



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PGMAT  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



# DUALIDADE NO MODELO KMP E A LEI DE FOURIER

RENATA DE MOURA ISSA VIANNA

**Salvador - Bahia**

Março de 2015



# DUALIDADE NO MODELO KMP E A LEI DE FOURIER

RENATA DE MOURA ISSA VIANNA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Tertuliano Franco Santos Franco.

**Salvador - Bahia**

Março de 2015

Vianna, Renata de Moura Issa, 1985

Dualidade no Modelo KMP e a Lei de Fourier / Renata de Moura Issa Vianna. - 2015.

72 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Tertuliano Franco Santos Franco.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2015.

1. Modelos Matemáticos. 2. Osciladores Harmônicos. 3. Calor - Condução. 4. Lei de Fourier. I. Franco, Tertuliano Franco Santos. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDD : 510

CDU : 51

# DUALIDADE NO MODELO KMP E A LEI DE FOURIER

RENATA DE MOURA ISSA VIANNA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 20 de Março de 2015.

## **Banca examinadora:**

---

Prof. Dr. Tertuliano Franco Santos Franco (Orientador)  
UFBA

---

Prof. Dr. Freddy Rolando Hernandez Romero  
UFF

---

Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro  
UFBA

*Aos meus pais, meu  
amado marido e minha  
irmã.*

# Agradecimentos

Depois de dois anos, tenho muito a agradecer a todos que passaram pela minha vida. Os momentos de alegria serviram para me permitir acreditar em como a vida é bela, e os de sofrimento, serviram para um crescimento pessoal único.

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus, pelo dom da vida, por sua benignidade imerecida e por ter me dado a força necessária para a conclusão deste trabalho. Agradeço aos meus pais, Ivanete e Carlos, que me criaram com muito amor e, mesmo com muitas dificuldades, deram o seu máximo para que eu e minha irmã tivéssemos um futuro promissor. Obrigada pela educação e valores inestimáveis que vocês me ensinaram. Agradeço à minha irmã, Beck, pelo amor, cumplicidade e por compartilhar de momentos únicos. Obrigada pela sua companhia. Sei que você é uma pessoa que posso contar sempre.

Agradecimento mais que especial vai para o meu melhor amigo: meu marido Valnei. Obrigada por me ajudar a percorrer este caminho, sendo um companheiro cúmplice e leal, compartilhando momentos de alegria e de tristeza, mas mesmo nos de tristeza, você conseguia fazer com que eu sorrisse sempre. Você é essencial na minha vida. Tenha certeza que nada disso seria possível sem o seu apoio e compreensão. Vamos fazer sete anos de casados e quero passar muito mais anos ao seu lado. Muito obrigada por você existir e me fazer tão feliz. Eu te amo hoje e sempre!

À minha querida avó, Aidil, que infelizmente não está aqui para ver essa conquista, mas tenho certeza que ficaria muito feliz.

Sou também muito feliz por ter uma prima maravilhosa que sempre me apoiou e suportou os meus desabafos. Kátia, você é como uma irmã para mim. Muito obrigada pelas palavras de incentivo. Agradeço também a todos meus familiares. Vocês tornam minha vida mais florida.

Agradeço também ao meu grande amigo, Serginho. Você é o amigo que qualquer pessoa gostaria de ter. Não é à toa que somos primos de coração. Obrigada por sempre estar disposto a me ouvir e, claro, sempre vir aqui em casa jogar videogame comigo para me distrair.

Agradeço ao meu orientador, professor Tertuliano Franco, pela orientação, incentivo, paciência, recomendações e conhecimentos transmitidos durante todo

o desenvolvimento deste trabalho. Valeu, Tertu! Agradeço também à professora Rita de Cássia pelas orientações desde a graduação, por me receber em sua sala de portas abertas e sempre estar à disposição, respondendo minhas dúvidas e me incentivando a acreditar que tudo daria certo.

Gostaria também de agradecer aos professores da UFBA, todos aqueles os quais eu tive a honra de poder adquirir um pouco do seu conhecimento durante as disciplinas, os seminários e palestras que assisti.

Gostaria de agradecer a todos os meus amigos pelo incentivo e a compreensão da minha ausência em alguns momentos. Vocês moram no meu coração. E não poderia faltar os meus amigos da sala 18, que direta ou indiretamente me ajudaram nesta conquista, seja no estudo em grupo ou até mesmo com uma palavra de motivação e carinho. Vocês fizeram com que a minha estadia na UFBA nesses dois anos fosse mais prazerosa.

Finalmente, gostaria de agradecer à UFBA, pelo ensino gratuito de qualidade, e à CAPES, pelo apoio financeiro.

Agradeço também a todos que eu não citei aqui, mas que de alguma forma contribuíram, não apenas para a realização desta etapa, mas também para eu ser quem eu sou.



*“O sucesso nasce do querer, da determinação e persistência em se chegar a um objetivo. Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos, no mínimo fará coisas admiráveis.”*

José de Alencar



# Resumo

O intuito desta dissertação é estudar o modelo KMP. Este é um clássico modelo de interação constituído por uma cadeia de osciladores harmônicos unidimensionais desacoplados que trocam energia por meio de um processo estocástico. Cada elo tem um relógio de Poisson. Sempre que o relógio toca, dois osciladores vizinhos redistribuem energia de maneira uniforme. Além disso, o sistema está em contato com reservatórios nas extremidades, a diferentes temperaturas. Neste trabalho, apresentamos o estudo deste modelo e mostramos a validade da Lei de Fourier.

**Palavras-chave: modelo KMP; osciladores harmônicos; Lei de Fourier.**

# Abstract

The purpose of this dissertation is to study the KMP model. This is a classical interacting model consisting of a chain of one-dimensional uncoupled harmonic oscillators which interchange energy through a stochastic process. Each bond has a Poisson's clock. Each time the bond rings, the two neighbors oscillators redistribute energy in a uniform way. Furthermore, the system is in contact with reservoirs at the boundaries, at different temperatures. We present the study of this model and show the validity of Fourier's Law.

**Keywords: KMP model; harmonic oscillators; Fourier's Law.**

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Ferramentas Básicas</b>	<b>4</b>
1.1 Preliminares . . . . .	4
1.2 Teorema de De Finetti . . . . .	18
1.3 Processos de Markov . . . . .	24
1.3.1 Semigrupos e Geradores . . . . .	31
1.3.2 Processo de Poisson . . . . .	37
1.3.3 Dualidade . . . . .	38
<b>2 Modelo e Resultados</b>	<b>40</b>
2.1 Sistema Unidimensional de Osciladores . . . . .	40
2.2 Resultados . . . . .	46
<b>3 Dualidade e Processo Associado de Passeios Aleatórios Absorvidos</b>	<b>47</b>
<b>4 Estimativas de Absorção via Teorema de De Finetti</b>	<b>58</b>
<b>5 Demonstração da Lei de Fourier</b>	<b>67</b>
<b>Conclusão</b>	<b>69</b>
<b>Referências</b>	<b>70</b>

# Introdução

Um oscilador harmônico, em Física, é qualquer sistema que apresenta movimento harmônico de oscilação. É dito oscilador pelo fato de alguma entidade física oscilar, isto é, mover-se de algum modo, num movimento de vai-vem, em torno de uma posição central. O oscilador pode ser:

- (i) Oscilador harmônico simples (que não é forçado nem amortecido);
- (ii) Oscilador harmônico complexo (que é forçado e/ou amortecido).

Apesar de os osciladores harmônicos simples sejam uma idealização físico-matemática, seu estudo justifica-se pelo fato prático imensamente importante de ser possível, e até conveniente, em muitos casos de análises reais de osciladores harmônicos complexos, a redução ao tratamento como se fossem daquele tipo ideal. Isso representa enormes ganhos em vários aspectos.

Exemplos de osciladores harmônicos são pêndulos, massas ligadas a molas, vibrações acústicas, além de vários outros.

O fluxo de calor é a quantidade de energia que flui através de uma unidade de área por unidade de tempo. A Lei de Fourier é a lei que rege a condução térmica, estabelecendo que o fluxo de calor através de um material é proporcional ao gradiente de temperatura. Assim, dado um fluxo de calor  $Q$ , obtemos

$$Q = -k\Delta T,$$

onde  $k$  é a condutividade térmica do material.

Este trabalho tratará do modelo KMP, um clássico modelo de interação formado por uma cadeia de osciladores harmônicos unidimensionais mecanicamente desacoplados que trocam energia por meio de um processo estocástico. Ele é baseado no artigo [1] e a sigla KMP provém do nome dos seus autores.

No Capítulo 1, introduziremos os conceitos básicos de probabilidade e resultados que são fundamentais para o entendimento deste trabalho.

No Capítulo 2, apresentaremos o modelo KMP, constituído por uma cadeia de osciladores harmônicos que interage através de um processo estocástico, redis-

tribuindo a energia entre sítios vizinhos de maneira uniforme. Neste mesmo capítulo, enunciaremos os resultados que serão demonstrados nesta dissertação.

No Capítulo 3, descrevemos um processo associado de passeios aleatórios de partículas e mostraremos a relação de dualidade entre este processo e o processo das energias definido no Capítulo 2.

No Capítulo 4, definiremos o processo  $x$ , onde colocamos rótulos nas partículas. Além disso, faremos as estimativas de absorção através do Teorema de De Finetti, a fim de demonstrarmos que o modelo KMP obedece a Lei de Fourier.

No Capítulo 5, faremos a demonstração dos resultados enunciados no Capítulo 2, mostrando assim a validade da Lei de Fourier.

# Capítulo 1

## Ferramentas Básicas

Neste capítulo, iniciaremos uma apresentação dos conceitos fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

### 1.1 Preliminares

Considere um experimento, isto é, qualquer processo de observação.

**Definição 1.1.1.** *Um experimento é dito aleatório quando o seu resultado não pode ser previsto, ou seja, se repetirmos o experimento sob as mesmas condições, os resultados poderão ser diferentes.*

**Definição 1.1.2.** *Um espaço amostral é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Denotaremos esse conjunto por  $\Omega$ .*

**Definição 1.1.3.** *Um evento é um subconjunto do espaço amostral  $\Omega$ .*

**Observação 1.1.4.**  $\mathcal{P}(\Omega) := \{A \subset \Omega\}$  é chamado conjunto das partes de  $\Omega$ .

**Definição 1.1.5.** *Seja  $\Omega \neq \emptyset$ . Uma  $\sigma$ -álgebra, que denotaremos por  $\mathcal{F}$ , é uma coleção de subconjuntos de  $\Omega$  que satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{F}$ ;
- (ii) Se  $A \in \mathcal{F}$ , então  $A^C \in \mathcal{F}$ ;
- (iii) Se  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ , então  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$ .

**Observação 1.1.6.** *Um conjunto  $A \in \mathcal{F}$  é dito  $\mathcal{F}$ -mensurável.*

**Observação 1.1.7.** *Para uma classe de conjuntos arbitrários  $C \subset \mathcal{P}(\Omega)$ , denotaremos por  $\sigma(C)$  a menor  $\sigma$ -álgebra contendo  $C$ , definida como a interseção entre todas as  $\sigma$ -álgebras contendo  $C$ , também chamada de  $\sigma$ -álgebra gerada por  $C$ . A  $\sigma$ -álgebra gerada pelos subconjuntos abertos de  $\mathbb{R}^d$  é chamada de  $\sigma$ -álgebra de Borel. Denotaremos esta  $\sigma$ -álgebra por  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .*



**Definição 1.1.8.** *Seja  $\mathcal{F}$  uma  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$ . Uma função  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma medida sobre  $\mathcal{F}$  se satisfaz os seguintes axiomas:*

(i)  $\mu(A) \geq \mu(\emptyset) = 0$ , para todo  $A \in \mathcal{F}$ ;

(ii) Se  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ , com  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ , então  $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$ .

Se  $\mu(\Omega) = 1$ , dizemos que  $\mu$  é uma medida de probabilidade. Geralmente, denotamos uma medida de probabilidade por  $\mathbb{P}$ .

**Definição 1.1.9.** *Um espaço de probabilidade é uma tripla  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , onde  $\Omega$  é um espaço amostral,  $\mathcal{F}$  é uma  $\sigma$ -álgebra de eventos de  $\Omega$  e  $\mathbb{P}$  uma medida de probabilidade sobre  $\mathcal{F}$ .*

**Observação 1.1.10.** *Um  $(\Omega, \mathcal{F})$  é chamado espaço mensurável, ou seja, é um espaço onde podemos colocar uma medida. Um espaço com uma medida  $\mu$  qualquer é chamado de espaço de medida.*

**Definição 1.1.11.** *Uma medida  $\mu$  é dita  $\sigma$ -finita se existe uma sequência de conjuntos  $A_n \in \mathcal{F}$  tal que  $\mu(A_n) < \infty$  e  $\bigcup_n A_n = \Omega$ .*

**Definição 1.1.12.** *Sejam  $(\Omega, \mathcal{F})$  em  $(M, \mathcal{G})$  espaços mensuráveis. Uma função  $X : \Omega \rightarrow M$  é dita mensurável se*

$$X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}, \text{ para todo } B \in \mathcal{G}.$$

**Definição 1.1.13.** *Sejam  $(\Omega, \mathcal{F})$  em  $(M, \mathcal{G})$  espaços mensuráveis. Se  $M = \mathbb{R}$ , então uma função mensurável  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada variável aleatória. Se  $M$  é um espaço topológico, então  $X$  é chamada elemento aleatório. Se  $M = \mathbb{R}^d$ , então  $X$  é chamada vetor aleatório ou variável aleatória  $d$ -dimensional.*

**Exemplo 1.1.14.** *A função indicadora de um conjunto  $A \in \mathcal{F}$  é uma variável aleatória dada por*

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in A \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

**Definição 1.1.15.** *A variável aleatória  $X$  é dita discreta se toma um número finito ou enumerável de valores com probabilidade 1 e é dita contínua caso contrário.*

**Observação 1.1.16.** (i) *Uma propriedade que é verdade, exceto para um evento de probabilidade zero, diremos ser satisfeita quase certamente (q.c.);*

(ii) *Denotaremos  $\mathbb{P}(X^{-1}(B))$  por  $\mathbb{P}(X \in B)$ .*

Nesta seção, vamos trabalhar em um espaço de probabilidade fixo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Vejamos algumas propriedades da medida de probabilidade.

**Proposição 1.1.17.** *Seja  $\mathbb{P}$  uma medida de probabilidade sobre uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$ .*

**(i)** *Se  $A^c$  for o evento complementar de  $A \in \mathcal{F}$ , então  $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$ ;*

**(ii)** *Se  $E, F \in \mathcal{F}, E \subset F$ , então  $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$ . Além disso,  $\mathbb{P}(F \setminus E) = \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E)$ ;*

**(iii)** *Se  $(E_n)$  é uma sequência crescente em  $\mathcal{F}$ , então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right); \quad (1.1)$$

**(iv)** *Se  $(F_n)$  é uma sequência decrescente em  $\mathcal{F}$ , então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(F_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right). \quad (1.2)$$

*Demonstração.* **(i)** Sendo  $\Omega$  o espaço amostral, temos que

$$\Omega = A \cup A^c$$

onde esta união é disjunta, uma vez que  $A \cap A^c = \emptyset$ . Utilizando o axioma **(ii)** da Definição 1.1.8, segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Omega) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) \\ \mathbb{P}(A^c) &= \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(A) \\ &= 1 - \mathbb{P}(A). \end{aligned}$$

**(ii)** Como  $F = E \cup (F \setminus E)$  e  $E \cap (F \setminus E) = \emptyset$ , temos

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F \setminus E).$$

Já que  $\mathbb{P}(F \setminus E) \geq 0$ , concluímos que  $\mathbb{P}(F) \geq \mathbb{P}(E)$ . Além disso, acrescentando  $-\mathbb{P}(E)$  a ambos os lados da equação, obtemos

$$\mathbb{P}(F \setminus E) = \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E).$$

**(iii)** Sejam  $A_1 = E_1$  e  $A_n = E_n - E_{n-1}$ , para  $n > 1$ . Logo,  $(A_n)$  é uma sequência disjunta de conjuntos em  $\mathcal{F}$  tais que

$$E_n = \bigcup_{j=1}^n A_j \quad \text{e} \quad E_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j.$$

Pelo axioma **(ii)** da Definição 1.1.8, temos que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \mathbb{P}(A_n)$$

Por **(i)**, temos que  $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(E_n) - \mathbb{P}(E_{n-1})$ , para  $n > 1$ . Então, a série finita do lado direito da equação acima é telescópica e  $\sum_{n=1}^m \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(E_m)$ . Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$

**(iv)** Sejam  $E_n = F_1 - F_n$ , com  $(E_n)$  sequência crescente de conjuntos em  $\mathcal{F}$ . Aplicando **(ii)** e **(iii)**, temos que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{P}(F_1) - \mathbb{P}(F_n)) = \mathbb{P}(F_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(F_n).$$

Como  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = F_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ , segue que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mathbb{P}(F_1) - \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right).$$

Combinando estas duas equações, obtemos a igualdade (1.2). □

**Definição 1.1.18.** Definimos a integral de uma variável aleatória simples  $S(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$ , com respeito a  $\mathbb{P}$ , por

$$\int_{\Omega} S d\mathbb{P} := \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{P}(A_i).$$

Se  $X$  é uma variável aleatória positiva, definimos a integral de  $X$  com respeito a  $\mathbb{P}$  por

$$\int_{\Omega} X d\mathbb{P} := \sup_{S \leq X} \int_{\Omega} S d\mathbb{P}.$$

Dizemos que uma variável aleatória  $X$  é integrável em relação a  $\mathbb{P}$  se

$$\int_{\Omega} |X| d\mathbb{P} < \infty.$$

Sejam  $X^+ = \max(0, X)$  e  $X^- = \max(0, -X)$ . Definimos a integral de  $X$  com respeito

a  $\mathbb{P}$  como

$$\int_{\Omega} X d\mathbb{P} := \int_{\Omega} X^+ d\mathbb{P} - \int_{\Omega} X^- d\mathbb{P},$$

onde  $\int_{\Omega} X^+ d\mathbb{P}$  e  $\int_{\Omega} X^- d\mathbb{P}$  são finitas.

**Observação 1.1.19. (i)** Quando a integral estiver definida sobre todo o espaço  $\Omega$ , omitiremos a indicação deste na integral, a menos que não esteja claro qual é o espaço;

**(ii)** A integral de uma variável aleatória  $X$  sobre o conjunto  $A$  é dada por

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int X \mathbf{1}_A d\mathbb{P}.$$

**Definição 1.1.20. (i)** Seja  $X$  uma variável aleatória  $d$ -dimensional. A função de distribuição de  $X$  é a função  $F_X : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$  definida por  $F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$ , onde  $x = (x_1, \dots, x_d)$ .

**(ii)** Se  $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  são variáveis aleatórias  $d$ -dimensionais, definimos a distribuição conjunta de  $X_1, \dots, X_n$  por  $F_{X_1, \dots, X_n} : (\mathbb{R}^d)^n \rightarrow [0, 1]$  dada por

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) := \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n), \text{ com } x_i \in \mathbb{R}^d, i = 1, \dots, n.$$

**Definição 1.1.21.** Se  $X$  é uma variável aleatória discreta, a função  $p : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  definida por  $p(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i), i = 1, \dots, d$ , com  $p(x_i) \geq 0$  e  $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$  é chamada função de probabilidade de  $X$ . Para uma variável aleatória  $d$ -dimensional discreta  $X$ , sua função de probabilidade conjunta é  $p : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$  definida por  $p(x_1, \dots, x_d) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_d = x_d)$ .

**Definição 1.1.22.** Dizemos que  $X$  é uma variável aleatória absolutamente contínua se existe uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ , denominada função densidade de probabilidade, tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Para uma variável aleatória  $d$ -dimensional absolutamente contínua  $X$ , sua função de densidade será  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$  tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_d} f(t_1, \dots, t_d) dt_1 \dots dt_d.$$

**Definição 1.1.23.** A esperança de  $X$  com respeito a  $\mathbb{P}$  é definida por

$$\mathbb{E}(X) := \int X d\mathbb{P}$$

A esperança representa o valor médio esperado de uma experiência se ela for repetida muitas vezes.

Veamos algumas propriedades da esperança de variáveis aleatórias integráveis.

**Proposição 1.1.24.** *Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias integráveis e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .*

(i) *Se  $X \leq Y$ , então  $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$ ;*

(ii)  $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ ;

(iii)  $\mathbb{E}(\alpha X) = \alpha \mathbb{E}(X)$ ;

(iv)  $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$ .

*Demonstração.* Ver referência [8]. □

**Definição 1.1.25.** *A variância de  $X$  é definida por*

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

A variância é uma medida de dispersão estatística, em geral indicando o quão longe os valores se encontram da esperança.

Veamos algumas distribuições que iremos utilizar no texto.

(i) Uma variável aleatória contínua  $X$  tem distribuição uniforme no intervalo  $[a, b]$  se sua função densidade de probabilidade for dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Neste caso, a esperança é  $\frac{a+b}{2}$  e a variância é  $\frac{(b-a)^2}{12}$ . Denotamos  $X \sim U[a, b]$ ;

(ii) A variável aleatória contínua  $X$  tem distribuição exponencial com parâmetro  $\lambda$ ,  $\lambda > 0$ , se tiver função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

Neste caso, a esperança é  $\frac{1}{\lambda}$  e a variância é  $\frac{1}{\lambda^2}$ . Denotamos  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ;

(iii) Uma variável aleatória discreta  $X$  segue a distribuição Poisson com parâmetro  $\lambda$ ,  $\lambda > 0$ , se sua função de probabilidade for dada por

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}.$$

Neste caso, a esperança e a variância são iguais a  $\lambda$ . Denotamos  $X \sim \text{Po}(\lambda)$  ou  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ .

**Definição 1.1.26.** Denotaremos por  $L^p$  o espaço das variáveis aleatórias  $X$  tal que  $\mathbb{E}|X|^p < +\infty, 1 < p < \infty$ . Neste caso, dizemos que  $X$  tem momento de ordem  $p$ -finito. Sua norma é dada por

$$\|X\|_p = (\mathbb{E}(|X|^p))^{\frac{1}{p}}.$$

Vejamos os principais teoremas de convergência a respeito da integral de Lebesgue.

