



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



Entropia Topológica e Tangências Homoclínicas

Caroline Morais Batista

SALVADOR – BA
Agosto/2014

Entropia Topológica e Tangências Homoclínicas

Caroline Morais Batista

Dissertação apresentada
ao Colegiado da Pós-graduação
em Matemática
da Universidade Federal da Bahia
como requisito parcial
para a obtenção do título de
Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Paulo César Rodrigues Pinto Varandas

SALVADOR – BA
Agosto/2014

Batista, Caroline Morais.

Entropia Topológica e Tangências Homoclínicas / Caroline Morais Batista. - 2014. 66 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Paulo César Rodrigues Pinto Varandas.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Salvador, 2014.

1. Trigonometria. 2. Entropia. 3. Tangência Homoclínica. 4. Método de entropia máxima. I. Varandas, Paulo C. Rodrigues Pinto. II. Universidade Federal da Bahia. Instituto de Matemática. III. Título.

CDD - 516.24

CDU - 514.116

À minha família, pelo amor
e força demonstrados à mim.

Agradecimentos

À Deus pela sua infinita bondade e pelo seu precioso amor. Por sempre estar ao meu lado e me amparar nos momentos difíceis.

Aos meus pais, Samuel e Ivonete, pelo cuidado e pelas lutas por amor à mim e à minha irmã. À Cinthia pelos beijos e abraços e por sempre aguardar, ansiosa, o meu retorno à Feira. À vovó Gonzo pelo zelo não só para comigo, mas para com seus filhos, netos, bisnetos e sobrinhos. Aos meus tios e primos pela torcida durante esses dois anos e pelo carinho demonstrado através de um sorriso, de uma palavra, de um olhar...

À tia Eliúde pela estadia em Salvador, pelos conselhos e por ter sido uma mãe para mim. À tia Eliete pelo carinho e cuidado.

Ao meu orientador, professor Paulo Varandas, pela prestatividade, paciência e pelo exemplo de profissional que é. Aos demais professores do Instituto de Matemática, a exemplo do professor Vítor, pelos primeiros ensinamentos em dinâmica e pela prestatividade desde a realização dos projetos. Ao professor João Paulo pelo incentivo e pela alegria ao saber de minha aceitação no mestrado.

Aos membros da banca: professora Vanessa Ramos e professor Kleyber Mota pela leitura e contribuições à dissertação.

À Adriana (Drew), Carol e Mille, companheiras desde a graduação, pela amizade, incentivo e sorrisos. Que bom que chegamos aqui! A Diego pela amizade, fraternidade e companheirismo.

Ao meu amorzinho, Junilson, meu "solenóide", por ter sido, durante os primeiros nove meses de mestrado, um grande companheiro e amigo e depois por ter me escolhido para viver ao seu lado. Pelo seu cuidado, por me levantar nos momentos de angústia. Por sempre lembrar que temos um Deus que trabalha em favor daqueles que nele esperam e que a cada dia nos faz mais do que vencedores! Te amo, Ju!

A todos os professores que, de alguma forma, são responsáveis pela minha formação: Desde tia Evânia, que me alfabetizou junto com a minha mãe na escola Jovita Alves, passando pelos professores da Escola Criativa, Castro Alves e Assis. Aos professores da UEFS, em especial ao professor Cristiano, pela amizade e orientação; ao professor Jean, por ser inspiração e exemplo, não só como professor, mas como ser humano; e ao professor João Cardeal pelas palavras de incentivo. Cada palavra de vocês é como combustível que nos dá força para caminhar e buscar vencer os obstáculos da carreira.

Aos amigos de Feira pelo carinho, por compreenderem minha ausência e pela torcida. Amo vocês!!

A todos os meus amigos da pós-graduação pelo carinho. Ficamos longe, por um tempo, da nossa família de sangue, mas ganhamos uma família do coração. É a primeira vez que eu vejo pessoas que, mesmo com tantas diferenças, zelam umas pelas outras, seja através de uma palavra de ânimo, de um abraço ou de um sorriso. Vocês tornaram essa jornada mais agradável. Sempre estarão no meu coração!!

Por fim, à FAPESB e à CAPES pelo apoio financeiro.

“São muitas, Senhor, Deus meu,
as maravilhas que tens operado
e também os teus desígnios para
conosco. Eu quisera anunciá-las
e delas falar, mas são incontáveis.”

Salmos 40 : 5.

Resumo

Neste trabalho estudamos a relação entre a existência de tangências homoclínicas, continuidade da entropia topológica e existência de medidas de máxima entropia. Essencialmente, dos resultados de Bronzi e Tahzibi, um difeomorfismo com uma tangência homoclínica associada a um conjunto básico hiperbólico é ponto de variação da entropia se e somente se a peça básica tem entropia topológica total. Mais ainda, seguindo Buzzi, usamos tangências homoclínicas para construir difeomorfismos em dimensão 2 que não tenham medida de entropia maximal.

Palavras-chave: Tangência Homoclínica, entropia topológica, medida de entropia maximal.

Abstract

In this work we study the relation between the existence of homoclinic tangency, continuity of topological entropy and the existence of measures of maximal entropy. Essentially, of the results of Bronzi and Tahzibi, a diffeomorphism with a tangency associated homoclinic to a hyperbolic basic set is variation point entropy if and only if the basic piece has full topological entropy. Further, following Buzzi, we use homoclinic tangency to build diffeomorphisms of dimension 2 which have no measure of maximal entropy.

Keywords: Homoclinic tangency, topological entropy, measure of maximal entropy.

Sumário

Lista de Figuras	iv
1 Introdução	1
2 Notações, Definições e Ferramentas	4
2.1 Medidas	4
2.2 Entropia	5
2.2.1 Propriedades da Entropia Topológica	5
2.3 Hiperbolicidade	8
3 Tangência Homoclínica e Variação de Entropia	16
3.1 Tangência Homoclínica e Variação de Entropia	16
4 Difeomorfismos C^r sem medida de entropia maximal	30
4.1 Definições	30
4.2 Notações	31
4.3 Aplicação homoclínica f_0	31
4.4 Perturbações	32
4.4.1 Construção	33
4.4.2 Entropia das ferraduras	38
4.5 Expoente de Lyapunov	42
4.5.1 Divisão da órbita	43
4.5.2 Expansão em um segmento afim	48
4.5.3 Prova da Proposição 4.5.1	51
4.6 Teoremas principais	53
Bibliografia	57

Lista de Figuras

2.1	Estrutura de Produto Local	10
3.1	Tangência homoclínica próximo a $\mu = 0$	17
3.2	Construção da Partição de Markov (Passo 1)	18
3.3	Construção da Partição de Markov (Passo 2)	18
	26figure.3.4	
3.5	Laço Homoclínico	27
3.6	ϕ	28
3.7	Perturbação	29
4.1	Disco D	31
4.2	Quadrado Q_1 ampliado	33
4.3	Quadrado C_0	33
4.4	Vizinhança de $[1, 2] \times \{0\}$	36
4.5	$f^{T_n}R_n$	38
4.6	Curva Γ (Passo 1)	40
4.7	Curva Γ (Passo 2)	41
4.8	Curva Γ (Passo 3)	41
4.9	$\Delta _{C_0}$	42
4.10	Momentos os quais a órbita está contida em C (Visualização 1) . . .	43
4.11	Momentos os quais a órbita está contida em C (Visualização 2) . . .	44
4.12	$K = D \times \mathbb{T}^{d-2}$	55
4.13	Projeção	55

Capítulo 1

Introdução

Um sistema dinâmico consiste de um conjunto X , não vazio, e uma aplicação

$f : X \rightarrow X$. A dinâmica está relacionada com a iteração da função. Então, se começarmos com um ponto $x \in X$ (que corresponde ao tempo 0) depois ele estará em $f(x)$ (instante 1), depois em $f(f(x))$ (instante 2) e assim sucessivamente. Este é o modelo de dinâmica com tempo discreto. Existem, também, modelos de dinâmica com tempo contínuo, mas neste trabalho nos restringiremos ao primeiro caso.

Definimos a órbita de um ponto x pertencente a X como sendo $\mathcal{O}(x) = \{f^n(x); n \geq 0\}$. O objetivo dos sistemas dinâmicos é descrever como a maioria das órbitas se comportam, especialmente quando o tempo vai para o infinito.

A análise da quantidade de órbitas distinguíveis de um sistema dinâmico é uma das maneiras de caracterizarmos a sua complexidade. A entropia topológica representa este número. De forma intuitiva, dados dois pontos que estão próximos, suponhamos que não conseguimos distinguí-los através de uma resolução $\epsilon > 0$. Assim, se tivermos duas órbitas de tamanho n , só conseguiremos distinguí-las se algum par de iterados delas distar mais do que ϵ . Se f estiver definido em um espaço métrico compacto o número dessas órbitas distinguíveis é finito¹. Chamaremos este número de $r(n, \epsilon, f)$. Quando este número cresce exponencialmente, quando n tende ao infinito, temos uma complexidade do sistema. Ao fazermos a resolução ϵ extremamente precisa, obtemos a entropia topológica

¹Se S é (n, ϵ) -separado significa que para $x \in S$ a bola dinâmica $B(x, n, \epsilon) = \{y; d(f^j(x), f^j(y)) < \epsilon, \forall 0 \leq j \leq n-1\}$ não contém nenhum outro ponto de S . Logo essas bolas são disjuntas e formam uma cobertura aberta para S . Se a quantidade de bolas/pontos fosse infinita, entraríamos em contradição com o fato de que em um compacto toda cobertura aberta admite uma subcobertura finita.

de f .

Dizemos que um difeomorfismo f é um ponto de constância da entropia topológica na topologia C^k se existe uma C^k -vizinhança \mathcal{U} de f tal que para cada difeomorfismo g pertencente a \mathcal{U} , a entropia de g é igual a entropia de f . Além disso, chamamos um difeomorfismo de ponto de variação da entropia se ele não é um ponto de constância, ou seja, se para qualquer que seja a C^k -vizinhança \mathcal{U} de f existe g difeomorfismo tal que a entropia de g é diferente da entropia de f .

Segundo Smale ([9]), para difeomorfismos Axioma A, $\Omega(f) = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_m$, onde cada Λ_i é fechado, f -invariante e f é topologicamente transitivo sobre Λ_i . Além disso, como

$$h(f) = \max_{0 \leq i \leq k} h(f|_{\Lambda_i}).$$

existe pelo menos um conjunto que é responsável pela entropia do sistema, isto é, existe algum $k_0 \in \{1, \dots, k\}$ tal que $h(f) = h(f|_{\Lambda_{k_0}})$. O primeiro resultado principal da dissertação é o seguinte:

Teorema 1.0.1. *Seja uma família parametrizada $f_\mu : M \rightarrow M$ de difeomorfismos de uma superfície fechada M desdobrando genericamente uma tangência homoclínica em $\mu = 0$, onde $\Omega(f_0) = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_k \cup \mathcal{O}(q)$ e cada Λ_i é um conjunto hiperbólico isolado e $\mathcal{O}(q)$ é a única órbita tangência homoclínica associada a um ponto fixo de sela p de algum Λ_i . Então, se $\mathcal{O}(q)$ está associada a Λ_k e Λ_k é responsável pela entropia, f_0 é um ponto de variação da entropia topológica na topologia C^r , para $2 \leq r \leq \infty$.*

Uma questão natural é saber o que acontece se a tangência corresponde à peça básica que não é responsável pela entropia. De forma mais precisa:

Teorema 1.0.2. *Seja f_μ uma família a um parâmetro de difeomorfismos C^2 numa superfície M . Se $\Lambda|_k$ não é responsável pela entropia então f_0 é um ponto de constância da entropia topológica na topologia C^2 .*

É interessante notar que, na topologia C^1 , mesmo que a tangência esteja no lugar errado, há variação da entropia:

Teorema 1.0.3. [3] *Existe um difeomorfismo f de S^2 fixando um ponto de sela com interseção homoclínica transversal e um outro com tangência homoclínica tal que f é um ponto de variação da entropia na topologia C^1 .*

Agora, dado um difeomorfismo f definido em uma variedade compacta M com entropia topológica positiva, ou seja, tendo um número exponencialmente grande de órbitas distintas com uma precisão fixa. Será que existe uma medida invariante descrevendo quase todas as órbitas? Em que sentido e sob quais

condições a sua entropia é maximal e igual a $h_{top}(f)$? Tal medida, se existe, contém uma representante ergódica e a chamaremos de medida de entropia maximal.

