Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Decomposição Dominada e Volume Zero em Fluxos Tridimensionais Incompressíveis

Edvan Santos da Trindade

Salvador-Bahia
Março de 2015

Decomposição Dominada e Volume Zero em Fluxos Tridimensionais Incompressíveis

Edvan Santos da Trindade

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 13 de março de 2015.

Orientador: Prof. Dr. Vítor Domingos Martins de Araújo.

Salvador-Bahia
Março de 2015

Trindade, Edvan Santos da.

Decomposição Dominada e Volume Zero em Fluxos Tridimensionais Incompressíveis / Edvan Santos da Trindade. – Salvador, 2015.

56 f. : il

Orientador: Prof. Dr. Vítor Domingos Martins de Araújo.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Salvador, 2015.

Referências bibliográficas.

1. Fluxos incompressíveis. 2. Fluxo linear de Poincaré. 3. Decomposição dominada. 4. Fluxo singular. 5. Decomposição hiperbólica. 6. Fluxo de Anosov. I. Araújo, Vítor Domingos Martins de. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU :

Decomposição Dominada e Volume Zero em Fluxos Tridimensionais Incompressíveis

Edvan Santos da Trindade

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 13 de março de 2015.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Vítor Domingos Martins de Araújo (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Antônio Teófilo Ataíde do Nascimento
UNEB

Prof. Dr. Hale Aytaç
UFBA

Aos meu parentes, namorada, amigos e professores.

Agradecimentos

Começo agradecendo a minha família por sempre lembrarem de mim apesar dessa correria que é a minha vida. Nesse momento em que nós estudantes vivemos (graduação, mestrado, doutorado, etc), muitas vezes é difícil ter um simples momento para conversar com tranquilidade com nossos pais, irmãos, primos e etc. Às vezes dá uma certa tristeza não ter muito tempo. Mas dá para sentir que eles estão sempre na torcida pelo meu sucesso, que eles ficam muito felizes a cada nova conquista. Em especial, agradeço a minha mãe (Edna) por ela ser a guerreira que é. Mesmo com tanta dificuldade conseguiu criar 4 filhos sozinha. Meus dois irmãos mais novos e eu tivemos oportunidade de estudar, mas o meu irmão mais velho (Magno) não teve. Teve que trabalhar desde cedo para ajudar nas despesas. Sou grato a ele por, apesar de ser irmão, ter feito papel de um pai. Agradeço aos meus sobrinhos por admirarem ter um tio que estuda. Sempre vou lembrar de Marlinho aos 5 anos dizer: "Tio, você é que nem Deus não é?". E eu digo: "Não. Por que você acha isso?". E ele: "Ah, é porque o senhor sabe todas as coisas!" Sou muito grato por tudo isso.

Agradeço a minha namorada Danuzia (Dan) por estar sempre ao meu lado. Por me dar forças quando acho que não há saídas. Por viver o mesmo que eu vivo e entender perfeitamente tudo que passo. Por ser tão esforçada e responsável, o que me faz não perder o foco. Por se preocupar com o meu bem estar em todos os sentidos (dessa forma viverei até uns 100 anos). Agradeço também por ela ter ficado mais nervosa que eu durante a minha defesa (isso é sinal que a torcida era muito grande). Ela é uma influência muito boa na minha vida. Como já disse para ela várias vezes: "você inspira coisas boas". Ela é uma pessoa tão boa, tão humilde e de caráter tão raro. Eu a admiro muito e minha vida mudou para melhor desde que ela começou a fazer parte. Agradeço muito por ter uma pessoa tão maravilhosa ao meu lado.

Agradeço e peço desculpa aos meus amigos. Por estar muito focado no meio do semestre, acabo não mandando notícias. Mas queria que todos eles soubessem que eu não os esqueço. Eu fico muito feliz com os que compreendem e me sinto para baixo com os que acham que mudei. Em particular, gostaria de agradecer a Fábio Carvalho que além de amigo, foi meu professor no ensino médio e também professor de karatê.

Se estou onde estou hoje, em parte é devido a ele. Quando eu tinha 16 anos, ele me chamou para fazer karatê de graça na academia que ele havia acabado de abrir. Além disso, me incentiva muito nos estudos. Com ele eu aprendi o que é passar o dia inteiro estudando. Aprendi a levar os estudos mais a sério ainda. Com a ajuda dele, consegui passar no vestibular. Anos mais tarde, eu acho que eu estava no terceiro semestre da UFBA, ele me contou que em uma certa reunião de pais da escola, minha mãe disse que não sabia o que faria assim que eu terminasse o ensino médio. Ela não entendia essas coisas de faculdade, nem nada e pediu uma orientação para os professores. Fábio então me contou que me chamar para fazer karatê foi uma forma de poder me acompanhar de perto, ter mais contato e poder guiar para o caminho certo. Agradeço muito por tudo isso.

Gostaria de agradecer ao meu orientador Vítor Araújo. Ele aceitou me orientar na iniciação científica, no mestrado e agora também no doutorado. Agradeço por ele arranjar tempo em sua agenda lotada. Esse dissertação foi um verdadeiro desafio para mim e eu não conseguiria dar conta se não fosse por todo auxílio que ele me deu. Foram muitas dúvidas, mas ele sempre esteve disponível para tirá-las quantas vezes fossem necessárias. Foi um trabalho difícil, mas o que vem pela frente não será mais fácil que esse. Então tenho que me acostumar a isso. Agradeço por estar dando uma direção boa a minha formação. Eu sei que tenho muito o que aprender com ele. Espero poder me tornar um profissional tão competente quanto ele é.

Por fim, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

"A persistência é o menor caminho do êxito."

(Charles Chaplin)

Resumo

Provamos que existe conjunto aberto e denso de campos tridimensionais incompressíveis de classe C^2 tais que, se um campo neste conjunto tem um conjunto invariante com volume positivo e decomposição dominada para o fluxo linear de Poincaré, então esse campo é Anosov (globalmente hiperbólico). Isto estende resultado clássico de Bowen sobre volume zero de conjuntos hiperbólicos para contextos mais gerais.

Palavras-chave: Fluxos incompressíveis; Fluxo linear de Poincaré; Decomposição dominada; Fluxo singular; Decomposição hiperbólica; Fluxo de Anosov.

Abstract

We prove that there exists an open and dense subset of the incompressible 3-flows of class C^2 such that, if a flow in this set has a positive volume regular invariant subset with dominated splitting for the linear Poincaré flow, then it must be an Anosov flow. This extends a classical result of Bowen on zero volume for hyperbolic sets to a more general setting.

Keywords: Incompressible flows; The linear Poincaré flow; Dominated splitting; Singular flows; Hyperbolic splitting; Anosov flows.

Sumário

Lista de Figuras **xv**

1 Apresentação do Teorema Principal **1**

1.1 Fluxo Linear de Poincaré 2

1.1.1 Decomposição Dominada para o Fluxo Linear de Poincaré 3

1.2 Hiperbolicidade e Campos de Anosov 4

1.3 Teorema Principal 5

1.3.1 Comentários 6

1.3.2 Estrutura da prova 7

1.4 Organização do texto 7

2 Resultados Auxiliares **9**

2.1 Topologia do espaço $C^r(N, \mathbb{R}^s)$ 9

2.1.1 Subvariedades próximas 10

2.1.2 Topologia do espaço $\mathfrak{X}^r(N)$ 10

2.2 Transversalidade 10

2.3 Desigualdade do valor médio 11

2.4 Decomposição Dominada 12

2.4.1 Ângulo entre subespaços e ângulo afastado de zero 13

2.5 Hiperbolicidade do Fluxo Linear de Poincaré 15

2.6 Variedades Invariantes 15

2.6.1 Singularidades hiperbólicas 15

2.6.2 Órbitas periódicas hiperbólicas e elementos críticos 16

2.6.3 Variedades Invariantes 16

2.6.4 Lema de Inclinação (λ-lema) 18

2.7 Lemas perturbativos 19

2.7.1 O Lema de Franks 19

2.7.2 Lema de Conexão de Hayashi 20

2.7.3 Bifurcações de Conexões Sela 21

2.7.4 Inclination-Flip e Orbit-flip 23
2.8 Elementos da Teoria Ergódica 24
2.8.1 Recorrência de Poincaré 24
2.8.2 Ergodicidade 26
2.8.3 Decomposição Ergódica 26
2.9 Hiperbolicidade não uniforme 27
2.9.1 Expoentes de Lyapunov e Teorema de Oseledets 28
2.9.2 Medidas Hiperbólicas 30
2.9.3 Variedades Invariantes 34
2.9.4 Blocos Hiperbólicos 34
2.9.5 Distorção Limitada 36

3 Prova do Teorema Principal 39
3.1 Decomposição dominada e hiperbolicidade em campos conservativos . 39
3.2 Variedades Invariantes contidas em A 42
3.2.1 Variedades invariantes densas de uma órbita periódica 45
3.3 Demonstração da Proposição 3.1 46
3.4 Prova do Teorema Principal 47

4 Perspectivas Futuras 51
4.1 Questão em dimensão maior com hiperbolicidade seccional 51
4.2 Exemplo com fluxo de suspensão 52
4.2.1 Exemplo 53
4.3 Conjectura 53

Referências 55

Lista de Figuras

2.1 Transversalidade 11
2.2 Variedades Transversais 11
2.3 Interseção Transversal 18
2.4 Lema de Inclinação 19
2.5 Conexão de Hayashi 20
2.6 Conexão sela-foco. 21
2.7 Bifurcação da conexão sela-foco. 22
2.8 Inclination-flip e orbit-flip 23

3.1 Conexão sela-foco. 42
3.2 Interseção Transversal 45
3.3 Lema de Inclinação 46
3.4 Aproximação 47
3.5 48

4.1 Fluxo de Suspensão 52

Capítulo 1

Apresentação do Teorema Principal

O objetivo deste capítulo é enunciar o teorema principal deste trabalho. Para isso, damos apenas as definições e fatos essenciais para enunciá-lo. A demonstração é dividida em vários resultados auxiliares que são provados nos capítulos seguintes.

Em todo o texto M denotará uma variedade riemanniana, C^∞, compacta, sem bordo, conexa e de dimensão 3. Pelo teorema de Whitney podemos assumir que existe $s \in \mathbb{N}$, tal que $M \subset \mathbb{R}^s$. Denotaremos por μ a medida induzida em M pela métrica riemanniana. Vamos supor que μ já está normalizada, isto é, $\mu(M) = 1$. Chamaremos essa medida de *medida de volume* (ou simplesmente *volume*) ou *medida de Lebesgue* de M.

Denotamos por $\mathfrak{X}^r(M)$ o conjunto de todos os campos de vetores $X : M \to TM \subset \mathbb{R}^s$ de classe C^r e por $(X_t)_t$ o fluxo gerado pelo campo X. Lembramos que como M é compacta, se $X \in \mathfrak{X}^1(M)$, então o fluxo $(X_t)_t$ é *completo*, isto é, $(X_t)_t$ está definido para todo $t \in \mathbb{R}$.

Dizemos que um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, *preserva uma medida* ν, definida na σ-álgebra dos borelianos de M, se $\nu(X_t(B)) = \nu(B)$ para todo boreliano B e para todo $t \in \mathbb{R}$. Denotamos por $\mathfrak{X}^r_\nu(M) = \{X \in \mathfrak{X}^r(M) : \ X \text{ preserva a medida } \nu\}$. No caso particular em que X preserva a medida de volume μ, dizemos que X é um campo *incompressível* ou *conservativo*.

Dizemos que $\sigma \in M$ é uma *singularidade* para um campo X se $X(\sigma) = 0$. Denotamos o conjunto das singularidades de um campo X por $S(X)$. Os pontos $x \in M \backslash S(X)$ são chamados de *pontos regulares*.

1.1 Fluxo Linear de Poincaré

A seguinte noção pode ser definida em qualquer variedade riemanniana M de dimensão finita. Sejam $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e $x \in M$ um ponto regular de X, denote por

$$N_x = \{v \in T_xM : \langle v, X(x)\rangle_x = 0\}$$

o complemento ortogonal de $X(x)$ em T_xM, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ representa o produto interno em T_xM. Quando $\Lambda \subset M$ é um conjunto *regular*, isto é, todos os pontos de Λ são regulares, chamamos o conjunto

$$N_\Lambda = \bigcup_{x \in \Lambda} N_x$$

o *fibrado normal* de Λ.

Denote por $\mathcal{O}_x : T_xM \to N_x$ a projeção ortogonal de T_xM em N_x. Para cada $t \in \mathbb{R}$ defina

$$P_x^t : N_x \to N_{X_t(x)} \text{ por } P_x^t = \mathcal{O}_{X_t(x)} \circ DX_t(x)\,|_{N_x}\,.$$

Temos que P_x^t satisfaz a relação de *cociclo*, isto é, $P_x^{t+s} = P_{X_s(x)}^t \circ P_x^s$. Para provar isso, usamos o seguinte

Lema 1.1. *Dado um campo $X \in \mathfrak{X}^1(M)$, tem-se $DX_t(x)(X(x)) = X(X_t(x))$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in M$.*

Demonstração: Sejam $t \in \mathbb{R}$, $x \in M$ quaisquer e consideremos $\gamma(s) = X_{t+s}(x)$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Como, $X_{t+s} = X_t \circ X_s$ temos que $\gamma'(s) = X(X_{t+s}(x)) = DX_t(X_s(x))(X(X_s(x)))$. Em particular, fazendo $s = 0$ na relação anterior, obtemos $DX_t(x)(X(x)) = X(X_t(x))$. ■

Provemos agora que P_x^t satisfaz a relação de cociclo. De fato, temos que $DX_t(x)v \in T_{X_t(x)}M$, para todo $v \in T_xM$. Logo,

$$DX_s(x)v = \mathcal{O}_{X_s(x)}(DX_s(x)v) + r_1 \cdot X(X_s(x)),$$

para algum $r_1 \in \mathbb{R}$ e para todo $v \in N_x \subset T_xM$.

Assim, para todo $v \in N_x$ temos que

$$\begin{aligned}
P_x^{t+s}(v) &= \mathcal{O}_{X_{t+s}(x)}(DX_{t+s}(x)v) \\
&= \mathcal{O}_{X_{t+s}(x)}(DX_t(X_s(x))(DX_s(x)v) \\
&= \mathcal{O}_{X_{t+s}(x)}(DX_t(X_s(x))(\mathcal{O}_{X_s(x)}(DX_s(x)v) + r_1 \cdot X(X_s(x))) \\
&= \mathcal{O}_{X_{t+s}(x)}(DX_t(X_s(x))(\mathcal{O}_{X_s(x)}(DX_s(x)v)) + r_1 \cdot X(X_{t+s}(x)) \text{ (usamos aqui o Lema 1.1)} \\
&= \mathcal{O}_{X_{t+s}(x)}(DX_t(X_s(x))(\mathcal{O}_{X_s(x)}(DX_s(x)v))) \\
&= P_{X_s(x)}^t(P_x^s(v)).
\end{aligned}$$

Segue da relação de cociclo que o operador inverso de $P_x^t : N_x \to N_{X_t(x)}$ é dado por $P_{X_t(x)}^{-t} : N_{X_t(x)} \to N_x$. De fato, como $id_{N_x} = P_x^0 = P_x^{-t+t}$. Usando a relação de cociclo, temos que $P_{X_t(x)}^{-t} \circ P_x^t = id_{N_x}$.

Sendo $\Lambda \subset M$ um conjunto regular, a família $(P_\Lambda^t)_t = \{P_x^t : \quad x \in \Lambda \text{ e } t \in \mathbb{R}\}$ é chamada de *Fluxo Linear de Poincaré* de X sobre Λ.

Através do estudo do fluxo linear de Poincaré pode-se descobrir propriedades do fluxo $(X_t)_t$, com a vantagem de se trabalhar em dimensão mais baixa, mais especificamente, em dimensão $\dim M - 1$. (Para um exemplo veja o Teorema 2.11).

1.1.1 Decomposição Dominada para o Fluxo Linear de Poincaré

Seja Λ um conjunto *invariante* pelo fluxo $(X_t)_t$ (isto é, $X_t(\Lambda) = \Lambda$, para todo $t \in \mathbb{R}$) e sem singularidades. Dizemos que o fluxo linear de Poincaré sobre Λ possui uma decomposição (C, λ)-*dominada*, se existe uma decomposição *contínua* do fibrado normal $N_\Lambda = N^s \oplus N^u$, onde $N_x = N_x^s \oplus N_x^u$, com N_x^s e N_x^u ambos não triviais, tal que

(a) $P_x^t(N_x^s) = N_{X_t(x)}^s$ e $P_x^t(N_x^u) = N_{X_t(x)}^u$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in \Lambda$;

(b) existem constantes $C, \lambda > 0$ tais que $\|P_x^t|N_x^s\| \leq Ce^{-\lambda t} m(P_x^t|N_x^u)$, para todo $t \geq 0$, onde m representa a conorma de operador, isto é, dado um operador L entre dois espaços vetoriais normados, $m(L) = \inf_{x \neq 0}(\|Lx\|/\|x\|)$.

Chamamos a propriedade (a) de *invariância* e a propriedade (b) chamamos de *dominação*. Uma vez que a conorma de qualquer operador invertível é dada por $m(L) = \|L^{-1}\|^{-1}$, temos que a condição (b) é equivalente a

$$\|P_x^t \mid N_x^s\| \cdot \|P_{X_t(x)}^{-t} \mid N_{X_t(x)}^u\| \leq Ce^{-\lambda t}.$$

Explicamos agora qual é o sentido da palavra contínua na definição anterior. Suponhamos, mais geralmente, que $\dim M \geq 3$ e $V = \cup_{x \in \Lambda} V_x$, onde cada $V_x \subset T_x M$ é um subespaço vetorial de dimensão k. Dizemos que essa decomposição de V é contínua no *sentido de Whitney*, se para todo $x \in \Lambda$ e toda sequência em $(x_n)_n$ em Λ convergindo para x, existe $\mathcal{B}_n = \{v_{n,1}(x_n), v_{n,2}(x_n), ..., v_{n,k}(x_n)\}$ base ortonormal de V_{x_n} tal que $\lim_n v_{n,i}(x_n) = v_i \in V_x$, para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$, e $\{v_1, ..., v_k\}$ é base de V_x.

Na verdade, não precisamos exigir que a decomposição de N_Λ seja contínua. Poderíamos ter obtido isso como consequência (veja [3, Lema 2.28]). Mas por questão de simplicidade, acrescentamos esta hipótese na definição.

Observação 1.2. *Observamos que a dominação significa que a componente na direção de N_x^s de qualquer vetor em N_x tende a zero no futuro pela ação do fluxo linear de Poincaré quando*

comparada com a componente na direção de N^u_x. Mais precisamente, seja $v = v^s + v^u \in N_x = N^s_x \oplus N^u_x$. Usando a dominação do fluxo temos

$$\frac{\|P^t_x v^s\|}{\|P^t_x v^u\|} \leq Ce^{-\lambda t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

Assim, o ângulo entre $P^t_x v$ e $N^u_{X_t(x)}$ tende a zero no futuro. Analogamente, o ângulo entre $P^t_x v$ e $N^s_{X_t(x)}$ tende a zero no passado. Esse comportamento garante que a decomposição de $N_\Lambda = N^s \oplus N^u$ é única.

Em dimensão maior que 3, podem existir duas decomposições distintas (veja [3]).

