela dedicação e parceria durante o mestrado, além do incentivo e motivação em todo o período da pesquisa orientada.

Agradeço aos professores Raul Antonio Ferraz e Carmela Sica por aceitarem fazer parte da banca examinadora da minha dissertação e pela honra de suas presenças.

Quero agradecer aos professores do DCE-UESB e do IM-UFBA que contribuíram para a minha formação acadêmica. Sou muito grata especialmente aos professores que além de excelentes profissionais, foram exemplares também como seres humanos. Dentre estes, um agradecimento especial ao professor Samuel Gomes que sempre me deu seu apoio e pela oportunidade de ter sido sua aluna mesmo num curto período antes mesmo de ingressar no mestrado, mas proporcionando a felicidade de conhecê-lo.

Aos professores Berg, Guto, Acioly, Augusto, Claudinei, Clênia, Débora, Eridan, Flaulles, Júlio, Márcio, Reginaldo e Tânia gostaria de agradecê-los especialmente por todo o incentivo e carinho durante a minha jornada.

Também agradeço a todos os meus amigos da graduação e do Instituto de Matemática da UFBA pelos ótimos momentos de convivência. Especialmente Felipe, Gledson, Heides, Julio, Mariana e Sara por formarem uma turma incrível a qual fiquei muito feliz de ter feito parte. Agradeço a minha maninha de área Elen por todo seu companheirismo e por ter me dado força desde o início; o meu imenso carinho a todos os amigos feitos ao longo desses anos, pela suas agradáveis companhias e especialmente a todos da sala 18 que tornam os dias ainda mais felizes.

Meu muito obrigada a Ângela e João Paulo que sempre foram muito prestativos me ajudando sempre que precisei, além de serem pessoas queridas e muito competentes.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro concedido a mim durante todo o meu mestrado.

"(...) Ir à luta com determinação, abraçar a vida com paixão, perder com classe e vencer com ousadia, porque o mundo pertence a quem se atreve. E a vida é muito para ser insignificante".

–Augusto Branco

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é discutir a Propriedade do Normalizador, conhecida como (Nor); uma das questões mais importantes na teoria de anéis de grupo integrais. Utilizaremos o anel de grupo integral e investigaremos (Nor) para grupos finitos que são determinados por produtos orlados.

Primeiramente, demonstraremos a validade da propriedade para um grupo dado por um produto orlado de um nilpotente na base e um grupo simétrico de m letras no topo. Posteriormente, demonstraremos também a validade da propriedade para produtos orlados de um grupo nilpotente por um quatérnio generalizado ou um diedral de ordem 2^n.

Estes resultados, que serão apresentados juntamente com as técnicas utilizadas, servem como motivação, ora em curso, da possível validade de (Nor) para produtos orlados de grupos nilpotentes em geral; ou seja, extensões orladas de grupos nilpotentes preservam a Propriedade do Normalizador.

Palavras-chave: Grupos; Anéis de Grupo; Anéis de Grupo Integrais; Normalizador; Propriedade do Normalizador; Produto Orlado.

Abstract

The main objective of this work is to discuss the normalizer property, known as (Nor), which is one of the most important issues in the theory of integral group rings. We will use the integral group ring and we will investigate (Nor) for finite groups which are determined by wreath products.

Firstly, we will demonstrate the validity of the property for a group given by a wreath product of a nilpotent on the basis and a symmetric group of m letters on top. After that, also demonstrate the validity for wreath products of a nilpotent group by a generalized quaternion or dihedral of order 2^n.

These results, which will be presented along with the used techniques, serve as motivation for our research, now in progress, about wreath products of general nilpotent groups being solutions for (Nor), that is, wreath extensions of nilpotent groups preserve the Normalizer Property.

Keywords: Groups; Group Rings; Integral Group Rings; Normalizer; Normalizer Property; Wreath Product.

Sumário

Introdução

Dados um grupo G e R um anel comutativo com unidade, determinamos um novo anel chamado anel de grupo, denotado por RG, o qual consiste de um módulo livre tendo os elementos do grupo como base e os elementos do anel R como coeficientes, além de ter a operação multiplicação entre seus elementos, que é definida a partir da propriedade de distributividade. Neste trabalho, utilizaremos G como grupo finito e os chamados anéis de grupo integrais, isto é, em que o anel de coeficientes considerado é o dos inteiros; esse anel de grupo é denotado por $\mathbb{Z}G$.

Na teoria de anéis de grupo, encontramos várias questões importantes e interessantes; uma delas é o Problema do Isomorfismo, conhecido como (Iso), que consiste em verificar quando um grupo é determinado pelo seu anel de grupo; ou seja, se dois grupos serão isomorfos sempre que seus anéis de grupo sobre o mesmo anel assim o forem. Desde 1940, esta questão vem sendo discutida a partir dos trabalhos de G. Higman com diversos anéis de coeficientes; entretanto, vários resultados relevantes foram obtidos utilizando-se o anel dos inteiros e, assim, a questão do isomorfismo tornou-se uma conjectura para anéis de grupo integrais.

A Propriedade do Normalizador, ou (Nor) como é conhecida, é uma outra questão de destaque na teoria dos anéis de grupo integrais sobre grupos finitos. Dizemos que um grupo G satisfaz essa propriedade quando o normalizador de G no grupo das unidades de $\mathbb{Z}G$, $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$, é o menor possível, ou seja, é o produto do grupo G pelo centro do grupo de unidades, $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G) = G \cdot \mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathbb{Z}G))$. (Nor) inicialmente foi apresentada como conjectura, e o primeiro resultado neste sentido foi alcançado por Coleman (1964), que conseguiu provar a validade de (Nor) para p-grupos, e consequentemente para grupos nilpotentes. Em 1987, Jackowski e Marciniak estenderam o resultado para grupos que possuem um 2-subgrupo de Sylow normal; validando, portanto, (Nor) para grupos de ordem ímpar. Posteriormente, em 1995, uma relação existente entre (Nor) e (Iso) é revelada por M. Mazur; o que aumentou a relevância de (Nor). Mazur, no contexto dos grupos infinitos, percebeu que encontrando-se um contraexemplo para (Nor) é possível, a partir deste, fabricar um contraexemplo para (Iso).

As duas questões apresentadas foram discutidas e vários resultados foram obtidos, até que, M. Hertweck, em 2001, apresentou um contraexemplo para (Nor), explorando a relação revelada por Mazur. Em sendo assim, ambas as questões perdem o status de conjectura, porém não a relevância, pois, a partir daí, o objetivo desta linha de pesquisa tornou-se a busca das classes de grupos que são soluções para (Nor) e/ou são determinados pelos seus anéis de grupo integrais, satisfazendo (Iso).

Em [MR01], Marciniak e Roggenkamp provaram que (Nor) vale para grupos metabelianos finitos com um 2-subgrupo de Sylow abeliano. Yuanlin Li em [L02], discutiu dois casos onde um tipo particular de automorfismos, os chamados C-automorfismos, são internos e, por consequência, para ambos vale (Nor).

Na investigação das questões mencionadas, as ações existentes em determinados produtos de grupos têm extrema relevância; pois, por exemplo, é sabido que se ambos H e K são grupos para os quais vale (Nor), então $H \times K$ também o é (ver [LPS99]). Porém, no caso de um produto semi-direto qualquer, isto nem sempre é verdade, dependendo da ação, como demonstrou Hertweck; assim, uma questão que torna-se natural é:

- Quais são as ações φ para as quais, se H e K são soluções de (Nor), o produto semi-direto $K \rtimes_\varphi H$ é também solução?

Recentemente, em 2003, T. Petit Lobão e S. K. Sehgal conjecturaram que ações do tipo orlado (ou wreath) são boas candidatas para esta solução. Desenvolveram então algumas técnicas para tratar das ações deste tipo, e obtiveram uma solução da Propriedade do Normalizador para a classe dos grupos monomiais completos; isto é, uma extensão orlada de um grupo nilpotente na base por um grupo simétrico de m letras no topo, ou seja, $G = N\, wr\, Sym_m = N^m \rtimes Sym_m$. Este trabalho é um dos resultados principais da dissertação, assim como os argumentos e técnicas lá presentes são fundamentais no desenvolvimento desta investigação.

Um outro trabalho que é central no nosso estudo foi elaborado por Zhengxing Li e Jinke Hai em [HL11c], no qual os autores exploraram as técnicas de Petit Lobão e Sehgal, produzindo além do mencionado, uma série de artigos nos quais obtiveram extensões dos resultados originais. Entre estes, o que apresentamos neste trabalho é o resultado positivo para (Nor) em que o grupo é dado por um produto orlado cuja base é um nilpotente e no topo tem-se um quatérnio generalizado ou um diedral de ordem 2^n.

Nessa dissertação, temos como objetivo investigar esses resultados principais, explorando as técnicas utilizadas para alcançar como soluções positivas grupos que são dados por produtos orlados.

No primeiro capítulo, introduziremos as definições e resultados preliminares da teoria utilizada, necessários para o desenvolvimento do nosso estudo.

No segundo capítulo, apresentaremos a Propriedade do Normalizador, discutindo alguns de seus aspectos e vários resultados relevantes.

No terceiro capítulo, apresentaremos e discutiremos os resultados que foram desenvolvidos nesse trabalho, expondo as demonstrações dos teoremas principais.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos conceitos da teoria de anéis de grupo que são relevantes para o desenvolvimento deste trabalho, com enfoque no conceito do normalizador de um grupo G; em que G é a base do anel de grupo denotado por RG sendo, por consequência, subgrupo do grupo das unidades de RG. O anel R presente no trabalho será considerado com unidade, apesar de não ser necessária tal consideração para a definição de anel de grupo.

1.1 Anéis de Grupo

Nesta seção, que está baseada em [PoS02], apresentaremos conceitos e discutiremos sobre alguns resultados presentes e importantes na teoria de anéis de grupo.

Definição 1.1. *Sejam G um grupo e R um anel com unidade. Denotamos por RG o conjunto de todas as combinações lineares formais da forma*

$$\alpha = \sum_{g \in G} a_g g,$$

em que $a_g \in R$ e $\{a_g\}_{g \in G}$ é uma sequência quase nula. O conjunto $(RG, +, \cdot)$, dotado das operações de adição, multiplicação e multiplicação por escalar definidas da forma a seguir, é um anel chamado **anel de grupo** *de G sobre R:*

(i) soma de dois elementos:

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g \right) + \left(\sum_{g \in G} b_g g \right) = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g;$$

(ii) produto de dois elementos:

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\cdot\left(\sum_{g\in G} b_g g\right) = \sum_{g,h\in G}(a_g b_h)(gh).$$

(iii) produto de um elemento por um escalar do anel R:

$$\lambda\cdot\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum_{g\in G}(\lambda a_g)g,\ \ \forall\lambda\in R.$$

Note que temos $1_{RG} = 1_R 1_G$, ou seja, RG é um anel com identidade que, denotaremos por 1.

Facilmente verificamos que RG é um R-módulo, e se R é comutativo segue-se que RG é uma álgebra sobre R.

Exemplo 1.2. *Sejam $G = C_\infty \simeq \{\ldots, x^{-2}, x^{-1}, x^0, x^1, x^2, \ldots\}$ e $R = \mathbb{R}$, o corpo dos números reais. Temos que $RG = \mathbb{R}C_\infty$ é isomorfo ao anel dos polinômios de Laurent.*

Exemplo 1.3. *Sejam $R = \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ e $G = C_2 = \langle x\rangle = \{1, x\}$, o grupo cíclico de ordem 2. Temos que $RG = \mathbb{Z}_2 C_2$ é um anel de grupo finito, cuja ordem é igual a $|\mathbb{Z}_2|^{|C_2|} = 4$. Note que como o grupo $(\mathbb{Z}_2 C_2, +)$ tem ordem 4, então ele é isomorfo ou a C_4 ou a $C_2 \times C_2$, o grupo de Klein. Assim, para um $a \in \mathbb{Z}_2 C_2$, temos que $2\cdot a = (1+1)\cdot a = 0\cdot a = 0$, em que $1 = 1_{\mathbb{Z}_2}\cdot 1_{C_2}$ é a unidade de $\mathbb{Z}_2 C_2$ e*

$$\begin{aligned} 1+1 &= 1_{\mathbb{Z}_2}\cdot 1_{C_2} + 1_{\mathbb{Z}_2}\cdot 1_{C_2} \\ &= (1_{\mathbb{Z}_2} + 1_{\mathbb{Z}_2})1_{C_2} \\ &= (0_{\mathbb{Z}_2})1_{C_2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, cada elemento do anel de grupo tem ordem menor ou igual a 2; o que nos permite concluir que $\mathbb{Z}_2 C_2 \simeq C_2 \times C_2$, já que C_4 tem um elemento de ordem 4.

Lema 1.4. *Seja R um anel de ordem m e G um grupo de ordem n, então RG é um anel de grupo finito cuja ordem é $|R|^{|G|} = m^n$.*

Demonstração. Temos que $RG = \left\{\sum_{g\in G} a_g g; a_g \in R\right\}$. Assim, para cada $g \in G$ existem m escolhas para os coeficientes $a_g \in R$; portanto temos $\underbrace{m\cdot m\cdots m}_{|G|=n}$ elementos no anel de grupo RG, isto é, $m^n = |R|^{|G|}$. $\square$

Nesta dissertação, trabalharemos sempre com o anel de grupo $\mathbb{Z}G$ cujos elementos têm coeficientes no anel dos inteiros, o qual é chamado de **anel de grupo integral**;

entretanto, algumas definições e resultados são apresentados com um anel de grupo RG para evidenciar a não dependência da escolha do anel R.

Definição 1.5. *Dado* $\alpha = \sum_{g\in G} a_g g \in RG$*, definimos o* **suporte** *de* α *como* $supp(\alpha) = \{g \in G : a_g \neq 0\}$*, isto é, o conjuto dos elementos* $g \in G$ *que aparecem na composição de* α *de forma não trivial, ou seja,* $a_g \neq 0$*.*

Definição 1.6. *Dado um anel* R*, definimos o* **grupo multiplicativo das unidades de** R *como*

$$\mathcal{U}(R) = \{x \in R;\, \exists y \in R \text{ e } xy = yx = 1\}.$$

Assim, em particular para um grupo G e um anel R, $\mathcal{U}(RG)$ denota o grupo das unidades do anel de grupo RG.

As chamadas **unidades triviais** são elementos da forma ug em RG com $u \in \mathcal{U}(R)$ e $g \in G$; cujos inversos, obviamente, são da forma $r^{-1}g^{-1}$. Assim, por exemplo, os elementos da forma $\pm g$ com $g \in G$ são unidades trivias do anel de grupo integral.

1.1.1 Ideais de Aumento e o Argumento de Whitcomb

A seguir definiremos uma função de RG em G de maneira bem natural, que consiste em um homomorfismo de anéis.

Definição 1.7. *Seja a função* $\varepsilon : RG \to R$ *dada por*

$$\varepsilon\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum_{g\in G} a_g.$$

Esta função é um homomorfismo de anéis, chamado **homomorfismo de aumento** *de* RG*.*

De fato, trata-se de um homomorfismo de anéis, pois:
Considere $\sum_{g\in G} a_g g, \sum_{g\in G} b_g g$ elementos quaisquer de RG. Então

(i)

$$\begin{aligned}
\varepsilon\left(\sum_{g\in G} a_g g + \sum_{g\in G} b_g g\right) &= \varepsilon\left(\sum_{g\in G} (a_g + b_g) g\right) \\
&= \sum_{g\in G} (a_g + b_g) \\
&= \sum_{g\in G} a_g + \sum_{g\in G} b_g \\
&= \varepsilon\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) + \varepsilon\left(\sum_{g\in G} b_g g\right);
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\varepsilon\left(\sum_{g\in G} a_g g \cdot \sum_{g\in G} b_g g\right) &= \varepsilon\left(\sum_{g,h\in G} (a_g b_h) gh\right)\\
&= \sum_{g,h\in G} (a_g b_h)\\
&= \sum_{g\in G} a_g . \sum_{g\in G} b_g\\
&= \varepsilon\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) . \varepsilon\left(\sum_{g\in G} b_g g\right).
\end{aligned}$$

Definimos

$$\mathcal{U}_1(RG) = \{\alpha \in \mathcal{U}(RG); \varepsilon(\alpha) = 1\},$$

o **subgrupo das unidades de aumento** 1 em $\mathcal{U}(RG)$, ou então, o **subgrupo das unidades normalizadas de** RG.

Observação 1.8. *Seja $u \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$, então $\varepsilon(u) = \pm 1$. Portanto, escrevemos*

$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}G) = \pm\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G).$$

Definição 1.9. *O núcleo do homomorfismo de aumento ϵ é denotado por $\Delta(G)$ e o chamaremos de* **ideal de aumento** *de RG.*

Observe que para um elemento $\sum_{g\in G} a_g g \in \Delta(G)$, temos que $\varepsilon\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum_{g\in G} a_g = 0$. Logo, escrevemos α na forma:

$$\alpha = \sum_{g\in G} a_g g = \sum_{g\in G} a_g (g-1).$$

Como claramente os elementos da forma $g-1$, com $g \in G$, pertencem a $\Delta(G)$ e considerando a observação acima, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.10 (Proposição 3.2.10, [PoS02])**.** *O conjunto $\{g-1; g \in G, g \neq 1\}$ é uma R-base de $\Delta(G)$ sobre R.*

Devido a esta proposição podemos escrever

$$\Delta(G) = \left\{\sum_{g\in G} a_g(g-1);\ g \neq 1, a_g \in R\right\}.$$

Definição 1.11. *Seja H um subgrupo de G . O ideal à esquerda de RG, gerado pelo conjunto $\{h-1;\ h \in H\}$, é denotado por $\Delta(G,H)$ e pode ser interpretado da seguinte* *forma:*

$$\Delta(G, H) = \left\{ \sum_{h \in H} \alpha_h (h-1); \alpha_h \in RG \right\}.$$

Observe que, pela definição acima, o ideal $\Delta(G, G)$ coincide com $\Delta(G)$.