Considerando, então, $P'(f)$ como sendo o conjunto das medidas de probabilidade, invariantes e ergódicas para f que não são quase-periódicas e também, $\lambda^u(P'(f)) := \sup_{\nu \in P'(f)} \lambda^u(f, \nu)$, provaremos que

Teorema 1.0.4. *Existe $f_0 \in \text{Diff}_0^\infty(D)$ com $h_{top}(f_0) = 0$ e a seguinte propriedade: Para cada número $1 \leq r < \infty$ e cada vizinhança U_0 de f_0 em $\text{Diff}_0^r(D)$, existe $f \in U_0$ tal que $h_{top}(f) = \frac{1}{r} \lambda(f_0) > 0$ e $\lambda^u(P'(f)) = \frac{1}{r} \lambda(f_0)$ e este supremo não é atingido. Por consequência, f não tem medida de entropia maximal.*

A dissertação está organizada da seguinte forma. No segundo capítulo recordamos alguns conceitos e resultados da Teoria da Medida, Teoria Ergódica e Dinâmica Hiperbólica necessários para a compreensão da teoria envolvida no decorrer da dissertação. Apresentamos a definição e algumas propriedades da entropia topológica e dos conjuntos hiperbólicos, e estabelecemos os conceitos de ponto de constância e ponto de variação da entropia topológica de acordo com Bronzi e Tahzibi. Por fim, apresentamos o Lema de Perturbação e um teorema devido a Yondim utilizados na demonstração de alguns teoremas do terceiro capítulo.

No terceiro capítulo mostramos condições suficientes para que um difeomorfismo f_0 seja ponto de variação da entropia na topologia C^r , com $2 \leq r \leq \infty$, ponto de constância da entropia na topologia C^2 e também, na topologia C^r para $1 \leq r < \infty$. Para uma órbita de tangência homoclínica associada a um ponto fixo de sela p de alguma peça básica Λ_i , essas condições são o fato desta peça básica ser ou não responsável pela entropia do sistema. Apresentamos, também, a existência de um difeomorfismo f de S^2 fixando um ponto de sela com interseção homoclínica transversal e um outro com tangência homoclínica tal que f é um ponto de variação da entropia na topologia C^1 .

No quarto e último capítulo, assumindo a existência de uma aplicação $f_0 : D \rightarrow D$ satisfazendo algumas propriedades, iremos perturbar f_0 para obter uma aplicação f que exiba uma sequência de ferraduras com entropia crescendo estritamente para $\frac{1}{r} \log \Lambda$ e sem medida de entropia maximal.

Capítulo 2

Notações, Definições e Ferramentas

Neste capítulo recordaremos algumas definições e teoremas da Teoria da Medida, Teoria Ergódica e Dinâmica Hiperbólica que serão ferramentas básicas necessárias para a compreensão da teoria envolvida no decorrer desta dissertação.

2.1 Medidas

Nesta seção abordaremos alguns conceitos iniciais da Teoria da medida.

Definição 2.1.1. (σ -álgebra) *Seja X um conjunto. Uma família \mathfrak{X} de subconjuntos de X é dita uma σ -álgebra se*

- \emptyset e $X \in \mathfrak{X}$
- Se $A \in \mathfrak{X}$ então $A^C \in \mathfrak{X}$
- Se $A_n \in \mathfrak{X}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ então $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathfrak{X}$

Definição 2.1.2. (Medida) *Seja X um conjunto e \mathfrak{X} uma σ -álgebra. Uma medida é uma função $\mu : \mathfrak{X} \rightarrow [0, +\infty]$ tal que*

- $\mu(\emptyset) = 0$
- μ é contavelmente aditiva, ou seja dados $E_n \in \mathfrak{X}$ disjuntos, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n)$

Observemos que se μ não assume o valor $+\infty$, μ é uma *medida finita*. Se $\mu(X) = 1$, μ é uma *medida de probabilidade*. Se existem $(E_n)_n \in \mathfrak{X}$ tais que $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ e $\mu(E_n) < +\infty, \forall n$, dizemos que μ é σ -finita.

Definição 2.1.3. (Medidas invariantes) Seja (X, \mathbb{X}, μ) um espaço de medida e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação mensurável. Dizemos que μ é invariante por f se

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E)), \text{ para todo conjunto mensurável } E \subset X.$$

Definição 2.1.4. (Suporte de uma medida) O suporte de uma medida μ é o conjunto de todos os pontos $x \in X$ tal que $\mu(U) > 0$ para todo aberto U que contém x .

Definição 2.1.5. (Medida ergódica) Seja μ probabilidade f -invariante, tal que $f : X \rightarrow X$. μ é ergódica se, $\forall A \subset X$ f -invariante ($f^{-1}(A) = A$) tem-se que $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.

2.2 Entropia

Definição 2.2.1. Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação contínua definida em um espaço métrico com métrica d . Um conjunto $S \subset M$ é (n, ε) -separado para f , ($n \geq 0$ e $\varepsilon \geq 0$), se para todo $x \neq y$ em S existir K inteiro, com $0 \leq K \leq n$, tal que $d(f^K(x), f^K(y)) > \varepsilon$. A quantidade de pontos distinguíveis (órbitas distinguíveis) é denominada por

$$r(n, \varepsilon, f) = \max\{\#S; S \subset M \text{ é } (n, \varepsilon)\text{-separado para } f\}$$

onde $\#S$ é a cardinalidade de elementos de S .

O crescimento exponencial do número $r(n, \varepsilon, f)$ quando n tende a infinito é definido por

$$h(\varepsilon, f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(r(n, \varepsilon, f)).$$

Definimos a entropia topológica como

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(\varepsilon, f)$$

2.2.1 Propriedades da Entropia Topológica

Exemplo 2.2.2. A entropia topológica da identidade é zero.

Demonstração. S é (n, ε) separado para f se para $n \geq 0$ e $\varepsilon \geq 0$, para todo $x \neq y$, $\exists 0 \leq k \leq n - 1$ tal que $d(f^k(x), f^k(y)) > \varepsilon$. Para $i < j$, temos que se S é (i, ε) -separado implica que S é (j, ε) -separado. Assim,

$$\mathcal{S}_i = \{S; S \text{ é } (i, \varepsilon)\text{-separado}\} \subset \mathcal{S}_j = \{S; S \text{ é } (j, \varepsilon)\text{-separado}\}.$$

No caso da identidade, a inclusão contrária também é verdadeira. Vejamos: Se S é (j, ε) separado para f , para $j \geq 0$ e $\varepsilon \geq 0$, para todo $x \neq y$, $\exists 0 \leq k \leq j - 1$ tal que $d(f^k(x), f^k(y)) > \varepsilon$. Como a função é a identidade, temos que $d(f^k(x), f^k(y)) =$

$d(x, y) = d(f^{k_i}(x), f^{k_i}(y)) > \epsilon$ para $0 \leq k_i \leq i - 1$. Logo S é (i, ϵ) -separado. Assim, $\mathcal{S}_j \subset \mathcal{S}_i$, e portanto, $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_j$, $\forall x, y \in \mathbb{N}$, o que implica que $r(i, \epsilon, f) = r(j, \epsilon, f)$, $\forall x, y \in \mathbb{N}$. Logo $r(n, \epsilon, f) = r(\epsilon, f)$. Assim,

$$h(\epsilon, f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(r(\epsilon, f)) = 0.$$

Logo, $h_{top}(f) = 0$. □

Proposição 2.2.3. *Se $f : X \rightarrow X$ é uma transformação contínua definida num espaço métrico compacto, então $h_{top}(f^k) = kh_{top}(f)$, para $k \geq 1$.*

Demonstração. Antes de iniciarmos a prova, vejamos a seguinte

Observação 2.2.4. $r(n, \epsilon, f^k) \leq r(nk, \epsilon, f)$

Demonstração. Se S é (n, ϵ) separado para f^k significa que para $n \geq 0$ e $\epsilon \geq 0$, dados $x \neq y$, $\exists 0 \leq l \leq n - 1$ tal que $d((f^k)^l(x), (f^k)^l(y)) > \epsilon$. Como $l \leq n - 1$, implica que $kl \leq k(n - 1) = kn - k \leq kn - 1$. Assim, $d((f^{kl})(x), (f^{kl})(y)) > \epsilon$. Logo, S é (nk, ϵ) -separado para f . □

Mostremos, então, que $h_{top}(f^k) \leq kh_{top}(f)$:

$$\begin{aligned} h_{top}(f^k) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(r(n, \epsilon, f^k)) \\ &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(r(nk, \epsilon, f)) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{k}{l} \log(r(l, \epsilon, f)) \\ &= k \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \log(r(l, \epsilon, f)) \\ &= kh_{top}(f). \end{aligned}$$

Observe que fizemos $nk = l$.

Para a desigualdade contrária, temos que se S é (nk, ϵ) -separado para f , existe $0 \leq j \leq nk - 1$ tal que $d(f^j(x), f^j(y)) > \epsilon$. Como f é uma transformação uniformemente contínua por hipótese, significa que $d(x, y) > \delta$. Mas, tomando $j = 0$ temos que $d(x, y) = d((f^k)^0(x), (f^k)^0(y)) > \delta$. Logo S é (n, δ) -separado para f^k . Logo, $r(nk, \epsilon, f) \leq r(n, \delta, f^k)$. Portanto, como $\delta = \delta(\epsilon)$ converge para 0 quando ϵ converge para 0, temos que:

$$\begin{aligned} h_{top}(f) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{nk \rightarrow \infty} \frac{1}{nk} \log(r(nk, \epsilon, f)) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nk} \log(r(n, \delta, f^k)) \\ &= \frac{1}{k} \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(r(n, \delta, f^k)) = \frac{1}{k} h_{top}(f^k). \end{aligned}$$

Assim, $h_{top}(f^k) = kh(f)$. □

Proposição 2.2.5. *Se $f : X \rightarrow X$ e $g : X \rightarrow X$ são transformações contínuas definidas em espaços métricos compactos, então*

$$h(f \times g) = h(f) + h(g)$$

A demonstração desta proposição encontra-se em [1].

Definição 2.2.6. *Seja μ uma medida invariante. Definimos entropia métrica como*

$$h_\mu(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B(x, n, \epsilon))$$

em que $B(x, n, \epsilon) = \{y; d(f^j(x), f^j(y)) < \epsilon, \forall 0 \leq j \leq n - 1\}$.

Teorema 2.2.7. (Princípio Variacional)[6] *Seja $f : M \rightarrow M$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto M . A sua entropia topológica $h_{top}(f)$ coincide com o supremo das entropias $h_\mu(f)$ da transformação f relativamente a todas as probabilidades invariantes, ou seja:*

$$h_{top}(f) = \sup\{h_\mu(f) ; \mu \in \mathcal{M}(f)\}$$

(com $\mathcal{M}(f)$ conjunto das probabilidades f -invariantes.)

Definição 2.2.8. *Uma medida μ é maximal se ela realiza o supremo, no Princípio Variacional.*

Definição 2.2.9. *Uma medida é dita quase-periódica se é suportada por uma órbita periódica ou se está inserida num círculo topológico que é conjugado a uma rotação.*

Proposição 2.2.10. *A entropia de uma medida quase-periódica é zero.*

Definição 2.2.11. (Expoente de Lyapunov) *Sejam $f : M \rightarrow M$ uma transformação diferenciável e μ uma medida ergódica invariante. Para cada $x \in X$ e $v \in T_x M$, $\lambda(x, v) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|(f^n)'(x).v\|$ é chamado Expoente de Lyapunov associado a x e a v .*

2.3 Hiperbolicidade

Nesta seção lembraremos de alguns conceitos envolvidos em uma linha muito importante dos Sistemas Dinâmicos: os sistemas uniformemente hiperbólicos. Aqui, definiremos os conjuntos dos pontos não errantes, periódicos e, dentre outras coisas, enunciaremos o Teorema da Decomposição Espectral. Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de uma variedade compacta M .¹

¹Para as quatro primeiras definições, f não precisa ser um difeomorfismo.

Definição 2.3.1. (Conjunto dos pontos não errantes) Seja $x \in M$. x é dito não errante se existir, para toda vizinhança U de x , um inteiro n tal que $U \cap f^n(U) \neq \emptyset$.