**Teorema 1.1.27** (Teorema da Convergência Monótona). Se  $X_n \nearrow X$ , com  $X_1 \geq 0$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X).$$

*Demonstração.* Como  $X_n \leq X_{n+1} \leq X$ , pela Proposição 1.1.17, item (ii), temos que  $\mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X_{n+1}) \leq \mathbb{E}(X)$ , para todo  $n$ . Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X).$$

Agora, basta mostrarmos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) \geq \mathbb{E}(X)$ .

Sejam  $0 < \alpha < 1$  e  $S$  uma função simples,  $0 < S < X$ . Defina

$$A_n = \{x \in \Omega : \alpha S \leq X_n\},$$

onde  $A_n \in \mathcal{F}$ ,  $A_n \subset A_{n+1}$  e  $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Assim, pela Proposição 1.1.24, item (i),

$$\mathbb{E}(\alpha S \mathbf{1}_{A_n}) \leq \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{A_n}) \leq \mathbb{E}(X_n). \quad (1.3)$$

Já que a sequência  $(A_n)$  é monótona crescente e tem união  $\Omega$ , segue da Proposição 1.1.17, item (iii), que

$$\mathbb{E}(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(S \mathbf{1}_{A_n}).$$

Tomando o limite na desigualdade (1.3), obtemos

$$\alpha \mathbb{E}(S) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n).$$

Como  $S$  é uma função simples qualquer positiva satisfazendo  $0 \leq S \leq X$ , concluímos que

$$\mathbb{E}(X) = \sup_S \mathbb{E}(S) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n).$$

□

Para seqüências que não são monótonas, temos o Lema de Fatou.

**Lema 1.1.28** (Lema de Fatou). *Se  $X_n \geq 0$ , então*

$$\mathbb{E}(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n).$$

*Demonstração.* Defina  $Y_m := \inf_{n \geq m} X_n$ . Observe que  $Y_m \leq Y_{m+1}$ , com

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Y_m(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n(x) = X(x).$$

Assim,  $Y_m$  forma uma seqüência não-decrescente de variáveis aleatórias não-negativas e, portanto, pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y_m) = \mathbb{E}(X).$$

Da definição de  $Y_m$ , temos ainda que  $Y_m \leq X_n$ , para todo  $m \leq n$ . Logo, pela Proposição 1.1.17, item (ii),  $\mathbb{E}(Y_m) \leq \mathbb{E}(X_n)$ , para todo  $m \leq n$ . Tomando o ínfimo em  $n$ , vale que

$$\mathbb{E}(Y_m) \leq \inf_{n \geq m} \mathbb{E}(X_n),$$

para todo  $m$ . Passando o limite em  $m$ , segue que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y_m) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n).$$

Como  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y_m) = \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n)$ , temos que

$$\mathbb{E}(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n).$$

□

**Teorema 1.1.29** (Teorema da Convergência Dominada). *Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$  q.c.,  $|X_n| \leq Y$ , para todo  $n$ , e  $\mathbb{E}(Y) < \infty$ , então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X).$$

*Demonstração.* Redefinindo as variáveis aleatórias  $X_n, X$  em um conjunto de medida de probabilidade nula, podemos assumir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(x) = X(x)$ , para todo  $x \in \Omega$ . Como  $Y + X_n \geq 0$ , pelo Lema de Fatou e a Proposição 1.1.24, item (ii), temos

que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y + X) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y + X_n) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X_n)) = \mathbb{E}(Y) + \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n).\end{aligned}$$

Então,  $\mathbb{E}(X) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n)$ . Por outro lado,  $Y - X_n \geq 0$ , aplicando novamente o Lema de Fatou e a Proposição 1.1.24, item (ii), segue que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y - X) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y - X_n) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X_n)) = \mathbb{E}(Y) - \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n),\end{aligned}$$

implicando que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X)$ . □

**Proposição 1.1.30** (Desigualdade de Jensen). *Suponha que  $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa, ou seja,*

$$\lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y) \geq \varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y),$$

para toda  $\lambda \in (0, 1)$  e  $x, y \in \mathbb{R}$ . Então, para  $\mathbb{E}|X| < \infty$  e  $\mathbb{E}|\varphi(X)| < \infty$ , temos que

$$\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)). \quad (1.4)$$

*Demonstração.* Sejam  $c = \mathbb{E}(X)$  e  $l(x) = ax + b$  uma função linear com  $l(c) = \varphi(c)$  e  $\varphi(x) \geq l(x)$ , ou seja, o gráfico de  $l$  é uma reta tangente de  $\varphi$  em  $c$ . Esta função existe pois a convexidade de  $\varphi$  implica que

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{\varphi(c) - \varphi(c - h)}{h} \leq \lim_{h \searrow 0} \frac{\varphi(c + h) - \varphi(c)}{h}.$$

Além disso, o limite existe, já que as sequências são monótonas. Sejam  $a$  um número qualquer entre os dois limites e  $l(x) = a(x - c) + \varphi(c)$ . Logo,  $l$  tem as propriedades que queremos, estabelecendo assim sua existência. Então, como  $\varphi(x) \geq l(x)$  e  $l(c) = \varphi(c)$ , temos que

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) \geq \mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b = l(\mathbb{E}(X)) = \varphi(\mathbb{E}(X)).$$

□

**Definição 1.1.31.** *Sejam  $X$  e  $(X_n)_{n \geq 1}$  variáveis aleatórias.*

(i) *Dizemos que  $X_n$  converge a  $X$  em probabilidade se para todo  $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$



(ii) Dizemos que  $X_n$  converge a  $X$  quase certamente (q.c.) se

$$\mathbb{P}(\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1.$$

(iii) Suponha que  $X$  e  $(X_n)_{n \geq 1}$  estão em  $L^p$ . Dizemos que  $X_n$  converge a  $X$  em  $L^p$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |X_n - X|^p d\mathbb{P} = 0.$$

**Definição 1.1.32.** Sejam  $(\Omega_1, \mathcal{F}, \mathbb{P}_1)$  e  $(\Omega_2, \mathcal{G}, \mathbb{P}_2)$  espaços de medida  $\sigma$ -finitos. Considere  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(x, y) : x \in \Omega_1, y \in \Omega_2\}$  e  $\mathcal{S} = \{A \times B : A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}\}$ . Os conjuntos em  $\mathcal{S}$  são chamados retângulos. Denotaremos por  $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$  a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathcal{S}$ .

**Teorema 1.1.33.** Se  $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i), i = 1, \dots, n$ , são espaços de medida  $\sigma$ -finitos e  $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ , então existe uma única medida de probabilidade  $\mathbb{P}$  em  $\mathcal{F}$  gerada pelos conjuntos da forma  $A_1 \times \dots \times A_n, A_i \in \mathcal{F}_i$ , com

$$\mathbb{P}(A_1 \times \dots \times A_n) = \prod_{m=1}^n \mathbb{P}_m(A_m).$$

*Demonstração.* Ver referência [5]. □

**Teorema 1.1.34** (Mudança de Variáveis). *Suponha que*

(i)  $E \subset A \subset \mathbb{R}^d$ , onde  $V$  é aberto e  $T : V \rightarrow \mathbb{R}^d$  é contínuo;

(ii)  $E$  é Lebesgue-mensurável,  $T$  é 1 : 1 em  $E$  e  $T$  é diferenciável em cada ponto de  $E$ ;

(iii)  $\mathbb{P}(T(V - E)) = 0$ .

Então,

$$\int_{T(E)} X d\mathbb{P} = \int_E (X \circ T) |\det(J_T)| d\mathbb{P},$$

para toda variável aleatória  $X : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$ .

*Demonstração.* Ver referência [10]. □

Veamos agora um resultado que permite relacionar a integral em  $\mathbb{R}^d, d > 1$ , com a integral em  $\mathbb{R}$ , onde a integral pode ser calculada por integrações sucessivas numa variável estando as restantes fixas. Como consequência, ele permite a inversão da ordem de integração em integrais múltiplas.

**Teorema 1.1.35** (Teorema de Fubini). *Sejam  $(\Omega_1, \mathcal{F}, \mathbb{P}_1)$  e  $(\Omega_2, \mathcal{G}, \mathbb{P}_2)$  espaços de medida  $\sigma$ -finitos. Sejam  $X$  uma variável aleatória  $(\mathcal{F} \times \mathcal{G})$ -mensurável,  $\omega_1 \in \Omega_1$  e  $\omega_2 \in \Omega_2$ . Se  $X$  for positiva, então*

$$\int_{\Omega_1} X(\omega_1) d\mathbb{P}_1 \quad e \quad \int_{\Omega_2} X(\omega_2) d\mathbb{P}_2$$

*são  $\mathcal{G}$ -mensurável e  $\mathcal{F}$ -mensurável, respectivamente, e*

$$\int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} X(\omega_2) d\mathbb{P}_2 \right) d\mathbb{P}_1 = \int_{\Omega_2} \left( \int_{\Omega_1} X(\omega_1) d\mathbb{P}_1 \right) d\mathbb{P}_2 = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} X d(\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2). \quad (1.5)$$

*Se*

$$\int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} |X(\omega_2)| d\mathbb{P}_2 \right) d\mathbb{P}_1 < \infty,$$

*então  $X \in L^1(\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2)$ . Se  $X \in L^1(\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2)$ , então  $X(\omega_2) \in L^1(\mathbb{P}_2)$   $\mathbb{P}_1$ -quase certamente,  $X(\omega_1) \in L^1(\mathbb{P}_1)$   $\mathbb{P}_2$ -quase certamente,*

$$\int_{\Omega_1} X(\omega_1) d\mathbb{P}_1 \quad e \quad \int_{\Omega_2} X(\omega_2) d\mathbb{P}_2$$

*estão em  $L^1(\mathbb{P}_2)$  e  $L^1(\mathbb{P}_1)$ , respectivamente, e a igualdade (1.5) vale.*

*Demonstração.* Ver referência [10]. □

**Definição 1.1.36.** (i) *Dois eventos  $A$  e  $B$  são independentes se*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B);$$

(ii) *As variáveis aleatórias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são independentes se*

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in A_i),$$

*para todo  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ;*

(iii) *Duas  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  são independentes se todo par de conjuntos  $A \in \mathcal{F}$  e  $B \in \mathcal{G}$  são independentes.*

**Definição 1.1.37.** *A probabilidade condicional de um evento  $A$ , dado que ocorreu um evento  $B$ , com  $\mathbb{P}(B) > 0$ , é dada por*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

**Teorema 1.1.38.** *Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_n$  eventos tais que  $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n A_i) > 0$ . Então, temos que*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

*Demonstração.* Escrevamos

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)} \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)}.$$

Usando a definição de probabilidade condicional, podemos reescrever o lado direito da igualdade acima como

$$\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i),$$

concluindo a demonstração. □

**Teorema 1.1.39** (Teorema da Probabilidade Total). *Sejam  $A_1, \dots, A_n$  eventos dois a dois disjuntos que formam uma partição do espaço amostral  $\Omega$ . Então, para qualquer evento  $B$ ,*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i).$$

*Demonstração.* Basta observarmos que, como a sequência  $A_1, \dots, A_n$  forma uma partição, então, para qualquer  $B \in \Omega$ , temos que  $B = \bigcup_i (A_i \cap B)$ . Além disso, como  $A_i, i = 1, \dots, n$ , são dois a dois disjuntos, temos que  $B \cap A_i$  também são disjuntos. Pelo axioma (ii) da Definição 1.1.8 e o Teorema 1.1.38, temos que

$$\mathbb{P}(B) = \sum_i \mathbb{P}(A_i \cap B) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i).$$

□

Vejam uma importante ferramenta na Teoria da Probabilidade: a esperança condicional. Formalizando a noção de condicionamento, ela serve de base na definição de certos processos estocásticos que motivaram o desenvolvimento da Probabilidade Moderna e aparecem em inúmeras aplicações.

**Definição 1.1.40.** *Sejam  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$  uma  $\sigma$ -álgebra e  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$  uma variável aleatória. Definimos a esperança condicional de  $X$  dado  $\mathcal{F}$ , que denotaremos por  $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ , como sendo qualquer variável aleatória  $Y$  tal que*

- (i)  $Y \in \mathcal{F}$ , ou seja,  $Y$  é  $\mathcal{F}$ -mensurável;
- (ii)  $\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}$ , para todo  $A \in \mathcal{F}$ .

Intuitivamente, podemos pensar que  $\mathcal{F}$  descreve as informações que temos à nossa disposição. Assim, a esperança condicional de  $X$  dado  $\mathcal{F}$  funciona como um filtro que reinterpreta a variável aleatória  $X$  em termos da informação proveniente de  $\mathcal{F}$ .

**Exemplo 1.1.41.** Se  $X \in \mathcal{F}$ , então  $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = X$ , isto é, se conhecemos  $X$ , então nossa melhor suposição é ele mesmo. Como a condição (ii) é sempre satisfeita, temos que a condição (i) é a única coisa que faz com que  $X = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ . Um caso especial deste exemplo ocorre quando  $X = c$ , onde  $c$  é uma constante.

**Observação 1.1.42.** A esperança condicional  $\mathbb{E}(X|Y)$  só depende da variável  $Y$  através da  $\sigma$ -álgebra  $\sigma(Y)$ . Desta forma, definimos  $\mathbb{E}(X|Y) := \mathbb{E}(X|\sigma(Y))$ .

**Teorema 1.1.43.** Suponha que  $\mathbb{E}(X) < \infty$ . Então, para cada  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ ,  $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$  existe e é única, a menos de um conjunto  $\mathcal{G}$ -mensurável de probabilidade zero.

*Demonstração.* Ver referência [7]. □

Vejamos algumas importantes propriedades da esperança condicional.

**Proposição 1.1.44.** (i) Se  $X$  é independente de  $\mathcal{F}$ , isto é, para todo  $A \in \mathcal{F}$  e  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}(\{X \in B\} \cap A) = \mathbb{P}(X \in B)\mathbb{P}(A),$$

então  $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X)$ ;

(ii)  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) = \mathbb{E}(X)$ ;

(iii)  $\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{F}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$ , para todo  $a, b \in \mathbb{R}$ ;

(iv) Se  $X \leq Y$ , então  $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$ ;

(v) Se  $X \in \mathcal{F}$  e  $\mathbb{E}|Y|, \mathbb{E}|XY| < \infty$ , então  $\mathbb{E}(XY|\mathcal{F}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$ ;

(vi) Se  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ , então  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ .

*Demonstração.* (i) Como a esperança é um número real, temos que  $\mathbb{E}(X) \in \mathcal{F}$ . Pela definição de esperança condicional e por  $X$  ser independente de  $\mathcal{F}$ , para todo  $A \in \mathcal{F}$ , temos que

$$\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{F}) d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P} = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \int_A \mathbb{E}(X) d\mathbb{P}.$$

(ii) Se tomarmos  $A = \Omega$  na definição de esperança condicional, obtemos o resultado.

(iii) Claramente, temos que  $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$  é  $\mathcal{F}$ -mensurável. Além disso, dado  $A \in \mathcal{F}$ , pela linearidade da integral e a definição de esperança condicional, temos

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{F})d\mathbb{P} &= a \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{F})d\mathbb{P} + b \int_A \mathbb{E}(Y|\mathcal{F})d\mathbb{P} \\ &= a \int_A X d\mathbb{P} + b \int_A Y d\mathbb{P} = \int_A (aX + bY)d\mathbb{P} \\ &= \int_A \mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{F}). \end{aligned}$$

(iv) Usando a definição de esperança condicional, adquirimos

$$\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{F})d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P} \leq \int_A Y d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(Y|\mathcal{F})d\mathbb{P}.$$

Fazendo  $A = \{\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) - \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}) \geq \varepsilon > 0\}$ , temos que a função indicadora tem probabilidade zero, para todo  $\varepsilon > 0$ , concluindo a demonstração.

(v) Por hipótese e pela definição de esperança condicional, temos que  $X\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \in \mathcal{F}$ . Seja  $X = \mathbf{1}_B$ , com  $B \in \mathcal{F}$ . Assim, dado  $A \in \mathcal{F}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_A X\mathbb{E}(Y|\mathcal{F})d\mathbb{P} &= \int_A \mathbf{1}_B \mathbb{E}(Y|\mathcal{F})d\mathbb{P} = \int_{A \cap B} \mathbb{E}(Y|\mathcal{F})d\mathbb{P} \\ &= \int_{A \cap B} Y d\mathbb{P} = \int_A \mathbf{1}_B Y d\mathbb{P} = \int_A XY d\mathbb{P} \\ &= \int_A \mathbb{E}(XY|\mathcal{F})d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Então,  $\mathbb{E}(\mathbf{1}_B Y|\mathcal{F}) = \mathbf{1}_B \mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$ . Estendendo para  $X$  função simples, adquirimos o resultado pela linearidade da integral. Sendo  $X, Y \geq 0$ , se  $X_n$  são variáveis aleatórias simples tais que  $X_n \searrow 0$ , usando o Teorema da Convergência Monótona, concluímos que

$$\int_A X\mathbb{E}(Y|\mathcal{F})d\mathbb{P} = \int_A XY d\mathbb{P}.$$

Para mostrar o resultado no caso geral, basta escrevermos  $X = X^+ - X^-$  e  $Y = Y^+ - Y^-$ .

(vi) Por definição, temos que  $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \in \mathcal{G}$ . Além disso, dado  $B \in \mathcal{G}$ , pela definição de esperança condicional e por  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ , temos

$$\int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{G})d\mathbb{P} = \int_B X d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{F})d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|\mathcal{G})d\mathbb{P}.$$

## 1.2 Teorema de De Finetti

Nesta seção, vamos enunciar e demonstrar o Teorema de De Finetti. Inicialmente, vejamos alguns conceitos preliminares que são necessários para o seu entendimento.

### Passeio Aleatório

**Definição 1.2.1.** *Sejam  $X_1, X_2, \dots$  independentes e identicamente distribuídas tomando valores em  $\mathbb{R}^d$ .  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  é dito um passeio aleatório.*

Assim, o passeio aleatório, que algumas vezes é chamado de passeio do bêbado, é uma formalização da ideia intuitiva da tomada de vários passos consecutivos, cada qual em uma direção aleatória. Por exemplo, o caminho percorrido por uma molécula ou por um líquido ou gás e o movimento dos preços dos títulos no mercado de valores são passeios aleatórios.

**Exemplo 1.2.2.** *O caso especial onde  $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$  é chamado passeio aleatório simples. O passeio aleatório simples visita cada inteiro infinitas vezes com probabilidade um.*

Consideremos o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , onde  $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_i \in S\} = S \times S \times \dots$ ,  $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \dots)$  e  $\mathbb{P} = \mu \times \mu \times \dots$ , com  $X_n(\omega) = \omega_n$ .

**Definição 1.2.3.** *Uma permutação finita de  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  é uma bijeção  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $\pi(i) \neq i$ , apenas para finitos  $i$ 's. Dado  $\omega \in S^{\mathbb{N}}$ , definimos  $(\pi\omega)_i = \omega_{\pi(i)}$ .*

**Definição 1.2.4.**  *$A \in \mathcal{S}$  é permutável se  $A = \pi^{-1}(A)$ , onde  $\pi^{-1}(A) = \{\omega : \pi\omega \in A\}$ .*

Seja  $\varepsilon_n$  a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos eventos que são invariantes sobre permutações, que deixam fixados  $n + 1, n + 2, \dots$ . Considere  $\varepsilon = \bigcap_n \varepsilon_n$  a  $\sigma$ -álgebra dos conjuntos permutáveis.

**Definição 1.2.5.** *Uma sequência de variáveis aleatórias  $X_1, X_2, \dots$  é dita permutável se, para cada  $n$  e para cada permutação  $\pi$  de  $\{1, 2, \dots\}$ , temos que  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  e  $(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \dots, X_{\pi(n)})$  tem a mesma distribuição.*

**Definição 1.2.6.** *Seja  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$  a informação conhecida até o tempo  $n$ . Uma variável aleatória  $N$  tomando valores em  $\{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$  é dita um tempo de parada se, para cada  $n < \infty$ ,  $\{N = n\} \in \mathcal{F}_n$ .*

**Teorema 1.2.7** (Equação de Wald). *Sejam  $X_1, X_2, \dots$  independentes e identicamente distribuídas com  $\mathbb{E}|X_i| < \infty$ . Se  $N$  é um tempo de parada com  $\mathbb{E}(N) < \infty$ , então*

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N),$$

onde  $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$ .

*Demonstração.* Ver referência [5]. □

**Exemplo 1.2.8.** *Sejam  $X_1, X_2, \dots$  independentes e identicamente distribuídas com  $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ . Considere  $a < 0 < b$  inteiros e seja  $N = \inf\{n : S_n \notin (a, b)\}$ . Observe que se  $x \in (a, b)$ , então*

$$\mathbb{P}(x + S_{b-a} \notin (a, b)) \geq 2^{-(b-a)},$$

*já que  $b - a$  passos de tamanho  $+1$  em uma reta vai nos tirar do intervalo. Iterando a última desigualdade, segue que*

$$\mathbb{P}(N > n(b - a)) \leq (1 - 2^{-(b-a)})^n.$$

*Então,  $\mathbb{E}(N) < \infty$ . Aplicando a Equação de Wald, obtemos*

$$b\mathbb{P}(S_N = b) + a\mathbb{P}(S_N = a) = 0.$$

*Como  $\mathbb{P}(S_N = b) + \mathbb{P}(S_N = a) = 1$ , temos que  $(b - a)\mathbb{P}(S_N = b) = -a$ . Portanto,*

$$\mathbb{P}(S_N = b) = \frac{-a}{b - a} \quad e \quad \mathbb{P}(S_N = a) = \frac{b}{b - a}.$$

*Se  $T_a = \inf\{n : S_n = a\}$ , podemos escrever a última conclusão como*

$$\mathbb{P}(T_a < T_b) = \frac{b}{b - a},$$

*para  $a < 0 < b$ . Escrevendo  $b = M$  e fazendo  $M \rightarrow \infty$ , adquirimos*

$$\mathbb{P}(T_a < \infty) \geq \mathbb{P}(T_a < T_M) \rightarrow 1,$$

*para todo  $a < 0$ . Por simetria e pelo fato que  $T_0 \equiv 0$ , chegamos que*

$$\mathbb{P}(T_x < \infty) = 1,$$

*para todo  $x \in \mathbb{Z}$ . Além disso, se  $\mathbb{E}(T_x) < \infty$ , então, pela Equação de Wald, temos que*

$$x = \mathbb{E}(S_{T_x}) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(T_x) = 0.$$

Logo,  $\mathbb{E}(T_x) = \infty$ , para  $x \neq 0$ .