Observação 1.3. *Quando o fluxo linear de Poincaré sobre Λ admite uma decomposição dominada, dizemos também que a decomposição do fibrado normal, $N_\Lambda = N^s \oplus N^u$, dada na definição, é uma decomposição dominada do fibrado normal.*

A decomposição dominada do fluxo linear de Poincaré é persistente no sentido do seguinte

Lema 1.4. *Sejam $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e $\Lambda \subset M$ um subconjunto regular e invariante por $(X_t)_t$ tal que o fluxo linear de Poincaré sobre Λ admite uma decomposição dominada. Então existe uma vizinhança U de Λ e $\delta > 0$ tais que o conjunto $\Lambda_Y(U)^* := \bigcap_{t\in\mathbb{R}} Y_t(U\backslash S(Y))$ tem uma decomposição (C', λ')-dominada para o fluxo linear de Poincaré com respeito a qualquer campo de vetores Y que está δ-próximo de X na topologia C^1. Além disso C' e λ' são constantes que dependem apenas de δ e U e $(C', \lambda') \to (C, \lambda)$ quando $\delta \to 0$ e $U \to \Lambda$.*

Demonstração: Veja [3]. ■

1.2 Hiperbolicidade e Campos de Anosov

Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$ e $\Lambda \subset M$ um conjunto compacto e invariante pelo fluxo $(X_t)_t$. Dizemos que Λ é *hiperbólico* (com respeito a X) se existem constantes $\lambda, K > 0$, existe uma decomposição contínua (no sentido de Whitney) do fibrado tangente $T_\Lambda M = E^s \oplus E^X \oplus E^u$, onde $T_x M = E^s_x \oplus E^X_x \oplus E^u_x$, para cada $x \in \Lambda$, tal que

(a) $E^X_x = \{r \cdot X(x) : \ r \in \mathbb{R}\}$;

(b) $DX_t(x)(E^i_x) = E^i_{X_t(x)}$, com $i = s, u$ e $x \in \Lambda$;

(c) $\| DX_t(x) |_{E^s_x}\| \leq Ke^{-\lambda t}$, $\| DX_{-t}(x) |_{E^u_x}\| \leq Ke^{-\lambda t}$, $x \in \Lambda$ e $t \in \mathbb{R}$.

A condição (c) nos diz que E^s é uniformemente contraído e E^u é uniformemente expandido.

Diremos que um campo $X \in \mathfrak{X}^r_\mu(M)$, $r \geq 1$, é de *Anosov* quando a variedade M for um conjunto hiperbólico.

Para difeomorfismos, define-se de forma análoga a noção de hiperbolicidade. Assim, diz-se que um difeomorfismo $f : M \to M$ é de Anosov, se M for um conjunto hiperbólico.

Novamente, não precisamos exigir que a decomposição de $T_\Lambda M$, seja contínua, mas o fazemos assim por simplicidade.

1.3 Teorema Principal

Munimos $\mathfrak{X}^2_\mu(M) \subset \mathfrak{X}^2(M)$ com a topologia relativa. Temos agora o que é necessário para enunciar o resultado principal deste trabalho.

Teorema Principal. *Existe um aberto e denso $\mathcal{G} \subset \mathfrak{X}^2_\mu(M)$ tal que para cada $X \in \mathcal{G}$ com um conjunto invariante e regular Λ satisfazendo:*

- *o fluxo linear de Poincaré sobre Λ tem uma decomposição dominada; e*
- *Λ tem volume positivo: $\mu(\Lambda) > 0$;*

então X é um campo de Anosov e $\overline{\Lambda} = M$.

Analisando a prova do teorema principal, a qual é dada no capítulo 3, veremos que uma das partes complicadas da prova será garantir que $\overline{\Lambda}$ não possui singularidades. Se desde o início já temos essa informação, então temos o seguinte

Corolário 1.5. *Todo campo $X \in \mathfrak{X}^2_\mu(M)$ que admite conjunto compacto, invariante e regular Λ, com $\mu(\Lambda) > 0$ e o fluxo linear de Poincaré sobre Λ admite uma decomposição dominada é um campo de Anosov.*

Ainda analisando a demonstração do Teorema Principal, vemos que exigir que M é uma variedade tridimensional e que o campo é conservativo é necessário para provar que Λ é hiperbólico, já sabendo que ele é compacto, invariante, sem singularidades e o fluxo linear de Poincaré sobre Λ admite uma decomposição dominada. Para o próximo resultado, supomos que $\dim M \geq 3$. Acrescentando as hipóteses mencionadas nesse parágrafo, temos o

Corolário 1.6. *Seja $X \in \mathfrak{X}^2(M)$ um campo admitindo um conjunto hiperbólico Λ compacto, invariante, regular, o fluxo linear de Poincaré sobre Λ admite uma decomposição dominada e $\mu(\Lambda) > 0$. Então, X é um campo de Anosov.*

A seguir definimos o conjunto $\mathcal{G}$ e provaremos que o mesmo é aberto na topologia induzida por $\|\cdot\|_2$. Não apresentaremos a prova da densidade de $\mathcal{G}$ por ser um resultado muito técnico, mas ela decorre do Teorema 11 de [20].

Definição 1.1. *Sejam $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e $\sigma \in M$ uma singularidade de X. Dizemos que σ não tem ressonância se todos os autovalores reais de $DX(\sigma)$ são distintos.*

Defina

$$\mathcal{G} := \{X \in \mathfrak{X}^r_\mu(M) : \text{ todas as singularidades de } X \text{ são hiperbólicas e não tem ressonância}\}.$$

Notamos que para mostrar que $\mathcal{G}$ é aberto, basta provar que o conjunto

$$\mathcal{G}_0 := \{X \in \mathfrak{X}^r(M) : \text{ todas as singularidades de } X \text{ são hiperbólicas e não tem ressonância}\}$$

é aberto e $\mathfrak{X}^r(M)$. De fato, se tivermos isto provado, teremos que $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \cap \mathfrak{X}^r_\mu(M)$ é um aberto em $\mathfrak{X}^r_\mu(M)$.

Afirmação: $\mathcal{G}_0$ é aberto em $\mathfrak{X}^r(M)$.

Seja $X \in \mathcal{G}_0$, sabemos que existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de X tal que qualquer que seja $Y \in \mathcal{U}$ as singularidades de Y são todas hiperbólicas (veja Teorema 3.4, cápitulo II de [18]). Pela dependência contínua do espectro em relação ao operador, podemos supor que $\mathcal{U}$ é suficientemente pequena, de modo que as singularidades de $Y \in \mathcal{U}$ não tem ressonância. Logo, $\mathcal{G}_0$ é aberto.

1.3.1 Comentários

Em [15, Teorema F] provou-se que, se $f : M \to M$ é um difeomorfismo $C^{1+\alpha}$ e $\Lambda \subset M$ é um conjunto transitivo (isto é, existe uma órbita densa em Λ) com volume positivo, então $\Lambda = M$. O artigo [1] complementa o que foi feito em [15]. Nele prova-se que todos os conjuntos compactos invariantes hiperbólicos-singulares[1] para campos $C^{1+\alpha}$ têm volume zero, ou então o campo é de Anosov.

Em [9] provou-se que Λ é compacto e invariante para um difeomorfismo $f : M \to M$ de classe $C^{1+\alpha}$, então Λ tem volume zero ou f é um difeomorfismo de Anosov.

O que se faz nessa dissertação é enfraquecer as hipóteses assumindo apenas que o fluxo linear de Poincaré admite uma decomposição dominada. Porém, acrescenta-se a condição de que o campo é incompressível. Isto originalmente está feito no artigo [2].

[1]Dizemos que um conjunto Λ, compacto e invariante para um campo $X \in \mathfrak{X}^1(M)$, é hiperbólico-singular para X, se todas as singularidades de X são hiperbólicas, Λ é parcialmente hiperbólico, com a direção central expandindo área (i.e. existem $C, \lambda > 0$ tais que $|\det DX_t \mid E^c| \geq Ce^{\lambda t}$, para todo $t > 0$).

1.3.2 Estrutura da prova

Consideremos um campo vetorial $X \in \mathcal{G}$ nas condições do teorema. Usando o fato de que o fluxo linear de Poincaré sobre Λ admite uma decomposição dominada e $\mu(\Lambda) > 0$, provamos que o fecho A dos pontos de densidade de Lebesgue de Λ não possui singularidades. Daí, usando um lema, que é provado ao longo do texto, conseguimos concluir que A é um conjunto hiperbólico para X. O segundo passo é provar que A é aberto e fechado (fechado já é, pois é o fecho de um conjunto). Com isso, temos que $A = M$, uma vez que M é uma variedade conexa. Por fim, basta notar que $A = \overline{\Lambda}$.

1.4 Organização do texto

Essa dissertação é composta de 4 capítulos. O objetivo do capítulo 1, intitulado "Apresentação do Teorema Principal", como o nome sugere, é dar as definições e resultados necessários para que o enunciado do teorema principal desse trabalho fique claro.

O capítulo 2, "Resultados Auxiliares", é o mais extenso de todos. Nele apresentamos as ferramentas que são usadas para provar o teorema principal. Muitos resultados são apresentados sem demonstração, uma vez que são muito técnicos. Detalhar alguns deles poderia dar outra dissertação de mestrado. Neste capítulo reunimos alguns elementos da Teoria Ergódica, da Dinâmica Hiperbólica, da Teoria não uniformemente hiperbólica de Pesin, dentre outros.

No capítulo 3, "Prova do Teorema Principal", usamos o que foi desenvolvido no capítulo 2 e conseguimos provar a proposição 3.1. Essa proposição é fundamental no argumento para provar o teorema principal.

Terminamos a dissertação com o capítulo 4, "Perspectivas Futuras", onde discutimos a mesma questão desse trabalho em dimensão mais alta. Não se sabe o que acontece ainda, mas conjectura-se que com as mesmas técnicas usadas nesse texto, adaptadas à dimensão mais alta, permita-nos concluir o mesmo, mas agora com a hipótese mais forte que o fluxo linear de Poincaré admita decomposição hiperbólica e não apenas dominada.

Capítulo 2

Resultados Auxiliares

2.1 Topologia do espaço $C^r(N, \mathbb{R}^s)$

Seja N uma variedade C^∞ compacta de dimensão n e denotemos por $C^r(N, \mathbb{R}^s)$ o conjunto das aplicações de N em $\mathbb{R}^s$ de classe C^r. Sejam $f, g \in C^r(N, \mathbb{R}^s)$ e $r \in \mathbb{N}$. Definamos as operações

$$\begin{array}{rccc} f+g: & N & \to & \mathbb{R}^s \\ & x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} r\cdot f: & N & \to & \mathbb{R}^s \\ & x & \mapsto & r\cdot f(x). \end{array}$$

Com estas operações, $C^r(N, \mathbb{R}^s)$ é um espaço vetorial. Iremos munir este espaço com uma norma completa.

Consideremos $V_1, V_2, \ldots, V_k$ uma cobertura finita de N por abertos tal que cada V_i está contido no domínio de uma carta local (φ_i, U_i), com $\varphi_i(U_i) = B(0,2) \subset \mathbb{R}^n$ e $x_i(V_i) = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$. Dado $f \in C^r(N, \mathbb{R}^s)$, denotamos por $f^i = f \circ \varphi_i^{-1} : B(0,2) \to \mathbb{R}^s$. Podemos então definir

$$\|f\|_r := \max_i \{ \sup_{u\in B(0,1)} \|f^i(u)\|, \sup_{u\in B(0,1)} \|Df^i(u)\|, \ldots, \sup_{u\in B(0,1)} \|D^r f^i(u)\| \}.$$

Proposição 2.1. *$(C^r(N, \mathbb{R}^s), \|\cdot\|_r)$ é um espaço de Banach, isto é, é normado e completo.*

Demonstração: É fácil ver que $\|\cdot\|_r$ é uma norma. Provemos apenas que $(C^r(N, \mathbb{R}^s), \|\cdot\|_r)$ é completo. Seja $(f_m)_m$ uma sequência de Cauchy em $C^r(N, \mathbb{R}^s)$. Para cada $x \in N$, $(f_m(x))_m$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^s$, logo existe $\lim_{n\to+\infty} f_m(x)$. Definamos

$$\begin{array}{rccc} f: & N & \to & \mathbb{R}^s \\ & x & \mapsto & \lim_{m\to+\infty} f_m(x) \end{array}.$$

Em particular, $f_m^i(u) \xrightarrow[m\to+\infty]{} f^i(u)$, para todo $u \in B(0,1)$. Temos também que $(Df_m^i(u))_n$ é uma sequência de Cauchy em $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^s)$, logo converge para uma aplicação linear $T^i(u) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^s)$. Provemos a convergência $Df_m^i \xrightarrow[m\to+\infty]{} T^i$ é uniforme em $B(0,1)$. De fato, para todo $u \in B(0,1)$ temos

$$\|Df_m^i(u) - T^i(u)\| \leq \|Df_m^i(u) - DX_l^i(u)\| + \|DX_l^i(u) - T^i(u)\|.$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$, tal que se $m, l > m_0$, então $\|Df_m^i(u) - DX_l^i(u)\| < \varepsilon/2$, para todo $u \in B(0,1)$. Para cada $u \in B(0,1)$, podemos tomar $l(u) > m_0$, de modo que $\|Df_{l(u)}^i(u) - T^i(u)\| < \varepsilon/2$. Logo, se $m > 0$ temos $\|DX_m^i(u) - T^i(u)\| < \varepsilon$, para todo $u \in B(0,1)$. Segue que f^i é C^1 e $Df^i = T$ em $B(0,1)$. Assim, $f_m \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ na norma $\|\cdot\|_1$. Com o mesmo raciocínio mostramos que $f_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} f$ na norma $\|\cdot\|_r$. ■

Pode-se mostrar que a topologia induzida em $C^r(N, \mathbb{R}^s)$ não depende da cobertura $V_1, \ldots, V_k$ utilizada.

Proposição 2.2. *O subconjunto das aplicações de classe C^∞ é denso em $C^r(M, \mathbb{R}^s)$.*

Demonstração: Veja [18, Proposição 2.5] ■

2.1.1 Subvariedades próximas

Sejam S e S' duas subvariedades de classe C^r de N e $\varepsilon > 0$. Dizemos que S e S' são *$\varepsilon - C^r$-próximas* se existe um difeomorfismo de classe C^r $h : S \to S'$ tal que $\|i - i' \circ h\|_r \leq \varepsilon$, onde $i : S \to N$, $i' : S' \to N$ são as inclusões.

2.1.2 Topologia do espaço $\mathfrak{X}^r(N)$

Supondo que $N \subset \mathbb{R}^s$, temos que $\mathfrak{X}^r(N) \subset C^r(N, \mathbb{R}^s)$. Assim, nós munimos $\mathfrak{X}^r(N)$ com a topologia induzida por $C^r(N, \mathbb{R}^s)$. Pode-se provar que $\mathfrak{X}^r(N)$ é um subespaço fechado de $C^r(N, \mathbb{R}^s)$.

Como corolário da Proposição 2.2, temos o seguinte resultado.

Corolário 2.3. *O subconjunto dos campos de classe C^∞ é denso em $\mathfrak{X}^r(M)$.*

2.2 Transversalidade

Sejam N e P variedades diferenciáveis e $S \subset P$ uma subvariedade de classe C^r, com $r \geq 1$. Consideremos ainda uma aplicação $f : N \to P$ uma aplicação de classe C^k, com $k \geq 1$. Dizemos que f é *transversal* à S em um ponto $p \in N$ se $f(p) \notin S$ ou

$df(p)(T_pN) + T_{f(p)}S = T_{f(p)}P$. (Veja a figura 2.1). Dizemos que f é *transversal* à S, se f é transversal à S em cada $p \in N$. Quando isto ocorre, usamos a notação $f \pitchfork S$.

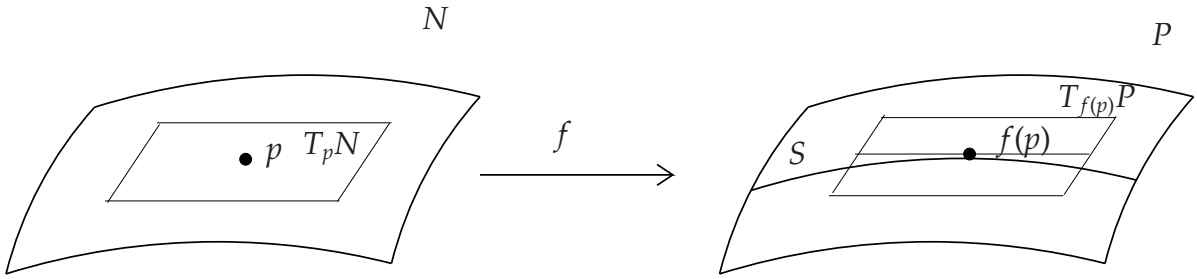


Figura 2.1: Transversalidade

Sejam S_1 e S_2 duas subvariedades de N. Dizemos que S_1 é *transversal* à S_2 quando a inclusão $i : S_1 \to N$ é transversal à S_2. Quando a interseção entre S_1 e S_2 é não vazia, usamos a notação $S_1 \pitchfork S_2$. (Veja a figura 2.2).

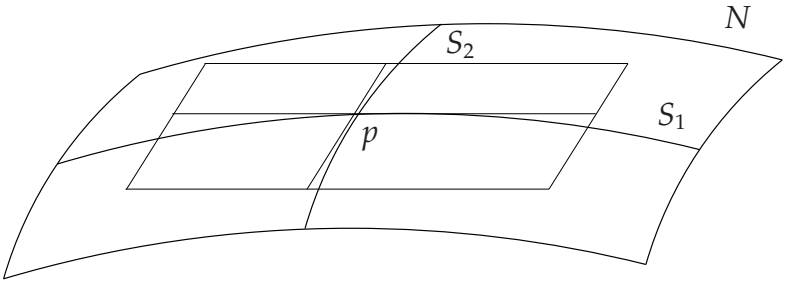


Figura 2.2: Variedades Transversais

2.3 Desigualdade do valor médio

Apresentamos aqui uma versão da desigualdade do valor médio em variedades diferenciáveis.

Teorema 2.4. (desigualdade do valor médio) *Seja $f : N \to P$ uma aplicação C^1 entre variedades riemannianas conexas. Suponha que existe $K > 0$ tal que $\|Df(x)\| \leq K$, para todo $x \in N$. Então $d(f(p), f(q)) \leq Kd(p, q)$, para todo $p, q \in N$.*

Demonstração: Sejam $p, q \in N$. Como N é uma variedade conexa, podemos considerar uma curva $\alpha : [0, 1] \to N$, C^1 por partes tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = p$. Defina a curva $\gamma : [0, 1] \to P$ por $\gamma(t) = f(\alpha(t))$.

Temos que

$$d(f(p), f(q)) \leq \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\, dt \leq \int_0^1 \|Df(\alpha(t))\| \cdot \|\alpha'(t)\|\, dt \leq K \int_0^1 \|\alpha'(t)\|\, dt.$$

Tomando o ínfimo na expressão da direita, nas curvas $\alpha : [0,1] \to N$, C^1 por partes tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$, temos que $d(f(p), f(q)) \leq Kd(p,q)$, como queríamos. ■

Corolário 2.5. *Nas mesmas hipóteses do teorema anterior, para todo $\lambda \geq K$ tem-se $f(B(x,r)) \subset B(f(x), \lambda r)$, para todo $r > 0$ e para todo $x \in N$.*

Teorema 2.6. *Seja $f : N \to N$ um difeomorfismo de classe C^1, com N uma variedade riemanniana compacta e conexa. Então, para todo $0 < \lambda \leq \|Df^{-1}\|_0^{-1}$ vale $f(B(x,r)) \supset B(f(x), \lambda r)$, para todo $r > 0$ e todo $x \in N$.*

Demonstração: Seja $0 < \lambda \leq \|Df^{-1}\|_0^{-1}$, onde $\|Df^{-1}\|_0 = \sup_{x \in N} \|Df^{-1}(x)\|$. Como N é compacta, temos que $\|Df^{-1}\|_0^{-1} < +\infty$. Para todo $v \in T_xM$,

$$\|v\| = \|Df^{-1}(f(x)) \circ Df(x)v\| \leq \|Df^{-1}(f(x))\| \cdot \|Df(x)v\|.$$

Logo

$$\|Df(x)v\| \geq \lambda \|v\|, \text{ para todo } v \in T_xM. \tag{2.1}$$

Sejam $p, q \in N$ quaisquer. Como N é conexa, podemos considerar uma curva $\gamma : [0,1] \to N$, C^1 por parte, com $\gamma(0) = f(p)$ e $\gamma(1) = f(q)$. Defina uma curva $\alpha : [0,1] \to N$, por $\alpha(t) = f^{-1}(\gamma(t))$. Usando 2.1 vem

$$\int_0^1 \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^1 \|Df(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\| \, dt \geq \lambda \int_0^1 \|\alpha'(t)\| \, dt \geq \lambda d(p,q).$$

Tomando o ínfimo na expressão da esquerda, nas curvas $\gamma : [0,1] \to N$, C^1 por partes tal que $\gamma(0) = f(p)$ e $\gamma(1) = f(q)$, tem-se $d(f(p), f(q)) \geq \lambda d(p,q)$, quaisquer que sejam $p, q \in N$. Mas esta última desigualdade implica que $f(B(x,r)) \supset B(f(x), \lambda r)$, para todo $r > 0$ e todo $x \in N$. ■

2.4 Decomposição Dominada

Já definimos a noção de decomposição dominada para o fluxo linear de Poincaré sobre um conjunto invariante e regular. Definimos agora a noção de decomposição dominada para o fluxo gerado por um campo sobre um conjunto compacto e invariante. A noção de decomposição dominada é uma forma fraca de hiperbolicidade e foi introduzida inicialmente nos trabalhos de Mañe, Liao e Pliss na tentativa de provar a conjectura de Palis-Smale.