Denotamos o conjunto dos pontos não errantes de f por $\Omega(f)$.

Definição 2.3.2. (Conjunto dos pontos periódicos) $x \in M$ é dito periódico se $f^n(x) = x$ para algum $n > 0$.

Denotamos o conjunto dos pontos periódicos de f por $Per(f)$ e o período de x por $\tau(x)$.

Definição 2.3.3. Um ponto periódico x é chamado hiperbólico se a aplicação linear $Df^{\tau(x)}(x)$ possui autovalores com valor absoluto diferente de 1. Onde $Df^{\tau(x)}(x)$ é a derivada de $f^{\tau(x)}$ no ponto x .

Definição 2.3.4. (Ômega limite) Definimos $w(x) = \{y \in X; \exists n_k \rightarrow \infty \text{ tal que } \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = y\}$.

Definição 2.3.5. (Função Topologicamente Transitiva) A função f é topologicamente transitiva se existe $x \in X$ tal que $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$ onde, $\mathcal{O}(x) = \{f^n(x); n \in \mathbb{N}\}$.

Definição 2.3.6. (Função Topologicamente Misturadora) A função f é topologicamente misturadora se, para todo par de abertos U e V em X , existe um inteiro $N = N(U, V) \geq 1$, tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$.

Definição 2.3.7. (Conjuntos Hiperbólicos) Um subconjunto fechado $\Lambda \subset M$ é hiperbólico se $f(\Lambda) = \Lambda$ e para $x \in \Lambda$, $T_x M = E_x^u \oplus E_x^s$, tais que:

- $Df_x(E_x^s) = E_{f(x)}^s; Df_x(E_x^u) = E_{f(x)}^u$
- Existem $c > 0$ e $\lambda \in (0, 1)$ tais que:

1. $\|Df_x^n(v)\| \leq c\lambda^n \|v\|$, quando $v \in E_x^s$, $n \geq 0$ (Df -contração);
2. $\|Df_x^{-n}(v)\| \leq c\lambda^n \|v\|$, quando $v \in E_x^u$, $n \geq 0$ (Df -expansão).

Observação 2.3.8. $T_x M$ é o espaço tangente à M no ponto x . E_x^u e E_x^s são chamados os subespaços instável e estável relacionados a x , respectivamente.

Definição 2.3.9. $f : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo parcialmente hiperbólico se para todo $x \in M$ existem E_x^s , E_x^u e E_x^c e uma decomposição dominada $T_x M = E_x^u \oplus E_x^c \oplus E_x^s$ em que o subfibrado E_x^s é contraído, o subfibrado E_x^u é expandido e E_x^c é o subfibrado central.

Definição 2.3.10. (Axioma A) A função f é dita Axioma A, se

- $\Omega(f)$ é hiperbólico;

- $\overline{Per(f)} = \Omega(f)$.

Definição 2.3.11. (Conjuntos Estáveis e Instáveis) Definimos o Conjunto Estável de $x \in M$ como sendo

$$W^s(x) = \{y \in M; \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\}.$$

Do mesmo modo, definimos

$$W^u(x) = \{y \in M; \lim_{n \rightarrow -\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\}$$

como sendo o Conjunto Instável de x . Também definimos

$$W_\epsilon^s(x) = \{y \in M; d(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon, \forall n \geq 0\}$$

e

$$W_\epsilon^u(x) = \{y \in M; d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \epsilon, \forall n \geq 0\},$$

como sendo o Conjunto Estável Local e o Conjunto Instável Local de x , respectivamente.

De fato, é possível provar que W_ϵ^s e W_ϵ^u são subvariedades de M tangentes aos espaços E_x^s e E_x^u em x , respectivamente. Veja, por exemplo, [10].

Seja Λ um conjunto hiperbólico para f . Então para toda constante positiva $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $d(x, y) < \delta$ então $W_\epsilon^s(x) \cap W_\epsilon^u(y) = [x, y]$ é um único ponto, para todo $x, y \in \Lambda$.

Dizemos que Λ tem estrutura de produto local se $[x, y] \in \Lambda$ para todo $x, y \in \Lambda$, com $d(x, y) < \delta$. (Veja figura 2.1)

Definição 2.3.12. (Conjunto maximal) Λ é maximal se existe uma vizinhança V de Λ em M tal que $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(V)$.

Proposição 2.3.13. Λ tem estrutura de produto local se, e somente se, Λ é maximal.

Teorema 2.3.14. (Decomposição Espectral de Smale) [9]. Sejam M uma variedade diferenciável compacta e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^1 . Suponha que $\overline{Per(f)}$ é hiperbólico para f . Então existem subconjuntos fechados disjuntos $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$ tais que $\overline{Per(f)} = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_m$, cada Λ_i é hiperbólico com estrutura de produto local e f é topologicamente transitivo sobre Λ_i . Se f satisfaz ao Axioma A, então este teorema é válido para $\Omega(f)$.

Os conjuntos Λ_i deste teorema são chamados de peça básica.

Definição 2.3.15. Um ponto q é um ponto homoclínico para f se existe uma peça básica Λ e um ponto $x \in \Lambda$ tais que

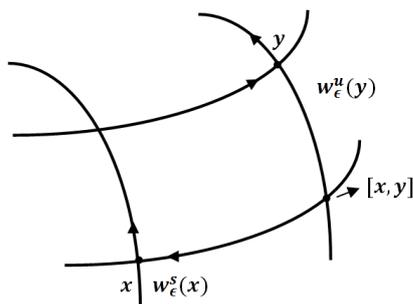


Figura 2.1: Estrutura de Produto Local

$$q \in (W^u(x) \setminus x) \cap (W^s(x) \setminus x).$$

O ponto homoclínico q é chamado *ponto homoclínico transversal* se $W^u(x)$ e $W^s(x)$ são transversais, isto é, o espaço tangente a M no ponto q pode ser escrito como a soma direta $T_q M = T_q W^u(x) \oplus T_q W^s(x)$. Caso contrário, q é uma *tangência homoclínica*.

Definição 2.3.16. *Uma classe homoclínica de um ponto periódico hiperbólico p para f é o fecho das intersecções transversais entre as variedades estável e instável desse ponto. Podemos denotá-la por $\overline{H(p, f)}$.*

Definição 2.3.17. *Seja $(\varphi_t)_t$ fluxo em M e seja x um ponto de equilíbrio do tipo sela. Uma trajetória Γ é um Laço Homoclínico em x se para todo y pertencente a Γ , $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi(y, t) = x$.*

A partir daqui, por simplicidade, denotaremos $h_{\text{top}}(f)$ por $h(f)$.

Definição 2.3.18. *Um difeomorfismo f é um ponto de constância da entropia topológica na topologia C^k se existe uma C^k -vizinhança \mathcal{U} de f tal que para todo difeomorfismo $g \in \mathcal{U}$, $h(g) = h(f)$. Além disso, chamamos um difeomorfismo de ponto de variação da entropia se ele não é um ponto de constância, ou seja, se para qualquer que seja a C^k -vizinhança \mathcal{U} de f existe g difeomorfismo tal que $h(g) \neq h(f)$.*

Lema 2.3.19. *Seja f uma aplicação contínua, como definida no início desta seção. Temos que $h(f) = h(f|_{\Omega(f)})$.*

Observação 2.3.20. *O lema acima é uma consequência do Teorema de Recorrência de Poincaré e do Princípio Variacional.*

Definição 2.3.21. *(Peça Responsável) . Dado f difeomorfismo Axioma A seja $\Omega(f) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots \cup \Lambda_k$, dado pelo Teorema da Decomposição Espectral de Smale. Como*

$$h(f) = \max_{0 \leq i \leq k} h(f|_{\Lambda_i}).$$

existe pelo menos um conjunto que é responsável pela entropia de um sistema uniformemente hiperbólico, isto é, existe algum $k_0 \in \{1, \dots, k\}$ tal que $h(f) = h(f|_{\Lambda_{k_0}})$. Assumiremos, sem perda de generalidade, que $k_0 = k$.

Teorema 2.3.22. (λ -lema)[2] Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo e p um ponto fixo hiperbólico para f . Consideremos D um disco mergulhado de mesma dimensão que $W^u(p)$, que intersecta transversalmente $W^s(p)$. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe um n_0 tal que se $n \geq n_0$ então $f^n(D)$ está $\epsilon - C^1$ próximo da variedade instável local de p .

Definição 2.3.23. (Partições de Markov)[8] Uma partição de Markov para f é uma coleção finita de retângulos $R = \{R_i\}_{i=1}^m$ tais que

- $\Lambda = \cup_{i=1}^m R_i$;
- Se $j \neq i$ então $\text{int}R_i \cap \text{int}R_j = \emptyset$
- Se $z \in \text{int}R_i$ e $f(z) \in \text{int}R_j$, então

$$f(W^u(z) \cap R_i) = f(W^u(z, R_i)) \supset W^u(f(z), R_j)$$

e

$$f(W^s(z) \cap R_i) = f(W^s(z, R_i)) \subset W^s(f(z), R_j)$$

- Se $z \in \text{int}(R_i \cap f_{-1}(\text{int}(R_j)))$, então

$$\text{int}(R_j) \cap f(W^u(z, \text{int}(R_i))) = W^u(f(z), \text{int}(R_j))$$

e

$$\text{int}(R_i) \cap f^{-1}(W^s(f(z), \text{int}(R_j))) = W^s(z, \text{int}(R_i))$$

onde $W^\alpha(z', \text{int}(R_k)) = W^\alpha(z', \text{int}(R_k)) \cap \text{int}(R_k)$, para $\alpha = u, s$, todo ponto z' e retângulo R_k .

Definição 2.3.24. (Família parametrizada de difeomorfismos) Uma família de difeomorfismos $\varphi_\mu : M \rightarrow M$, com M variedade diferenciável de classe C^∞ e $\mu \in \mathbb{R}$, é uma aplicação $\Phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x, \mu) = (\varphi_\mu(x), \mu)$ de classe C^∞ , onde a aplicação $x \rightarrow \varphi_\mu(x)$ é um difeomorfismo de classe C^∞ para cada $\mu \in \mathbb{R}$.

Definição 2.3.25. (Desdobramento de tangência homoclínica) Uma família a um parâmetro de difeomorfismos $\{\varphi_\mu\}$ de uma variedade M desdobra genericamente uma tangência homoclínica de codimensão $u \geq 1$ em $\mu = 0$ se φ_0 tem um ponto periódico $p_0 \in M$ tal que

suas variedades estável e instável, $W^s(p_0)$ e $W^u(p_0)$ com $\dim W^u(p_0) = u$, tem uma órbita de tangência que genericamente, é parabólica (de contato quadrático) e para valores de $\mu \in (0, \varepsilon)$, intersecções transversais são criadas entre as continuações analíticas, $W^s(p_\mu)$ e $W^u(p_\mu)$, das variedades estável e instável de p_0 , respectivamente. Além disso, estas variedades invariantes movem-se com relativa velocidade não-nula com a tangência quando o parâmetro varia.

Teorema 2.3.26. (Perron-Frobenius)[3] Toda matriz $A \in \mathcal{M}_{s \times s}(\mathbb{R})$ não negativa tem um autovetor não-negativo $AU = \lambda U$, no qual o autovalor associado λ é igual ao raio espectral $|\lambda|_{max}$. Se A for irredutível, então existe um único autovetor não-negativo a menos de multiplicação por uma constante positiva, e este autovetor é estritamente positivo e além disso, o autovalor maximal de todo menor principal (de ordem menor do que s) de A satisfaz $\lambda' \leq \lambda$. Se A for irredutível, $\lambda' \not\leq \lambda$

Definição 2.3.27. (Filtração) Uma filtração \mathcal{L} adaptada a f é uma sequência

$$\emptyset = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_k = M$$

onde cada M_i é uma subvariedade C^∞ de M compacta, com bordo, tal que $\dim M_i = \dim M$ e $f(M_i) \subset \text{int}(M_i)$.