## Martingal Reverso

**Definição 1.2.9.** (i) Uma filtração é uma sequência crescente de  $\sigma$ -álgebras.

(ii)  $X_n$  é dito adaptado à filtração  $\mathcal{F}_n$  se  $X_n \in \mathcal{F}_n$ .

**Definição 1.2.10.** Um martingal é uma sequência  $X_n$  de variáveis aleatórias tais que:

(i)  $\mathbb{E}|X_n| < +\infty$ ;

(ii)  $X_n$  é adaptado à  $\mathcal{F}_n$ ;

(iii)  $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ , para todo  $n$ .

**Exemplo 1.2.11.** Um exemplo de martingal aparece em jogos simples de azar como o seguinte. Suponha que no  $n$ -ésimo lançamento de uma moeda honesta acrescentamos um valor  $A$  ao capital do jogador se sair cara e subtraímos a mesma quantidade se sair coroa. O jogador começa o jogo com um capital  $K$  e é admitido ter capital negativo. Vamos supor também que os lançamentos são independentes. Fazendo

$$Z_j = \begin{cases} A, & \text{se sair cara no } j\text{-ésimo lançamento} \\ -A, & \text{se sair coroa no } j\text{-ésimo lançamento} \end{cases},$$

teremos que o capital do jogador no instante do  $n$ -ésimo lançamento será

$$X_n = K + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n.$$

Observando que  $Z_1, Z_2, \dots$  são variáveis aleatórias independentes com  $\mathbb{E}(Z_i) = 0$ , temos que  $X_n$  é um martingal com respeito à filtração natural. De fato, as condições (i) e (ii) são satisfeitas de imediato e

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1}|X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n) &= \mathbb{E}((X_n + Z_{n+1})|X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n) \\ &= \mathbb{E}((a_n + Z_{n+1})|X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n) \\ &= a_n + \mathbb{E}(Z_{n+1}|X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n) \\ &= a_n + \underbrace{E(Z_{n+1})}_{=0} = a_n. \end{aligned}$$

**Definição 1.2.12.** Um martingal reverso é um martingal indexado por  $\mathbb{Z}_-$ , ou seja,  $X_n, n \leq 0$ , adaptado a uma sequência crescente de  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{F}_n$ , com  $X_0 \in L^1$  e

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n, \text{ para } n \leq -1.$$



**Teorema 1.2.13.** *Seja  $X_n$  um martingal reverso. Então,  $X_{-\infty} = \lim_{n \rightarrow -\infty} X_n$  existe quase certamente e em  $L^1$ .*

*Demonstração.* Ver referência [5]. □

**Lema 1.2.14.** *Se as variáveis aleatórias integráveis  $X_n$  convergem para  $X$  em  $L^1$ , então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X \mathbf{1}_A).$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_A) - \mathbb{E}(X \mathbf{1}_A)| &\leq \mathbb{E}|X_n \mathbf{1}_A - X \mathbf{1}_A|, \text{ pela desigualdade de Jensen} \\ &\leq \mathbb{E}|X_n - X| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

□

**Teorema 1.2.15.** *Seja  $X_n$  um martingal reverso. Se  $X_{-\infty} = \lim_{n \rightarrow -\infty} X_n$  e  $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_n \mathcal{F}_n$ , então*

$$X_{-\infty} = \mathbb{E}(X_0 | \mathcal{F}_{-\infty}).$$

*Demonstração.* (i) Claramente,  $X_{-\infty} \in \mathcal{F}_{-\infty}$ ;

(ii) Seja  $A \in \mathcal{F}_{-\infty} \subset \mathcal{F}_n$  ( $\mathcal{F}_{-\infty} \subset \dots \subset \mathcal{F}_{-1} \subset \mathcal{F}_0$ ). Como  $X_n$  é martingal reverso, temos que  $X_n = \mathbb{E}(X_0 | \mathcal{F}_n)$ . Pela definição de esperança condicional,  $X_n \in \mathcal{F}_n$  e

$$\int_A X_n d\mathbb{P} = \int_A X_0 d\mathbb{P}.$$

Pelo Teorema 1.2.13, temos que  $X_n \rightarrow X_{-\infty}$  em  $L_1$ . Assim, usando o Lema 1.2.14,

$$\mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X_{-\infty} \mathbf{1}_A) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow -\infty} \int_A X_n d\mathbb{P} = \int_A X_{-\infty} d\mathbb{P} \Rightarrow \int_A X_0 d\mathbb{P} = \int_A X_{-\infty} d\mathbb{P}.$$

□

**Teorema 1.2.16.** *Sejam  $X_n$  um martingal reverso e  $Y$  uma variável aleatória integrável. Se  $\mathcal{F}_n \searrow \mathcal{F}_{-\infty}$  quando  $n \rightarrow -\infty$ , então*

$$\mathbb{E}(Y | \mathcal{F}_n) \longrightarrow \mathbb{E}(Y | \mathcal{F}_{-\infty}) \tag{1.6}$$

*quase certamente e em  $L^1$ .*

*Demonstração.*

**Afirmção 1.2.17.**  $X_n = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n)$  é um martingal reverso.

Provemos a afirmação acima.

(i) Pela definição de esperança condicional, temos que  $X_n \in \mathcal{F}_n$ ;

(ii)  $\mathbb{E}|X_n| = \mathbb{E}|\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n)| < +\infty$ ;

(iii)  $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n) = X_n$ ,

o que mostra a afirmação.

Pelos Teorema 1.2.13 e Teorema 1.2.15, temos que

$$\begin{aligned} X_n \rightarrow X_{-\infty} &= \mathbb{E}(X_0|\mathcal{F}_{-\infty}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_0)|\mathcal{F}_{-\infty}), \text{ pois } X_0 = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_0) \\ &= \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_{-\infty}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n) \longrightarrow \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_{-\infty}).$$

□

Agora, analisemos o Teorema de De Finetti.

**Teorema 1.2.18** (Teorema de De Finetti). *Se  $X_1, X_2, \dots$  são variáveis aleatórias permutáveis, então, condicionado a  $\varepsilon$ ,  $X_1, X_2, \dots$  são independentes e identicamente distribuídas.*

*Mais precisamente, se  $f_1, f_2, \dots, f_k$  são limitadas e mensuráveis, então*

$$\mathbb{E}(f_1(X_1)f_2(X_2)\dots f_k(X_k)|\varepsilon) = \prod_{j=1}^k \mathbb{E}(f_j(X_j)|\varepsilon).$$

*Demonstração.* Definamos

$$A_n(\varphi) = \frac{1}{(n)_k} \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, 2, \dots\}} \varphi(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}),$$

onde  $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função a ser escolhida futuramente, a soma é sobre todas as sequências de inteiros distintos  $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$  e  $(n)_k = n(n-1)\dots(n-k+1)$  é o número de tais sequências. Por definição, temos que  $A_n(\varphi) \in \varepsilon_n$ . Logo, para

qualquer sequência permutável, podemos escrever:

$$\begin{aligned} A_n(\varphi) &= \mathbb{E}(A_n(\varphi)|\varepsilon_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{(n)_k} \sum_i \varphi(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})|\varepsilon_n\right) \\ &= \frac{1}{(n)_k} \sum_i \mathbb{E}(\varphi(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})|\varepsilon_n) \\ &= \mathbb{E}(\varphi(X_1, \dots, X_k)|\varepsilon_n), \end{aligned}$$

pois todos os termos na soma são os mesmos.

Pelo Teorema 1.2.16, temos que

$$A_n(\varphi) = \mathbb{E}(\varphi(X_1, \dots, X_k)|\varepsilon_n) \longrightarrow \mathbb{E}(\varphi(X_1, \dots, X_k)|\varepsilon) \quad (1.7)$$

quase certamente. Sejam  $f : \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções limitadas. Além disso, seja  $I_{n,k}$  o conjunto de todas as sequências de inteiros distintos  $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ . Então,

$$\begin{aligned} (n)_{k-1}A_n(f)nA_n(g) &= \sum_{i \in I_{n,k-1}} f(X_{i_1}, \dots, X_{i_{k-1}}) \sum_{m \leq n} g(X_m) \\ &= \sum_{i \in I_{n,k}} \underbrace{f(X_{i_1}, \dots, X_{i_{k-1}})g(X_{i_k})}_{\varphi(X_1, \dots, X_k)} + \sum_{i \in I_{n,k-1}} \underbrace{(f(X_{i_1}, \dots, X_{i_{k-1}}) \sum_{j=1}^{k-1} g(X_{i_j}))}_{\sum_{j=1}^{k-1} \varphi_j(X_1, \dots, X_{k-1})}. \end{aligned}$$

Se fizermos

$$\begin{cases} \varphi_j(X_1, \dots, X_{k-1}) = f(X_1, \dots, X_{k-1})g(X_j), 1 \leq j \leq k-1 \\ \varphi(X_1, \dots, X_k) = f(X_1, \dots, X_{k-1})g(X_k) \end{cases},$$

obtemos

$$(n)_{k-1}A_n(f)nA_n(g) = (n)_{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} A_n(\varphi_j) + (n)_k A_n(\varphi).$$

Dividindo a expressão acima por  $(n)_k$ , obtemos

$$\frac{(n)_{k-1}n}{(n)_k} A_n(f)A_n(g) = \frac{(n)_{k-1}}{(n)_k} \sum_{j=1}^{k-1} A_n(\varphi_j) + \frac{(n)_k}{(n)_k} A_n(\varphi).$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned} & \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-2))n}{n(n-1)\cdots(n-(k-2))(n-(k-1))} A_n(f)A_n(g) = \\ & \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-2))}{n(n-1)\cdots(n-(k-2))(n-(k-1))} \sum_{j=1}^{k-1} A_n(\varphi_j) + A_n(\varphi), \end{aligned}$$

que implica

$$A_n(\varphi) = \frac{n}{n-k+1} A_n(f)A_n(g) - \frac{1}{n-k+1} \sum_{j=1}^{k-1} A_n(\varphi_j).$$

Aplicando (1.7) em  $\varphi, f, g$  e todas as  $\varphi_{j's}$  dadas, obtemos:

$$\mathbb{E}(f(X_1, \dots, X_{k-1})g(X_k)|\varepsilon) = \mathbb{E}(f(X_1, \dots, X_{k-1})|\varepsilon)\mathbb{E}(g(X_k)|\varepsilon).$$

Segue, por indução, que

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^k f_j(X_j)|\varepsilon\right) = \prod_{j=1}^k \mathbb{E}(f_j(X_j)|\varepsilon).$$

□

### 1.3 Processos de Markov

Em 1907, Andrei Markov definiu e investigou o que ficou conhecido como processos de Markov. A principal característica dos processos de Markov é que o modo que toda a história passada afeta o futuro está completamente resumido no valor atual do processo. Nesta seção, definiremos o processo de Markov e faremos um estudo de seus geradores.

**Definição 1.3.1.** *Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade. Um processo estocástico a tempo contínuo  $(X_t : t \geq 0)$  é uma família de variáveis aleatórias  $X_t$  que tomam valores em  $\Omega$ .*

Informalmente falando, um processo estocástico descreve uma história que se desenvolve de forma aleatória ao longo de um período de tempo representado por  $T$ . Neste trabalho,  $T$  será igual ao conjunto dos números reais positivos  $[0, \infty)$ .

**Observação 1.3.2.** *Suponha que  $X_t$  assuma valores no conjunto  $E$ . Esse conjunto será chamado espaço de estados ou espaço de fases.*

**Definição 1.3.3.** *Considere um processo estocástico a tempo contínuo  $(X_t : t \geq 0)$ , com espaço de estados  $E$  finito ou enumerável. Então,  $X_t$  é uma cadeia de Markov se, para todo  $t, s \geq 0$*

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_u, u \leq s) = \mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_s), \quad (1.8)$$

onde a probabilidade condicional da equação (1.8) é chamada de probabilidade de transição. Se, além disso, a probabilidade de transição entre dois estados depende somente do intervalo de tempo durante o qual ocorre a transição e não dos instantes de tempo nos que a cadeia ocupa esses estados, ou seja, quando

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_s = i) = p_{i,j}(t), \quad (1.9)$$

onde  $p_{i,j}$  é a probabilidade de passar do estado  $i$  ao estado  $j$ , a cadeia é chamada de homogênea no tempo.

Essa definição diz que para uma cadeia de Markov, a previsão do próximo passo conhecendo-se toda a história passada do processo desde o início é tão boa quanto a previsão feita conhecendo-se apenas o valor do processo no presente.

**Definição 1.3.4.** *Uma matriz estocástica é uma matriz  $(p_{i,j})_{i,j \in E}$  de números não-negativos que satisfaz*

$$\sum_{j \in E} p_{i,j} = 1, \text{ para todo } i \in E.$$

**Observação 1.3.5.** *Daqui para a frente, consideraremos somente cadeias de Markov homogêneas no tempo. Para tais cadeias, chamaremos à família de matrizes  $P(t) = (p_{i,j}(t))_{i,j \in E}$  de função de transição da cadeia  $X_t$ . Ela satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i)  $\mathbb{P}(0) = I$ ;
- (ii)  $\mathbb{P}_t$  é uma matriz estocástica, para todo  $t \geq 0$ ;
- (iii)  $\mathbb{P}_{t+s} = \mathbb{P}_t \mathbb{P}_s$ , para  $t, s \geq 0$ .

As propriedades (i) e (ii) decorrem da definição de  $\mathbb{P}$ . A propriedade (iii), pode ser provada utilizando as equações de Chapman-Kolmogorov, que veremos a seguir.

**Proposição 1.3.6** (Equações de Chapman-Kolmogorov para cadeias a tempo contínuo). *Para todo  $t, s \geq 0, i, j \in E$ , vale*

$$p_{i,j}(t+s) = \sum_{k \in E} p_{i,k}(t) p_{k,j}(s).$$

*Demonstração.* Decompondo o espaço amostral da forma  $\Omega = \bigcup_{k \in E} \{X_t = k\}$  e usando a lei da probabilidade total e a propriedade de Markov temos

$$\begin{aligned}
 p_{i,j}(t+s) &= \mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_0 = i) \\
 &= \sum_{k \in E} \mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_t = k, X_0 = i) \mathbb{P}(X_t = k | X_0 = i) \\
 &= \sum_{k \in E} \mathbb{P}(X_s = j | X_0 = k) \mathbb{P}(X_t = k | X_0 = i) \\
 &= \sum_{k \in E} p_{k,j}(s) p_{i,k}(t).
 \end{aligned}$$

□

Considere o período de tempo que a cadeia permanece no estado que ela ocupa no instante  $t$ . Esta será uma variável aleatória que chamaremos de  $W_t$  e pode ser definida da seguinte maneira:

$$W_t(\omega) = \inf\{s \geq 0 : X_{t+s}(\omega) \neq X_t(\omega)\}.$$

Segundo o comportamento desta variável, os estados podem ser classificados como:

- (i)  $i$  será chamado de estado instantâneo se  $\mathbb{P}(W_t = 0 | X_t = i) = 1$ . Neste caso, a cadeia fica no estado  $i$  somente no instante que ela chegou;
- (ii)  $i$  será chamado de estado absorvente se  $\mathbb{P}(W_t < \infty | X_t = i) = 0$ . Uma vez que a cadeia chega num estado absorvente, ela fica nele para sempre;
- (iii)  $i$  será chamado de estado estável se  $\mathbb{P}(0 < W_t < \infty | X_t = i) = 1$ . Toda vez que a cadeia chega num estado estável, ela fica nele durante um período de tempo finito.

**Teorema 1.3.7.** *Seja  $(X_t : t \geq 0)$  uma cadeia sem estados instantâneos. Para todo  $i \in E$  e todo  $t \geq 0$ ,*

$$\mathbb{P}(W_t > u | X_t = i) = e^{-q_i u}, u \geq 0,$$

para algum  $q_i \in [0, \infty)$ .

*Demonstração.* Ver referência [12]

□

**Observação 1.3.8.** *Cadeias sem estados instantâneos são chamadas de processos de saltos.*

Alternativamente, podemos definir uma cadeia de Markov em tempo contínuo como um processo estocástico que se move de estado para estado de acordo

com uma cadeia de Markov em tempo discreto, no qual o tempo de permanência em cada estado tem uma distribuição exponencial. Além disso, o tempo de permanência num estado e o próximo estado visitado são variáveis aleatórias independentes.

**Observação 1.3.9.** *Uma função  $f$  em  $X$  é uma função cilíndrica se existe um conjunto finito  $A^f = \{x_1, \dots, x_m\}$  no espaço de estados  $E$  e uma função  $f'$  em  $\{0, 1\}^m$  tal que  $f(\eta) = f'(\eta(x_1), \dots, \eta(x_m))$ . Um outro termo para uma função cilíndrica é função local.*

## Generalidades sobre os Espaços de Banach

**Definição 1.3.10.** *Seja  $\mathcal{M}$  um espaço arbitrário e  $d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$  uma função tal que*

- (i)  $d(x, y) = 0$  se, e somente, se  $x = y$ ;
- (ii)  $d(x, y) > 0$ , para todo  $x, y \in \mathcal{M}$ ;
- (iii)  $d(x, y) = d(y, x)$ , para todo  $x, y \in \mathcal{M}$ ;
- (iv)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ , para todo  $x, y, z \in \mathcal{M}$ .

*Dizemos que  $d$  é uma métrica (distância) sobre  $\mathcal{M}$  e que  $(\mathcal{M}, d)$  é um espaço métrico.*

**Definição 1.3.11.** *Uma norma em um espaço vetorial real  $\mathcal{X}$  é uma função  $\|\cdot\|$  de números reais não-negativos, que satisfaz as seguintes propriedades, para vetores  $f, g \in \mathcal{X}$  e número real  $\alpha$ :*

- (i)  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ ;
- (ii)  $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$ ;
- (iii)  $\|f\| > 0$  se, e somente se,  $f \neq 0$ .

**Definição 1.3.12.** *Um espaço vetorial com uma norma  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$  é chamado espaço vetorial normado. Este é um espaço métrico com distância  $d(f, g) = \|f - g\|$ .*

Assim, todo espaço vetorial normado é um espaço métrico com a métrica induzida pela norma.

**Definição 1.3.13.** *Um espaço métrico é dito separável se existe um conjunto enumerável  $E \subset \mathcal{M}$  que é denso em  $\mathcal{M}$ , isto é, tal que todo aberto de  $\mathcal{M}$  contém pelo menos um ponto de  $E$ .*

**Exemplo 1.3.14.** Denotamos por  $C[0, 1]$  o espaço das funções contínuas reais com domínio  $[0, 1]$ . O espaço  $C[0, 1]$  é um espaço vetorial real. Para cada função  $f \in C[0, 1]$ , definimos

$$\|f\|_\infty = \sup_{s \in [0, 1]} |f(s)|$$

$\|\cdot\|$  é uma norma sobre  $C[0, 1]$ , chamada de norma do supremo. Portanto,  $\|f - g\|_\infty$ ,  $f, g \in C[0, 1]$ , é uma métrica. Com esta métrica, temos que  $C[0, 1]$  é um espaço métrico separável.

**Definição 1.3.15.** Um espaço de Banach é um espaço vetorial normado cuja métrica é completa, ou seja, toda sequência de Cauchy converge.

**Exemplo 1.3.16.** O espaço  $\mathbb{R}^d$  de vetores reais  $x = (x_1, \dots, x_d)$  é um espaço de Banach com qualquer norma  $\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_d|^p)^{\frac{1}{p}}$ , para  $1 \leq p < \infty$ . Se  $p = 2$ , então temos a norma Euclidiana.

**Exemplo 1.3.17.** Para qualquer espaço métrico  $S$ , o espaço  $C_b(S)$  das funções contínuas e limitadas em  $S$  com a norma do supremo  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in S} |f(x)|$  é um espaço de Banach.

**Definição 1.3.18.** O espaço dual  $\mathcal{X}^*$  de um espaço de Banach  $\mathcal{X}$  é o espaço de todas as funções lineares contínuas de  $\mathcal{X}$  em  $\mathbb{R}$ . O valor de  $v^* \in \mathcal{X}^*$  aplicado em  $f \in \mathcal{X}$  é denotado por  $v^*f$  ou  $\langle \vec{v}^*, \vec{f} \rangle$ .

**Observação 1.3.19.**  $\mathcal{X}^*$  também é um espaço de Banach, com norma

$$\|v^*\| = \sup\{\langle \vec{v}^*, \vec{f} \rangle : f \in \mathcal{X}, \|f\| \leq 1\}.$$

**Definição 1.3.20.** Um operador linear em  $\mathcal{X}$  é uma função linear  $A$  cujo domínio

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in \mathcal{X} : Af \text{ está definido}\}$$

e o alcance

$$\mathcal{R}(A) = \{Af : f \in \mathcal{D}(A)\}$$

são subespaços lineares de  $\mathcal{X}$ . O gráfico

$$\mathcal{G}(A) = \{(f, Af) : f \in \mathcal{D}(A)\}$$

é um subespaço linear do espaço produto  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ .

**Definição 1.3.21.** Seja  $A$  um operador linear.



- (i)  $A$  é um operador linear fechado em  $\mathcal{X}$  se  $\mathcal{G}(A)$  é um subespaço fechado de  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ , ou seja, se  $f_n \rightarrow f$  e  $Af_n \rightarrow g$ , então  $f \in \mathcal{D}(A)$  e  $g = Af$ ;
- (ii)  $A$  é um operador linear limitado em  $\mathcal{X}$  se seu domínio é todo  $\mathcal{X}$  e sua norma

$$\|A\| = \sup\{\|Af\|; f \in \mathcal{X}, \|f\| \leq 1\}$$

é finita;

- (iii)  $A$  é uma contração se  $\|A\| \leq 1$ .

