Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Limite Hidrodinâmico do Processo de Exclusão via Método da Entropia Relativa de Yau.

Diego Daltro Conceição

Salvador-BA
Setembro/2014

Limite Hidrodinâmico do Processo de Exclusão via Método da Entropia Relativa de Yau.

Diego Daltro Conceição

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: **Prof. Dr. Tertuliano F. S. Franco**

Salvador-BA
Setembro/2014

Sistema de Bibliotecas da UFBA

Conceição, Diego Daltro.

Limite hidrodinâmico do processo de exclusão via método da entropia relativa de Yau / Diego Daltro Conceição.- 2014.

75 f.: il.

Inclui apêndice.

Orientador: Prof. Dr. Tertuliano F. S. Franco.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Salvador, 2014.

1. Entropia. 2. Distribuição (Teoria da probabilidade). I. Franco, Tertuliano F. S. II. Universidade Federal da Bahia. Instituto de Matemática. III. Título.

CDD - 536.73

CDU - 536.722

Dedico este trabalho aos meus pais,
meus irmãos, minha noiva, minha sogra
e a todas as pessoas que, direta
ou indiretamente, me ajudaram a
chegar onde estou.
Deus continue abençoando a todos.

Agradecimentos

A Deus pelo dom gratuito de viver constantemente em Seu amor e Sua graça. Aos meus amigos do mestrado pela companhia mais que agradável a qual permitiu que minha estadia neste ambiente se tornasse mais que uma rotina. Obrigado amigos da sala 18. Todos vocês são especiais.

Agradeço ao meu orientador Tertuliano Franco por me conduzir na construção deste trabalho, pelas disciplinas que cursamos, pelos eventos que fomos, pela experiência que tentou me passar, por todas as sugestões que me deu, visando a melhora do meu trabalho, e por acreditar no mesmo. Obrigado chefe! Seu trabalho não tem sido em vão.

Gostaria em especial de agradecer a Deus pela vida de Caroline Morais e Junilson Cerqueira. Mais que amigos, vocês são presentes pra minha vida. São pessoas mais que especiais, passam virtude e brando com seus gestos e sua forma simples e amável de viver. Talvez seja este o segredo de vocês serem tão graciosos. Vocês só querem ser felizes e fazem a prova de que "felicidade é só questão de ser".

Sou mais que grato a minha noiva Samara Passos e minha sogra dona Iracema Passos. Vidas pelas quais infinitamente louvo a Deus, por conviver e aprender com estas pessoas. Obrigado amor, pelas palavras de consolo, pela compreensão, pelos inúmeros sermões, pelas saudades, pelo apoio que você me deu e dar até hoje. Obrigado por acreditar em mim. Obrigado amor por me escolher, pela paciência, pois você estuda letras e os matemáticos são mais que egoístas com os estudos. Obrigado por entender que algumas (muitas) vezes eu tive que ficar sem te ver pra poder fazer as listas de Tertu. Eu te amo Bê!

Por fim agradeço a Fabesb pelo apoio financeiro.

"Agora se vê que nossas esperanças de voltar às origens são como as mariposas tentando atingir a luz, somos puros como o homem que está sempre esperando com leve curiosidade, pela primavera e pelo verão seguinte, sempre à espera de novos meses e anos, e quando o tempo porque ansiamos chega, sempre parece que é tarde demais, não notamos que a nossa ânsia carrega em si o germe da nossa própria morte, mas deve-se saber que este anel é a essência da vida, e que o homem é o modelo do mundo".

Leonardo da Vinci.

Resumo

Apresentamos uma prova detalhada do limite hidrodinâmico do Processo de Exclusão Simples e Simétrico utilizando o método da Entropia Relativa. Nós provamos este resultado para tal processo evoluindo no toro discreto unidimensional $\mathbb{T}_n$ com escala difusiva $\theta(n) = n^2$. O método da Entropia é de grande dificuldade técnica, por isso o estudamos no caso com interação mais simples possível (o Processo de Exclusão Simples e Simétrico).

Palavras-chave: Limite hidrodinâmico, processo de exclusão e entropia relativa.

Abstract

We present a detailed proof of the hydrodynamic limit of Symmetric Simple Exclusion Process through relative entropy method. We proof this result to the process evolving in the unidimensional discrete torus $\mathbb{T}_n$ with diffusive scale $\theta(n) = n^2$. The relative entropy method is a very difficult technic, them we study in the case with interacting more simple possible (Symmetric Simples Exclusion Process).

Keywords: Hydrodynamic limit, exclusion process and relative entropy.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

O estudo dos *Sistemas de Partículas Interagentes* foi introduzido por Spitzer em [Spitzer]. O objetivo era entender a evolução temporal macroscópica de sistemas físicos através da dinâmica microscópica subjacente, isto é, a dinâmica entre as moléculas que compoem um sistema físico. O cenário é o seguinte, primeiro se supõe ter duas escalas para tempo e espaço associadas, por exemplo, um fluido ou gás expandindo em um determinado volume. A ideia é dividir este volume em um certo número de células, de modo que em cada uma destas células se possa ter um número aleatório de moléculas que se movam de acordo com uma regra fixada, uma taxa de transição de probabilidade.

O comportamento microscópico de um sistema físico é muito difícil de se obter de maneira razoável, devido ao fato do número de moléculas ser muito grande, tipicamente o número de Avogadro, para se ter uma descrição significativa algumas simplicações devem ser feitas. Nesta teoria se supõe ter um movimento estocástico das moléculas em vez de determinístico, e com esta hipótese pode-se fazer uma análise probabilística do sistema. O movimento subjacente depende de termos cada molécula esperando um tempo exponencial e cada uma delas realizando um passeio aleatório submetido por restrições locais. Neste contexto, um *Sistema de Partículas Interagentes* consiste em um movimento aleatório de uma coleção de partículas, cada uma esperando um tempo exponencial para se mover de uma célula para outra de acordo com uma transição de probabilidade. Probabilisticamente falando, como estes tempos são variáveis aleatórias com lei exponencial, este processo pertence à classe dos processos de Markov.

Em um *Limite Hidrodinâmico*, estamos interessados em deduzir a equação hidrodinâmica macroscópica que governa a evolução temporal de alguma quantidade física de interesse. Para processos em que a dinâmica microscópica conserva uma quantidade termodinâmica macroscópica, como por exemplo, a densidade ou energia, se deduz a equação diferencial parcial que governa a evolução temporal desta quantidade de interesse, através do movimento aleatório entre as partículas. Esta equação diferencial parcial é conhecida como a *equação hidrodinâmica* do sistema de partículas.

Neste trabalho nos concentraremos no sistema de partículas do *tipo exclusão*. Neste tipo de sistemas de partículas, cada célula terá no máximo uma partícula por sítio. Precisamente, estudaremos o sistema de partículas conhecido como *processo de exclusão simples e simétrico*. Com o objetivo de capturar a ideia fundamental por trás da teoria do limite hidrodinâmico, nos restringiremos a exposição deste sistema de partículas no caso unidimensional evoluindo no toro discreto $\mathbb{T}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0, 1, ..., n-1\}$.

O *processo de exclusão simples e simétrico* é descrito da seguinte maneira, primeiro fixamos uma probabilidade $p(\cdot)$ em $\mathbb{T}_n$ onde cada partícula, de forma independente, aguarda em média um tempo exponencial, sendo que ao atingir esta marca exponencial tal partícula salta do sítio x para o sítio $x+1$ ou $x-1$, com taxas $p(1) = p(-1) = \frac{1}{2}$ respectivamente. Neste processo, teremos no máximo uma partícula por sítio, uma marca exponencial, uma partícula tentar saltar para um sítio já ocupado, em respeito à regra de exclusão, este salto será suprimido.

O espaço de estados para este processo de Markov é $\{0, 1\}^{\mathbb{T}_n}$ em que 1 significa que o sítio está ocupado e 0 denota que este está vazio. Podemos definir precisamente este processo através do seu gerador como faremos adiante.

O *processo de exclusão simples e simétrico* é definido como o processo de Markov $\eta_t \in \{0, 1\}^{\mathbb{T}_n}$ com gerador $\mathcal{L}$ dado em funções locais (funções que só dependem de uma quantidade finita de sítios), $f : \{0,1\}^{\mathbb{T}_n} \to \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{L}f(\eta) := \sum_{|x-y|=1} \frac{1}{2}\eta(x)(1-\eta(y))[f(\eta^{x,y}) - f(\eta)],$$

onde

$$\eta^{x,y}(z) = \begin{cases} \eta(z), & \text{se } z \neq x, y \\ \eta(x), & \text{se } z = y \\ \eta(y), & \text{se } z = x \end{cases}.$$

Neste processo, configurações são denotadas por η, deste modo $\eta(x) = 0$ significa que o sítio está vazio e $\eta(x) = 1$ denota o sítio ocupado como mencionado acima.

Seguindo as ideias de Boltzmann da Mecânica Estatística, o primeiro passo a se realizar na direção de analisar a evolução temporal de uma quantidade macroscópica de um sistema físico, é obter informações de seus *estados invariantes*. Para sistemas de partículas, os estados invariantes são interpretados como *medidas invariantes* do sistema. Neste contexto, μ é uma medida invariante do sistema, se, começando o processo por μ, isto é, se a distribuição de η_0 é μ, então para qualquer tempo t, a distribuição do sistema ainda será dada por μ – significando que a trajetória das distribuições das medidas é constante no tempo e igual a μ.

Para o processo de exclusão, definiremos um conjunto de medidas invariantes. Para cada $0 \leq \rho \leq 1$ fixado denote por ν_ρ a medida produto Bernoulli em $\{0,1\}^{\mathbb{T}_n}$ com densidade ρ, isto é, sua marginal no sítio x é dada por:

$$\nu_\rho(\eta : \eta(x) = 1) = \rho.$$

No decorrer desta dissertação, veremos mais detalhes sobre a família de medidas invariantes definida acima para o processo de exclusão.

Com o intuito de provar o limite hidrodinâmico para este processo, introduziremos a *medida empírica* associada ao processo η_t. Para cada configuração η, denote por $\pi^n(\eta, du)$ a medida dada por

$$\pi^n(\eta, du) = \frac{1}{n} \sum_{x \in \{0,1\}^{\mathbb{T}_n}} \eta(x)\delta_{\frac{1}{n}}(du)$$

onde δ_u é a medida de Dirac. Por fim, defina o processo para a medida empirica por $\pi^n_t(\eta, du) = \pi^n(\eta_t, du)$. Esta medida representa a evolução temporal da densidade espacial de partículas, e como veremos mais adiante, tal medida desempenha um papel fundamental na teoria do limite hidrodinâmico.

É sabido que a equação hidrodinâmica para o *Processo de Exclusão Simples e Simétrico* é dada pela *equação do calor*:

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,u) = \frac{1}{2}\Delta\rho(t,u) \\ \rho(0,\cdot) = \rho_0(\cdot) \end{cases}.$$

De forma mais precisa, vamos introduzir a noção de limite hidrodinâmico. Seja $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, considere $\rho_0 : \mathbb{T} \to [0,1]$ um perfil inicial e denote por $(\mu^n)_{n\geq 1}$ uma sequência de medidas de probabilidade definidas em $\{0,1\}^{\mathbb{T}_n}$. Assuma que no tempo 0, o sistema comece de uma medida inicial μ^n que está associada ao perfil inicial ρ_0 no seguinte sentido:

Para toda função contínua $H : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ e para todo $\delta > 0$, vale

$$\lim_{n\to+\infty} \mu^n\Big[\eta : \Big| \sum_{x\in\mathbb{T}_n} H(\tfrac{x}{n})\eta(x) - \int_{\mathbb{T}} H(u)\rho_0(u)du \Big| > \delta\Big] = 0.$$

Note que o termo do lado esquerdo da expressão acima corresponde a integral de H com respeito a π^n_0. Deste modo, a condição acima significa pedir que a medida empirica no tempo 0 satisfaça uma *lei dos grandes números*, a saber, que a sequência $\pi^n(\eta, du)$ convirja em probabilidade para $\rho_0(u)du$.

O objetivo do limite hidrodinâmico consiste em mostrar que, se no tempo $t = 0$ as medidas empíricas são associadas a algum perfil inicial ρ_0, então no tempo macroscópico t estas medidas serão associadas a um perfil

ρ_t que é solução da correspondente equação hidrodinâmica. Em outras palavras, o objetivo é provar que medidas aleatórias $\pi^n_\cdot$ convergem, em probabilidade, para a medida determinística $\rho(t,u)du$, que é absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue e cuja densidade evolui de acordo com a equação hidrodinâmica.

A proposta deste trabalho é apresentar uma prova detalhada do limite hidrodinâmico para o *Processo de Exclusão Simples e Simétrico* utilizando o poderoso método da entropia relativa de Varadhan-Yau.

O presente trabalho está organizado em três partes fundamentais. Neste capítulo apresentaremos o principal resultado a ser provado (a respeito de estimativa de entropia), bem como exibiremos duas possíveis maneiras de obter o limite hidrodinâmico a partir dele. No Capítulo 2 apresentaremos as principais ferramentas utilizadas na aplicação do método da entropia, sendo assim, a definição de entropia, como também algumas de suas principais propriedades serão provadas nesse capítulo. Finalmente, no Capítulo 3 será aplicado de fato o método da entropia relativa de maneira a obtermos o *limite hidrodinâmico* para o Processo de Exclusão Simples Simétrico.

1.1 Resultado Principal

Nesta dissertação, provaremos o limite hidrodinâmico para o processo de exclusão simples simétrico através do método da Entropia Relativa que primeiro foi introduzido por Yau em [Yau]. Tal método exige a existência de solução suave da respectiva equação hidrodinâmica. Para o processo de exclusão simples e simétrico o gerador $\mathcal{L}$ é definido para uma função local $f:\{0,1\}^{\mathbb{T}_n}\to\mathbb{R}$ por

$$\mathcal{L}f(\eta) := \sum_{|x-y|=1}\frac{1}{2}\eta(x)(1-\eta(y))[f(\eta^{x,y})-f(\eta)],$$

evoluindo em $\mathbb{T}_n=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ no tempo de escala tn^2.

Fixe $\epsilon>0$ e seja $\rho_0:\mathbb{T}\to[0,1]$ um perfil inicial de classe $C^{2+\epsilon}(\mathbb{T})$ onde

$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. A equação hidrodinâmica para este processo é dada pela *equação do calor*:

$$\partial_t \rho(t,u) = \frac{1}{2}\Delta\rho(t,u).$$

É sábido que esta equação possui solução, a qual denotaremos por $\rho(t,\cdot)$ que é de classe $C^{1+\epsilon,2+\epsilon}(\mathbb{T})$. Vamos supor que existe uma constante $\delta_0 \in (0,1)$ que limita o perfil inicial da seguinte maneira:

$$\forall u \in \mathbb{T}, \quad \delta_0 \leq \rho_0(u) \leq 1-\delta_0. \tag{1.1}$$

Seja $\nu^n_{\rho(\cdot)}$ a medida produto no espaço de estados $\{0,1\}^{\mathbb{T}_n}$ tal que:

$$\nu^n_{\rho(\cdot)}(\eta, \eta(x) = 1) = \rho_0(x/n). \tag{1.2}$$

Isto significa que sob $\nu^n_{\rho(\cdot)}$, as variáveis aleatórias $(\eta(x))_{x\in\mathbb{T}_n}$ são independentes e $\eta(x)$ tem distribuição Bernoulli com parâmetro $\rho_0(x/n)$. É importante observar que esta medida não é homogênea pois a distribuição de $\eta(x)$ depende do sítio x.

Sejam μ e ν duas medida de probabilidade em um mesmo espaço Ω. Denotamos por $H(\mu|\nu)$ a entropia relativa de μ com respeito a ν através da fórmula variacional:

$$H(\mu|\nu) = \sup_f \left\{ \int f d\mu - \log \int e^f d\nu \right\},$$

onde o supremo acima é tomado sobre todas as funções mensuráveis limitadas $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Em nosso caso de interesse, o espaço Ω é $\{0,1\}^{\mathbb{T}_n}$. Propriedades e caracterizações da entropia serão apresentados no Capítulo 2 desta dissertação.

Antes de enunciar o teorema central deste trabalho, introduziremos a *medida empírica* associada ao *Processo de Exclusão Simples e Simétrico* $\{\eta_t,\, t \geq 0\}$. Esta medida representa a densidade espacial de partículas e para cada

$\eta_t \in \{0,1\}^{\mathbb{T}_n}$ é definida por

$$\pi_t^n(\eta, \cdot) = \frac{1}{n} \sum_{x \in \mathbb{T}_n} \eta_t(x) \delta_{\frac{x}{n}}(\cdot),$$

onde $\delta_u(\cdot)$ é o delta de Dirac. Note que π^n é uma medida finita no toro contínuo $\mathbb{T}$.

Dizemos que uma função não negativa f é de ordem $o(n)$ quando $n \to \infty$, onde denotamos $f(n) = o(n)$, se $\frac{f(n)}{n} \to 0$ quando $n \to \infty$. Dizemos ainda que f não negativa é $O(n)$, se existe uma constante $C > 0$ tal que $f(n) \leq nC$ quando $n \to \infty$.

Vamos agora ao principal teorema desta dissertação. Denote por $S^n(t)$ o semigrupo associado ao gerador $\mathcal{L}$ acelerado por n^2 e μ_t^n a distribuição do processo no tempo t, ou seja, $\mu_t^n = \mu^n S^n(t)$.