Seja \mathcal{L} uma filtração como acima. Temos que o conjunto $K_i^f(\mathcal{L}) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_i \setminus M_{i-1})$ é conjunto f -invariante maximal de $M_i \setminus M_{i-1}$ e é compacto. Além disso, denotamos $K^f(\mathcal{L}) = \bigcup_{i=1}^k K_i^f(\mathcal{L})$. Temos também que

$$\Omega_i = \Omega(f) \cap (M_i \setminus M_{i-1})$$

Proposição 2.3.28. Seja \mathcal{L} uma filtração adaptada a f e seja U uma vizinhança de $K^f(\mathcal{L})$. Então existe uma C^0 -vizinhança \mathcal{U} de f no conjunto dos homeomorfismos de M tal que, para toda $g \in \mathcal{U}$, \mathcal{L} é uma filtração adaptada à g e $K^g(\mathcal{L})$ está contido em U . Além disso, tomando $U_i = (M_i \setminus M_{i-1}) \cap U$, podemos escolher a vizinhança de \mathcal{U} de modo que $K_i^g(\mathcal{L}) \subset U_i$.

Esta proposição segue somente por continuidade de f e pelo fato da distância entre compactos ser positiva.

Lema 2.3.29. (Lema de Perturbação) Sejam duas aplicações diferenciáveis f e $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^∞ , um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^m$ e um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ tais que $K \subset U$. Seja $r \in \mathbb{N}$. Então existe um operador $T : \text{Diff}^\infty(\mathbb{R}^m) \rightarrow C^r(\mathbb{R}^m)$ contínuo numa vizinhança de f tal que $T(f)|_K = f|_K$ e $T(f)|_{(\mathbb{R}^m \setminus U)} = g|_{(\mathbb{R}^m \setminus U)}$.

Demonstração. Seja b uma função "bump" com suporte em U , isto é, $b : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ tal que

$$b(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^m \setminus U \end{cases} \quad (2.1)$$

e $0 < b(x) < 1$ se $x \in U \setminus K$. Sejam f e g como no enunciado, fixe um $r \in \mathbb{N}$ e seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Definimos uma nova aplicação $T(f) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ por

$$T(f)(x) = b(x)f(x) + (1 - b(x))g(x). \quad (2.2)$$

Se $x \in K$, $T(f)(x) = f(x)$. Se $x \in \mathbb{R}^m \setminus U$, $T(f)(x) = g(x)$. Se f_1 é outro difeomorfismo de classe C^∞ , então para $x \in U \setminus k$ temos que :

$$\begin{aligned} |T(f)(x) - T(f_1)(x)| &= |b(x)f(x) + (1 - b(x))g(x) - b(x)f_1(x) - (1 - b(x))g(x)| \\ &= |b(x)| |f(x) - f_1(x)| < |f(x) - f_1(x)|. \end{aligned}$$

Além disso, por indução na r -ésima derivada temos que:

$$\begin{aligned} DT(f)(x) &= Db(x)f(x) + b(x)Df(x) + Dg(x)(1 - b(x)) - g(x)Db(x) \\ &= Db(x)f(x) + b(x)D(f(x)) + Dg(x) - Dg(x)b(x) - g(x)Db(x) \\ &= Dg(x) + Db(x)(f(x) - g(x)) + b(x)(Df(x) - Dg(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^2T(f)(x) &= D^2g(x) + D^2b(x)(f(x) - g(x)) \\ &\quad + Db(x)(Df(x) - Dg(x)) + b(x)(D^2f(x) - D^2g(x)) \\ &\quad + Db(x)(Df(x) - Dg(x)) = D^2g(x) + D^2b(x)(f(x) - g(x)) \\ &\quad + 2Db(x)(Df(x) - Dg(x)) + b(x)(D^2f(x) - D^2g(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^3T(f)(x) &= D^3g(x) + D^3b(x)(f(x) - g(x)) \\ &\quad + D^2b(x)(Df(x) - Dg(x)) + 2D^2b(x)(Df(x) - Dg(x)) \\ &\quad + 2Db(x)(D^2f(x) - D^2g(x)) + Db(x)(D^2f(x) - D^2g(x)) \\ &\quad + b(x)(D^3f(x) - D^3g(x)) = D^3g(x) + 3D^2b(x)(Df(x) - Dg(x)) \\ &\quad + D^3b(x)(f(x) - g(x)) + 3Db(x)(D^2f(x) - D^2g(x)) + b(x)(D^3f(x) \\ &\quad - D^3g(x)) \end{aligned}$$

E portanto concluímos que para todo $r \geq 1$:

$$D^r T(f)(x) = D^r g(x) + \sum_{j=0}^r \binom{r}{r-j} D^{r-j} b(x) (D^j f(x) - D^j g(x))$$

Logo, se $d_{C^\infty}(f, f_1) < \delta$,

$$\begin{aligned} \| D^r T(f)(x) - D^r T(f_1)(x) \| &= \\ &= \| D^r g(x) + \sum_{j=0}^r \binom{r}{r-j} D^{r-j} b(x) (D^j f(x) - D^j g(x)) \\ &\quad - D^r g(x) - \sum_{j=0}^r \binom{r}{r-j} D^{r-j} b(x) (D^j f_1(x) - D^j g(x)) \| \\ &= \| \sum_{j=0}^r \binom{r}{r-j} D^{r-j} b(x) (D^j f(x) - D^j g(x) - D^j f_1(x) \\ &\quad + D^j g(x)) \| = \| \sum_{j=0}^r \binom{r}{r-j} D^{r-j} b(x) (D^j f(x) - D^j f_1(x)) \| \\ &\leq \sum_{j=0}^r \binom{r}{r-j} \| D^{r-j} b(x) \| \| D^j f(x) - D^j f_1(x) \| \\ &\leq \sum_{j=0}^r \binom{r}{r-j} \| D^{r-j} b(x) \| \delta. \end{aligned}$$

Assim, como a aplicação b e todas as suas derivadas são limitadas, $\sum_{j=0}^r \binom{r}{r-j} \| D^{r-j} b(x) \|$ é limitado, digamos por um $L > 0$ que depende naturalmente de r . Logo, tomando $\delta < \frac{\varepsilon}{L}$, temos que

$$\sum_{j=0}^r \binom{r}{r-j} \| D^{r-j} b(x) \| \delta < L\delta < \varepsilon$$

Logo, provamos a proposição. \square

O seguinte teorema afirma que na topologia C^r , a entropia topológica de uma função que esteja na vizinhança de uma função f não pode crescer muito. Mais precisamente:

Teorema 2.3.30. [11] Para $f : M \rightarrow M$ de classe C^r e $g_n \rightarrow f$ na topologia C^r ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} h(g_n) \leq h(f) + \frac{2m}{r} R(f), \quad (2.3)$$

onde $r \geq 1$, $m = \dim M$ e $R(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \max \| Df^n(x) \|$.

A prova deste teorema é encontrada em [11].

Capítulo 3

Tangência Homoclínica e Variação de Entropia

3.1 Tangência Homoclínica e Variação de Entropia

Teorema 3.1.1. [2] *Seja Λ um conjunto invariante hiperbólico para um difeomorfismo f . Então, existe uma partição de Markov de Λ para f com retângulos de diâmetros arbitrariamente pequenos.*

Como as peças básicas do teorema da decomposição espectral satisfazem as hipóteses do teorema acima, temos que para cada peça básica Λ_i existe uma partição de Markov com retângulos de diâmetro arbitrariamente pequenos.

O primeiro teorema que iremos enunciar é devido a Bronzi e Tahzibi [3], e estabelece que a presença da tangência na peça responsável pela entropia é condição suficiente para a variação da entropia topológica na topologia C^r , para $2 \leq r \leq \infty$.

Teorema 3.1.2. [3] *Seja uma família parametrizada $f_\mu : M \rightarrow M$ de difeomorfismos de uma superfície fechada M desdobrando genericamente uma tangência homoclínica em $\mu = 0$, onde $\Omega(f_0) = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_k \cup \mathcal{O}(q)$ e cada Λ_i é um conjunto hiperbólico isolado e $\mathcal{O}(q)$ é a única órbita tangência homoclínica associada a um ponto fixo de sela p de algum Λ_i . Então, se $\mathcal{O}(q)$ está associada a Λ_k e Λ_k é responsável pela entropia, f_0 é um ponto de variação da entropia topológica na topologia C^r , para $2 \leq r \leq \infty$.*

Demonstração. Seja uma família f_μ como no teorema acima. Para $\mu > 0$ consideremos os conjuntos básicos $\Lambda_i(\mu)$ como a continuação dos Λ_i . Desse modo, nós temos que $\Lambda_i(\mu)$ é hiperbólico e $f_\mu|_{\Lambda_i(\mu)}$ é conjugado a $f_0|_{\Lambda_i}$. Então, nós temos

$$h(f_\mu|_{\Lambda_i(\mu)}) = h(f_0|_{\Lambda_i})$$

para todo $i = 1, \dots, k$ e todo μ pequeno.

Através do desdobramentos da família f_μ novos pontos periódicos são criados e a entropia do conjunto dos pontos não errantes pode aumentar para certos parâmetros positivos μ . Mostraremos isto através da construção de um subsistema de f_μ com uma dinâmica mais rica do que $f_0|_{\Lambda_k}$.

Para construir tal subsistema, nós encontramos um subconjunto de $\Omega(f_\mu)$ contendo $\Lambda_k(\mu)$ usando Partições de Markov. Tomamos um parâmetro μ muito perto de $\mu = 0$. Como f_μ desdobra genericamente, a aplicação f_μ tem interseção homoclínica transversal perto da $\mathcal{O}(q_0)$, a órbita tangência de f_0 .

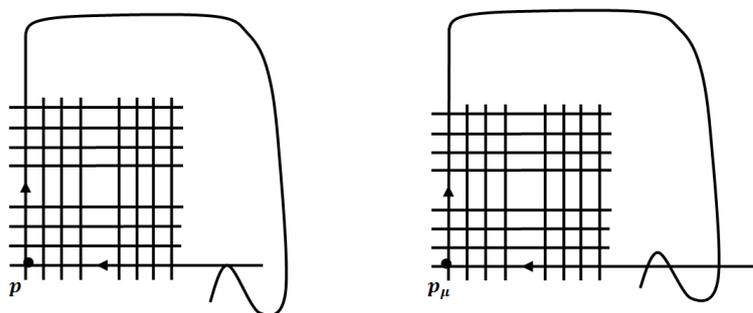


Figura 3.1: Tangência homoclínica próximo a $\mu = 0$

Seja q_μ esse ponto de interseção homoclínica transversal entre $W^s(p_\mu)$ e $W^u(p_\mu)$ perto de q_0 (a tangência de f_0). Como $\Lambda_k(\mu)$ é hiperbólico e invariante maximal definido para f_μ , existe uma vizinhança isolante de $\Lambda_k(\mu)$, digamos, V_k . Suponhamos que $q_\mu \notin V_k$. Seja também R_1, \dots, R_s uma partição de Markov para $\Lambda_k(\mu)$ tal que

$$\Lambda_k(\mu) = \bigcup_{j=1}^s R_j \subset V_k$$

Como $q_\mu \notin V_k$ temos que uma parte da $\mathcal{O}(q_\mu)$ continua fora de V_k . Tome $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, tais que $f_\mu^{N_1}(q_\mu) \in R_s, f_\mu^{-N_2}(q_\mu) \in R_1$ e $f_\mu^j(q_\mu) \notin \bigcup_{j=1}^s R_j$ para $j = -N_2 + 1, \dots, 0, \dots, N_1 - 1$. Ou seja, R_s é o retângulo contendo a primeira iterada positiva de q_μ que pertence a V_k e R_1 é o retângulo contendo a primeira iterada negativa de q_μ que pertence a V_k .