## Convergência Fraca de Medidas

Nesta subseção, consideraremos um espaço métrico  $\mathcal{M}$  como um espaço mensurável dotado da  $\sigma$ -álgebra dos borelianos  $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ . Assim, quando dito medida ou probabilidade sobre  $\mathcal{M}$ , a  $\sigma$ -álgebra é sempre  $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ , exceto seja mencionada outra  $\sigma$ -álgebra.

**Definição 1.3.22.** *Sejam  $\mathbb{P}_n, \mathbb{P}, n \geq 1$ , medidas de probabilidades sobre um espaço métrico  $\mathcal{M}$ . Dizemos que  $\mathbb{P}_n$  converge fracamente para  $\mathbb{P}$ , se para toda função contínua e limitada  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  temos que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mathbb{P}_n = \int f d\mathbb{P},$$

que denotaremos por  $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$ .

**Definição 1.3.23.** *Um conjunto  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$  com  $\mathbb{P}(\partial A) = 0$  é dito um conjunto  $\mathbb{P}$ -contínuo.*

**Teorema 1.3.24 (Portmanteau).** *Sejam  $\mathbb{P}_n, \mathbb{P}, n \geq 1$ , medidas de probabilidades sobre um espaço métrico  $\mathcal{M}$ . São equivalentes:*

- (i)  $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$ ;
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mathbb{P}_n = \int f d\mathbb{P}$ , para toda função real  $f$  limitada e uniformemente contínua;
- (iii)  $\limsup_n \mathbb{P}_n(F) \leq \mathbb{P}(F)$ , para todo conjunto  $F$  fechado;
- (iv)  $\liminf_n \mathbb{P}_n(G) \geq \mathbb{P}(G)$ , para todo conjunto  $G$  aberto;
- (v)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n(A) = \mathbb{P}(A)$ , para todo conjunto  $A$   $\mathbb{P}$ -contínuo.

*Demonstração.* Ver referência [13].

□

**Definição 1.3.25.** Uma classe de subconjuntos  $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{M})$  é dita uma classe determinante de probabilidade se o fato de duas medidas  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{Q}$  coincidirem em  $A$  implica que  $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$ . Uma classe de subconjuntos  $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{M})$  é dita uma classe determinante de convergência se o fato de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n(E) = \mathbb{P}(E)$ , para todo  $E \in A$ , tal que  $\mathbb{P}(\partial E) = 0$  implica que  $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$ .

É imediato que toda classe determinante de convergência é uma classe determinante. Seguem abaixo alguns exemplos:

**Exemplo 1.3.26.** Exemplos de classes determinante e classe determinante de convergência:

- (i) Para todos  $0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_d \leq 1$  em  $\mathbb{N}$ , definimos a projeção canônica  $\pi_{i_1, \dots, i_d} : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^d$  que para cada sequência  $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  associa o vetor  $(x_{i_1}, \dots, x_{i_d})$ . A classe dos conjuntos finito-dimensionais é a classe de conjuntos do tipo  $\pi_{i_1, \dots, i_d}^{-1}(E)$ , para algum  $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ . Os conjuntos finito-dimensionais formam uma classe determinante de convergência em  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .
- (ii) Para todos  $0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_d \leq 1$  em  $[0, 1]$ , definimos a projeção canônica  $\pi_{t_1, \dots, t_d} : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  que para cada função  $x \in C[0, 1]$  associa o vetor  $(x_{t_1}, \dots, x_{t_d})$ . A classe dos conjuntos finito-dimensionais é a classe de conjuntos do tipo  $\pi_{t_1, \dots, t_d}^{-1}(E)$ , para algum  $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ . Os conjuntos finito-dimensionais formam uma classe determinante em  $C[0, 1]$ , porém não é classe determinante de convergência.

Baseados na definição de classe de conjuntos determinantes de convergência, podemos falar também em classes de funções determinantes de convergência, isto é, um subconjunto  $V$  das funções reais contínuas sobre o espaço métrico tal que se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mathbb{P}_n = \int f d\mathbb{P}$ , para toda  $f \in V$ , então  $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$ .

**Definição 1.3.27.** Seja  $\Pi$  uma família de medidas de probabilidade.

- (i) Dizemos que  $\Pi$  é relativamente compacta se toda sequência de elementos de  $\Pi$  contém uma subsequência que converge fracamente;
- (ii)  $\Pi$  é dita rígida se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um conjunto compacto  $K$  tal que  $\mathbb{P}(K) > 1 - \varepsilon$ , para toda  $\mathbb{P} \in \Pi$ .

**Teorema 1.3.28** (Prohorov). Seja  $\Pi$  uma família de medidas de probabilidade.

- (i) Se  $\Pi$  é rígida, então  $\Pi$  é relativamente compacta;
- (ii) Suponha que  $\mathcal{M}$  é completo e separável (contém um subconjunto enumerável e denso). Se  $\Pi$  é relativamente compacta, então  $\Pi$  é rígida.

*Demonstração.* Ver referência [13].

□

### 1.3.1 Semigrupos e Geradores

Sejam  $Y$  um espaço métrico e  $D_Y$  o espaço de todas as funções  $\omega$  de  $[0, \infty)$  em  $Y$  que são contínuas à direita com limites à esquerda. No espaço  $D_Y$ , considere  $X. = (X_t : t \geq 0)$  o processo definido por  $X_t(\omega) = \omega(t)$ ,  $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$  a  $\sigma$ -álgebra gerada pelas coordenadas até o tempo  $t$  e  $(\theta(t) : t \geq 0)$  as funções *shift*  $\theta_t : D_Y \rightarrow D_Y$ , definidas por  $\theta_t\omega(s) = \omega(s + t)$ .

**Definição 1.3.29.** *Um processo de Markov é uma coleção  $\{\mathbb{P}^x : x \in Y\}$  de medidas de probabilidade em  $D_Y$  com as seguintes propriedades:*

- (i)  $\mathbb{P}^x[\omega \in D_Y : \omega(0) = x] = 1$ , para todo  $x \in Y$ , isto é,  $x$  é o estado inicial sobre a medida  $\mathbb{P}^x$ ;
- (ii) A função  $x \mapsto \mathbb{P}^x(A)$  é mensurável, para todo  $A \in \mathcal{F}$ ;
- (iii) *Propriedade de Markov:*  $\mathbb{P}^x(\theta_t^{-1}A | \mathcal{F}_t)(\omega) = \mathbb{P}^{\omega(t)}(A)$ , para  $\mathbb{P}^x$ -quase todo  $\omega$ , para todo  $x \in Y$  e  $A \in \mathcal{F}$ .

A esperança correspondente a  $\mathbb{P}^x$  será denotada por  $\mathbb{E}^x$ . Logo,

$$\mathbb{E}^x(Z) = \int_{D_Y} Z d\mathbb{P}^x, \quad (1.10)$$

para toda função mensurável  $Z$  em  $D_Y$ , que é integrável relativo a  $\mathbb{P}^x$ .

Para começar o processo com uma distribuição  $\mu$  diferente de um ponto de massa  $\delta_x$ , coloquemos em  $D_Y$  a medida  $\mathbb{P}^\mu$  definida por

$$\mathbb{P}^\mu(A) = \int_Y \mathbb{P}^x(A) \mu(dx), \text{ para } A \in \mathcal{F}.$$

Sejam  $C(Y)$  o espaço das funções contínuas em  $Y$  e  $C_b(Y)$  o espaço das funções contínuas e limitadas em  $Y$ .

**Definição 1.3.30.** *Para um dado processo  $(X_t : t \geq 0)$  em  $Y$ , para cada  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  função mensurável limitada e  $t \geq 0$ , definimos o operador  $S(t)f$  em  $Y$  por*

$$S(t)f(x) := \mathbb{E}^x(f(X_t)). \quad (1.11)$$

**Observação 1.3.31.** *A mensurabilidade do operador  $S(t)f$  segue de imediato da condição (ii) da Definição 1.3.29.*

**Definição 1.3.32.** *Um processo de Markov  $\{\mathbb{P}^x : x \in Y\}$  é dito um processo Feller se  $S(t)f \in C_b(Y)$ , para todo  $t \geq 0$  e  $f \in C_b(Y)$ .*

**Definição 1.3.33.** *Seja  $(X_t : t \geq 0)$  um processo Feller em  $Y$ . Uma família  $\{S(t) : t \geq 0\}$  de operadores lineares em  $C_b(Y)$  é um semigrupo de Markov se satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i)  $S(0) = I$ , o operador identidade em  $C_b(Y)$ ;
- (ii)  $S(t+s)f = S(t)S(s)f$ , para toda  $f \in C_b(Y)$ ,  $s, t \geq 0$ .

**Proposição 1.3.34.** *Seja  $(X_t : t \geq 0)$  um processo Feller em  $Y$ . A família  $\{S(t) : t \geq 0\}$  de operadores lineares da forma (1.11) é um semigrupo de Markov.*

*Demonstração.* (i)

$$S(0)f(x) = \mathbb{E}^x(f(X_0)) = \mathbb{E}^x(f(x)) = f(x),$$

já que  $X_0 = x$ , que é equivalente a (i) da Definição 1.3.29;

(ii) Pela propriedade de Markov, temos que:

$$\begin{aligned} S(t+s)f(x) &= \mathbb{E}^x(f(X_{t+s})) = \mathbb{E}^x(\mathbb{E}^x(f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t)) \\ &= \mathbb{E}^x(\mathbb{E}^{X_t}(f(X_s))) = \mathbb{E}^x(S(s)f(X_t)) = S(t)S(s)f(x). \end{aligned}$$

□

O semigrupo  $\{S(t) : t \geq 0\}$  descreve a evolução no tempo dos valores esperados das funções observáveis  $f$  em  $Y$ , para um dado processo de Markov.

**Observação 1.3.35.** *A norma do supremo de funções é dada por*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in Y} |f(x)|.$$

*Então, temos que*

$$\|S(t)f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

*Assim, os operadores  $S(t)$  contraem as distâncias entre as funções. Desta forma, chamamos  $\{S(t) : t \geq 0\}$  um semigrupo de contração.*

**Definição 1.3.36.** *Seja  $S(t)$  um operador linear limitado em  $\mathcal{X}$ , para cada  $t \geq 0$ .*

- (i)  $\{S(t) : t \geq 0\}$  é um semigrupo fortemente contínuo se  $\|S(t)f - f\| \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow 0$ , para toda  $f \in \mathcal{X}$ .
- (ii) Se cada  $S(t)$  é uma contração, então  $\{S(t) : t \geq 0\}$  é um semigrupo de contração.

**Lema 1.3.37.** *Suponha que  $\{S(t) : t \geq 0\}$  é um semigrupo de contração fortemente contínuo em  $\mathcal{X}$ . Então, para toda  $f \in \mathcal{X}$ ,  $S(t)f$  é uma função uniformemente contínua de  $t \in [0, \infty)$  em  $\mathcal{X}$ .*

*Demonstração.* Para  $t, h \geq 0$ , temos que

$$\|S(t+h)f - S(t)f\| = \|S(t)(S(h)f - f)\| \leq \|S(h)f - f\|.$$

Além disso, para  $0 \leq h \leq t$ , obtemos

$$\|S(t-h)f - S(t)f\| = \|S(t-h)(S(h)f - f)\| \leq \|S(h)f - f\|.$$

Em ambos os casos, fazendo  $h \rightarrow 0$ , temos que o lado direito vai para zero. Portanto,  $S(t)f$  é uniformemente contínua.  $\square$

Vejamos agora a definição de gerador de um semigrupo.

**Definição 1.3.38.** O gerador de um semigrupo  $\{S(t) : t \geq 0\}$  é o operador definido por

$$Lf := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)f - f}{t}, \quad (1.12)$$

onde o domínio  $\mathcal{D}(L)$  é o conjunto das funções  $f \in \mathcal{X}$  cujo limite existe.

**Lema 1.3.39.** Suponha que  $\{S(t) : t \geq 0\}$  é um semigrupo de contração fortemente contínuo em  $\mathcal{X}$  com gerador  $L$ .

(i) Para toda  $f \in \mathcal{X}$  e  $t > 0$ ,  $\int_0^t S(s)f ds \in \mathcal{D}(L)$  e

$$S(t)f - f = L \int_0^t S(s)f ds; \quad (1.13)$$

(ii) Para toda  $f \in \mathcal{D}(L)$  e  $t > 0$ ,  $S(t)f \in \mathcal{D}(L)$  e

$$\frac{d}{dt}S(t)f - f = LS(t)f = S(t)Lf; \quad (1.14)$$

(iii) Para toda  $f \in \mathcal{D}(L)$  e  $t > 0$ ,

$$S(t)f - f = \int_0^t LS(s)f ds = \int_0^t S(s)Lf ds. \quad (1.15)$$

*Demonstração.* (i) Note que um operador linear limitado é automaticamente fe-

chado. Logo, temos

$$\begin{aligned}
\frac{S(h) - I}{h} \int_0^t S(s) f ds &= \frac{1}{h} \int_0^t S(s+h) f ds - \frac{1}{h} \int_0^t S(s) f ds \\
&= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} S(s) f ds - \frac{1}{h} \int_0^t S(s) f ds \\
&= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} S(s) f ds - \frac{1}{h} \int_0^h S(s) f ds \rightarrow S(t) f - f,
\end{aligned}$$

quando  $h \searrow 0$ , pelo Lema 1.3.37. Assim, para toda  $f \in \mathcal{X}$  e  $t > 0$ ,  $\int_0^t S(s) f ds \in \mathcal{D}(L)$  e

$$S(t) f - f = L \int_0^t S(s) f ds.$$

(ii) Primeiramente, vamos mostrar a diferenciabilidade à esquerda. Fixemos  $t \geq 0$  e seja  $h > 0$ . Fazendo uma manipulação algébrica, obtemos

$$\frac{S(t+h)f - S(t)f}{h} = \frac{S(h)f - I}{h} S(t)f = S(t) \frac{S(h)f - I}{h} f. \quad (1.16)$$

Fazendo  $h \searrow 0$ , por hipótese  $h^{-1}(S(h)f - I)f \rightarrow Lf$ . Como  $S(t)$  é uma função contínua em  $\mathcal{X}$ , concluímos que o último termo da igualdade (1.16) converge para  $S(t)Lf$ . Desta forma, o termo do meio também converge, implicando que  $S(t)f \in \mathcal{D}(L)$  e  $LS(t)f = S(t)Lf$ . Então, a convergência do termo mais à esquerda nos diz que  $S(t)f$  é diferenciável à direita e a derivada é dada pela equação (1.14). Para mostrar a diferenciabilidade à esquerda, seja  $h > 0$ .

$$\frac{S(t-h)f - S(t)f}{-h} - S(t)Lf = S(t-h) \left( \frac{S(h)f - f}{h} - Lf \right) + S(t-h)Lf - S(t)Lf.$$

Usando a propriedade de contração, adquirimos

$$\left\| \frac{S(t-h)f - S(t)f}{-h} - S(t)Lf \right\| = \left\| \frac{S(h)f - f}{h} - Lf \right\| + \|S(t-h)Lf - S(t)Lf\|.$$

Fazendo  $h \searrow 0$ , a última linha vai para 0, o primeiro termo pela hipótese que  $f \in \mathcal{D}(L)$  e o segundo pelo Lema 1.3.37, provando assim a diferenciabilidade à esquerda.

(iii) Segue do fato de  $S(t)Lf$  ser uma função contínua em  $t$  e de propriedades da integral.

□

**Corolário 1.3.40.** *Se  $L$  é o gerador de um semigrupo de contração fortemente contínuo em  $\mathcal{X}$ , então  $\mathcal{D}(L)$  é denso em  $\mathcal{X}$  e  $L$  é um operador fechado.*

*Demonstração.* Seja  $f \in \mathcal{X}$ . Pela equação (1.13) do Lema anterior,  $t^{-1} \int_0^t S(s)f ds \in \mathcal{D}(L)$ , para cada  $t > 0$ . Pela continuidade forte do semigrupo, obtemos que

$$\lim_{t \searrow 0} t^{-1} \int_0^t S(s)f ds = f.$$

Consequentemente,  $\mathcal{D}(L)$  é denso em  $\mathcal{X}$ . Para mostrar que  $L$  é um operador fechado, suponha que  $(f_j, Lf_j) \rightarrow (f, g)$  em  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ , para alguma sequência  $\{f_j\}$  de elementos de  $\mathcal{D}(L)$ . Pela equação (1.15) do Lema anterior,

$$S(t)f_j - f_j = \int_0^t S(s)Lf_j ds.$$

Fazendo  $j \rightarrow \infty$ , pela propriedade de contração,

$$\left\| \int_0^t S(s)Lf_j ds - \int_0^t S(s)g ds \right\| \leq \int_0^t \|S(s)(Lf_j - g)\| ds \leq t \|Lf_j - g\|.$$

Desta forma, no limite, adquirimos

$$S(t)f - f = \int_0^t S(s)g ds,$$

implicando que  $f \in \mathcal{D}(L)$  e  $Lf = g$ . Portanto,  $L$  é um operador fechado.  $\square$

Seja  $\mathcal{P}$  o conjunto de todas as medidas de probabilidade em  $Y$ .

**Definição 1.3.41.** *Suponha que  $\{S(t) : t \geq 0\}$  é um semigrupo de Markov em  $C_b(Y)$  com distribuição inicial  $\mu \in \mathcal{P}$ . Denotamos por  $\mu S(t) \in \mathcal{P}$  a distribuição do processo no tempo  $t$ , que é unicamente determinada por*

$$\int_Y f d(\mu S(t)) := \int_Y S(t)f d\mu, \quad (1.17)$$

para todo  $f \in C_b(X)$ .

De maneira explícita, para subconjuntos de Borel  $\mathcal{B} \in Y$ ,

$$\mu S(t)(\mathcal{B}) = \int \mathbb{P}^x(X_t \in \mathcal{B}) \mu(dx).$$

Probabilisticamente falando,  $\mu S(t)$  é a distribuição de probabilidade de  $X_t$ , quando a distribuição inicial do processo é  $\mu$ .

**Definição 1.3.42.** Uma medida  $\mu \in \mathcal{P}$  é invariante para o processo  $X_t$  se  $\mu S(t) = \mu$ , para todo  $t \geq 0$ . Equivalentemente,

$$\int_Y S(t)f d\mu = \int_Y f d\mu, \quad (1.18)$$

para toda  $f \in C_b(Y)$ . O conjunto de todas as medidas invariantes  $\mu \in \mathcal{P}$  de um processo é denotado por  $\mathcal{I}$ .

Alguns termos alternativos para as medidas de probabilidade invariantes são distribuições invariantes e distribuições de equilíbrio. A invariância implica que, se o estado inicial  $X_0$  tem distribuição de probabilidade  $\mu$ , então o mesmo acontece com  $X_t$  em todos os tempos posteriores  $t \geq 0$ . Além disso, o processo  $(X_t : t \geq 0)$  é estacionário, ou seja, a distribuição do processo deslocado  $(X_{s+t} : t \geq 0)$  é a mesma distribuição do processo original. As medidas invariantes são essenciais para uma descrição do comportamento de um processo de Markov.

**Definição 1.3.43.** Para um operador linear fechado  $L$ , um subespaço linear  $\mathcal{Y}$  de  $\mathcal{D}(L)$  é um cerne se o gráfico de  $L$  é o fecho do gráfico de  $L$  restrito à  $\mathcal{Y}$ , ou seja, para cada  $f$  em  $\mathcal{D}(L)$ , existe uma sequência  $g_n \in \mathcal{Y}$  tal que  $g_n \rightarrow f$  e  $Lg_n \rightarrow Lf$ . Expressamos isso dizendo que  $L$  é o fecho de sua restrição à  $\mathcal{Y}$ .

Vejamos uma maneira conveniente de verificar se uma determinada medida é invariante.

**Proposição 1.3.44.** Seja  $L$  o gerador do semigrupo de contração fortemente  $\{S(t) : t \geq 0\}$  em  $C_b(Y)$ , definido por um processo de Markov  $X_t$ . Sejam  $\mu$  uma medida de probabilidade em  $Y$  e  $\mathcal{Y}$  um cerne para  $L$ . Então,  $\mu$  é invariante para  $X_t$  se, e somente se,

$$\int (Lf) d\mu = 0, \quad (1.19)$$

para toda  $f \in \mathcal{Y}$ . Uma possível escolha para o cerne  $\mathcal{Y}$  é o próprio domínio  $\mathcal{D}(L)$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $\mu$  é invariante e  $f \in \mathcal{D}(L)$ . Pela definição de gerador, temos que  $t^{-1}(S(t)f - f) \rightarrow Lf$  limitadamente e uniformemente quando  $t \rightarrow 0$ . Logo, podemos tomar o limite das integrais

$$\begin{aligned} \int Lf d\mu &= \lim_{t \rightarrow 0} \int \frac{S(t)f - f}{t} d\mu = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( \int f d(S(t)\mu) - \int f d\mu \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( \int f d\mu - \int f d\mu \right) = 0. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponhamos que  $\int Lg d\mu = 0$ , para toda  $g \in \mathcal{X}$ . Pela definição de um cerne, para toda  $f \in \mathcal{D}(L)$ , existe  $g_n \in \mathcal{Y}$  tal que  $Lg_n \rightarrow Lf$  limitadamente e



uniformemente. Consequentemente,  $\int Lf d\mu = 0$ , para toda  $f \in \mathcal{D}(L)$ . Fixemos  $f \in \mathcal{D}(L)$ . Pelo Lema 1.3.39,  $S(t)f \in \mathcal{D}(L)$ , para todo  $t \geq 0$ . Além disso,  $S(t)f - f = \int_0^t LS(s)f ds$ . Assim, integrando esta igualdade em relação a  $\mu$ , temos

$$\int (S(t)f - f) d\mu = \int \left( \int_0^t L(S(s)f) ds \right) d\mu.$$

Separando as integrais no lado esquerdo e usando o Teorema de Fubini no lado direito, obtemos

$$\int S(t)f d\mu - \int f d\mu = \int_0^t \left( \int L(S(s)f) d\mu \right) ds = 0,$$

pois  $S(s)f \in \mathcal{D}(L)$ , o que implica que  $\int L(S(s)f) d\mu = 0$ . Consequentemente, obtemos

$$\int f(d\mu S(t)) = \int f d\mu, \tag{1.20}$$

para toda  $f \in \mathcal{D}(L)$ . Pelo Corolário 1.3.40,  $\mathcal{D}(L)$  é denso em  $C_b(Y)$ . Então, a igualdade (1.20) vale para toda  $f \in C_b(Y)$ . Desta forma,  $\mu S(t) = \mu$ . Portanto,  $\mu$  é invariante.  $\square$

### 1.3.2 Processo de Poisson

O processo de Poisson é o processo estocástico a tempo contínuo que conta o número de eventos de interesse até um determinado tempo. Vejamos alguns conceitos necessários para sua definição.