No caso de um subgrupo N ser normal em G podemos interpretar $\Delta(G, N)$ da seguinte forma

$$\Delta(G, N) = \left\{ \sum_{n \in N} (n-1)\alpha_n;\ \alpha_n \in RG \right\}.$$

Este ideal ainda pode ser visto de uma forma distinta, que em determinados casos, pode ser mais útil. Considerando $N \triangleleft G$, e, portanto, o quociente G/N, o homomorfismo canônico $\overline{\psi}_N : G \to G/N$ pode ser estendido a um homomorfismo de anéis $\psi_N : RG \to R(G/N)$ dado da seguinte forma

$$\psi_N \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) = \sum_{g \in G} \alpha_g \overline{\psi}_N(g).$$

Por isso, segue o resultado abaixo que apresenta uma caracterização alternativa para $\Delta(G, N)$, neste caso.

Proposição 1.12 (Proposição 3.3.4, [PoS02]). *Sejam $N \triangleleft G$ e ψ_N definido da forma acima, então $ker(\psi_N) = \Delta(G, N)$.*

Corolário 1.13. *Seja N um subgrupo normal de um grupo G. Então,*

$$\frac{RG}{\Delta(G, N)} \simeq R\left(\frac{G}{N}\right)$$

.

Demonstração. De fato, como ψ_N é sobrejetiva, temos que $Im(\psi_N) = R(G/N)$. Como $ker(\psi_N) = \Delta(G, N)$, pelo Teorema do Isomorfismo, segue o resultado. □

O próximo resultado, conhecido como **Argumento de Whitcomb**, é muito importante e foi fundamental na demonstração de um dos principais teoremas dessa dissertação; assim como os resultados enunciados posteriormente.

Lema 1.14 (Lema 30.5, [Se93]). *Suponha que um elemento γ de $\mathbb{Z}G$ é tal que $\gamma \equiv g \, mod \Delta(G, A)$, em que $g \in G$ e $A \triangleleft G$, então $\gamma \equiv g a_0 \, mod \Delta(G)\Delta(A)$, para um adequado $a_0 \in A$.*

Teorema 1.15 (Teorema 6.1, [Se93]). *Seja G um grupo finito. Todas unidades centrais de $\mathbb{Z}G$ são triviais se, e somente se, para cada $x \in G$ e cada número natural j, relativamente primo a $|G|$, $x^j \sim x$ ou $x^j \sim x^{-1}$.*

Proposição 1.16 (Proposição 8.3, [Se93]). *Seja* $N \triangleleft G$ *e* $g \in G$. *Se* $g-1 \in \Delta(G)\Delta(G,N)$, *então* $g \in [N,N]$.

1.1.2 Involuções e Somas de Classes

A aplicação definida a seguir é uma involução e representa uma ferramenta importante nos estudos de anéis de grupo integral.

Definição 1.17. *Definimos a aplicação* $^* : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G$, *dada por*

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)^* = \sum_{g\in G} a_g g^{-1},$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $(\alpha+\beta)^* = \alpha^* + \beta^*$;

(ii) $(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$;

(iii) $\alpha^{**} = \alpha$.

Esta aplicação recebe o nome de **involução canônica**, ou clássica, de $\mathbb{Z}G$. Sobre esta aplicação, um resultado bastante útil, e que é mencionado em [JM87], é a

Proposição 1.18. *Para* $\alpha \in \mathbb{Z}G$, $\alpha^*\alpha = 1$ *se, e somente se,* $\alpha = \pm g$, *com* $g \in G$.

Para cada $g \in G$, denotamos por $\mathcal{C}_g = \{x^{-1}gx; x \in G\}$ a **classe de conjugação** de g em G. Podemos ainda, considerar o conjunto $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in I}$ das classes de conjugação de G, que possuem um número finito de elementos, e, assim, para cada $i \in I$, temos os elementos chamados de **somas de classes** de G sobre R, denotados por $\hat{\mathcal{C}}_g$ descritos da seguinte forma

$$\hat{\mathcal{C}}_g = \sum_{x\in\mathcal{C}_i} x = \sum_{x\sim g} x.$$

Observe que $y^{-1}\hat{\mathcal{C}}_g y = \hat{\mathcal{C}}_g$, para todo $y \in G$, ou seja, $\hat{\mathcal{C}}_g$ é central em $\mathbb{Z}G$, para qualquer $g \in G$.

A seguir, um resultado que fornece uma relação entre as somas de classes e o centro do anel de grupo.

Teorema 1.19 (Teorema 3.6.2, [PoS02]). *Sejam* G *um grupo e* R *um anel comutativo. Então o conjunto* $\{\gamma_i\}_{i\in I}$ *de todas as somas de classes de* G *sobre* R *é uma* R*-base de* $\mathcal{Z}(RG)$, *onde* $\mathcal{Z}(RG) = \{\alpha \in RG; \alpha\beta = \beta\alpha,\ \forall \beta \in RG\}$ *é o* **centro de** RG.

Agora, listamos algumas considerações relevantes para o trabalho sobre anéis de grupos; os resultados abaixo podem ser encontrados também em [PoS02].

Definição 1.20. *Considerando um anel de grupo RG, definimos*

$$[RG, RG] = \langle [x, y] \rangle = \langle xy - yx \rangle.$$

Observação 1.21. *Seja $\alpha \in RG$, logo $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$. Definimos*

$$\tilde{\alpha}(g) := \sum_{h \sim g} a_h,$$

em que $\sim$ corresponde à relação de conjugação em G.

Dada esta definição, vejamos dois exemplos para entendermos claramente o seu comportamento.

Exemplo 1.22. *Seja $\mathbb{Q}_8 = \langle x, y : x^4 = 1, x^2 = y^2, x^y = x^{-1} \rangle$, grupo dos quatérnios de 8 elementos, e considere $\alpha = [2x + 3y + 5xy, 7x^2 + 9x^3y + 11y] \in [\mathbb{Z}\mathbb{Q}_8, \mathbb{Z}\mathbb{Q}_8]$. Vamos calcular $\tilde{\alpha}(x)$, com $x \in \mathbb{Q}_8$, cuja classe de conjugação é $\mathcal{C}_x = \{x, x^3\}$. Computando o comutador α e exibindo somente as suas parcelas em que aparecem elementos de $\mathcal{C}_x$, temos:*

$$14x^3 + 27x^3 + 55x^3 - (14x^3 + 27x + 55x) = 82x^3 - 82x.$$

Observe que a soma dos coeficientes associados aos elementos de $\mathcal{C}_x$ se anulam, isto é, $\tilde{\alpha}(x) = 0$.

No exemplo acima, podemos observar que dado um elemento do suporte de α que pertença a $\mathcal{C}_x$, existe um outro elemento, nas mesmas condições, cujo coeficiente associado corresponde ao simétrico aditivo do primeiro elemento. No entanto, isso não acontece em geral, o que podemos perceber no próximo exemplo.

Exemplo 1.23. *Seja o grupo G não-abeliano de ordem 21 cuja presentação é $\langle x, y : x^7 = 1 = y^3, x^y = x^2 \rangle$ Considere $\alpha = [2 + 3x + 5xy + 7x^4y, 11x^2 + 13x^4y + 17 + 19xy] \in [\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}G]$. Vamos calcular $\tilde{\alpha}(y)$, com $y \in G$, cuja classe de conjugação é $\mathcal{C}_y = \{y, xy, x^2y, x^3y, x^4y, x^5y, x^6y\}$. Computando o comutador α e exibindo somente as suas parcelas em que aparecem elementos de $\mathcal{C}_y$, temos:*

$$\begin{aligned} &26x^4y + 38xy + 39x^5y + 57x^2y + 55x^5y + 85xy + 77xy + 119x^4y \\ &-(55x^3y + 77x^6y + 26x^4y + 39x^6y + 85xy + 119x^4y + 38xy + 57x^3y). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Os elementos de $\mathcal{C}_y$ que aparecem são $xy, x^2y, x^3y, x^4y, x^5y, x^6y$ cujos coeficientes são, respectivamente, $77, 57, -112, 0, 94, -116$. Observe que a soma destes coeficientes se anula, ou seja, $\tilde{\alpha}(y) = 0$. Note, porém, que nenhum dos coeficientes tem o simétrico aditivo como outro coeficiente. Por exemplo, considerando o elemento xy temos que seu coeficiente associado é 77, mas não existe outro elemento que possua -77 como coeficiente associado.

O interessante é que, considerando as parcelas em que aparecem o elemento xy em (1.1), percebemos que fixando cada uma delas existe um elemento de $\mathcal{C}_y$ que possui alguma outra parcela em (1.1), a qual seu coeficiente é o simétrico aditivo da parcela fixada.

Portanto, com esses exemplos podemos começar a deduzir que a aplicação de $\tilde{\alpha}$ a um elemento arbitrário do grupo sempre se anulará. E é isto que verificamos na próxima proposição.

Proposição 1.24 (Lema 7.2, [Se93])**.** *Se $\alpha \in [RG, RG]$, então $\tilde{\alpha}(x) = 0$ para todo $x \in G$.*

Demonstração. Sejam $\sum_{g\in G} a_g g$ e $\sum_{h\in G} b_h h$ elementos arbitrários de RG, tal que

$$\alpha = \left[\sum_{g\in G} a_g g, \sum_{h\in G} b_h h\right]$$

e $c_{g,h} := a_g b_h$. Considerando que $[g,h] = gh - hg = gh - h(gh)h^{-1}$, ou seja, gh e hg são conjugados, temos

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{g,h\in G} c_{g,h}[g,h] \\ &= \sum_{g,h\in G} c_{g,h}(gh - hg) \\ &= \underbrace{\sum_{g,h\in G} c_{g,h}(gh)}_{\alpha'} - \underbrace{\sum_{g,h\in G} c_{g,h} h(gh)h^{-1}}_{\alpha''}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Assim, para cada somando do coeficiente de gh em α' teremos um somando do coeficiente de $h(gh)h^{-1}$ em α'', o qual será o seu simétrico aditivo, com g e h percorrendo todo o grupo. Portanto, $\tilde{\alpha}(x) = 0,\ \forall x \in G$.

□

1.2 Grupos

Nesta seção iremos, de forma resumida, destacar uma lista de alguns resultados da Teoria de Grupos que são relevantes no desenvolvimento deste trabalho. Para uma leitura requintada sobre esta teoria veja [Hu96], [Rob96], [Rot95] e [Sc64].

Definição 1.25. *Um grupo é chamado de* **metabeliano** *se contém um subgrupo normal A que seja abeliano e o quociente $\frac{G}{A}$ também seja abeliano.*

Definição 1.26. *Para um dado grupo G, o subgrupo $G' = \langle x^{-1}y^{-1}xy;\ x, y \in G\rangle$ é chamado o* **subgrupo derivado** *de G, em que o elemento*

$$[x,y] := x^{-1}y^{-1}xy \in G,$$

é chamado o **comutador** *de x e y.*

Lema 1.27. *Seja N um subgrupo normal do grupo G. Assim, o grupo quociente $\dfrac{G}{N}$ é abeliano se, e somente se, $G' \subset N$.*

Demonstração. Dados elementos $x, y \in G$, denotaremos por $\overline{x}, \overline{y}$ suas respectivas classes laterais em G/N. Assim, temos que $\overline{xy} = \overline{yx}$ se, e somente se, $(yx)^{-1}(xy) \in N$; isto é, se, e somente se, $[x, y] \in N$ para todo $x, y \in G$, ou equivalentemente, se, e somente se, $G' \subset N$.

□

Definição 1.28. *Um subgrupo H de um grupo G é dito* **subgrupo característico** *se $\phi(H) = H$ para todo automorfismo $\phi : G \to G$. Sua notação é $H \, car \, G$.*

Definição 1.29. *Seja H um subgrupo de um grupo G, definimos o* **normalizador de** *H* **em** *G por*

$$\mathcal{N}_H(G) = \left\{ g \in G;\ g^{-1}Hg = H \right\}.$$

Seja G um grupo finito cuja ordem é $|G| = p^n m$, em que p denota um inteiro primo e m um inteiro positivo não divisível por p. Devido ao Teorema de Lagrange, sabemos que a ordem de um p-subgrupo de G deve ser menor ou igual a p^n. Dessa forma, existindo um subgrupo de ordem p^n, este deve ser maximal no conjunto dos p-subgrupos de G. Daí, temos a seguinte

Definição 1.30. *Seja G um grupo finito tal que $|G| = p^n m$ em que $p \not| \, m$. Um subrupo de G que tenha ordem p^n chama-se um p-***subgrupo de Sylow** *de G.*

O teorema a seguir reúne resultados importantes sobre os subgrupos de Sylow de um grupo finito.

Teorema 1.31. *Seja G um grupo finito de ordem $|G| = p^n m$, em que p é um inteiro primo que não divide m. Então:*

(i) G sempre contém p-subgrupos de Sylow e todo p-subgrupo de G está contido num p-subgrupo de Sylow de G.

(ii) Todos os p-subgrupos de Sylow de G são conjugados entre si em G.

(iii) Se n_p denota o número de p-subgrupos de Sylow de G, então

$$n_p \equiv 1 \, (mod \ p) \quad e \quad n_p \mid m.$$

Proposição 1.32. *Seja P um p-subgrupo de Sylow de um grupo G e seja H outro subgrupo. Se $P \subset H$ então $H = \mathcal{N}_G(H)$.*

Demonstração. Obviamente $H \subset \mathcal{N}_G(H)$. Seja $x \in \mathcal{N}_G(H)$. Como $P \subset H \lhd \mathcal{N}_G(H)$, temos que $xPx^{-1} \subset H$. Já que P e xPx^{-1} são p-subgrupos de Sylow de H, existe um $h \in H$ tal que $xPx^{-1} = hPh^{-1}$, donde $h^{-1}x \in \mathcal{N}_G(P) \subset H$. Assim, segue que $x \in H$ e, portanto, $\mathcal{N}_G(H) \subset H$. Logo, temos $H = \mathcal{N}_G(H)$ como queríamos. $\square$

Como uma consequência imediata temos o seguinte.

Corolário 1.33. *Seja P um p-subgrupo de Sylow de um grupo G. Então, $\mathcal{N}_G(\mathcal{N}_G(P)) = \mathcal{N}_G(P)$.*

Definição 1.34. *Um grupo G é chamado* **nilpotente** *se contém uma série de subgrupos:*

$$\{1\} = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n = G$$

tal que $G_{i-1} \trianglelefteq G$ e cada quociente $\dfrac{G_i}{G_{i-1}}$ está contido no centro de $\dfrac{G}{G_{i-1}}$, com $1 \leq i \leq n$.

Chamamos de **série central** de G toda série de subgrupos de G que satisfaz a propriedade acima.

Os grupos nilpotentes finitos podem ser caracterizados pelo seguinte resultado:

Teorema 1.35. *Seja G um grupo finito. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) G é nilpotente;

(ii) Todo subgrupo de Sylow de G é normal em G;

(iii) G é o produto direto de seus subgrupos de Sylow.

Alguns resultados importantes sobre grupos nilpotentes são destacados:

Lema 1.36. *Subgrupos e grupos quocientes de grupos nilpotentes são nilpotentes.*

Proposição 1.37. *Um p-grupo finito é nilpotente.*

Proposição 1.38. *Produtos diretos finitos de grupos nilpotentes são nilpotentes.*

Discutiremos um pouco sobre os chamados grupos simétricos, destacando alguns fatos sobre os mesmos; que podem ser encontrados em [GL10].

Definição 1.39. *Considerando C um conjunto com n elementos, temos que o conjunto $B(C) = \{f : C \to C; f$ é uma bijeção$\}$ munido da operação composição de funções, $(B, \circ)$, forma um grupo o qual é chamado de* **grupo simétrico***; tal grupo é denotado por Sym_n e $|Sym_n| = n!$. E qualquer subgrupo deste grupo é chamado* **grupo das permutações de n letras**.

Um fato conhecido sobre o grupo simétrico é que para $n \geq 3$, temos que o centro de Sym_n é trivial; no caso $n = 2$, o grupo Sym_2 é abeliano.

A maneira com a qual escrevemos uma permutação $\sigma \in Sym_n$ como produto de ciclos disjuntos é dita estrutura cíclica de σ.

Teorema 1.40. *Toda permutação não trivial $\sigma \in Sym_n$, pode ser escrita (de maneira única, a menos de ordenação) como um produto de ciclos disjuntos.*

Os ciclos distintos que têm comprimento 2 são chamados de **transposições**, assim, o próximo resultado segue como corolário do teorema mencionado.

Corolário 1.41. *Cada elemento de Sym_n pode escrito como um produto de tranposições (não necessariamente disjunto).*

Definição 1.42. *Seja $n \geq 2$ e $\sigma \in Sym_n$, em que $\sigma = (a_{11} \dots a_{1r_1}) \dots (a_{t1} \dots a_{tr_t})$ é a sua decomposição em ciclos disjuntos com $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_t$. Dizemos que $\{r_1, \dots, r_t\}$ é o* **tipo de decomposição** *de σ.*

Exemplo 1.43. *Considere $\sigma = (123)(45)(67)$ e $\sigma' = (15)(36)(247)$. Assim, σ e σ' têm o mesmo tipo de decomposição, a saber $\{2, 2, 3\}$.*

Considerando $Aut(Sym_n)$, o grupo dos automorfismos de Sym_n, temos um resultado na teoria de grupos garantindo que todo automorfismo de Sym_n é um automorfismo interno, com a restrição quando $n = 6$. Neste caso, temos uma particularidade do grupo Sym_6, o qual possui automorfismos que não são internos. Dessa forma, temos apenas $Inn(Sym_6) \subset Aut(Sym_6)$, além de que $(Aut(Sym_6) : Inn(Sym_6)) = 2$; podemos verificar que isso implica $Aut(Sym_6) = Sym_6 \rtimes C_2$, em que C_2 é o grupo cíclico de ordem 2. Para maiores detalhes ver [Sc64].