Teorema 1.1. *Seja $\rho_0 : \mathbb{T} \to [0,1]$ um perfil inicial de classe $C^{2+\epsilon}(\mathbb{T})$ que satisfaz a condição* (1.1)*. Seja $(\mu^n)_{n\geq 1}$ uma sequência de medidas de probabilidade no espaço de estados do processo de Markov tal que:*

$$H(\mu^n | \nu^n_{\rho_0(\cdot)}) = o(n).$$

Então, para todo $t \geq 0$,

$$H(\mu^n S^n(t) | \nu^n_{\rho(t,\cdot)}) = o(n),$$

onde $\rho(t,u)$ é a solução da equação do calor:

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,u) = \frac{1}{2}\Delta\rho(t,u), \\ \rho(t,u) = \rho_0(u). \end{cases} \tag{1.3}$$

Em posse do resultado acima, obtemos o limite hidrodinâmico a partir do seguinte resultado.

Teorema 1.2 (Limite Hidrodinâmico)**.** *Seja $\rho_0 : \mathbb{T} \to [0,1]$ um perfil inicial de classe $C^{2+\epsilon}(\mathbb{T})$ que satisfaz a condição* (1.1)*. Seja $(\mu^n)_{n\geq 1}$ uma sequência de medidas de probabilidade no espaço de estados do processo de Markov tal que,*

$$H(\mu^n|\nu^n_{\rho(t,\cdot)}) = o(n),$$

onde $\rho(t,u)$ *é a solução suave da equação do calor. Então, para todo* $t \geq 0$

$$\pi^n_t(du) \longrightarrow \rho(t,u)du \tag{1.4}$$

em μ^n_t*-probabilidade quando* $n \to \infty$*, onde* $\rho(t,u)$ *é a solução da equação do calor* (1.3).

Para a prova do teorema acima temos dois possíveis caminhos a seguir. Seguindo [Gonçalves], façamos um esboço da demonstração de um primeiro caminho. Seja $\rho_0 : \mathbb{T} \to [0,1]$ um perfil de classe $C^{2+\epsilon}(\mathbb{T})$ que satisfaz a condição (1.1) e seja $(\mu^n)_{n\geq 0}$ uma sequência de probabilidades no espaço de estados do sistema de partículas que satisfaz

$$H(\mu^n|\nu^n_{\rho_0(\cdot)}) = o(n).$$

Fixe um $t \geq 0$. Para provar o teorema, basta verificar que para $\delta > 0,\ t > 0$ e $H \in C(\mathbb{T})$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mu^n_t(\mathcal{A}_{t,\delta}) = 0,$$

onde

$$\mathcal{A}_{t,\delta} = \Big\{\eta : \Big|\frac{1}{n}\sum_{x\in\mathbb{T}_n} H\Big(\frac{x}{n}\Big)\eta(x) - \int_{\mathbb{T}} H(u)\rho(t,u)du\Big| > \delta\Big\}$$

e $\rho(t,u)$ é solução suave da equação do calor.

Denote por $\nu^n_{\rho(t,\cdot)}$ a medida produto com parâmetro de variação suave associada ao perfil $\rho(t,\cdot)$. Isto significa que sob a medida $\nu^n_{\rho(t,\cdot)}$ as variáveis aleatórias $(\eta(x))_{x\in\mathbb{T}_n}$ são independentes e cada $\eta(x)$ tem distribuição Bernoulli de parâmetro $\rho(t,x/n)$, como definido em (1.2).

Da desigualdade (2.3) provada adiante no Capítulo 2 obtemos:

$$\mu^n_t(\mathcal{A}_{t,\delta}) \leq \frac{\log 2 + H(\mu^n_t|\nu^n_{\rho(t,\cdot)})}{\log\Big(1 + 1/\nu^n_{\rho(t,\cdot)}(\mathcal{A}_{t,\delta})\Big)}. \tag{1.5}$$

Como $\nu^n_{\rho(t,\cdot)}$ é uma medida produto, podemos usar uma estimativa de

Grandes Desvios para mostrar que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\nu^n_{\rho(t,\cdot)}(\mathcal{A}_{t,\delta})=-C(\delta),\tag{1.6}$$

implicando que o denominador do lado direito de (1.5) é de ordem $O(n)$. Poderemos então finalizar a prova desde que $H(\mu_t^n|\nu^n_{\rho(t,\cdot)})$ seja de ordem $o(n)$, que é a tese do Teorema 1.1.

Entretanto, para seguir este caminho, é necessário provar (1.6), que não é propriamente difícil, mas é consequência de resultados avançados. Por este motivo seguiremos outro caminho, na linha de [KL]. Este caminho é apresentado em detalhes na próxima seção.

1.2 Limite hidrodinâmico como consequência de estimativas de entropia

A uma função $\Psi:\{0,1\}^{\mathbb{T}_n}\to\mathbb{R}$ que só dependa nas configurações de um número finito de coordenadas damos o nome de função cilindro. Denote por τ_x o operador *shift* ou translação por x em $\eta\in\{0,1\}^{\mathbb{T}_n}$, i.e. $\tau_x\eta(y)=\eta(y+x)$ para $y\in\mathbb{T}_n$. Por fim, para uma função cilindro Ψ definimos $\tau_x\Psi(\eta)=\Psi(\tau_x\eta)$.

Proposição 1.1. *Admitindo o Teorema 1.1, para toda função contínua $H:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ e para toda função cilindro limitada Ψ, vale*

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}_{\mu^n S_t^n}\Big[\Big|n^{-1}\sum_{x\in\mathbb{T}_n}H(x/n)\tau_x\Psi(\eta)-\int_{\mathbb{T}}H(u)\mathbb{E}_{\nu_{\rho(t,u)}}[\Psi]du\Big|\Big]=0.\tag{1.7}$$

Observemos que o limite (1.7) acima é mais forte do que a convergência (1.4), o que é uma consequência da Desigualdade de Chebyshev. Como o principal resultado desta dissertação é o Teorema 1.2, numa primeira leitura pode-se assumir a Proposição 1.1, o que não causará nenhuma dificuldade na leitura dos capítulos subsequentes. A seguir apresentamos uma demonstração da Proposição 1.1 que requer apenas ferramentas básicas de Probabilidade e Teoria da Medida. E como já comentado, esta proposição implica o Teorema 1.2.

Demonstração da Proposição 1.1. Por simplicidade, vamos supor que a função cilindro Ψ só dependa da configuração η através de $\eta(0)$, isto é, suponha que $\Psi(\eta) = \Psi(\eta(0))$. Para nossos fins basta tomar $\Psi(\eta) = \eta(0)$. Da definição da medida Bernoulli produto ν_α, ver equação (1.2), obtemos que $\mathbb{E}_{\nu_{\rho(t,x/n)}}[\eta(0)] = \rho(t, \frac{x}{n})$. Como ambas as funções $H(\cdot)$ e $\rho(t,\cdot)$ são contínuas e $\Psi(\cdot)$ é limitada temos que

$$
\begin{aligned}
& \Big| n^{-1} \sum_{x \in \mathbb{T}_n} H(x/n) \tau_x \Psi(\eta) - \int_{\mathbb{T}} H(u) \mathbb{E}_{\nu_{\rho(t,u)}}[\Psi] du \Big| \\
= & \Big| n^{-1} \sum_{x \in \mathbb{T}_n} H(x/n) \tau_x \Psi(\eta) - \int_{\mathbb{T}} H(u) \rho(t,u) du \Big| \\
\leq & C \Big| n^{-1} \sum_{x \in \mathbb{T}_n} \tau_x \Psi(\eta) - \int_{\mathbb{T}} \rho(t,u) du \Big|,
\end{aligned}
$$

onde C é a constante que limita a função contínua H definida no compacto $\mathbb{T}$. Notemos agora que é possível aproximar $\int_{\mathbb{T}} \rho(t,u)du$ por somas de Riemann indexadas por $\mathbb{T}_n$. Assim, para uma inteiro $l > 0$ fixado temos,

$$
\int_{\mathbb{T}} \rho(t,u) du \approx n^{-1} \sum_{x \in \mathbb{T}_n} \rho(t, \tfrac{x}{n}) = n^{-1} \sum_{x \in \mathbb{T}_n} (2l+1)^{-1} \sum_{y\,;\,|x-y| \leq l} \rho(t, \tfrac{y}{n}).
$$

Note também que podemos escrever $n^{-1} \sum_{x \in \mathbb{T}_n} \Psi(\eta(x))$ como

$$
n^{-1} \sum_{x \in \mathbb{T}_n} (2l+1)^{-1} \sum_{y\,;\,|x-y| \leq l} \Psi(\eta(y)). \tag{1.8}
$$

Logo, para provar a Proposição 1.1 é suficiente mostrar que

$$
\limsup_{n \to +\infty} \limsup_{l \to +\infty} \mathbb{E}_{\mu^n S_t^n} \Big[n^{-1} \sum_{x \in \mathbb{T}_n} \Big| (2l+1)^{-1} \sum_{y\,;\,|x-y| \leq l} \Big(\eta(y) - \mathbb{E}_{\nu_{\rho(t,x/n)}}[\eta(0)] \Big) \Big| \Big] \leq 0.
$$

Para $\gamma \geq 0$, pela desigualdade de entropia (2.2) que será provada no

Capítulo 2, a esperança na fórmula anterior é limitada por

$$\frac{1}{n\gamma}H(\mu^n S_t^n|\nu^n_{\rho(t,\cdot)}) + \frac{1}{n\gamma}\log \mathbb{E}_{\nu^n_{\rho(t,\cdot)}}\Big[\exp\Big(\gamma\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\Big|(2l+1)^{-1}\sum_{\substack{y\,;\\|x-y|\le l}}\Big(\eta(y)-\rho(t,\tfrac{x}{n})\Big)\Big|\Big)\Big].$$

Assumindo o Teorema 1.1 concluímos que a primeira parcela da soma acima converge a zero quando $n\to\infty$. Por outro lado, como a medida $\nu_{\rho(t,\cdot)}$ é produto obtemos independência das variáveis aleatórias

$$X_i = (2l+1)^{-1}\sum_{y\,;\,|y-x_i|\le l}\eta(y), \tag{1.9}$$

desde que os seus centros x_i estejam devidamente afastados, a saber, desde que $|x_i - x_j| > 2l$. Usaremos este fato mais adiante. Temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n\gamma}\log \mathbb{E}_{\nu^n_{\rho(t,\cdot)}}\Bigg[\exp\Bigg(\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\Bigg|\frac{\gamma}{2l+1}\sum_{y\,;\,|x-y|\le l}\Big(\eta(y)-\rho(t,\tfrac{x}{n})\Big)\Bigg|\Bigg)\Bigg]\\
=\;&\frac{1}{n\gamma}\log \mathbb{E}_{\nu^n_{\rho(t,\cdot)}}\Bigg[\exp\Bigg(\sum_{|z|\le l}\sum_{\substack{x=z+k(2l+1)\\k\in\mathbb{Z}}}\Bigg|\frac{\gamma}{2l+1}\sum_{y\,;\,|x-y|\le l}\Big(\eta(y)-\rho(t,\tfrac{x}{n})\Big)\Bigg|\Bigg)\Bigg],
\end{aligned}$$

que por sua vez é igual a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n\gamma}\log \mathbb{E}_{\nu^n_{\rho(t,\cdot)}}\Bigg[\prod_{|z|\le l}\exp\Bigg(\sum_{\substack{x=z+k(2l+1)\\k\in\mathbb{Z}}}\Bigg|\frac{\gamma}{2l+1}\sum_{y\,;\,|x-y|\le l}\Big(\eta(y)-\rho(t,\tfrac{x}{n})\Big)\Bigg|\Bigg)\Bigg]\\
=\;&\frac{1}{n\gamma}\log \mathbb{E}_{\nu^n_{\rho(t,\cdot)}}\Bigg[\prod_{|z|\le l}\exp\Bigg(\frac{\gamma}{2l+1}\sum_{\substack{x=z+k(2l+1)\\k\in\mathbb{Z}}}\Bigg|\sum_{y\,;\,|x-y|\le l}\Big(\eta(y)-\rho(t,\tfrac{x}{n})\Big)\Bigg|\Bigg)\Bigg].
\end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Hölder generalizada (ver Apêndice 5.1) podemos majorar a expressão acima por

$$\frac{1}{n\gamma}\log\prod_{|z|\le l}\mathbb{E}_{\nu^n_{\rho(t,\cdot)}}\Bigg[\Bigg\{\exp\Bigg(\frac{\gamma}{2l+1}\sum_{\substack{x=z+k(2l+1)\\k\in\mathbb{Z}}}\Bigg|\sum_{y\,;\,|x-y|\le l}\Big(\eta(y)-\rho(t,\tfrac{x}{n})\Big)\Bigg|\Bigg)\Bigg\}^{2l+1}\Bigg]^{\frac{1}{2l+1}},$$

a qual é igual a

$$\frac{1}{n\gamma}\log\prod_{|z|\le l}\mathbb{E}_{\nu^n_{\rho(t,\cdot)}}\Bigg[\exp\Bigg(\gamma\sum_{\substack{x=z+k(2l+1)\\ k\in\mathbb{Z}}}\Bigg|\sum_{y\,;\,|x-y|\le l}\Big(\eta(y)-\rho(t,\tfrac{x}{n})\Big)\Bigg|\Bigg)\Bigg]^{\frac{1}{2l+1}}.$$

Pela independência das variáveis aleatórias X_i definidas em (1.9), a expressão acima é igual a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n\gamma}\log\prod_{|z|\le l}\prod_{\substack{x=z+k(2l+1)\\ k\in\mathbb{Z}}}\mathbb{E}_{\nu^n_{\rho(t,\cdot)}}\Bigg[\exp\Bigg(\gamma\Bigg|\sum_{y\,;\,|x-y|\le l}\Big(\eta(y)-\rho(t,\tfrac{x}{n})\Big)\Bigg|\Bigg)\Bigg]^{\frac{1}{2l+1}}\\
=\;&\frac{1}{n\gamma}\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\frac{1}{2l+1}\log\mathbb{E}_{\nu^n_{\rho(t,\cdot)}}\Bigg[\exp\Bigg(\gamma\Bigg|\sum_{y\,;\,|x-y|\le l}\Big(\eta(y)-\rho(t,\tfrac{x}{n})\Big)\Bigg|\Bigg)\Bigg].
\end{aligned}$$

Segue da continuidade de $\rho(t,\cdot)$ que esta soma converge, quando $n\to\infty$, para

$$\int_{\mathbb{T}}du\frac{1}{\gamma(2l+1)}\log\mathbb{E}_{\nu_{\rho(t,u)}}\Bigg[\exp\Bigg(\gamma\Bigg|\sum_{|y|\le l}\Big(\eta(y)-\rho(t,u)\Big)\Bigg|\Bigg)\Bigg]. \tag{1.10}$$

Para simplificar a notação vamos escrever

$$A(u):=\gamma\Big|\sum_{|y|\le l}\big(\eta(y)-\rho(t,u)\big)\Big|.$$

Usando a desigualdade $e^x\le 1+x+\frac{x^2e^{|x|}}{2}$ podemos ver que

$$\begin{aligned}
\log\mathbb{E}_{\nu^n_{\rho(t,u)}}[e^{A(u)}] &\le \log\mathbb{E}_{\nu_{\rho(t,u)}}\left[1+A(u)+\frac{A(u)^2e^{|A(u)|}}{2}\right]\\
&= \log\left[1+\mathbb{E}_{\nu_{\rho(t,u)}}\left[A(u)+\frac{A(u)^2e^{|A(u)|}}{2}\right]\right].
\end{aligned}$$

Da desigualdade $\log(1+x)\le x$ obtemos que a última expressão acima é limitada por

$$\mathbb{E}_{\nu_{\rho(t,u)}}\left[A(u) + \frac{A(u)^2 e^{|A(u)|}}{2}\right].$$

Através dos cálculos feitos até aqui concluímos que a integral em (1.10) é limitada por

$$\int_{\mathbb{T}} du \frac{1}{\gamma(2l+1)} \mathbb{E}_{\nu_{\rho(t,u)}}\Bigg[\gamma \Big|\sum_{|y|\le l}\big(\eta(y)-\rho(t,u)\big)\Big|$$

$$+\frac{\gamma^2}{2}\Big|\sum_{|y|\le l}\eta(y)-\rho(t,u)\Big|^2 \exp\Big(\gamma\Big|\sum_{|y|\le l}\big(\eta(y)-\rho(t,u)\big)\Big|\Big)\Bigg]. \tag{1.11}$$

Usando a desigualdade triangular e usando que $|\rho(t,u)| \le 1$ e $|\eta(y)| \le 1$, em $\Big|\sum_{|y|\le l}\eta(y)-\rho(t,u)\Big|$, obtemos

$$\Big|\sum_{|y|\le l}\big(\eta(y)-\rho(t,u)\big)\Big| \le 2(2l+1).$$

Logo,

$$\Big|\sum_{|y|\le l}\big(\eta(y)-\rho(t,u)\big)\Big|^2 \le 4(2l+1)^2.$$

Então, a integral em (1.11) é limitada por

$$\int_{\mathbb{T}} du \frac{1}{\gamma(2l+1)} \mathbb{E}_{\nu_{\rho(t,u)}}\Big[\gamma\Big|\sum_{|y|\le l}\big(\eta(y)-\rho(t,u)\big)\Big| + 2\gamma^2(2l+1)^2 e^{2\gamma(2l+1)}\Big]$$

a qual é a soma de

$$\int_{\mathbb{T}} du\, \frac{1}{(2l+1)} \mathbb{E}_{\nu_{\rho(t,u)}}\Big[\Big|\sum_{|y|\le l}\big(\eta(y)-\rho(t,u)\big)\Big|\Big] \tag{1.12}$$

e

$$\int_{\mathbb{T}} du \frac{1}{\gamma(2l+1)} \mathbb{E}_{\nu_{\rho(t,u)}}\Big[\Big|2\gamma^2(2l+1)^2 e^{2\gamma(2l+1)}\Big] \;\;=\;\; \gamma(2l+1)e^{2\gamma(2l+1)}.$$

Vamos tomar $\gamma := \frac{\epsilon}{2l+1}$, que limita a expressão acima por uma constante vezes ϵ. Para a expressão (1.12) aplicaremos a Lei dos Grandes Números. Sob a medida $\nu_{\rho(t,u)}$ (a qual é Bernoulli de parâmetro constante),

$$\frac{1}{2l+1}\sum_{|y|\leq l}\eta(y) \longrightarrow \rho(t,u),$$

quase certamente quando l converge para infinito. Por fim, aplicando o Teorema da Convergência Dominada concluímos que

$$\lim_{l\to+\infty} \mathbb{E}_{\nu_{\rho(t,u)}}\Big[\Big|\frac{1}{2l+1}\sum_{|y|\leq l}\eta(y) - \rho(t,u)\Big|\Big] = 0,$$

e novamente pelo Teorema da Convergência Dominada vem que

$$\lim_{l\to\infty}\int_{\mathbb{T}} \mathbb{E}_{\nu_{\rho(t,u)}}\Big[\Big|\frac{1}{2l+1}\sum_{|y|\leq l}\eta(y) - \rho(t,u)\Big|\Big]du = 0.$$

Logo, tomando $l \to \infty$ e em seguida $\epsilon \to 0$, concluímos a prova da proposição. $\square$

Capítulo 2

Ferramentas

Neste capítulo serão apresentadas as ferramentas necessárias para provar o limite hidrodinâmico do processo de exclusão simples e simétrico através do método da entropia relativa.