**Definição 1.3.45.** *Um processo estocástico a tempo contínuo  $\{N(t) : t \geq 0\}$ , definido sobre um espaço amostral  $\Omega$ , com espaço de estados  $E = \mathbb{N}$  e tal que, para todo evento elementar  $\omega \in \Omega$ , a trajetória correspondente,  $t \rightarrow N(t)$ , satisfaça*

- (i) *É não decrescente;*
- (ii) *Cresce somente com saltos, ou seja, é constante entre os saltos;*
- (iii) *É contínua à direita e tem limite à esquerda;*
- (iv)  $N_0(\omega) = 0$ .

*é chamado processo de contagem.*

**Definição 1.3.46.** *Um processo estocástico  $\{N_t : t \geq 0\}$  é dito possuir incrementos independentes se para todo  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ , com  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , temos que*

$$N_0, N_{t_1} - N_0, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$$

são variáveis aleatórias independentes.

Assim, o número de eventos que tenham ocorrido até tempo  $t$  ( $N_t$ ) deve ser independente do número de eventos que ocorrem entre os tempos de  $t$  e  $t + s$  ( $N_{t+s} - N_t$ ).

**Definição 1.3.47.** Um processo estocástico  $\{N_t : t \geq 0\}$  é dito ter incrementos estacionários se  $P(N_{t+s} - N_t = k) = P(N_s = k)$ , para todo  $t \geq 0$ .

**Definição 1.3.48.** Um processo de contagem  $\{N_t : t \geq 0\}$  é dito ser um processo de Poisson homogêneo se:

- (i) Os saltos tem comprimento um;
- (ii)  $\{N_t : t \geq 0\}$  possui incrementos independentes;
- (iii)  $\{N_t : t \geq 0\}$  possui incrementos estacionários.

Como consequência desta definição, temos que  $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ou seja,

$$P(N_t = n) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!},$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  (de unidade inversa da unidade do tempo).

**Exemplo 1.3.49.** Seja  $\{N_t : t \geq 0\}$  um processo de Poisson homogêneo com taxa  $\lambda > 0$ . Este processo é uma cadeia de Markov a tempo contínuo. De fato, consideremos  $t, s \geq 0$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{t+s} = j | N_s = i, N_u = i(u), u < s) &= \mathbb{P}(N_{t+s} - N_s = j - i | N_s = i, N_u = i(u), u < s) \\ &= \mathbb{P}(N_{t+s} - N_s = j - i) \\ &= \mathbb{P}(N_t = j - i). \end{aligned}$$

Assim,

$$p_{i,j}(t) = \mathbb{P}(N_t = j - i) = \begin{cases} \frac{\exp^{-\lambda t} (\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, & \text{se } j \geq i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

### 1.3.3 Dualidade

Suponha que  $\eta_t$  e  $\zeta_t$  são processos de Markov com espaços de estados  $U$  e  $V$ , respectivamente. Seja  $f(\eta, \zeta)$  uma função mensurável limitada em  $U \times V$ . Então,  $\eta_t$  e  $\zeta_t$  são ditos duais um em relação ao outro, com respeito à  $f$ , se

$$\mathbb{E}^\eta(f(\eta_t, \zeta)) = \mathbb{E}^\zeta(f(\eta, \zeta_t))$$

para todo  $\eta \in U$  e  $\zeta \in V$ . Dado um processo  $\eta_t$  de interesse, é frequentemente útil encontrar uma função  $f$  conveniente e um processo  $\zeta_t$  que é dual à  $\eta_t$  com respeito à  $f$ . Vários problemas envolvendo  $\eta_t$  podem ser remodelados em termos de  $\zeta_t$ , e muitas vezes resolvidos mais facilmente nesse novo contexto.

# Capítulo 2

## Modelo e Resultados

Neste capítulo, introduziremos o modelo KMP e enunciaremos os resultados que serão verificados.

### 2.1 Sistema Unidimensional de Osciladores

**Definição 2.1.1.** *Consideremos um sistema de osciladores harmônicos unidimensionais mecanicamente desacoplados. Dado o oscilador  $x$ ,  $x \in \{-L, -L + 1, \dots, L\}$ , considere  $(q_x, p_x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  descrevendo a sua posição e sua velocidade, respectivamente. Consequentemente, o espaço de estados é  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^{2L+1}$ . Seja  $\xi_x$ ,  $x \in \{-L, -L + 1, \dots, L\}$ , variável aleatória que determina a energia do  $x$ -ésimo oscilador, com  $\xi_x \in \mathbb{R}_+$ . A energia total do sistema é a soma das energias dos osciladores individuais, ou seja,  $\sum_x (q_x)^2 + (p_x)^2$ . O sistema passa por uma evolução estocástica no tempo, definida da seguinte maneira:*

*Escolhamos um par de sítios vizinhos próximos e deixemos que os osciladores troquem energia de acordo com um procedimento microcanônico, isto é, mantendo a energia total fixa e redistribuindo-a com uma distribuição uniforme sobre a superfície de energia constante. Nas fronteiras,  $\pm L$ , o sistema está em contato com reservatórios à diferentes temperaturas. Nelas, distribuamos a energia dos osciladores de acordo com a distribuição de Gibbs com temperaturas  $T_\pm$  ( $T_+ \neq T_-$ ).*

Em vez de trabalharmos com  $(q_x, p_x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , enunciaremos na Definição 2.1.2 uma nova notação, de acordo com a descrição do modelo feito acima.

**Definição 2.1.2.** *Os valores  $\xi'_x, \xi'_{x+1}$  das energias em  $x, x + 1$ , quando o par  $x, x + 1$  é escolhido, são dados por*

$$\xi'_x = p(\xi_x + \xi_{x+1}) \quad e \quad \xi'_{x+1} = (1 - p)(\xi_x + \xi_{x+1}), \quad p \in [0, 1], \quad (2.1)$$

onde  $\xi_x$  e  $\xi_{x+1}$  são os valores das energias antes do rearranjo. A distribuição de  $p$  é uniforme, isto é, a medida de Lebesgue em  $[0, 1]$ .

A Figura 2.1 mostra essa evolução das energias. Note que, após o processo, o par  $x, x + 1$  tem a energia redistribuída com  $p \sim U[0, 1]$ .

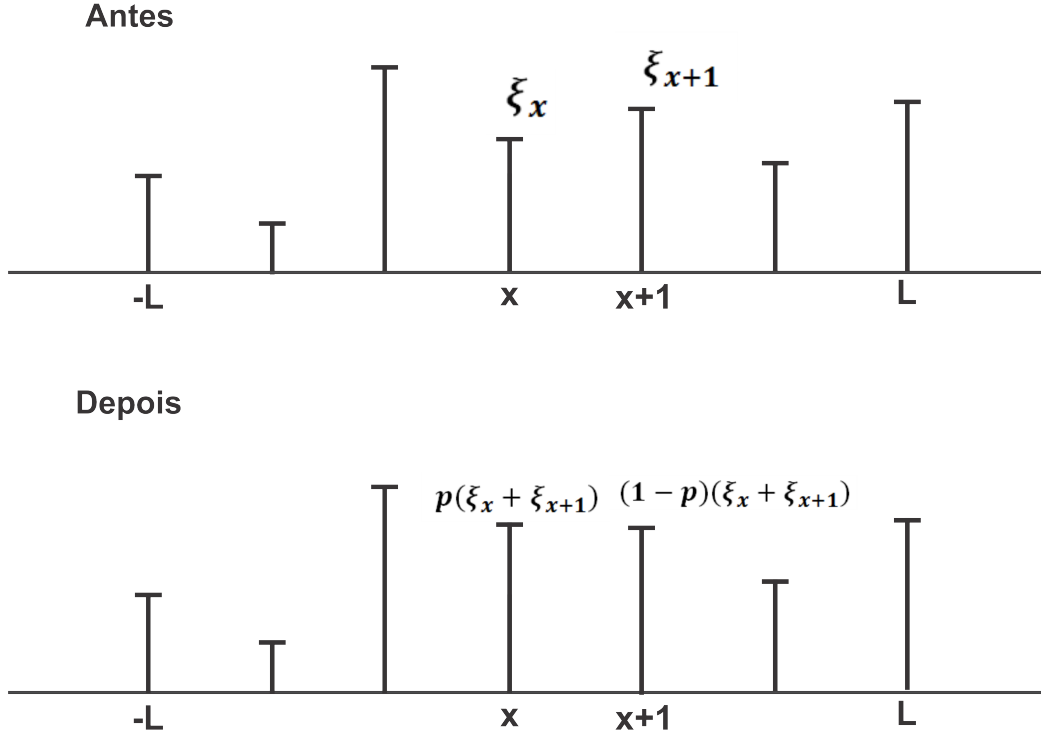


Figura 2.1: Evolução das energias.

**Definição 2.1.3.** Seja  $\xi^{(L)} = (\xi_{-L}, \dots, \xi_L) \in \mathbb{R}_+^{2L+1}$ . O gerador  $G^{(L)}$  da evolução estocástica que descrevemos acima é dado por

$$\begin{aligned}
 (G^{(L)}f)(\xi^{(L)}) &= \sum_{x=-L}^{L-1} \int_0^1 (f(\xi_{-L}, \dots, p(\xi_x + \xi_{x+1}), (1-p)(\xi_x + \xi_{x+1}), \dots, \xi_L) - f(\xi^{(L)})) dp \\
 &+ \int_0^\infty (f(\xi', \dots, \xi_L) - f(\xi^{(L)})) \beta_- e^{-\beta_- \xi'} d\xi' \\
 &+ \int_0^\infty (f(\xi_{-L}, \dots, \xi') - f(\xi^{(L)})) \beta_+ e^{-\beta_+ \xi'} d\xi'
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

com  $f$  função em  $\mathbb{R}_+^{2L+1}$ ,  $\beta e^{-\beta \xi} d\xi$  a distribuição de Gibbs para a energia de um oscilador harmônico à temperatura  $T = \frac{1}{K\beta}$ ,  $\beta_-$  a temperatura inversa do reservatório da esquerda,  $\beta_+$  a temperatura inversa do reservatório da direita e  $K$  a constante de Boltzmann. O processo de Markov com gerador  $G^{(L)}$  tem uma medida invariante  $\mu_L$ .

**Observação 2.1.4.** *Vamos assumir nesta dissertação que a medida invariante é única e que o processo converge em distribuição para  $\mu_L$ , quando  $t \rightarrow \infty$ .*

A próxima proposição não se encontra no artigo [1], material base desta dissertação. Seu enunciado é intuitivo: em contato com reservatórios com mesma temperatura, a medida invariante é produto de exponenciais.

**Proposição 2.1.5.** *Se  $\beta_+ = \beta_-$ , então a medida produto de exponenciais de parâmetro  $\frac{1}{KT}$ , é invariante.*

*Demonstração.* Suponha que  $\beta = \beta_+ = \beta_-$ . Pelo resultado (1.3.44), basta mostrarmos que

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty (G^{(L)} f)(\xi^{(L)}) d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \dots d\mu_L(\xi_L) = 0. \quad (2.3)$$

Por definição,  $\int_0^\infty \dots \int_0^\infty (G^{(L)} f)(\xi^{(L)}) d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \dots d\mu_L(\xi_L)$  é igual a

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left( \underbrace{\sum_{x=-L}^{L-1} \int_0^1 (f(\xi_{-L}, \dots, p(\xi_x + \xi_{x+1}), (1-p)(\xi_x + \xi_{x+1}), \dots, \xi_L) - f(\xi^{(L)})) dp}_{(I)} \right. \\ & \left. + \underbrace{\int_0^\infty (f(\xi', \dots, \xi_L) - f(\xi^{(L)})) \beta e^{-\beta \xi'} d\xi'}_{(II)} + \underbrace{\int_0^\infty (f(\xi_{-L}, \dots, \xi') - f(\xi^{(L)})) \beta e^{-\beta \xi'} d\xi'}_{(III)} \right) \\ & d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \dots d\mu_L(\xi_L). \end{aligned}$$

Vamos calcular separadamente cada termo da integral acima. Primeiramente, calculemos a integral de (II):

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left( \int_0^\infty (f(\xi', \dots, \xi_L) - f(\xi^{(L)})) \beta e^{-\beta \xi'} d\xi' \right) d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \dots d\mu_L(\xi_L).$$

Separando as integrais, a expressão acima é igual a

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(\xi', \dots, \xi_L) \beta e^{-\beta \xi'} d\xi' d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \dots d\mu_L(\xi_L) \\ & - \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(\xi^{(L)}) \beta e^{-\beta \xi'} d\xi' d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \dots d\mu_L(\xi_L). \end{aligned}$$

Calculando o segundo termo acima, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(\xi', \dots, \xi_L) \beta e^{-\beta \xi'} d\xi' d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \dots d\mu_L(\xi_L) \\ & - \underbrace{(1 - e^{-\beta \xi'})|_0^\infty}_{=1} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(\xi^{(L)}) d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \dots d\mu_L(\xi_L). \end{aligned}$$

Como a função  $f$  no primeiro termo não depende de  $\xi_{-L}$ , a expressão anterior é igual a

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(\xi', \dots, \xi_L) \beta e^{-\beta \xi'} d\xi' d\mu_{-L+1}(\xi_{-L+1}) \dots d\mu_L(\xi_L) \\ - \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(\xi^{(L)}) d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \dots d\mu_L(\xi_L).$$

Já que  $\beta e^{-\beta \xi'} d\xi' = d\mu_{-L}(\xi_{-L})$ , reescrevemos o acima como

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(\xi^{(L)}) d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \dots d\mu_L(\xi_L) - \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(\xi^{(L)}) d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \dots d\mu_L(\xi_L) = 0.$$

Analogamente, calculamos a integral de (III):

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left( \int_0^\infty (f(\xi_{-L}, \dots, \xi') - f(\xi^{(L)})) \beta e^{-\beta \xi'} d\xi' \right) d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \dots d\mu_L(\xi_L).$$

Separando as integrais, a expressão acima é igual a

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(\xi_{-L}, \dots, \xi') \beta e^{-\beta \xi'} d\xi' d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \dots d\mu_L(\xi_L) \\ - \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(\xi^{(L)}) \beta e^{-\beta \xi'} d\xi' d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \dots d\mu_L(\xi_L).$$

Calculando o segundo termo acima, obtemos

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(\xi_{-L}, \dots, \xi') \beta e^{-\beta \xi'} d\xi' d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \dots d\mu_L(\xi_L) \\ - \underbrace{(1 - e^{-\beta \xi'})|_0^\infty}_{=1} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(\xi^{(L)}) d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \dots d\mu_L(\xi_L).$$

Como a função  $f$  no primeiro termo não depende de  $\xi_L$ , a expressão anterior é igual a

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(\xi_{-L}, \dots, \xi') d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \dots d\mu_{L-1}(\xi_{L-1}) \beta e^{-\beta \xi'} d\xi' \\ - \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(\xi^{(L)}) d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \dots d\mu_L(\xi_L).$$

Já que  $\beta e^{-\beta \xi'} d\xi' = d\mu_L(\xi_L)$ , reescrevemos o anterior como

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(\xi^{(L)}) d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \dots d\mu_L(\xi_L) - \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(\xi^{(L)}) d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \dots d\mu_L(\xi_L) = 0.$$

Agora, vamos calcular a integral de (I). Consideremos somente um termo do somatório, digamos o termo  $x$ :

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left( \int_0^1 (f(\xi_{-L}, \dots, p(\xi_x + \xi_{x+1}), (1-p)(\xi_x + \xi_{x+1}), \dots, \xi_L) - f(\xi^{(L)})) dp \right) \\ d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \dots d\mu_L(\xi_L).$$

Separando as integrais, a expressão acima é igual a

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^1 f(\xi_{-L}, \dots, p(\xi_x + \xi_{x+1}), (1-p)(\xi_x + \xi_{x+1}), \dots, \xi_L) dp d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \cdots d\mu_L(\xi_L) \\ - \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^1 f(\xi^{(L)}) dp d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \cdots d\mu_L(\xi_L).$$

Calculando a integral no segundo termo acima, como  $f(\xi^{(L)})$  é constante em relação à  $dp$ , obtemos

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^1 f(\xi_{-L}, \dots, p(\xi_x + \xi_{x+1}), (1-p)(\xi_x + \xi_{x+1}), \dots, \xi_L) dp d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \cdots d\mu_L(\xi_L) \\ - \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f(\xi^{(L)}) d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \cdots d\mu_L(\xi_L).$$

Aplicando o Teorema de Fubini, reescrevemos o acima como

$$\int_0^1 \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f(\xi_{-L}, \dots, p(\xi_x + \xi_{x+1}), (1-p)(\xi_x + \xi_{x+1}), \dots, \xi_L) d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \cdots d\mu_L(\xi_L) dp \\ - \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f(\xi^{(L)}) d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \cdots d\mu_L(\xi_L). \quad (2.4)$$

Para resolver o primeiro termo acima, vamos fazer uma mudança de variáveis, analisando somente os elementos que se alteram em relação aos elementos correspondentes do segundo termo. Desta forma, basta mostrarmos que

$$\int_0^1 \int_0^\infty \int_0^\infty f(p(x+y), (1-p)(x+y)) \beta e^{-\beta x} \beta e^{-\beta y} dx dy dp = \\ \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) \beta e^{-\beta x} \beta e^{-\beta y} dx dy. \quad (2.5)$$

Daí, utilizamos o mesmo procedimento feito na integral de (II) e de (III).

Iremos partir do lado esquerdo da expressão (2.5).

**Afirmção 2.1.6.**

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x+y) dx dy = \int_0^\infty S f(S) dS.$$

De fato, chamando

$$\begin{cases} S = x + y \\ a = x - y \end{cases},$$

temos que  $x = \frac{S+a}{2}$  e  $y = \frac{S-a}{2}$ . Calculando o determinante da matriz jacobiana, temos

$$\det J = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}.$$



Aplicando o Teorema de Mudança de Variáveis, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty f(x+y) dx dy &= \int_0^\infty \int_{-S}^S \frac{1}{2} f(S) da dS = \int_0^\infty \frac{1}{2} f(S) \int_{-S}^S da dS \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty f(S) \underbrace{a \Big|_{-S}^S}_{2S} dS = \int_0^\infty S f(S) dS, \end{aligned}$$

o que prova a afirmação acima.

Desta forma, pela Afirmação 2.1.6, reescrevemos o lado esquerdo da expressão (2.5) como

$$\int_0^1 \int_0^\infty S f(pS, (1-p)S) \beta e^{-\beta x} \beta e^{-\beta y} dS dp. \quad (2.6)$$

Chamando

$$\begin{cases} x = pS \\ y = (1-p)S \end{cases},$$

temos que  $S = x + y$  e  $p = \frac{x}{x+y}$ . Calculando o determinante da matriz jacobiana, obtemos

$$\det J = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{y}{(x+y)^2} & -\frac{x}{(x+y)^2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{x+y}.$$

Aplicando o Teorema de Mudança de Variáveis, reescrevemos a expressão (2.6) como

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (x+y) f(x,y) |\det J| \beta e^{-\beta x} \beta e^{-\beta y} dx dy.$$

Substituindo os valores, a expressão acima é igual a

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (x+y) f(x,y) \frac{1}{(x+y)} \beta e^{-\beta x} \beta e^{-\beta y} dx dy = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y) \beta e^{-\beta x} \beta e^{-\beta y} dx dy.$$

Voltando à equação (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(\xi_{-L}, \dots, p(\xi_x + \xi_{x+1}), (1-p)(\xi_x + \xi_{x+1}), \dots, \xi_L) d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \dots d\mu_L(\xi_L) dp \\ &- \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(\xi^{(L)}) d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \dots d\mu_L(\xi_L). \end{aligned}$$

Como  $\beta e^{-\beta x} dx = d\mu_x(\xi_x)$  e  $\beta e^{-\beta y} dy = d\mu_{x+1}(\xi_{x+1})$ , a expressão anterior é igual a

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(\xi^{(L)}) d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \dots d\mu_L(\xi_L) - \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(\xi^{(L)}) d\mu_{-L}(\xi_{-L}) \dots d\mu_L(\xi_L) = 0.$$

Portanto, para  $\beta_+ = \beta_-$ , a medida  $\mu_L$  é invariante. □

## 2.2 Resultados

Seja  $O$  a álgebra das funções cilíndricas limitadas e contínuas em  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$ . Então, provaremos nos capítulos seguintes:

**Teorema 2.2.1.** *Seja  $\tau_{[uL]}$  a translação de  $[uL] = \text{parte inteira de } uL$ ,  $u \in (-1, 1)$ ; então,*

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \mu_L(\tau_{[uL]}f) = \nu_{T(u)}(f), \forall f \in O, \quad (2.7)$$

onde a convergência (2.7) é uma convergência de números que, quando satisfeita para toda  $f \in O$ , implica na convergência fraca definida em (1.3.22),

$$T(u) = T_- \left( \frac{1-u}{2} \right) + T_+ \left( \frac{1+u}{2} \right) \quad (2.8)$$

e  $\nu_T$  é a medida de Gibbs para os osciladores (independentes) à temperatura  $T$ , a saber,

$$d\nu_T = \prod_x \left( \frac{1}{kT} e^{(-\frac{\xi_x}{kT})} d\xi_x \right). \quad (2.9)$$

Nosso objetivo é calcular o fluxo médio de energia entre os osciladores nos sítios  $x, x+1, -L \leq x \leq L-1$ . Por definição, temos que

$$\begin{aligned} Q_L &:= \int \int_0^1 (\xi_x - p(\xi_x + \xi_{x+1})) dp d\mu_L \\ &= \int \left( \frac{\xi_x - \xi_{x+1}}{2} \right) d\mu_L. \end{aligned} \quad (2.10)$$

**Teorema 2.2.2.** *O fluxo de calor  $Q_L$  é independente do oscilador  $x$ :*

$$Q_L = -\frac{1}{4L}(\beta_+^{-1} - \beta_-^{-1}) \quad (2.11)$$

e

$$Q = -\frac{K}{2} \frac{dT(u)}{du}, \quad -1 < u < 1, \quad (2.12)$$

onde  $T(u)$  é definido pela equação (2.8),  $K$  é a constante de Boltzmann e  $Q = \lim_{L \rightarrow \infty} LQ_L$ .