Sejam $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e $\Lambda \subset M$ um conjunto compacto e invariante por $(X_t)_t$. Dizemos que Λ admite uma *decomposição dominada* para o fluxo $(X_t)_t$, se existe uma decomposição contínua do fibrado tangente $T_\Lambda M = E \oplus F$, onde $T_xM = E_x \oplus F_x$, e satisfaz para cada $x \in \Lambda$:

(a) E_x e F_x são ambos não nulos;

(b) $DX_t(x)(E_x) = E_{X_t(x)}$ e $DX_t(x)(F_x) = F_{X_t(x)}$;

(c) existem constantes $C, \lambda > 0$ tais que

$$\|DX_t(x) \mid E_x\| \leq Ce^{-\lambda t} m(DX_t(x) \mid F_x), \text{ para todo } t > 0.$$

Assim como na decomposição dominada do fluxo linear de Poincaré, temos que a condição (c) é equivalente a

$$\|DX_t(x) \mid E_x\| \cdot \|DX_{-t}(X_t(x)) \mid F_{X_t(x)}\| \leq Ce^{-\lambda t}.$$

Assim, a propriedade (c) nos diz que uma contração ao longo de E_x será sempre mais forte do que uma expansão ao logo de $F_{X_t(x)}$.

Observação 2.7. *Quando Λ admite uma decomposição dominada para $(X_t)_t$, dizemos também que a decomposição do fibrado tangente, $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$, dada na definição, é uma decomposição dominada do fibrado tangente.*

Observação 2.8. *Se Λ é um conjunto hiperbólico para o campo $X \in \mathfrak{X}^1(M)$, então Λ admite uma decomposição dominada para o fluxo $(X_t)_t$.*

2.4.1 Ângulo entre subespaços e ângulo afastado de zero

Sejam $V, W \subset T_xM$ subespaços tais que $V \cap W = \emptyset$. Definimos o *ângulo* entre V e W por

$$\measuredangle(V, W) = \inf\{\measuredangle(v, w);\ v \in V\backslash\{0\} \text{ e } w \in W\backslash\{0\}\},$$

onde $\measuredangle(v, w) = \arccos\left(\left\langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle_x\right) \in [0, \pi)$.

Seja Λ um subconjunto de M e suponha que o espaço tangente admite uma decomposição $T_xM = E_x \oplus F_x$, para todo $x \in \Lambda$. Dizemos que o ângulo entre E_x e F_x é *uniformemente afastado de zero* em Λ, se existe uma constante $\theta > 0$ tal que $\operatorname{sen}(\measuredangle(E_x, F_x)) \geq \theta$.

Sejam $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e $\Lambda \subset M$ um conjunto compacto e invariante por $(X_t)_t$. Se Λ admitir uma decomposição dominada pelo fluxo $(X_t)_t$, então o ângulo entre E_x e F_x é uniformemente afastado de zero. É o que afirma o seguinte

Lema 2.9. *Seja $\Lambda \subset M$ compacto e invariante pelo fluxo gerado por um campo $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. Se Λ admite uma decomposição dominada para o fluxo $(X_t)_t$, onde a decomposição do espaço tangente é dada por $T_xM = E_x \oplus F_x$, então o ângulo entre E_x e F_x é uniformemente afastado de zero em Λ.*

Demonstração: Veja [24, Lema 4.1.2]. ■

Quando Λ é um conjunto regular e invariante e o fluxo linear de Poincaré sobre Λ admite uma decomposição dominada, então o ângulo entre N^s_x e N^u_x também é uniformemente afastado de zero em Λ. É o que afirma o próximo lema, cuja demonstração é uma adaptação da prova do lema 2.9, usando o fluxo linear de Poincaré ao invés do fluxo gerado pelo campo.

Lema 2.10. *Sejam $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e $\Lambda \subset M$ regular e invariante pelo fluxo $(X_t)_t$. Se $N_\Lambda = N^s \oplus N^u$ é uma decomposição dominada do fibrado normal de Λ, então o ângulo entre N^s_x e N^u_x é uniformemente afastado de zero em Λ.*

Demonstração: Como N^s_x e N^u_x têm dimensão 1, existem vetores unitários $v^s_x \in N^s_x$ e $v^u_x \in N^u_x$ tal que $\measuredangle(N^s_x, N^u_x) = \measuredangle(v^s_x, v^u_x)$. Além disso, dados vetores unitários $v \in N^s_x$ e $w \in N^u_x$ quaisquer, temos $\operatorname{sen}(\measuredangle(v,w)) = \|v - \langle v, w\rangle_x w\|$. De fato,

$$\|v - \langle v, w\rangle_x w\|^2 = 1 - \langle v, w\rangle_x^2 = 1 - \cos^2(\measuredangle(v,w)) = \operatorname{sen}^2(\measuredangle(v,w)). \tag{2.2}$$

Suponhamos por absurdo que o ângulo entre N^s_x e N^u_x não é uniformemente afastado de zero em Λ. Assim, existem uma sequência $(x_n)_n$ em Λ e vetores unitários $v_n \in N^s_{x_n}$ e $w_n \in N^u_{x_n}$ tais que $\|v_n - \langle v_n, w_n\rangle_{x_n} w_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, em particular, da primeira igualdade de 2.2, segue que $\langle v_n, w_n\rangle_{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Para todo $t > 0$ fixo, tem-se

$$\begin{aligned} \|P^t_{x_n}(v_n - \langle v_n, w_n\rangle_{x_n} w_n)\| &\geq |\langle v_n, w_n\rangle_{x_n}| \cdot \|P^t_{x_n}(w_n)\| - \|P^t_{x_n}(v_n)\| \\ &\geq m(P^t_{x_n} \mid N^u_{x_n}) \left(|\langle v_n, w_n\rangle_{x_n}| - \frac{\|P^t_{x_n}(v_n)\|}{\|P^t_{x_n}(w_n)\|} \right). \end{aligned}$$

Como $0 < m(P^t_{x_n} \mid N^u_{x_n}) < \infty$, segue que $\dfrac{\|P^t_{x_n}(v_n)\|}{\|P^t_{x_n}(w_n)\|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Logo, para n suficientemente grande, $\dfrac{\|P^t_{x_n}(v_n)\|}{\|P^t_{x_n}(w_n)\|} > 1/2$.

Para chegar a uma contradição, usamos agora o fato do fluxo linear de Poincaré admitir decomposição (C, λ)-dominada sobre Λ. O argumento acima foi para um $t > 0$ qualquer. Fixemos $t > \frac{\log(2C)}{\lambda}$ qualquer. Para n suficientemente grande temos que

$$\frac{1}{2} > Ce^{-\lambda t} \geq \frac{\|P^t_{x_n} \mid N^s_{x_n}\|}{m(P^t_{x_n} \mid N^u_{x_n})} \geq \frac{\|P^t_{x_n}(v_n)\|}{\|P^t_{x_n}(w_n)\|} > 1/2.$$

■

2.5 Hiperbolicidade do Fluxo Linear de Poincaré

No capítulo 1 introduzimos a noção de decomposição dominada para o fluxo linear de Poincaré. Nesta seção damos uma noção mais forte, a hiperbolicidade deste fluxo. Para isso consideremos $\Lambda \subset M$ um conjunto compacto e invariante com relação ao fluxo gerado por um campo $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. Suponhamos que Λ não possua singularidades. Dessa forma, o fluxo linear de Poincaré $(P^t)_t$ está definido em cada $x \in \Lambda$. Dizemos que uma decomposição do fibrado normal $N_\Lambda = N^s \oplus N^u$ é *hiperbólica* para $(P^t)_t$, se esta decomposição é invariante, N^s é uniformemente contraído e N^u é uniformemente expandido por $(P^t)_t$, ou seja, existem constantes $C, \lambda > 0$ tais que $\|P^t_x \mid N^s_x\| \leq Ce^{-\lambda t}$ e $\|P^{-t}_x \mid N^u_x\| \leq Ce^{-\lambda t}$, para todo $t \geq 0$.

O teorema seguinte é um exemplo de como podemos utilizar o fluxo linear de Poincaré para descobrir uma propriedade do fluxo gerado pelo campo de vetores.

Teorema 2.11. *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto compacto e invariante pelo fluxo gerado por um campo $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. Se Λ é regular, então Λ é hiperbólico para X se, e somente se, N_Λ admite uma decomposição hiperbólica por $(P^t)_t$.*

Demonstração: Veja [24, Teorema 4.2.2] ■

2.6 Variedades Invariantes

2.6.1 Singularidades hiperbólicas

Dizemos que uma singularidade $\sigma \in M$ de um campo $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ é *hiperbólica*, quando $\{\sigma\}$ é um conjunto hiperbólico para X.

Seja $\sigma \in M$ uma singularidade hiperbólica de um campo $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. Pode-se provar que σ é uma singularidade hiperbólica para X se, e somente se, o espectro do operador $DX(\sigma) : T_\sigma M \to T_\sigma M$ não possui autovalores com parte real nula, logo $DX(\sigma)$ é um isomorfismo. As singularidades hiperbólicas são "persistentes", no sentido em que numa vizinhança do campo X em $\mathfrak{X}^1(M)$, todos os campos nessa vizinhança admitem singularidades hiperbólicas. Para isso usamos o Teorema da Função Implícita em espaços, de Banach. Para o próximo resultado, M não precisa ter dimensão 3.

Proposição 2.12. *Sejam $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e $\sigma \in M$ um singularidade hiperbólica para X. Então, existem uma vizinhança $\mathcal{V}$ de X em $\mathfrak{X}^1(M)$ e uma aplicação contínua $\rho : \mathcal{V} \to M$ tal que para cada $Y \in \mathcal{V}$, $\rho(Y)$ é uma singularidade hiperbólica de Y.*

Demonstração: Como o problema é local podemos supor, usando uma carta local que $M = \overline{B(0,1)} = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| \leq 1\}$ e $\sigma = 0 \in \mathbb{R}^m$. Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathfrak{X}^1(M)\times\mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R}^m \\ & (Y,x) & \mapsto & Y(x) \end{array}.$$

Temos que F é uma aplicação de classe C^1, $F(X,0)=0$ e $D_2F(X,0)=DX(0):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, onde D_2 é a derivada na segunda coordenada. Pelo Teorema da Função Implícita em espaços de Banach, segue que existem uma vizinhança $\mathcal{V}$ de X em $\mathfrak{X}^1(M)$ e uma aplicação contínua $\rho:\mathcal{V}\to\mathbb{R}^m$ tal que para cada $Y\in\mathcal{V}$, $Y(\rho(Y))=F(Y,\rho(Y))=0$, isto é, ρ é uma singularidade de Y. Pela dependência contínua do espectro em relação ao operador, podemos supor que $\mathcal{V}$ é suficientemente pequena de modo que $\rho(Y)$ é hiperbólica, para todo $Y\in\mathcal{V}$. ■

Sejam $X\in\mathfrak{X}^1(M)$ e $\sigma\in M$ um singularidade hiperbólica para X. Uma função $\rho:\mathcal{V}\to M$, como na proposição 2.12, é chamada de *continuação analítica* da singularidade σ.

2.6.2 Órbitas periódicas hiperbólicas e elementos críticos

Fixemos um campo $X\in\mathfrak{X}^1(M)$ e seja $\mathcal{O}(p)$ uma órbita periódica. Temos que $\mathcal{O}(p)$ é um conjunto compacto e invariante pelo fluxo $(X_t)_t$. Dizemos que $\mathcal{O}(p)$ é uma *órbita periódica hiperbólica*, quando esta órbita é um conjunto hiperbólico para X. Denotamos por $\mathrm{Per}(X)$ o conjunto dos pontos que estão em órbitas periódicas e por $\mathrm{Per}_h(X)$ o conjunto dos pontos que estão em órbitas periódicas hiperbólicas.

Dizemos que $x\in M$ é um *elemento crítico* para o campo X, quando x é uma singularidade ou quando x pertence a uma órbita periódica. Denotamos por $C(X)$ o conjunto dos elementos críticos do campo X.

2.6.3 Variedades Invariantes

Sejam $X\in\mathfrak{X}^1(M)$ e $x\in M$, definimos a *variedade estável* de x por

$$W^s(x)=\{y\in M:\ \mathrm{dist}(X_t(x),X_t(y))\xrightarrow[t\to+\infty]{}0\},$$

e o *variedade instável* de x por

$$W^u(x)=\{y\in M:\ \mathrm{dist}(X_{-t}(x),X_{-t}(y))\xrightarrow[t\to+\infty]{}0\}.$$

Dado $\varepsilon>0$, definimos o *variedade estável local* de x de tamanho ε por

$$W^s_\varepsilon(x)=\{y\in M:\ \mathrm{dist}(X_t(x),X_t(y))\le\varepsilon,\ t\ge 0\},$$

e o *variedade instável local* de x de tamanho ε por

$$W^u_\varepsilon(x) = \{y \in M : \ \mathrm{dist}(X_{-t}(x), X_{-t}(y)) \leq \varepsilon, \ t \geq 0\}.$$

Os teoremas a seguir garantem que os conjuntos definidos acima são de fato variedades.

Teorema 2.13. (Teorema da Variedade Estável) *Seja Λ um conjunto hiperbólico para um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in \Lambda$ tem-se:*

(a) $W^s_\varepsilon(x)$ é um disco mergulhado C^r, $T_x W^s_\varepsilon(x) = E^s_x$, dim E^s_x = dim $W^s_\varepsilon(x)$ e $W^s_\varepsilon(x)$ depende continuamente de x;

(b) $W^s_\varepsilon(x) \subset W^s(x)$;

(c) $W^s(x) = \bigcup_{t>0} X_{-t}\left(W^s_\varepsilon(X_t(x))\right)$ e é uma subvariedade imersa C^r de M.

Explicitamos agora o que queremos dizer com "$W^s_\varepsilon(x)$ depende continuamente de x". Suponhamos que $W^s_\varepsilon(x)$ tenha dimensão k e seja $\mathbb{D}^k$ o disco unitário de $\mathbb{R}^k$. Denotemos por $\mathrm{Merg}^r(\mathbb{D}^k, M)$ o conjunto de todos os mergulhos do disco $\mathbb{D}^k$ em M. Podemos munir $\mathrm{Merg}^r(\mathbb{D}^k, M)$ com a topologia induzida por $C^r(\mathbb{D}^k, \mathbb{R}^l)$, supondo que $M \subset \mathbb{R}^l$. Assim, dizemos que $W^s_\varepsilon(x)$ *depende continuamente* de x se existem U, vizinhança de x, e uma aplicação contínua $\Theta : U \to \mathrm{Merg}^r(\mathbb{D}^k, M)$ tal que $\Theta(y)(0) = y$ e $\Theta(y)(\mathbb{D}^k) = W^s_\varepsilon(y)$.

Vale um resultado análogo para as variedades instáveis. Mais precisamente vale o seguinte

Teorema 2.14. (Teorema da Variedade Instável) *Seja Λ um conjunto hiperbólico para um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in \Lambda$ tem-se:*

(a) $W^u_\varepsilon(x)$ é um disco mergulhado C^r, $T_x W^u_\varepsilon(x) = E^u_x$, dim E^u_x = dim $W^u_\varepsilon(x)$ e $W^u_\varepsilon(x)$ depende continuamente de x;

(b) $W^u_\varepsilon(x) \subset W^u(x)$;

(c) $W^u(x) = \bigcup_{t>0} X_t\left(W^u_\varepsilon(X_{-t}(x))\right)$ e é uma subvariedade imersa C^r de M.

O Teorema da Variedade Instável segue imediatamente do Teorema da Variedade Estável. Basta trocar o campo X, pelo campo $-X$.

Observação 2.15.

- *Os espaços vetoriais E^s_x e E^u_x são os mesmo dados na decomposição do espaço vetorial tangente T_xM, na definição de conjunto hiperbólico;*

- *Se deduz do Teorema da Variedade Estável (Instável) que existe $\delta > 0$, tal que se $dist(x, y) < \delta$, então $W^s_\varepsilon(x)$ e $W^u_\varepsilon(y)$ se intersectam transversalmente em um único ponto, com ε suficientemente pequeno.*

Por fim, dado $x \in \Lambda$, com Λ hiperbólico para o campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$, definimos as variedades *centro estáveis* e *centro instáveis* (respectivamente) $W^{cs}(x) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} X_t(W^s(x))$ e $W^{cu}(x) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} X_t(W^u(x))$. Observe que estas variedades são invariantes pelo fluxo $(X_t)_t$.

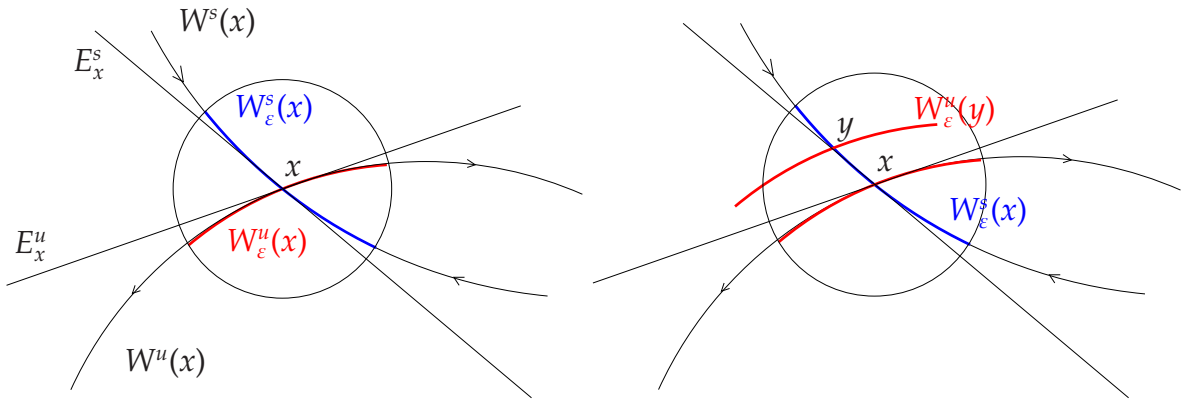


Figura 2.3: Interseção Transversal

2.6.4 Lema de Inclinação (λ-lema)

Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^r, $r \geq 1$, e $p \in M$ um *ponto fixo* de f, isto é, $f(p) = p$. Dizemos que um ponto fixo é *hiperbólico*, se $Df(p) : T_pM \to T_pM$ não tem autovalores de módulo igual a 1. Existe um versão do Teorema da Variedade Estável/Instável para pontos fixos hiperbólicos que garante a existência de variedades estáveis e instáveis locais $W^s_\varepsilon(p)$ e $W^u_\varepsilon(p)$, respectivamente. (Define-se as variedades estáveis e instáveis para difeomorfismos de maneira totalmente análoga à definição para fluxos).