1.2.1 Produto Orlado

Como já foi mencionado anteriormente, iremos investigar a validade de (Nor) para alguns grupos obtidos a partir de extensões de dois outros grupos e uma ação específica a qual é chamada de produto orlado, ou produto wreath, cuja definição é a seguinte:

Definição 1.44. *Para grupos X e Y, com $|Y| = n$, definimos o* **produto orlado** *entre X e Y, denotado $X \, wr \, Y$, como o produto semi-direto $X^n = \underbrace{(X \times \dots \times X)}_{n \text{ cópias}} \rtimes_{\varphi} Y$, em que φ é a ação de Y em $(X \times \dots \times X)$ dada da seguinte forma: Seja $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ e escrevendo $x \in X^n$ como $x = (x_{y_1}, x_{y_2}, \dots, x_{y_n})$, temos:*

$$y^{-1}(x_{y_1}, x_{y_2}, \dots, x_{y_n})y = (x_{y_1 y^{-1}}, x_{y_2 y^{-1}}, \dots, x_{y_n y^{-1}}).$$

Observação 1.45. *O subgrupo normal X^n é chamado de* **grupo da base** *(ou somente base) do produto orlado, enquanto que o subgrupo Y é chamado de* **grupo do topo** *(ou somente topo).*

Observação 1.46. *Pode-se verificar que grupos quocientes de produtos orlados são produtos orlados.*

Em um dos resultados principais que será abordado na dissertação, o produto orlado tratado como uma variante do produto anterior, o qual chamamos de **produto orlado permutacional**, em que o grupo Y é dado pelo grupo das permutações ou grupo simétrico de m letras. Neste caso, temos $X^m \rtimes Sym_m$, em que,

$$\sigma^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_m)\sigma = \left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(m)}\right),$$

com $\sigma \in Sym_m$.

Vejamos alguns resultados cruciais no desenvolvimento dos teoremas principais que iremos abordar.

Proposição 1.47 (Schur-Zassenhaus)**.** *Sejam G um grupo finito e H um subgrupo normal de G tal que $\dfrac{G}{H} \simeq N$, em que H e N são grupos com ordens relativamente primas, então $G \simeq H \rtimes N$.*

Definição 1.48. *Seja H um subgrupo do produto direto N^m de m cópias de N um grupo finito. Então, H é chamado um* **subgrupo extensivo** *de N^m se a interseção de H com $(1, \ldots, 1, \underbrace{N}_{i}, \ldots, 1)$ é não trivial para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.*

Algumas propriedades interessantes de um subgrupo extensivo são apresentadas na próxima proposição.

Proposição 1.49. *Suponha que N^m é o produto direto de m cópias de N um grupo nilpotente finito. Então, para qualquer $p \in \pi(N)$, são válidas:*

(1) N^m é extensivo em si mesmo;

(2) o p-subgrupo de Sylow de N^m é extensivo em N^m;

(3) o centro do p-subgrupo de Sylow de N^m é extensivo em N^m.

Demonstração.

(1) Já que $N^m = \underbrace{(N, \ldots, N, \ldots, N)}_{m}$, temos

$$\begin{aligned} N^m \cap (1, \ldots, 1, N, 1, \ldots, 1) &= (N, \ldots, N) \cap (1, \ldots, 1, \underbrace{N}_{i}, 1, \ldots, 1) \\ &= (1, \ldots, 1, \underbrace{N}_{i}, 1, \ldots, 1), \end{aligned}$$

logo a interseção, para todo $1 \leq i \leq m$, é não trivial.

(2) Como N é nilpotente, podemos escrevê-lo como produto de seus subgrupos de Sylow, $N = Q_{p_1} \times \ldots \times Q_{p_r}$ e assim $N^m = P_{p_1} \times \ldots \times P_{p_r}$, em que $P_{p_i} = (Q_{p_i})^m$, com $1 \leq i \leq r$. Então, para um subgrupo de Sylow $P_{p_i} = (Q_{p_i})^m$ qualquer de N^m, ou seja, com $1 \leq i \leq r$, temos

$$\begin{aligned}
(Q_{p_i})^m \cap (1, \ldots, 1, N, 1, \ldots, 1) &= \underbrace{(Q_{p_i}, \ldots, Q_{p_i}, \ldots, Q_{p_i})}_{m} \cap (1, \ldots, 1, N, 1, \ldots, 1) \\
&= (1, \ldots, 1, \underbrace{Q_{p_i}}_{i}, 1, \ldots, 1),
\end{aligned}$$

isto é, qualquer subgrupo de Sylow de N^m intersecta todas as cópias de N, $(1, \ldots, N, \ldots, 1)$, de forma não trivial.

(3) Utilizaremos novamente as notações do item anterior, isto é, $N = Q_{p_1} \times \ldots \times Q_{p_r}$ e $N^m = P_{p_1} \times \ldots \times P_{p_r}$, em que $P_{p_i} = Q_{p_i}^m$, $\forall 1 \leq i \leq r$. Considerando $\mathcal{Z}(P_{p_i}) = \mathcal{Z}(Q_{p_i}^m) = (\mathcal{Z}(Q_{p_i}))^m$, em que $\mathcal{Z}(P_{p_i})$ é o centro de P_{p_i}, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}(P_{p_i}) \cap (1, \ldots, N, \ldots, 1) &= \underbrace{(\mathcal{Z}(Q_{p_i}), \ldots, \mathcal{Z}(Q_{p_i}))}_{m} \cap (1, \ldots, N, \ldots, 1) \\
&= (1, \ldots, 1, \underbrace{\mathcal{Z}(Q_{p_i})}_{i}, 1, \ldots, 1);
\end{aligned}$$

ou seja, para qualquer $1 \leq i \leq r$, o centro de P_{p_i} intersecta todas as cópias de N de forma não trivial.

□

Tomando um grupo G^n que seja dado pelo produto direto de n cópias de um grupo G, podemos considerar D o subconjunto em que cada elemento possua todas as coordenadas iguais. Facilmente verifica-se que D é um subgrupo de G^n, o qual nos induz à seguinte definição.

Definição 1.50. *Dizemos que $D \leq G^n$ é* **subgrupo diagonal** *se seus elementos forem da forma $(d, d, \ldots, d)$ em que $d \in G$, isto é,*

$$D = \{(h_1, \ldots, h_n) \in H^n : h_i = h_j \ \forall i, j \leq n, H \leq G\}.$$

Lema 1.51 (Lema 3.2, [Ne64])**.** *Seja $G = A wr B = A^{|B|} \rtimes B$ um produto orlado de grupos A e B finitos. Então o centralizador de B em G é $D \times Z(B)$, isto é, $C_G(B) = D \times Z(B)$, em que D é o subgrupo diagonal do grupo base $A^{|B|}$.*

Capítulo 2

A Propriedade do Normalizador

Uma das questões importantes na teoria dos anéis de grupo integrais e que é a central neste trabalho é a Propriedade do Normalizador, conhecida como (Nor), e que será abordada neste capítulo.

Dado um grupo G e $H \leq G$, é natural buscarmos conhecer quem é o normalizador de H em G, ou seja, $\mathcal{N}_G(H)$. Considerando $\mathcal{U} := \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$, o grupo das unidades do anel de grupo integral, é de fácil verificação que G é subgrupo de $\mathcal{U}$. Logo, podemos questionar sobre o normalizador de G em $\mathcal{U}$. É claro que G e $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}(\mathcal{U})$, o centro de $\mathcal{U}$, estão presentes em $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$, logo $G \cdot \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$. Dizemos que o grupo G satisfaz a propriedade do normalizador se $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$ for o menor possível, isto é,

$$\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G) = G \cdot \mathcal{Z}.$$

2.1 Os Resultados de Jackowski e Marciniak

O artigo de 1987 de S. Jackowski e Z. Marciniak, a saber [JM87], tem grande destaque principalmente pelas técnicas relevantes elaboradas pelos autores para a investigação da propriedade do normalizador.

Dentre vários resultados interessantes e de grandes contribuições, sendo que alguns são mencionados posteriormente, encontramos uma forma distinta mas equivalente de (Nor), proposta nesse artigo e descrita a seguir.

Dado $u \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$, denotamos por $\varphi_u : G \to G$ o automorfismo $\varphi_u(g) = u^{-1}gu$, e por $Aut_{\mathcal{U}}(G)$ o grupo dos automorfismos definidos acima; a ação por conjugação também pode ser denotada por $u^{-1}gu = g^u$, a qual será utilizada no texto para facilitar a notação quando for conveniente. É imediato que $Inn(G) \subset Aut_{\mathcal{U}}(G)$, em que $Inn(G)$ consiste nos automorfismos internos de G. Às vezes, utiliza-se a notação $conj(x)$ para denotar o automorfismo interno de G induzido por $x \in G$; isto é, $conj(x)(g) = x^{-1}gx$, para todo $g \in G$. Assim, (Nor) é válida se, e somente se, $\forall u \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G),\ u = g_0 \cdot z$, com $g_0 \in G$ e

$z \in \mathcal{Z}$. Logo
$$u^{-1}gu = \varphi_u(g) = z^{-1}g_0^{-1}gg_0z = g_0^{-1}gg_0,$$
que equivale a afirmar que φ_u é um automorfismo interno de G, ou seja, $Aut_{\mathcal{U}}(G) \subset Inn(G)$. Portanto, a propriedade do normalizador pode ser reformulada como a seguinte questão, para um grupo G finito:
$$Aut_{\mathcal{U}}(G) = Inn(G)\,?$$

No trabalho mencionado acima, é provado o teorema a seguir que garante (Nor) para os grupos que possuem ordem ímpar:

Teorema 2.1 (Teorema 3.4, [JM87]). *Se G é um grupo de ordem ímpar, então $Aut_{\mathcal{U}}(G) = Inn(G)$.*

Devido a este resultado, a investigação de (Nor) passou a ser necessária apenas para grupos que possuem ordem par, no caso dos grupos finitos.

Jackowski e Marciniak também apresentam uma forma alternativa para verificar a validade de (Nor), reduzindo-a à análise de um determinado conjunto de automorfismos φ_u em $Aut_{\mathcal{U}}(G)$, definido a partir de um 2-subgrupo de Sylow S fixado, porém arbitrário, em G, como segue
$$I_S := \left\{\varphi_u \in Aut_{\mathcal{U}}(G) : \varphi_u^2 = id, \varphi_{u|_S} = id\right\},$$
ou seja, I_S é subconjunto dos automorfismos de G que são determinados por unidades normalizadoras, que são involuções e que, quando restritos a um 2-subgrupo de Sylow do grupo em tela correspondem à identidade.

Com este conjunto, os citados autores verificaram a validade de (Nor) desde que $I_S \subseteq Inn(G)$. Este resultado é fundamental nos artigos principais dessa dissertação, e está, logo abaixo, explicitado, porém omitiremos sua demonstração devido à utilização de teorias não abordadas no presente trabalho.

Teorema 2.2 (Teorema 3.5, [JM87]). *Se $I_S \subseteq Inn(G)$ para um 2-subgrupo de Sylow $S \subseteq G$, então $Aut_{\mathcal{U}}(G) = Inn(G)$.*

Este resultado é uma ferramenta importante, pois muitos autores seguiram essa forma de abordagem para verificar a validade da propriedade do normalizador. Jackowski e Marciniak obtiveram ainda com este resultado e utilizando teoria de cohomologia de grupos um teorema abrangente, com uma restrição para um 2-subgrupo de Sylow do grupo.

Teorema 2.3 (Teorema 3.6, [JM87]). *Se G é um grupo finito que possui um 2-subgrupo de Sylow normal, então vale a propriedade do normalizador para G.*

2.2 Outros resultados fundamentais

Temos ainda outra abordagem para (Nor), que consiste em trabalhar com os chamados automorfismos de Coleman que são definidos a seguir; este tipo de automorfismo está presente, por exemplo, em [L02].

Definição 2.4. *Um automorfismo ρ de um G grupo finito é chamado* **automorfismo de Coleman**, *ou um C-automorfismo, se $\rho^2 = \rho \circ \rho$ é interno, ρ preserva as classes de conjugação em G e, para cada P p-subgrupo de Sylow de G, a restrição a P é igual a restrição de algum automorfismo interno de G.*

Esta definição foi inicialmente introduzida por Z. Marciniak e K. Roggenkamp em [MR01]. No entanto, um conceito distinto do mencionado acima ocorreu em [HeK02]; neste trabalho, os automorfismos de Coleman são os automorfismos para os quais a restrição a qualquer subgrupo de Sylow é igual a restrição de algum automorfismo interno de G; ou seja, são os automorfismos que satisfazem a última condição da definição anterior.

Esses automorfismos são nomeados desta forma devido a D. Coleman, que em [C64] revela que tais automorfismos ocorrem naturalmente no estudo do normalizador de G no grupo das unidades do anel de grupo integral.

Pode-se verificar que os automorfismos de Coleman formam um grupo, denotado por $Aut_{Col}(G)$. Também é de imediata demonstração que $Inn(G) \lhd Aut_{Col}(G)$; assim denotamos $Out_{Col}(G)$ o quociente $\dfrac{Aut_{Col}(G)}{Inn(G)}$. Analogamente, definimos $Out_{\mathcal{U}}(G)$ como o quociente $\dfrac{Aut_{\mathcal{U}}(G)}{Inn(G)}$. Como $Aut_{\mathcal{U}}(G) \subset Aut_{Col}(G)$, se mostrarmos que $Out_{Col}(G) = 1$, então $Out_{\mathcal{U}}(G) = 1$ e, assim, $Aut_{\mathcal{U}}(G) = Inn(G)$ e (Nor) é válida para G.

Os próximos dois lemas, que estão presentes nos principais artigos estudados, representam ferramentas fundamentais no estudo dos teoremas centrais, destes artigos, e são bastante interessantes já que podem ser vistos como versões restritas da propriedade do normalizador.

Lema 2.5 (Lema 1, [PeS03]). *Suponha $u \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$. Então $\varphi_u(g)$ é conjugado a g em G, para todo $g \in G$.*

Demonstração. Temos $\varphi_u(g) - g = u^{-1}gu - g = [u^{-1}, gu] \in [\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}G]$, uma soma linear de produtos de Lie de elementos de G. Segue de Sehgal (1993, Lema 7.2) que $\varphi_u(g)$ e g são conjugados. De fato, seja $\varphi_u(g) =: h \in G$ e considere $\alpha := h - g$. Pelo Lema 7.2, $\tilde{\alpha}(x) = 0$, $\forall x \in G$, em particular $\tilde{\alpha}(g) = 0$. Dado que $g \sim g$, seu coeficiente -1 aparece como uma parcela de $\tilde{\alpha}(g)$. Como este se anula, a soma das demais parcelas em $\tilde{\alpha}(g)$ é igual a 1, e corresponderá ao coeficiente de h, já que $supp(\alpha) = \{h, g\}$. Portanto, $h \sim g$, ou seja, $\varphi_u(g)$ é conjugado a g. $\square$

Este resultado pode ser interpretado como uma versão pontual de (Nor), pois $\varphi_u(g) \sim_G g$ significa que $\exists x \in G$ tal que $\varphi_u(g) = u^{-1}gu = x^{-1}gx$, em que x depende de g. Já o próximo resultado corresponde a uma versão local, já que temos $Aut_{\mathcal{U}}(G) \subset Inn(G)$ para p-subgrupos do grupo G. As técnicas e resultados aqui acima expostos foram motivados pelo teorema fundamental de Coleman em [C64], que apresentamos abaixo numa versão proposta em [Se93].

Teorema 2.6 (Coleman, 1964)**.** *Seja $u \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$ e seja P um p-subgrupo de G, então existe um $y \in G$ tal que $\varphi_u(x) = u^{-1}xu = y^{-1}xy$ para todo $x \in P$.*

Demonstração. Para $g \in G$, $\varphi(g) = u^{-1}gu \in G$ e assim, $u = g^{-1}u\varphi(g)$. Escrevendo $u = \sum u(x)x$ temos $\sum u(x)x = \sum u(x)g^{-1}x\varphi(g)$. Assim, g age sobre o conjunto G por $g \cdot x = \sigma_g(x) = g^{-1}x\varphi(g)$ e a função $u : G \to \mathbb{Z}$ dada por $x \mapsto u(x)$ é constante nas órbitas dessa ação, isto é, $u(\sigma_g(x)) = u(g^{-1}x\varphi(g)) = u(x),\ \forall x \in G$.

Restringindo a ação a P, as órbitas dessa ação têm como comprimento uma potência de p, pois, pelo Teorema da Órbita e do Estabilizador e como P é um p-grupo finito, $|\mathcal{O}(x)| \mid |P|$.

Analisando a função de aumento de u, concluímos que

$$\pm 1 = \varepsilon(u) = \sum c_i p^{v_i},$$

onde p^{v_i} é o comprimento da órbita de g_i e $u(g_i) = c_i$.