A segunda equação prova a Lei de Fourier com coeficiente de condutividade de calor  $\frac{K}{2}$ .

# Capítulo 3

## Dualidade e Processo Associado de Passeios Aleatórios Absorvidos

Neste capítulo, vamos introduzir uma família de processos de Markov a tempo contínuo, que está relacionada com aquele processo gerado por  $G^{(L)}$ , através do Teorema 3.0.6, que será apresentado a seguir.

**Definição 3.0.3.** Dado  $L \in \mathbb{N}$ , sejam

$$\delta(\pm) = \pm(L + 1)$$

e

$$I_L = [-L, L] \cup \delta(-) \cup \delta(+).$$

Consideremos o processo de Markov em  $\mathbb{N}^{I_L}$  ( $\mathbb{N} = 0, 1, \dots$ ), cujo gerador  $A_L$  é dado por

$$\begin{aligned} & (A_L f)(n_{\delta(-)}, n_{-L}, \dots, n_L, n_{\delta(+)})) \\ &= \sum_{i=-L}^{L-1} \frac{1}{n_i + n_{i-1} + 1} \sum_{q=0}^{n_i + n_{i+1}} (f(n_{\delta(-)}, n_{-L}, \dots, n_{i-1}, q, n_i + n_{i+1} - q, \dots, n_L, n_{\delta(+)})) \\ & \quad - f(n_{\delta(-)}, \dots, n_{\delta(+)})) \\ & \quad + f(n_{\delta(-)} + n_{-L}, 0, n_{-L+1}, \dots, n_{\delta(+)})) - f(n_{\delta(-)}, n_{-L}, \dots, n_L, n_{\delta(+)})) \\ & \quad + f(n_{\delta(-)}, \dots, n_{L-1}, 0, n_{\delta(+)} + n_L) - f(n_{\delta(-)}, n_{-L}, \dots, n_L, n_{\delta(+)})). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Denotemos por  $Q_n^{(L)}$  o processo de Markov gerado por  $A_L$ ,  $n_t$  sendo a família de variáveis aleatórias  $n_{\delta(-)}, \dots, n_{\delta(+)}$  no tempo  $t$ , com  $n_0 = n$ .  $Q_n^{(L)}$  descreve o movimento de  $|n| = n_{\delta(-)} + \dots + n_{\delta(+)}$  partículas indistinguíveis que se movem em  $I_L$  e ficam presas quando chegam em  $\delta(\pm)$ , absorvendo as condições de fronteira em

$\delta(\pm)$ . No interior, o movimento é especificado pela seguinte regra:

Em cada par de sítios  $x, x + 1$ ,  $-L \leq x \leq L - 1$ , existe um relógio que toca com lei exponencial de parâmetro 1. Os relógios tocam independentemente uns dos outros. Quando o relógio em  $x, x + 1$  toca, as partículas em  $x$  e  $x + 1$  redistribuem-se entre estes sítios. Em outras palavras, sejam  $n_x$  e  $n_{x+1}$  o número de partículas em  $x$  e  $x + 1$ , respectivamente. Então, escolhamos  $p$  uniformemente entre  $0, 1, \dots, n_x + n_{x+1}$  e coloquemos  $p$  partículas em  $x$  e  $n_x + n_{x+1} - p$  em  $x + 1$ . Além disso, existem relógios também em  $\delta(\pm)$ , que descrevem a absorção de partículas nestes sítios, a saber, quando os relógios em  $\delta(+)$  e  $\delta(-)$  tocam, as partículas em  $L$  e  $-L$  vão para  $\delta(+)$  e  $\delta(-)$ , respectivamente, onde permanecerão indefinidamente.

A Figura 3.1 mostra essa evolução das partículas. Observe que, depois que o relógio do par  $x, x + 1$  toca, as partículas nestes dois sítios são redistribuídas uniformemente.

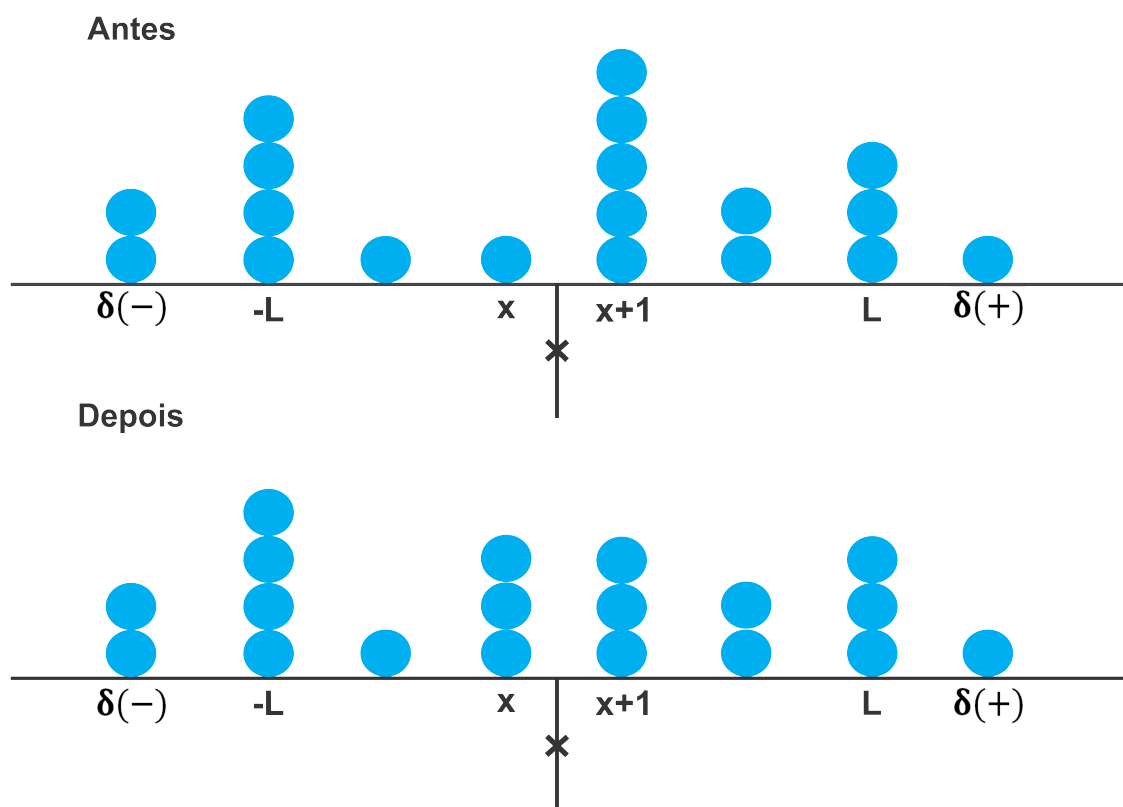


Figura 3.1: Evolução das partículas.

**Observação 3.0.4.** Geralmente, nos referimos às fronteiras  $\delta(+)$  e  $\delta(-)$  como cemitérios, pois quando as partículas vão para lá, não voltam nunca mais.

É digno de nota que, durante esta evolução, o número total de partículas é constante e que o número daquelas que estão presas nas fronteiras deve aumentar. Eventualmente, todas as partículas saem de  $[-L, -L + 1, \dots, L]$ . Portanto, as

propriedades assintóticas deste movimento são completamente descritas pela distribuição de saída.

Na sequência, usaremos a seguinte notação:

**Definição 3.0.5.** *Sejam*

$$k = (k_{-L}, \dots, k_L), \quad \hat{k} = (0, k_{-L}, \dots, k_L, 0),$$

$$n = (n_{\delta(-)}, n_{-L}, \dots, n_L, n_{\delta(+)}), \quad n' = (n_{-L}, \dots, n_L),$$

$$F(k, \xi) = \prod_x \frac{\xi_x^{k_x}}{k_x!}, \quad \sum_x k_x < \infty, \quad k = (k_x)_{x \in \mathbb{Z}}$$

e

$$\bar{F}(n, \xi^{(L)}) = F(n', \xi^{(L)}) \beta_+^{-n_{\delta(+)}} \beta_-^{-n_{\delta(-)}}. \quad (3.2)$$

Então,

$$F(k, \xi^{(L)}) = \bar{F}(\hat{k}, \xi^{(L)}). \quad (3.3)$$

A função  $F$  definida acima é escolhida de forma que possamos relacionar o processo das partículas com o processo das energias. O próximo teorema mostra essa dualidade entre os dois processos.

**Teorema 3.0.6.** *Para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ ,*

$$\int \bar{F}(\hat{k}, \xi_t^{(L)}) d\pi_{\xi_0^{(L)}}^{(L)} = \int \bar{F}(n_t, \xi_0^{(L)}) dQ_{\hat{k}}^{(L)},$$

onde  $\pi_{\xi_0^{(L)}}^{(L)}$  denota o processos de Markov para as variáveis aleatórias  $\xi_t^{(L)}$  geradas por  $G^{(L)}$  e começando em  $\xi_{t=0}^{(L)} = \xi_0^{(L)}$ .

*Demonstração.* Esta é a clássica relação que mostra a dualidade nos dois processos. Fixemos  $\xi_0^{(L)} \in (\mathbb{R}^{2L+1})^+$  e  $k \in \mathbb{N}^{2L+1}$ . Sabemos que

$$\int \bar{F}(\hat{k}, \xi_t^{(L)}) d\pi_{\xi_0^{(L)}}^{(L)} = \mathbb{E}(\bar{F}(\hat{k}, \xi_t^{(L)}))$$

e

$$\int \bar{F}(n_t, \xi_0^{(L)}) dQ_{\hat{k}}^{(L)} = \mathbb{E}(\bar{F}(n_t, \xi_0^{(L)})).$$

Lembrando da definição de gerador, obtemos

$$\begin{aligned} (Lf)(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)f(x) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}^x(f(X_t)) - f(x)}{t} \\ &= \frac{d}{dt} \mathbb{E}(f(X_t))|_{t=0}. \end{aligned}$$

Assim,  $A_L \bar{F}(\hat{k}, \xi^{(L)})$  é derivada no tempo  $t = 0$  da função  $\mathbb{E}(\bar{F}(\hat{k}, \xi_t^{(L)}))$  e  $G^{(L)} \bar{F}(\hat{k}, \xi^{(L)})$  é a derivada no tempo  $t = 0$  da função  $\mathbb{E}(\bar{F}(n_t, \xi_0^{(L)}))$ . Logo, é suficiente mostrar que

$$G^{(L)} \bar{F}(\hat{k}, \xi^{(L)}) = A_L \bar{F}(\hat{k}, \xi^{(L)}).$$

Esta heurística é detalhada em [2].

Vamos calcular separadamente cada termo que aparece na definição de  $G^{(L)}$ . Primeiramente, vejamos o somatório, que descreve o que ocorre no intervalo  $[-L + 1, \dots, L - 1]$ . Consideremos somente um termo do somatório, digamos o termo  $x$ :

$$\int_0^1 (\bar{F}(\hat{k}, \xi_{-L}, \dots, p(\xi_x + \xi_{x+1}), (1-p)(\xi_x + \xi_{x+1}), \dots, \xi_L) - \bar{F}(\hat{k}, \xi^{(L)})) dp.$$

Aplicando a definição da função  $\bar{F}$ , a expressão acima é igual a

$$\int_0^1 (F(k, \xi_{-L}, \dots, p(\xi_x + \xi_{x+1}), (1-p)(\xi_x + \xi_{x+1}), \dots, \xi_L) - F(k, \xi^{(L)})) \cdot \underbrace{(\beta_+^0 \beta_-^0)}_{=1} dp.$$

Aplicando a definição da função  $F$  e separando as integrais, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left( \frac{\xi_{-L}^{k-L}}{k_{-L}!} \cdot \frac{\xi_{-L+1}^{k-L+1}}{k_{-L+1}!} \dots \frac{p^{k_x} (\xi_x + \xi_{x+1})^{k_x}}{k_x!} \cdot \frac{(1-p)^{k_{x+1}} (\xi_x + \xi_{x+1})^{k_{x+1}}}{k_{x+1}!} \dots \frac{\xi_L^{k_L}}{k_L!} \right) dp \\ &- \int_0^1 \left( \frac{\xi_{-L}^{k-L}}{k_{-L}!} \cdot \frac{\xi_{-L+1}^{k-L+1}}{k_{-L+1}!} \dots \frac{\xi_x^{k_x}}{k_x!} \cdot \frac{\xi_{x+1}^{k_{x+1}}}{k_{x+1}!} \dots \frac{\xi_L^{k_L}}{k_L!} \right) dp. \end{aligned}$$

Observe que, nas duas integrais acima, há uma mudança somente no termo

$$\frac{\xi_x^{k_x}}{k_x!} \cdot \frac{\xi_{x+1}^{k_{x+1}}}{k_{x+1}!}.$$

Este termo é alterado para

$$E := \frac{1}{k_x! k_{x+1}!} \left( \int_0^1 (\xi_x + \xi_{x+1})^{k_x + k_{x+1}} p^{k_x} (1-p)^{k_{x+1}} dp - \xi_x^{k_x} \xi_{x+1}^{k_{x+1}} \right).$$

Como  $(\xi_x + \xi_{x+1})^{k_x+k_{x+1}}$  é constante em relação à  $dp$ , obtemos

$$E = \frac{1}{k_x!k_{x+1}!} \left( (\xi_x + \xi_{x+1})^{k_x+k_{x+1}} \int_0^1 p^{k_x} (1-p)^{k_{x+1}} dp - \xi_x^{k_x} \xi_{x+1}^{k_{x+1}} \right).$$

Desenvolvendo este termo através do binômio de Newton, reescrevemos a expressão acima como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k_x!k_{x+1}!} \left( \sum_{k=0}^{k_x+k_{x+1}} \binom{k_x+k_{x+1}}{k} \xi_x^k \xi_{x+1}^{k_x+k_{x+1}-k} \int_0^1 p^{k_x} (1-p)^{k_{x+1}} dp - \xi_x^{k_x} \xi_{x+1}^{k_{x+1}} \right) \\ = & \sum_{k=0}^{k_x+k_{x+1}} \frac{\xi_x^k \xi_{x+1}^{k_x+k_{x+1}-k}}{k_x!k_{x+1}!} \frac{(k_x+k_{x+1})!}{(k_x+k_{x+1}-k)!k!} \int_0^1 p^{k_x} (1-p)^{k_{x+1}} dp - \frac{\xi_x^{k_x} \xi_{x+1}^{k_{x+1}}}{k_x!k_{x+1}!}. \end{aligned}$$

**Afirmção 3.0.7.**

$$\int_0^1 p^m (1-p)^n dp = \frac{m!n!}{(m+n)!(m+n+1)}.$$

Provemos a afirmação acima. Seja  $F(m, n) = \int_0^1 p^m (1-p)^n dp$ , com  $m, n \geq 0$ . Observe que  $F(m, n) = F(n, m)$  e

$$F(m, 0) = \int_0^1 p^m (1-p)^0 dp = \int_0^1 p^m dp = \left( \frac{p^{m+1}}{m+1} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{m+1}. \quad (3.4)$$

Além disso, considere

$$\frac{F(m, n)}{F(m+1, n-1)} = \frac{\int_0^1 p^m (1-p)^n dp}{\int_0^1 p^{m+1} (1-p)^{n-1} dp}.$$

Vamos resolver pelo método de integração por partes. Sejam  $u = p^m$  e  $dv = (1-p)^n dp$ . Logo,  $du = mp^{m-1} dp$  e  $v = \int (1-p)^n dp = -\frac{(1-p)^{n+1}}{n+1}$ . Então, como  $\int_0^1 u dv = [uv]_0^1 - \int_0^1 v du$ , temos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 p^m (1-p)^n dp &= \underbrace{\left( -\frac{p^m (1-p)^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_0^1}_{=0} - \int_0^1 -mp^{m-1} \frac{(1-p)^{n+1}}{n+1} dp \\ &= \frac{m}{n+1} \int_0^1 p^{m-1} (1-p)^{n+1} dp. \end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$\frac{F(m, n)}{F(m+1, n-1)} = \frac{\int_0^1 p^m (1-p)^n dp}{\frac{m+1}{n} \int_0^1 p^m (1-p)^n dp} = \frac{n}{m+1}. \quad (3.5)$$

Ainda mais,

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{F(m+k, n-k)}{F(m+k+1, n-k-1)} = \frac{F(m, n)}{F(m+1, n-1)} \cdot \frac{F(m+1, n-1)}{F(m+2, n-2)} \cdots \frac{F(m+n-1, 1)}{F(m+n, 0)} = \frac{F(m, n)}{F(m+n, 0)}.$$

Assim, pelas expressões (3.4) e (3.5), segue que

$$F(m, n) = \frac{1}{m+n+1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{m+k+1} = \frac{1}{m+n+1} \cdot \frac{n!}{(n+1) \cdot (n+2) \cdots (n+m)}.$$

Sabemos que

$$(n+m)! = n!(n+1)(n+2) \cdots (n+m) \Rightarrow (n+1)(n+2) \cdots (n+m) = \frac{(n+m)!}{n!}.$$

Portanto,

$$F(m, n) = \frac{m!n!}{(m+n)!(m+n+1)},$$

o que prova a afirmação.

Assim, pela Afirmação 3.0.7, obtemos

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=0}^{k_x+k_{x+1}} \frac{\xi_x^k \xi_{x+1}^{k_x+k_{x+1}-k}}{k_x! k_{x+1}!} \cdot \frac{(k_x+k_{x+1})!}{(k_x+k_{x+1}-k)! k!} \frac{k_x! k_{x+1}!}{(k_x+k_{x+1})! (k_x+k_{x+1}+1)} - \frac{\xi_x^{k_x} \xi_{x+1}^{k_{x+1}}}{k_x! k_{x+1}!} \\ &= \frac{1}{k_x+k_{x+1}+1} \sum_{k=0}^{k_x+k_{x+1}} \frac{\xi_x^k \xi_{x+1}^{k_x+k_{x+1}-k}}{k! (k_x+k_{x+1}-k)!} - \frac{\xi_x^{k_x} \xi_{x+1}^{k_{x+1}}}{k_x! k_{x+1}!}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Agora, vamos calcular o termo correspondente na definição de  $A_L$ . Consideremos um termo do somatório, digamos  $i$ , e façamos  $i = x$ :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k_x+k_{x-1}+1} \sum_{q=0}^{k_x+k_{x+1}} \left( \bar{F}(0, k_{-L}, \dots, k_{x-1}, q, k_x+k_{x+1}, \dots, k_L, 0, \xi^{(L)}) \right. \\ &\quad \left. - \bar{F}(0, k_{-L}, \dots, k_L, 0, \xi^{(L)}) \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$



Aplicando diretamente a definição da função  $\overline{F}$ , obtemos

$$\frac{1}{k_x + k_{x-1} + 1} \sum_{q=0}^{k_x + k_{x+1}} \left( \frac{\xi_{-L}^{k-L}}{k_{-L}!} \cdot \frac{\xi_{-L+1}^{k-L+1}}{k_{-L+1}!} \cdots \frac{\xi_x^q}{q!} \cdot \frac{\xi_{x+1}^{k_x + k_{x+1} - q}}{(k_x + k_{x+1} - q)!} \cdots \frac{\xi_L^{k_L}}{k_L!} \right) - \left( \frac{\xi_{-L}^{k-L}}{k_{-L}!} \cdot \frac{\xi_{-L+1}^{k-L+1}}{k_{-L+1}!} \cdots \frac{\xi_x^{k_x}}{k_x!} \cdot \frac{\xi_{x+1}^{k_{x+1}}}{k_{x+1}!} \cdots \frac{\xi_L^{k_L}}{k_L!} \right).$$

Analogamente, na diferença acima, há uma mudança somente em

$$\frac{\xi_x^{k_x}}{k_x!} \cdot \frac{\xi_{x+1}^{k_{x+1}}}{k_{x+1}!}.$$

Este termo é alterado para

$$\frac{1}{k_x + k_{x-1} + 1} \sum_{q=0}^{k_x + k_{x+1}} \frac{\xi_x^q \xi_{x+1}^{k_x + k_{x+1} - q}}{q! (k_x + k_{x+1} - q)!} - \frac{\xi_x^{k_x} \xi_{x+1}^{k_{x+1}}}{k_x! k_{x+1}!} = E,$$

ou seja, é exatamente igual à equação (3.6). Portanto, nos geradores  $G^{(L)}$  e  $A_L$  aplicados na função  $\overline{F}$ , os termos que descrevem o que ocorre no intervalo  $[-L + 1, \dots, L - 1]$  são iguais.