2.1 Entropia Relativa

Seja π uma medida de probabilidade referência em E. Para uma medida de probabilidade μ denotamos por $H(\mu|\pi)$ a *entropia relativa* de μ com respeito a π dada pela fórmula variacional:

$$H(\mu|\pi) = \sup_{f} \left\{ \int f d\mu - \log \int e^{f} d\pi \right\}, \tag{2.1}$$

onde o supremo acima é tomado sobre todas as funções limitadas $f : E \to \mathbb{R}$. Com o objetivo de facilitar a leitura do texto, denotaremos a entropia $H(\mu|\pi)$ por $H(\mu)$ e nos referiremos à ela apenas como a entropia de μ. Note que se $c > 0$ é uma constante real positiva, e f uma função limitada, então

$$\begin{aligned}\int (f+c)d\mu - \log \int e^{(f+c)} d\pi &= \int f d\mu + \int c d\mu - \log \int e^f e^c d\pi \\ &= c + \int f d\mu - \log e^c \int e^f d\pi \\ &= \int f d\mu - \log \int e^f d\pi.\end{aligned}$$

Portanto, é equivalente tomarmos o supremo acima sobre todas as funções limitadas positivas. Segue ainda da definição da entropia que

$$\int c f d\mu - \log \int e^{cf} d\pi \leq H(\mu).$$

Logo

$$c \int f d\mu \leq H(\mu) + \log \int e^{cf} d\pi.$$

Portanto,

$$\int f d\mu \leq c^{-1}[H(\mu) + \log \int e^{cf} d\pi]. \tag{2.2}$$

O próximo resultado, consequência direta da desigualdade acima, é conhecido como a *desigualdade da entropia*. Apesar da simplicidade em prová-lo, veremos que este desempenha um papel fundamental no método aqui apresentado para provar o limite hidrodinâmico.

Proposição 2.1 (Desigualdade da entropia). *Se A é um subconjunto de E então*

$$\mu(A) \leq \frac{\log 2 + H(\mu)}{\log\left(1 + \frac{1}{\pi(A)}\right)}. \tag{2.3}$$

Demonstração. Seja $f = \mathbb{1}_A$ em (2.2), então

$$\mu(A) = \int \mathbb{1}_A d\mu \leq c^{-1}\Big[H(\mu) + \log \int e^{c\mathbb{1}_A} d\pi\Big].$$

Observando que $e^{c\mathbb{1}_A} = e^c\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A^c}$, temos que

$$\begin{aligned}\log\int e^{c\mathbb{1}_A}d\pi &= \log\int[e^c\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A^c}]d\pi \\ &= \log[e^c\pi(A) + \pi(A^c)] \\ &= \log[\pi(A)(e^c - 1) + 1].\end{aligned}$$

Por fim, tomando c tal que $\pi(A)(e^c - 1) = 1$, teremos $c = \log[\frac{1}{\pi(A)} + 1]$ e a desigualdade está provada. □

Proposição 2.2. *A entropia é positiva, convexa e semi-contínua inferiormente.*

Demonstração. É fácil ver que a entropia é positiva, pois para qualquer função constante $f = c$, obtemos

$$H(\mu) \geq \int f d\mu - \log\int e^f d\pi = 0.$$

Quanto a convexidade, seja $0 \leq \alpha \leq 1$, e sejam μ_1, μ_2, π medidas em E. Daí,

$$\begin{aligned}H(\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2|\pi) &= \sup_f\left\{\int f d(\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2) - \log\int e^f d\pi\right\} \\ &= \sup_f\left\{\alpha\int f d\mu_1 + (1-\alpha)\int f d\mu_2 - \log\int e^f d\pi\right\}.\end{aligned}$$

Como podemos escrever

$$\log\int e^f d\pi = \alpha\log\int e^f d\pi + (1-\alpha)\log\int e^f d\pi,$$

temos que $H(\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2|\pi)$ é igual a:

$$\begin{aligned}&\sup_f\left\{\alpha\Big[\int f d\mu_1 - \log\int e^f d\pi\Big] + (1-\alpha)\Big[\int f d\mu_2 - \log\int e^f d\pi\Big]\right\} \\ \leq\ &\alpha\sup_f\left\{\int f d\mu_1 - \log\int e^f d\pi\right\} + (1-\alpha)\sup_f\left\{\int f d\mu_2 - \log\int e^f d\pi\right\}.\end{aligned}$$

Portanto,
$$H(\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2) \leq \alpha H(\mu_1) + (1-\alpha)H(\mu_2).$$

Finalmente, para provar que a entropia é semi-contínua inferiormente fixe uma função f contínua e limitada tal que $\int f d\mu - \log\int e^f d\pi + \epsilon \geq H(\mu|\pi)$. Neste contexto, queremos provar que para $\mu_n \xrightarrow{\omega} \mu$, obtemos

$$H(\mu|\pi) \leq \liminf_{n\to\infty} H(\mu_n|\pi).$$

Pela definição de convergência fraca, para toda função contínua f

$$\int f d\mu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f d\mu.$$

Logo, existe um n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$\int f d\mu + \epsilon \leq \int f d\mu_n + 2\epsilon.$$

Então,

$$\int f d\mu - \log\int e^f d\pi + \epsilon \leq \int f d\mu_n - \log\int e^f d\pi + 2\epsilon.$$

Daí,
$$H(\mu|\pi) \leq \int f d\mu_n - \log\int e^f d\pi + 2\epsilon.$$

Tomando o supremo sobre f na desigualdade acima, temos que

$$H(\mu|\pi) \leq \sup_f \left\{ \int f d\mu_n - \log\int e^f d\pi + 2\epsilon \right\}.$$

Finalmente, tomando o lim inf na última desigualdade concluímos que

$$H(\mu|\pi) \leq \liminf_{n\to\infty} H(\mu_n|\pi) + 2\epsilon,$$

e como o $\epsilon > 0$ é arbitrário, a prova está concluída. □

Apesar da validade do próximo teorema para um espaço enumerável E

o provaremos para o caso em que E é finito, pois este é o contexto que nos interessa. Para ver a prova em que E é enumerável o leitor pode consultar [KL] página 339.

Teorema 2.1. *Se $\mu << \pi$ e $f = \frac{d\mu}{d\pi}$, então*

$$H(\mu|\pi) = \int f \log f d\pi.$$

Caso μ não seja absolutamente contínua com relação a π, então $H(\mu|\pi) = +\infty$.

Demonstração. Se μ não é absolutamente contínua com respeito a π, então existe $A \subset E$ tal que $\pi(A) = 0$ e $\mu(A) > 0$. Considere $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $f_n := n\mathbb{1}_A$ para $n \in \mathbb{N}$. Como $e^{n\mathbb{1}_{\mathbb{A}}} = \mathbb{1}_A e^n + \mathbb{1}_{A^c}$, temos que

$$\begin{aligned}
\int f_n d\mu - \log \int e^{f_n} d\pi &= n\mu(A) - \log\Big[\int (\mathbb{1}_A e^n + \mathbb{1}_{A^c}) d\pi\Big] \\
&= n\mu(A) - \log 1 \\
&= n\mu(A)\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Donde concluímos que $H(\mu|\pi) = +\infty$. Seja agora $\mu << \pi$ e suponha que E seja um conjunto finito. Então a função

$$\Phi : \mathbb{R}^E \to \mathbb{R} \quad \Phi(f) = \int f d\mu - \log \int e^f d\pi \tag{2.4}$$

é côncava. De fato, dado $\alpha \in (0,1)$ e dadas $f, g \in \mathbb{R}^E$ segue da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}
\int e^{\alpha f + (1-\alpha)g} d\pi &= \int e^{\alpha f} e^{(1-\alpha)g} d\pi \\
&\leq \Big(\int (e^{\alpha f})^{1/\alpha} d\pi\Big)^{\alpha} \Big(\int (e^{(1-\alpha)g})^{1/(1-\alpha)} d\pi\Big)^{(1-\alpha)}.
\end{aligned}$$

Aplicando a função logaritmo e multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por menos um, concluímos que

$$-\log \int e^{\alpha f + (1-\alpha)g} d\pi \geq -\alpha \log \int e^f d\pi - (1-\alpha) \log \int e^g d\pi.$$

Então $\Phi(\alpha f + (1-\alpha)g)$ é igual a:

$$\begin{aligned}
& \alpha \int f d\mu + (1-\alpha) \int g d\mu - \log \int e^{\alpha f + (1-\alpha)g} d\pi \\
\geq \ & \alpha\Big(\int f d\mu - \log \int e^{\alpha f} d\pi \Big) + (1-\alpha)\Big(\int g d\mu - \log \int e^{g} d\pi \Big) \\
= \ & \alpha\Phi(f) + (1-\alpha)\Phi(g).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Phi(\alpha f + (1-\alpha)g) \geq \alpha\Phi(f) + (1-\alpha)\Phi(g).$$

Da concavidade de Φ, provada acima, concluímos que esta função admite máximo onde $\nabla\Phi = 0$. Se $f \in \mathbb{R}^E$, então $f = \sum_{i \in E} f_i \mathbb{1}_{\{i\}}$ e $e^f = \sum_{i \in E} e^{f_i} \mathbb{1}_{\{i\}}$ onde $f(i) = f_i$, logo

$$\int f d\mu = \sum_{i \in E} f_i \mu(\{i\}) \qquad \text{e} \qquad \int e^f d\pi = \sum_{i \in E} e_i^f \pi(\{i\})\,.$$

Daí, podemos explicitar o valor de Φ aplicada a $f \in \mathbb{R}^E$ como segue:

$$\Phi(f) = \sum_{i \in E} f_i \mu(\{i\}) - \log \sum_{i \in E} e^{f_i} \pi(\{i\}).$$

Calculando as derivadas parciais de Φ temos que

$$\frac{\partial \Phi(f)}{\partial f_i} = \mu\{i\} - \frac{e^{f_i}\pi(\{i\})}{\sum_{i \in E} e^{f_i}\pi(\{i\})}.$$

Então, $\frac{\partial \Phi(f)}{\partial f_i} = 0$ se, e somente se, $\mu(\{i\}) = \frac{e^{f_i}\pi(\{i\})}{\sum\limits_{i \in E} e^{f_i}\pi(\{i\})}$. Assim, para cada $h = \sum\limits_{i \in E} h_i \mathbb{1}_{\{i\}} \in \mathbb{R}^E$ obtemos

$$\sum_{i \in E} h_i \mu\{i\} = \frac{\sum\limits_{i \in E} h_i e^{f_i}\pi(\{i\})}{\sum\limits_{i \in E} e^{f_i}\pi(\{i\})}.$$

Assim, $f \in \mathbb{R}^E$ é um ponto de máximo de Φ se, e somente se, $\int h d\mu = \frac{\int h e^f d\pi}{\int e^f d\pi}$, para toda função $h \in \mathbb{R}^E$. Por fim, segue de $\Phi(f + c) = \Phi(f)$ para toda constante $c \in \mathbb{R}$, que podemos tomar $f \in \mathbb{R}^E$ tal que $\int e^f d\pi = 1$ (basta tomar $c = -\log \int e^f d\pi$) e em particular $f = \log \frac{d\mu}{d\pi}$. Neste caso obtemos

$$\begin{aligned} H(\mu) &= \sup_f \Phi(f) = \Phi\left(\log\left(\frac{d\mu}{d\pi}\right)\right) \\ &= \int \log\left(\frac{d\mu}{d\pi}\right) d\mu - \log 1 \\ &= \int \log\left(\frac{d\mu}{d\pi}\right) d\mu. \end{aligned}$$

$\square$

Vamos terminar esta seção observando que para o *Processo de Exclusão Simples e Simétrico* evoluindo no toro microscópico $\mathbb{T}_n$, começando de μ^n, com medida invariante produto Bernoulli ν_α^n de parâmetro constante igual a α associada, obtemos que $H(\mu^n|\nu_\alpha) = O(n)$.

Proposição 2.3. *Seja $H(\mu^n|\nu_\alpha^n)$ a entropia de uma medida de probabilidade μ^n com respeito ao estado estacionário ν_α^n. Então existe uma constante finita $C := C(\alpha)$ tal que*

$$H(\mu^n|\nu_\alpha) \leq nC, \tag{2.5}$$

para toda medida de probabilidade μ^n.

Demonstração. Segue do Teorema 2.1, que

$$\begin{aligned}
H(\mu^n|\nu^n_\alpha) &= \sum_{\eta\in\{0,1\}^{\mathbb{T}_n}} \mu^n(\eta)\log\frac{\mu^n(\eta)}{\nu^n_\alpha(\eta)} \\
&\leq \sum_{\eta\in\{0,1\}^{\mathbb{T}_n}} \mu^n(\eta)\log\frac{1}{\nu^n_\alpha(\eta)} \\
&\leq \sum_{\eta\in\{0,1\}^{\mathbb{T}_n}} \mu^n(\eta)\log\frac{1}{[\alpha(1-\alpha)]^n} \\
&= \Big[\sum_{\eta\in\{0,1\}^{\mathbb{T}_n}} \mu^n(\eta)\Big]\log\frac{1}{[\alpha\wedge(1-\alpha)]^n} = n[-\log\alpha\wedge(1-\alpha)],
\end{aligned}$$

onde $\alpha\wedge(1-\alpha)=\min\{\alpha,1-\alpha\}$. □

2.2 Princípio de Grandes Desvios e Laplace-Varadhan

Consideremos uma sequência de variáveis aleatórias $X_n, n\geq 1$ tomando valores em algum espaço métrico M. Dizemos que a sequência $X_n, n\geq 1$ satisfaz um *princípio de grandes desvios* com função taxa I e decaimento a_n se para todo conjunto *fechado* $\mathcal{F}\subset M$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\log\mathbb{P}[X_n\in\mathcal{F}]\leq-\inf_{u\in\mathcal{F}}I(u) \tag{2.6}$$

e para todo conjunto *aberto* $\mathcal{G}\subset M$,

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\log\mathbb{P}[X_n\in\mathcal{G}]\geq-\inf_{u\in\mathcal{G}}I(u), \tag{2.7}$$

para alguma função semicontínua inferiormente $I: M\to\mathbb{R}^+$ e alguma sequência crescente $a_n\to\infty$.

Apesar de pedirmos que a função taxa I seja semicontínua inferiormente, para nossos fins essa hipótese pode ser retirada.