Segue que existe uma órbita de comprimento 1, pois, caso contrário, não poderíamos ter $\pm 1 = \sum c_i p^{v_i}$; ou seja, existe um $x \in G$ tal que $\sigma_g(x) = x,\ \forall g \in P$. Isto implica que

$$g^{-1}x\varphi(g) = x \Rightarrow \varphi(g) = x^{-1}gx,\ \forall g \in P,$$

como queríamos. $\square$

Como grupos nilpotentes podem ser descritos como o produto direto de seus subgrupos de Sylow, segue o resultado abaixo:

Corolário 2.7. *Seja G um grupo nilpotente finito, então vale (Nor) para G, isto é, $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G) = G \cdot \mathcal{Z}$.*

Demonstração. Como G é nilpotente, escrevemos $G = P_1 \times \ldots \times P_n$, em que P_i são os p-subgrupos de Sylow de G, com $1 \leq i \leq n$. Seja $\varphi_u(g) = u^{-1}gu$, com $g \in G$, o qual escrevemos $g = p_1 \ldots p_n$, com $p_i \in P_i$, para $1 \leq i \leq n$. Aplicando o lema anterior a cada P_i, temos que existe $y_i \in G$ tal que $u^{-1}x_iu = y_i^{-1}x_iy_i$, para todo $x_i \in P_i$. Considere $y_i = y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in}$, em que $y_{ij} \in P_j$; observe que na ação de y_i em P_i só é relevante a coordenada y_{ii}, isto é, $y_i^{-1}x_iy_i = y_{ii}^{-1}x_iy_{ii}$, pois as outras coordenadas comutam já que encontram-se em subgrupos de Sylow distintos. Dessa forma temos que

$$\begin{aligned} u^{-1}gu &= u^{-1}(p_1 \dots p_n)u \\ &= (u^{-1}p_1u)\dots(u^{-1}p_nu) \\ &= (y_1^{-1}p_1y_1)\dots(y_n^{-1}p_ny_n) \\ &= (y_{11}^{-1}p_1y_{11})\dots(y_{nn}^{-1}p_ny_{nn}) \\ &= (y_{nn}^{-1}\dots y_{11}^{-1})(p_1\dots p_n)(y_{11}\dots y_{nn}), \end{aligned}$$

sendo que a última igualdade é devido ao fato de y_{ii} comutar com y_{jj} e p_j, sempre que $i \neq j$. Logo, para $y = y_{11}\dots y_{nn} \in G$ temos

$$u^{-1}gu = y^{-1}gy, \ \forall g \in G.$$

□

A seguir, são apresentados resultados que exibem circunstâncias sobre o grupo considerado, para obter-se a validade de (Nor), os quais constituem-se em ferramentas importantes nos teoremas principais desse trabalho.

Teorema 2.8 (Teorema 2, [LPS99]). *Seja $G = \langle H, g\rangle$, em que H é um subgrupo abeliano de G de índice 2. Então vale (Nor) para G.*

Teorema 2.9 ([He02]). *Se os 2-subgrupos de Sylow de G são diedrais ou quatérnios generalizados, então a propriedade do normalizador vale para G.*

Capítulo 3

A Propriedade do Normalizador para Grupos monomiais completos

Em 2003, Petit Lobão e Sehgal, visando a investigar o papel de algumas extensões de grupo em relação ao Problema do Isomorfismo e a Propriedade do Normalizador, desenvolveram algumas técnicas para tratar das ações do tipo produto orlado. Obtiveram com isto alguns resultados promissores, entre estes, uma solução da Propriedade do Normalizador para a extensão orlada de um grupo finito nilpotente por um grupo simétrico sobre m letras, isto é, $G = NwrSym_m = N^m \rtimes Sym_m$, ver [PeS03].

Como já mencionado anteriormente, este resultado é o primeiro dos principais nessa dissertação, o qual serve de inspiração para outras investigações de (Nor), assim como as técnicas presentes em sua demonstração e que são muito interessantes e também foram utilizadas por outros autores. O teorema exposto como principal em [PeS03] é apresentado:

Teorema 3.1. *Seja $G = N\,wr\,Sym_m$, em que N é um grupo nilpotente finito e Sym_m o grupo de todas as permutações de m letras. Então vale a propriedade do normalizador para G.*

Os autores provam o teorema principal primeiramente para o caso especial em que $G = A\,wr\,Sym_m$, com A um grupo abeliano e, posteriormente, consideram um grupo nilpotente na base. Utilizam o Teorema 2.2 para alcançarem a validade de (Nor), sendo suficiente provar que todos os elementos de I_S são automorfismos internos de G; sendo que, S é o 2-subgrupo de Sylow fixado de G.

A seguir, um resultado bem interessante sobre a ação de automorfismos do conjunto I_S em determinados grupos da base de um produto orlado.

Lema 3.2. *Seja G o produto orlado $G = N\,wr\,K$, em que N é nilpotente. Se $\varphi_u \in I_S$, então existem $\tau \in K$ e a pertencente ao grupo da base tais que $\varphi_u(n) = a^{-1}\tau^{-1}n\tau a$, para todo n na base. Além do mais, se o produto orlado for permutacional cuja base é um* *grupo abeliano, isto é, $G = A\,wr\,Sym_m$, então existe $\tau \in Sym_m$ tal que $\varphi_u(z) = \tau^{-1}z\tau$, para todo $z \in A^m$, com $\tau^2 = 1$.*

Demonstração. Consideremos inicialmente que $|K| = m$ e o grupo da base seja N^m; como este é nilpotente, podemos escrevê-lo como um produto, $N^m = P_{p_1} \times \ldots \times P_{p_r}$, de seus subgrupos de Sylow. Seja $x \in P_{p_i}$, para algum $1 \leq i \leq r$, então, pelo Teorema 2.6, sabemos que existem elementos $\tau_i \in K$ e $a_i \in N^m$ tais que

$$u^{-1}xu = u^{-1}xu = a_i^{-1}\tau_i^{-1}x\tau_i a_i, \ \forall x \in P_{p_i}.$$

Mostraremos que $\tau_i = \tau_j$ para qualquer $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ com $j \neq i$. Sejam x no centro do grupo nilpotente P_{p_i} e y no centro de P_{p_j}. Considerando $\tau_i a_i \tau_i^{-1} = \widetilde{a_i} \in P_{p_i}$, temos

$$\begin{aligned} u^{-1}xu &= a_i^{-1}\tau_i^{-1}x\tau_i a_i \\ &= \tau_i^{-1}\widetilde{a_i}^{-1}x\widetilde{a_i}\tau_i \\ &= \tau_i^{-1}x\tau_i, \end{aligned}$$

pois $x^{\widetilde{a_i}} = x^{\widetilde{a}_{ii}}$, em que $\widetilde{a}_{ii}$ é a componente de $\widetilde{a_i}$ pertencente a P_{p_i}, e x é central.

Analogamente, temos

$$u^{-1}yu = \tau_j^{-1}y\tau_j.$$

Por outro lado, pelo Lema 2.5 $u^{-1}xyu \sim_G xy$, logo existe $\tau \in K$ tal que

$$u^{-1}xyu = \tau^{-1}xy\tau = (\tau^{-1}x\tau)(\tau^{-1}y\tau) = (\tau_i^{-1}x\tau_i)(\tau_j^{-1}y\tau_j).$$

Já que P_{p_i} é subgrupo característico de N^m e $N^m \trianglelefteq G$, segue que $P_{p_i} \trianglelefteq G$ e, assim, $\tau_i^{-1}x\tau_i$ e $\tau^{-1}x\tau \in P_{p_i}$. Similarmente, temos $\tau_j^{-1}y\tau_j$ e $\tau^{-1}y\tau \in P_{p_j}$. Assim, da equação acima obtemos $(\tau_i^{-1}x\tau_i)^{-1}(\tau^{-1}x\tau) = (\tau_j^{-1}y\tau_j)(\tau^{-1}y\tau)^{-1} \in P_{p_j} \cap P_{p_j} = (1)$, o que implica $\tau^{-1}x\tau = \tau_i^{-1}x\tau_i$ e $\tau^{-1}y\tau = \tau_j^{-1}y\tau_j$. Porém, sabemos que os centros de P_{p_i} e P_{p_j} são extensivos em N^m, pela Proposição 1.49, bem como, que somente a identidade pode fixar um subgrupo extensivo elemento-a-elemento; por isso, concluímos que $\tau_i = \tau = \tau_j$.

Observamos que podemos assumir que $a_i \in P_{p_i}$. De fato, o caso em que o o grupo N^m possua somente um subgrupo de Sylow é trivial; assim, vamos supor o caso em que $N^m = A \times B$, com A e B subgrupos de Sylow de N^m, e $n = ab$ um elemento de N^m. Pelo que vimos anteriormente, existem $x, y \in N^m$ em que $x = x_a x_b$ e $y = y_a y_b$ tais que

$$\begin{aligned} u^{-1}nu &= (u^{-1}au)(u^{-1}bu) \\ &= (x^{-1}\tau^{-1}a\tau x)(y^{-1}\tau^{-1}b\tau y) \\ &= (x_b^{-1}x_a^{-1}\tau^{-1}a\tau x_a x_b)(y_b^{-1}y_a^{-1}\tau^{-1}b\tau y_a y_b) \\ &= (x_a^{-1}\tau^{-1}a\tau x_a)(y_b^{-1}\tau^{-1}b\tau y_b) \\ &= y_b^{-1}x_a^{-1}\tau^{-1}a\tau\tau^{-1}b\tau x_a y_b \\ &= y_b^{-1}x_a^{-1}\tau^{-1}ab\tau x_a y_b \\ &= y_b^{-1}x_a^{-1}\tau^{-1}n\tau x_a y_b. \end{aligned}$$

Logo, neste caso, temos que $u^{-1}nu = m^{-1}\tau^{-1}ab\tau m$, em que $m = x_a y_b$, com $x_a \in A$ e $y_b \in B$. Claramente, pode-se perceber que o raciocínio apresentado é válido para uma quantidade qualquer de parcelas na decomposição de N^m. Desta forma, obtemos

$$u^{-1}nu = a^{-1}\tau^{-1}n\tau a, \ \forall n \in N^m, \ \text{com } a = a_1 \dots a_r.$$

Agora, considerando o produto orlado permutacional com o grupo da base abeliano, ou seja, $G = A\, wr\, Sym_m = A^m \rtimes Sym_m$, por argumentações análogas à demonstração acima temos

$$\varphi_u(z) = a^{-1}\tau^{-1}z\tau a = \tau^{-1}z\tau, \ \forall z \in A^m.$$

E ainda, teremos $\tau^2 = 1$, pois $\varphi_u^2 = id$ implica que $\tau^{-2}z\tau^2 = z$ para todo $z \in A^m$. □

3.1 Grupo da base abeliano

Antes de analisarmos o teorema em que o grupo da base é um abeliano, iremos exibir alguns resultados cruciais para a demonstração desse primeiro caso considerado. O primeiro deles garante que o grupo simétrico Sym_m satisfaz a propriedade do normalizador, que é concluída a partir do resultado de Jackowski e Marciniak.

Lema 3.3. *Se $\varphi_u \in I_{S(1\ 2)}$, com $S(1\ 2)$ o 2-subgrupo de Sylow fixado de Sym_m que contém a transposição $(1\ 2)$, então $\varphi_u \in Inn(Sym_m)$. Além disto, para todo $\varphi_u \in I_{S(1\ 2)}$ existe $\sigma \in Sym_m$ tal que $\varphi_u(\delta) = \sigma^{-1}\delta\sigma$, com $\sigma^2 = 1$.*

Demonstração. É sabido da teoria de grupos que se $m \neq 6$, todos os automorfismos de Sym_m são internos. Então, existe $\sigma \in Sym_m$ tal que

$$u^{-1}\delta u = u^{-1}\delta u = \sigma^{-1}\delta\sigma, \ \forall \delta \in Sym_m.$$

Dessa forma, resta-nos verificar o caso em que $m = 6$. Se supusermos, por absurdo, que φ_u não seja um automorfismo interno de Sym_6, temos que este deveria levar o elemento $(1\ 2)$ em um elemento de tipo de decomposição $\{2, 2, 2\}$, o que determina um absurdo, devido ao fato de $\varphi_{\overline{u}}$ fixar $S(1\ 2)$. Concluímos, então, que $\varphi_{\overline{u}}$ deve ser interno. Em ambos os casos temos:

$$\varphi_u(\delta) = \sigma^{-1}\delta\sigma,\ \forall\delta \in Sym_m,$$

com um fixado $\sigma \in Sym_m$ e $\sigma^2 = 1$, pois $\varphi_{\overline{u}}^2 = id$ implica que $\sigma^{-2}\delta\sigma^2 = \delta$ e, então, $\delta\sigma^2 = \sigma^2\delta$, ou seja, σ^2 pertence ao centro de Sym_m, o qual é trivial como nos ensina a teoria de grupos para $m \geq 3$. □

Nos próximos Lemas encontramos expressões para a ação do automorfismo $\varphi_u \in I_S$ nos elementos do grupo da base A^m e do grupo do topo Sym_m, que para o teorema posterior serão fundamentais para a investigação sobre a ação dos automorfismos de I_S nos elementos do grupo G.

Lema 3.4. *Seja G o produto orlado $G = A\,wr\,Sym_m$, em que A é abeliano e $m \geq 3$. Suponha que para todo $\delta \in Sym_m$ e para todo $\varphi_u \in I_S$, $\varphi_u(\delta) = a_\delta^{-1}\sigma\delta\sigma a_\delta$, em que $a_\delta \in A^m$ e $\sigma \in Sym_m$ tal que $(1\ 2)^\sigma = (1\ 2)$, com $\sigma^2 = 1$. Então existe $b \in A^m$, com $b(1) = 1 = b(2)$, tal que $\varphi_u(\delta) = b^{-1}\sigma^{-1}\delta\sigma b$, para todo $\delta \in Sym_m$.*

Demonstração. Pela hipótese, $\sigma(1\ 2)\sigma = (1\ 2)$, isto é, $(\sigma(1)\ \sigma(2)) = (1\ 2)$. Dessa forma, ou $\sigma(1) = 1$ e $\sigma(2) = 2$ ou $\sigma(1) = 2$ e $\sigma(2) = 1$. Como $m \geq 3$, consideramos as tranposições $(1\ k)$, com $k > 2$ e, assim

$$u^{-1}(1\ k)u = a_k^{-1}\sigma(1\ k)\sigma a_k = a_k^{-1}(\sigma(1)\ \sigma(k))a_k,$$

em que $a_k \in A^m$ dependendo de $(1\ k)$. Note que $k > 2$ implica $\sigma(k) > 2$, já que $(1\ 2)$ é fixado por σ.

Analisaremos os casos possíveis:

Caso 1: $\sigma(1) = 1$ e $\sigma(2) = 2$

Temos

$$u^{-1}(1\ k)u = a_k^{-1}(1\ \sigma(k))a_k.$$

Definimos $b \in A^m$ da seguinte forma:

$$b(1) = 1 = b(2),\ b(k) = (a_{\sigma(k)}(1))^{-1} \cdot a_{\sigma(k)}(k),\ \text{para } 2 < k \leq m,$$

em que $a_{\sigma(k)}(k)$ corresponde à k-ésima entrada de $a_{\sigma(k)} \in A^m$. Assim,

$$\begin{aligned} b(1\ 2) &= (1\ 2)(b(1), b(2), b(3), \ldots, b(m))^{(1\ 2)} \\ &= (b(2), b(1), b(3), \ldots, b(m)) \\ &= (1, 1, b(3), \ldots, b(m)) \\ &= b. \end{aligned}$$

Logo, $b^{-1}(1\ 2)b = (1\ 2)$. Agora, queremos mostrar que

$$a_k^{-1}(1\ \sigma(k))a_k = b^{-1}(1\ \sigma(k))b, \text{ para } 2 < k \leq m,$$

que equivale a mostrar

$$(ba_k^{-1})^{(1\ \sigma(k))} = (1\ \sigma(k))ba_k^{-1}(1\ \sigma(k)) = ba_k^{-1}. \tag{3.1}$$

Escrevendo $b = (b(1), \ldots, b(m))$ e $a_k = (a_k(1), \ldots, a_k(m))$, temos

$$ba_k^{-1} = (b(1)(a_k(1))^{-1}, b(2)(a_k(2))^{-1}, \ldots, b(\sigma(k))(a_k(\sigma(k)))^{-1}, \ldots, b(m)(a_k(m))^{-1}),$$

e, por outro lado, temos

$$\begin{aligned} (ba_k^{-1})^{(1\ \sigma(k))} &= (b(1)(a_k(1))^{-1}, \ldots, b(\sigma(k))(a_k(\sigma(k)))^{-1}, \ldots, b(m)(a_k(m))^{-1})^{(1\ \sigma(k))} \\ &= (b(\sigma(k))(a_k(\sigma(k)))^{-1}, \ldots, b(1)(a_k(1))^{-1}, \ldots, b(m)(a_k(m))^{-1}). \end{aligned}$$

Então, para provarmos (3.1), basta mostrarmos que

$$b(1)(a_k(1))^{-1} = (a_k(1))^{-1} = b(\sigma(k))(a_k(\sigma(k)))^{-1},$$

pois $b(1) = 1$.

Pela definição de $b \in A^m$ dada anteriormente, temos

$$\begin{aligned} b(\sigma(k)) &= (a_{\sigma\sigma(k)}(1))^{-1} \cdot a_{\sigma\sigma(k)}(\sigma(k)) \\ &= (a_k(1))^{-1} \cdot a_k(\sigma(k)), \end{aligned}$$

já que $\sigma^2 = 1$. Assim,

$$(a_k(1))^{-1} = b(\sigma(k))(a_k(\sigma(k)))^{-1}.$$

Portanto, 3.1 está provado, e assim, segue

$$a_k^{-1}(1\ \sigma(k))a_k = b^{-1}(1\ \sigma(k))b, \text{ para } 2 < k \leq m.$$

Caso 2: $\sigma(1) = 2$ e $\sigma(2) = 1$

Temos

$$u^{-1}(1\ k)u = a_k^{-1}(2\ \sigma(k))a_k.$$

Definimos $b \in A^m$ da seguinte forma:

$$b(1) = 1 = b(2), \ b(k) = (a_{\sigma(k)}(2))^{-1} \cdot a_{\sigma(k)}(k), \text{ para } 2 < k \leq m,$$

em que $a_{\sigma(k)}(k)$ corresponde à k-ésima entrada de $a_{\sigma(k)} \in A^m$.

Assim, analogamente ao caso anterior, temos $b^{-1}(1\ 2)b = (1\ 2)$ e $a_k^{-1}(2\ \sigma(k))a_k = b^{-1}(1\ \sigma(k))b$, para $2 < k \leq m$.