Seja B um disco mergulhado em $W^u_\varepsilon(p)$ que é vizinhança de p em $W^u_\varepsilon(p)$ e V uma vizinhança de B em M. Consideremos D um disco transversal a $W^s_\varepsilon(p)$ em z com a mesma dimensão de B. Denotemos por D^n a componente conexa de $f^n(D) \cap V$ que contêm $f^n(z)$.

Podemos agora enunciar o

Lema 2.16. (Lema de Inclinação) *Dado $\delta > 0$, existe n_0 tal que se $n > n_0$, então D^n é $\delta - C^r$-próximo de B.*

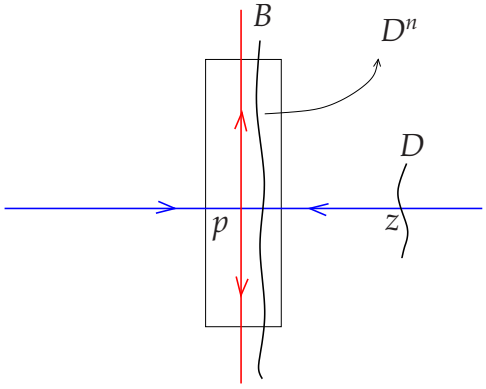


Figura 2.4: Lema de Inclinação

2.7 Lemas perturbativos

Nesta seção reunimos alguns resultados sobre o comportamento dos campos numa vizinhança de um determinado campo fixo.

2.7.1 O Lema de Franks

Nesta seção apresentamos um resultado muito útil que é o Lema de Franks para fluxos. Sob determinadas condições, que explicitamos a seguir, para qualquer pertubação C^2 da derivada de um campo de vetores ao longo de um segmento de órbita compacto, existe um campo C^1 próximo que realiza essa derivada.

Para simplificar a notação enunciaremos este lema supondo que M é subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Usando cartas locais pode-se generalizar o resultado para variedades diferenciáveis compactas e sem bordo de dimensão finita.

Lema 2.17. (Franks) *Sejam $Y \in \mathfrak{X}^2(M)$, $p \in M$ e $\varepsilon > 0$. Dado um segmento de órbita $Y_{[a,b]}(p) := \{Y_t(p) : t \in [a,b]\}$ de Y, U uma vizinhança de $Y_{[a,b]}(p)$ e uma família de isomorfismos lineares $A_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $t \in [a,b]$, onde os coeficiente da A_t relativamente à base canônica de $\mathbb{R}^n$ são funções de classe C^2 em $[a,b]$. Se para todo s,t tais que $t+s \in [a,b]$ tem-se*

(a) $A_0 = Id$ *e* $A_t(Y(Y_s(p))) = Y(Y_{t+s}(p))$;

(b) $\|\partial_s(A_{t+s}A_s^{-1})|_{s=0} - DY(Y_t(p))\| < \varepsilon$,

então existe um campo $Z \in \mathfrak{X}^1(M)$ tal que $\|Y - Z\|_1 < \varepsilon$ e Z coincide com Y em $M \backslash U$. Além disso, $Y_t(p) = Z_t(p)$ e $DZ_t(p) = A_t$ para cada $t \in [a,b]$.

Demonstração: Veja [3, Apêndice B]. ■

Notamos no Lema 2.17 que começamos com um campo de vetores de classe C^2 e obtivemos uma aproximação na norma C^1. Por resultados de Pujals e Sambarino,

mesmo se aumentarmos a classe de diferenciabilidade de Y e A_t, com respeito a t, só se é capaz de controlar a norma entre o campo Y e o campo Z na norma C^1. (Para mais detalhes veja [3]).

2.7.2 Lema de Conexão de Hayashi

Nessa subseção apresentamos o lema de conexão de Hayashi adaptado a fluxos incompressíveis. Este lema diz que se dois pontos distintos, p e q, visitam uma dada vizinhança de x estão afastados de um pedaço da órbita de x no passado, então é possível encontrar um campo Y ,C^1-próximo de X tal que p e q estão na mesma órbita. Veja figura 2.5.

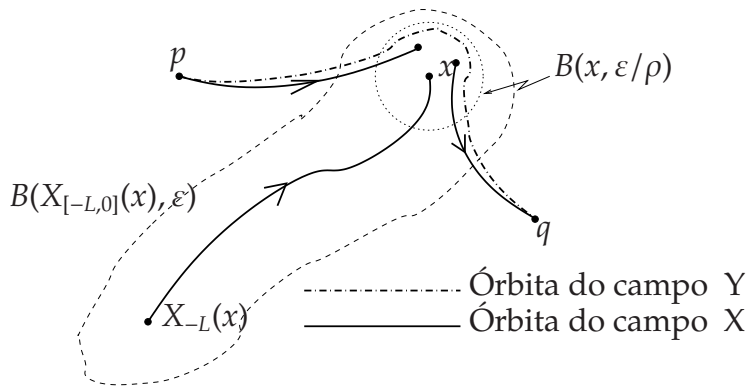


Figura 2.5: Conexão de Hayashi

Para o resultado a seguir, precisamos introduzir algumas notações. Dado $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e $p \in M$, definimos a órbita positiva e negativa de p por

$$O_X^+(p) = \{X_t(p) : \ t \geq 0\};$$

$$O_X^-(p) = \{X_t(p) : \ t \leq 0\},$$

respectivamente. Além disso, dado um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ definimos

$$X_I(p) = \{X_t(p) : \ t \in I\}.$$

Lema 2.18. (Lema de Conexão de Hayashi para Fluxos Incompressíveis.) *Seja $X \in \mathfrak{X}^1_\mu(M)$ e $x \notin S(X)$. Para cada vizinhança $\mathcal{U}$ de X em $\mathfrak{X}^1_\mu(M)$, existem $\rho > 1$, $L > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e quaisquer dois pontos $p, q \in M$ satisfazendo:*

1. $p, q \notin B_\varepsilon(X_{[-L,0]}(x))$;
2. $O_X^+(p) \cap B_{\varepsilon/\rho}(x) \neq \emptyset$;
3. $O_X^-(q) \cap B_{\varepsilon/\rho}(x) \neq \emptyset$,

existe $Y \in \mathcal{U}$ tal que $Y = X$ fora de $B_\varepsilon(X_{[-L,0]}(x))$ e $q \in \mathcal{O}^+_Y(p)$.

Demonstração: Veja [3, Teorema 2.20]. ■

É uma consequência do lema de conexão de Hayashi o seguinte

Teorema 2.19. *Seja $X \in \mathfrak{X}^1_\mu(M)$, σ uma singularidade hiperbólica de X e $\varepsilon > 0$. Se existem $p \in W^u_X(\sigma)\backslash\{0\}$ e $q \in M\backslash C(X)$ tais que para toda vizinhança U de p e V de q, existem $x \in U$ e $t \geq 0$ tais que $X_t(x) \in V$, então existe um campo $Y \in \mathfrak{X}^1_\mu(M)$, ε-C^1- próximo de X, e $T > 0$ tal que $p \in W^u_Y(\rho_1(Y))$ e $Y_T(p) = q$. Além disso, se $q \in W^{ss}_X(x)\backslash\mathcal{O}_X(x)$ para algum $x \in C(X)$ hiperbólico, então Y pode ser escolhido de modo que $q \in W^{ss}_Y(\rho_2(Y))\backslash\mathcal{O}_Y(\rho_2(Y))$, onde ρ_1 e ρ_2 são as continuações analíticas de σ e x, respectivamente.*

Demonstração: Veja [3, Teorema 2.21]. ■

2.7.3 Bifurcações de Conexões Sela

Uma órbita *homoclínica* associada a uma singularidade σ de um campo $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ é uma órbita regular $\Gamma = \mathcal{O}(p)$ satisfazendo

$$\lim_{t\to+\infty} X_t(p) = \sigma = \lim_{t\to-\infty} X_t(p).$$

Dizemos que existe uma *conexão sela-foco* associada σ, quando $DX(\sigma)$ admite um autovalor complexo e a variedade invariante associada ao autovalor real (lembre que M tem dimensão 3) está contida na variedade invariante associada ao autovalor complexo. Desta forma, existe uma órbita Γ homoclínica associada a σ.

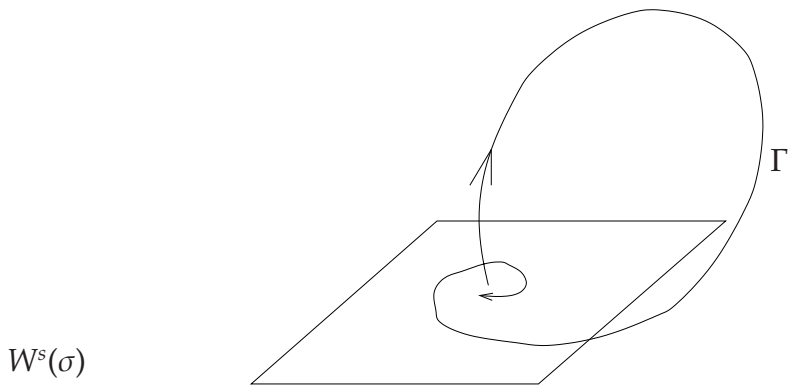


Figura 2.6: Conexão sela-foco.

A existência de uma conexão sela-foco é um fenômeno "raro" e pode ser desfeito por pequenas pertubações do campo. Suponha que existe uma conexão sela-foco associada a uma singularidade σ de um campo $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. A variedade invariante de σ associada ao autovalor complexo é tem dimensão 2 e divide $B_\varepsilon(\sigma)$ em duas componentes conexas. Sem perda de generalidade, suponhamos que a variedade invariante

associada ao autovalor complexo é a estável e a associada ao autovalor real é instável (caso contrário, consideramos o campo $-X$ ao invés de X). Através de pertubações C^1 do campo X, podemos considerar uma família $(X^l)_{l\in I}$, onde I é um intervalo aberto contendo o zero, de campos próximos de X tal que $X^0 = X$, $\omega_{X^l}(x)$ intersecta uma das componentes quando $l > 0$, e intersecta a outra componente quando $l < 0$, qualquer que seja $x \in W^u(x)$. A mudança de comportamento dos campos quando $l = 0$ é o que chamamos de *bifurcação da conexão sela.* Dizemos que em $l = 0$ a dinâmica está *dobrada* ou *encaixada* e $l \neq 0$ é um *desdobramento* da dinâmica. (Veja a figura 2.7).

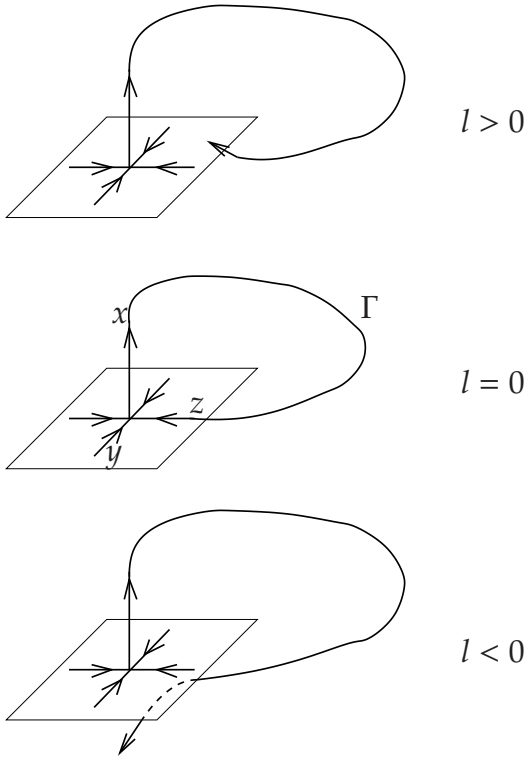


Figura 2.7: Bifurcação da conexão sela-foco.

O resultado a seguir garante que se um campo X admite uma conexão sela-foco associada a uma singularidade σ, então podemos desdobrar a dinâmica de modo a obter um campo, tal que próximo da órbita homoclínica Γ, existem órbitas periódicas *elípticas*, isto é, os expoentes de Lyapunov ao longo de Γ são nulos.

Teorema 2.20. *Seja $(X^l)_{l\in I}$ uma família de campos conservativos de classe C^7, onde I é um intervalo aberto contendo o zero e X^0 admite uma conexão sela-foco Γ (como acima). Então para l suficientemente próximo de zero, X^l possui órbitas periódicas elípticas C^1-próximas de Γ.*

Demonstração: Veja [3]. ■

2.7.4 Inclination-Flip e Orbit-flip

Seja $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. Dizemos que uma singularidade σ de X é *tipo Lorenz*, se $DX(\sigma)$ tem três autovalores reais λ_1, λ_2 e λ_3 satisfazendo $\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < -\lambda_3 < \lambda_1$.

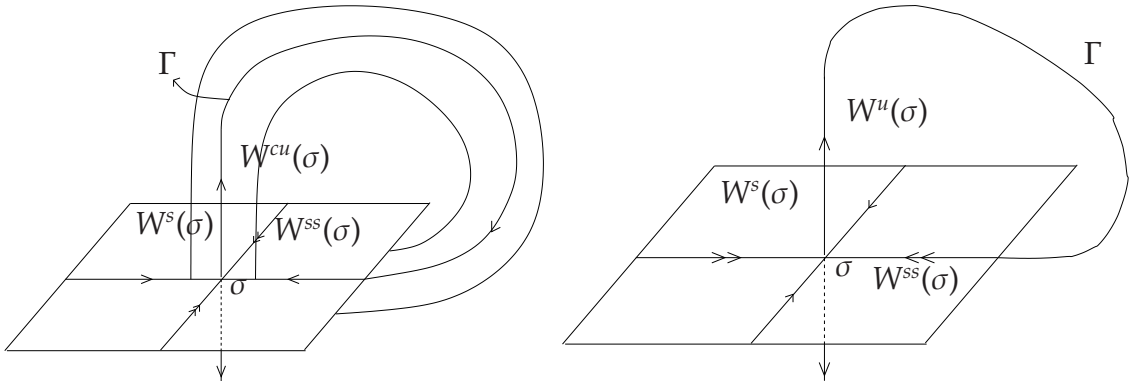
Consideremos então um campo $X \in \mathfrak{X}^1(M)$, com uma singularidade σ tipo Lorenz e λ_1, λ_2 e λ_3 como acima. Sejam E^u, E^{ss} e E^s os autoespaços associados a λ_1, λ_2 e λ_3, respectivamente. A condição $\lambda_2 < \lambda_3 < 0$ garante a existência de uma variedade invariante $W^{ss}(\sigma) \subset W^s(\sigma)$, chamada *variedade estável forte*, tangente ao autoespaço associado a λ_2. Existem também variedades invariantes $W^{cu}(\sigma)$, chamadas de *centro-instáveis*, tangentes ao espaço $E^s \oplus E^u$. (Para uma demonstração desses fatos veja [13]).

Seja Γ uma órbita homoclínica associada a σ. As seguintes condições são genéricas, isto é, são verdadeiras em um subconjunto residual de campos em $\mathfrak{X}^1(M)$ exibindo uma órbita homoclínica associada a uma singularidade tipo Lorenz (para mais detalhes veja [3]):

(G1) $W^{cu}(\sigma)$ interseta $W^s(\sigma)$ transversalmente e $\Gamma = W^{cu}(\sigma) \pitchfork W^s(\sigma)$;

(G2) $\Gamma \cap W^{ss}(\sigma) = \emptyset$.

Quando a propriedade (G1) falha, dizemos que Γ é do tipo *inclination-flip* (veja a figura 2.8(a)) e quando (G2) falha, Γ é do tipo *orbit-flip* (veja a figura 2.8(b)).



(a) Inclination-flip. (b) Orbit-flip.

Figura 2.8: Inclination-flip e orbit-flip

Um campo de vetores C^1, admitindo uma órbita homoclínica do tipo orbit-flip, pode ser aproximado por outro campo C^1 admitindo uma órbita homoclínica do tipo inclination-flip. É o que garante o seguinte

Teorema 2.21. *Seja $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ admitindo uma órbita homoclínica do tipo orbit-flip. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $Y \in \mathfrak{X}^1(M)$, admitindo uma órbita homoclínica do tipo inclination-flip tal que $\|X - Y\|_1 < \varepsilon$.*

Demonstração: Veja [3]. ■

Inclination-flip e a decomposição dominada do fluxo linear de Poincaré

Notamos que a existência de uma órbita homoclínica Γ do tipo inclination-flip para um campo $X \in \mathfrak{X}^1(M)$, implica que o fluxo linear de Poincaré associado a X não pode admitir uma decomposição dominada. De fato, a definição de inclination-flip implica que existe uma tangência entre $W^{cu}(\sigma)$ e $W^s(\sigma)$ ao longo de uma órbita regular do fluxo $(X_t)_t$. Seja $(P^t)_t$ o fluxo linear de Poincaré ao longo de Γ e suponhamos por absurdo que $(P^t)_t$ admite uma decomposição dominada. Seja $N_\Gamma = N^s \oplus N^u$ a decomposição do fibrado normal de Γ dada na definição de decomposição dominada do fluxo linear de Poincaré. Lembramos que essa decomposição é única (veja a Observação 1.2). Usando o fato que σ é hiperbólica e a continuidade da derivada do fluxo, podemos mostrar que

$$\lim_{t\to+\infty} P^t_x(N^u_x) = \lim_{t\to+\infty} N^u_{X_t(x)} = E^s, \text{ para todo } x \in \Gamma.$$

Mas pelo fato de Γ ser do tipo inclination-flip, para pontos de Γ próximos de σ que estão "se afastando"de σ, tem-se que

$$\lim_{t\to+\infty} P^t_x(N^u_x) = \lim_{t\to+\infty} N^u_{X_t(x)} = E^{ss},$$

o que é um absurdo.

2.8 Elementos da Teoria Ergódica

Um dos principais objetivos do estudos dos sistemas dinâmicos é descrever o comportamento assintótico de um ponto $x \in M$ segundo a ação de uma aplicação, ou no nosso caso, sob a ação de um fluxo. Porém, na maioria dos casos, esse trabalho na sua total generalidade é impossível. A Teoria Ergódica, a grosso modo, tentar explicar o comportamento de pontos típicos, ou seja, da maioria dos pontos para uma determinada medida invariante.

Nesta seção introduzimos conceitos e resultados que são úteis para o desenvolvimento deste trabalho. Assumimos aqui que M tem dimensão finita, não necessariamente igual a 3.

2.8.1 Recorrência de Poincaré

Apresentaremos agora as duas versões do conhecido Teorema de Recorrência de Poincaré. Lembramos que um campo $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ preserva uma medida ν, se para todo boreliano $A \subset M$, $\nu(X_t(A)) = \nu(A)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, denotamos por $\mathfrak{X}^1_\nu(M)$ o subconjunto dos campos em $\mathfrak{X}^1(M)$ que preservam a medida ν.

Teorema 2.22. (Recorrência de Poincaré versão mensurável.) *Seja $X \in \mathfrak{X}^1_\nu(M)$, onde ν é uma medida finita definida na σ-álgebra dos borelianos de M. Se E é um boreliano tal que $\nu(E) > 0$, então existe uma sequência de números reais $t_n \nearrow +\infty$ tal que $X_{t_n}(x) \in E$, para ν-quase todo ponto $x \in E$.*

Demonstração: Basta provar o lema para X_1 (o tempo 1 do fluxo $(X_t)_t$). Sejam $X \in \mathfrak{X}^1_\nu(M)$, $f = X_1$ e E um boreliano de M, com $\nu(E) > 0$.