Teorema 2.2 (Laplace-Varadhan). *Seja $X_n, n\geq 1$ uma sequência de variáveis aleatórias satisfazendo um princípio de grandes desvios com função taxa I e taxa* *de decaimento a_n. Seja $F : M \to \mathbb{R}$ uma função contínua limitada. Então,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \log \mathbb{E}[e^{a_n F(X_n)}] = \sup_{u\in M}\{F(u) - I(u)\}. \tag{2.8}$$

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ fixado. Por definição de supremo, existe $u_0 \in M$ tal que $\sup\limits_{u\in M}\{F(u) - I(u)\} \leq F(u_0) - I(u_0) + \epsilon$. Como F é contínua, podemos tomar uma vizinhança $\mathcal{V}$ de u_0 em M tal que $F(u) \geq F(u_0) - \epsilon$ para todo $u \in \mathcal{V}$. Neste caso, obtemos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_n} \log \mathbb{E}[e^{a_n F(X_n)}] &\geq \frac{1}{a_n} \log \mathbb{E}[e^{a_n F(X_n)} \mathbb{1}_{[X_n\in\mathcal{V}]}] \\
&\geq \frac{1}{a_n} \log \mathbb{E}[e^{a_n (F(u_0)-\epsilon}) \mathbb{1}_{[X_n\in\mathcal{V}]}].
\end{aligned}$$

pois $e^{a_n F(X_n)} \mathbb{1}_{[X_n\in\mathcal{V}]} \geq e^{a_n [F(u_0)-\epsilon]} \mathbb{1}_{[X_n\in\mathcal{V}]}$. Como $\frac{1}{a_n} \log \mathbb{E}[e^{a_n [F(u_0)-\epsilon]} 1_{[X_n\in\mathcal{V}]}] = F(u_0) - \epsilon + \frac{1}{a_n} \log \mathbb{P}[X_n \in \mathcal{V}]$, concluímos que

$$\frac{1}{a_n} \log \mathbb{E}[e^{a_n F(X_n)}] \geq F(u_0) - \epsilon + \frac{1}{a_n} \log \mathbb{P}[X_n \in \mathcal{V}]. \tag{2.9}$$

Aplicando o *princípio dos grandes desvios* em $\{X_n, n \geq 1\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \log \mathbb{E}[e^{a_n F(X_n)}] &\geq F(u_0) - \epsilon + \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \log \mathbb{P}[X_n \in \mathcal{V}] \\
&\geq F(u_0) - \epsilon - \inf_{u\in\mathcal{V}}[I(u)] \geq F(u_0) - I(u_0) - \epsilon.
\end{aligned}$$

Como $\sup_{u\in M}\{F(u) - I(u)\} \leq F(u_0) - I(u_0) + \epsilon$, com ϵ arbitrário, obtemos a primeira desigualdade da prova, a saber

$$\sup_{u\in M}\{F(u) - I(u)\} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \log \mathbb{E}[e^{a_n F(X_n)}]. \tag{2.10}$$

Para obtermos a próxima desigualdade sejam $L = ||F||_\infty$ e $k \in \mathbb{N}$ um inteiro positivo fixado. Vamos dividir $[-L, L]$ em k intervalos de comprimento $\frac{2L}{k}$. Desta forma, denote estes intervalos por

$$I_j = [r_j, r_{j+1}], 1 \leq j \leq k, \tag{2.11}$$

e seja ainda $\mathcal{F}_j := \{u \in M : F(u) \in I_j\}$. Como F é contínua e os I_j's são fechados, concluímos que $\mathcal{F}_j$ é fechado. Da desigualdade $e^{a_n F(X_n)} \leq \sum_{j=1}^k e^{a_n F(X_n)} \mathbb{1}_{[X_n \in \mathcal{F}_j]}$ obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{a_n F(X_n)}] &\leq \mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^k e^{a_n F(X_n)} \mathbb{1}_{[X_n \in \mathcal{F}_j]}\Big] \\ &\leq \sum_{j=1}^k e^{a_n r_{j+1}} \mathbb{P}[X_n \in \mathcal{F}_j]. \end{aligned}$$

Para concluir a prova vamos usar a seguinte observação:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log (b_n + c_n) = \max\Big\{ \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log b_n \, , \, \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log c_n \Big\}. \tag{2.12}$$

Segue da observação acima e do *princípio de grandes desvios* que

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \log \mathbb{E}[e^{a_n F(X_n)}] &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \log \Big[\sum_{j=1}^k e^{a_n F(X_n)} 1_{[X_n \in \mathcal{F}_j]}\Big] \\ &= \max_{1\leq j\leq k} \Big\{ r_{j+1} + \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \mathbb{P}[X_n \in \mathcal{F}_j] \Big\} \\ &\leq \max_{1\leq j\leq k} \Big\{ r_{j+1} + \sup_{u\in\mathcal{F}_j} [-I(u) + F(u) - F(u)] \Big\} \\ &\leq \max_{1\leq j\leq k} \Big\{ r_{j+1} + \sup_{u\in\mathcal{F}_j} \{F(u) - I(u)\} + \sup_{u\in\mathcal{F}_j} [-F(u)] \Big\}. \end{aligned}$$

Finalmente, segue da definição de $\mathcal{F}_j$ que $\sup_{u\in\mathcal{F}_j}[-F(u)] = -r_j$, donde concluímos que a última expressão acima é limitada por

$$\sup_{u\in M} \{F(u) - I(u)\} + \frac{2L}{k}. \tag{2.13}$$

Logo,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \log \mathbb{E}[e^{a_n F(X_n)}] \leq \sup_{u\in M} \{F(u) - I(u)\} + \frac{2L}{k}, \tag{2.14}$$

e sendo k arbitrário o resultado está concluído. □

2.3 Equivalência de Ensembles

Sejam $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{T}_n}$ e ν_α^n medida invariante em Ω definida em (1.2). Nesta seção estamos interessados em estudar o comportamento de

$$\nu_\alpha^n(\cdot \mid \sum_{x \in \mathbb{T}_n} \eta(x) = \beta n)$$

para $\beta \in (0,1)$ fixado quando $n \to +\infty$. Precisamente, estamos interessados no seguinte resultado:

Proposição 2.4. *Seja ν_α^n a medida produto Bernoulli de parâmetro α em $\{0,1\}^{\mathbb{T}_n}$. Então, para cada inteiro positivo r vale,*

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} \nu_\alpha^n \left(\eta(x_1) = k_1, ..., \eta(x_r) = k_r \Big| \sum_{x \in \mathbb{T}_n} \eta(x) = n\beta \right) \\ = \;& \nu_\beta^n(\eta(x_1) = k_1, ..., \eta(x_r) = k_r). \end{aligned}$$

Demonstração. Por simplicidade, provaremos esta proposição para o caso em que $r = 2$. O caso geral pode ser verificado de maneira análoga. Segue da definição de probabilidade condicional que

$$\begin{aligned} & \nu_\alpha^n \left(\eta(x_1) = k_1, \eta(x_2) = k_2 \Big| \sum_{x \in \mathbb{T}_n} \eta(x) = n\beta \right) \\ = \;& \frac{\nu_\alpha^n(\eta(x_1) = k_1, \eta(x_2) = k_2, \sum_{x\in\mathbb{T}_n} \eta(x) = n\beta)}{\nu_\alpha^n\left(\sum_{x \in \mathbb{T}_n} \eta(x) = n\beta \right)}. \end{aligned}$$

Note que a expressão acima é equivalente a

$$\frac{\nu_\alpha^n\left(\eta(x_1) = k_1, \eta(x_2) = k_2, \sum_{\substack{x\in\mathbb{T}_n \\ x \neq x_1, x_2}} \eta(x) = n\beta - (k_1 + k_2)\right)}{\nu_\alpha^n\left(\sum_{x \in \mathbb{T}_n} \eta(x) = n\beta \right)}.$$

Como as variáveis aleatórias $\eta(x)$ são independentes sob ν_α^n, a expressão anterior é equivalente a

$$\frac{\nu_\alpha^n(\eta(x_1)=k_1)\cdot\nu_\alpha^n(\eta(x_2)=k_2)\nu_\alpha^n\left(\sum_{\substack{x\in\mathbb{T}_n\\ x\neq x_1,x_2}}\eta(x)=n\beta-(k_1+k_2)\right)}{\nu_\alpha^n\left(\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\eta(x)=n\beta\right)}.$$

Esta razão é igual a

$$\frac{\alpha^{k_1}(1-\alpha)^{1-k_1}\alpha^{k_2}(1-\alpha)^{1-k_2}\binom{n-2}{\beta n-(k_1+k_2)}\alpha^{\beta n-(k_1+k_2)}(1-\alpha)^{n-2-\beta n+(k_1+k_2)}}{\binom{n}{\beta n}\alpha^{\beta n}(1-\alpha)^{n-\beta n}}$$

$$= \frac{\binom{n-2}{\beta n-(k_1+k_2)}}{\binom{n}{\beta n}}.$$

Pela definição de binomial, o termo anterior é igual a:

$$\frac{(n-2)!(\beta n)!(n-\beta n)!}{(\beta n-(k_1+k_2))!(n-2-\beta n+(k_1+k_2))!n!}. \tag{2.15}$$

Vamos agora utilizar a fórmula de Stirling para aproximar o quociente acima, a qual é dada por

$$n!\approx n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi},$$

onde $f\approx g$ significa que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}=1$. Por Stirling,

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &\approx \frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi}}{k^{k+\frac{1}{2}}e^{-k}\sqrt{2\pi}(n-k)^{n-k+\frac{1}{2}}e^{-(n-k)}\sqrt{2\pi}}\\ &\approx \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{k^{k+\frac{1}{2}}(n-k)^{n-k+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}.\end{aligned}$$

Logo, o quociente em (2.15) é assintoticamente igual a

$$\frac{(n-2)^{n-2+\frac{1}{2}}(\beta n)^{\beta n+\frac{1}{2}}(n-\beta n)^{n-\beta n+\frac{1}{2}}}{(\beta n-(k_1+k_2))^{\beta n-(k_1+k_2)+\frac{1}{2}}(n-2-\beta n+(k_1+k_2))^{n-2-\beta n+(k_1+k_2)+\frac{1}{2}}n^{n+\frac{1}{2}}}, \tag{2.16}$$

pondo n em evidência nas bases das potências da fração acima obtemos que esta é igual a

$$\left(\frac{n^{2n-2+\frac{3}{2}}}{n^{2n-2+\frac{3}{2}}}\right)\frac{(1-\frac{2}{n})^{n-2+\frac{1}{2}}\beta^{(\beta n+\frac{1}{2})}(1-\beta)^{n-\beta n+\frac{1}{2}}}{\left(\beta-\frac{(k_1+k_2)}{n}\right)^{\beta n-(k_1+k_2)+\frac{1}{2}}\left(1-\beta+\frac{-2+(k_1+k_2)}{n}\right)^{n-2-\beta n+(k_1+k_2)+\frac{1}{2}}},$$

pondo agora β e $(1-\beta)$ em evidência no denominador da fração anterior obtemos que esta é equivalente a

$$\frac{(1-\frac{2}{n})^{n-2+\frac{1}{2}}\beta^{k_1+k_2}(1-\beta)^{2-(k_1+k_2)}}{\left(1-\frac{(k_1+k_2)}{\beta n}\right)^{\beta n-(k_1+k_2)+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{-2+(k_1+k_2)}{n(1-\beta)}\right)^{n-2-\beta n+(k_1+k_2)+\frac{1}{2}}}.$$

Finalmente, fazendo $n\to+\infty$ obtemos que a expressão anterior se aproxima de

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-2}\beta^{k_1+k_2}(1-\beta)^{2-(k_1+k_2)}}{\left(e^{-\frac{k_1+k_2}{\beta}}\right)^{\beta}\left(e^{\frac{-2+(k_1+k_2)}{1-\beta}}\right)^{(1-\beta)}} &= \frac{e^{-2}}{e^{-2}}\beta^{k_1}(1-\beta)^{1-k_1}\beta^{k_2}(1-\beta)^{1-k_2}\\
&= \beta^{k_1}(1-\beta)^{1-k_1}\beta^{k_2}(1-\beta)^{1-k_2}\\
&= \nu_\beta^n(\eta(x_1)=k_1,\eta(x_2)=k_2).
\end{aligned}$$

□

Enunciaremos agora uma versão mais geral da Proposição 2.4 provada acima. Este resultado enquadra-se também no nosso contexto pois é válido para o *processo de exclusão generalizado*. Para ver a prova deste resultado, o leitor pode consultar [KL] página 355.

Lema 2.1. *Seja ψ uma função local tal que*

$$\mathbb{E}_{\nu_\alpha}[\psi^2]<\infty.$$

Então, existe uma constante $C(\psi)$ *tal que*

$$\left|\mathbb{E}_{\nu_\alpha}[\psi|H_n^k] - \mathbb{E}_{\nu_{k/n}}[\psi]\right| < \frac{C(\psi)}{n}.$$

2.4 Estimativa de 1-Bloco

O resultado a ser provado nesta seção, conhecido como *estimativa de 1-bloco*, nos permite substituir a média empírica de uma função local ψ por $\tilde{\psi}(\eta^l(\cdot))$, sobre caixas de comprimento l. Para provar tal resultado vamos começar definindo a chamada *forma de Dirichlet*.

Definição 2.1. *Seja* $\{X_t, t \geq 0\}$ *um processo de Markov num espaço enumerável* E *com medida invariante* π*, semigrupo associado* $(P_t)_{t\geq 0}$ *e gerador* $\mathcal{L}$*. Para toda* $f \in L^2(\pi)$*, a forma de Dirichlet* $\mathcal{D}(f,\pi)$ *de* f *é definida por*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(f,\pi) &:= -\langle f, \mathcal{L}f\rangle_\pi \\ &= -\sum_{x\in E} f(x)\,\mathcal{L}f(x)\pi(x). \end{aligned}$$

Note que a *forma de Dirichlet* está bem definida pois $\mathcal{L}$ é um operador limitado em $L^2(\pi)$. Vamos agora explicitar a forma de Dirichlet para o *Processo de Exclusão Simples e Simétrico*. Sejam ν_α^n a medida produto Bernoulli no espaço de estados $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{T}_n}$ e $\mathcal{L}$ o operador do *Processo de Exclusão Simples e Simétrico* em $L^2(\nu_\alpha^n)$. Então

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D}(f,\nu_\alpha^n) &= -2\langle f, \mathcal{L}f\rangle_{\nu_\alpha^n} \\ &= -\langle f, \mathcal{L}f\rangle_{\nu_\alpha^n} - \langle \mathcal{L}^* f, f\rangle_{\nu_\alpha^n}, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{L}^*$ é o operador adjunto de $\mathcal{L}$ em $L^2(\nu_\alpha^n)$. Vejamos agora como simplificar a expressão acima. Note que

$$\begin{aligned}\langle f, \mathcal{L} f\rangle_{\nu_\alpha^n} &= \int f(\eta)\mathcal{L} f(\eta) d\nu_\alpha^n \\ &= \int f(\eta) \sum_{x\in\mathbb{T}_n} [f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta)] d\nu_\alpha^n \\ &= \int \sum_{x\in\mathbb{T}_n} [f(\eta) f(\eta^{x,x+1}) - f^2(\eta)] d\nu_\alpha^n,\end{aligned}$$

e também

$$\langle \mathcal{L}^* f, f\rangle_{\nu_\alpha^n} = \int \sum_{x\in\mathbb{T}_n} [f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta)] f(\eta) d\nu_\alpha^n.$$

Fazendo a mudança de variável $\eta \to \eta^{x,x+1}$ podemos expressar $\langle f, \mathcal{L} f\rangle_{\nu_\alpha^n}$ como

$$\int \sum_{x\in\mathbb{T}_n} [f(\eta^{x,x+1}) f(\eta) - f^2(\eta^{x,x+1})] d\nu_\alpha^n.$$

Logo,

$$\begin{aligned}-2\mathfrak{D}(f, \nu_\alpha^n) &= \langle f, \mathcal{L} f\rangle_{\nu_\alpha^n} + \langle \mathcal{L}^* f, f\rangle_{\nu_\alpha^n} \\ &= \int \sum_{x\in\mathbb{T}_n} [f(\eta) f(\eta^{x,x+1}) - f^2(\eta)] d\nu_\alpha^n \\ &+ \int \sum_{x\in\mathbb{T}_n} [f(\eta^{x,x+1}) f(\eta) - f^2(\eta^{x,x+1})] d\nu_\alpha^n.\end{aligned}$$

Como

$$[f(\eta^{x,x+1}) f(\eta) - f^2(\eta^{x,x+1}) + f(\eta^{x,x+1}) f(\eta) - f^2(\eta)] = -[f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta)]^2,$$

obtemos

$$\mathfrak{D}(f, \nu_\alpha^n) = \frac{1}{2} \int \sum_{x\in\mathbb{T}_n} [f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta)]^2 d\nu_\alpha^n.$$

Teorema 2.3 (1-Bloco)**.**

$$\limsup_{l\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \sup_{\mathfrak{D}(f,\nu_\alpha^n)\le Cn^{-1}} \int \frac{1}{n} \sum_{x\in\mathbb{T}_n} \tau_x V_{l,\psi}(\eta) f(\eta) \nu_\alpha^n(d\eta) \le 0,$$

onde

$$V_{l,\psi}(\eta) := \Big|\frac{1}{2l+1}\sum_{|y|\le l}\tau_y\psi(\eta) - \tilde{\psi}(\eta^l(0))\Big|,$$

$$\tilde{\psi}(\alpha) := \mathbb{E}_{\nu_\alpha^n}[\psi(\eta)] \tag{2.17}$$

e

$$\eta^l(0) := \frac{1}{2l+1}\sum_{|y|\le l}\eta(y). \tag{2.18}$$

Demonstração. Desde que ν_α^n é uma medida invariante por translação, podemos escrever a integral acima como

$$\int V_{l,\psi}(\eta)\bar{f}(\eta)\nu_\alpha^n(d\eta), \tag{2.19}$$

onde

$$\bar{f}(\eta) := \frac{1}{n}\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\tau_x f(\eta) \tag{2.20}$$

é a média nas translações espaciais de f. Com efeito, como

$$\begin{aligned}\int V_{l,\psi}(\eta)\bar{f}(\eta)\nu_\alpha^n(d\eta) &= \int V_{l,\psi}(\eta)\frac{1}{n}\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\tau_x f(\eta)\nu_\alpha^n(d\eta)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\int \tau_x V_{l,\psi}(\eta)f(\eta)\nu_\alpha^n(d\eta),\end{aligned}$$

fazendo a mudança de variável $\eta \to \tau_{-x}\eta$ na última integral acima obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\int \tau_x V_{l,\psi}(\eta)f(\eta)\nu_\alpha^n(d\eta) &= \frac{1}{n}\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\int V_{l,\psi}(\eta)f(\tau_{-x}\eta)\nu_\alpha^n(d\tau_{-x}\eta)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\int V_{l,\psi}(\eta)f(\tau_{-x}\eta)\nu_\alpha^n(d\eta)\\ &= \int V_{l,\psi}(\eta)\frac{1}{n}\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\tau_{-x}f(\eta)\nu_\alpha^n(d\eta),\end{aligned}$$

e como $\bar{f}(\eta) := \frac{1}{n}\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\tau_{-x}f(\eta)$ obtemos a expressão desejada.