Portanto, para as tranposições $(1\ k)$, em ambos os casos provamos

$$u^{-1}(1\ k)u = b^{-1}\sigma^{-1}(1\ k)\sigma b,$$

em que b é fixado em A^m. Já que as transposições geram Sym_m, podemos escrever

$$\varphi_u(\delta) = b^{-1}\sigma^{-1}\delta\sigma b,\ \forall \delta \in Sym_m.$$

□

A seguir, o teorema principal dessa seção.

Teorema 3.5. *Seja G o produto orlado $A\,wr\,Sym_m = A^m \rtimes Sym_m$ em que o grupo base é abeliano. Seja S o 2-subgrupo de Sylow fixado $S_2 \rtimes S(1\ 2)$. Então o conjunto $I_S = \left\{\varphi_u : u \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G), \varphi_{u|_S} = id, \varphi_u^2 = id\right\}$ consiste de automorfismos internos de G. Ademais, para todo $\varphi_u \in I_S$, existem $\sigma \in Sym_m$, $b \in A^m$ tais que $\varphi_u(g) = b^{-1}\sigma^{-1}g\sigma b$, para todo $g \in G$, com $b(1) = b(2) = 1$.*

Demonstração. Se $m = 1$, então $G = A$ é abeliano e neste caso (Nor) é válida para G. Considerando $\varphi_u \in I_S$, temos $u^{-1}gu = b^{-1}\sigma^{-1}g\sigma b = b^{-1}gb$. Como G é abeliano se, e só se, $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ é abeliano, temos que $u^{-1}gu = g$, o que implica $b = 1$. Se $m = 2$, $G = A^2 \rtimes Sym_2$, então G tem um subgrupo, $H = A^2$, abeliano de índice 2, já que $|G| = |A^2| \cdot 2$. Assim, o resultado segue do Teorema 2.8. Logo, todos os elementos de I_S são internos e escrevemos $\varphi_u(g) = b^{-1}\sigma^{-1}g\sigma b$ para algum $b \in A^2$, $\sigma \in Sym_2$ e para todo $g \in G$. Tomando $g = (1\ 2) \in Sym_2$, temos

$$(1\ 2) = u^{-1}(1\ 2)u = b^{-1}\sigma^{-1}(1\ 2)\sigma b = b^{-1}(1\ 2)b.$$

Segue que $b(1) = b(2)$. De fato,

$$\begin{aligned}(1\ 2) &= b^{-1}(1\ 2)b \\ &= b^{-1}(1\ 2)b(1\ 2)^{-1}(1\ 2) \\ &= b^{-1}(1\ 2)b(1\ 2)(1\ 2).\end{aligned}$$

Assim, $1 = b^{-1}(1\ 2)b(1\ 2)$ o que implica:

$$\begin{aligned}(1\ 2)b(1\ 2) &= b \\ (1\ 2)(b_1, b_2)(1\ 2) &= (b_1, b_2) \\ (b_2, b_1) &= (b_1, b_2).\end{aligned}$$

Portanto $b(1) = b_1 = b_2 = b(2)$.

Como b é centralizado por todo elemento de A^m, pois este é abeliano, e mostramos que também é centralizado pelo elemento $(1\ 2)$, logo assim o será por todos os elementos do grupo, concluímos que b é central, e assim, podemos substituí-lo por 1.

Vamos analisar o caso $m \geq 3$ e verificar, primeiramente, a ação de φ_u em Sym_m.

Vamos utilizar a barra superior como uma convenção para os elementos e subgrupos do grupo quociente $\dfrac{G}{A^m} =: \overline{G}$. Daí, consideremos a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rcl} \omega : \mathbb{Z}G & \to & \mathbb{Z}\left(\dfrac{G}{A^m}\right) \\ \displaystyle\sum_{g\in G} a_g g & \mapsto & \displaystyle\sum_{\overline{g}\in\overline{G}} a_{\overline{g}}\overline{g}, \end{array}$$

em que $\overline{g} = gA^m$, com $g \in G$. Temos que o núcleo desta aplicação é $ker(\omega) = \Delta(G, A^m)$.

Assim $\mathbb{Z}G/\Delta(G, A^m) \simeq \mathbb{Z}(G/A^m) = \mathbb{Z}\overline{G}$. Como $u \in \mathbb{Z}G$, temos $\overline{u} \in \mathbb{Z}\overline{G}$ e $u^{-1}gu \in G$ implica $\overline{u}^{-1}\overline{gu} \in \overline{G}$. Então $\overline{u}$ normaliza $\overline{G}$. Como $\overline{G} \simeq Sym_m$, utilizando o Lema 3.3 temos que para todo $\delta \in Sym_m$,

$$\varphi_{\overline{u}}(\delta) = \overline{u}^{-1}\delta\overline{u} = \sigma^{-1}\delta\sigma, \tag{3.2}$$

com $\sigma^2 = 1$.

Além disto, pelo Lema 2.5, $u^{-1}gu \sim_G g$, dado δ em Sym_m; ou seja, existe $a_\delta \in A^m$ dependendo de δ, tal que:

$$u^{-1}\delta u = a_\delta^{-1}\tau_\delta^{-1}\delta\tau_\delta a_\delta.$$

Daí, $\overline{u}^{-1}\delta\overline{u} = \tau_\delta^{-1}\delta\tau_\delta$ e, por (3.2), tomamos $\tau_\delta = \sigma$, implicando $u^{-1}\delta u = a_\delta^{-1}\sigma\delta\sigma a_\delta$, $\forall \delta \in Sym_m$, com $a_\delta \in A^m$ dependendo de δ.

Vamos agora verificar a ação de φ_u em A^m. Pelo Lema 3.2, sabemos que

$$u^{-1}au = \lambda a\lambda,\ \forall a \in A^m,$$

em que $\lambda^2 = 1$. Como vimos que (Nor) é válida para o Sym_m, podemos escrever $\overline{u} = \sigma \cdot z$, em que z é uma unidade central de $\mathbb{Z}Sym_m$. Desde que $m > 2$, segue do Teorema 1.15 que $z = \pm 1$. Então, $\overline{u} = \pm\sigma$ e $u = \pm\sigma + \xi$, com $\xi \in \Delta(G, A^m)$, pois $\overline{u} = \pm\sigma + \Delta(G, A^m)$. Pelo Lema 1.14, obtemos $u \equiv \sigma \cdot a_0\ mod\ \Delta(G)\Delta(G, A^m)$, com um $a_0 \in A^m$ fixado. Assim, também temos $u^{-1} \equiv (\sigma a_0)^{-1}\ mod\ \Delta(G)\Delta(G, A^m)$, logo

$$\begin{array}{rcl} u^{-1}au & \equiv & u^{-1}a\sigma a_0\ mod\ \Delta(G)\Delta(G, A^m) \\ & \equiv & (\sigma a_0)^{-1}a(\sigma a_0)\ mod\ \Delta(G)\Delta(G, A^m) \\ & \equiv & a_0^{-1}\sigma a\sigma a_0\ mod\ \Delta(G)\Delta(G, A^m) \\ & \equiv & \sigma a\sigma\ mod\ \Delta(G)\Delta(G, A^m), \end{array}$$

pois A^m é abeliano.

Portanto,

$$\lambda a \lambda = \varphi_u(a) = u^{-1}au \equiv \sigma a \sigma \; mod \; \Delta(G)\Delta(G, A^m).$$

Assim,

$$\begin{array}{rcl} \lambda a \lambda & \equiv & \sigma a \sigma \; mod \; \Delta(G)\Delta(G, A^m) \\ (\lambda a \lambda) \cdot (\sigma a \sigma)^{-1} & \equiv & 1 \; mod \; \Delta(G)\Delta(G, A^m), \end{array}$$

ou seja, $(\lambda a \lambda) \cdot (\sigma a \sigma)^{-1} - 1 \in \Delta(G)\Delta(G, A^m)$. Segue da Proposição 1.16 que $(\lambda a \lambda) \cdot (\sigma a \sigma)^{-1} \in [A^m, A^m] = 1$, já que A^m é abeliano. Concluímos que $\lambda a \lambda = \sigma a \sigma, \; \forall a \in A^m$.

Logo,

$$\begin{array}{rcl} \lambda a \lambda & = & \sigma a \sigma \\ \lambda^{-1}(a_1, \ldots, a_m)\lambda & = & \sigma^{-1}(a_1, \ldots, a_m)\sigma \\ \left(a_{\lambda(1)}, \ldots, a_{\lambda(m)}\right) & = & \left(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(m)}\right), \end{array}$$

ou seja, $a_{\lambda(i)} = a_{\sigma(i)}$, com $1 \leq i \leq m$, implicando $\lambda = \sigma$.

Lembre-se de que antes de verificarmos a ação de φ_u no grupo A^m, vimos que a ação no grupo simétrico é dada por $\varphi_u(\delta) = a_\delta^{-1}\sigma\delta\sigma a_\delta$, para todo δ em Sym_m. Ademais, o fato $\lambda = \sigma$ implica que $\varphi_u(a) = \lambda^{-1}a\lambda = \sigma^{-1}a\sigma$, para todo $a \in A^m$. Por isso, resta-nos mostrar a não dependência de a_δ na equação acima; isto é, existe $b \in A^m$ tal que $\varphi_u(\delta) = b^{-1}\sigma^{-1}\delta\sigma b$, para todo δ em Sym_m. No entanto, a existência de $b \in A^m$ satisfazendo essas condições é garantida pelo Lema 3.4 e, assim, teremos também que

$$\varphi_u(a) = \sigma^{-1}a\sigma = b^{-1}\sigma^{-1}a\sigma b, \; \forall a \in A^m,$$

já que A^m é abeliano. Logo, para todo $g \in G$ escrevemos

$$\varphi_u(g) = b^{-1}\sigma^{-1}g\sigma b.$$

Além de que $b(1) = 1 = b(2)$ como queríamos, concluindo a prova do teorema. $\square$

3.2 Grupo da base nilpotente

Nesta seção veremos a prova do teorema principal de [PeS03] em que o grupo da base é nilpotente. Para isto, consideraremos $m \geq 2$, pois, para o caso em que $m = 1$, temos que G é um grupo nilpotente e, assim, segue o desejado pelo Corolário 2.7 proveniente do resultado de Coleman.

Antes disso, um Lema importante para o desenvolvimento do teorema dessa seção.

Observação 3.6. *Se N um grupo nilpotente, então podemos escrevê-lo como o produto dos seus p_i-subgrupos de Sylow, isto é, $N = P_{p_1} \times \ldots \times P_{p_r}$. Assim, para qualquer*

$n \in N$, denominamos por **fatores ímpares** *de n às suas coordenadas que pertencem aos p_i-subgrupos de Sylow de N em que $p_i \neq 2$.*

Lema 3.7. *Seja N^m o produto direto de m cópias de N um grupo nilpotente finito, com 2-subgrupo de Sylow não trivial. Se $c \in N^m$ é tal que $c^2 \in \zeta^m$, em que ζ^m é o centro de N^m, então os fatores ímpares de c são centrais em N^m.*

Demonstração. Seja $c = (c_{p_1}, c_{p_2}, \ldots, c_{p_r})$, com $c_{p_i} \in P_{p_i}$, p_i-subgrupo de Sylow de N^m; como o 2-subgrupo de Sylow é não trivial, vamos supor, sem perda de generalidade, $p_1 = 2$. Como c^2 é central em N^m, temos $(c_{p_1}^2, c_{p_2}^2, \ldots, c_{p_r}^2) \in \zeta^m$. Portanto, considerando $y_i = \dfrac{p_i^x + 1}{2}$, com $2 \leq i \leq r$ e $p_i^x = |c_{p_i}|$, com x dependendo de i, temos que,

$$(c^2)^{y_i} = (c_2^{2y_i}, c_{p_2}^{2y_i}, \ldots, c_{p_r}^{2y_i}) \in \zeta^m,$$

mas,

$$c_{p_i}^{2y_i} = c_{p_i}^{p_i^x+1} = c_{p_i}^{p_i^x} \cdot c_{p_i} = c_{p_i}, \text{ com } i \neq 1,$$

portanto,

$$(c^2)^{y_i} = (c_2^{2y_i}, c_{p_2}^{2y_i}, \ldots, c_{p_i}, \ldots, c_{p_r}^{2y_i}) \in \zeta^m,$$

já que qualquer potência de c^2 pertence a ζ^m. Com isso, c_{p_i} é central em P_{p_i}, portanto é central em N^m e, como esse argumento é válido para todo $i \neq 1$, concluímos que os fatores ímpares de c são centrais em N^m. □

Para finalizarmos esse capítulo, demonstraremos o teorema principal dessa seção, garantindo, portanto, a validade de (Nor) para o grupo G que é dado pelo produto orlado $N \, wr \, Sym_m$.

Teorema 3.8. *Seja G o produto orlado $N \, wr \, Sym_m = N^m \rtimes Sym_m$, em que N é nilpotente e $m \geq 2$. Seja $S = S_2 \rtimes S(1\ 2)$ o 2-subgrupo de Sylow fixado . Então o conjunto $I_S = \left\{\varphi_u : u \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G), \varphi_{u|_S} = id, \varphi_u^2 = id\right\}$ consiste de automorfismos internos de G. Ademais, para todo $\varphi_u \in I_S$, existem $\sigma \in Sym_m$ e $b \in N^m$ tais que $\varphi_u(g) = b^{-1}\sigma^{-1}g\sigma b$, $\forall g \in G$, com $b(1) = b(2) = 1$.*

Demonstração. Iremos usar indução em $|G|$. Para o caso de N ser abeliano, o resultado segue pelo Teorema 3.5. Assim, consideremos N não abeliano; primeiramente vamos analisar como φ_u age nos elementos de Sym_m. Sejam $\varphi_u \in I_S$ e $\delta \in Sym_m$. Já que $\varphi_u(\delta) \sim_G \delta$, novamente pelo Lema 2.5, temos que existem $a_\delta \in N^m$ e $\tau_\delta \in Sym_m$, ambos dependendo de δ, tais que:

$$u^{-1}\delta u = a_\delta^{-1}\tau_\delta^{-1}\delta\tau_\delta a_\delta, \ \forall \delta \in Sym_m.$$

De maneira análoga no teorema anterior, consideraremos a barra superior como uma convenção aos elementos e subgrupos do grupo quociente que, neste caso, é $\dfrac{G}{N^m} =: \overline{G}$. Então, como $\overline{a_\delta} \in \overline{G} \simeq Sym_m$, segue que $\overline{a_\delta} = 1$ e $\varphi_{\overline{u}}(\delta) = \overline{a_\delta}^{-1}\tau_\delta^{-1}\delta\tau_\delta\overline{a_\delta} = \tau_\delta^{-1}\delta\tau_\delta$.

Por outro lado, pelo Lema 3.3, concluímos que existe $\lambda \in Sym_m$ tal que

$$u^{-1}\delta u \equiv \lambda^{-1}\delta\lambda \ mod\Delta(G, N^m), \ \forall\delta \in Sym_m.$$

Assim, $\tau_\delta^{-1}\delta\tau_\delta = \lambda^{-1}\delta\lambda$ e deduzimos que

$$u^{-1}\delta u = a_\delta^{-1}\lambda^{-1}\delta\lambda a_\delta, \ \forall\delta \in Sym_m, \tag{3.3}$$

com $a_\delta \in N^m$, dependendo de δ.

Vamos agora verificar a ação de φ_u em N^m. Pelo Lema 3.2, sabemos que

$$u^{-1}nu = a^{-1}\tau^{-1}n\tau a, \ \forall n \in N^m, \tag{3.4}$$

com $a = a_1 \ldots a_r \in N^m$ e $\tau \in Sym_m$.

Considerando ζ o centro de N, temos que $\dfrac{N}{\zeta}$ é não trivial e de ordem menor que a de N; ademais

$$\frac{G}{\zeta^m} \simeq \left(\frac{N}{\zeta}\right) wrSym_m \simeq \left(\frac{N^m}{\zeta^m}\right) \rtimes Sym_m.$$

Assim, por indução na ordem do grupo, obtemos a existência de $\overline{b} \in \dfrac{N^m}{\zeta^m}$ e $\sigma \in Sym_m$ tais que $\sigma^2 = 1$ e $\overline{u}^{-1}\overline{gu} = \overline{b}^{-1}\sigma\overline{g}\sigma\overline{b}, \ \forall\overline{g} \in \dfrac{G}{\zeta^m}$, com $\overline{b}(1) = 1 = \overline{b}(2)$ (ver o Teorema 3.5). Tomando $\overline{g} = \delta \in Sym_m$, temos, pela equação (3.3), que

$$\overline{u}^{-1}\delta\overline{u} = \overline{b}^{-1}\sigma\delta\sigma\overline{b} = \overline{a}_\delta^{-1}\lambda^{-1}\delta\lambda\overline{a}_\delta.$$

Como $\overline{b}$ e $\overline{a}_\delta$ pertencem a um subgrupo normal do grupo $\dfrac{G}{\zeta^m}$, temos que $(\sigma\delta\sigma)\overline{b}(\sigma\delta\sigma)^{-1} = \overline{b}_0$ e $(\lambda^{-1}\delta\lambda)\overline{a}_\delta(\lambda^{-1}\delta\lambda)^{-1} = \overline{a}_{\delta_0}$ e, assim,

$$\begin{aligned} \overline{b}^{-1}\sigma\delta\sigma\overline{b} &= \overline{a}_\delta^{-1}\lambda^{-1}\delta\lambda\overline{a}_\delta \\ \overline{b}^{-1}\overline{b}_0\sigma\delta\sigma &= \overline{a}_\delta^{-1}\overline{a}_{\delta_0}\lambda^{-1}\delta\lambda \\ \overline{a}_{\delta_0}^{-1}\overline{a}_\delta\overline{b}^{-1}\overline{b}_0 &= \lambda^{-1}\delta\lambda\sigma\delta^{-1}\sigma, \end{aligned}$$

isto é, pelo produto semi-direto, $\lambda^{-1}\delta\lambda\sigma\delta^{-1}\sigma = 1$. Assim $\sigma\delta\sigma = \lambda^{-1}\delta\lambda$ e temos, por (3.3),

$$u^{-1}\delta u = a_\delta^{-1}\sigma\delta\sigma a_\delta, \ \forall\delta \in Sym_m.$$

Agora, usamos o mesmo argumento utilizado no fim da demonstração do teorema anterior, para construir um elemento $a_0 \in N^m$ tal que $u^{-1}\delta u = a_0^{-1}\sigma\delta\sigma a_0, \ \forall\delta \in Sym_m$.