Consequimos estender a partição de Markov para um conjunto maior que contém $\Lambda_k(\mu) \cup \mathcal{O}(q_0)$ construindo outros retângulos contendo

$$\{f_\mu^{-N_2+1}(q_\mu), \dots, q_\mu, \dots, f_\mu^{N_1-1}(q_\mu)\}$$

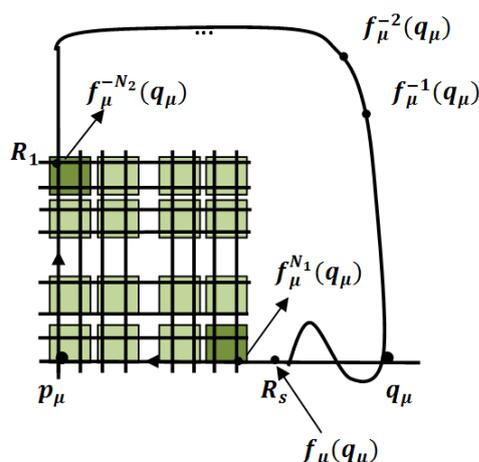


Figura 3.2: Construção da Partição de Markov (Passo 1)

da seguinte maneira: se nós iteramos R_1 sob f^{N_2} , temos uma estreita faixa ao redor da $W^u(p_\mu)$ contendo q_μ . E se nós iteramos R_s sob f^{-N_1} temos uma estreita faixa ao redor da $W^s(p_\mu)$ contendo q_μ . Sabemos que $W^s(p_\mu)$ e $W^u(p_\mu)$ tem interseção transversal em q_μ . Como nós podemos tomar o diâmetro de Markov arbitrariamente pequeno, temos que $f_\mu^{-N_1}(R_s)$ e $f_\mu^{N_2}(R_1)$ são transversais. Seja $C := f_\mu^{-N_1}(R_s) \cap f_\mu^{N_2}(R_1)$. Observemos que C é disjunto de $\bigcup_{i=1}^s R_i$ e contém q_μ .

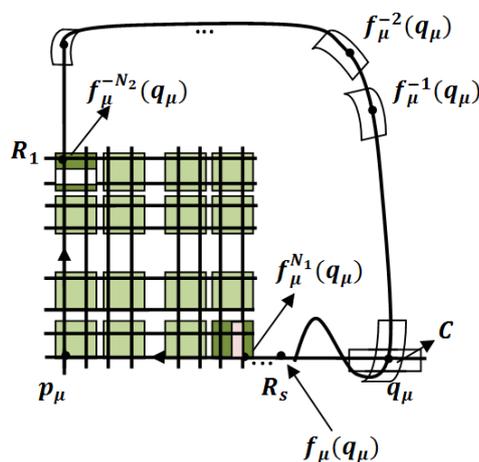


Figura 3.3: Construção da Partição de Markov (Passo 2)

Como

$$f_\mu^{N_1}(C) = R_s \cap f_\mu^{N_1+N_2}(R_1) \text{ e } f_\mu^{-N_2}(C) = f_\mu^{-N_2-N_1}R_s \cap (R_1),$$

temos que $f_\mu^{N_1}(C)$ é uma faixa vertical de altura total contida em R_s e $f_\mu^{-N_2}(C)$ é uma faixa horizontal de altura total contida em R_1 . Consideremos os conjuntos

disjuntos S_i definidos como

$$S_j = f_\mu^{-N_2+j}(C)$$

para $j = 1, 2, \dots, N_2, N_2 + 1, \dots, N_1 + N_2 - 1$. Note que $S_{N_2} = C$. Agora denote $l = N_1 + N_2 - 1$ e considere $P = \{R_1, \dots, R_s, S_1, \dots, S_l\}$ e

$$R = \bigcup_{i=1}^s R_i \cup \bigcup_{j=1}^l S_j.$$

Assim, $\Lambda_R = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f_\mu^n(R)$ é um conjunto isolado hiperbólico tal que $\Lambda_k(\mu) \subset \Lambda_R \subset \Omega(f_\mu)$. O subsistema desejado é a restrição $f_\mu : \Lambda_R \rightarrow \Lambda_R$.

Lema 3.1.3. *P é uma partição de Markov para Λ_R .*

Demonstração. Temos que todos os R_i 's satisfazem a propriedade de Markov. Resta verificar a propriedade de Markov para S_j 's. Por construção nós temos que todos R_i 's e S_j 's são disjuntos dois-a-dois, além disso, $f_\mu(S_j) = S_{j+1}$ para $j = 1, \dots, l-1$, já que $S_j = f_\mu^{-N_2+j}(C)$ o que implica que $f_\mu(S_j) = f_\mu(f_\mu^{-N_2+j}(C))$ e, portanto, $f_\mu(S_j) = f_\mu^{-N_2+j+1}(C)$. Assim,

$$j = 1 \Rightarrow f_\mu(S_1) = f_\mu^{-N_2+2}(C) = S_2$$

$$j = 2 \Rightarrow f_\mu(S_2) = f_\mu^{-N_2+3}(C) = S_3$$

⋮

$$j = l-1 \Rightarrow f_\mu(S_{l-1}) = f_\mu^{-N_2+l}(C) = S_l.$$

Temos também que $C := f_\mu^{-N_1}(R_s) \cap f_\mu^{N_2}(R_1)$, o que implica que

$$f_\mu^{-N_2+l+1}(C) = f_\mu^{-N_1-N_2+l+1}(R_s) \cap f_\mu^{-N_2+l+1+N_2}(R_1).$$

Mas $l = N_1 + N_2 - 1$, o que implica que $f_\mu^{N_1}(C) = R_s \cap f_\mu^{N_1+N_2}(R_1)$. Como $f_\mu(S_l) = f_\mu^{-N_2+l+1}(C) = f_\mu^{N_1}(C)$, temos que $f_\mu(S_l) = R_s \cap f_\mu^{N_1+N_2}(R_1)$. Logo, $f_\mu(S_l) \subset R_s$ é uma faixa vertical de altura total.

Assim, $f_\mu(S_l) \cap R_s \neq \emptyset$, $f_\mu(S_l) \cap R_i = \emptyset$, para $i = 1, \dots, s-1$ e $f_\mu(S_l) \cap R_j = \emptyset$, para $j = 1, \dots, l$.

Observemos também que, somente R_1 tem imagem por f_μ que intersecta algum S_j . De fato,

$$S_j = f_\mu^{-N_2+j}(C) = f_\mu^{-N_1-N_2+j}(R_s) \cap f_\mu^j(R_1).$$

Assim, $S_j \cap f_\mu^j(R_1) \neq \emptyset$. Para $j = 1$ temos que

$$f_\mu(R_1) \cap S_1 \neq \emptyset \text{ e } f_\mu(R_1) \cap S_j = \emptyset, \text{ para } j = 2, \dots, l.$$

Além disso, como $S_1 = f_\mu^{-N_2+1}(C) = f_\mu^{-N_1-N_2+1}(R_s) \cap f_\mu^1(R_1)$, implica que $f_\mu^{-1}(S_1) = f_\mu^{-N_1-N_2+1-1}(R_s) \cap (R_1)$. Logo, $f_\mu^{-1}(S_1) \subset R_1$.

Como $f_\mu^{-1}(S_1) \subset R_1$ é uma faixa horizontal de altura total em R_1 , então $S_1 = f_\mu(f_\mu^{-1}(S_1)) \subset f_\mu(R_1)$. Assim, $f_\mu(R_1) \cap S_1 \neq \emptyset$ e, pela construção de S_1 , esta interseção satisfaz as condições da Partição de Markov. Então P é uma Partição de Markov para Λ_R . \square

Associaremos o sistema $f_\mu : \Lambda_R \rightarrow \Lambda_R$ a um subshift do tipo finito, como a seguir. Consideremos a partição de Markov $P = \{P_1, \dots, P_{s+l}\}$, como visto anteriormente, e definamos uma matriz de transição $A_\mu = (a_{ij})_{(s+l) \times (s+l)}$ para f_μ tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } f_\mu(P_i) \cap P_j \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f_\mu(P_i) \cap P_j = \emptyset \end{cases} \quad (3.1)$$

para $i, j \in \{1, \dots, s+l\}$. Assim, obtemos uma conjugação topológica entre f_μ e $\sigma_{A_\mu} : \Sigma_{A_\mu} \rightarrow \Sigma_{A_\mu}$, onde $\Sigma_{A_\mu} \subset \Sigma_{s+l}$. A matriz de transição A_μ tem a seguinte forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} H_{ij} & \text{se } 1 \leq i, j \leq s \\ 1 & \text{se } i = 1, j = s+1 \text{ ou } i = s+l, j = s \\ 1 & \text{se } j = i+1 \text{ para } s+1 \leq i \leq s+l-1 \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $H_\mu = (H_{ij})_{s \times s}$ é a matrix de transição de $f_\mu|_{\Lambda_k(\mu)}$, a qual é irredutível, visto que $f_\mu|_{\Lambda_k}(\mu)$ é topologicamente transitivo.

Seja f_μ como no enunciado do teorema. Anteriormente construímos uma partição de Markov para $f_\mu|_{\Lambda_R}$, para $\mu \geq 0$. Como estamos lidando com uma Partição de Markov, podemos dar uma conjugação entre $f_\mu|_{\Lambda_R}$ e a dinâmica de um subshift do tipo finito. Seja A_μ a matriz de transição de $f_\mu|_{\Lambda_R}$, para $\mu > 0$ suficientemente pequeno. Temos que $h(f_\mu) = \log \lambda_\mu$, onde λ_μ é o maior autovalor

de A_μ . Pela construção da partição de Markov, temos que

$$A_\mu = \begin{pmatrix} (H_\mu) & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

A seguinte proposição afirma que o maior autovalor de A_μ é estritamente maior do que o maior autovalor de $A_0 = H_0$. Logo, a entropia do sistema $f_\mu|_{\Lambda_k}(\mu)$ será maior do que a entropia de $f_0|_{\Lambda_k}$.

Proposição 3.1.4. *Seja A_μ como definido acima. Se λ_μ é o maior autovalor de A_μ em módulo, então, para todo $\mu > 0$ perto de 0, $\lambda_\mu > \lambda_0$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.3.26 A_μ deve ser irredutível, ou seja, para todo par i, j existe alguma potência $n(i, j)$ tal que $(A_\mu^{n(i,j)}) > 0$. De fato:

A_μ , para a partição de Markov $P = \{P_i\}$ é irredutível se, e somente se, para cada par i, j existe $n = n(i, j)$ tal que $f^n(P_i) \cap P_j \neq \emptyset$, o que é satisfeito por construção. Observemos que como

$$S_j = f_\mu^{-N_2+j}(C) = f_\mu^{-N_1-N_2+j}(R_s) \cap f_\mu^j(R_1), \quad (3.3)$$

implica que

$$f_\mu^{l-j+1}(S_j) = (R_s) \cap f_\mu^{l+1}(R_1). \quad (3.4)$$

Logo,

$$f_\mu^{l-j+1}(S_j) \cap R_s \neq \emptyset. \quad (3.5)$$

Como para cada S_j , $f_\mu^{l-j+1}(S_j)$ intersecta R_s e o iterado $f^j(R_1)$ intersecta S_j , obtemos a propriedade desejada para todos os elementos de P . Podemos aplicar o teorema de Perron-Frobenius para a submatriz $A_{\mu,1}$, da matriz irredutível A_μ , obtida excluindo a última linha e a última coluna de A_μ . Dessa forma, o maior autovalor λ_μ de A_μ é estritamente maior do que o maior autovalor $\lambda_{\mu,1}$ de $A_{\mu,1}$. Apesar de $A_{\mu,1}$ não

ser, necessariamente, irredutível, utilizamos o teorema de Perron-Frobenius para a submatriz $A_{\mu,2}$, cujo maior autovalor é $\lambda_{\mu,2}$ e assim $\lambda_{\mu,2} \leq \lambda_{\mu,1} \cong \lambda_{\mu}$. Repetimos este processo até obtermos a submatriz H_{μ} , cujo maior autovalor $\lambda_{\mu,l}$ é igual a λ_0 , já que $f|_{\Lambda_k(\mu)}$ e $f_0|_{\Lambda_k}$ são topologicamente conjugados. Assim, $\lambda_{\mu} \cong \lambda_0$. \square

Para concluir, observemos que para toda vizinhança \mathcal{V} de $f = f_0$, tomamos f_{μ} com μ perto de 0 tal que $f_{\mu} \in \mathcal{V}$ e a proposição anterior se verifica. Como Λ_k é responsável pela entropia de f_0 , $h(f_{\mu}) \geq h(f|_{\Lambda_k(\mu)}) > h(f_0|_{\Lambda_k}) = h(f_0)$. Logo, $h(f_{\mu}) \neq h(f_0)$ e assim, f_0 é um ponto de variação da entropia. \square

Provaremos agora o seguinte teorema de Bronzi e Tahzibi [3]:

Teorema 3.1.5. *Seja f_{μ} uma família a um parâmetro de difeomorfismos C^2 numa superfície M . Se $\Lambda|_k$ não é responsável pela entropia então f_0 é um ponto de constância da entropia topológica na topologia C^2 .*

Demonstração. Considerando a Proposição 2.3.28, por Palis-Takens, para um difeomorfismo com uma tangência homoclínica, como estamos considerando, existe uma filtração \mathcal{L} para $\Omega(f) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots \cup \Lambda_k \cup \mathcal{O}(q)$ tal que

- $\Lambda_i = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_i \setminus M_{i-1})$, para $i \neq k$;
- $\Lambda_k \cup \mathcal{O}(q) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_k \setminus M_{k-1})$

Devido a esta última igualdade podemos escolher uma vizinhança aberta U_k de $\Lambda_k \cup \mathcal{O}(q)$ suficientemente pequena tal que

$$f(U_k) \subset M_k \setminus M_{k-1} \text{ e } f^{-1}(U_k) \subset M_k \setminus M_{k-1}.$$

Esta vizinhança tem a forma $U_k = \text{int}(\bigcap_{|n| \leq n_0} f^n(M_k \setminus M_{k-1}))$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Consideremos uma vizinhança U de $f(U_k)$ e $f^{-1}(U_k)$ tal que $U \subset M_k \setminus M_{k-1}$. Observemos que

$$\Lambda_k \cup \mathcal{O}(q) \subset U_k \subset U \subset M_k \setminus M_{k-1}. \quad (3.6)$$

Seja $f_0 : M \rightarrow M$ difeomorfismo C^2 , e assumamos, sem perda de generalidade, que $k = 4$, $\Lambda_2 = \{p_0\}$ é um ponto fixo atrator e que $\Lambda_3 = \{\infty\}$ é um ponto fixo repulsor. Como Λ_4 não é responsável pela entropia de f e como a entropia de conjuntos invariantes finitos é nula, a entropia de Λ_2 e Λ_3 é zero. Dessa forma, a entropia de f é a entropia de $f|_{\Lambda_1}$.