No que segue, vamos estabelecer algumas notações necessárias para dar continuidade a demonstração do resultado. Denote por $\mathcal{J}_l = \{-l, ..., l\}$ o intervalo discreto de comprimento $2l+1$, η_l as configurações em $\{0,1\}^{\mathcal{J}_l}$, ν_α^l a medida ν_α restrita a $\{0,1\}^{\mathcal{J}_l}$, e por fim, para uma densidade f denote por $f_l = \mathbb{E}[f|\mathcal{F}_l]$ a esperança condicional de f com respeito a filtração $\mathcal{F}_l = \sigma\{\eta_l\}$. Como a esperança da esperança condicional de uma variável aleatória é a própria esperança, podemos observar que

$$\int V_{l,\psi}(\eta)\bar{f}(\eta)\nu_\alpha^n(d\eta) = \int V_{l,\psi}(\eta)\bar{f}_l(\eta)\nu_\alpha^l(d\eta_l).$$

De fato,

$$\begin{aligned}\int V_{l,\psi}(\eta)\bar{f}_l(\eta)\nu_\alpha^l(d\eta) &= \int V_{l,\psi}(\eta)\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\tau_x f_l(\eta)\nu_\alpha^l(d\eta)\\ &= \int V_{l,\psi}(\eta)\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\tau_x \mathbb{E}[f|\mathcal{F}_l](\eta)\nu_\alpha^l(d\eta).\end{aligned}$$

Note que $V_{l,\psi}(\eta)$ é mensurável a $\mathcal{F}_l$, pois só depende de $\eta(x)$ para $x \in \mathcal{J}_l$. Logo, podemos expressar a última integral acima como

$$\begin{aligned}\int \mathbb{E}[V_{l,\psi}(\eta)\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\tau_x f|\mathcal{F}_l](\eta)\nu_\alpha^l(d\eta) &= \int \mathbb{E}[V_{l,\psi}(\eta)\bar{f}|\mathcal{F}_l](\eta)\nu_\alpha^l(d\eta)\\ &= \int V_{l,\psi}(\eta)\bar{f}\nu_\alpha^n(d\eta).\end{aligned}$$

Neste momento vamos tentar obter alguma informação da *forma de Dirichlet* de $\bar{f}_l$ através da *forma de Dirichlet* de $\bar{f}$. Para tanto, será necessário estabelecer mais algumas notações. Para $x, y \in \mathbb{T}_n$ defina

$$\mathcal{L}^{x,y} := (f(\eta^{x,y}) - f(\eta))$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{x,y}(f,\nu_\alpha^n) : &= \int -\sqrt{f(\eta)}\mathcal{L}^{x,y}\sqrt{f(\eta)}\nu_\alpha^n(d\nu)\\ &= \int [\sqrt{f(\eta^{x,y})} - \sqrt{f(\eta)}]^2\nu_\alpha^n(d\nu).\end{aligned}$$

Com as notações acima podemos escrever

$$\mathcal{D}(f,\nu_\alpha^n) = \sum_{|x-y|=1} \mathcal{D}^{x,y}(f,\nu_\alpha^n).$$

Como a *forma de Dirichlet* é convexa e invariante por translação, obtemos

$$\mathcal{D}(\bar{f},\nu_\alpha^n) = \mathcal{D}(\frac{1}{n}\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\tau_x f,\nu_\alpha^n) \leq \frac{1}{n}\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\mathcal{D}(\tau_x f,\nu_\alpha^n) = \mathcal{D}(f,\nu_\alpha^n).$$

Vamos agora tentar estimar a *forma de Dirichlet* da esperança condicional de uma densidade f com respeito a ν_α^l. Para tanto, defina

$$\mathcal{D}^l(f_l,\nu_\alpha^l) = \sum_{\substack{|x-y|=1\\ x,y\in\mathcal{J}_l}} \mathcal{D}^{x,y,l}(f_l,\nu_\alpha^l)$$

onde

$$\mathcal{D}^{x,y,l}(f_l,\nu_\alpha^l) = \int\left(\sqrt{f_l(\eta_l^{x,y})} - \sqrt{f_l(\eta_l)}\right)^2 \nu_\alpha^l(d\eta_l).$$

Notemos agora que

$$\mathcal{D}^{x,y,l}(\bar{f}_l,\nu_\alpha^l) \leq \mathcal{D}^{x,y}(\bar{f}_l,\nu_\alpha^n). \tag{2.21}$$

Com efeito, defina

$$F(f_l) := \left(\sqrt{\bar{f}_l(\eta_l^{x,y})} - \sqrt{\bar{f}_l(\eta_l)}\right)^2.$$

Como F é convexa, segue da desigualdade de Jensen que

$$F\Big(\mathbb{E}[f|\mathcal{F}_l]\Big) \leq \mathbb{E}[F(f)|\mathcal{F}_l],$$

donde a desigualdade desejada é obtida integrando a expressão acima e usando as propriedades da esperança condicional. Através da desigualdade (2.21) podemos concluir que

$$\mathcal{D}^l(\bar{f}_l,\nu_\alpha^l) \leq \sum_{|x-y|=1}\mathcal{D}^{x,y}(\bar{f},\nu_\alpha^n).$$

Obtemos da invariância por translação de ν_α^n que

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^l(\bar{f}_l,\nu_\alpha^l) &\leq 2l\mathcal{D}_s^{0,1}(\bar{f},\nu_\alpha^n) \leq \frac{2l}{n}\mathcal{D}(f,\nu_\alpha^n)\\ &\leq \frac{Cl}{n^2}.\end{aligned}$$

Portanto, o nosso trabalho na prova da estimativa de 1-Bloco se reduz em mostrar que

$$\limsup_{l\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\sup_{\mathcal{D}_s^l(f,\nu_\alpha^l)\leq\frac{Cl}{n^2}}\int V_{l,\psi}(\eta_l)f(\eta_l)\nu_\alpha^l(d\eta_l)\leq 0.$$

Vamos mostrar agora que, para provar o resultado acima, basta considerar o supremo sobre as densidades f que anulam a *forma de Dirichlet*, isto é, vale a seguinte afirmação:

Afirmação 2.1.

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\sup_{\mathcal{D}^l(f,\nu_\alpha^l)\leq\frac{Cl}{n^2}}\int V_{l,\psi}(\eta_l)f(\eta_l)\nu_\alpha^l(d\eta_l)\leq\sup_{\mathcal{D}^l(f,\nu_\alpha^l)=0}\int V_{l,\psi}(\eta_l)f(\eta_l)\nu_\alpha^l(d\eta_l).$$

Demonstração. Denote $A(f):=\int V_{l,\psi}(\eta_l)f(\eta_l)\nu_\alpha^l(d\eta_l)$. Para cada n, seja $F_n:=\{f:\mathcal{D}^l(f,\nu_\alpha^l)=\frac{Cl}{n^2}\}$ e tome $f_n\in F_n$ tal que $A(f_n)\geq\sup_{f\in F_n}A(f)-\frac{1}{n}$. Observe que

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}A(f_n)=\overline{\lim}_{n\to\infty}\sup_{f\in F_n}A(f).$$

Logo, basta provar que

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}A(f_n)\leq\sup_{\mathcal{D}^l(f,\nu_\alpha^l)=0}A(f).$$

Seja $n_k\to\infty$ tal que $\overline{\lim}_{k\to\infty}A(f_{n_k})=\overline{\lim}_{n\to\infty}\sup_{f\in F_n}A(f)$. Do mesmo modo, basta provar que

$$\overline{\lim}_{k\to\infty}A(f_{n_k})\leq\sup_{\mathcal{D}^l(f,\nu_\alpha^l)=0}A(f).$$

Defina $\mu(B):=\int_B f_{n_k}\nu_\alpha^l(d\eta_l)$, e obteremos, $A(f_{n_k})=\int V_{l,\psi}d\mu_{n,k}$. Note que como $\{0,1\}^{\mathfrak{J}_l}$ é finito, uma função $f:\{0,1\}^{\mathfrak{J}_l}\to\mathbb{R}$ pode ser identificada com um vetor de $\mathbb{R}^{2l+1}$. Deste ponto de vista, por Bolzano-Weierstrass, existe $f_{n_{k_j}}\to g$ pontualmente. Basta então provar que

$$\overline{\lim}_{j\to\infty}A(f_{n_{k_j}})\leq\sup_{\mathcal{D}^l(f,\nu_\alpha^l)=0}A(f).$$

Como

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^l(g,\nu_\alpha^l) &= \mathcal{D}^l(\lim f_{n_{k_j}},\nu_\alpha^l)\\ &\leq \lim\mathcal{D}^l(f_{n_{k_j}},\nu_\alpha^l)\\ &\leq \lim\frac{Cl}{n_{k_j}}=0,\end{aligned}$$

isto conclui a prova da afirmação.

□

Continuando a prova do Teorema 2.3, vamos caracterizar as densidades em pedaços do sistema através da informação conhecida da *forma de Dirichlet* de densidades f. Lembremos que f está definida em $\{0,1\}^{\mathfrak{J}_l}$ e este conjunto pode ser discretizado em seus pedaços invariantes, a saber os hiperplanos H_l^k, definidos por

$$H_l^k:=\Big\{\eta\in\{0,1\}^{\mathbb{T}_n}:\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\eta(x)=k\Big\},$$

pois a dinâmica preserva a quantidade total de partículas. Notemos que se f tem *forma de Dirichlet* nula então f é constante em cada hiperplano H_l^k. Realmente, como

$$\mathcal{D}^l(f,\nu_\alpha^l)=\frac{1}{2}\int\sum_{x\in\mathfrak{J}_l}(f(\eta_l^{x,x+1})-f(\eta_l))^2\nu_\alpha^l(d\eta_l),$$

se $\mathcal{D}^l(f,\nu_\alpha^l)=0$, então $f(\eta_l^{x,x+1})=f(\eta_l)$, e como $\eta^{x,x+1},\eta$ pertecem ao mesmo hiperplano para todo $x\in\mathfrak{J}_l$ concluímos que $f|_{H_l^k}$ é constante para todo $0\leq k\leq 2l+1$. Para cada k defina $f_k:=f|_{H_l^k}$ e observe que $\{0,1\}^{\mathfrak{J}_l}=\bigcup_{k=0}^{2l+1}H_l^k$.

Então

$$f = \sum_{k=0}^{2l+1} f_k.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int V_{l,\psi}(\eta_l) f(\eta_l) \nu_\alpha^l(d\eta_l) &= \int_{\bigcup_{k=0}^{2l+1} H_l^k} V_{l,\psi}(\eta_l) f(\eta_l) \nu_\alpha^l(d\eta_l) \\
&= \sum_{k=0}^{2l+1} \int V_{l,\psi}(\eta_l) f_k(\eta_l) \nu_\alpha^l(d\eta_l) \\
&= \sum_{k=0}^{2l+1} f_k \int V_{l,\psi}(\eta_l) \nu_\alpha^l(d\eta_l) \\
&= \sum_{k=0}^{2l+1} a_k \int V_{l,\psi}(\eta_l) \nu_\alpha^{l,k}(d\eta_l),
\end{aligned}$$

onde $a_k = f_k \nu_\alpha^l(H_l^k)$ e $\nu_\alpha^{l,k}(\cdot) := \frac{1}{\nu_\alpha^l(H_k^l)} \nu_\alpha^l(\cdot)$.

Agora observe que

$$\sum_{k=0}^{2l+1} a_k = \int f \nu_\alpha^l(d\eta) = 1,$$

pois f é densidade. Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2l+1} a_k \int V_{l,\psi}(\eta_l) \nu_\alpha^{l,k}(d\eta_l) &\leq \sum_{k=0}^{2l+1} a_k \Big(\sup \int V_{l,\psi}(\eta_l) \nu_\alpha^{l,k}(d\eta_l) \Big) \\
&= \Big(\sup_k \int V_{l,\psi}(\eta_l) \nu_\alpha^{l,k}(d\eta_l) \Big) \sum_{k=0}^{2l+1} a_k \\
&= \sup_k \int V_{l,\psi}(\eta_l) \nu_\alpha^{l,k}(d\eta_l).
\end{aligned}$$

Portanto, para terminar a prova da estimativa em 1-Bloco, basta provar que

$$\limsup_{l \to +\infty} \sup_{0 \leq k \leq 2l+1} \int V_{l,\psi}(\eta_l) \nu_\alpha^{l,k}(d\eta_l) = 0. \tag{2.22}$$

Vamos agora manipular a integral na expressão acima com o intuito de utilizar a *Equivalência de Ensembles*.

Segue da definição de $V_{l,\psi}(\eta_l)$ que a integral em (2.22) pode ser escrita como:

$$\int \left| \frac{1}{2l+1} \sum_{|y| \leq l} \tau_y \psi(\eta) - \tilde{\psi}(\eta_l^l(0)) \right| \nu_\alpha^{l,i}(d\eta_l),$$

onde $\tilde{\psi}(\eta_l(0))$ e $\eta_l(0)$ foram definidas em (2.17) e (2.18) no início desta seção. Como no hiperplano H_l^i há exatamente i partículas, então

$$\begin{aligned} \eta_l^l(0) &= \frac{1}{2l+1} \sum_{|y| \leq l} \eta_l(y) \\ &= \frac{i}{2l+1} \end{aligned}$$

em H_l^i. Logo,

$$\tilde{\psi}(\eta_l^l(0)) = \mathbb{E}_{\nu_{\frac{i}{2l+1}}}[\psi(\eta_l)].$$

Portanto, a integral em (2.22) é igual a

$$\int \left| \frac{1}{2l+1} \sum_{|y| \leq l} \tau_y \psi(\eta_l) - \mathbb{E}_{\nu_{\frac{i}{2l+1}}}[\psi(\eta_l)] \right| \nu_\alpha^{l,i}(d\eta_l). \tag{2.23}$$

Para k fixado, decomponha o conjunto $\mathcal{J}_l = \{-l, ..., l\}$ em intervalos de comprimento $2k+1$. Considere o conjunto $A = \{(2k+1)x;\ x \in \mathbb{Z}\} \cap \mathcal{J}_{l-k}$ e enumere seus elementos $x_1, x_2, ..., x_q$ de modo que $|x_i| \leq |x_j|$ para $i \leq j$. Defina $B_i := x_i + \mathcal{J}_k$ para $1 \leq i \leq q$ e note que $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$, além disso $\bigcup_{i=1}^q B_i \subset \mathcal{J}_l$. Seja ainda $B_0 := \mathcal{J}_l - \bigcup_{i=1}^q B_i$ e observe que $|B_0| = 2k$.