Definamos $E_0 = \{x \in E : \ f^n(x) \notin E \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$ e provemos inicialmente que $\nu(E_0) = 0$. Observamos que a família $(f^{-n}(E_0))_{n\in\mathbb{N}}$ é disjunta. De fato, suponhamos por absurdo que existem $j > i \geq 1$ tais que $f^{-i}(E_0) \cap f^{-j}(E_0) \neq \emptyset$. Seja $x \in f^{-i}(E_0) \cap f^{-j}(E_0)$ e $y = f^i(x) \in E_0$. Logo $f^{j-i}(y) = f^j(x) \in E_0 \subset E$. Absurdo, pois $j - i \geq 1$ e $y \in E_0$.

Temos então que

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-n}(E_0)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(f^{-n}(E_0)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(E_0).$$

Como a medida ν é finita, segue que $\nu(E_0) = 0$.

Consideremos agora $F = \{x \in E : \ \text{o conjunto } \{n \in \mathbb{N} : \ f^n(x) \in E\} \text{ é finito}\}$ e provemos que $\nu(F) = 0$. Por definição do conjunto F, temos que $F \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-n}(E_0)$. Logo $\nu(F) = 0$ e o lema está provado. ■

Dizemos que $x \in M$ é *recorrente* para o fluxo $(X_t)_t$, com $X \in \mathfrak{X}^1(M)$, se existe uma sequência $t_n \nearrow +\infty$ tal que $\lim_{n\to+\infty} X_{t_n}(x) = x$. Temos o seguinte

Teorema 2.23. (Recorrência de Poincaré versão topológica.) *Seja $X \in \mathfrak{X}^1_\nu(M)$ e ν uma medida finita definida nos borelianos de M. Então, ν-quase todo ponto $x \in M$ é recorrente.*

Demonstração: Novamente, basta provar o teorema para o tempo 1 do fluxo $(X_t)_t$, $f = X_1$. Como M é uma variedade compacta, então existe $\{U_k : \ k \in \mathbb{N}\}$ uma base enumerável de abertos. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $\tilde{U}_k = \{x \in U_k : \ f^n(x) \notin U_k \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$. Como vimos na demonstração do teorema 2.22, $\nu(\tilde{U}_k) = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, sendo $\tilde{U} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \tilde{U}_k$, temos que $\nu(\tilde{U}) = 0$. Provaremos que todo ponto de $M \backslash \tilde{U}$ é recorrente para o fluxo $(X_t)_t$.

Sejam $x \in M\backslash\tilde{U}$ e V uma vizinhança de x. Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \tilde{U}_k \subset V$. Como $x \notin \tilde{U}_k$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in \tilde{U}_k \subset V$. Como V é uma vizinhança arbitrária, existe uma sequência de naturais $n_k \nearrow +\infty$ ta tal que $f^{n_k}(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} x$, como queríamos. ■

2.8.2 Ergodicidade

Sejam ν uma medida de probabilidade boreliana em M e $X \in \mathfrak{X}^1_\nu(M)$. Dizemos que ν é *ergódica* para X, se para todo $A \subset M$ mensurável e invariante pelo fluxo $(X_t)_t$, tem-se $\nu(A) \in \{0, 1\}$. Às vezes dizemos também que o par (X, ν) é ergódico.

Se (X, ν) não é ergódico, então existe $A \subset M$, mensurável e invariante, com $0 < \nu(A) < 1$. Dessa forma, poderíamos estudar o fluxo $(X_t)_t$ restrito ao conjunto A e ao seu complementar, separadamente. Portanto, quando (X, ν) é ergódico, já não podemos decompor M em conjuntos invariantes, a menos de medida nula. Na próxima subseção veremos que toda medida probabilidade invariante, pode ser decomposta em uma combinação convexa *generalizada* de medidas ergódicas.

Antes de enunciar a proposição a seguir, vamos introduzir alguma terminologia. Sejam $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e $x \in M$. O conjunto *ω-limite* de x é o conjunto $\omega_X(x)$ dos pontos $y \in M$ tais que existe uma sequência de números reais $t_n \nearrow +\infty$ tal que $X_{t_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$. Em outras palavras, o ω_X-limite de x é o conjunto dos pontos de acumulação da órbita futura de x. De modo análogo definimos o conjunto α_X-limite de x, ou seja, o conjunto *α_X-limite* de x é o conjunto $\alpha(x)$ dos pontos $y \in M$ tais que existe uma sequência de números reais $t_n \searrow -\infty$ tal que $X_{t_n}(x) \xrightarrow[n\to-\infty]{} y$. Quando não houver confusão, denotaremos o α-limite e ω-limite de x simplesmente por $\alpha(x)$ e $\omega(x)$, respectivamente.

As noções apresentadas nessa seção, são definidas de modo natural para difeomorfismos de M em M.

Proposição 2.24. *Sejam N uma variedade riemanniana compacta e ν uma probabilidade ergódica para um campo $X \in \mathfrak{X}^1_\nu(N)$. Então $\alpha(x) = \omega(x) = N$, para ν-quase todo $x \in N$.*

Demonstração: Veja [17]. ■

2.8.3 Decomposição Ergódica

Antes de enunciar o teorema que garante que medidas invariantes são, num certo sentido que explicitaremos, combinação convexa de medidas ergódicas, precisamos introduzir algumas terminologias.

Sejam ν uma probabilidade boreliana em M e $\mathcal{P}$ uma partição de M em subconjuntos mensuráveis. Denotaremos por $\pi : M \to \mathcal{P}$ a projeção natural que associa a cada $x \in M$ o elemento $\mathcal{P}(x)$ da partição que o contém. Através dessa projeção podemos munir $\mathcal{P}$ de uma estrutura de espaço de probabilidade, da seguinte forma. Definimos uma σ-álgebra de subconjuntos de $\mathcal{P}$ dizendo que $Q \subset \mathcal{P}$ é mensurável se $\pi^{-1}(Q)$ é um boreliano de M. Em seguida, definimos *a medida quociente* $\hat{\nu}$ por

$$\hat{\nu}(Q) = \nu(\pi^{-1}(Q)), \text{ para cada } Q \text{ mensurável de } \mathcal{P}.$$

Podemos agora enunciar o Teorema da Decomposição Ergódica.

Teorema 2.25. (Decomposição Ergódica.) *Seja $X \in \mathfrak{X}^1_\nu(M)$, com ν uma probabilidade. Então existe um boreliano $M_0 \subset M$ com $\nu(M_0) = 1$, uma partição $\mathcal{P}$ de M_0 em subconjuntos mensuráveis e uma família de probabilidades $\{\nu_P : P \in \mathcal{P}\}$ em M, satisfazendo*

(a) $\nu_P(P) = 1$ *para $\hat{\nu}$-quase todo $P \in \mathcal{P}$;*

(b) $P \to \nu_P(E)$ *é uma aplicação mensurável, para todo conjunto mensurável $E \subset M$;*

(c) ν_P *é ergódica para X, para $\hat{\nu}$-quase todo $P \in \mathcal{P}$;*

(d) $\nu(E) = \displaystyle\int \nu_P(E)\, d\hat{\nu}(P)$, *para todo conjunto mensurável $E \subset M$.*

Demonstração: Veja [17, Teorema 5.1.3]. ■

O lado direito da relação (d) é o que chamamos de *combinação convexa generalizada* das probabilidade ergódicas ν_P, em que cada ν_P entra com peso igual a $\hat{\nu}(P)$. Chamamos cada ν_P de *componente ergódica* de ν.

Vejamos o caso particular em que a partição dada pelo teorema acima é finita. Suponhamos que $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$ e $\{\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n\}$ são a partição e a família de probabilidades dadas pelo Teorema 2.25. Notamos que neste caso

$$\hat{\nu} = \sum_{i=1}^{n} \hat{\nu}(\{P_i\})\delta_{\{P_i\}}.$$

Assim, usando a relação (d) temos que

$$\nu(E) = \int \nu_P(E)\, d\hat{\nu}(P) = \sum_{i=1}^{n} \hat{\nu}(\{P_i\}) \cdot \nu_i(E),$$

para todo $E \subset M$. Como $\sum_{i=1}^{n} \hat{\nu}(\{P_i\}) = 1$, então neste caso, temos que ν é uma combinação convexa, no sentido usual, das probabilidades ergódicas ν_i, $i = 1, 2, ..., n$.

O Teorema da Decomposição Ergódica tem diversas aplicações importantes. Neste texto o usaremos para reduzir um certo argumento ao caso em que a medida é ergódica. Isso será feito no capítulo 3 com a medida μ_A que é definida a seguir na seção 2.9.

2.9 Hiperbolicidade não uniforme

Apresentamos aqui os resultados de Teoria Ergódica Diferenciável que vamos usar no resto do texto.

2.9.1 Expoentes de Lyapunov e Teorema de Oseledets

Dado um campo $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ definimos o *expoente de Lyapunov de X em $x \in M$ na direção $v \in T_xM$* por

$$L(x,v) = \liminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \|DX_t(x)v\|.$$

Para o próximo resultado podemos assumir que M tem dimensão finita e maior ou igual a 3.

Teorema 2.26. (Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledets) *Seja $X \in \mathfrak{X}^1_\nu(M)$. Então para ν quase todo ponto $x \in M$, existe uma decomposição $T_xM = E^1_x \oplus E^2_x \oplus \cdots \oplus E^{k(x)}_x$ e números $\chi_1(x) < \chi_2(x) < \cdots < \chi_{k(x)}(x)$ tais que*

(a) $DX_t(x) \cdot E^i_x = E^i_{X_t(x)}$, $i = 1, 2, \ldots, k(x)$;

(b) $L(x,v) = \chi_i(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \|DX_t(x)v\|$, *para todo* $v \in E^i_x \backslash \{0\}$;

(c) quaisquer que sejam, $I, J \subset \{1, 2, ..., k(x)\}$ disjuntos, tem-se

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} \log \measuredangle\Big(\bigoplus_{i\in I} E^i_{X_t(x)}, \bigoplus_{i\in J} E^j_{X_t(x)}\Big) = 0,$$

em ν quase todo o ponto;

(d) para μ-quase todo ponto $x \in M$, tem-se

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} \log |\det DX_t(x)| = \sum_{i=1}^{k(x)} \chi_i(x) \dim E^i_x.$$

Os números $\chi_1(x) < \chi_2(x) < \cdots < \chi_{k(x)}$ são chamados simplesmente de *expoentes de Lyapunov* de X em x. No item (c) dizemos que há decaimento subexponencial de ângulos.

Notamos que na direção do fluxo o expoente de Lyapunov correspondente é nulo. De fato,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \|DX_t(x) \cdot X(x)\| = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \|X(X_t(x))\| = 0,$$

uma vez que $x \mapsto \|X(x)\|$ é uma aplicação limitada. Assim, a direção do fluxo é um dos subespaços na decomposição de T_xM.

Observação 2.27. *Observe que no nosso caso, em que X preserva a medida de volume μ, temos que $|\det DX_t(x)| = 1$, para todo $x \in M$. Portanto,*

$$\sum_{i=1}^{k(x)} \chi_i(x) \dim E^i_x = 0.$$

Além disso, como estamos trabalhando com fluxos em dimensão 3*, temos* 3 *expoentes de Lyapunov (não necessariamente distintos),* $\chi_s(x) \leq 0 \leq \chi_u(x)$ *e um terceiro na direção do campo que é nulo.*

Denotaremos E^s_x *(respec.* E^u_x*) o espaço vetorial associado ao expoente de Lyapunov* $\chi_s(x)$ *(respec.* $\chi_u(x)$*).*

O próximo resultado nos dá uma caracterização das órbitas periódicas para campos próximos de um campo X cujo fluxo linear de Poincaré sobre um conjunto Λ possui decomposição dominada.

Lema 2.28. *Sejam* $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ *e um conjunto invariante e regular* $\Lambda \subset M$*, tal que o fluxo linear de Poincaré sobre* Λ *admite uma decomposição dominada. Então existe uma vizinhança* U *de* Λ*, uma vizinhança* $\mathcal{U}$ *de* X *em* $\mathfrak{X}^1(M)$ *e* $\eta > 0$ *tais que para cada* $Y \in \mathcal{U}$*, cada órbita periódica de* Y *contida em* U *é hiperbólica do tipo sela e os expoentes de Lyapunov (não nulos)* χ_s *e* χ_u *satisfazem* $\chi_s < -\eta$ *e* $\chi_u > \eta$*. Além disso, o ângulo entre as direções instáveis e estáveis dessas órbitas periódicas é maior que* η*.*

Demonstração: Sejam U vizinhança de Λ e $\mathcal{U}$ vizinhança de X em $\mathfrak{X}^1(M)$ dadas pelo Lema 1.4. Sejam $Y \in \mathcal{U}$ e $\mathcal{O}_Y(q) = \{Y_t(q) : \ t \in \mathbb{R}\}$ uma órbita periódica de Y de período τ_0. Provemos primeiramente que $\mathcal{O}_Y$ é tipo sela. Seja P^t_q o fluxo linear de Poincaré com respeito a Y. Pelo Lema 1.4 P^t_q admite uma decomposição (C, λ)-dominada. Seja $m \in \mathbb{Z}$ tal que $Ce^{-\lambda\tau_0 m} < 1/2$. Assim,

$$\frac{\|P^{\tau_0 m}_q|N^s_q\|}{\|P^{\tau_0 m}_q|N^u_q\|} < \frac{1}{2}. \tag{2.3}$$

Seja $\sum$ uma seção transversal que passa por q, ortogonal ao vetor $Y(q)$. Sendo R a transformação de primeiro retorno de Poincaré definida em uma vizinhança de q em $\sum$ teremos que $DR(q) = P^{\tau(q)}_q = P^{\tau_0}_q$, onde τ é a função tempo de primeiro retorno.

Logo $\sigma(P^{\tau_0}_q) = \sigma(DR(q)) = \sigma(DY_{\tau_0}(q)|N_q) = \{\lambda_s, \lambda_u\}$, onde $\sigma(T)$, representa o espectro do operador T. Por (2.3) temos que $(|\lambda_s|/|\lambda_u|)^m < 1/2$. Logo,

$$\log(|\lambda_s|) + 2k < \log(|\lambda_u|), \tag{2.4}$$

onde $2k = m^{-1}\log(2)$.

Pelo Lema 1.4, k depende apenas das constantes na dominação de Λ. Como X é incompressível podemos tomar $\varepsilon < k/2$ de modo que

$$e^{-\varepsilon} < |\lambda_s| \cdot |\lambda_u| < e^{\varepsilon}, \tag{2.5}$$

se necessário, diminuímos a vizinhança $\mathcal{U}$.

Por (2.5), $-\log(|\lambda_u|) - \varepsilon < \log(|\lambda_s|)$, o que implica que $-\log(|\lambda_u|) - \varepsilon + 2k < \log(|\lambda_s|) + 2k < \log(|\lambda_u|)$. Logo $\log(|\lambda_u|) > k - \varepsilon/2 > 0$. Por outro lado, ainda por (2.5), $\log(|\lambda_s|) < \varepsilon - \log(|\lambda_u|)$, o que implica que, $\log(|\lambda_s|) < \varepsilon - (k - \varepsilon/2) = 3\varepsilon/2 - k < 0$. Portanto, existe $\eta > 0$, que não depende de $Y \in \mathcal{U}$ (depende apenas da vizinhança $\mathcal{U}$ de X em $\mathfrak{X}^1(M)$) tal que $\log(|\lambda_s|) < -\eta$ e $\log(|\lambda_u|) > \eta$. Segue então que $\mathcal{O}_Y(q)$ é do tipo sela pois, $|\lambda_u| > e^{\eta} > 1$ e $|\lambda_s| < e^{-\eta} < 1$. Agora basta notar que $\chi_s = \log|\lambda_s|$ e $\chi_u = |\lambda_u|$ são expoentes de Lyapunov (não nulos) do fluxo gerado pelo campo Y ao longo da órbita $\mathcal{O}_Y(p)$.

Provemos agora que o ângulo entre as direções estáveis e instáveis de órbitas periódicas em $\mathcal{U}$ é afastado de zero. Suponhamos por absurdo que não. Então existe uma sequência de campos $(Y_n)_n$ em $\mathcal{U}$, convergindo para X, e órbitas periódicas $\mathcal{O}_n$ de Y_n contidas na vizinhança U de Λ tais que o ângulo α_n entre as direções estáveis e instáveis de $\mathcal{O}_n$ tende a zero quando n tende a infinito.

Pelo lema 2.17 (lema de Franks), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $Z_n \in \mathfrak{X}^1(M)$ tal que $\|Z_n - Y_n\|_1 < 1/n$, $\mathcal{O}_n$ também é órbita de Z_n. Podemos escolher os isomorfismos A_t no lema 2.17 de modo que, para Z_n, a órbita $\mathcal{O}_n$ é um poço ou uma fonte (para os detalhes de como o lema de Franks foi utilizado aqui, veja [3, subseção 4.2.3]). Para n grande teremos que $Z_n \in \mathcal{U}$. Isto contradiz a primeira parte deste lema. Logo o ângulo entre as direções estáveis e instáveis de qualquer campo em $\mathcal{U}$ tem que ser maior que uma constante positiva.

Podemos fazer η pequeno o suficiente que satisfaça $\chi_s < -\eta$, $\chi_u > \eta$ e o ângulo entre as direções instáveis e estáveis dessas órbitas periódicas é maior que η. ■

2.9.2 Medidas Hiperbólicas

Pontos de densidade de Lebesgue

Seja $\Lambda \subset M$ um boreliano. Dizemos que $x \in M$ é um *ponto de densidade de Lebesgue* se

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mu(\Lambda \cap B(x,r))}{\mu(B(x,r))} = 1.$$

Denotaremos por $D(\Lambda)$ o conjunto dos pontos de densidade de Lebesgue de Λ.

É conhecido da Teoria da Medida e Integração o seguinte resultado:

Lema 2.29. *Se $C \subset \mathbb{R}^n$ é um boreliano e m é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$, então*

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{m(C \cap B(x,r))}{m(B(x,r))} = \mathbb{1}_C(x) \ \ m\text{-q.t.p.},$$

onde $\mathbb{1}_C$ é a função indicadora do conjunto C.

Usando cartas locais podemos demonstrar a seguinte

Proposição 2.30. *Se $\Lambda \subset M$ é um boreliano, então*

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mu(\Lambda \cap B(x,r))}{\mu(B(x,r))} = \mathbb{1}_\Lambda(x) \ \ \mu\text{-q.t.p.}.$$

Observação 2.31. *Segue da proposição acima que μ-quase todo ponto de um boreliano Λ é um ponto de densidade de Λ. Além disso, se $x \in D(\Lambda)$, temos que $\Lambda \cap B(x,r) \neq \emptyset$, para $r > 0$ suficientemente pequeno. Temos então que $D(\Lambda) \subset \overline{\Lambda}$. Portanto, temos que $\overline{D(\Lambda)} = \overline{\Lambda}$.*

Medidas Hiperbólicas

Suponhamos que $X \in \mathfrak{X}^1_\nu(M)$, onde ν é uma probabilidade. Dizemos que ν é uma medida *não uniformemente hiperbólica* (ou simplesmente *hiperbólica*) se todos os expoentes de Lyapunov de X com respeito a medida ν são não nulos, exceto na direção do fluxo.

Proposição 2.32. *Sejam $X \in \mathfrak{X}^1_\mu(M)$ e $\Lambda \subset M$ conjunto regular invariante por $(X_t)_t$, tal que o fluxo linear de Poincaré sobre Λ admite uma decomposição dominada. Se $\mu(\Lambda) > 0$, então a medida μ_A dada por*

$$\mu_A(E) = \frac{\mu(E \cap A)}{\mu(A)}$$

é não uniformemente hiperbólica, onde $A = \overline{D(\Lambda)}$.