Fixemos agora, um difeomorfismo $g : M \rightarrow M, C^2$, perto de f . Então g tem ∞ como um ponto fixo repulsor e p_0 como ponto fixo atrator, tal que $\Omega(g) = \{\infty, p_0\}$.

Seja $U_4 = (M_4 \setminus M_3) \cap U$, onde U é vizinhança de $K^g(\mathcal{L})$. Suponhamos que K é uma vizinhança compacta de $\Lambda_4 \cup \mathcal{O}(q)$ tal que $K \subset U_4 \subset U$.

Seja a função $T(f) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ do Lema 2.3.29, que é a própria f em K e é g em $\mathbb{R}^m \setminus U$. Encontremos uma vizinhança de $T(f)$ na topologia C^r (para r grande) na qual a entropia não mude de peça responsável. Denotemos

$$d = h(f) - h(f|_{\Lambda_4}) = h(f|_{\Lambda_1}) - h(T(f)|_{\Lambda_4}). \quad (3.7)$$

Na última igualdade utilizamos o fato de que $T(f)|_K = f|_K$ e aplicamos a proposição 2.3.28 na vizinhança compacta $K \subset U_4$ da peça básica Λ_4 .

Consideremos $r > 0$ grande o suficiente para que

$$\max\left\{\frac{2m}{r}R(f), \frac{2m}{r}R(T(f))\right\} < \frac{d}{10}. \quad (3.8)$$

Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e consideremos $\delta > 0$ como na demonstração do Lema 2.3.29. Pelo Teorema 2.3.30, podemos tomar uma vizinhança ν de $T(f)$ na topologia C^r tal que para toda aplicação $\tau \in \nu$, temos que

$$h(\tau) \leq h(T(f)) + \frac{2m}{r}R(T(f)) + \frac{\varepsilon}{10}. \quad (3.9)$$

Como $h(T(f)|_{\mathbb{R}^m \setminus U}) = 0$, temos que $h(T(f)) = h(T(f)|_{\Lambda_4}) = h(f|_{\Lambda_4})$. Usando a estimativa 3.8, obtemos

$$h(\tau) < h(f|_{\Lambda_4}) + \frac{\varepsilon + d}{10}. \quad (3.10)$$

Tomemos, agora, uma vizinhança ω de f na topologia C^∞ (que está contida na topologia C^r) tal que para toda $f_1 \in \omega$ tenhamos

$$d_{C^\infty}(f_1, f) < \delta \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{n-j} \|D^{n-j}b\| \right)^{-1}. \quad (3.11)$$

Pela proposição acima, podemos escolher a vizinhança ω suficientemente pequena tal que para toda $f_1 \in \omega$, tenhamos $\Gamma_{f_1} = \Lambda_4 \cup \mathcal{O}(q) = K_4^{f_1}(\mathcal{L}) \subset K$. Dessa forma, pelo lema 2.3.29, como f_1 está próxima de f , para cada $f_1 \in \omega$, T tem como imagem a aplicação $T(f_1)$ de classe C^r que satisfaz as mesmas propriedades da f , ou seja,

$$T(f_1)|_K = f_1|_K \text{ e}$$

$$T(f_1)|_{(\mathbb{R}^m \setminus U)} = T(f)|_{(\mathbb{R}^m \setminus U)} = g|_{(\mathbb{R}^m \setminus U)},$$

além disso,

$$d_{C^r}(T(f_1), T(f)) \leq \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{n-j} \|D^{n-j}b\| \right) d_{C^\infty}(f_1, f) < \delta. \quad (3.12)$$

Assim toda aplicação $f_1 \in \omega$ que satisfaz 3.11, satisfaz 3.12 e assim pertence a ν , ou seja, satisfaz

$$h(T(f_1)) \leq h(f|_{\Lambda_4}) + \frac{\varepsilon + d}{10}. \quad (3.13)$$

Observemos que

$$h(f_1|_{\Gamma_{f_1}}) = h(T(f_1)|_{\Gamma_{f_1}}) \leq h(T(f_1)), \quad (3.14)$$

então, pela desigualdade 3.13 temos que

$$h(f_1|_{\Gamma_{f_1}}) \leq h(f|_{\Lambda_4}) + \frac{\varepsilon + d}{10}. \quad (3.15)$$

Assim, para f_1 pertencente a ω ,

$$\begin{aligned} h(f_1) &= \max\{h(f_1|_{\Gamma_{f_1}}), h(f_1|_{\Lambda_1})\} \\ &= \max\{h(f_1|_{\Gamma_{f_1}}), h(f|_{\Lambda_1})\} \\ &\leq \max\{h(f|_{\Lambda_4}) + \frac{\varepsilon + d}{10}, h(f|_{\Lambda_1})\} \\ &= h(f|_{\Lambda_1}) = h(f). \end{aligned}$$

Logo, como $h(f_1) \leq h(f|_{\Lambda_1}) = h(f_1|_{\Lambda_1})$ e $h(f_1|_{\Lambda_1}) \leq h(f_1)$, temos que $h(f_1) = h(f_1|_{\Lambda_1})$. Assim, $h(f) = h(f|_{\Lambda_1}) = h(f_1|_{\Lambda_1}) = h(f_1)$. Dessa forma, pela definição 2.3.18, na C^∞ -vizinhança f é um ponto de constância da entropia topológica. \square

De fato, pode-se extrair uma cota mais precisa para a constância da entropia como segue:

Teorema 3.1.6. f_0 é um ponto de constância na topologia C^r ($1 \leq r < \infty$) se $h(f) - h(f|_{\Lambda_k}) > \alpha_r$, em que $\alpha_r := \frac{2m}{r}R(f)$.

Demonstração. Provaremos o teorema no caso mais simples como na prova do teorema anterior. Suponhamos que $h(f) - h(f|_{\Lambda_4}) > k = \frac{2m}{r}R(f)$. Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que

$$h(f) - h(f|_{\Lambda_4}) > \frac{2m}{r}R(f) + \varepsilon \quad (3.16)$$

Pelo teorema 2.3.30, existe uma vizinhança ν de $T(f)$, na topologia C^r , tal que para toda $\tau \in \nu$,

$$h(\tau) < h(T(f)) + \frac{2m}{r}R(T(f)) + \varepsilon. \quad (3.17)$$

Como T é contínuo, se f_1 está suficientemente próximo de f na topologia C^r , $T(f_1) \in \nu$ e assim,

$$h(T(f_1)) < h(T(f)) + \frac{2m}{r}R(T(f)) + \varepsilon. \quad (3.18)$$

Assim, como na demonstração do teorema anterior, temos que para f_1 C^r -próximo de f ,

$$T(f_1)|_K = f_1|_K \text{ e}$$

$$T(f_1)|_{(\mathbb{R}^m \setminus U)} = T(f)|_{(\mathbb{R}^m \setminus U)} = g|_{(\mathbb{R}^m \setminus U)}$$

além disso, $\Gamma_{f_1} = \Lambda_4 \cup \mathcal{O}(q) = K_4^{f_1}(\mathcal{L}) \subset K$. Como

$$h(f_1|_{\Gamma_{f_1}}) = h(T(f_1)|_{\Gamma_{f_1}}) \leq h(T(f_1)), \quad (3.19)$$

temos que

$$h(f_1|_{\Gamma_{f_1}}) < h(T(f)) + \frac{2m}{r}R(T(f)) + \varepsilon. \quad (3.20)$$

Como $h(T(f)) = h(f|_{\Lambda_4})$ temos que

$$\begin{aligned} h(f_1) &= \max\{h(f_1|_{\Gamma_{f_1}}), h(f_1|_{\Lambda_{f_1}})\} \\ &= \max\{h(f_1|_{\Gamma_{f_1}}), h(f|_{\Lambda_{f_1}})\} \\ &\leq \max\{h(f|_{\Lambda_4}) + \frac{\varepsilon + d}{10}, h(f|_{\Lambda_{f_1}})\} \\ &= h(f|_{\Lambda_1}) = h(f). \end{aligned}$$

Logo, como $h(f_1) \leq h(f|_{\Lambda_1}) = h(f_1|_{\Lambda_1})$ e $h(f_1|_{\Lambda_1}) \leq h(f_1)$, temos que $h(f_1) = h(f_1|_{\Lambda_1})$. Assim, $h(f) = h(f|_{\Lambda_1}) = h(f_1|_{\Lambda_1}) = h(f_1)$. Dessa forma, se $\alpha_r = \frac{2m}{r}R(f)$, na C^∞ -vizinhança f_0 é um ponto de constância da entropia topológica. \square

O próximo teorema nos dá a relação entre uma estimativa da entropia de um sistema depois de uma perturbação e os autovalores dos pontos periódicos associados correspondentes à tangência homoclínica.

Teorema 3.1.7. [5] *Seja p um ponto periódico hiperbólico de um difeomorfismo f de classe C^1 tal que $W^u(\mathcal{O}(p))$ é tangente à $W^s(\mathcal{O}(p))$ em algum ponto. Dado $\epsilon > 0$, para toda vizinhança \mathcal{U} de f existe $g \in \mathcal{U}$ tal que*

$$h(g) > \frac{1}{\tau(p)} \log |\lambda(p)| - \epsilon.$$

Teorema 3.1.8. [3] *Existe um difeomorfismo f de S^2 fixando um ponto de sela com interseção homoclínica transversal e um outro com tangência homoclínica tal que f é um ponto de variação da entropia na topologia C^1 .*

Demonstração. Construíremos aqui, um sistema que apresenta uma ferradura e uma tangência homoclínica correspondente a um ponto fixo hiperbólico fora da ferradura. Pertubaremos o sistema em uma pequena vizinhança da tangência a fim de criar uma interseção transversal. Faremos isto usando perturbação C^1 "Snake like"(Newhouse) e obteremos um novo sistema cuja entropia é maior.

Seja a esfera S^2 cuja as órbitas dos pontos que estão próximos ao pólo norte p_∞ percorrem os meridianos e são atraídos pelo pólo sul p_0 . Suponhamos que o sistema tem uma ferradura e um laço homoclínico em regiões distintas da esfera. Estas regiões são delimitadas por meridianos. Suponhamos que este laço homoclínico é associado a um ponto fixo hiperbólico p cuja derivada têm autovalores $\lambda(p) = 3$ e $\lambda(p)^{-1} = 3^{-1}$. Suponhamos também que a ferradura na primeira região é formada por duas pernas.