Vamos agora calcular os termos dos sítios da fronteira. Inicialmente, consideremos o sítio  $L$ . Assim, na definição de  $G^{(L)}$ , temos

$$\int_0^\infty \left( \overline{F}(\hat{k}, \xi_{-L}, \dots, \xi') - \overline{F}(\hat{k}, \xi^{(L)}) \right) \cdot \beta_+ e^{-\beta + \xi'} d\xi'.$$

Aplicando a definição de  $\overline{F}$ , a expressão acima é igual a

$$\int_0^\infty \left( F(k, \xi_{-L}, \dots, \xi') - F(k, \xi^{(L)}) \right) \cdot \underbrace{(\beta_+^0 \beta_-^0)}_{=1} \beta_+ e^{-\beta + \xi'} d\xi'.$$

Empregando a definição da função  $F$  e separando as integrais, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{\xi_{-L}^{k-L}}{k_{-L}!} \cdots \frac{\xi_L^{k_L}}{k_L!} \beta_+ e^{-\beta + \xi'} d\xi' - \int_0^\infty \frac{\xi_{-L}^{k-L}}{k_{-L}!} \cdots \frac{\xi_L^{k_L}}{k_L!} \beta_+ e^{-\beta + \xi'} d\xi' \\ &= \left( \frac{\xi_{-L}^{k-L}}{k_{-L}!} \cdots \frac{\xi_{L-1}^{k_{L-1}}}{k_{L-1}!} \right) \cdot \left( \int_0^\infty \frac{\xi_L^{k_L}}{k_L!} \beta_+ e^{-\beta + \xi'} d\xi' - \frac{\xi_L^{k_L}}{k_L!} \underbrace{\int_0^\infty \beta_+ e^{-\beta + \xi'} d\xi'}_{=1} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

**Afirmção 3.0.8.** *Para uma lei exponencial, temos que*

$$\int_0^\infty \frac{x^k}{k!} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda^{-k}.$$

De fato, vamos mostrar por indução sobre  $k$ . Para  $k = 1$ , temos que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^k}{1!} \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Vamos resolver esta integral pelo método de integração por partes. Sejam  $u = x$  e  $dv = \lambda e^{-\lambda x} dx$ . Logo,  $du = dx$  e  $v = \int \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}$ . Então, como  $\int_0^{\infty} u dv = (uv)|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} v du$ , temos que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^k}{1!} \lambda e^{-\lambda x} dx = \underbrace{(-xe^{-\lambda x})|_0^{\infty}}_{=0} - \int_0^{\infty} -e^{-\lambda x} dx = \left( -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right) \Big|_0^{\infty} = \lambda^{-1}.$$

Suponha que seja válido para  $k$ . Vamos mostrar que vale para  $k + 1$ .

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Analogamente, vamos resolver esta integral pelo método de integração por partes. Considere  $u = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$  e  $dv = \lambda e^{-\lambda x} dx$ . Assim,  $du = (k+1) \frac{x^k}{(k+1)!} dx$  e  $v = \int \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}$ . Desta forma, como  $\int_0^{\infty} u dv = (uv)|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} v du$ , segue que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \lambda e^{-\lambda x} dx &= \underbrace{\left( -\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda x} \right) \Big|_0^{\infty}}_{=0} - \int_0^{\infty} -(k+1) \frac{x^k}{(k+1)!} e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{x^k}{k!} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^{-k}}{\lambda} = \lambda^{-(k+1)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^k}{k!} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda^{-k},$$

mostrando a afirmação acima.

Desta forma, pela Afirmação 3.0.8, a expressão em (3.8) é igual a

$$\left( \frac{\xi_{-L}^{k-L}}{k_{-L}!} \dots \frac{\xi_{L-1}^{k_{L-1}}}{k_{L-1}!} \right) \cdot \left( \beta_+^{-k_L} - \frac{\xi_L^{k_L}}{k_L!} \right). \quad (3.9)$$

Agora, vamos calcular o termo correspondente na definição de  $A_L$ :

$$\overline{F}(0, k_{-L}, \dots, k_{L-1}, 0, k_L, \xi^{(L)}) - \overline{F}(0, k_{-L}, \dots, k_L, 0, \xi^{(L)}).$$

Aplicando a definição da função  $\bar{F}$ , reescrevemos a expressão acima como

$$F(k_{-L}, \dots, k_{L-1}, 0, \xi^{(L)}) (\beta_+^{-k_L} \beta_-^0) - F(k_{-L}, \dots, k_L, \xi^{(L)}) \underbrace{(\beta_+^0 \beta_-^0)}_{=1}.$$

Empregando a definição da função  $F$ , obtemos

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\xi_{-L}^{k_{-L}}}{k_{-L}!} \dots \frac{\xi_{L-1}^{k_{L-1}}}{k_{L-1}!} \cdot \frac{\xi_0^0}{0!} \cdot \beta_+^{-k_L} \cdot \beta_-^0 \right) - \left( \frac{\xi_{-L}^{k_{-L}}}{k_{-L}!} \dots \frac{\xi_{L-1}^{k_{L-1}}}{k_{L-1}!} \cdot \frac{\xi_L^{k_L}}{k_L!} \right) \\ &= \left( \frac{\xi_{-L}^{k_{-L}}}{k_{-L}!} \dots \frac{\xi_{L-1}^{k_{L-1}}}{k_{L-1}!} \right) \cdot \left( \beta_+^{-k_L} - \frac{\xi_L^{k_L}}{k_L!} \right), \end{aligned}$$

que é igual à equação (3.9).

De forma análoga, calculamos os termos referentes ao sítio  $-L$ . Desta forma, na definição de  $G^{(L)}$ , temos

$$\int_0^\infty \left( \bar{F}(\hat{k}, \xi', \dots, \xi_L) - \bar{F}(\hat{k}, \xi^{(L)}) \right) \cdot \beta_- e^{-\beta - \xi'} d\xi'.$$

Aplicando a definição de  $\bar{F}$ , a expressão anterior é igual a

$$\int_0^\infty \left( F(k, \xi', \dots, \xi_L) - F(k, \xi^{(L)}) \right) \cdot \underbrace{(\beta_+^0 \beta_-^0)}_{=1} \beta_- e^{-\beta - \xi'} d\xi'.$$

Empregando a definição da função  $F$  e separando as integrais, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{\xi'^{k_{-L}}}{k_{-L}!} \dots \frac{\xi_L^{k_L}}{k_L!} \beta_- e^{-\beta - \xi'} d\xi' - \int_0^\infty \frac{\xi_{-L}^{k_{-L}}}{k_{-L}!} \dots \frac{\xi_L^{k_L}}{k_L!} \beta_- e^{-\beta - \xi'} d\xi' \\ &= \left( \frac{\xi_{-L+1}^{k_{-L+1}}}{k_{-L+1}!} \dots \frac{\xi_L^{k_L}}{k_L!} \right) \cdot \left( \int_0^\infty \frac{\xi'^{k_{-L}}}{k_{-L}!} \beta_- e^{-\beta - \xi'} d\xi' - \frac{\xi_{-L}^{k_{-L}}}{k_{-L}!} \underbrace{\int_0^\infty \beta_- e^{-\beta - \xi'} d\xi'}_{=1} \right). \end{aligned}$$

Assim, pela Afirmação 3.0.8, reescrevemos o acima como

$$\left( \frac{\xi_{-L+1}^{k_{-L+1}}}{k_{-L+1}!} \dots \frac{\xi_L^{k_L}}{k_L!} \right) \cdot \left( \beta_-^{-k_{-L}} - \frac{\xi_{-L}^{k_{-L}}}{k_{-L}!} \right). \quad (3.10)$$

Agora, vamos calcular o termo correspondente na definição de  $A_L$ :

$$\bar{F}(k_{-L}, 0, k_{-L+1}, \dots, k_L, 0, \xi^{(L)}) - \bar{F}(0, k_{-L}, \dots, k_L, 0, \xi^{(L)}).$$

Aplicando a definição da função  $\bar{F}$ , a expressão acima é igual a

$$F(0, k_{-L+1}, \dots, k_L, \xi^{(L)}) (\beta_+^0 \beta_-^{-k-L}) - F(k_{-L}, \dots, k_L, \xi^{(L)}) \underbrace{(\beta_+^0 \beta_-^0)}_{=1}.$$

Empregando a definição da função  $F$ , obtemos

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\xi_0^0}{0!} \cdot \frac{\xi_{-L+1}^{k-L+1}}{k_{-L+1}!} \cdots \frac{\xi_L^{k_L}}{k_L!} \cdot \beta_+^0 \cdot \beta_-^{-k-L} \right) - \left( \frac{\xi_{-L}^{k-L}}{k_{-L}!} \cdot \frac{\xi_{-L+1}^{k-L+1}}{k_{-L+1}!} \cdots \frac{\xi_L^{k_L}}{k_L!} \right) \\ &= \left( \frac{\xi_{-L+1}^{k-L+1}}{k_{-L+1}!} \cdots \frac{\xi_L^{k_L}}{k_L!} \right) \cdot \left( \beta_-^{-k-L} - \frac{\xi_{-L}^{k-L}}{k_{-L}!} \right), \end{aligned}$$

que é igual à equação (3.10).

Portanto,

$$G^{(L)} \bar{F}(\hat{k}, \xi^{(L)}) = A_L \bar{F}(\hat{k}, \xi^{(L)}).$$

□

**Corolário 3.0.9.** *Temos que*

$$\int F(k, \xi^{(L)}) d\mu_L = \sum_{k_++k_-=|k|} \beta_+^{-k_+} \beta_-^{-k_-} q_L(k; k_+, k_-) \quad (3.11)$$

onde  $\mu_L$  é a única medida invariante para o processo gerado por  $G^{(L)}$  e

$$q_L(k; k_+, k_-) = Q_k^L \left( \{k_+ \text{ partículas sairão em } \delta(+)\text{ e } k_- \text{ em } \delta(-)\} \right). \quad (3.12)$$

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.0.6, para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\int \bar{F}(\hat{k}, \xi_t^{(L)}) d\pi_{\xi_0^{(L)}}^{(L)} = \int \bar{F}(n_t, \xi_0^{(L)}) dQ_{\hat{k}}^{(L)}. \quad (3.13)$$

Fazendo  $t \rightarrow \infty$ , no lado esquerdo da equação (3.13), pela convergência fraca, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int \bar{F}(\hat{k}, \xi_t^{(L)}) d\pi_{\xi_0^{(L)}}^{(L)} = \int \bar{F}(\hat{k}, \xi_t^{(L)}) d\mu_L,$$

onde  $\mu_L$  é a única medida invariante para o processo gerado por  $G^{(L)}$ . Assim, obtemos a distribuição limitante  $\xi_L$  para o processo  $\xi_t^{(L)}$ . Pela equação (3.3) da Definição 3.0.5, temos

$$\int \bar{F}(\hat{k}, \xi_t^{(L)}) d\mu_L = \int F(k, \xi^{(L)}) d\mu_L.$$

Já no lado direito da equação (3.13), pelo Teorema da Convergência Dominada, adquirimos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int \bar{F}(n_t, \xi_0^{(L)}) dQ_{\hat{k}}^{(L)} = \int \bar{F}(n, \xi_0^{(L)}) dQ_{\hat{k}}^{(L)}$$

onde  $\lim_{t \rightarrow \infty} n_t = n$  quase certamente, com  $n = (k_-, 0, \dots, 0, k_+)$  com probabilidade  $q_L(k; k_+, k_-)$ , ou seja,  $Q_{\hat{k}}^L(\{k_+ \text{ partículas saíram em } \delta(+)\text{ e } k_- \text{ em } \delta(-)\})$ . Pela equação (3.3) da Definição 3.0.5, obtemos

$$\begin{aligned} \int \bar{F}(n, \xi_0^{(L)}) dQ_{\hat{k}}^{(L)} &= \int F(n', \xi_0^{(L)}) \beta_+^{-k_+} \beta_-^{-k_-} dQ_k^{(L)} \\ &= \sum_{k_+ + k_- = |k|} \beta_+^{-k_+} \beta_-^{-k_-} q_L(k; k_+, k_-). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int F(k, \xi^{(L)}) d\mu_L = \sum_{k_+ + k_- = |k|} \beta_+^{-k_+} \beta_-^{-k_-} q_L(k; k_+, k_-).$$

□

## Capítulo 4

# Estimativas de Absorção via Teorema de De Finetti

O estudo da medida estacionária  $\mu_L$  é reduzido para o de  $q_L$ , através do Corolário 3.0.9. Assim, precisaremos de estimativas de probabilidade para a distribuição de saída de partículas que se movem de acordo com o processo definido na Definição 3.0.5. Será conveniente considerar este processo como embutido em outro, onde cada partícula tem um rótulo. Este será o processo  $x$ , que definiremos a seguir.

**Definição 4.0.10** (Processo  $x$ ). *Neste processo, as partículas tem um rótulo e se movem em  $I_L$  da seguinte maneira:*

*Escolhamos o par de sítios  $x, x+1, -L \leq x \leq L-1$ , como da Definição 3.0.5, com mesma probabilidade. As partículas localizadas em outros sítios, diferentes de  $x, x+1$ , não se movem. Calculemos o número total de partículas em  $x, x+1$ ; seja este número igual a  $n_x + n_{x+1}$ . Escolhamos o número inteiro  $p$  uniformemente entre 0 e  $n_x + n_{x+1}$  e independentemente uma permutação de  $n_x + n_{x+1}$  rótulos das partículas em  $x$  e  $x+1$ . Então, coloquemos as primeiras  $p$  partículas (isto é, aquelas partículas com os rótulos correspondendo aos primeiros  $p$  elementos da permutação) em  $x$  e as outras em  $x+1$ . Como na Definição 3.0.5, quando  $\delta(+)$  e  $\delta(-)$  são escolhidos, as partículas em  $-L$  e  $L$  são transferidas para  $\delta(+)$  e  $\delta(-)$ , respectivamente, onde permanecerão indefinidamente.*

Podemos observar que, a partir da Definição 4.0.10, este processo satisfaz as propriedades do processo  $n$  da Definição 3.0.5, ou seja, se somente observarmos o número de partículas localizadas em cada sítio, recuperaremos o processo  $n$  da Definição 3.0.5.

Denotemos por  $p_L(x_1, \dots, x_N; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N), \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \dots, N$ , a probabilidade no processo  $x$  que a partícula  $i$  irá para  $\delta(\varepsilon_i)$ , dada a posição inicial  $x_1, \dots, x_N$ , onde  $N = \#$ partículas.

Por exemplo, considere  $p_L(4, 4, 6; 1, -1, 1)$ . Temos que esta é a probabilidade de inicialmente a primeira e a segunda partículas estarem no sítio 4 e a terceira no sítio 6, mas depois do processo, a primeira e a terceira irão para  $\delta(+)$  e a segunda para  $\delta(-)$ .

Assim, temos que

$$q_L(n; k_+, k_-) = \sum^* p_L(x_1, \dots, x_N; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N), \quad (4.1)$$

onde

$$\mathbf{1}_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y = x \\ 0, & \text{se } y \neq x \end{cases},$$

$\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_x(x_i) = n_x$ ,  $|n| = N$  e  $\sum^*$  é a soma sobre todas sequências  $\varepsilon_i, i = 1, \dots, N$ , tal que

o número total de 1's é  $k_+$ , isto é,  $\sum_{i=1}^N \varepsilon_i = 2k_+ - N$ .

Vamos estabelecer agora uma permutabilidade assintótica para as nossas medidas estacionárias  $\mu_L$ .

**Proposição 4.0.11.** *Seja  $P_{x_1, \dots, x_n}^{(L)}$  o processo  $x$  com  $n$  partículas inicialmente em  $x_1, \dots, x_n$ . Para  $m < n$ , seja  $\{i_1, \dots, i_m\}$  um subconjunto de  $\{1, \dots, n\}$ ,  $y_j = x_{i_j}, j = 1, \dots, m$ . Então, o processo  $p_{x_1, \dots, x_n}^{(L)}$  para as variáveis aleatórias  $x_{i_1}(t), \dots, x_{i_m}(t)$  é isomorfo ao processo  $p_{y_1, \dots, y_m}^{(L)}$  de  $m$  partículas com condição inicial  $y_1, \dots, y_m$ . Em particular, para qualquer  $1 \leq i \leq n$ ,*

$$\begin{aligned} & \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} p_L(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_n) \\ &= p_L(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_{i+1}, \dots, \varepsilon_n). \end{aligned}$$

**Observação 4.0.12.** *Em palavras, colocar mais partículas no sistema não afeta o comportamento das partículas que já estavam lá.*

A demonstração abaixo da Proposição 4.0.11 não é a mesma demonstração do artigo. Fizemos esta outra demonstração pois a do artigo não nos pareceu convincente.

*Demonstração.* Escolhamos o par de sítios  $x, x + 1$  envolvidos no deslocamento de partículas em um dado tempo. Claramente, a distribuição uniforme na permutação de  $N$  partículas induz a distribuição uniforme nas permutações de  $M$  delas. Assim, nós somente precisamos mostrar que o número de partículas no sítio  $x$ , depois do rearranjo, tem a lei correta. Isto é equivalente a dizer que, se escolhermos uniformemente um subconjunto de  $M$  números entre 1 e  $N$  e então escolhermos um número  $0 \leq p \leq N$ , temos que o número de elementos do subconjunto que é menor

que  $p$  deve ter lei uniforme em  $0, \dots, M$ . Em outras palavras, tomemos  $X_1, \dots, X_N$  variáveis aleatórias independentes com  $\mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$ . Logo, queremos mostrar que, para cada  $0 \leq q \leq M$ ,

$$\frac{1}{N+1} \sum_{p=0}^N \mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^p X_i = q \mid \sum_{i=1}^N X_i = M \right) = \frac{1}{M+1}.$$

Porém, considerando  $L$  como o número de partículas no sítio  $x$  depois do processo, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{N+1} \sum_{p=0}^N \mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^p X_i = q \mid \sum_{i=1}^N X_i = M \right) &= \sum_{p=0}^N \mathbb{P} \left( L = p, \sum_{i=1}^p X_i = q \mid \sum_{i=1}^N X_i = M \right) \\ &= \mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^L X_i = q \mid \sum_{i=1}^N X_i = M \right). \end{aligned}$$

Assim, basta mostrarmos que

$$\mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^L X_i = q \mid \sum_{i=1}^N X_i = M \right) = \frac{1}{M+1}. \quad (4.2)$$

**Exemplo 4.0.13.** Considere  $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ . Analisemos o exemplo da Figura 4.1. Sejam  $N$  o número total de partículas,  $M$  o número de partículas azuis,  $L$  a quantidade de partículas no sítio  $x$  depois do processo e  $q$  a quantidade de partículas azuis no sítio  $x$  depois do processo. Assim,  $X_1, \dots, X_N$  são variáveis aleatórias independentes com  $\mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$ .

Desta forma, no exemplo, temos que  $N = 9$ ,  $M = 3$ ,  $L = 5$  e  $q = 2$ . O processo funciona da seguinte maneira: fixamos os rótulos, que neste caso são as letras, e sorteamos as variáveis  $X_i$  para as cores das bolas.

Assim, obtemos

$X_1 = 1$  representa que a bola com a letra  $a$  passa a ser azul;

$X_1 = 0$  representa que a bola com a letra  $a$  passa a ser vermelha;

$X_2 = 1$  representa que a bola com a letra  $b$  passa a ser azul;

$X_2 = 0$  representa que a bola com a letra  $b$  passa a ser vermelha;

e assim por diante.

Então, no exemplo, obtemos  $X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 1, X_5 = 1, X_6 = 0, X_7 = 1, X_8 = 0$  e  $X_9 = 0$ .

Mostremos agora a igualdade (4.2). Seja  $\Omega = \{\text{escolha de } q \text{ bolas azuis}\}$ . A cardinalidade de  $\Omega$  é

$$|\Omega| = \binom{N}{M}$$



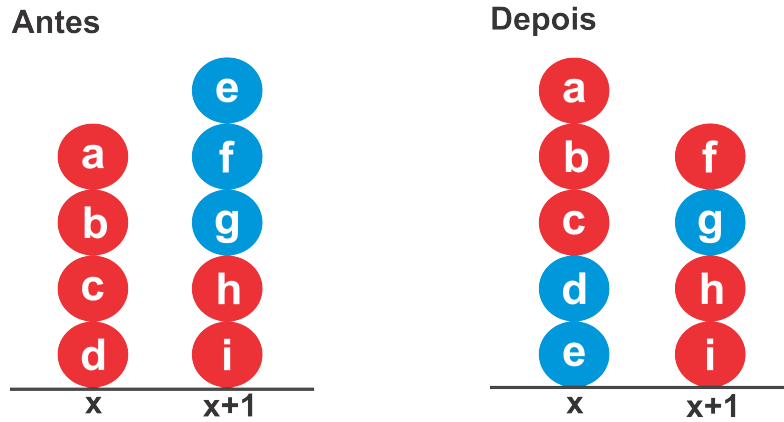


Figura 4.1: Antes e depois das partículas vermelhas e azuis.

Vejam os que a igualdade (4.2) vale para  $q = 0$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{haver } 0 \text{ bolas azuis antes de } L) &= \frac{1}{N+1} \sum_{p=0}^N \mathbb{P}(\text{haver zero bolas azuis antes de } p) \\ &= \frac{1}{N+1} \left( \frac{\binom{N}{M}}{\binom{N}{M}} + \frac{\binom{N-1}{M}}{\binom{N}{M}} + \frac{\binom{N-2}{M}}{\binom{N}{M}} + \dots + \frac{\binom{N-M}{M}}{\binom{N}{M}} + 0 + \dots + 0 \right), \end{aligned}$$

onde os zeros representam que sempre haverá bolas azuis no sítio  $x$ . Daí, a expressão anterior é igual a

$$\frac{1}{N+1} \cdot \frac{1}{\binom{N}{M}} \cdot \sum_{k=N-M}^N \binom{k}{M}.$$

Utilizando o Teorema das Colunas do Triângulo de Pascal, que diz que a soma dos elementos de uma coluna do triângulo (começando no primeiro elemento da coluna) é igual ao elemento que está avançado uma linha e uma coluna sobre a última parcela da soma, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N+1} \cdot \frac{1}{\binom{N}{M}} \cdot \binom{N+1}{M+1} \\ &= \frac{1}{N+1} \cdot \frac{M!(N-M)!}{N!} \cdot \frac{(N+1)!}{(M+1)!(N-M)!} \\ &= \frac{1}{N+1} \cdot \frac{M!(N+1)N!}{N!(M+1)M!} = \frac{1}{M+1}. \end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar para um  $q$  qualquer.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{haver } q \text{ bolas azuis antes de L}) &= \frac{1}{N+1} \sum_{p=0}^N \mathbb{P}(\text{haver } q \text{ bolas azuis antes de } p) \\ &= \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1}{\binom{N}{M}} \sum_{p=0}^N \binom{p}{q} \cdot \binom{N-p}{M-q}.\end{aligned}$$

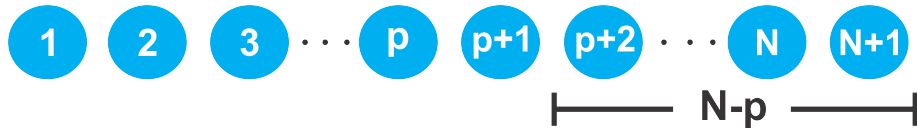
**Afirmção 4.0.14.**

$$\sum_{p=0}^N \binom{p}{q} \cdot \binom{N-p}{M-q} = \binom{N+1}{M+1}. \quad (4.3)$$

Provaremos a identidade acima por um argumento combinatório.