Então, em $\dfrac{G}{\zeta^m}$, para todo $\delta \in Sym_m$, temos

$$\overline{a_0}^{-1}\sigma\delta\sigma\overline{a_0} = \overline{b}^{-1}\sigma\delta\sigma\overline{b}$$

e, assim,

$$\overline{b}\overline{a_0}^{-1} = (\sigma\delta\sigma)\overline{b}\overline{a_0}^{-1}(\sigma\delta\sigma)^{-1}.$$

Segue que $\overline{b}\overline{a_0}^{-1}$ pertence ao subgrupo diagonal do quociente $\dfrac{N^m}{\zeta^m}$. Logo, $\overline{b}\overline{a_0}^{-1} = \overline{d}^{-1}$, ou seja,

$$ba_0^{-1} = d^{-1}c_0^{-1}. \tag{3.5}$$

Concluímos que $a_0 = dbc_0$, com d no subgrupo diagonal de N^m e c_0 no centro de N^m. Assim, para todo $\delta \in Sym_m$, e considerando que $d^{-1}\sigma\delta\sigma d = \sigma\delta\sigma$, temos

$$u^{-1}\delta u = c_0^{-1}b^{-1}\sigma\delta\sigma bc_0. \tag{3.6}$$

Agora, seja $\overline{g} = \overline{n},\ n \in N^m$, então, por (3.4),

$$\overline{u}^{-1}\overline{n}\,\overline{u} = \overline{b}^{-1}\sigma\overline{n}\sigma\overline{b} = \overline{a}^{-1}\tau^{-1}\overline{n}\tau\overline{a},$$

que implica

$$\overline{a}\overline{b}^{-1}\sigma\overline{n}\sigma\overline{b}\overline{a}^{-1} = \tau^{-1}\overline{n}\tau$$

e, então,

$$\sigma\overline{a}\overline{b}^{-1}\sigma\overline{n}\sigma\overline{b}\overline{a}^{-1}\sigma = \sigma\tau^{-1}\overline{n}\tau\sigma.$$

Lembre-se de que N^m é não abeliano e que $\sigma^2 = 1$. Note que $\sigma = \tau$, pois, caso contrário, se $\sigma \neq \tau$, então $\tau\sigma$ "move" alguma coordenada de $\overline{n}$, por propriedades do produto orlado. Por exemplo, considere $\overline{n} = (x, 1, \ldots, 1)$ com $x \neq 1$, e suponha que $\tau\sigma$ move a primeira coordenada de $\overline{n}$, então

$$\sigma\tau^{-1}(x, 1, \ldots, 1)\tau\sigma = (1, \ldots, x, \ldots) = \sigma\overline{a}\overline{b}^{-1}\sigma(x, 1, \ldots, 1)\sigma\overline{b}\overline{a}^{-1}\sigma,$$

Considere $\sigma\overline{b}\overline{a}^{-1}\sigma = (\overline{b}\overline{a}^{-1})^{\sigma} := \overline{k} \in \dfrac{N^m}{\zeta^m}$, logo $\overline{k} = (\overline{k_1}, \overline{k_2}, \ldots, \overline{k_m})$, e então:

$$\begin{aligned}\overline{k}^{-1}(x, 1, \ldots, 1)\overline{k} &= (\overline{k_1}^{-1}, \overline{k_2}^{-1}, \ldots, \overline{k_m}^{-1})(x, 1, \ldots, 1)(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \ldots, \overline{k_m}) \\ &= (x^{\overline{k_1}}, 1, \ldots, 1),\end{aligned}$$

ou seja,

$$(1, \ldots, x, \ldots) = (x^{\overline{k_1}}, 1, \ldots, 1),$$

o que implica $x = 1$, que é uma contradição. Logo, $\sigma = \tau$ e temos que

$$u^{-1}nu = a^{-1}\sigma n\sigma a, \ \forall n \in N^m.$$

Ainda,

$$\overline{u}^{-1}\overline{nu} = \overline{a}^{-1}\sigma\overline{n}\sigma\overline{a} = \overline{b}^{-1}\sigma\overline{n}\sigma\overline{b}$$

e assim

$$\overline{b}\overline{a}^{-1}\sigma\overline{n}\sigma\overline{a}\overline{b}^{-1} = \sigma\overline{n}\sigma,$$

significando que $\overline{a}\overline{b}^{-1}$ pertence ao centro de $\dfrac{N^m}{\zeta^m}$ e ab^{-1} pertence ao segundo centro de N^m, pois lembremos que vale $\mathcal{Z}\left(\dfrac{G}{\zeta_i(G)}\right) \simeq \dfrac{\zeta_{i+1}(G)}{\zeta_i(G)}$, em que $\mathcal{Z}\left(\dfrac{G}{\zeta_i(G)}\right)$ é o centro de $\dfrac{G}{\zeta_i(G)}$ e ζ_i é o i-ésimo centro de G. Temos neste caso, $\mathcal{Z}\left(\dfrac{N^m}{\zeta^m}\right) \simeq \dfrac{\zeta_2^m}{\zeta^m}$. Assim, $ab^{-1} = c_1 \in \zeta_2^m$, e usando a normalidade do elemento c_1, ou seja, $b^{-1}c_1b = c \in \zeta_2^m$, temos $a = c_1b = bc$.

Então,

$$u^{-1}nu = c^{-1}b^{-1}\sigma n\sigma bc, \ \forall n \in N^m, \tag{3.7}$$

com $c \in \zeta_2^m$. Lembremos que, por indução, temos $\overline{b}(1) = \overline{b}(2) = 1$, e, como na prova do Teorema 3.5, a permutação σ é uma involução tal que

$$\sigma(1) = 1 \ \text{ e } \ \sigma(2) = 2 \ \text{ ou } \ \sigma(1) = 2 \ \text{ e } \ \sigma(2) = 1.$$

Além do mais, $\sigma\overline{b}$ fixa $S(1\ 2)$, já que $\overline{u}^{-1}s\overline{u} = \overline{b}^{-1}\sigma s\sigma\overline{b} = s, \ \forall s \in S$, em particular para todo elemento de $S(1\ 2)$.

Então, $\sigma\overline{b}\sigma(1) = 1$, logo $\sigma\overline{b}\sigma\overline{b}(1) = 1$. Já que $\overline{u}^2$ é central, então $\sigma\overline{b}\sigma\overline{b}$ também o é, pois

$$\begin{aligned}
\varphi_{\overline{u}}^2(\overline{g}) &= \varphi_{\overline{u}}(\overline{u}^{-1}\overline{g}\,\overline{u}) \\
&= \overline{u}^{-1}(\overline{u}^{-1}\overline{g}\,\overline{u})\overline{u} \\
&= \overline{u}^{-1}(\overline{b}^{-1}\sigma\overline{g}\sigma\overline{b})\overline{u} \\
&= (\overline{b}^{-1}\sigma\overline{b}^{-1}\sigma)\overline{g}(\sigma\overline{b}\sigma\overline{b}) \\
&= \overline{g},
\end{aligned}$$

já que $\varphi_{\overline{u}}^2 = id$.

Portanto,

$$(\overline{b}^{-1}\sigma\overline{b}^{-1}\sigma)\delta(\sigma\overline{b}\sigma\overline{b}) = \delta, \ \forall \delta \in Sym_m,$$

isto é,

$$\delta^{-1}\sigma\overline{b}\sigma\overline{b}\delta = \sigma\overline{b}\sigma\overline{b}, \ \forall \delta \in Sym_m.$$

Dessa forma, $\sigma\overline{b}\sigma\overline{b}$ pertence ao subgrupo diagonal do quociente $\dfrac{N^m}{\mathcal{Z}^m}$, e $\sigma\overline{b}\sigma\overline{b} = 1$.

Já que N^m é subgrupo característico e u^2 é central, segue que, por (3.7), $\forall n \in N^m$,

$$\begin{array}{rcl} u^{-2}nu^2 & = & (u^{-1}c^{-1}b^{-1}u)(u^{-1}\sigma n\sigma u)(u^{-1}bcu) \\ n & = & (c^{-1}b^{-1}\sigma c^{-1}b^{-1}\sigma bc)(c^{-1}b^{-1}\sigma\sigma n\sigma\sigma bc)(c^{-1}b^{-1}\sigma bc\sigma bc) \\ n & = & c^{-1}b^{-1}\sigma c^{-1}b^{-1}\sigma n\sigma bc\sigma bc. \end{array}$$

Isto significa que $\sigma bc\sigma bc \in \zeta^m$. E ainda, em (3.7), trocando n por $\sigma n\sigma$, temos

$$u^{-1}\sigma n\sigma u = c^{-1}b^{-1}nbc.$$

Por outro lado, usando (3.6) e a centralidade de c_0 em N^m,

$$\begin{array}{rcl} u^{-1}\sigma n\sigma u & = & (u^{-1}\sigma u)(u^{-1}nu)(u^{-1}\sigma u), \\ u^{-1}\sigma n\sigma u & = & (c_0^{-1}b^{-1}\sigma bc_0c^{-1}b^{-1}\sigma)(n)(\sigma bcc_0^{-1}b^{-1}\sigma bc_0), \\ u^{-1}\sigma n\sigma u & = & (b^{-1}\sigma bc^{-1}b^{-1}\sigma)(n)(\sigma bcb^{-1}\sigma b). \end{array}$$

Assim, $\sigma bcb^{-1}\sigma bc^{-1}b^{-1}$ pertence a ζ^m. Multiplicando pelo elemento central $c^{-1}b^{-1}\sigma c^{-1}b^{-1}\sigma$, obtemos o elemento

$$(c^{-1}b^{-1}\sigma c^{-1}b^{-1}\sigma)(\sigma bcb^{-1}\sigma bc^{-1}b^{-1}) = c^{-1}b^{-1}\sigma b^{-1}\sigma bc^{-1}b^{-1}$$

no centro ζ^m de N^m. No quociente $\dfrac{G}{\zeta^m}$, temos

$$\overline{c}^{-1}\overline{b}^{-1}\sigma\overline{b}^{-1}\sigma\overline{b}\overline{c}^{-1}\overline{b}^{-1} = 1.$$

Já que c pertence ao segundo centro, ζ_2^m, $\overline{c}$ é central e, considerando $x = \sigma\overline{c}^{-1}\sigma$ que implica $\overline{c}^{-1}\sigma = \sigma x$, temos

$$\begin{array}{rcl} \overline{b}^{-1}\overline{c}^{-1}\sigma\overline{b}^{-1}\sigma\overline{b}\overline{c}^{-1}\overline{b}^{-1} & = & 1 \\ \overline{b}^{-1}\sigma x\overline{b}^{-1}\sigma\overline{b}\overline{c}^{-1}\overline{b}^{-1} & = & 1 \\ \overline{b}^{-1}\sigma\overline{b}^{-1}x\sigma\overline{b}\overline{c}^{-1}\overline{b}^{-1} & = & 1 \\ \overline{b}^{-1}\sigma\overline{b}^{-1}\sigma\overline{c}^{-1}\overline{b}\overline{c}^{-1}\overline{b}^{-1} & = & 1 \\ \overline{b}^{-1}\sigma\overline{b}^{-1}\sigma\overline{c}^{-2} & = & 1. \end{array}$$

Portanto, $\overline{c}^{-2} = \sigma\overline{b}\sigma\overline{b}$.

Como $\sigma\overline{b}\sigma\overline{b} = \overline{1}$, segue que $\overline{c}^2 = \overline{1}$, isto é, $c^2 \in \zeta^m$. Uma vez que N^m é nilpotente, podemos decompor c em fatores pertencentes aos subgrupos de Sylow; dessa forma, temos pelo Lema 3.7 que os fatores ímpares de c são centrais em N^m.

a) Vamos primeiro supor que o 2-subgrupo de Sylow de N^m, S_2, é abeliano. Logo c é central em N^m, pois, com essa hipótese todos os fatores de c tornam-se centrais. Logo, para todo $n \in N^m$

$$u^{-1}nu = c^{-1}b^{-1}\sigma n\sigma bc = b^{-1}\sigma n\sigma b.$$

Já que c_0, determinado pela equação (3.5), é central em N^m, podemos escrever

$$\varphi_u(g) = c_0^{-1}b^{-1}\sigma g\sigma bc_0,\ \forall g \in G,$$

de modo que φ_u é um automorfismo interno de G.

Vamos agora verificar a trivialidade das duas primeiras componentes.

Definimos $h := bc_0$ e escrevemos $h = (h(1), h(2), \ldots, h(m)) \in N^m$, em que $h(i) = bc_0(i) = b(i)c_0(i) \in N$. Como $\overline{b}(1) = \overline{b}(2) = 1$, temos que $b(1),\ b(2) \in \zeta$. Ademais, c_0 é central, o que implica, em particular, $c_0(1)$ e $c_0(2)$ serem centrais em N. Logo, $h(1)$ e $h(2)$ são centrais em N.

Já que φ_u fixa os elementos do 2-subgrupo de Sylow $S = S_2 \rtimes S(1\ 2)$ de G, temos

$$u^{-1}(1\ 2)u = h^{-1}\sigma(1\ 2)\sigma h = h^{-1}(1\ 2)h = (1\ 2).$$

Desta forma, $h(1) = h(2)$ estão no centro de N.

Definiremos um elemento f de N^m da seguinte forma:

$$f(1) = 1,\ f(i) = h^{-1}(1)h(i) \text{ para } 2 \leq i \leq m,$$

logo, $f(2) = h^{-1}(1)h(2) = h^{-1}(1)h(1) = 1$.

Então $f = h_0^{-1}h$, em que $h_0 = (h(1), h(1), \ldots, h(1))$, ou seja, é um elemento da diagonal que é central em G. Desta forma, como $h = h_0 f$, temos, $\forall g \in G$,

$$\begin{aligned} \varphi_u(g) &= h^{-1}\sigma g\sigma h \\ &= f^{-1}h_0^{-1}\sigma g\sigma h_0 f \\ &= f^{-1}\sigma g\sigma f, \end{aligned}$$

com $f(1) = f(2) = 1$, provando o teorema nesse caso.

b) Resta-nos considerar o caso em que S_2 é não abeliano, em particular $S_2 \neq 1$. Seja N' o subgrupo comutador de N. O grupo quociente

$$\frac{G}{(N')^m} \simeq \left(\frac{N}{N'}\right) wrSym_m \simeq \frac{N^m}{(N')^m} \rtimes Sym_m$$

é um produto orlado. Como $\dfrac{N^m}{(N')^m}$ é abeliano, pelo Lema 1.27, para todo $n \in N^m$, temos

$$\begin{aligned} u^{-1}nu &= c^{-1}b^{-1}\sigma n\sigma bc \\ \overline{u}^{-1}\overline{n}\,\overline{u} &= \overline{c}^{-1}\overline{b}^{-1}\sigma\overline{n}\sigma\overline{b}\overline{c} \\ \overline{u}^{-1}\overline{n}\,\overline{u} &= \sigma\overline{n}\sigma, \end{aligned}$$

ou seja, $u^{-1}nu \equiv \sigma n\sigma \ mod\ \Delta(G,(N')^m)$.

Se $n \in S_2$, como φ_u fixa elementos deste grupo, obtemos

$$\sigma n\sigma \equiv n \ mod\ \Delta(G,(N')^m).$$

Isto significa que, de maneira análoga à prova do Teorema 3.5, no grupo quociente $\dfrac{G}{(N')^m}$, $\sigma n\sigma = n$. Já que o 2-subgrupo de Sylow de $\dfrac{N^m}{(N')^m}$ é extensivo, concluímos que $\sigma = 1$. Então, neste caso, temos:

$$u^{-1}\delta u = c_0^{-1}b^{-1}\delta bc_0,\ \forall\delta \in Sym_m$$

e

$$u^{-1}nu = c^{-1}b^{-1}nbc,\ \forall n \in N^m,$$

com $c_0 \in \zeta^m$ e $c \in \zeta_2^m$. No grupo quociente $\dfrac{G}{\zeta^m}$, temos $\sigma b\sigma b \equiv 1$. Já que $\sigma = 1$, temos que $b^2 \equiv 1$; o que significa que b^2 pertence a ζ^m. Adicionalmente, c^2 pertence a ζ^m. Então os fatores ímpares de b e c são centrais em N^m. E ainda, como φ_u fixa o 2-subgrupo de Sylow S_2, isto significa que

$$u^{-1}nu = n,\ \forall n \in N^m.$$

Escrevendo $h = bc_0$, temos, para todo $\delta \in Sym_m$,

$$u^{-1}\delta u = h^{-1}\delta h.$$

Vamos analisar a ação de u na transposição $(1\ i)$. Já que $S_2 \rtimes S(1\ i)$ é um 2-subgrupo de Sylow de G, sabemos pelo resultado de Coleman, Lema 2.6, que existem elementos $e_i \in N^m$ e $\tau_i \in Sym_m$ tais que, para todo $x \in S_2 \rtimes S(1\ i)$, temos

$$u^{-1}xu = e_i^{-1}\tau_i^{-1}x\tau_i e_i.$$

Para todo $x \in S_2$, no quociente $\dfrac{G}{(N')^m}$, e considerando que $\overline{\tau_i e_i}^{-1}\overline{\tau_i}^{-1} = \overline{y}$ e

$\overline{x},\ \overline{y} \in \dfrac{N^m}{(N')^m}$, que é abeliano, temos

$$
\begin{array}{rcl}
\overline{u}^{-1}\overline{x}\,\overline{u} & = & \overline{e_i}^{-1}\overline{\tau_i}^{-1}\overline{x}\,\overline{\tau_i}\,\overline{e_i} \\
& = & \overline{\tau_i}^{-1}\overline{y}\,\overline{x}\,\overline{\tau_i}\,\overline{e_i} \\
& = & \overline{\tau_i}^{-1}\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{\tau_i}\,\overline{e_i} \\
& = & \overline{\tau_i}^{-1}\overline{x}\,\overline{\tau_i}\,\overline{e_i}^{-1}\overline{e_i} \\
& = & \overline{\tau_i}^{-1}\overline{x}\,\overline{\tau_i}.
\end{array}
$$

Portanto,

$$\tau_i^{-1}x\tau_i \equiv x\ mod\frac{G}{(N')^m};$$

ou seja, $x^{\tau_i} = xn'$, com $n' \in (N')^m$.