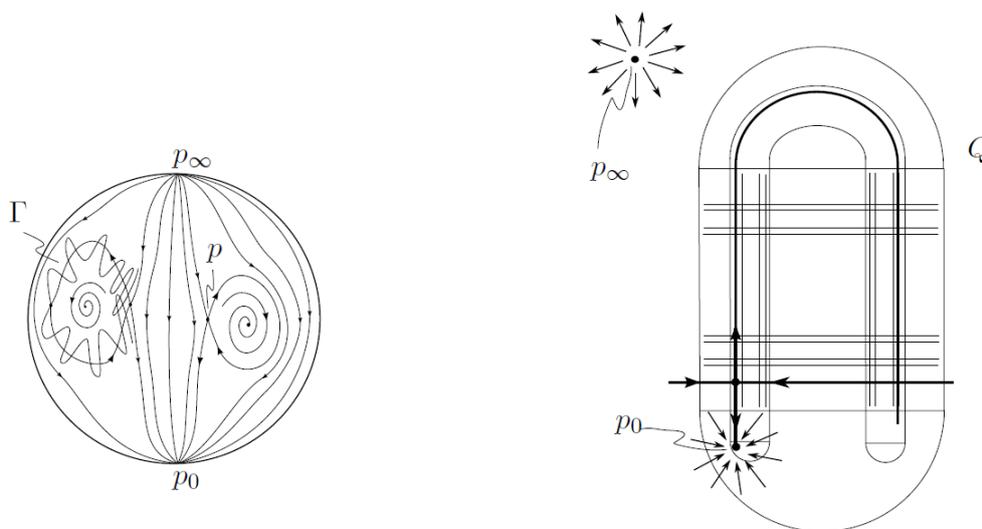


Figura 3.4: Ferradura e Laço Homoclínico ^a

^aFigura encontrada em [3]

Temos, então, que o conjunto $\Omega(f)$ apresenta três poços, uma fonte, uma

ferradura e um ponto hiperbólico associado a um laço homoclínico . Então, a entropia topológica de f é a entropia topológica de f restrita à ferradura, ou seja $h(f) = h(f|_I) = \log 2$, e dessa forma, concluímos que a ferradura é responsável pela entropia do sistema.

Perturbemos a f na topologia C^1 para obter g que tem outra ferradura no lugar do laço homoclínico. Escolhamos um ponto q na $W_{loc}^s(p)$ e uma vizinhança U de q tal que $I = W_{loc}^s(p) \cap U$ seja um domínio fundamental.

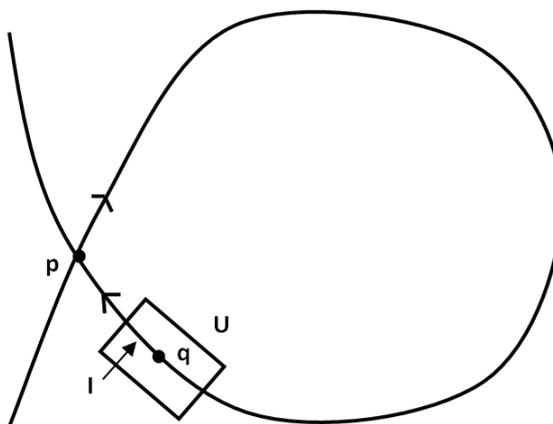


Figura 3.5: Laço Homoclínico

Em U fazemos uma perturbação Snake Like. Suponhamos que $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^2$ é uma coordenada linearizante tal que $\phi(q) = 0$. Consideremos $a > 0$ tal que $\phi^{-1}([-a, a] \times \{0\}) \subset I$. Para cada $N > 0$, grande tomemos $A = A(N) > 0$ tal que $A.N \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$. Consideremos a função $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que:

$$\Phi(x, y) = (x, y + A \cos \frac{\pi x N}{2a})$$

Temos que $\Phi([-a, a] \times \{0\}) = (x, A \cos \frac{\pi x N}{2a})$ onde $x \in [-a, a]$. Assim, Φ envia $[-a, a]$ sobre a curva γ , onde γ é o gráfico da função $x \mapsto A \cos \frac{\pi x N}{2a}$. Além disso, podemos observar que a distância maximal entre γ e o eixo x é A . Também temos que γ intercepta $[-a, a]$ N ou $N + 1$ vezes, a depender da paridade de N , pois para $-a \leq x \leq a$, fazendo $A \cos(\frac{\pi x N}{2a}) = 0$, obtemos que $\frac{\pi x N}{2a} = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Dessa forma, temos que $\frac{-N-1}{2} < k < \frac{N-1}{2}$. Observe que a matriz Jacobiana associada a Φ é

$$D\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{A\pi N}{2a} \sin(\frac{\pi x N}{2a}) & 1 \end{pmatrix}$$

Então Φ é conservativa já que $|\det(D\Phi(x, y))| = 1$.

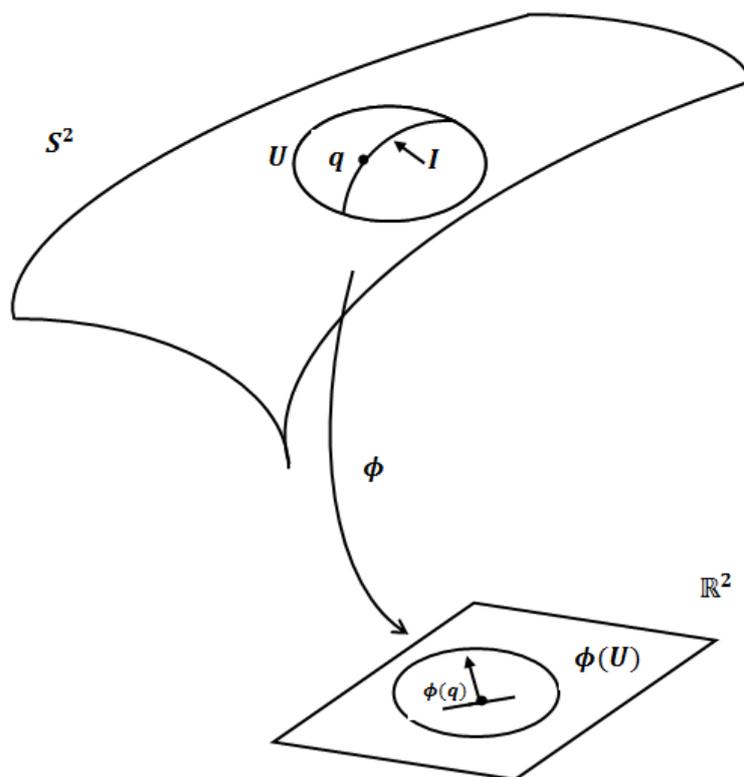


Figura 3.6: ϕ

Tome A suficientemente pequeno. Então para $\delta > 0$ existe um difeomorfismo h , δ -próximo da Id na topologia C^1 . De fato, definindo

$$h(x, y) = \begin{cases} \Phi(x, y) & \text{para } (x, y) \in B_\epsilon(0) \\ (x, y) & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus V; V \supset B_\epsilon(0) \end{cases}$$

em que $B_\epsilon(0)$ é uma vizinhança da origem e V é um aberto que contém $B_\epsilon(0)$, temos que:

Se $h(x, y) = \Phi(x, y)$,

- $\|\Phi(x, y) - I(x, y)\| = \|0, A \cos(\frac{\pi x N}{2a})\| \leq A$
- $\|D\Phi(x, y) - DId(x, y)\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-A\pi N}{2a} \sin(\frac{\pi x N}{2a}) & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-A\pi N}{2a} \sin(\frac{\pi x N}{2a}) & 0 \end{pmatrix} \right\| = \left| \frac{-A\pi N}{2a} \sin(\frac{\pi x N}{2a}) \right| \leq \frac{A\pi N}{2a}$

Definindo $g := f \circ h$, temos que g está δ - C^1 próximo de f , que $g(z) = f(z)$ para $z \in f^{-1}(U)$, $[-a, a] \subset W^s(p, g)$ e $\gamma \subset W^u(p, g)$.

Escolhamos agora um retângulo estreito R perto da $W_{loc}^s(p, g)$ que retorna depois de n iterados por g , próximo da $W^u(p, g) \cap U$ e o intercepta trans-

versalmente N vezes. Veja a figura abaixo. Definindo Λ' como sendo o conjunto invariante maximal por $g^n|_R$ temos que $h(g^n|_{\Lambda'}) = \log N$. Fazendo $\tilde{\Lambda} = \cup_{j=0}^{N-1} g^j(\Lambda')$, segue que $h(g|_{\tilde{\Lambda}}) = \frac{1}{n}h(g^n|_{\Lambda'}) = \frac{1}{n} \log N$.

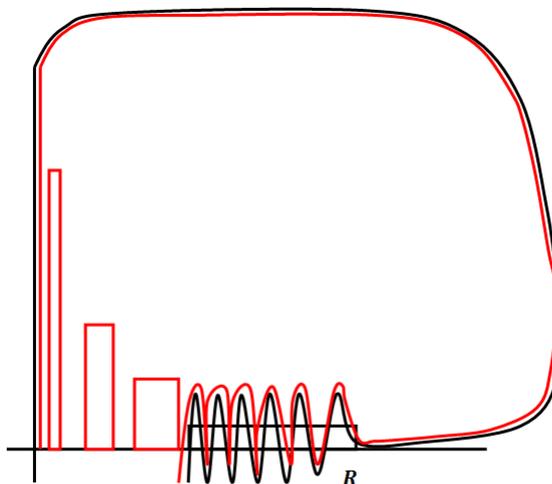


Figura 3.7: Perturbação

Temos que $\tilde{\Lambda} \subset \overline{H(p, g)}$, onde $p = p(f) = p(g)$, já que $p \notin f^{-1}(U)$. Logo,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N = \log |\lambda(p)|$$

Pelo teorema 3.1.7, tomando N suficientemente grande tal que

$$h(g|_{\tilde{\Lambda}}) = \frac{1}{n} \log N > \log |\lambda(p)| - \varepsilon$$

e lembrando que $|\lambda(p)| = 3$, podemos considerar $\varepsilon < \log(\frac{6}{5})$. Logo $h(g|_{\tilde{\Lambda}}) > \log 3 - \log \frac{6}{5} = \log \frac{15}{6} = \log \frac{5}{2} > \log(g|_R) = \log(f|_R)$

Logo f é um ponto de variação da entropia topológica na topologia C^1 . \square

Capítulo 4

Difeomorfismos C^r sem medida de entropia maximal

Seja um difeomorfismo f definido em uma variedade compacta M com entropia topológica positiva, ou seja, tendo um número exponencialmente grande de órbitas distintas com uma precisão fixa. Será que existe uma medida invariante descrevendo quase todas as órbitas? Em que sentido e sob quais condições a sua entropia é maximal e igual a $h_{top}(f)$? Neste capítulo veremos que tal medida, se existe, contém uma representante ergódica e a chamaremos de medida de entropia maximal.

4.1 Definições

Seja $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4\}$. Denotemos por $Diff_0^r$ o conjunto de difeomorfismos C^r em D que coincidem com a identidade na vizinhança da fronteira de D . Além disso, segundo a Desigualdade de Ruelle, em difeomorfismos de superfícies, para uma medida ergódica μ ,

$$h(f, \mu) \leq \lambda^u(f, \mu)^+,$$

onde $\lambda^u(f, \mu)$ é o maior expoente de Lyapunov e $\lambda^u(f, \mu)^+ = \max[0, \max_{v \in T_x^1 M} \lambda(x, v)]$, com $\lambda(x, v) := \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \| (f^n)'(x) \cdot v \|$.

Aqui, $T_x^1 M := \{v \in T_x M : \|v\|_x = 1\}$ é o fibrado tangente unitário.

Seja $Lip(f) := \sup_{x \neq y} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)}$ a constante de Lipschitz de f e seja $\lambda(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Lip(f^n)$. Temos que $\lambda(x, v) \leq \lambda(f)$. Logo, utilizando o Princípio Variacional, $h_{top}(f) = \sup_{\mu \in Prob(f)} h(f, \mu) \leq \lambda(f)$.

4.2 Notações

Utilizaremos as seguintes notações denominadas "Notações de Landau": $f(x) = \mathcal{O}(\psi(x))$ se existe constante K tal que $\frac{f(x)}{\psi(x)} \leq K$, e $f(x) = o(\psi(x))$ se $\frac{f(x)}{\psi(x)} \rightarrow 0$ quando x tende a infinito.