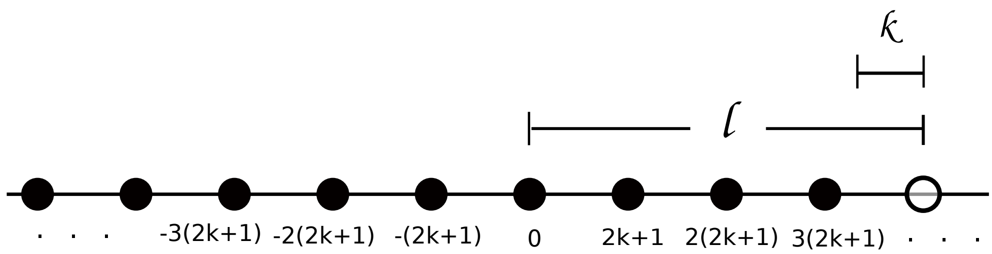

Figura 2.1: Conjunto A

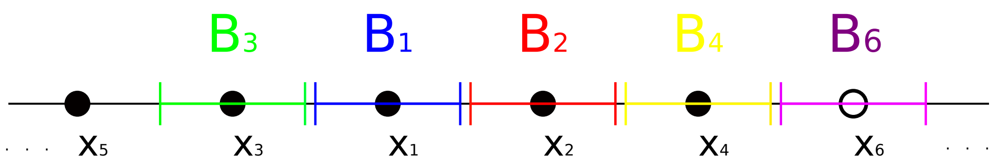

Figura 2.2: B_i

Voltando a (2.23) temos que

$$\int \Big| \frac{1}{2l+1} \sum_{|y| \le l} \tau_y \psi(\eta_l) - \mathbb{E}_{\nu_{\frac{i}{2l+1}}} [\psi(\eta_l)] \Big| \nu_\alpha^{l,i}(d\eta_l)$$

$$= \int \Big| \frac{1}{2l+1} \sum_{|y| \le l} \Big(\tau_y \psi(\eta_l) - \mathbb{E}_{\nu_{\frac{i}{2l+1}}} [\psi(\eta_l)] \Big) \Big| \nu_\alpha^{l,i}(d\eta_l),$$

que por sua vez é igual a

$$\frac{1}{2l+1} \int \Big| \sum_{|y| \le l} \Big(\tau_y \psi(\eta_l) - \mathbb{E}_{\nu_{\frac{i}{2l+1}}} [\psi(\eta_l)] \Big) \Big| \nu_\alpha^{l,i}(d\eta_l).$$

Como $\bigcup_{i=0}^{q} B_i = \mathcal{J}_l$, podemos escrever a integral acima como

$$\frac{1}{2l+1} \int \Big| \sum_{i=0}^{q} \sum_{y \in B_i} \Big(\tau_y \psi(\eta_l) - \mathbb{E}_{\nu_{\frac{i}{2l+1}}} [\psi(\eta_l)] \Big) \Big| \nu_\alpha^{l,i}(d\eta_l).$$

Temos agora que integral acima é limitada por

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{q} \frac{|B_i|}{2l+1} \int \Big|\frac{1}{|B_i|} \sum_{y \in B_i} \Big(\tau_y \psi(\eta_l) - \mathbb{E}_{\nu_{\frac{i}{2l+1}}}[\psi(\eta_l)]\Big)\Big| \nu_\alpha^{l,i}(d\eta_l) \\ = &\sum_{i=1}^{q} \frac{B_i}{2l+1} \int \Big|\frac{1}{|B_i|} \sum_{y \in |B_i|} \Big(\tau_y \psi(\eta_l) - \mathbb{E}_{\nu_{\frac{i}{2l+1}}}[\psi(\eta_l)]\Big)\Big| \nu_\alpha^{l,i}(d\eta_l) + \frac{kC}{l}. \end{aligned}$$

Por simetria, η_l restrita a B_i tem é a mesma distribuição que η_l restrita a B_j (embora não sejam independentes). Logo, obtemos que a integral acima é igual a

$$\begin{aligned} &\frac{q|B_i|}{2l+1} \int \Big|\frac{1}{|B_i|} \sum_{y \in |B_i|} \Big(\tau_y \psi(\eta_l) - \mathbb{E}_{\nu_{\frac{i}{2l+1}}}[\psi(\eta_l)]\Big)\Big| \nu_\alpha^{l,i}(d\eta_l) + \frac{kC}{l} \\ = &\int \Big|\frac{1}{2k+1} \sum_{y \in |B_i|} \Big(\tau_y \psi(\eta_l) - \mathbb{E}_{\nu_{\frac{i}{2l+1}}}[\psi(\eta_l)]\Big)\Big| \nu_\alpha^{l,i}(d\eta_l) + \frac{kC}{l}. \end{aligned}$$

Aplicando a *Equivalência de Ensembles* quando $l \to \infty$ e $i/(2l+1) \to \alpha$, a integral acima converge para

$$\int \Big|\frac{1}{2k+1} \sum_{|y| \le k} \Big(\tau_y \psi(\eta) - \mathbb{E}_{\nu_\alpha}[\psi(\eta)]\Big)\Big| \nu_\alpha^n(d\eta).$$

Finalmente, podemos concluir a prova da *estimativa de 1-Bloco* aplicando a Lei dos Grandes Números em $L^1(\nu_\alpha)$ para variáveis aleatórias limitadas independentes e identicamente distribuídas (ver [Durrett, 263]), obtendo assim que a integral acima converge a zero quando $k \to \infty$. Isso conclui a prova do Teorema 2.3. □

Para terminar esta seção, vamos enunciar um resultado que permite substituir nas expressões (3.10) e (3.11) as funções cilindros $j(\eta)$ e $h(\eta)$ por suas médias $\tilde{j}(\eta^l(x))$ e $\tilde{h}(\eta^l(x))$ em caixas de comprimento $2l+1$.

Para cada função local f denote por $\tilde{f}(\alpha) = \mathbb{E}_{\nu_\alpha^n}[f(\eta)]$ a média de f com respeito a medida invariante ν_α^n. Denote por $\mathbb{E}_{\mu^n}$ a esperança com respeito a medida de probabilidade $\mathbb{P}_{\mu^n}$, definida no espaço das trajetórias

$D([0,T],\{0,1\}^{\mathbb{T}_n})$, induzido pelo processo de Markov com gerador $\mathcal{L}$ acelerado por n^2 começando de μ^n, e para cada inteiro positivo l, denote por $\eta^l(x)$ a densidade empírica de partículas em um cubo de comprimento l centrado em x:

$$\eta^l(x) = \frac{1}{2l+1} \sum_{|y-x|\leq l} \eta(y).$$

Por fim, denote por $F(t,\cdot)$ a função $\frac{1}{\tilde{\rho}(t,\cdot)}\Delta_\rho(\tilde{\rho}(t,\cdot))$ de classe $C^\epsilon(\mathbb{T})$.

Teorema 2.4. *Para todo $t > 0$,*

$$\lim_{l\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_{\mu^n}\left[\int_0^t \frac{1}{n} \sum_{x\in\mathbb{T}_n} F(u, \tfrac{x}{n})[g(\eta_u(x)) - \tilde{g}(\eta_u^l(x))]du\right] = 0.$$

Capítulo 3

O Método da Entropia Relativa

Provaremos algumas afirmações que serão introduzidas ao longo da demonstração do Teorema 1.1. Suas demonstrações são simples e não serão requeridas adiante. Caso o leitor deseje, pode aceitá-las para se concentrar na visão geral do Método da Entropia Relativa.

Observação 3.1. *Considere um sistema de patículas com gerador Ω (adjunto Ω^* e semigrupo $S^n(t)$) evoluindo na escala $\theta(n)$ iniciando na medida de probabilidade μ^n com medida invariante π_σ. Se $f^n(t) = \frac{d\mu_t^n}{d\pi_\sigma}$, onde $\mu_t^n = \mu^n S^n(t)$, então $f^n(t)$ é solução da seguinte equação de Kolmogorov*

$$\begin{cases} \partial_t f^n(t) = \theta(n)\Omega^* f^n(t) \\ f^n(0) = \frac{d\mu^n}{d\pi_\sigma}. \end{cases}$$

Demonstração. Seja g uma função local, isto é, uma função $g : E \to \mathbb{R}$ que só depende de uma quantidade finita de sítios. Como $f^n(t) = \frac{d\mu_t^n}{d\pi_\sigma}$, temos que

$$\begin{aligned} \int g(\eta) f^n(t) d\pi_\sigma &= \int g(\eta) \frac{d\mu_t^n}{d\pi_\sigma} d\pi_\sigma \\ &= \int g(\eta) d\mu_t^n. \end{aligned}$$

Segue então de $\mu_t^n = \mu^n S^n(t)$ que

$$\begin{aligned}\int g(\eta)d\mu_t^n &= \int S^n(t)g(\eta)d\mu^n \\ &= \int S^n(t)g(\eta)\frac{d\mu^n}{d\pi_\sigma}d\pi_\sigma.\end{aligned}$$

Como $f^n(0) = \frac{d\mu^n}{d\pi_\sigma}$ obtemos

$$\begin{aligned}\int S^n(t)g(\eta)\frac{d\mu^n}{d\pi_\sigma}d\pi_\sigma &= \int S^n(t)g(\eta)f^n(0)d\pi_\sigma \\ &= \int g(\eta)(S^n(t))^* f^n(0)d\pi_\sigma.\end{aligned}$$

Das equações acima concluímos que $\int g(\eta)f^n(t)d\pi_\sigma - \int g(\eta)(S^n(t))^* f^n(0)d\pi_\sigma$ é igual a

$$\int g(\eta)[f^n(t) - (S^n(t))^* f^n(0)]d\pi_\sigma = 0,$$

para toda g local. Logo, $f^n(t) = (S^n(t))^* f^n(0)$. Portanto,

$$\begin{aligned}\partial_t f^n(t) &= \partial_t (S^n(t))^* f^n(0) \\ &= \theta(n)\Omega^*(S^n(t))^* f^n(0) \\ &= \theta(n)\Omega^* f^n(t).\end{aligned}$$

□

Observação 3.2. *Seja $f : \{0,1\}^{\mathbb{T}_n} \to \mathbb{R}$ uma função local, e seja $\mathcal{L}$ o gerador do Processo de Exclusão Simples e Simétrico, então*

$$f(\eta)\mathcal{L}\log(f(\eta)) \leq \mathcal{L}f(\eta).$$

Demonstração. De fato, como consequência de $\log x \leq x - 1$ temos que

$$\log\Big(\frac{b}{a}\Big)^a \leq b - a.$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(\eta)\,\mathcal{L}\log(f(\eta)) &= f(\eta)\left[\sum_{x\in\mathbb{T}_n}[\log(f(\eta^{x,y}))-\log(f(\eta))]\right] \\ &= \sum_{x\in\mathbb{T}_n}\left[\log\left(\frac{f(\eta^{x,y})}{f(\eta)}\right)\right]^{f(\eta)} \\ &\le \sum_{x\in\mathbb{T}_n}[f(\eta^{x,y})-f(\eta)] = \mathcal{L}\,f(\eta). \end{aligned}$$

□

Observação 3.3. *Sejam $\nu^n_{\rho(t,\cdot)}$ e ν^n_α medidas produto em E. Se $\psi^n_t = \frac{d\nu^n_{\rho(t,\cdot)}}{d\nu^n_\alpha}$, então*

$$\psi^n_t(\eta) = \frac{1}{C^n_t}\exp\left(\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\eta(x)\lambda(t,x/n)\right),$$

onde $\lambda(t,y) = \log\frac{\rho(t,y)(1-\alpha)}{\alpha(1-\rho(t,y))}$ e C^n_t é uma constante de normalização.

Demonstração. De fato,

$$\psi^n_t(\eta) = \frac{d\nu^n_{\rho(t,\cdot)}}{d\nu^n_\alpha}(\eta) = \frac{\nu^n_{\rho(t,\cdot)}(\eta)}{\nu^n_\alpha(\eta)}.$$

Calculando cada termo do quociente acima temos que

$$\nu^n_{\rho(t,\cdot)}(\eta) \;=\; \prod_{x\in\mathbb{T}_n}\rho(t,x/n)^{\eta(x)}(1-\rho(t,x/n)^{1-\eta(x)}$$

e também que

$$\nu^n_\alpha(\eta) \;=\; \prod_{x\in\mathbb{T}_n}\alpha^{\eta(x)}(1-\alpha)^{1-\eta(x)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\psi_t^n(\eta) &= \frac{\prod_{x\in\mathbb{T}_n}\rho(t,x/n)^{\eta(x)}(1-\rho(t,x/n))^{1-\eta(x)}}{\prod_{x\in\mathbb{T}_n}\alpha^{\eta(x)}(1-\alpha)^{1-\eta(x)}}\\ &= \prod_{x\in\mathbb{T}_n}\Big[\frac{\rho(t,x/n)}{\alpha}\Big]^{\eta(x)}\Big[\frac{1-\rho(t,x/n)}{1-\alpha}\Big]^{1-\eta(x)}.\end{aligned}$$

De modo equivalente, obtemos

$$\begin{aligned}\psi_t^n(\eta) &= \exp\Big(\log\prod_{x\in\mathbb{T}_n}\Big[\frac{\rho(t,x/n)}{\alpha}\Big]^{\eta(x)}\Big[\frac{1-\rho(t,x/n)}{1-\alpha}\Big]^{1-\eta(x)}\Big)\\ &= \exp\Big(\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\eta(x)\log\frac{\rho(t,x/n)}{\alpha}+(1-\eta(x))\log\frac{1-\rho(t,x/n)}{1-\alpha}\Big)\\ &= \exp\Big(\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\eta(x)\log\frac{\rho(t,x/n)(1-\alpha)}{\alpha(1-\rho(t,x/n))}\Big)\exp\Big(\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\log\frac{1-\rho(t,x/n)}{1-\alpha}\Big).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\psi_t^n(\eta)=\frac{1}{C_t^n}\exp\Big(\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\eta(x)\lambda(t,x/n)\Big),$$

onde $C_t^n=\Big(\prod_{x\in\mathbb{T}_n}\frac{1-\rho(t,x/n)}{1-\alpha}\Big)^{-1}$. □

O próximo lema é válido em um sistema de partículas em geral, é válido para uma escala qualquer, e é em certo sentido a alma do Método da Entropia Relativa. Para que a leitura não se torne enfadonha, denote por $H_n(t)=H(\mu_t^n|\nu_{\rho(t,\cdot)}^n)$ a *entropia relativa de* μ_t^n com respeito a $\nu_{\rho(t,\cdot)}^n$ para $n\in\mathbb{N}$ e $t>0$.

Lema 3.1. *Seja Ω o gerador de um sistema de partículas interagindo no tempo de escala $t\theta(n)$. Suponha que a medida produto Bernoulli ν_α seja invariante para este processo e seja $S^n(t)$ o semigrupo associado a Ω. Então, para todo $t\geq 0$*

$$\partial_t H_n(t)\leq\int\frac{1}{\psi_t^n}\Big[n^2\Omega^*\psi_t-\partial_t\psi_t^n\Big]f^n(t)\nu_\alpha^n(d\eta), \tag{3.1}$$

onde Ω^* é o operador adjunto de Ω em $L^2(\nu_\alpha^n)$.

Demonstração. Segue do Teorema 2.1 que

$$H_n(t) = \int f^n(t)\log\Big(\frac{f^n(t)}{\psi_t^n}\Big)\nu_\alpha^n(d\eta).$$

Usando derivação sob o sinal da integral, obtemos

$$\begin{aligned}\partial_t H_n(t) &= \partial_t\Big[\int f^n(t)\log\Big(\frac{f^n(t)}{\psi_t^n}\Big)\nu_\alpha^n(d\eta)\Big]\\ &= \int \partial_t\Big[f^n(t)\log\Big(\frac{f^n(t)}{\psi_t^n}\Big)\Big]\nu_\alpha^n(d\eta).\end{aligned}$$

Aplicando a regra do produto para derivadas encontramos

$$\partial_t\left[f^n(t)\log\left(\frac{f^n(t)}{\psi_t^n}\right)\right] = \partial_t f^n(t)\left[\log\left(\frac{f^n(t)}{\psi_t^n}\right)\right] + f^n(t)\left[\partial_t\log\left(\frac{f^n(t)}{\psi_t^n}\right)\right].$$

Usando então a regra da cadeia e a regra do quociente para derivadas, segue que

$$\begin{aligned}\partial_t\log\Big(\frac{f^n(t)}{\psi_t^n}\Big) &= \frac{1}{\frac{f^n(t)}{\psi_t^n}}\partial_t\Big(\frac{f^n(t)}{\psi_t^n}\Big)\\ &= \frac{\psi_t^n}{f^n(t)}\Big[\frac{\partial_t(f^n(t))\psi_t^n - f^n(t)\partial_t(\psi_t^n)}{(\psi_t^n)^2}\Big]\\ &= \frac{\partial_t(f^n(t))\psi_t^n - f^n(t)\partial_t(\psi_t^n)}{\psi_t^n f^n(t)}.\end{aligned}$$

Das expressões acima, vemos que

$$\partial_t H_n(t) = \int \partial_t f^n(t)\Big[\log\Big(\frac{f^n(t)}{\psi_t^n}\Big)\Big] + f^n(t)\frac{\partial_t(f^n(t))\psi_t^n - f^n(t)\partial_t(\psi_t^n)}{\psi_t^n f^n(t)}\nu_\alpha^n(d\eta).$$

Equivalentemente,

$$\partial_t H_n(t) = \int \Big[\partial_t f^n(t)\log\Big(\frac{f^n(t)}{\psi_t^n}\Big) + \partial_t(f^n(t)) - \frac{\partial_t(\psi_t^n)f^n(t)}{\psi_t^n}\Big]\nu_\alpha^n(d\eta).$$

Vamos calcular os termos da integral acima separadamente. Começaremos pelo segundo termo. Segue da Observação 3.1 que

$$\partial_t f^n(t) = \theta(n)\Omega^* f^n(t).$$

Assim,

$$\int \partial_t f^n(t)\nu_\alpha^n(d\eta) = \int \theta(n)\Omega^* f^n(t)\nu_\alpha^n(d\eta).$$

Da invariância de ν_α^n, concluímos que

$$\int \theta(n)\Omega^* f^n(t)\nu_\alpha^n(d\eta) = 0.$$

Fazendo os cálculos para o primeiro termo, obtemos

$$\begin{aligned}
\int \partial_t f^n(t)\log\left(\frac{f^n(t)}{\psi_t^n}\right)\nu_\alpha^n(d\eta) &= \int \theta(n)\Omega^* f^n(t)\log\left(\frac{f^n(t)}{\psi_t^n}\right)\nu_\alpha^n(d\eta)\\
&= \int \theta(n) f^n(t)\Omega\log\left(\frac{f^n(t)}{\psi_t^n}\right)\nu_\alpha^n(d\eta)\\
&= \int \theta(n)\psi_t^n\frac{f^n(t)}{\psi_t^n}\Omega\log\left(\frac{f^n(t)}{\psi_t^n}\right)\nu_\alpha^n(d\eta).
\end{aligned}$$

Segue da Observação 3.2 que

$$\int \theta(n)\psi_t^n\frac{f^n(t)}{\psi_t^n}\Omega\log\left(\frac{f^n(t)}{\psi_t^n}\right)\nu_\alpha^n(d\eta) \le \int \theta(n)\psi_t^n\Omega\left(\frac{f^n(t)}{\psi_t^n}\right)\nu_\alpha^n(d\eta),$$

que por sua vez é igual a

$$\int \frac{1}{\psi_t^n}\Big[\theta(n)\Omega^*\psi_t^n\Big] f^n(t)\nu_\alpha^n(d\eta).$$

Finalmente, juntando as expressões calculadas concluímos que

$$\begin{aligned}\partial_t H_n(t) &= \int \Big[\partial_t f^n(t)\log\Big(\frac{f^n(t)}{\psi_t^n}\Big) + \partial_t(f^n(t)) - \frac{\partial_t(\psi_t^n)}{\psi_t^n f^n(t)}\Big]\nu_\alpha^n(d\eta)\\ &\le \int \frac{1}{\psi_t^n}\Big[\theta(n)\Omega^*\psi_t^n - \partial_t(\psi_t^n)\Big]f^n(t)\nu_\alpha^n(d\eta).\end{aligned}$$

□

Os próximos cálculos (apresentados nas seções a seguir) são escritos especificamente para o *processo de exclusão simples simétrico* na escala $\theta(n) = n^2$, que é a chamada escala difusiva.