Temos que $S_2 \leq N^m$ e $(N')^m \trianglelefteq N^m$, logo $S_2(N')^m \leq N^m$. Assim, $\overline{S_2} := \dfrac{S_2(N')^m}{(N')^m} \leq \dfrac{N^m}{(N')^m}$, em que $\overline{S_2}$ é a projeção de S_2. Já que $\overline{S_2}$ é extensivo no quociente, concluímos que $\tau_i = 1$. Além disso, uma vez que φ_u fixa elemento a elemento do subgrupo S_2, temos que e_i centraliza S_2. Assim, para todo $x \in S_2 \rtimes S(1\ i)$,

$$u^{-1}xu = e_i^{-1}xe_i,$$

com e_i no centralizador $C_{N^m}(S_2)$. Note que os fatores ímpares de e_i não são relevantes para a ação de e_i no grupo da base S_2 de $S = S_2 \rtimes S(1\ 2)$. De fato, consideremos $e_i = (e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) \in N^m$, em que $e_{i_j} \in P_{p_j}$, com $1 \leq j \leq r$, e, sem perda de generalidade, supomos $p_1 = 2$. Seja $s \in S_2 < N^m$, logo $s = (s_1, 1, \ldots, 1) \in S_2 \times (1) \times \ldots \times (1)$. Então,

$$s^{e_i} = (s_1^{e_{i_1}}, 1^{e_{i_2}}, \ldots, 1^{e_{i_r}}).$$

No grupo do topo de S, $S(1\ 2)$, temos

$$u^{-1}xu = e_i^{-1}xe_i = h^{-1}xh,$$

com $h = bc_0$, $c_0 \in \zeta^m$. Também vimos que os fatores ímpares de b são centrais, logo os fatores ímpares de h são centrais. Fazendo $e_i = e_2 \cdot e_1$, em que e_2 corresponde ao fator par de e_i e e_1 ao fator ímpar, e, analogamente, $h = h_2 \cdot h_1$, temos

$$
\begin{array}{rcl}
e_i^{-1}xe_i & = & h^{-1}xh \\
e_1^{-1}e_2^{-1}xe_2e_1 & = & h_1^{-1}h_2^{-1}xh_2h_1 \\
e_1^{-1}e_2^{-1}xe_2e_1x^{-1} & = & h_1^{-1}h_2^{-1}xh_2h_1x^{-1} \\
e_1^{-1}e_2^{-1}(xe_2x^{-1})(xe_1x^{-1}) & = & h_1^{-1}h_2^{-1}(xh_2x^{-1})(xh_1x^{-1}) \\
e_1^{-1}(xe_1x^{-1})e_2^{-1}(xe_2x^{-1}) & = & h_1^{-1}(xh_1x^{-1})h_2^{-1}(xh_2x^{-1})
\end{array}
$$

logo,

$$e_1^{-1}xe_1x^{-1} = h_1^{-1}xh_1x^{-1},$$

ou seja,

$$e_1^{-1}xe_1 = h_1^{-1}xh_1,$$

implicando que a ação de e_i é a mesma de h nos fatores ímpares.

Como e_i centraliza S_2, podemos então escolher e_i central em N^m. Já que φ_u fixa $S(1\ 2)$ elemento a elemento, temos

$$u^{-1}su = e_2^{-1}se_i = s,\ \forall s \in S(1\ 2).$$

Dessa forma, podemos tomar $e_2 = 1$. Além disso,

$$u^{-1}(1\ 2)u = h^{-1}(1\ 2)h = (1\ 2)$$

e, então, $h(1) = h(2)$. Logo, para $2 \leq i \leq m$, temos

$$h^{-1}(1\ i)h = e_i^{-1}(1\ i)e_i$$

e escrevendo

$$h = (h(1), h(2), \ldots, h(r))$$

e

$$e_i = (e_i(1), e_i(2), \ldots, e_i(r)),$$

em que $h(j), e_i(j) \in P_{p_j}$, subgrupo de Sylow de N^m, obtemos

$$\begin{array}{rcl} h^{-1}(1\ i)h(1\ i) & = & e_i^{-1}(1\ i)e_i(1\ i) \\ h^{-1}(h(i), h(2), \ldots, \underbrace{h(1)}_{i-\text{ésimo}}, \ldots, h(r)) & = & e_i^{-1}(e_i(i), e_i(2), \ldots, \underbrace{e_i(1)}_{i-\text{ésimo}}, \ldots, e_i(r)); \end{array}$$

isto significa que

$$h^{-1}(1) \cdot h(i) = e_i^{-1}(1) \cdot e_i(i).$$

Definimos um elemento $f \in N^m$ por $f = h_0^{-1}h$, em que $h_0 = (h(1), \ldots, h(1))$. Então, $f(1) = f(2) = 1$ e f é central em N^m. Além disso, para todo $\delta \in Sym_m$:

$$u^{-1}\delta u = h^{-1}\delta h = f^{-1}h_0^{-1}\delta h_0 f = f^{-1}\delta f,$$

já que h_0 é central no grupo.

Como $u^{-1}nu = n,\ \forall n \in N^m$, fazendo uso da centralidade de f em N^m, temos

$$u^{-1}nu = f^{-1}nf.$$

Portanto,

$$\varphi_u(g) = f^{-1}gf, \ \forall g \in G,$$

com f um elemento fixo de N^m. Como $f(1) = 1 = f(2)$ concluímos a demonstração. $\square$

Capítulo 4

Extensões de grupos nilpotentes finitos por alguns 2-grupos

Explorando as técnicas desenvolvidas por Petit Lobão e Sehgal em [PeS03], como já foi mencionado, Zhengxing Li e Jinke Hai, em suas investigações a respeito da validade da propriedade do normalizador, obtiveram muitos resultados positivos para essa questão, produzindo uma série de artigos sobre as extensões alcançadas dos resultados originais. Em vários dos seus artigos, os autores trabalharam com ações do tipo produto orlado, considerando em muitos destes o grupo na base como um nilpotente e variando o do topo, como por exemplo cíclico de ordem n e determinados grupos de ordem 2^n como um 2-grupo abeliano e um quatérnio generalizado ou um diedral. E é este último que corresponde ao outro resultado principal dessa dissertação, cuja motivação dos autores veio do resultado de Hertweck, o Teorema 2.9. O teorema principal desse artigo, ver [HL11c], é descrito abaixo.

Teorema 4.1. *Seja $G = N\,wr\,H = N^{2^n} \rtimes H$ o produto orlado de N por H, em que N é um grupo nilpotente finito, e H é um quatérnio generalizado ou um diedral de ordem 2^n. Então vale a propriedade do normalizador para G.*

4.1 Grupo da base abeliano

Assim como em [PeS03], Hai e Li provam (Nor) primeiramente para o caso especial, em que $G = A\,wr\,H = A^{2^n} \rtimes H$ com A um grupo abeliano finito. Para a demonstração, utilizam também o Teorema 2.2, o resultado de Jackowski e Marciniak. O teorema no caso especial é:

Teorema 4.2. *Seja $G = A\,wr\,H = A^{2^n} \rtimes H$, em que A é um grupo abeliano finito, e H é um quatérnio generalizado ou um diedral de ordem 2^n. Seja $S = S_1 \rtimes H$ o 2-subgrupo de Sylow fixo de G e $I_S = \left\{\varphi_u; u \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G), \varphi_{u|_S} = id, \varphi_u^2 = id\right\}$, em que S_1 é o 2-subgrupo de*

Sylow de A^{2^n}. Então $I_S \subseteq Inn(G)$. Ademais, seja $\mathcal{Z}(H) = \{1, z\}$ o centro de H. Então valem:

(1) se A é de ordem ímpar, então $I_S = \{id, conj(z)\}$;

(2) se A é de ordem par, então $I_S = \{id\}$.

Observação 4.3. *Para cada escolha de H temos que o centro deste é de ordem 2, ou seja, $|\mathcal{Z}(H)| = 2$.*

Demonstração. Seja $\varphi_u \in I_S$. Primeiro vamos verificar como é a ação de φ_u em H. Como por hipótese, $\varphi_{u|_S} = id$, temos então que

$$u^{-1}hu = h, \ \forall h \in H. \tag{4.1}$$

Ou seja, φ_u age como a identidade nos elementos de H. Lembrando que queremos mostrar que φ_u é um automorfismo interno de G.

Agora, iremos analisar como φ_u age em A^{2^n}. Pelo Lema 3.2, sabemos que existe $\lambda \in H$ tal que

$$u^{-1}au = \lambda^{-1}a\lambda, \ \forall a \in A^{2^n}. \tag{4.2}$$

Iremos considerar os casos que referem-se à ordem de A:

Caso 1: Suponha que A tem ordem ímpar.

Neste caso $S_1 = 1$, e, portanto, o 2-subgrupo de Sylow de G é um diedral ou um quatérnio generalizado. Desta forma, utilizamos o Teorema 2.9, alcançando a validade da propriedade do normalizador para G. Em particular, temos que $I_S \subseteq Inn(G)$, o que significa φ_u ser um automorfismo interno de G. Por isso, podemos considerar a existência de um $x \in G$ tal que $\varphi_u = conj(x)$. Logo, para todo $g \in G$, temos

$$u^{-1}gu = x^{-1}gx. \tag{4.3}$$

Combinando (4.1) com (4.3), obtemos $h^x = h$ para todo $h \in H$, isto é, $x \in C_G(H)$. Pelo Lema 1.51, podemos escrever $x = d\sigma$ com $d \in D$ e $\sigma \in \mathcal{Z}(H)$, em que D denota o subgrupo diagonal de A^{2^n}. Assim, por (4.3),

$$\begin{aligned} u^{-1}au &= x^{-1}ax \\ &= (d\sigma)^{-1}a(d\sigma) \\ &= \sigma^{-1}d^{-1}ad\sigma \\ &= \sigma^{-1}a\sigma, \ \text{para } a \in A^{2^n}. \end{aligned}$$

Por outro lado, por (4.2), $u^{-1}au = \lambda^{-1}a\lambda$, para $a \in A^{2^n}$. Consequentemente, $\sigma^{-1}a\sigma = \lambda^{-1}a\lambda$ para todo $a \in A^{2^n}$. Mas, A^{2^n} é extensivo em si mesmo, então $\lambda = \sigma \in \mathcal{Z}(H)$. Logo, para qualquer $g \in G$, o qual pode ser escrito como $g = ah$, com $a \in A^{2^n}$ e $h \in H$, por (4.1) e (4.2) temos

$$u^{-1}gu = u^{-1}ahu = (u^{-1}au)(u^{-1}hu) = \lambda^{-1}a\lambda h = (\lambda^{-1}a\lambda)(\lambda^{-1}h\lambda) = \lambda^{-1}g\lambda.$$

Isto é, $\varphi_u = conj(\lambda)$ e já que $\lambda \in \mathcal{Z}(H) = \{1, z\}$, segue que $\varphi_u \in \{id, conj(z)\}$. Como φ_u é considerado de maneira arbitrária, concluímos que $I_S \subseteq \{id, conj(z)\}$. Por outro lado, como S_1 é trivial, temos, por (4.1), que $\varphi_{u|_S} = \varphi_{u|_H} = id$, e ainda

$$\begin{aligned} conj(z)^2(g) &= conj(z)(conj(z)(g)) \\ &= conj(z)(z^{-1}gz) \\ &= z^{-2}gz^2 \\ &= g, \end{aligned}$$

ou seja, $I_S \supseteq \{id, conj(z)\}$. Por isso, $I_S = \{id, conj(z)\}$.

Caso 2: Suponha que A tem ordem par.

Neste caso, o 2-subgrupo de Sylow S_1 de A^{2^n} é não trivial. Como por hipótese $\varphi_{u|_S} = id$, temos em particular que $\varphi_{u|_{S_1}} = id$. Assim, $\forall s \in S_1$

$$u^{-1}su = s. \tag{4.4}$$

Por outro lado, por (4.2), para todo $s \in S_1$, temos

$$u^{-1}su = \lambda^{-1}s\lambda. \tag{4.5}$$

Dessa forma, $\lambda^{-1}s\lambda = s$, $\forall s \in S_1$. O fato de S_1 ser extensivo em A^{2^n} implica que $\lambda = 1$. Então, por (4.1) e (4.2), temos $\varphi_u = id$. Tendo em vista que φ_u é arbitrário, obtemos $I_S = \{id\}$ completando a prova. $\square$

4.2 Grupo da base nilpotente

Considerando o grupo base, N, nilpotente, temos $G = N\,wr\,H = N^{2^n} \rtimes H$; a propriedade do normalizador, para este caso, é provada a seguir.

Teorema 4.4. *Seja $G = N\,wr\,H = N^{2^n} \rtimes H$, em que N é um grupo nilpotente finito, e H é um quatérnio generalizado ou um diedral de ordem 2^n. Sejam $S = S_1 \rtimes H$ o 2-subgrupo de Sylow fixo de G e $I_S = \left\{\varphi_u; u \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G), \varphi_{u|_S} = id, \varphi_u^2 = id\right\}$, em que S_1 é o 2-subgrupo* *de Sylow de N^{2^n}. Então $I_S \subseteq Inn(G)$. Ademais, seja $\mathcal{Z}(H) = \{1, z\}$ o centro de H. Então valem:*

(1) se N é de ordem ímpar, então $I_S = \{id, conj(z)\}$;

(2) se N é de ordem par, então $I_S = \{id\}$.

Demonstração. Podemos assumir que N é não abeliano, devido ao Teorema 4.2. Consideremos $\varphi_u \in I_S$ e, como no caso especial anteriormente, vamos verficar primeiro a ação de φ_u em H. Por hipótese, $\varphi_u|_S = id$, implicando, em particular, que $\varphi_{u_{|H}} = id$. Assim, para todo $h \in H$

$$u^{-1}hu = h. \tag{4.6}$$

Novamente, temos que a ação de φ_u nos elementos de H é a mesma da identidade. Resta-nos analisar como φ_u age em N^{2^n}. Pelo Lema 3.2, existem $\tau \in H$ e $a \in N^{2^n}$ tais que

$$u^{-1}xu = a^{-1}\tau^{-1}x\tau a, \tag{4.7}$$

para todo $x \in N^{2^n}$.

Vamos considerar os casos referentes à ordem de N:

Caso 1: Suponha que N é de ordem ímpar.

Como no Caso 1 do Teorema 4.2, existe $y \in G$ tal que, para todo $g \in G$

$$u^{-1}gu = y^{-1}gy. \tag{4.8}$$

Por (4.6) e (4.8), temos $h^y = h$, $\forall h \in H$, isto é, $y \in C_G(H)$. Pelo Lema 1.51, podemos escrever $y = d\sigma = \sigma d$, com $d \in D$ e $\sigma \in \mathcal{Z}(H)$, em que D denota o subgrupo diagonal de N^{2^n}. Logo, por (4.8),

$$\begin{array}{rcl} \varphi_u^2(x) & = & \varphi_u(y^{-1}xy) \\ & = & (y^2)^{-1}x(y^2) \\ & = & (d^2\sigma^2)^{-1}x(d^2\sigma^2) \\ & = & (d^2)^{-1}x(d^2), \end{array}$$

para todo $x \in N^{2^n}$. Por outro lado, pela hipótese, temos que $\varphi_u^2 = id$, logo $\varphi_u^2(x) = x$, $\forall x \in N^{2^n}$. Assim, temos $d^2 \in \mathcal{Z}(N^{2^n})$. Segue que $d \in \mathcal{Z}(N^{2^n})$, pois N^{2^n} é de ordem ímpar. E ainda, como $y^{-1}hy = h$, $\forall h \in H$, temos

$$\begin{array}{rcl} d^{-1}\sigma^{-1}h\sigma d & = & h \\ d^{-1}hd & = & h, \end{array}$$

já que σ é central em H. Assim, $d \in C_G(H)$ e obtemos $d \in \mathcal{Z}(G)$. Então, por (4.8), temos

$$\varphi_u(g) = y^{-1}gy = (d\sigma)^{-1}g(d\sigma) = \sigma^{-1}g\sigma, \ \forall g \in G.$$

Dessa forma, $\varphi_u = conj(\sigma) \in \{id, conj(z)\}$. Como φ_u é arbitrário, obtemos $I_S \subseteq \{id, conj(z)\}$. Por outro lado, como N^{2^n} é de ordem ímpar, segue que $\{id, conj(z)\} \subseteq I_S$ e , assim, concluímos que $I_S = \{id, conj(z)\}$.

Caso 2: Suponha que N é de ordem par.