No lado direito da identidade, temos uma combinação, onde escolhemos  $M+1$  objetos de  $N+1$ .

Já para o lado esquerdo, seja  $A_p = \{\text{listas nas quais o objeto } p+1 \text{ está presente e há nessa lista } q \text{ objetos antes dele e } M-q \text{ depois dele}\}$ . Observe que  $\bigcup_{p=0}^N A_p = \{\text{listas}\}$ .



Assim, na lista do escolhidos em  $\binom{N+1}{M+1}$ , o objeto  $p+1$  será o de posição relativa  $q+1$ . Logo,

$$\sum_{p=0}^N \binom{p}{q} \cdot \binom{N-p}{M-q} = \binom{N+1}{M+1}.$$

o que mostra a afirmação.

Desta forma, utilizando a Afirmção 4.0.14, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{haver } q \text{ bolas azuis antes de L}) &= \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1}{\binom{N}{M}} \binom{N+1}{M+1} \\ &= \frac{1}{N+1} \cdot \frac{M!(N-M)!}{N!} \cdot \frac{(N+1)!}{(M+1)!(N-M)!} \\ &= \frac{1}{N+1} \cdot \frac{M!(N+1)N!}{N!(M+1)M!} = \frac{1}{M+1}.\end{aligned}$$

□

**Proposição 4.0.15.** *Dados qualquer número inteiro positivo  $N$ , qualquer  $x_1, \dots, x_N$ ,*

$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$ , qualquer  $u \in (-1, 1)$  e qualquer permutação  $\sigma(1), \dots, \sigma(N)$ ,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left( p_L(x_1 + [uL], \dots, x_N + [uL], \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N) - p_L(x_1 + [uL], \dots, x_N + [uL], \varepsilon_{\sigma(1)}, \dots, \varepsilon_{\sigma(N)}) \right) = 0, \quad (4.4)$$

onde  $[uL]$  é a parte inteira de  $uL$ .

**Observação 4.0.16.** A parte inteira de  $uL$ ,  $[uL]$ , é o sítio mais próximo (à esquerda) de  $u$ .

A demonstração desta proposição no artigo o qual este trabalho é baseado remete para um outro artigo que também toma como referência um outro artigo, encontrando-se em um contexto diferente do que é analisado aqui. Devido a isso, faremos um esboço da demonstração. Enfatizamos que apresentaremos apenas uma heurística da demonstração.

*Demonstração.* Sejam  $X_t$  e  $Y_t$  passeios aleatórios independentes com  $X_0 = x_0 + [uL]$  e  $Y_0 = y_0 + [uL]$ . Considere  $\tau_1 = \inf\{t : X_t = Y_0\}$ ,  $\tau_2 = \inf\{t : Y_t = X_0\}$ ,  $\tau^X = \inf\{t : X_t = L \text{ ou } X_t = -L\}$  e  $\tau^Y = \inf\{t : Y_t = L \text{ ou } Y_t = -L\}$ .

**Afirmção 4.0.17.**  $\lim_{L \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\zeta < \min\{\tau^X, \tau^Y\}) = 1$ , onde  $\zeta := \min\{t : |X_t - Y_t| \leq 1\}$ .

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\zeta < \min\{\tau^X, \tau^Y\}) &\geq \mathbb{P}(\tau_1 < \tau^X, \tau_2 < \tau^Y) \\ &= \mathbb{P}(\tau_1 < \tau^X) \cdot \mathbb{P}(\tau_2 < \tau^Y). \end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\mathbb{P}(\tau_1 < \tau^X) = 1 - \mathbb{P}(\tau_1 > \tau^X) = 1 - \frac{y_0 - x_0}{y_0 + [uL] + L}.$$

Logo,  $\lim_{L \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\tau_1 < \tau^X) = 1$ . Analogamente,  $\lim_{L \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\tau_2 < \tau^X) = 1$ . Portanto,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\zeta < \min\{\tau^X, \tau^Y\}) = 1.$$

□

Seja  $\Omega$  o espaço das realizações dos processos de Poisson. Pela Afirmção 4.0.17, quando duas partículas dadas estão em sítios vizinhos, elas tem uma probabilidade positiva de trocar seus nomes. Assim, sejam as partículas com rótulos **a** e **d** fixadas, como na Figura 4.2. Seja  $\mathcal{G} = \{\omega \in \Omega; \text{ existe um primeiro tempo no qual } \mathbf{a} \text{ e } \mathbf{d} \text{ são vizinhas e o relógio do elo ligando } \mathbf{a} \text{ e } \mathbf{d} \text{ toca}\}$ . Considere a função  $S : \Omega \rightarrow \Omega$ , que troca os rótulos **a** e **d** após o relógio tocar. No complementar de

$\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{G}^c$ ,  $S$  age como a identidade. A transformação  $S$  não muda a probabilidade. O ponto essencial é que, em  $\mathcal{G}$ , a transformação  $S$  é de forma que as trajetórias para todas as partículas diferentes de  $i$  e  $j$  são a mesma para  $\omega$  ou  $S(\omega)$  e são trocadas para  $i$  e  $j$  depois deste momento fatal. Em particular, temos que

$$p_L(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_N, \omega \in \mathcal{G}) = p_L(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_N, \omega \in \mathcal{G}).$$

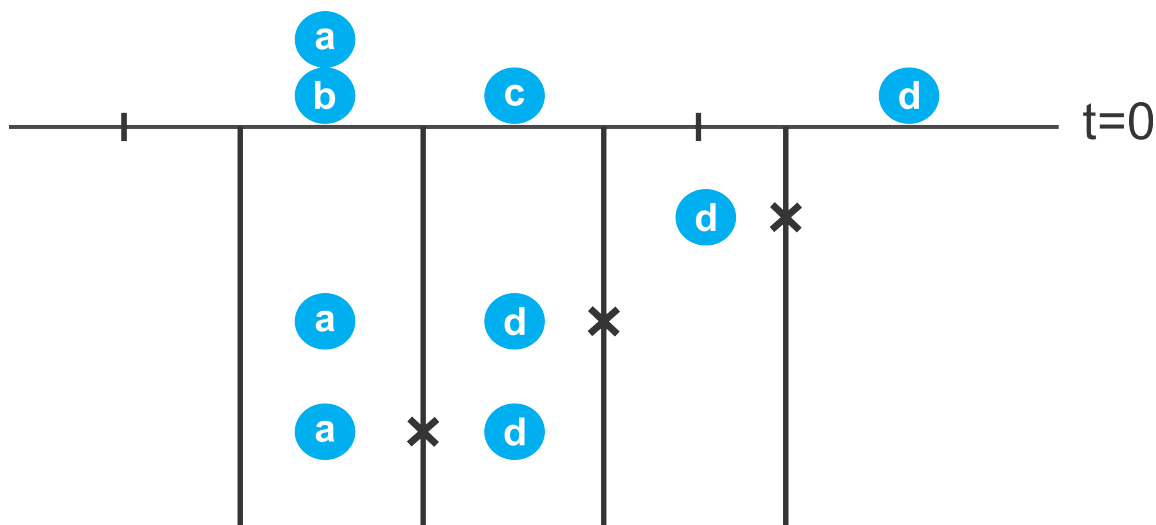


Figura 4.2: Descrição das partículas com rótulos **a** e **d**.

Temos que  $\lim_{L \rightarrow \infty} p_L(\mathcal{G}) = 1$ . Isso ocorre devido a dois fatos:

- (1) cada vez que as partículas são vizinhas, existe uma probabilidade  $\frac{1}{2}$  que haja um relógio entre suas posições antes que as duas partículas se separem;
- (2) quando separadas, as duas partículas se movem de acordo com um passeio aleatório simples independente, movendo-se ao menos uma determinada quantidade de vezes antes que uma delas seja absorvida na fronteira.

Assim, prova-se para qualquer transposição de índices, logo, para qualquer permutação, já que toda permutação pode ser escrita como um produto de transposições.  $\square$

**Proposição 4.0.18.** *Dados qualquer número inteiro positivo  $N$ , qualquer  $x_1, \dots, x_N$ ,  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$ , qualquer  $u \in (-1, 1)$ ,*

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left( p_L(x_1 + [uL], \dots, x_N + [uL], \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N) - \prod_{i=1}^N p_L(x_i + [uL], \varepsilon_i) \right) = 0. \quad (4.5)$$

*Demonstração.* Para o caso  $N = 2$ , um argumento análogo ao empregado na referência [3] prova o Teorema 3.2. Não entraremos em detalhes, assumindo sua validade. Nosso objetivo será portanto provar o resultado a partir do caso  $N = 2$ .

Fixado  $u$ , vamos construir uma medida  $\nu_L$  em  $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}}$  da seguinte maneira. Primeiro, denote um elemento qualquer de  $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}}$  por  $\eta$ . Portanto, dado  $x_i \in \mathbb{Z}$ , temos que  $\eta(x_i)$  vale  $\pm 1$ .

Sejam  $x_1, \dots, x_n$  elementos distintos de  $\mathbb{Z}$ . Definamos a marginal de  $\nu_L$  neste conjunto de pontos por

$$\begin{aligned} \nu_L(\{\eta \in (-1, +1)^{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}}; \eta(x_i) = \varepsilon_i, i = 1, \dots, n\}) \\ = p_L(x_1 + [uL], \dots, x_n + [uL], \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n). \end{aligned}$$

Pela Proposição 4.0.11, as marginais são consistentes, o que quer dizer que estas definem uma única medida  $\nu_L$  em  $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}}$  pelo Teorema de Extensão de Kolmogorov.

A Proposição 4.0.15 nos diz que qualquer limite fraco de  $\nu_L$  é permutável, ou seja, a medida permanece a mesma se realizamos qualquer permutação de finitas entradas.

Denote por  $\nu$  um limite (via alguma subsequência) de  $\nu_L$ . Note que o conjunto  $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}}$  é um espaço compacto, e o Teorema de Prohorov garante a existência de tal limite por alguma subsequência (já que, por Prohorov,  $\{\nu_L\}_L$  é um conjunto relativamente compacto de medidas).

O Teorema de De Finetti, por sua vez, nos diz que qualquer medida permutável em  $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}}$  é combinação convexa de medidas produto, ou seja, combinação convexa de medidas produto Bernoulli. Logo, a medida  $\nu$  é combinação convexa de medidas produto Bernoulli. Seja  $\alpha$  a lei da mistura.

Nosso objetivo é mostrar que a medida  $\nu$  está unicamente determinada. Como  $\{\nu_L\}_L$  é um conjunto relativamente compacto de medidas, isto implica a convergência da sequência inteira  $\nu_L$  para  $\nu$ , o que implicará em última instância a convergência de  $p_L$ .

Para  $N = 2$ , sabemos que a marginal em  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  da medida limite  $\nu$  é uma medida produto Bernoulli de parâmetro constante  $c$ . Lembrando que  $\alpha$  é a lei da mistura, não é difícil ver que

$$\int_0^1 p^2 \alpha(dp) = \left( \int_0^1 p \alpha(dp) \right)^2.$$

Como  $f(p) = p^2$  é uma função estritamente convexa, a única possibilidade é que  $\alpha$  seja uma Delta de Dirac, o que implica que  $\nu$  é medida produto, que por sua vez implica a convergência de  $\nu_L$ , que por sua vez implica a convergência de  $p_L$  para

uma medida produto, que implica o enunciado.



# Capítulo 5

## Demonstração da Lei de Fourier

No Capítulo 2, nós introduzimos as variáveis  $q_x, p_x$  e  $\xi_x = q_x^2 + p_x^2$ ,  $x \in \mathbb{Z}$ , que denotavam, respectivamente, a posição, a velocidade e a energia do oscilador no sítio  $x$ . Daí, definimos uma evolução estocástica para o sistema de osciladores. Neste capítulo, demonstraremos o Teorema 2.2.1 e o Teorema 2.2.2, que mostram a validade da Lei de Fourier.

Primeiramente, demonstremos o Teorema 2.2.1.

*Demonstração.* É suficiente estudarmos a convergência das funções  $F(k, \xi)$ , pois elas são classe determinante de convergência. Assim, usando o Corolário 3.0.9, precisamos calcular o limte de  $q_L(k; k_+, k_-)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} F(k, \xi^{(L)}) d\mu_L &= \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{k_+ + k_- = |k|} \beta_+^{-k_+} \beta_-^{-k_-} q_L(k; k_+, k_-) \\ &= \sum_{k_+ + k_- = |k|} \beta_+^{-k_+} \beta_-^{-k_-} \binom{|k|}{k_+} \left(\frac{1+u}{2}\right)^{k_+} \left(\frac{1-u}{2}\right)^{k_-}, \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade acima usamos a Proposição 4.0.18. Alterando os índices do somatório, utilizando a definição de Binômio de Newton e lembrando que  $\beta^{-1} = KT$ , onde  $K$  é a constante de Boltzmann, obtemos

$$\begin{aligned} &= \sum_{k_+ = 0}^{|k|} \binom{|k|}{k_+} \left(\frac{1+u}{2\beta_+}\right)^{k_+} \left(\frac{1-u}{2\beta_-}\right)^{|k|-k_+} \\ &= \left(\frac{1+u}{2\beta_+} + \frac{1-u}{2\beta_-}\right)^{|k|} \\ &= \left(K \left(T_- \left(\frac{1-u}{2}\right) + T_+ \left(\frac{1+u}{2}\right)\right)\right)^{|k|} \\ &= (KT(u))^{|k|}. \end{aligned}$$

Por outro lado, sendo  $k = (k_1, \dots, k_n)$  e  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \nu_{T(u)}(F(k, \xi)) &= \int F(k, \xi) d\nu_{T(u)} \\ &= \int \frac{\xi_1^{k_1}}{k_1!} \cdot \frac{\xi_2^{k_2}}{k_2!} \cdots \frac{\xi_n^{k_n}}{k_n!} d\nu_{T(u)}(\xi_1, \dots, \xi_n). \end{aligned}$$

Pela igualdade (2.9), temos que o parâmetro é  $\frac{1}{KT(u)}$ . Assim, reescrevemos a expressão anterior como

$$\int \frac{\xi_1^{k_1}}{k_1!} \frac{1}{KT(u)} e^{-\frac{\xi_1}{KT(u)}} d\xi_1 \cdots \int \frac{\xi_n^{k_n}}{k_n!} \frac{1}{KT(u)} e^{-\frac{\xi_n}{KT(u)}} d\xi_n.$$

Usando a Afirmação 3.0.8, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{k_1!}{k_1!} \left( \frac{1}{KT(u)} \right)^{-k_1} \cdot \frac{k_2!}{k_2!} \left( \frac{1}{KT(u)} \right)^{-k_2} \cdots \frac{k_n!}{k_n!} \left( \frac{1}{KT(u)} \right)^{-k_n} \\ &= (KT(u))^{k_1} \cdot (KT(u))^{k_2} \cdots (KT(u))^{k_n} \\ &= (KT(u))^{k_1+k_2+\dots+k_n} \\ &= (KT(u))^{|k|}. \end{aligned}$$

□

Mostraremos agora o Teorema 2.2.1.

*Demonstração.* Primeiramente, vejamos que o fluxo de calor  $Q_L$  independe do oscilador  $x$ . Sabemos que

$$Q_L = \int \left( \frac{\xi_x - \xi_{x+1}}{2} \right) d\mu_L.$$

Pelo Corolário 3.0.9, temos

$$\int F(k, \xi^{(L)}) d\mu_L = \sum_{k_++k_-} \beta_+^{-k_+} \beta_-^{k_-} q_L(k; k_+, k_-),$$

onde  $\mu_L$  é a única medida estacionária para o processo gerado por  $G^L$  e

$$q_L(k; k_+, k_-) = Q_k^L(\{k_+ \text{ partículas saíam em } \delta(+)\text{ e } k_- \text{ em } \delta(-)\}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} Q_L &= \int \left( \frac{\xi_x - \xi_{x+1}}{2} \right) d\mu_L = \frac{1}{2} \left( \int \frac{\xi_x}{1!} d\mu_L - \int \frac{\xi_{x+1}}{1!} d\mu_L \right) \\ &= \frac{\beta_+^0 \beta_-^{-1} (q_L(x; 0, 1) - q_L(x+1; 0, 1)) + \beta_+^{-1} \beta_-^0 (q_L(x; 1, 0) - q_L(x+1; 1, 0))}{2} \end{aligned} \quad (5.1)$$



Como sabemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(x \text{ chega em } L \text{ antes de } -L) &= \frac{L+x}{2L}, \\ \mathbb{P}(x \text{ chega em } -L \text{ antes de } L) &= \frac{L-x}{2L}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(x+1 \text{ chega em } L \text{ antes de } -L) &= \frac{L+x+1}{2L}, \\ \mathbb{P}(x+1 \text{ chega em } -L \text{ antes de } L) &= \frac{L-x-1}{2L},\end{aligned}$$

concluimos que a expressão (5.1) é igual a

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2} \left( \beta_-^{-1} \left( \frac{L-x}{2L} - \frac{L-x-1}{2L} \right) + \beta_+^{-1} \left( \frac{L+x}{2L} - \frac{L+x+1}{2L} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4L} (\beta_-^{-1} - \beta_+^{-1}) = -\frac{1}{4L} (\beta_+^{-1} - \beta_-^{-1}).\end{aligned}$$

Vamos agora mostrar que

$$Q = -\frac{K}{2} \frac{dT(u)}{du}, \quad -1 < u < 1, \quad (5.2)$$

onde  $T(u)$  é definido pela equação (2.8),  $K$  é a constante de Boltzmann e  $Q = \lim_{L \rightarrow \infty} LQ_L$ . Por um lado, usando o que acabamos de mostrar, temos

$$\begin{aligned}Q &= \lim_{L \rightarrow \infty} LQ_L \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} -L \frac{1}{4L} (\beta_+^{-1} - \beta_-^{-1}) \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} -\frac{1}{4} (\beta_+^{-1} - \beta_-^{-1}) \\ &= -\frac{1}{4} (\beta_+^{-1} - \beta_-^{-1}).\end{aligned}$$

Por outro lado, usando que  $\beta^{-1} = KT$ , obtemos

$$-\frac{K}{2} \frac{dT(u)}{du} = -\frac{K}{2} \left( \frac{T_+ - T_-}{2} \right) = -\frac{1}{4} (\beta_+^{-1} - \beta_-^{-1}).$$

□

# Conclusão

Inicialmente, vimos as preliminares fundamentais para o entendimento desta dissertação, que fora baseado no artigo [1].

Neste trabalho, descrevemos uma cadeia de osciladores harmônicos unidimensionais desacoplados que interage através de um processo estocástico, redistribuindo a energia entre sítios vizinhos de maneira uniforme. Posteriormente, nos concentramos em um processo de partículas e verificamos a relação de dualidade entre este processo e o das energias definido no Capítulo 2, através da igualdade dos geradores para uma determinada função  $\bar{F}(\hat{k}, \xi^{(L)})$ .

Além disso, definimos o processo  $x$ , onde colocamos rótulos nas partículas e fizemos as estimativas de absorção através do Teorema de De Finetti. Por fim, demonstramos os resultados enunciados no Capítulo 2, mostrando assim a validade da Lei de Fourier.

# Referências

- [1] Kipnis, C., Marchioro, C., Presutti, E., *Heat Flow in an Exactly Solvable Model*, Journal of Statistical Physics, Vol. 27 No. 1, pp. 65-74 (1982).
- [2] Liggett, Thomas M., *The Stochastic Evolution of Infinite Systems of Interacting Particles*, Lecture Notes in mathematics, No. 598, pp. 188-248, Springer, Berlin, (1976).
- [3] Galves, A., Kipnis, C., Marchioro, C., Presutti, E., *Non Equilibrium Measures which Exhibit a Temperature Gradient: Study of a Model*, Commun. Math. Phys. 81: 127-147 (1981).
- [4] Grosskinsky, S., *Interacting Particle Systems*, Notes. (2009).
- [5] Durrett, R., *Probability: Theory and Examples*, 4th edition published by Cambridge University Press (2010).
- [6] Liggett, Thomas M., *Interacting Particle Systems*, Springer-Verlag, New York (1985).
- [7] Evans, L. C., *An Introduction to Stochastic Differential Equations*. University of California, Berkeley (2006).
- [8] James, B., *Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário*, Projeto Euclides, Editora: LTC, 2ª edição (1996).
- [9] Seppäläinen, T., *Translation Invariant Exclusion Processes (Book in Progress)*, Department of Mathematics, University of Wisconsin (2008).
- [10] Valle, G., *Apostila do Curso de Probabilidade Avançada (Curso de Doutorado)*.
- [11] Bartle, R., *The Elements of Integration*, John Wiley & Sons, New York - Chichester - Brisbane - Toronto (1966).
- [12] Hinojosa, A., Milanés, A., *Uma Introdução aos Processos Estocásticos com Aplicações*, Departamento de Estatística, ICEx. UFMG.

- [13] Billingsley, P., *Convergence of Probability Measures*, Departments of Statistics and Mathematics, The University of Chicago, JOHN WILEY & SONS, New York - Chichester - Brisbane - Toronto (1968).