3.1 Cálculo de $n^2\frac{\mathcal{L}^*\psi_t^n}{\psi_t^n}$

Como $\mathcal{L}$ é auto-adjunto em $L^2(\nu_\alpha)$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{n^2}{\psi_t^n}\mathcal{L}^*\psi_t^n &= \frac{n^2}{\psi_t^n}\mathcal{L}\psi_t^n\\ &= \frac{n^2}{\psi_t^n}\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\frac{1}{2}\eta(x)(1-\eta(y))\Big[\psi_t^n(\eta^{x,y}) - \psi_t^n(\eta)\Big]\\ &= \frac{n^2}{2}\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\eta(x)(1-\eta(y))\Big[\frac{\psi_t^n(\eta^{x,y})}{\psi_t^n(\eta)} - 1\Big]\end{aligned}$$

Segue da Observação 3.3 que

$$\frac{\psi_t^n(\eta^{x,y})}{\psi_t^n(\eta)} = \exp\Big(\sum_{z\in\mathbb{T}_n}[\eta^{x,y}(z) - \eta(z)]\lambda(t, z/n)\Big).$$

Simplificando $\sum_{z\in\mathbb{T}_n}[\eta^{x,y}(z)-\eta(z)]\lambda(t,z/n)$, obtemos que esta expressão é igual a

$$\begin{aligned}
& [\eta^{x,y}(x)-\eta(x)]\lambda(t,x/n)+[\eta^{x,y}(y)-\eta(y)]\lambda(t,y/n)\\
= \ & [\eta(y)-\eta(x)]\lambda(t,x/n)+[\eta(x)-\eta(y)]\lambda(t,y/n)\\
= \ & [\eta(x)-\eta(y)][\lambda(t,y/n)-\lambda(t,x/n)],
\end{aligned}$$

e desde que $|\eta(x)-\eta(y)|=1$, concluímos que

$$\frac{\psi_t^n(\eta^{x,y})}{\psi_t^n(\eta)}=\exp(\lambda(t,y/n)-\lambda(t,x/n)).$$

Assim,

$$n^2\frac{\mathcal{L}_s^*\psi_t^n}{\psi_t^n}=\frac{n^2}{2}\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\eta(x)(1-\eta(y))\Big[\exp(\lambda(t,y/n)-\lambda(t,x/n))-1\Big].$$

Expandindo a exponencial até segunda ordem, podemos escrever a expressão acima como

$$\begin{aligned}
& \frac{n^2}{2}\sum_{x,y\in\mathbb{T}_n|x-y|=1}\eta(x)(1-\eta(y))[\lambda(t,y/n)-\lambda(t,x/n)] && (3.2)\\
+ \ & \frac{1}{2}\sum_{x,y\in\mathbb{T}_n|x-y|=1}\frac{1}{2}\eta(x)(1-\eta(y))[n(\lambda(t,y/n)-\lambda(t,x/n))]^2 && (3.3)\\
+ \ & \frac{n^2}{2}\sum_{x,y\in\mathbb{T}_n|x-y|=1}\frac{C}{3!}[\lambda(t,y/n)-\lambda(t,x/n)]^3. && (3.4)
\end{aligned}$$

Como $\lambda(t,\cdot)\in C^\infty$, segue que $\lambda(t,\cdot)$ é Lipschitz, e então

$$\begin{aligned}
& n^2\sum_{x,y\in\mathbb{T}_n|x-y|=1}\frac{C}{3!}[\lambda(t,y/n)-\lambda(t,x/n)]^3\\
\leq \ & n^2\sum_{x,y\in\mathbb{T}_n|x-y|=1}\frac{C}{3!}|\lambda(t,y/n)-\lambda(t,x/n)|^3\\
\leq \ & n^2\sum_{x,y\in\mathbb{T}_n|x-y|=1}\frac{C}{3!n^3}=\text{constante}.
\end{aligned}$$

Daí, concluímos que a última parcela da expansão acima é de ordem $o(n)$. Vejamos agora como simplificar os termos da expressão (3.2). O termo de ordem um é igual a

$$\begin{aligned} & \frac{n^2}{2}\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\eta(x)(1-\eta(x+1))[\lambda(t,x+1/n)-\lambda(t,x/n)] \\ + & \frac{n^2}{2}\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\eta(x)(1-\eta(x-1))[\lambda(t,x-1/n)-\lambda(t,x/n)] \\ = & \frac{n^2}{2}\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\eta(x)(1-\eta(x+1))[\lambda(t,x+1/n)-\lambda(t,x/n)] \\ + & \frac{n^2}{2}\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\eta(x+1)(1-\eta(x))[\lambda(t,x/n)-\lambda(t,x+1/n)]. \end{aligned}$$

Distribuindo o somatório e rearrumando a expressão acima, obtemos que esta é igual a

$$\frac{n^2}{2}\sum_{x\in\mathbb{T}_n}(\eta(x)-\eta(x+1))[\lambda(t,x+1/n)-\lambda(t,x/n)].$$

Como

$$\begin{aligned} & \frac{n^2}{2}\sum_{x\in\mathbb{T}_n}(\eta(x)-\eta(x+1))[\lambda(t,x+1/n)-\lambda(t,x/n)] \\ = & \frac{n^2}{2}\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\eta(x)[\lambda(t,x+1/n)-\lambda(t,x/n)] \\ - & \frac{n^2}{2}\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\eta(x+1)[\lambda(t,x+1/n)-\lambda(t,x/n)], \end{aligned}$$

fazendo $x+1=y$, distribuindo o somatório e rearrumando os termos restantes na expressão do lado direito da igualdade acima, segue que esta é igual a

$$\frac{n^2}{2}\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\eta(x)[\lambda(t,x+1/n)+\lambda(t,x-1/n)-2\lambda(t,x/n)]. \tag{3.5}$$

Usando expansão em Taylor, temos como fato geral que para $f \in C^\infty$,

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = f''(x) + C(x,h)h^2,$$

onde $C(x,h)$ é limitada e $C(x,h) = o(|h|)$. Aplicando o resultado acima na soma (3.5), concluímos que

$$\begin{aligned} & \frac{n^2}{2}\sum_{x\in\mathbb{T}_n} \eta(x)[\lambda(t,x+1/n)+\lambda(t,x-1/n)-2\lambda(t,x/n)] \\ = \; & \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{T}_n} \eta(x)\partial_u^2\lambda(t,x/n) + \frac{n^2}{n^2}C(x,1/n). \end{aligned}$$

Portanto, $n^2 \sum\limits_{\substack{x,y\in\mathbb{T}_n \\ |x-y|=1}} \frac{1}{2}\eta(x)(1-\eta(y))[\lambda(t,y/n)-\lambda(t,x/n)]$ é igual a

$$\sum_{x\in\mathbb{T}_n} \tau_x h(\eta)\partial_u^2\lambda(t,x/n) + \phi(n)$$

onde $\phi(n) = o(n)$, τ_x = shift, e $h(\eta) = \frac{1}{2}\eta(0)$. Fazendo um cálculo similar ao que foi feito acima, vemos que

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{x,y\in\mathbb{T}_n \\ |x-y|=1}} \frac{1}{2}[\eta(x)(1-\eta(y))][n(\lambda(t,y/n)-\lambda(t,x/n))]^2 \\ = \; & \sum_{x\in\mathbb{T}_n} \frac{1}{2}(\eta(x)-\eta(x+1))^2\left[n\left(\lambda(t,x+1/n)-\lambda(t,x/n)\right)\right]^2. \end{aligned}$$

Por uma expansão em Taylor, a expressão anterior é igual a:

$$\sum_{x\in\mathbb{T}_n} \tau_x j(\eta)(\partial_u\lambda(t,x/n))^2,$$

mais um erro de ordem $o(n)$, onde $j(\eta) = \frac{(\eta(0)-\eta(1))^2}{2}$. Portanto,

$$n^2\frac{\mathcal{L}^*\psi_t^n}{\psi_t^n} = \sum_{x\in\mathbb{T}_n} \tau_x h(\eta)\partial_u^2\lambda(t,x/n) + \sum_{x\in\mathbb{T}_n} \tau_x j(\eta)(\partial_u\lambda(t,x/n))^2 + o(n). \tag{3.6}$$

3.2 Cálculo de $\partial_t \log \psi_t^n(\eta)$

Sabemos da Observação 3.3 que $\psi_t^n = \frac{1}{C_t^n} \exp\Big[\sum_{x\in\mathbb{T}_n} \eta(x)\lambda(t,x/n)\Big]$. Aplicando a função logaritmo a ambos os membros desta igualdade, obtemos

$$\log \psi_t^n = \sum_{x\in\mathbb{T}_n} \eta(x)\lambda(t,x/n) - \log C_t^n.$$

Derivando a expressão acima em relação ao tempo,

$$\partial_t \log \psi_t^n = \sum_{x\in\mathbb{T}_n} \eta(x)\partial_t\lambda(t,x/n) - \frac{1}{C_t^n}\partial_t C_t^n.$$

Por outro lado, como $\psi_t^n = \frac{d\nu^n_{\rho(t,\cdot)}}{d\nu_\alpha}$, temos que

$$\mathbb{E}\psi_t^n = \int \frac{d\nu^n_{\rho(t,\cdot)}}{d\nu_\alpha} d\nu_\alpha = 1.$$

E por definição, tembém temos que

$$\mathbb{E}\psi_t^n = \frac{\mathbb{E}\Big(\exp\Big[\sum_{x\in\mathbb{T}_n} \eta(x)\lambda(t,x/n)\Big]\Big)}{C_t^n}.$$

Assim,

$$C_t^n = \mathbb{E}\exp\Big[\sum_{x\in\mathbb{T}_n} \eta(x)\lambda(t,x/n)\Big].$$

Derivando C_t^n, vemos que

$$\begin{aligned}
\partial_t C_t^n &= \partial_t \mathbb{E}\exp\Big[\sum_{x\in\mathbb{T}_n} \eta(x)\lambda(t,x/n)\Big] \\
&= \mathbb{E}\partial_t \exp\Big[\sum_{x\in\mathbb{T}_n} \eta(x)\lambda(t,x/n)\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\exp\Big(\sum_{x\in\mathbb{T}_n} \eta(x)\lambda(t,x/n)\Big)\Big(\sum_{x\in\mathbb{T}_n} \eta(x)\partial_t\lambda(t,x/n)\Big)\Big]
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial_t C_t^n}{C_t^n} &= \frac{\mathbb{E}\Big[\exp\Big(\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\eta(x)\lambda(t,x/n)\Big)\Big(\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\eta(x)\partial_t\lambda(t,x/n)\Big)\Big]}{C_t^n}\\
&= \mathbb{E}\psi_t^n\Big[\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\eta(x)\partial_t\lambda(t,x/n)\Big]
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\partial_t \log\psi_t^n(\eta) = \sum_{x\in\mathbb{T}_n}\eta(x)\partial_t\lambda(t,x/n) - \mathbb{E}\psi_t^n\Big[\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\eta(x)\partial_t\lambda(t,x/n)\Big]$$

Vejamos como reescrever a expressão acima. Como

$$\lambda(t,x/n) = \log\left(\frac{\rho(t,x/n)(1-\alpha)}{\alpha(1-\rho(t,x/n))}\right)$$

temos que

$$\partial_t\lambda(t,x/n) = \partial_t\log\left(\frac{\rho(t,x/n)}{1-\rho(t,x/n)}\right) = \frac{1-\rho(t,x/n)}{\rho(t,x/n)}\partial_t\left(\frac{\rho(t,x/n)}{1-\rho(t,x/n)}\right)$$

Usando a regra do quociente para derivadas, concluímos que

$$\begin{aligned}
\partial_t\left(\frac{\rho(t,x/n)}{1-\rho(t,x/n)}\right) &= \frac{\partial_t\rho(t,x/n)(1-\rho(t,x/n)) - \rho(t,x/n)\partial_t(1-\rho(t,x/n))}{(1-\rho(t,x/n))^2}\\
&= \frac{\partial_t\rho(t,x/n)}{(1-\rho(t,x/n))^2}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\partial_t\lambda(t,x/n) = \frac{\partial_t\rho(t,x/n)}{(1-\rho(t,x/n))\rho(t,x/n)}, \tag{3.7}$$

donde concluímos que

$$\sum_{x\in\mathbb{T}_n}\eta(x)\partial_t\lambda(t,x/n) = \sum_{x\in\mathbb{T}_n}\eta(x)\frac{\partial_t\rho(t,x/n)}{(1-\rho(t,x/n))\rho(t,x/n)}.$$

Por outro lado, como $C_t^n = \left(\prod_{x\in\mathbb{T}_n} \frac{1-\rho(t,x/n)}{1-\alpha}\right)^{-1}$, segue que

$$\begin{aligned}\partial_t \log C_t^n &= \partial_t \log\left(\prod_{x\in\mathbb{T}_n} \frac{1-\rho(t,x/n)}{1-\alpha}\right)^{-1}\\ &= -\partial_t \sum_{x\in\mathbb{T}_n} \log\frac{1-\rho(t,x/n)}{1-\alpha}\\ &= -\sum_{x\in\mathbb{T}_n} \partial_t \log\frac{1-\rho(t,x/n)}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Como

$$\partial_t \log\frac{1-\rho(t,x/n)}{1-\alpha} = \partial_t \log(1-\rho(t,x/n)) = -\frac{\partial\rho(t,x/n)}{(1-\rho(t,x/n))},$$

temos que

$$\partial_t \log C_t^n = \sum_{x\in\mathbb{T}_n} \frac{\partial\rho(t,x/n)}{(1-\rho(t,x/n))}.$$

Finalmente, com base nos cálculos acima temos que

$$\begin{aligned}\partial_t \log\psi_t^n &= \sum_{x\in\mathbb{T}_n}\left[\eta(x)\frac{\partial_t\rho(t,x/n)}{(1-\rho(t,x/n))\rho(t,x/n)} - \frac{\partial\rho(t,x/n)}{(1-\rho(t,x/n))}\right]\\ &= \sum_{x\in\mathbb{T}_n} \frac{\partial_t\rho(t,x/n)}{(1-\rho(t,x/n))\rho(t,x/n)}(\eta(x)-\rho(t,x/n)).\end{aligned}$$

Usando o fato de que $\rho(t,\cdot)$ é solução da equação de calor segue que

$$\partial_t \log\psi_t^n = \sum_{x\in\mathbb{T}_n} \frac{1}{2}\frac{\partial_u^2\rho(t,x/n)}{(1-\rho(t,x/n))\rho(t,x/n)}(\eta(x)-\rho(t,x/n)).$$

Com o objetivo de expressar $\partial_t \log\psi_t^n$ em termos de h e j, consideremos para cada função local f sua média com respeito à ν_α^n, isto é, $\tilde{f}(\alpha) = \mathbb{E}_{\nu_\alpha^n}[f(\eta)]$. Como $h(\eta) = \frac{\eta(0)}{2}$ e $j(\eta) = \left[\frac{\eta(0)-\eta(1)}{2}\right]^2$ temos que

$$\tilde{h}(\rho(t,x/n)) = \mathbb{E}_{\nu_\rho}\left[\frac{\eta(0)}{2}\right] = \frac{\rho(t,x/n)}{2}$$

e

$$\tilde{j}(\rho(t,x/n)) = \mathbb{E}_{\nu_\rho}\left[\frac{\eta(0)-\eta(1)}{2}\right]^2.$$

Derivando as expressões acima em ρ, encontramos $\partial_\rho \tilde{h}(\rho(t,x/n)) = \frac{1}{2}$ e $\partial_\rho \tilde{j}(\rho(t,x/n)) = \frac{1-2\rho(t,x/n)}{2}$. Olhando agora para a expressão de $\lambda(t,u)$ definida na Observação 3.3, obtemos

$$\partial_u \lambda(t,x/n) = \frac{\partial_u \rho(t,x/n)}{\rho(t,x/n)(1-\rho(t,x/n))}.$$

Então $\partial_u^2 \lambda(t,u)$ é igual a:

$$\frac{\rho(t,x/n)(1-\rho(t,x/n))\partial_u^2 \rho(t,x/n) - (1-2\partial(t,x/n))(\partial_u \rho(t,x/n))^2}{(\rho(t,x/n)(1-\rho(t,x/n)))^2}.$$