Seja N' o subgrupo derivado de N. Como N é um grupo nilpotente não abeliano, temos $1 \neq N' \neq N$. É fácil ver que

$$\frac{G}{(N')^{2^n}} \simeq \frac{N}{N'} wr H \simeq \frac{N^{2^n}}{(N')^{2^n}} \rtimes H.$$

Vamos usar a barra para convencionar os elementos e subgrupos do grupo quociente $\frac{G}{(N')^{2^n}}$, isto é, $\overline{g} := g(N')^{2^n}$, para $g \in G$ e $\overline{U} := \frac{U(N')^{2^n}}{(N')^{2^n}}$ para $U \leq G$; em particular, $\overline{G} = \frac{G}{(N')^{2^n}}$. Observe que $\frac{N}{N'}$ é um grupo abeliano de ordem par, por isso, devido ao item (2) do Teorema 4.2, obtemos

$$I_{\overline{S}} = \left\{\varphi_{\overline{v}|_{\overline{v}}} \in N_{\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)}(\overline{G}), \varphi_{\overline{v}|_{\overline{S}}} = id, \varphi_{\overline{v}}^2 = id\right\} = \{id\}.$$

Já que $N^{2^n} \trianglelefteq G$, pelo Lema 2.5, temos $\varphi_u(N^{2^n}) = N^{2^n}$. Desta forma, φ_u induz um automorfismo de $\overline{G}$, denotado por $\overline{\varphi}_u$. Como $\varphi_u \in I_S$, segue que $\overline{\varphi}_u \in I_{\overline{S}}$ e, assim, $\overline{\varphi}_u = id$. Isto é, para todo $\overline{g} \in \overline{G}$,

$$\overline{\varphi}_u(\overline{g}) = \overline{g}. \tag{4.9}$$

Seja $\overline{g} = \overline{x}$ com $x \in N^{2^n}$. Então, por (4.7) e (4.9), temos que $\overline{a}^{-1}\overline{\tau}^{-1}\overline{x\tau a} = \overline{x}$, isto é,

$$\overline{\tau}^{-1}\overline{x\tau} = \overline{axa}^{-1} = \overline{x}. \tag{4.10}$$

Como $\frac{N^{2^n}}{(N')^{2^n}}$ é extensivo em si mesmo, ver Proposição 1.49, segue por (4.10) que $\overline{\tau} = 1$ e, assim, $\tau = 1$. Agora, por (4.7), temos

$$u^{-1}xu = a^{-1}xa \tag{4.11}$$

para todo $x \in N^{2^n}$. E desta equação (4.11) segue que

$$\varphi_u^2(x) = \varphi_u(a^{-1}xa) = a^{-2}xa^2, \ \forall x \in N^{2^n}.$$

Por outro lado, $\varphi_u^2 = id$ por hipótese, por isso também temos $\varphi_u^2(x) = x$. Assim, $a^{-2}xa^2 = x$, para todo $x \in N^{2^n}$, isto é, $a^2 \in \mathcal{Z}(N^{2^n})$. Como anteriormente, escrevemos $N^{2^n} = P_{p_1} \times \ldots \times P_{p_r}$, em que P_{p_i} é o p_i-subgrupo de Sylow de N^{2^n} para $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Sem perda de generalidade, assumimos que $P_{p_1} = S_1$, o 2-subgrupo de Sylow de N^{2^n}, e P_{p_i} são os subgrupos de Sylow de N^{2^n} de ordem ímpar para $i \in \{2, 3, \ldots, r\}$. Além disso, escrevemos $a = a_1a_2 \ldots a_r$, com $a_i \in P_{p_i}$ para $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$.

Afirmação 1: $a_i^2 \in \mathcal{Z}(P_{p_i})$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$.

De fato, para qualquer $y_i \in P_{p_i}$, como a^2 pertence a $\mathcal{Z}(N^{2^n})$, segue que

$$a_1^2a_2^2 \ldots y_ia_i^2 \ldots a_r^2 = y_ia^2 = a^2y_i = a_1^2a_2^2 \ldots a_i^2y_i \ldots a_r^2,$$

o que implica $y_ia_i^2 = a_i^2y_i$. Como y_i é arbitrário, $a_i^2 \in \mathcal{Z}(P_{p_i})$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$.

Afirmação 2: $a_i \in \mathcal{Z}(P_{p_i})$ para cada $i \in \{2, 3, \ldots, r\}$.

De fato, como por hipótese P_{p_i} é um subgrupo de Sylow de N^{2^n} de ordem ímpar, para cada $i \in \{2, 3, \ldots, r\}$, resulta que a_i é de ordem ímpar para cada $i \in \{2, 3, \ldots, r\}$. Logo, $a_i^2 \in \mathcal{Z}(P_{p_i})$ implica $a_i \in \mathcal{Z}(P_{p_i})$ para cada $i \in \{2, 3, \ldots, r\}$.

Além disto, por hipótese, $\varphi_{u|_{S_1}} = id$, isto é, $\varphi_{u|_{P_{p_1}}} = id$. Por isso, por (4.11), para qualquer $x = x_1x_2 \ldots x_r \in N^{2^n}$ com $x_i \in P_{p_i}$, temos

$$\varphi_u(x) = \varphi_u(x_1)\varphi_u(x_2 \ldots x_r) = x_1(x_2 \ldots x_r)^a = x_1x_2 \ldots x_r = x. \tag{4.12}$$

Por (4.6) e (4.12), temos $\varphi_u = id$. Já que φ_u é arbitrário, segue que $I_S = \{id\}$. Isto completa a prova do teorema. $\square$

Capítulo 5

Investigações em curso e perspectivas futuras

Sabemos que são vastas as classes de grupos que atendem à propriedade do normalizador, assim como extensões desses grupos, como por exemplo o caso em que temos um produto direto. No entanto, em 2001 Hertweck apresentou um contraexemplo para (Nor) em que temos um produto semidireto entre dois grupos abelianos, os quais sabemos que são soluções para (Nor). Portanto, coloca-se naturalmente a questão apresentada no início da dissertação:

- Quais as extensões de grupos que apresentam (Nor) preservam esta propriedade?

Petit Lobão e Sehgal fizeram tal questionamento e a busca por quais extensões, determinadas sobre grupos que apresentam (Nor), preservam esta propriedade levaram estes a conjeturar que as extensões do tipo orlado podem representar boas candidatas para soluções de (Nor), ou seja,

- Conjectura: O produto orlado preserva a propriedde do normalizador, isto é, se A e B são soluções de (Nor), $G = A\,wr\,B$ é também solução.

Tendo em vista que a questão enunciada trata-se de um caso bem amplo, eles, em suas investigações, perceberam a necessidade da restrição dos grupos da base e do topo para a análise de (Nor). Dessa forma, depararam-se com o caso em que o produto é dado por grupos nilpotentes, isto é, $G = N_1\,wr\,N_2$. Lembrando que para verificar a validade dessa propriedade, uma das alternativas é mostrar que $Aut_{\mathcal{U}}(G)$ é constituído de automorfismos internos; ademais, como $Aut_{\mathcal{U}}(G) \subset Aut(G)$, podemos analisar o grupo dos automorfismos de G, afim de investigarmos sua estrutura.

No trabalho de C. H. Houghton, a saber [CH62], é determinada a estrutura do grupo dos automorfismos de um grupo dado por um produto orlado. É esta estrutura que apresentaremos a seguir.

Consideremos um grupo G dado pelo produto orlado entre A e B, isto é, $G = A\,wr\,B = A^n \rtimes B$, em que $|B| = n$. No trabalho de B. H. Neumann e Hanna Neumann, a saber [BH59], foi mostrado que $Aut(G)$ contém subgrupos isomorfos aos grupos de automorfismos de A e de B; além disto, um resultado de Peter M. Neumann, o qual encontra-se em [Ne64], afirma que o grupo da base é um subgrupo característico do produto orlado, exceto quando $B = C_2$, isto é, grupo cíclico de ordem 2 e A é um grupo diedral de ordem $4m+2$ ou $A = C_2$. Através desses resultados, pode-se descrever o modo como $Aut(G)$ é construído a partir de certos subgrupos distintos que estão relacionados com os grupos componentes do produto orlado. Além disso, o grupo dos automorfismos de G naturalmente depende da natureza dos grupos A e B.

Dado g um elemento arbitrário do grupo G, temos que existem $b \in B$ e $\boldsymbol{a} = (a_{b_1}, \ldots, a_{b_n}) \in A^n$ tais que $g = b\boldsymbol{a}$. Assim, definiremos a seguir alguns automorfismos do grupo G, construídos a partir de extensões de automorfismos de A e B.

(i) Para $\alpha \in Aut(A)$, definimos $\alpha^* \in Aut(G)$ por

$$\alpha^*(g) = \alpha^*(b\boldsymbol{a}) = b(\alpha(a_{b_1}), \ldots, \alpha(a_{b_n})),$$

para todo $g \in G$. O grupo de todos esses automorfismos é denotado por A^*.

(ii) Para $\beta \in Aut(B)$, definimos $\beta^* \in Aut(G)$ por

$$\beta^*(g) = \beta^*(b\boldsymbol{a}) = \beta(b)(a_{\beta^{-1}(b_1)}, \ldots, a_{\beta^{-1}(b_n)}),$$

para todo $g \in G$. O grupo de todos esses automorfismos é denotado por B^*.

Temos que A^* e B^* são isomorfos a $Aut(A)$ e a $Aut(B)$ respectivamente. Note que A^* e B^*, pela definição, permutam elemento a elemento em $Aut(G)$.

(iii) Denotaremos por H o subgrupo de $Aut(G)$ que consiste nos automorfismos que deixam fixados, elemento a elemento, o grupo B e o subgrupo diagonal de A; ou seja, as permutações em Sym_n.

(iv) Por fim, denotaremos por I o subgrupo de $Aut(G)$ que consiste naqueles automorfismos internos correspondentes a conjugação por elementos do grupo A^n; isto é, se $\psi \in I$ e considerando $\boldsymbol{a'} \in A^n$ então

$$\begin{aligned} \psi(g) &= \psi(b\boldsymbol{a}) \\ &= (\boldsymbol{a'})^{-1} b(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a'}) \\ &= bb^{-1}(\boldsymbol{a'})^{-1} b(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a'}) \\ &= b \cdot [b^{-1}(\boldsymbol{a'})^{-1} b \cdot (\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a'})], \end{aligned}$$

em que $b^{-1}(\boldsymbol{a'})b \cdot (\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a'}) \in A^n$.

O próximo teorema descreve a estrutura do grupo dos automorfismos de um grupo dado por um produto orlado, através dos automorfismos descritos anteriormente. Esse teorema pode ser encontrado em [CH62], assim como sua demonstração, a qual, devido o propósito dessa seção, será omitida. Lembrando que estamos excluindo o caso em que $B = C_2$ e A seja um grupo diedral de ordem $4m + 2$ ou $A = C_2$.

Teorema 5.1. *(a) O grupo dos automorfismos do produto orlado G de dois grupos A e B pode ser expressado como o produto*

$$Aut(G) = KIB^*,$$

em que K é o subgrupo de $Aut(G)$ que consiste nos automorfismos que fixam B elemento a elemento, I é o subgrupo de $Aut(G)$ que consiste nos automorfismos internos correspondentes à transformação de elementos do grupo A^n; B^* é definido em (ii) .

(b) O grupo K pode ser escrito como A^*H, em que A^* é definido em (i), H é o subgrupo de $Aut(G)$ que consiste nos automorfismos que fixam ambos B e o subgrupo diagonal elemento a elemento.

(c) Os subgrupos A^*HI, HIB^*, HI e I são normais em $Aut(G)$ e

$$Aut(G) = A^*HI \rtimes B^*.$$

Ademais, A^* intersecta HB^* trivialmente.

Destacamos que nossas investigações concentram-se em comprovarmos que o grupo dado pelo produto orlado de dois grupos nilpotentes satisfaça a propriedade do normalizador. Para isso, podemos utilizar a caracterização do grupo dos automorfismos de G, discutida anteriormente, no intuito de concluirmos que os automorfismos determinados por unidades no anel de grupo integral, ou seja, os automorfismos de $Aut_{\mathcal{U}}(G)$, sejam internos de G.

Conclusão

Neste trabalho foi discutido um pouco sobre a Propriedade do Normalizador, que é uma importante questão na teoria de anéis de grupo integrais; esta importância fica patente pela relação, já mencionada, com o Problema do Isomorfismo.

Após sua apresentação, fizemos uma investigação dessa propriedade, analisando alguns dos resultados interessantes desenvolvidos na teoria e já presentes na literatura. Expusemos a investigação daqueles grupos que são dados por produtos orlados permutacionais e provamos (Nor) para o caso do produto orlado de um grupo abeliano na base por um simétrico de m letras no topo, a partir deste, o resultado foi generalizado para o caso em que o grupo da base é um nilpotente. Posteriormente, foram demonstrados também como soluções de (Nor) os casos em que o produto orlado tem no topo um quatérnio generalizado ou um diedral de ordem 2^n e variando o grupo na base em abeliano e nilpotente.

Estes resultados foram apresentados no terceiro e quarto capítulos; o primeiro deles de autoria de Petit Lobão e Sehgal é um dos principais trabalhos da dissertação, no qual foram desenvolvidas técnicas interessantes para tratar das ações do tipo produto orlado. Essas técnicas foram adotadas por Zhengxing Li e Jinke Hai, o segundo trabalho que expusemos, permitindo-lhes o desenvolvimento de vários artigos sobre as extensões alcançadas dos resultados originais.

Acreditamos que não só os resultados enunciados, mas também muitos outros obtidos na investigação da propriedade e as técnicas mencionadas anteriormente, apontam para a possibilidade do grupo dado pelo produto orlado entre nilpotentes ser solução de (Nor). Indo mais além, nossa perspectiva futura, e possivelmente um objetivo de doutoramento, consiste na investigação sobre quais as extensões de grupo preservam a propriedade do normalizador; em particular, visamos a comprovar que as extensões do tipo orlado são um exemplo de solução neste sentido.

Referências

[C64] COLEMAN, D. B. On the modular group ring og a p-group, *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 15, n. 4, p. 511-514, 1964.

[GL10] GARCIA, A.; YVES L. *Elementos de Álgebra*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e aplicada, 2010.

[HL12] HAI, J.; Li, Z. The Normalizer Property for Integral Group Rings of Some Finite Nilpotent-by-Nilpotent Groups, *Communications in Algebra*, v. 40, n. 7, p. 2613-2627, 2012.

[HL11a] HAI, J.; LI, Z. The normalizer property for integral group rings of wreath products of finite nilpotent groups by cyclic groups, *Communications in Algebra*, v. 39, n. 2, p. 521-533, 2011.

[HL11b] HAI, J.; LI, Z.On Coleman automorphisms of wreath products of finite nilpotent groups by abelian groups, *Science China Mathematics*, v. 54, n. 10, p. 2253-2257, 2011.

[HL11c] HAI, J.; LI, Z. The normalizer property for integral group rings of wreath products of finite nilpotent groups by some 2-groups, *Journal of Group Theory*, v. 14, n. 2, p. 299-306, 2011.

[He01] HERTWECK, M. A counterexample to the isomorphism problem for integral group rings, *Annals of Mathematics*, v. 154, n. 1, p. 115-138, 2001.

[He02] HERTWECK, M. Class-preserving Coleman automorphisms of finite groups, *Monatshefte für Mathematik*, v.136, n. 1, p. 1-7, 2002.

[HeK02] HERTWECK, M.; KIMMERLE, W.Coleman automorphisms of finite groups, *Mathematische Zeitschrift*, v. 242, n. 2, p. 203-215, 2002.

[Hi40] HIGMAN, G. The Units of Group Rings, *Proceedings of the London Mathematical Society*, v. 46, n. 1, p. 231-248, 1940.

[CH62] HOUGHTON, C. H., On the automorphism groups of certain wreath products, *Publicationes Mathematicae Debrezen*, v. 9, p. 307-312, 1962.

[JM87] JACKOWSKI, S.; MARCINIAK, Z. Group automorphisms inducing the identity map on cohomology, *Journal of Pure and Applied Algebra*, v. 44, n. 1-3, p. 241-250, 1987.

[Hu96] HUMPHREYS, J. F., *A Course in Group Theory*, New York: Oxford Press, 1996.

[L02] LI, Y. The normalizer of a metabelian group in its integral group ring, *Journal of Algebra*, v. 256, n. 2, p. 343-351, 2002.

[LPS99] LI, Y.; PARMENTER, M. M.; SEHGAL, S. K. On the normalizer property for integral group rings. *Communications in Algebra*, v. 27, n. 9, p. 4217-4223, 1999.

[MR01] MARCINIAK, Z.S.; ROGGENKAMP, K.W. *The normalizer of a finite group in its integral group ring and Cech cohomology.* in: Algebra - Representation Theory, Constanta, 2000, NATO ASI. Dordrecht: Kluwer Academic, 2001, p. 159-188. (ser. II, v. 28)

[Ma95] MAZUR, M. On the isomorphism problem for integral group rings of infinite groups, *Expositiones Mathematicae*, v. 13, n. 5, p. 433-445, 1995.

[Ne64] NEUMANN, P. M. On the structure of standard wreath products of groups, *Mathematische Zeitschrift*, v. 84, n. 4, p. 343-373, 1964.

[BH59] NEUMANN, B. H.; NEUMANN, H. Embedding theorems for groups, *Journal London Math. Soc.*, v. 34, p. 465-479, 1959.

[Pa77] PASSMAN, D. S. *The Algebraic Structure of Group Rings*, New York: Wiley-Interscience, 1977.

[PeS03] PETIT LOBÃO, T.; SEHGAL, S. K. The Normalizer Property for Integral Group Rings of Complete Monomial Groups, *Communications in Algebra*, v. 31, n. 6, p. 2971-2983, 2003.

[Po72] POLCINO MILIES, C. *Anéis e Módulos*, São Paulo: Publicações de Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1972.

[PoS02] POLCINO MILIES, C.; SEHGAL, S. K. , *An Introduction to Group Rings*, Dordrecht Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002.

[Rob96] ROBINSON, D. J. S., *A Course in the Theory of Groups*, New York: Springer-Verlag, 1996.

[Rot95] ROTMAN, J. J., *An Introduction to the Theory of Groups*, New York: Springer-Verlag, 1995.

[Sc64] SCOTT, W. R., *Group Theory*, New York: Dover, 1964.

[Se93] SEHGAL, S. K., *Units in Integral Group Rings*, Longman, Harlow, 1993.