Demonstração: Provemos primeiramente que $D(\Lambda)$ é invariante pelo fluxo. Sejam $x \in D(\Lambda)$ e $t \in \mathbb{R}$. Temos

$$1 = \lim_{r\to 0^+} \frac{\mu(\Lambda \cap B(x,r))}{\mu(B(x,r))} = \lim_{r\to 0^+} \frac{\mu(\Lambda \cap X_t(B(x,r)))}{\mu(X_t(B(x,r)))}, \tag{2.6}$$

pois o fluxo X é incompressível e Λ é invariante pelo fluxo $(X_t)_t$. Em seguida, provaremos que

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mu(\Lambda \cap B(X_t(x),r))}{\mu(B(X_t(x),r))} = 1,$$

que é equivalente a

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mu(\Lambda^c \cap B(X_t(x),r))}{\mu(B(X_t(x),r))} = 0.$$

Pelo Teorema 2.6, existe $c_1 > 0$ tal que $B(X_t(x),r) \subset X_t(B(x,r/c_1))$, para todo $r > 0$. Daí seque que

$$\frac{\mu(\Lambda^c \cap B(X_t(x),r))}{\mu(B(X_t(x),r))} \leq \frac{\mu(\Lambda^c \cap X_t(B(x,r/c_1)))}{\mu(X_t(B(x,r/c_1)))} \cdot \frac{\mu(B(x,r/c_1))}{\mu(B(X_t(x),r))}.$$

De 2.6, segue que $\dfrac{\mu(\Lambda^c \cap X_t(B(x,r/c_1)))}{\mu(X_t(B(x,r/c_1)))} \xrightarrow[r\to 0^+]{} 0$. Assim, basta mostrar que $\dfrac{\mu(B(x,r/c_1))}{\mu(B(X_t(x),r))}$ é limitado (como função de r) para $r > 0$. Usando o corolário 2.5, temos que existe uma constante $c_2 > 0$ tal que $X_t(B(x,r/c_2)) \subset B(X_t(x),r)$, para todo $r > 0$. Usando isto e o fato de que μ é preservada pelo fluxo, obtemos

$$\frac{\mu(B(x,r/c_1))}{\mu(B(X_t(x),r))} \leq \frac{\mu(B(x,r/c_1))}{\mu(B(x,r/c_2))}.$$

Para r suficientemente pequeno, existem números $L_1(x), L_2(x) > 0$ tais que

$$\begin{array}{rclcl} r^3/L_1(x) & \leq & \mu(B(x,r/c_1)) & \leq & L_1(x)r^3 \\ r^3/L_2(x) & \leq & \mu(B(x,r/c_2)) & \leq & L_2(x)r^3 \end{array}.$$

Portanto segue

$$\frac{\mu(B(x,r/c_1))}{\mu(B(X_t(x),r))} \leq L_1(x)L_2(x).$$

Com isso concluímos que

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mu(\Lambda^c \cap B(X_t(x),r))}{\mu(B(X_t(x),r))} = 0,$$

ou seja, $D(\Lambda)$ é invariante pelo fluxo.

Usando a continuidade do fluxo, temos que $A = \overline{D(\Lambda)}$ também é invariante pelo fluxo.

Claro que $\mu_A(M) = 1$, logo, μ_A é uma medida de probabilidade. Provemos que X preserva a medida μ_A. Seja $E \subset M$ um boreliano. Temos, para cada $t \in \mathbb{R}$, que

$$\mu_A(E) = \frac{\mu(A \cap E)}{\mu(A)} = \frac{\mu(A \cap X_t(E))}{\mu(X_t(A))} = \mu_A(X_t(E)),$$

pois X é incompressível e A é invariante por $(X_t)_t$.

Pelo lema 3.2, temos que $\overline{\Lambda}$ é hiperbólico. Logo, para cada $x \in \overline{\Lambda}$, existe uma decomposição $T_xM = E^s_x \oplus E^X_x \oplus E^u_x$. Sejam $\chi_s(x) := \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t} \log \|DX_t(x) \mid E^i_x\|$ e $\chi_u(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t} \log \|DX_t(x) \mid E^i_x\|$ os expoentes de Lyapunov associados a E^s_x e a E^u_x, respectivamente. Pelo Teorema de Oseledets (Teorema 2.26), esses expoentes estão bem definidos em um conjunto com medida μ_A total. Provemos que estes expoentes são não nulos.

Como $\overline{\Lambda}$ é hiperbólico, existem constantes $K, \lambda > 0$ tais que

$$\|DX_t(x) \mid E^s_x\| \leq Ke^{-\lambda t} \text{ e } \|DX_{-t}(x) \mid E^u_x\| \leq Ke^{-\lambda t}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Segue da primeira desigualdade que $\chi_s(x) \leq -\lambda < 0$. Como a segunda desigualdade é equivalente a $\|DX_t(x) \mid E^u_x\| \geq K^{-1}e^{\lambda t}$, com $t \geq 0$, segue que $\chi_u(x) \geq \lambda > 0$. Como $\mu(A \triangle \Lambda) = 0$ e $A \subset \overline{\Lambda}$, então os expoentes de Lyapunov de μ_A são não nulos. Portanto, μ_A é não uniformemente hiperbólica. ■

Lema de fechamento de Katok

Dizemos que duas medidas de probabilidade $\nu_1, \nu_2 : \mathcal{B} \to [0,1]$ são *equivalentes* se elas possuem os mesmos conjuntos de medida nula, onde $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra de Borel.

Definimos o *suporte* de uma medida de probabilidade $\nu : \mathcal{B} \to [0,1]$ por

$$\text{supp}(\nu) = \{x \in M : \ \nu(U) > 0, \text{ para toda vizinhança } U \text{ de } x\}.$$

Denotaremos por $\mathfrak{X}^{1+}(M)$ o conjunto dos campos $X : M \to TM$ cuja derivada é Hölder contínua. Temos então o seguinte lema devido a Katok:

Lema 2.33. *Seja ν uma medida hiperbólica e equivalente a medida de Lebesgue μ. Se $X \in \mathfrak{X}^{1+}_\nu(M)$, então $supp(\nu) \subset \overline{Per_h(X)}$.*

Demonstração: Veja [7]. ■

Observação 2.34. *Sejam $X \in \mathfrak{X}^1_\mu(M)$ e $\Lambda \subset M$ conjunto regular invariante por $(X_t)_t$, tal que o fluxo linear de Poincaré sobre Λ admite uma decomposição dominada. Como a medida μ_A é hiperbólica e equivalente a μ, então temos, como corolário imediato do lema anterior, que $supp(\mu_A) \subset \overline{Per_h(X) \cap A}$.*

Componentes Ergódicas de uma Medida Hiperbólica

O seguinte resultado, devido a Pesin, descreve a decomposição de uma medida hiperbólica que é equivalente a medida de Lebesgue.

Teorema 2.35. *Seja $X \in \mathfrak{X}^{1+}_\nu(M)$, com ν uma probabilidade boreliana não uniformemente hiperbólica e equivalente a medida de Lebesgue μ. Então ν tem uma quantidade enumerável de componentes ergódicas.*

Demonstração: Veja [7, Teorema 11.3]. ■

Como consequência do teorema acima temos o seguinte

Corolário 2.36. *Nas mesmas condições da proposição 2.32, a medida μ_A tem uma quantidade enumerável de componentes ergódicas.*

Devido a este corolário, suporemos a partir daqui que a medida μ_A é ergódica.

2.9.3 Variedades Invariantes

Dado $X \in \mathfrak{X}^1(M)$, dizemos que um conjunto $\Lambda \subset M$, invariante por $(X_t)_t$, é *não uniformemente hiperbólico* se existem números reais ε, $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ e funções $C, K : \Lambda \to (0, +\infty)$ tais que, para cada $x \in \Lambda$

(a) existe uma decomposição $T_xM = E^s_x \oplus E^u_x$ tal que

(a_1) E^u_x e E^s_x dependem mensuravelmente de x;

(a_2) $DX_t(x)(E^u_x) = E^u_{X_t(x)}$ e $DX_t(x)(E^s_x) = E^s_{X_t(x)}$;

(b) $\|DX_t(x)|E^s_x\| \leq C(x)\lambda_1^t e^{-\varepsilon t}$ e $\|DX_{-t}(x)|E^u_x\| \leq C(x)\lambda_2^{-t} e^{-\varepsilon t}$, para todo $t > 0$;

(c) $\measuredangle(E^s_{X_t(x)}, E^u_{X_t(x)}) \geq K(X_t(x))$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in \Lambda$;

(d) $C(X_{t_1+t_2}(x)) \leq C(X_{t_1}(x))e^{\varepsilon|t_2|}$ e $K(X_{t_1+t_2}(x)) \geq K(X_{t_1}(x))e^{-\varepsilon|t_2|}$.

Lembramos que $\mathfrak{X}^{1+}(M)$ denota o conjunto dos campos $X : M \to TM$ cuja derivada é Hölder contínua. O teorema a seguir garante a existência de variedades estáveis e instáveis (fortes) tangentes à direção correspondente ao expoente de Lyapunov negativo e positivo, respectivamente.

Teorema 2.37. (Teorema da Variedade Estável) *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto não uniformemente hiperbólico para $X \in \mathfrak{X}^{1+}(M)$. Para cada $x \in \Lambda$, existe uma variedade estável local $W^s_{\varepsilon(x)}(x)$, tangente a E^s_x (E^s_x como na definição de conjunto não uniformemente hiperbólico), tal que*

(a) o tamanho $\varepsilon(x)$ de $W^s_{\varepsilon(x)}(x)$ depende mensuravelmente de x;

(b) $dist(X_t(x), X_t((y)) \leq T(x)\lambda_1^t e^{\varepsilon t} dist(x, y)$, para todo $y \in W^s_{\varepsilon(x)}(x)$ e $t > 0$, onde $T : \Lambda \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável e $T(X_s(x)) \leq T(x)e^{10\varepsilon|s|}$.

Demonstração: Veja [7]. ■

Vale um resultado totalmente análogo para variedades instáveis locais.

2.9.4 Blocos Hiperbólicos

Folheações

Para o que se segue denotamos por B^n a bola aberta centrada na origem e de raio 1 de $\mathbb{R}^n$.

Suponhamos aqui que M tem dimensão m. Seja W uma partição de M em subvariedades de classe C^1 e de dimensão k. Para cada $x \in M$, seja $W(x)$ o elemento da

partição W que contém x. Dizemos que W é uma *folheação contínua de dimensão k com folhas C^1* (ou simplesmente *folheação*) se para cada $x \in M$, existe uma vizinhança U de x e um homeomorfismo $h : B^k \times B^{m-k} \to U$ tal que

(a) para cada $z \in B^{m-k}$, o conjunto $h(B^k \times \{z\})$ é a componente conexa de $W(h(0,z)) \cap U$ que contém $h(0,z)$;

(b) $h(\cdot, z)$ depende continuamente de z na topologia C^1.

O par (U,h) é chamado de *carta local da folheação*. Os conjuntos $h(B^k \times \{z\})$ são chamados de *folhas locais* (ou *placas*), e os conjuntos $h(\{y\} \times B^{m-k})$ são chamados de *transversais locais*. Para $x \in U$, denotados por $W_U(x)$ a folha local que contém x. Cada subvariedade $W(x)$ é chamada de *folha*. Dizemos que uma subvariedade $L \subset M$ de dimensão $m-k$ é um *transversal*, se é L é transversal a cada folha da folheação.

Uma folheação contínua W é dita C^k, se podemos escolher a aplicação h sendo de classe C^k.

Continuidade Absoluta da Folheação

Ainda com a suposição que M tem dimensão m, seja W uma folheação contínua de M. Sejam (U,h) uma carta coordenada da folheação e $L(y) = h(\{y\} \times B^{m-k})$ um transversal local C^1. Dizemos que W é *absolutamente contínua*, se para cada $L(y)$ e cada U, existe uma família de funções mensuráveis positivas $\delta_x : W_U(x) \to \mathbb{R}$ (chamadas de *densidades condicionais*) tais que para cada $A \subset U$ mensurável tem-se

$$\mu(A) = \int_{L(y)} \int_{W_U(x)} \mathbb{1}_A(x,y)\delta_x(y) d\mu_{W_U(x)}(y) d\mu_{L(y)}(x),$$

onde $\mu_{W_U(x)}$ e $\mu_{L(y)}$ são as medidas induzidas nas subvariedades $W_U(x)$ e $L(y)$, respectivamente.

Sejam $L_i = h(\{y_i\} \times B^{m-k})$, para $y_i \in B^k$ e $i = 1,2$. Definamos um homeomorfismo

$$\begin{array}{rccc} p: & L_1 & \longrightarrow & L_2 \\ & h(y_1,z) & \longmapsto & h(y_2,z). \end{array}$$

A função p é chamada de *função de holonomia*. Dizemos que a folheação W é *transversalmente absolutamente contínua*, se a holonomia p é absolutamente contínua para cada carta coordenada de folheação h e para cada transversal L_i como acima, isto é, se existe uma função mensurável positiva $q : L_1 \to \mathbb{R}$ (chamada *Jacobiano de p*) tal que para cada conjunto mensurável $A \subset L_1$ tem-se

$$\mu_{L_2}(p(A)) = \int_{L_1} \mathbb{1}_A q(z) d\mu_{L_1}(z),$$

onde μ_{L_i} é a medida induzida em L_i, $i = 1,2$.

Blocos Hiperbólicos

Sejam $X \in \mathfrak{X}^1_\mu(M)$, $A \subset M$ conjunto invariante por $(X_t)_t$, tal que $\mu(A) > 0$ e a restrição normalizada de μ à A, μ_A, é uma medida hiperbólica. Logo, [6] nos garante a existência de conjuntos compactos $\mathcal{H}(k)$, $k \in \mathbb{N}$, que chamaremos de *blocos hiperbólicos* (ver *regular sets* em [6]), tais que

- $\mathcal{H}(k) \subset \mathcal{H}(k+1)$, para todo $k \in \mathbb{N}$;
- $\mu_A(\mathcal{H}(k)) \nearrow 1$;
- As variedades estáveis e instáveis, $W^s_{\varepsilon(x)}(x)$ e $W^u_{\delta(x)}(x)$, respectivamente, dependem continuamente de $x \in \mathcal{H}(k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$;
- os tamanhos $\varepsilon(x)$ e $\delta(x)$ de $W^s_{\varepsilon(x)}(x)$ e $W^u_{\delta(x)}(x)$, respectivamente, são afastados de zero, para todo $x \in \mathcal{H}(k)$.

Continuidade Absoluta das Variedades Estáveis e Instáveis

Sejam $X \in \mathfrak{X}^1_\mu(M)$ e $\Lambda \subset M$ conjunto regular invariante por $(X_t)_t$, tal que o fluxo linear de Poincaré sobre Λ admite uma decomposição dominada. Seja $(\mathcal{H}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ família de blocos hiperbólicos associada a Λ. Temos o seguinte

Teorema 2.38. [6, Teorema 11.1] *Sejam $x \in \mathcal{H}(k)$, $k \in \mathbb{N}$, L_1 e L_2 transversais locais de $\mathcal{L}(x) = \{W^s_{\varepsilon(w)}(w);\ w \in \mathcal{H}(k) \cap B(x,r)\}$. Então a função de holonomia $p : L_1 \to L_2$ é absolutamente contínua.*

Em outras palavras, para cada $x \in \mathcal{H}(k)$ a família $\mathcal{L}(x)$ é transversalmente absolutamente contínua. Vale o enunciado análogo para as variedades instáveis.

2.9.5 Distorção Limitada

Sejam $X \in \mathfrak{X}^{1+}_\mu(M)$ e $\Lambda \subset M$ conjunto regular invariante por $(X_t)_t$, tal que o fluxo linear de Poincaré sobre Λ admite uma decomposição dominada. Vimos que os expoentes de Lyapunov $\chi_s(x)$, $\chi_u(x)$ de X no ponto x satisfazem $\chi_s(x) \le 0 \le \chi_u(x)$ (veja a observação 2.27). Sejam E^s o subfibrado de TM associado à χ_s e E^u o subfibrado associado à χ_u. Seja $(\mathcal{H}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ uma família de blocos hiperbólicos associados a Λ. Temos o seguinte

Lema 2.39. [7, Teoremas 11.1 e 11.2] *Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_A(\mathcal{H}(k)) > 0$. Então a função*

$$h^s(x,y) = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{|\det Df \mid E^s_{f^i(x)}|}{|\det Df \mid E^s_{f^i(y)}|}$$

é Hölder contínua para cada $x \in \mathcal{H}(k)$ *e todo* $y \in W^s_{\varepsilon(x)}(x)$*, onde* $f = X_1$ *é o tempo* 1 *do fluxo* $(X_t)_t$.

Tal lema é uma propriedade que chamamos de *distorção limitada*. Vale o enunciado análogo para a variedade instável. Mais precisamente, definindo

$$h^u(x, y) = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{|\det Df^{-1} \mid E^u_{f^{-i}(x)}|}{|\det Df^{-1} \mid E^s_{f^{-i}(y)}|},$$

com $x \in \mathcal{H}(k)$ e $y \in W^s_{\varepsilon(x)}(x)$, teremos que h^u também é Hölder contínua.

Capítulo 3

Prova do Teorema Principal

Neste capítulo mostramos que o fecho A dos pontos de densidade de um conjunto Λ regular e invariante para um campo $X \in \mathcal{G} \cap \mathfrak{X}^{1+}(M)$, com $\mu(\Lambda) > 0$, não admite singularidades. Isso será usado para provar o teorema principal. Mais precisamente, vamos provar a proposição 3.1 a seguir.

Lembramos que estamos denotando por $\mathcal{G}$ o conjunto dos campos em $\mathfrak{X}^1_\mu(M)$, cujas singularidades são hiperbólicas e não possuem ressonância. Em outras palavras, se $X \in \mathcal{G}$ e σ é uma singularidade de X, então os autovalores de $DX(\sigma)$ são reais e distintos.

Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto regular e invariante por $(X_t)_t$, com o fluxo linear de Poincaré sobre Λ admitindo uma decomposição dominada. A partir de agora A sempre denotará o fecho dos pontos de densidade de Lebesgue de Λ.

Proposição 3.1. *Sejam $X \in \mathcal{G} \cap \mathfrak{X}^{1+}(M)$ e $\Lambda \subset M$ um conjunto regular e invariante por $(X_t)_t$. Se o fluxo linear de Poincaré sobre Λ admite uma decomposição dominada e $\mu(\Lambda) > 0$, então A não contém singularidades de X.*

A demonstração da proposição 3.1 é dividida em vários passos que provaremos ao longo deste capítulo.