Segue então que

$$\partial_\rho \tilde{h}(\rho(t,x/n))\partial_u^2 \lambda(t,x/n) + \partial_\rho \tilde{j}(\rho(t,x/n))(\partial_u \lambda(t,x/n))^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial_u^2 \lambda(t,x/n)}{\rho(t,x/n)(1-\rho(t,x/n))}.$$

Portanto, $\partial_t \log \psi_t^n$ é igual:

$$\sum_{x\in\mathbb{T}_n} \partial_\rho \tilde{h}(\rho(t,x/n))\partial_u^2 \lambda(t,x/n)(\eta(x)-\rho(t,x/n)) \tag{3.8}$$

$$+ \sum_{x\in\mathbb{T}_n} \partial_\rho \tilde{j}(\rho(t,x/n))(\partial_u \lambda(t,x/n))^2(\eta(x)-\rho(t,x/n)). \tag{3.9}$$

3.3 Cálculo da produção de entropia

Pelas igualdades (3.6) e (3.8), concluímos que a expressão

$$\frac{n^2 \mathcal{L}^* \psi_t^n}{\psi_t^n} - \partial_t \log \psi_t^n$$

é igual a:

$$\sum_{x\in\mathbb{T}_n} \partial_u^2\lambda(t,x/n)\Big[\tau_x h(\eta) - \partial_\rho \tilde{h}(\rho(t,x/n))(\eta(x)-\rho(t,x/n))\Big]$$
$$+\sum_{x\in\mathbb{T}_n} (\partial_u\lambda(t,x/n))^2\Big[\tau_x j(\eta) - \partial_\rho \tilde{j}(\rho(t,x/n))(\eta(x)-\rho(t,x/n))\Big]$$

mais um termo de ordem $o(n)$. Note que como $\tilde{h}_s(\rho(t,x/n))\partial_u^2\lambda(t,x/n)$ é igual a

$$\frac{\rho(t,u)^2(1-\rho(t,u))\partial_u^2\rho(t,u) - \rho(t,u)(1-2\rho(t,u))(\partial_u\rho(t,u))^2}{2[\rho(t,u)(1-\rho(t,u))]^2}$$

e $j(\rho(t,u))(\partial_u\lambda(t,u))^2$ é igual a

$$\frac{\rho(t,u)(1-\rho(t,u))(\partial_u(\lambda(t,u))^2}{2[\rho(t,u)(1-\rho(t,u))]^2},$$

temos que $\tilde{h}(\rho(t,x/n))\partial_u^2\lambda(t,x/n) + j(\rho(t,u))(\partial_u\lambda(t,u))^2$ é igual a

$$\frac{(1-\rho(t,u))\partial_u^2\rho(t,u) + (\partial_u\rho(t,u))^2}{[2(1-\rho(t,u))]^2} = \partial_u\left[\frac{\partial_u\rho(t,u)}{2(1-\rho(t,u))}\right].$$

Então,

$$\int_{\mathbb{T}} \Big[\tilde{h}(\rho(t,x/n))\partial_u^2\lambda(t,x/n) + j(\rho(t,u))(\partial_u\lambda(t,u))^2\Big]du = 0.$$

Logo, podemos escrever $\frac{n^2\mathcal{L}^*\psi_t^n}{\psi_t^n} - \partial_t \log\psi_t^n$ como

$$\sum_{x\in\mathbb{T}_n} \partial_u^2\lambda(t,x/n)\Big[\tau_x h(\eta) - \tilde{h}(\rho(t,x/n)) - \partial_\rho \tilde{h}(\rho(t,x/n))(\eta(x)-\rho(t,x/n))\Big] \quad (3.10)$$

$+$

$$\sum_{x\in\mathbb{T}_n} (\partial_u\lambda(t,x/n))^2\Big[\tau_x j(\eta) - \tilde{j}(\rho(t,x/n)) - \partial_\rho \tilde{j}(\rho(t,x/n))(\eta(x)-\rho(t,x/n))\Big] \quad (3.11)$$

mais um termo de ordem $o(n)$.

Usando a estimativa em 1-Bloco, podemos substituir os valores esperados de $\tau_x h(\eta)$ e $\tau_x j(\eta)$ sob a medida invariante ν_α com densidade igual a densidade empírica de partículas $\eta^l(x)$ em uma caixa microscópica de comprimento l centrada em x. Explicitamente, vamos fazer as seguintes substituições:

$$\tau_x h(\eta) \longleftrightarrow \tau_x \tilde{h}^l(\eta(x))$$

e

$$\tau_x j(\eta) \longleftrightarrow \tau_x \tilde{j}^l(\eta(x)).$$

Invocando o Teorema 2.4, podemos substituir (assintoticamente, sob a medida ν_α) as configurações $\eta(x)$ por $\eta^l(x)$ nas somas acima. Daí, $\frac{n^2\mathcal{L}^*\psi_t^n}{\psi_t^n} - \partial_t \log \psi_t^n$ pode ser escrito como:

$$\sum_{x\in\mathbb{T}_n} \partial_u^2 \lambda(t,x/n)\Big[\tilde{h}(\eta^l(x)) - \tilde{h}(\rho(t,x/n)) - \partial_\rho \tilde{h}(\rho(t,x/n))(\eta^l(x) - \rho(t,x/n))\Big]$$

mais o termo

$$\sum_{x\in\mathbb{T}_n} (\partial_u \lambda(t,x/n))^2\Big[\tilde{j}(\eta^l(x)) - \tilde{j}(\rho(t,x/n)) - \partial_\rho \tilde{j}(\rho(t,x/n))(\eta^l(x) - \rho(t,x/n))\Big]$$

mais um termo de ordem $o(n)$.

Para terminar a prova do Método da Entropia, voltaremos a expressão (3.1) no Lema 3.1 da qual podemos concluir, após substituir os termos aqui calculados para $\frac{n^2\mathcal{L}^*\psi_t^n}{\psi_t^n} - \partial_t \log \psi_t^n$, que para todo $t \geq 0$ a entropia $H_n(t)$ é limitada por $H_n(0)$ mais o termo

$$\int_0^t ds \mathbb{E}_{\mu^n}\Bigg[\sum_{x\in\mathbb{T}_n} F_1(s,x/n) M_{\tilde{j}}(\eta^l(x)\rho(s,x/n)) + \sum_{x\in\mathbb{T}_n} F_2(s,x/n) M_{\tilde{h}}(\eta^l(x),\rho(s,x/n))\Bigg]$$

mais um termo de ordem $o(n)$, onde $F_1(t,x/n) = \partial_u^2\lambda(t,x/n)$, $F_2(t,x/n) = (\partial_u \lambda(t,x/n))^2$,

$$M_{\tilde{j}}(\eta^l(x),\rho(s,x/n)) = \tilde{j}(\eta^l(x)) - \tilde{j}(\rho(t,x/n)) - \partial_\rho \tilde{j}(\rho(t,x/n))(\eta^l(x) - \rho(t,x/n))$$

e

$$M_{\tilde{h}}(\eta^l(x), \rho(s, x/n)) = \tilde{h}(\eta^l(x)) - \tilde{h}(\rho(t, x/n)) - \partial_\rho \tilde{h}(\rho(t, x/n))(\eta^l(x) - \rho(t, x/n)).$$

Admitindo as hipóteses do Teorema 1.1, exceto a integral acima, todos os termos desta expressão são de ordem $o(n)$, pois estamos assumido que a entropia inicial é desta ordem. Portanto, para concluir a prova do Teorema 1.1 basta mostrar que esta esperança é limitada pela soma de um termo de ordem $o(n)$ mais a integral no tempo da entropia multiplicada por uma constante e depois aplicar uma desigualdade de *Gronwall*. Para obter esta estimativa, utilizaremos a desigualdade da entropia.

Por simplicidade, reescreveremos a última integral acima como

$$\int_0^t \mathbb{E}_{\mu^n}\Big[\sum_{x\in\mathbb{T}_n} F(s, x/n) M(\eta^l(x), \rho(s, x/n))\Big] ds.$$

Pela desigualdade da entropia (2.1), para $\gamma > 0$, esta integral é limitada por

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{\gamma}\int_0^t H_n(s)ds \\ +\ &\tfrac{1}{\gamma}\int_0^t \log \mathbb{E}_{\nu^n_{\rho(s,\cdot)}}\Big[\exp\Big(\gamma\sum_{x\in\mathbb{T}_n} F(s, x/n) M(\eta^l(x), \rho(s, x/n))\Big)\Big] ds.\end{aligned}$$

O próximo resultado permite concluir a prova do Teorema 1.1.

Proposição 3.1. *Existe uma constante $\gamma_0 > 0$ tal que para todo $s \in [0, t]$*

$$\limsup_{l\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log \mathbb{E}_{\nu^n_{\rho(s,\cdot)}}\Big[\exp\Big(\gamma_0\sum_{x\in\mathbb{T}_n} F(s, x/n) M(\eta^l(x), \rho(s, x/n))\Big)\Big] \le 0. \tag{3.12}$$

A demonstração deste resultado é longa, delicada e requer ferramentas de grandes desvios. Então vamos nos limitar a heurística desta prova. O leitor pode encontrar uma prova completa desta proposição em [KL] páginas 123-130.

A ideia é análoga a prova do Proposição 1.1. Primeiro usamos o fato das medidas $\nu^n_{\rho(s,\cdot)}$ serem produto em $\{0,1\}^{\mathbb{T}_n}$, o que torna as variáveis aleatórias $\eta^l(x_1), \eta^l(x_2)$ independentes quando $|x_1 - x_2| > 2l$. O próximo passo é aplicar o teorema de Laplace-Varadhan e um princípio de grandes desvios para variáveis aleatórias i.i.d. que nos permitirá concluir que o lado esquerdo de (3.12) é limitado por

$$\int_{\mathbb{T}} \sup_{\lambda} \Big(\gamma_0 F(s,u) M(\lambda, \rho(s,u)) - J_{\rho(s,u)}(\lambda)\Big) du,$$

onde $J_\beta(\cdot)$ é uma função taxa estritamente convexa que se anula em β. Por fim, será necessário usar os fatos de que $M(\cdot, \beta)$ também se anula em β, é quadrática próxima deste ponto, linear no infinito e utilizar a forma explicítica da função taxa $J_\beta(\cdot)$ para calcular uma constante γ_0 suficientemente pequena que torne o supremo acima igual a zero.

Capítulo 4

Perspectivas Futuras

Como trabalhos furturos temos, a princípio, dois pontos a considerar:

- Extensão do limite hidrodinâmico nos (possivelmente) regimes sub-crítico e super-críticos de [Franco, Neumann, Valle, 2011].
- Extensão deste mesmo artigo para definições gerais de taxas de transição.

Capítulo 5

Apêndice

5.1 Desigualdade de Hölder Generalizada

Definição 5.1. *Sejam $(E, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $1 \leq p < +\infty$, o espaço $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(\mu)$ consiste de todas as classes de $\mathcal{F}$-mensuráveis funções de valores reais f tais que $|f|^p$ tem integral finita com respeito a μ sobre E. Duas funções são μ-equivalentes se são iguais μ-quase todo ponto. Para este espaço definimos a norma*

$$\|f\|_p = \Big(\int |f|^p d\mu \Big)^{1/p}.$$

Sejam $r \in (0, \infty)$ e $p_1, ..., p_n \in (0, \infty]$ tais que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r}. \tag{5.1}$$

Então, para quisquer funções mensuráveis reais (ou complexas) $f_1, ..., f_n$ com $f_i \in \mathcal{L}^{p_k}(\mu)$

$$\Big\| \prod_{k=1}^{n} f_k \Big\|_r \leq \prod_{k=1}^{n} \|f_k\|_{p_k}. \tag{5.2}$$

Em particular,

$$f \in \mathcal{L}^{p_k}(\mu) \rightarrow \prod_{k=1}^{n} f_k \in L^r(\mu). \tag{5.3}$$

Note que para $r \in (0, 1)$ a notação acima não faz sentido pois em geral $\|.\|_r$

não é uma norma.

Demonstração. Façamos indução sobre n. Se $n = 1$ não há o que fazer. Sunponhamos então que o resultado seja válido para $k = n - 1$ e vamos mostrar que o resultado também vale para $k = n$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $p_1 \leq ... \leq p_k$ e vamos analisar os seguintes casos: Se $p_n = \infty$, então

$$\frac{1}{r} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{p_k}. \tag{5.4}$$

Como

$$\begin{aligned} \|f_1 \dots f_n\|_r &= \Big(\int |f_1 \dots f_{n-1}|^r |f_n|^r d\mu \Big)^{1/r} \\ &\leq \Big(\int |f_1 \dots f_{n-1}|^r d \Big)^{1/r} (\|f_n\|_\infty^r)^{1/r} \\ &= \|f_1 \dots f_n\|_r \|f_n\|_\infty, \end{aligned}$$

segue da hipótese de indução que

$$\|f_1 \dots f_n\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \dots \|f_{n-1}\|_{p_r} \|f_n\|_\infty.$$

Por outro lado, se $p_n < \infty$, temos da hipótese que $p_n - r > 0$, donde podemos tomar $p := \frac{p_n}{p_n - r}$ e $q := \frac{p_n}{r}$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Aplicando a desigualdade de Hölder a $f := |f_1 \dots f_{n-1}|^r$ e $g := |f_n|^r$ obtemos

$$\|fg\|_1 \leq \||f_1 \dots f_{n-1}|^r\|_p \||f_n|^r\|_q.$$

Logo

$$\begin{aligned} \|f_1 \dots f_n\|_r &= (\| \, |f_1 \dots f_{n-1}|^r |f_n|^r \, \|_1)^1 / r \\ &\leq (\| \, |f_1 \dots f_{n-1}|^r \|_p \, \| \, |f_n|^r \, \|_q)^{1/r} \\ &= \|f_1 \dots f_{n-1}\|_{pr} \|f_n\|_{qr}. \end{aligned}$$

Como $p_n = qr$ e

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{p_k} &= \frac{1}{r} - \frac{1}{p_n} \\ &= \frac{p_n - r}{rp_n} = \frac{1}{pr},\end{aligned}$$

segue da hipótese de indução que

$$\|f_1 \dots f_n\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \dots \|f_{n-1}\|_{p_{n-1}} \|f_n\|_{p_n},$$

donde concluímos o resultado. □

5.2 Gronwall

Sejam f, g funções contínuas não negativas em $[a, b]$ tais que, para $\alpha \geq 0$

$$f(t) \leq \alpha + \int_a^t f(s)g(s)ds \tag{5.5}$$

para todo $t \in [a, b]$. Então

$$f(t) \leq \alpha \exp\left(\int_a^t g(s)ds\right). \tag{5.6}$$

Em particular, se $\alpha = 0$, então $f \equiv 0$.

Demonstração. Seja $\alpha > 0$ e defina $\phi(t) = \alpha + \int_a^t f(s)g(s)ds$. Como $\phi(a) = \alpha$, $\phi(t) \geq \alpha > 0$ segue de $\phi'(t) = f(t)g(t) \leq g(t)\phi(t)$ que

$$\frac{d}{dt} \log \phi(t) = \frac{\phi'(t)}{\phi(t)} \leq g(t).$$

Integrando a expressão acima em $[a, t]$ obtemos

$$\log \phi(t) - \log \phi(a) = \log\left[\frac{\phi(t)}{\alpha}\right] \leq \int_a^t g(s)ds,$$

logo
$$\frac{\phi(t)}{\alpha} \leq e^{\int_a^t g(s)ds}.$$
Como $f(t) \leq \phi(t)$ concluímos a primeira parte da prova. Por outro lado, se $\alpha = 0$ então pelo item anterior, para $\epsilon > 0$

$$f(t) \leq \epsilon e^{\int_a^t g(s)ds}.$$

Donde concluímos que $f \equiv 0$ uma vez que ϵ foi tomado arbitrariamente.

$\square$

Bibliografia

[Bartle] Bartle, Robert G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley and Sons (1996).

[Durrett] Durrett, R., *Probability: Theory and Examples*, Thomson-Brooks/cole, (2005).

[Evans] Evans, Lawrence *Partial Differential Equations*, AMS, Graduate Studies in Mathematics, (1998).

[Gonçalves] Gonçalves, P., *Equilibrium Fluctuations for Totally Asymmetric Particle Systems (exclusion and zero-range processes)*, VDM, (1985).

[KL] Kipnis, C., Landim, C., *Scaling Limits of Interacting Particle Systeems*, Springer-Verlag, New York (1999).

[Liggett] Liggett, Thomas M., *Interacting Particle Systems*, Springer-Verlag, New York (1985).

[Spitzer] Spitzer, F. (1970) *: Interaction of Markov Processes,* , Advances in Mathematics, 5, 246-290.

[Franco, Neumann, Valle, 2011] Franco, T., Neumann, A., Valle, G. : *Hydrodynamic Limit for a Class of Exclusion Type Process in Dimension 2.* Journal of Applied Prob- ability, 49.2, p.333-351, (2011)

[Varadhan] Varadhan, S.R.S. *Probability Theory*, Courant lecture notes, New York (2001).

[Yau] Yau, Horng-Tzer (1991): *Relative Entropy and Hydrodyamics of Ginzburg-Landau Models*, Letters in Mathematical Physics, 22, 63-80.

Índice

Universidade Federal da Bahia-UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus de Ondina, Salvador-BA
CEP: 40170 -110
www.pgmat.ufba.br