3.1 Decomposição dominada e hiperbolicidade em campos conservativos

Lema 3.2. *Se $X \in \mathfrak{X}^1_\mu(M)$ possui um conjunto invariante $\Lambda \neq \emptyset$ tal que $\overline{\Lambda}$ não possui singularidades e o fluxo linear de Poincaré sobre $\overline{\Lambda}$ admite uma decomposição dominada, então $\overline{\Lambda}$ é hiperbólico.*

Demonstração: Numa variedade de dimensão 3, a decomposição dominada do fluxo linear de Poincaré só pode ocorrer se a dimensão dos subfibrados na decomposição do fibrado normal têm dimensão constante e igual a 1. Como $\overline{\Lambda}$ não possui singularidades de X, podemos estender (por continuidade) a decomposição dominada a $\overline{\Lambda}$. Como M é compacta, existe $K > 1$ tal que $K^{-1} \leq \|X(x)\| \leq K$, para todo $x \in M$. Pelo Lema 2.10, existe $\beta > 0$ tal que $\theta_t := \measuredangle(N^s_{X_t(x)}, N^u_{X_t(x)}) \geq \beta$, para todo $x \in \overline{\Lambda}$. Como X é incompressível temos que

$$\begin{aligned} 1 &= |\det DX_t| \\ &= |\det DX_t|E^X| \cdot |\det DX_t|N_x| \\ &= \|DX_t|E^X\| \cdot |\det DX_t|N_x| \\ &= \frac{\|X(X_t(x))\|}{\|X(x)\|} \cdot |\det DX_t|N_x|. \end{aligned}$$

Temos que $\det P^t_x = \det \mathcal{O}_{X_t(x)} \cdot \det DX_t|N_x = \det DX_t|N_x$. Logo

$$1 = \frac{\|X(X_t(x))\|}{\|X(x)\|} \cdot |\det P^t_x|. \tag{3.1}$$

Sejam $v^{(1)}_x \in N^s_x$ e $v^{(2)}_x \in N^u_x$, com $\|v^{(1)}_x\| = \|v^{(2)}_x\| = 1$ tais que $\|P^t_x|N^s_x\| = \|P^t_x(v^{(1)}_x)\|$ e $\|P^t_x|N^u_x\| = \|P^t_x(v^{(2)}_x)\|$. Logo

$$\|P^t_x(v^{(1)}_x)\| \cdot \|P^t_x(v^{(2)}_x)\| \cdot |\sin \measuredangle(P^t_x(v^{(1)}_x), P^t_x(v^{(2)}_x))| = |\det P^t_x| \cdot \|v^{(1)}_x\| \cdot \|v^{(2)}_x\| \cdot |\sin \measuredangle(v^{(1)}_x, v^{(2)}_x)|.$$

Portanto

$$\|P^t_x|N^s_x\| \cdot \|P^t_x|N^u_x\| \cdot \sin\theta_t = |\det P^t_x| \cdot \sin\theta_0.$$

Substituindo em (3.1) temos que

$$\sin\theta_0 = x(t) \cdot \|P^t_x|N^s_x\| \cdot \|P^t_x|N^u_x\| \cdot \sin\theta_t,$$

onde $x(t) = \dfrac{\|X(X_t(x))\|}{\|X(x)\|}$. Daí, como o fluxo linear de Poincaré admite uma decomposição (C, λ)-dominada temos

$$\|P^t_x|N^s_x\|^2 = \frac{\sin\theta_0}{x(t)\sin\theta_t} \cdot \frac{\|P^t_x|N^s_x\|}{\|P^t_x|N^u_x\|} \leq \frac{K^2 C}{\sin\beta} \cdot e^{-\lambda t}, \text{ para todo } t > 0.$$

Portanto N^s é uniformemente contraído no futuro pelo fluxo linear de Poincaré. Analogamente podemos mostrar que N^u é uniformemente contraído no passado. Pelo Teorema 2.11, temos que $\overline{\Lambda}$ é hiperbólico. ■

Como consequência da Proposição 3.1 e do Lema 3.2 temos o seguinte

Corolário 3.3. *Sejam $X \in \mathcal{G} \cap \mathfrak{X}^{1+}_{\mu}(M)$ e Λ um conjunto regular e invariante por $(X_t)_t$, tal que o fluxo linear de Poincaré sobre Λ admite uma decomposição dominada. Se $\mu(\Lambda) > 0$, então $\overline{\Lambda}$ é um conjunto hiperbólico.*

Demonstração: Pela observação 2.31, temos que $\overline{\Lambda} = A$. Assim, pela proposição 3.1, temos que $\overline{\Lambda}$ não contém singularidades. Assim, podemos estender a dominação do fluxo linear de Poincaré a $\overline{\Lambda}$. Agora, usando o lema 3.2, segue que $\overline{\Lambda}$ é um conjunto hiperbólico. ■

O próximo resultado nos dá uma descrição das singularidades de um campo em $\mathcal{G}$ que estão em $\overline{D(\Lambda)}$. Para isso relembramos que uma singularidade σ de X é *tipo Lorenz*, se $DX(\sigma)$ tem três autovalores reais λ_1, λ_2 e λ_3 satisfazendo $\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < -\lambda_3 < \lambda_1$.

Lema 3.4. *Se $X \in \mathcal{G}$, então $S(X) \cap \overline{D(\Lambda)}$ é formado por singularidades tipo Lorenz para X ou para $-X$.*

Demonstração: Se $S(X) \cap \overline{D(\Lambda)} = \emptyset$ não há o que provar. Suponhamos então que existe $\sigma \in S(X) \cap \overline{D(\Lambda)} \neq \emptyset$. Provemos primeiramente que $DX(\sigma)$ não possui autovalores complexos. Por absurdo, suponhamos que ω é um autovalor complexo de $DX(\sigma) : T_\sigma M \circlearrowleft$. Como $T_\sigma M$ tem dimensão três, temos que λ, ω e $\overline{\omega}$ são os autovalores de $DX(\sigma)$, com λ real. Como $\mu(D(\Lambda)) > 0$, pelo Teorema da Recorrência de Poincaré temos que para μ-quase todo ponto $x \in D(\Lambda)$ é recorrente, em particular, σ tem que ser uma singularidade tipo sela. Então, acontece $\lambda < 0 < \mathrm{Re}(\omega)$ ou para o campo X ou para $-X$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que a desigualdade anterior acontece para X.

Como $\mu(D(\Lambda)) > 0$, pela definição de $\overline{D(\Lambda)}$, dada qualquer vizinhança de σ, existem infinitas órbitas de Λ passando por essa vizinhança. Sendo assim, podemos utilizar o teorema 2.19 para garantir a existência de um campo conservativo Y, C^1-próximo de X, possuindo uma conexão sela-foco Γ associada a continuação σ_Y da singularidade σ. (Veja a figura 3.1.)

Usando o Corolário 2.3, com uma pequena pertubação do campo Y, podemos assumir que Y é de classe C^∞ e ainda é C^1-próximo de X. Agora podemos usar o teorema 2.20 para desdobrar a dinâmica e encontrar um campo Z, C^1-próximo de X, que admite uma órbita elíptica C^1-próxima de Γ. Mas isto contradiz o lema 2.28, uma vez que tal órbita está contida em uma vizinhança (suficientemente pequena) de Λ. Segue então que $DX(\sigma)$ não possui autovalores complexos, como afirmado.

Seja então $\lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_1$ os autovalores de $DX(\sigma)$. Como σ é singularidade hiperbólica tipo sela, temos que $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Como X é incompressível $0 = \mathrm{tr}(DX(\sigma)) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$, logo $\lambda_2 = -(\lambda_1 + \lambda_3) < 0$, o que implica que $-\lambda_3 < \lambda_1$. Temos dois casos a considerar. Se $\lambda_3 < 0$, então $\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < -\lambda_3 < \lambda_1$, pois os autovalores são todos

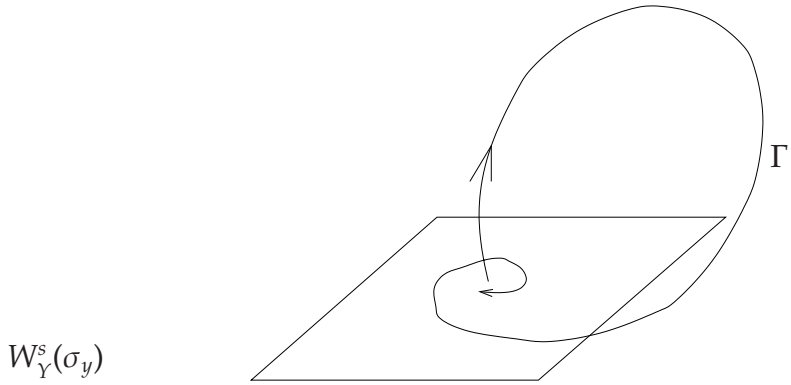


Figura 3.1: Conexão sela-foco.

distintos. Neste caso σ é tipo Lorenz para X. Se $\lambda_3 > 0$, como $\lambda_1 = -(\lambda_2 + \lambda_3) > 0$, então $\lambda_2 < -\lambda_3$, e como todos os autovalores são disjuntos temos que $\lambda_2 < -\lambda_3 < 0 < \lambda_3 < \lambda_1$. Neste caso σ é tipo Lorenz para $-X$. ■

3.2 Variedades Invariantes contidas em A

Sejam $X \in \mathfrak{X}^1_\mu(M)$, $\Lambda \subset M$ conjunto regular e invariante por $(X_t)_t$, tal que o fluxo linear de Poincaré sobre Λ admite uma decomposição dominada. Seja A o fecho do conjunto dos pontos de densidade de Lebesgue de Λ. Nessa seção provamos que μ_A-quase todas as variedades invariantes, com $x \in \Lambda$, estão contidas em A.

Dado $x \in \Lambda$, seja

$$W^s(x) = \bigcup_{t>0} X_{-t}(W^s_{\varepsilon(X_t(x))}(X_t(x)))$$

a variedade estável no ponto x e

$$W^u(x) = \bigcup_{t>0} X_t(W^u_{\delta(X_{-t}(x))}(X_{-t}(x)))$$

a variedade instável.

Sejam $\mu_{s,x}$ e $\mu_{u,x}$ as medidas induzidas (a partir de μ) nas variedades $W^s(x)$ e $W^u(x)$ respectivamente. Temos a seguinte

Proposição 3.5. *Para μ_A quase todos os pontos $x \in \Lambda$*

$$\mu_{s,x}(W^s_{\varepsilon(x)}(x)\backslash A) = \mu_{u,x}(W^u_{\varepsilon(x)}(x)\backslash A) = 0.$$

Demonstração: Pela continuidade absoluta da folheação da variedade instável local, um conjunto com volume positivo tem que intersetar quase todas as variedades estáveis locais em um conjunto com medida $\mu_{u,x}$ positiva, (ver [19]).

Para k suficientemente grande, $\mu(\mathcal{H}(k)) > 0$. Então, pela continuidade absoluta da variedade instável local, podemos considerar $W^u_{\varepsilon(x)}(x)$ uma variedade instável local satisfazendo simultaneamente

- $x \in \mathcal{H}(k)$;
- $\mu_{u,x}(W^u_{\varepsilon(x)}(x) \cap A) > 0$;
- x é um ponto de densidade de Lebesgue de $W^u_{\varepsilon(x)}(x) \cap A$.

Como $\mu(\mathcal{H}(k)) > 0$, pelo Teorema 2.23 (Recorrência de Poincaré) podemos supor, sem perda de generalidade, que x é recorrente dentro de $\mathcal{H}(k)$, isto é, existe uma sequência de números naturais $n_l \nearrow +\infty$ tal que

$$x_l := f^{n_l}(x) \in \mathcal{H}(k) \text{ e } x_l \xrightarrow[l\to+\infty]{} x.$$

Definamos $V_l = f^{-n_l}(W^u_{\varepsilon(x_l)}(x_l))$, onde $f = X_1$ é o tempo 1 do fluxo $(X_t)_t$. Temos que $V_l \subset W^u_{\varepsilon(x)}(x)$ é uma vizinhança de x em $W^u_{\varepsilon(x)}(x)$. Como as variedades instáveis dependem continuamente de x em $\mathcal{H}(k)$, então seus tamanhos também dependem continuamente. Como $\mathcal{H}(k)$ é compacto, temos que os tamanhos das variedades instáveis são uniformemente limitados. Daí, segue que $\operatorname{diam}(V_l) \xrightarrow[l\to+\infty]{} 0$.

Temos que

$$\frac{\mu_{u,x}(f^{-n_l}(W^u_{\varepsilon(x_l)}(x_l)\backslash A))}{\mu_{u,x}(f^{-n_l}(W^u_{\varepsilon(x_l)}(x_l)))} = \frac{\mu_{u,x}(V_l\backslash A)}{\mu_{u,x}(V_l)}, \tag{3.2}$$

pois A é invariante por f. Como x é ponto de densidade de $W^u_{\varepsilon(x)}(x) \cap A$, V_l é uma vizinhança de x em $W^u_{\varepsilon(x)}(x)$ e $\operatorname{diam}(V_l) \xrightarrow[l\to+\infty]{} 0$, então

$$\frac{\mu_{u,x}(V_l \cap A)}{\mu_{u,x}(V_l)} \xrightarrow[l\to+\infty]{} 1.$$

Logo,

$$\frac{\mu_{u,x}(V_l\backslash A)}{\mu_{u,x}(V_l)} \xrightarrow[l\to+\infty]{} 0.$$

Pela fórmula de mudança de variável na integral, temos que

$$\frac{\mu_{u,x}(f^{-n_l}(W^u_{\varepsilon(x_l)}(x_l)\backslash A))}{\mu_{u,x}(f^{-n_l}(W^u_{\varepsilon(x_l)}(x_l)))} = \frac{\displaystyle\int_{W^u_{\varepsilon(x_l)}(x_l)\backslash A} |Df^{-n_l} \mid E^u_z| d\mu_{u,x}(z)}{\displaystyle\int_{W^u_{\varepsilon(x_l)}(x_l)} |Df^{-n_l} \mid E^u_z| d\mu_{u,x}(z)}. \tag{3.3}$$

Temos que

$$|\det Df^{-n_l} \mid E^u_z| = \prod_{j=1}^{n_l} |\det Df^{-1} \mid E^u_{f^{-n_l+j}(z)}|.$$

Segue do lema 2.39 que

$$\frac{|\det Df^{-n_l} \mid E^u_z|}{|\det Df^{-n_l} \mid E^u_{z_1}|} = \prod_{j=1}^{n_l} \frac{|\det Df^{-1} \mid E^u_{f^{-n_l+j}(z)}|}{|\det Df^{-1} \mid E^u_{f^{-n_l+j}(z_1)}|}$$

é uniformemente limitada, com $z \in \mathcal{H}(k)$ e $z_1 \in W^u_{\varepsilon(z)}(z)$. Suponhamos que

$$\frac{|\det Df^{-n_l} \mid E^u_z|}{|\det Df^{-n_l} \mid E^u_{z_1}|} \geq L \geq 0,$$

com $z \in \mathcal{H}(k)$ e $z_1 \in W^u_{\varepsilon(z)}(z)$. Logo

$$\int_{W^u_{\varepsilon(x_l)}(x_l)\backslash A} |Df^{-n_l} \mid E^u_z| d\mu_{u,x}(z) \quad \geq \quad L|\det Df^{-n_l} \mid E^u_{z_1}| \cdot \mu_{u,x}(W^u_{\varepsilon(x_l)}(x_l)\backslash A) \quad \forall z_1 \in W^u_{\varepsilon(z)}(z)$$

Segue então que

$$\frac{\displaystyle\int_{W^u_{\varepsilon(x_l)}(x_l)\backslash A} |Df^{-n_l} \mid E^u_z| d\mu_{u,x}(z)}{\displaystyle\int_{W^u_{\varepsilon(x_l)}(x_l)} |Df^{-n_l} \mid E^u_z| d\mu_{u,x}(z)} \geq L \cdot \frac{\mu_{u,x}(W^u_{\varepsilon(x_l)}(x_l)\backslash A)}{\mu_{u,x}(W^u_{\varepsilon(x_l)}(x_l))}. \tag{3.4}$$

De (3.2), (3.3) e (3.4) temos que

$$\frac{\mu_{u,x}(W^u_{\varepsilon(x_l)}(x_l)\backslash A)}{\mu_{u,x}(W^u_{\varepsilon(x_l)}(x_l))} \leq \frac{1}{L} \cdot \frac{\mu_{u,x}(V_l\backslash A)}{\mu_{u,x}(V_l)}.$$

Logo,

$$\frac{\mu_{u,x}(W^u_{\varepsilon(x_l)}(x_l)\backslash A)}{\mu_{u,x}(W^u_{\varepsilon(x_l)}(x_l))} \xrightarrow[l\to+\infty]{} 0.$$

Pela dependência contínua das variedades instáveis locais em pontos de $\mathcal{H}(k)$ temos que $\mu_{u,x}(W^u_{\varepsilon(x)}(x)\backslash A) = 0$. Analogamente, prova-se que $\mu_{s,x}(W^s_{\varepsilon(x)}(x)\backslash A) = 0$. ■

Note que a proposição foi provada para quase todo ponto e não para todo ponto, pois nos restringimos apenas aos pontos recorrentes.

Usando o fato de que A é um conjunto fechado e cada subconjunto aberto não vazio de $W^s(x)$ e $W^u(x)$ tem medida positiva com respeito às medidas $\mu_{s,x}$ e $\mu_{u,x}$, respectivamente, obtemos o seguinte

Corolário 3.6. *Para μ-quase todo ponto $x \in \Lambda$ tem-se*

$$W^s(x) \subset A \text{ e } W^u(x) \subset A.$$

3.2.1 Variedades invariantes densas de uma órbita periódica

Usando o Lema de Fechamento de Katok, podemos mostrar que existe um ponto em uma órbita periódica cuja variedades centro estáveis e instáveis são densas em A. Mostrar isso é o objetivo dessa subseção.

Lema 3.7. *Seja $X \in \mathfrak{X}^{1+}_{\mu}(M)$ e $\Lambda \subset M$ regular e invariante por $(X_t)_t$, tal que o fluxo linear de Poincaré sobre Λ admite uma decomposição dominada. Então, existe $p \in Per(X)$ tal que $\overline{W^{cs}(p)} = \overline{W^{cu}(p)} = A$.*

Demonstração: Seja k suficientemente grande tal que o bloco hiperbólico $\mathcal{H}(k)$ satisfaz $\mu_A(\mathcal{H}(k)) > 0$. Assim, $\mathcal{H}(k) \subset \text{supp}(\mu_A)$. Segue do lema 2.33 que $\mathcal{H}(k) \subset \overline{\text{Per}_h(X) \cap A}$. Logo, tomando x no interior de $\mathcal{H}(k)$ e $\delta > 0$ qualquer, existe $p \in A \cap B(x, \delta)$ tal que a órbita de p é periódica. Podemos assumir que δ é suficientemente pequeno de modo que $p \in \mathcal{H}(k)$ e as seguintes interseções são transversais

$$W^u_\varepsilon(p) \pitchfork W^s_\varepsilon(x) \neq \emptyset \neq W^s_\varepsilon(p) \pitchfork W^u_\varepsilon(x),$$

pois as variedades locais variam continuamente em $\mathcal{H}(k)$. (Veja a figura 3.2). Pelo corolário 3.6, podemos escolher x de modo que as variedades $W^u(x)$ e $W^s(x)$ estão contidas em A. Fixemos $r \in W^u_\varepsilon(p) \pitchfork W^s_\varepsilon(x)$ e $q \in W^s_\varepsilon(p) \pitchfork W^u_\varepsilon(x)$.

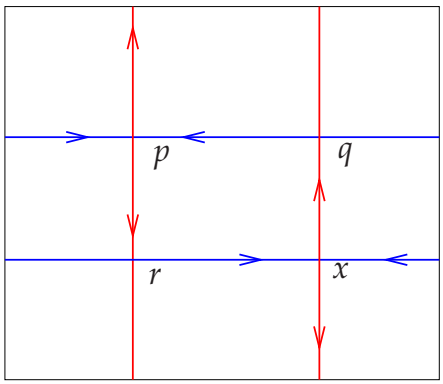


Figura 3.2: Interseção Transversal

Seja $f = X_\tau$, onde τ é o período da órbita de p. Assim, p é um ponto fixo de f. (Lembramos que estamos assumindo que μ_A é ergódica para o fluxo $(X_t)_t$). Como $\mu_A(\mathcal{H}(k)) > 0$, usando a proposição 2.24, podemos supor que x é tal que $\alpha(x) = A = \omega(x)$.

Seja V uma vizinhança de p em $W^u_\varepsilon(p)$ que assumimos ser dada por um disco em $W^u_\varepsilon(p)$. Pelo lema 2.16 (lema de inclinação), existe $\delta > 0$ tal que $f^n(W^u_\varepsilon(x)) \cap V$ está δ-C^1-próximo deste disco, para todo n suficientemente grande (usando aqui o ponto q da figura 3.2. Veja também a Figura 3.3). Em particular, como V é acumulada por $W^{cu}(x)$, temos que $W^u_\varepsilon(p) \subset \overline{W^{cu}(x)} \subset A$. Como $\omega(x) = A$ e $\omega(x) \subset \overline{W^{cu}(x)}$, então

$\overline{W^{cu}(p)} \subset \overline{W^{cu}(x)} = A$. Usando agora o ponto r, como $\omega(x) = A$ e $r \in W^u_\varepsilon(p) \pitchfork W^{cs}_\varepsilon(x)$, temos que $\omega(r) = \omega(x) = A$. Isso implica que $A = \omega(r) \subset \overline{W^{cu}(p)}$, uma vez que $W^{cu}(p)$ é invariante. Portanto, $A = \overline{W^{cu}(p)}$, como queríamos provar.

De modo análogo se prova que $A = \overline{W^{cs}(p)}$.

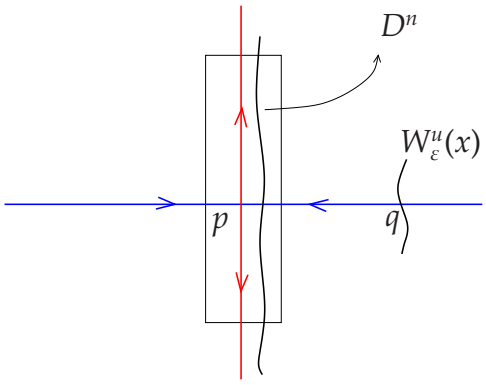


Figura 3.3: Lema de Inclinação

■

3.3 Demonstração da Proposição 3.1

Nesta seção usamos os resultados obtidos até agora para provar a proposição 3.1. Lembramos também o seu enunciado a seguir.

Proposição 3.1. *Sejam $X \in \mathcal{G} \cap \mathfrak{X}^{1+}(M)$ e $\Lambda \subset M$ um conjunto regular e invariante por $(X_t)_t$. Se o fluxo linear de Poincaré sobre Λ admite uma decomposição dominada e $\mu(\Lambda) > 0$, então $A = \overline{D(\Lambda)}$ não contém singularidades de X.*

Demonstração: Suponha por absurdo que existe uma singularidade $\sigma \in A$. Pelo lema 3.4, σ é tipo Lorenz para X ou para $-X$. Sem perda de generalidade, suponha que σ é tipo Lorenz para X. Sejam $\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < -\lambda_3 < \lambda_1$ os autovalores de $DX(\sigma)$. Então, existe uma variedade estável $W^{ss}(\sigma)$ tangente ao autoespaço associado ao autovalor λ_2.

Afirmamos que $W^{ss}(\sigma) \subset A$. De fato, seja p dado pelo lema 3.7 e consideremos

$$L = \alpha_X(W^s_\varepsilon(p)) := \overline{\bigcup_{y \in W^s_\varepsilon(p)} \alpha_X(y)}.$$

Como A é invariante, temos que $L \subset A$. Como vimos na demonstração do lema 3.7, podemos escolher $x \in A$ de modo que $\alpha_X(x) = \omega_X(x) = A$ e $W^s_\varepsilon(p) \pitchfork W^u_\varepsilon(x) \neq \emptyset$. Tomando $r \in W^s_\varepsilon(p) \cap W^u_\varepsilon(x)$, temos que $L \supset \alpha_X(r) = \alpha_X(x) = A$. Concluímos então que $L = A$. Como $\sigma \in A$, então existe uma sequência de números reais $(t_n)_n$, tendendo a infinito, tal que $X_{-t_n}(p) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sigma$ e $W^s_\varepsilon(X_{-t_n}(p)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} W^s_\varepsilon(\sigma)$. Como $X_{t_n}(W^s_\varepsilon(X_{-t_n}(p))) \subset W^s_{\varepsilon_n}(p) \subset A$,

usando a invariância de A, temos que $W^s_\varepsilon(X_{-t_n}(p)) \subset A$. Por A ser fechado, concluímos que a variedade local $W^{ss}_\varepsilon(\sigma) \subset A$. Usando novamente a invariância de A, obtemos $W^{ss}(\sigma) \subset A$.

No caso em que σ é tipo Lorenz para $-X$, por argumentos análogos aos anteriores, obtemos $W^{uu}(\sigma) \subset A$.

Explicamos agora como $W^{ss}(\sigma) \subset A$ leva a uma contradição. No caso em que $W^{ss}(\sigma) \subset A$, consideremos $y \in W^{ss}(\sigma) \cap A \backslash \{\sigma\}$. Como A é o fecho dos pontos de densidade de Λ, existe uma sequência de pontos de densidade de Λ convergindo para y. Considerando a ação do fluxo próximo à singularidade σ, podemos considerar uma sequência $(q_n)_n$, convergindo para um ponto $q \in W^u(\sigma)\backslash\{\sigma\}$, onde q_n está na órbita futura de p_n. Como μ-quase todo ponto de M é recorrente, podemos supor que p_n é recorrente para cada n. (Veja a figura 3.4).

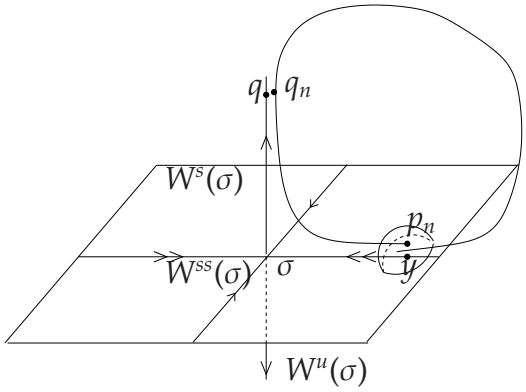


Figura 3.4: Aproximação

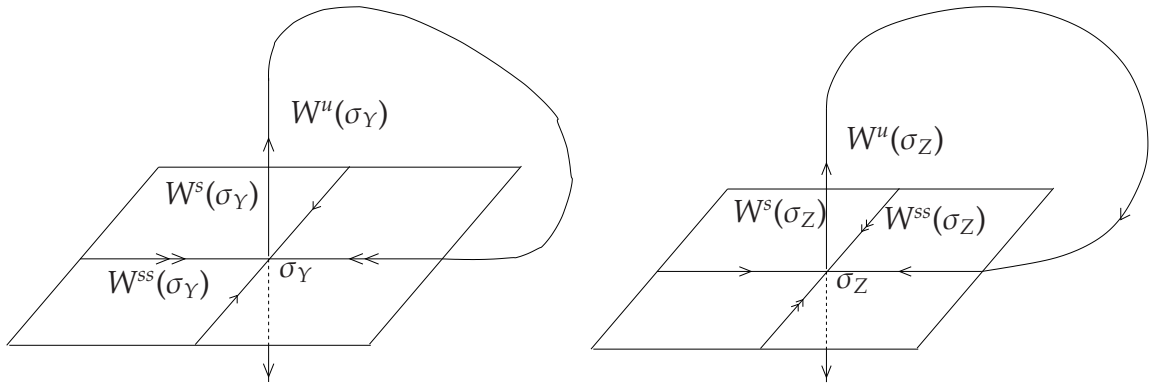
Usando o teorema 2.19, existe um campo Y, C^1-próximo de X, admitindo uma órbita homoclínica do tipo orbit-flip. Pelo teorema 2.21, existe um campo Z, C^1-próximo de Y, não necessariamente conservativo, admitindo uma órbita homoclínica do tipo inclination-flip. (Veja figura 3.5(a) e 3.5(b), onde estamos denotando por σ_Y e σ_Z a continuação analítica de σ, aplicada aos campos Y e Z, respectivamente.)

Como vimos na subseção 2.7.4, a existência de uma órbita homoclínica contraria o fato do fluxo linear de Poincaré admitir uma decomposição dominada.

Argumentamos de forma análoga para o caso em que $W^{uu}(\sigma) \subset A$. ■

3.4 Prova do Teorema Principal

Lembramos que considerando o conjunto $\mathfrak{X}^r_\mu(M)$ $(r \geq 1)$ dos campos vetoriais incompressíveis de classe C^r, denotamos por $\mathcal{G}$ o subconjunto de $\mathfrak{X}^r_\mu(M)$ dos campos que cujas singularidades são hiperbólicas e não possui ressonância, isto é, os autovalores da derivada do campo reais são todos distintos.



(a) Orbit-flip. (b) Inclination-flip.

Figura 3.5:

Discutimos no capítulo 1 que o conjunto $\mathcal{G}$ é um subconjunto aberto e denso de $\mathfrak{X}^r_\mu(M)$. Este capítulo é dedicado a provar a segunda parte do teorema principal desta dissertação.

Teorema Principal. *Existe um aberto e denso $\mathcal{G} \subset \mathfrak{X}^2_\mu(M)$ tal que para cada $X \in \mathcal{G}$ com um conjunto invariante e regular Λ satisfazendo:*

- *o fluxo linear de Poincaré sobre Λ tem uma decomposição dominada; e*
- *Λ tem volume positivo: $\mu(\Lambda) > 0$;*

então X é um campo de Anosov e $\overline{\Lambda} = M$.

Demonstração: Consideremos um campo $X \in \mathcal{G}$ satisfazendo as hipóteses do teorema. Como o fluxo linear de Poincaré sobre Λ possui uma decomposição dominada e $\mu(\Lambda) > 0$, pela proposição 3.1, o fecho dos pontos de densidade de Lebesgue de Λ, $A = \overline{D(\Lambda)}$, não possui singularidades. Assim, podemos definir o fluxo linear de Poincaré sobre A, o qual, por continuidade, continua possuindo uma decomposição dominada. Daí, pelo lema 3.2, temos que A é um conjunto hiperbólico.

A estratégia é provar que A é aberto e fechado e usar a conexidade de M. Provemos inicialmente que $W^s(x) \subset A$ e $W^u(x) \subset A$, para todo $x \in A$. De fato, se $x \in A$, como A é o fecho dos pontos de densidade de Λ, temos que existe uma vizinhança V de x tal que $\mu(V \cap A) > 0$. Pelo corolário 3.6, para μ-quase todo $p \in V$, tem-se que $W^s_\varepsilon(p) \subset A$ e $W^u_\varepsilon(p) \subset A$. Sem perda de generalidade, podemos considerar uma sequência $(p_n)_n$ em V, convergindo para x, tal que $W^s(p_n) \subset A$ e $W^u(p_n) \subset A$, para todo $n \geq 1$. Usando o fato de que A é fechado e que as variedades estáveis e instáveis dependem continuamente do ponto, temos que $W^s(x) \subset A$ e $W^u(x) \subset A$.

Tomando γ uma vizinhança de x em $W^u(x)$, suficientemente pequena, temos que $W^s_\varepsilon(z)$ é transversal a $W^u_\varepsilon(x)$, para todo $z \in \gamma$. Logo, $R_x := \bigcup_{z\in\gamma} W^s_\varepsilon(z) \subset A$. Considerando a ação do fluxo e lembrando que A é invariante, temos que

$$\bigcup_{-\tau\leq t\leq\tau} X_t(R_x) \subset A$$

é uma vizinhança de x em M. Isto mostra que A é aberto. Como A também é fechado e M é uma variedade conexa, temos que $A = M$. Além disso, segue que X é um campo de Anosov, uma vez que $M = A = \overline{\Lambda}$ é um conjunto hiperbólico. ■

Capítulo 4

Perspectivas Futuras

Para dimensão mais alta ainda não se sabe a resposta, isto é: se M tem dimensão maior ou igual a 4 e X é um campo vetorial nas condições do teorema principal, não se sabe se X é um campo de Anosov ou não.

4.1 Questão em dimensão maior com hiperbolicidade seccional

Dizemos que um conjunto compacto e invariante $\Lambda \subset M$ é *parcialmente hiperbólico*, se o fibrado tangente possui uma decomposição continua e invariante $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$ e existem constantes $\lambda, K > 0$ tais que para todo $x \in \Lambda$ e para todo $t \geq 0$ tem-se:

(a) E^s domina E^c: $\|DX_t(x) \mid E^s_x\| \cdot \|DX_{-t}(x) \mid E^c_{X_t(x)}\| \leq Ke^{-\lambda t}$;

(b) E^s contrai uniformemente: $\|DX_t \mid E^s_x\| \leq Ke^{-\lambda t}$.

Dizemos que um subfibrado, DX_t-invariante, $F \subset T_\Lambda M$ é *seccionalmente expansor*, se $\dim F_x \geq 2$ é constante, para todo $x \in \Lambda$ e existem constantes positivas C e λ tais que para todo $x \in \Lambda$ e para todo subespaço bidimensional $L_x \subset F_x$ tem-se $|\det DX_t \mid_{L_x}| > Ce^t$, para todo $t > 0$. Em outras palavras, a expansão seccional é a expansão de área ao longo de todo subespaço bidimensional do fibrado F. Um conjunto compacto e invariante Λ é dito *seccionalmente hiperbólico*, se Λ é um conjunto parcialmente hiperbólico cujas singularidades são hiperbólicas e o subfibrado central é seccionalmente expansor.

Em dimensão maior, sabe-se que se Λ é um conjunto seccionalmente hiperbólico, então ou Λ tem volume zero ou o campo é de Anosov (veja [3, Teorema 8.24]). Porém, se assumimos apenas a decomposição dominada do fluxo linear de Poincaré, a questão é mais sutil. Mesmo se o fluxo linear de Poincaré tivesse decomposição

dominada globalmente em uma variedade compacta com dimensão maior ou igual a 4, isso não é suficiente para obter hiperbolicidade, como vemos na seção a seguir.

4.2 Exemplo com fluxo de suspensão

Consideremos $f : M \to M$ um difeomorfismo e $r : M \to (0, +\infty)$ uma função contínua. No que se segue vamos definir o *fluxo de suspensão* de f, com função altura r. Na construção, suporemos que r é tal que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} r(f^i(x)) = \sum_{i=0}^{+\infty} r(f^{-i}(x)) = +\infty.$$

Primeiramente, vamos construir o domínio N do fluxo de suspensão. Para isso consideremos a aplicação $F : M \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}$ dada por $F(x, s) = (f(x), s - r(x))$. Observamos que F é invertível. Consideremos a relação de equivalência $\sim$ sobre $M \times \mathbb{R}$ dada por

$$(x, s) \sim (x', s') \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{Z} : \ (x', s') = F^n(x, s).$$

Denotamos N o conjunto das classes de equivalência dessa relação e por $\pi : M \times \mathbb{R} \to N$ a projeção canônica que associa a cada $(x, s) \in M \times \mathbb{R}$ a sua classe de equivalência.

Agora considere o fluxo $G^t : M \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}$ dado por $G^t(x, s) = (x, s + t)$. É fácil verificar que $G^t \circ F = F \circ G^t$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Usando isso, fica bem definido o seguinte fluxo sobre N

$$\begin{array}{rccc} g^t : & N & \to & N \\ & \pi(x, s) & \mapsto & \pi(G^t(x, s)) \end{array}.$$

O fluxo $(g^t)_t$ é o que chamamos de *fluxo de suspensão* de f, com função altura r. Dizemos que f é o difeomorfismo de base de $(g^t)_t$.

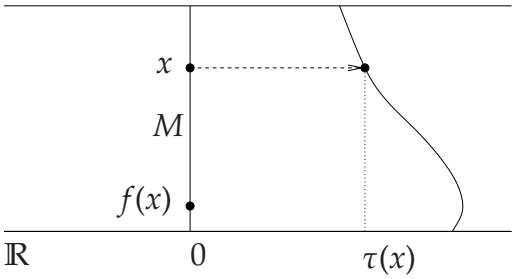


Figura 4.1: Fluxo de Suspensão

4.2.1 Exemplo

Existe um exemplo de fluxo de suspensão, com função altura constante e igual a 1, cuja transformação de base é um difeomorfismo $f : \mathbb{T}^4 \to \mathbb{T}^4$ do toro de dimensão 4, transitivo (isto é, admitindo uma órbita densa), com o fibrado tangente admitindo uma decomposição $T\mathbb{T}^4 = E^s \oplus E^u$ dominada e com pontos periódicos de diferentes *índices* (o índice de um ponto periódico é a dimensão da variedade instável). Isso implica que $\mathbb{T}^4$ não é hiperbólico. Para mais detalhes veja [8, Exemplo B.12].

4.3 Conjectura

Métodos análogos estendidos para dimensão mais alta permitem conjecturar que: se o fluxo linear de Poincaré sobre um conjunto regular invariante com volume positivo para um campo C^2 conservativo X é hiperbólico, então X é um campo de Anosov.

Referências

[1] Alves, J.; Araújo, V.; Pacífico, M.; Pinheiro, V. On the volume of singular-hiperbolic sets. *Dynamical Systems, An International Journal*, Vol. 22, No. 3, September 2007, 249-267.

[2] Araújo, V.; Bessa, M. Dominated splitting and zero volume for incompressible three flows. *Nonlinearity*, 21(7): 1637-1653, 2008.

[3] Araújo, V.; Pacifico, M. J., Three-dimensional flows, Vol. 53 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*, Springer, Heidelberg (2010), ISBN 978-3-642-11413-7. With a foreword by Marcelo Viana.

[4] Araújo, V.; Viana, M. *Hyperbolic Dynamical Systems. In: Encyclopedia of Complexity and Systems Science*. 1. ed. Berlin: Springer-Verlag, 2009.

[5] Barreira, L., Pesin, Y., Nonuniform hyperbolicity, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Vol. 115, Cambridge University Press, Cambridge, ISBN 978-0-521-83258-8; 0-521-83258-6. Dynamics of systems with nonzero Lyapunov exponents. 2007.

[6] Barreira, L.; Pesin, Y. 2001. Lectures on Lyapunov exponents and smooth ergodic theory. *Proc. Symp. Pure Math.*

[7] Barreira, L.; Pesin, Y. 2006. Smooth ergodic theory and nonuniformly hyperbolic dynamics. *Handbook of Dynamical Systems*. vol 1B. Amsterdam: Elsevier.

[8] Bonatti, C.; Díaz, L.; Viana, M. Dynamics beyond uniform hyperbolicity, volume 102 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2005. A global geometric and probabilistic perspective, Mathematical Physics, III.

[9] Bowen, R. and Ruelle, D. The ergodic theory of Axiom A flows. *Inventions Mathematics*. 29, 181-202, 1975.

[10] Brin, M.; Stuck, G. *Introduction to Dynamical Systems*. 1ed. Cambridge University, 2002.

[11] Castro Jr., A. Armando. *Curso de teoria da medida*. 2ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008 (Projeto Euclides).

[12] Folland, Geraldo B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2. ed. Wiley, 1999. (Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts).

[13] Hirsch, M., Pugh, C., Shub, M.: Invariant Manifolds. Lect. Notes in Math., vol. 583. Springer, New York (1977).

[14] Katok, A.; Hasselblatt, B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical System*. New York: Cambridge University Press, 1995.

[15] Ki, Y. Conjuntos Parcialmente Hiperbólicos com Volume Positivo. Dissertação de mestrado. Salvador: UFBA/PGMAT-IM, 2007.

[16] Mañé, R. *Introdução à teoria ergódica*. Rio de Janeiro: IMPA, 1983. (Projeto Euclides).

[17] Oliveira, K.; Viana, M. *Fundamentos da Teoria Ergódica*. Rio de Janeiro: SBM, 2014 (Coleção Fronteiras da Matemática).

[18] Palis Jr, J.; Melo, W. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. Rio de Janeiro, 1975.

[19] Pugh, C.; Shub, M. Ergodic attractors. *Trans. Am. Math. Soc.* 312, 1?54 (1989).

[20] Robinson, R. Generic Properties of Conservative Systems. *American Journal of Mathematics*, Vol. 92, No. 3 (Jul., 1970), pp. 562-603.

[21] Rudin, W. *Real and complex analysis*. 3. ed. New York: McGraw-Hill Book Co., 1987.

[22] Salgado, L. S., Sobre hiperbolicidade fraca para fluxos singulares. Tese de doutorado em matemática. Rio de Janeiro UFRJ/PGPIM, 2012.

[23] Sambarino, M. Hiperbolicidad y estabilidad, *XXII Escuela venezolana de matematicas*. Merida, Venezuela, 09/09/2009.

[24] Santos, F. Sobre a Decomposição Dominada para Fluxos Singulares. Dissertação de mestrado em matemática. Salvador: UFBA/PGMAT-IM, 2014.

[25] Walters, Peter. *An introduction to ergodic theory*. New York: Springer-Verlag, 1982. (Graduate texts in mathematics; 79).

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Programa de pós-graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170 -110
<http://www.pgmat.ufba.br>