Além disso, as coordenadas canônicas usuais de \mathbb{R}^2 serão denotadas por letras maiúsculas por $(X, Y) := (\pi_1(p), \pi_2(p))$ para $p \in \mathbb{R}^2$. Como restringiremos nosso estudo apenas a um quadrado, definiremos aplicações simetrias por $\rho_0(X, Y) = (X, Y)$, $\rho_1(X, Y) = (Y, -X)$, $\rho_2(X, Y) = (-X, -Y)$, $\rho_3(X, Y) = (-Y, X)$.

Nós denotaremos por C_0 o quadrado em que faremos as perturbações (que serão levadas por simetria aos outros quadrados) e $Q_1 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2 \supset Q_2 = [-\frac{5}{12}, \frac{5}{12}]^2 \supset Q_3 = [-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}]^2 \supset Q_4 = [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]^2$.

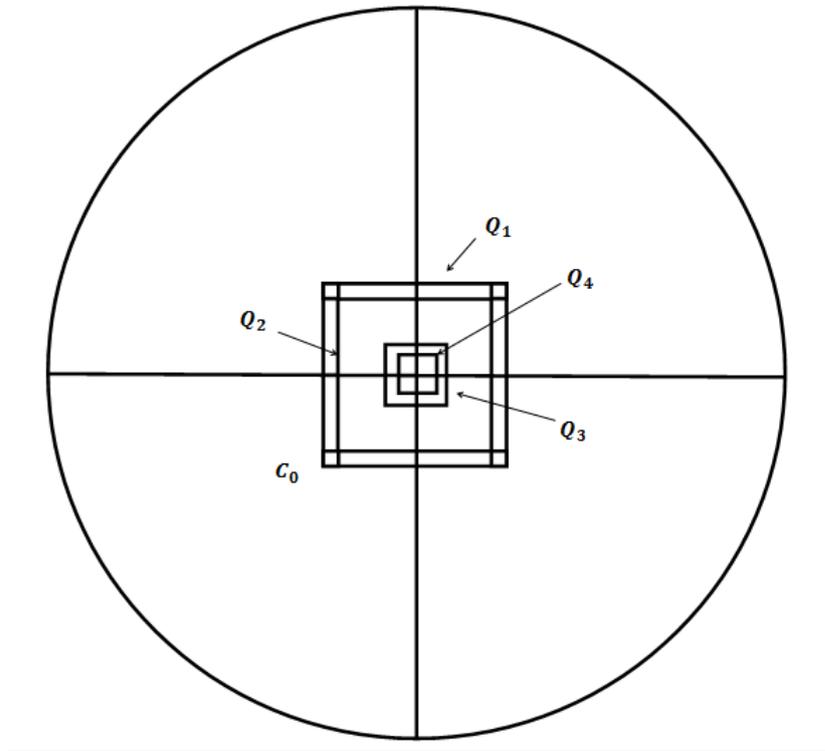


Figura 4.1: Disco D

4.3 Aplicação homoclínica f_0

Nós começaremos apresentando a existência de um difeomorfismo f_0 do disco D exibindo um laço homoclínico em um ponto fixo hiperbólico dependendo de dois parâmetros, K e L . O valor de L está associado ao comprimento das variedades estáveis e instáveis que conectam os pontos fixos hiperbólicos enquanto o

valor de K está associado às constantes de hiperbolicidade destes pontos fixos e serão tomados no decorrer da construção.

Proposição 4.3.1. *Para todos os parâmetros $K \gg L > 1$, existe um campo vetorial suave C^∞ tal que considerando o fluxo $X_t : D \rightarrow D$, no tempo 1, ou seja, para $t = 1$, a aplicação $f_0 : D \rightarrow D$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. f_0 coincide com a identidade perto da fronteira de D , $f_0 \circ \rho_i = \rho_i \circ f_0$ para $i = 1, 2, 3$ e $f_0(x, y) = (K^{-1}x, \Lambda y)$, para todo $(x, y) \in C_0$, onde $\Lambda = \frac{6}{5}$;
2. A constante de Lipschitz assintótica é $\lambda(f_0) = \log \Lambda$;
3. Todos os ω limite $w(x), x \in Q_1$ ou estão inseridos em um círculo invariante topológico dentro de Q_4 ou são pontos singulares; Todas as medidas de probabilidade invariantes ergódicas são quase-periódicas;
4. Q_1 é invariante pela f_0 , ou seja, $f_0(Q_1) = Q_1$. Além disso, $f_0(Q_1 \setminus Q_3) \subset Q_1 \setminus Q_2$ e o ω limite de cada ponto deste conjunto coincide com a fronteira de Q_1 ;
5. Existe uma vizinhança U de $\bigcup_{i=0}^3 \rho_i([1, 2] \times \{0\}) \subset \partial Q_1$ tal que $f_0(U \setminus Q_1) \cap U = \emptyset$;
6. Para $p \in f_0(C_0) \setminus C_0$, o tempo de transição para o canto seguinte, $\rho_1(C_0)$, definido por $\tau(p) := \min\{n \geq 1 : f_0^n(p) \in \rho_1(C_0)\}$ é tal que $\tau(p) = C^{\pm 1}L \pm C^{\pm 1}$. Além disso, se $p = (p_1, p_2) \in C_0$ então $\tau(p)$ não depende de p_1 .
7. Existem funções C^∞ , $\tilde{\alpha} : [2, 2\Lambda] \rightarrow (0, \infty)$ e $\tilde{h} : [0, 2] \rightarrow [0, 2]$ (dependendo de K e L) tal que, para algum $p \in f_0(C_0) \setminus C_0$, se $q := f_0^\tau(p) \in \rho_1(C_0)$, então $q_1 = \tilde{h}(p_2)$ e $q_2 = \tilde{\alpha}(p_2)p_1$, ou seja, $q = (q_1, q_2) = (\tilde{h}(p_2), \tilde{\alpha}(p_2)p_1)$.
8. Existe uma constante $u < 1$ tal que para todo $p \in C_0$ vale $|f_0^{\tau(p)}(p)|_1 \leq u \cdot |p|_1$, ou seja, há contração na x -coordenada.

Omitiremos aqui a construção de f_0 e a prova desta proposição, que se encontra em [4], mas faremos alguns comentários: A propriedade (1) significa que $f_0|_{C_0}$ tem contração na direção horizontal e expansão na direção vertical. A propriedade (8) é essencial e significa que no tempo de chegada, independente do que ocorre em $Q_1 \setminus (\bigcup_{i=0}^3 \rho_i(C_0))$, há contração na coordenada x .

4.4 Perturbações

Assumindo a existência da aplicação $f_0 : D \rightarrow D$ como na proposição anterior, iremos perturbar f_0 para obter uma aplicação f que exiba uma sequência de ferraduras com entropia crescendo estritamente para $\frac{1}{r} \log \Lambda$ e sem medida de entropia maximal.

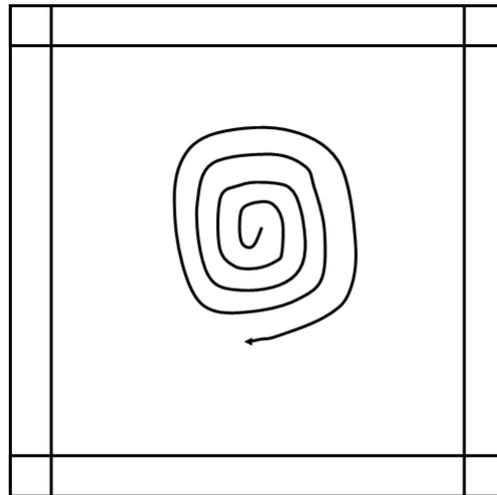


Figura 4.2: Quadrado Q_1 ampliado

4.4.1 Construção

Iremos fazer as perturbações dentro dos quatro quadrados $\rho_i(C_0)$, com $i = 0, 1, 2, 3$, de modo que $f|_{(\cup_{i=0}^3 \rho_i(C_0))^c} = f_0|_{(\cup_{i=0}^3 \rho_i(C_0))^c}$. Porém, iremos trabalhar apenas com o conjunto $D^- := \{(X, Y) \in D; X \leq 0, Y \leq 0\}$ e com o quadrado C_0 que será identificado por $[0, 2]^2$, através da seguinte mudança de coordenadas afim:

$$\begin{aligned} C_0 &\rightarrow [0, 2]^2 \\ (x, y) &\mapsto 24(x, y) + (12, 12) \end{aligned}$$

Observe que $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ é levado em $(0, 0)$ e $(-\frac{5}{12}, -\frac{5}{12})$ é levado em $(2, 2)$.

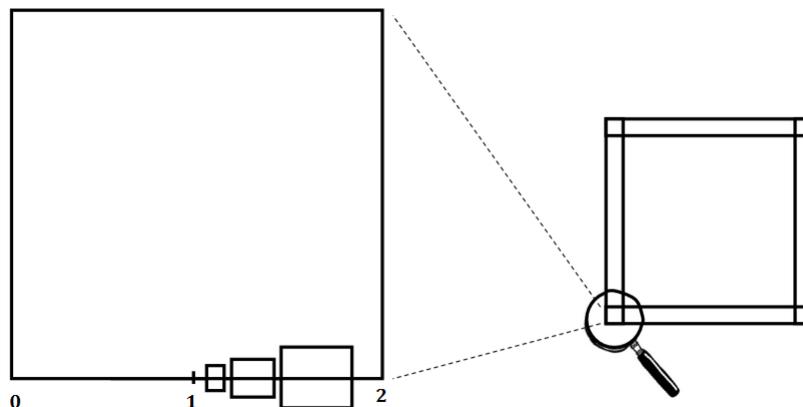


Figura 4.3: Quadrado C_0

Seja $n_0 \gg 1$ fixado. A construção de f vai depender de n_0 . As perturbações

serão indexadas por inteiros $n \geq n_0$. Serão feitas N_n dobras nos tempos $n \geq n_0$. Denotando o tempo de passagem para o próximo quadrado por $T_n := 10^n$, definimos $N_n := \frac{\Lambda T_n}{n^5}$. A n -ésima perturbação será suportada em

$$R_n := [a_n, b_n] \times \left[-\frac{l_n}{N_n}, \frac{l_n}{N_n}\right]$$

em que $a_n := 1 + \frac{1}{n^2}$; $b_n := a_n + \frac{1}{n^4}$ e $l_n = \frac{1}{n^4}$.

Mostremos que os R_n definidos acima são dois a dois disjuntos, ou seja, que

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^4} < \frac{1}{n^2}.$$

Mas isto acontece se, e somente se,

$$\frac{(n+1)^2 n^2 + n^2}{(n+1)^4 n^2} < \frac{(n+1)^4}{(n+1)^4 n^2}.$$

Como os denominadores são iguais, basta mostrar que o primeiro numerador é menor do que o segundo numerador. Mas isto é claro, já que $n^4 + 2n^3 + 2n^2 < n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$.

Em R_n , a aplicação original f_0 é substituída por $f_n := f_0 \circ g_n$, com

$$g_n : (x, y) \mapsto (x, y + \alpha_n(x, y) \Lambda^{-T_n} \{2 + \sin(\frac{\pi N_n (x - a_n)}{l_n})\})$$

ou seja, $g_n = Id + r_n$, é perturbação da identidade, onde

$$\alpha_n(x, y) = \alpha(N_n \frac{(x - a_n)}{l_n}) \alpha(N_n \frac{(b_n - x)}{l_n}) \beta(\frac{N_n y}{l_n}).$$

onde $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ é C^∞ e não decrescente com $\alpha'(x) = o(\alpha(x)^{1-\frac{1}{r}})$, $\alpha(x) = 0$ para $x \leq 0$ e $\alpha(x) = 1$ para $x \geq 1$; $\beta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ é C^∞ com $\beta(x) = 1$ para $|x| \leq \frac{1}{2}$ e $\beta(x) = 0$ para $|x| \geq 1$ e é monótona em $(-\infty, 0]$ e em $[0, \infty)$.

A partir disso, podemos definir $f : D \rightarrow D$ por:

- $f(q) = f_n(q)$ se $q \in \rho_i(R_n)$ para algum $n \geq n_0$, $i = 0, 1, 2, 3$;
- $f(q) = f_0(q)$ se $q \in D \setminus \widehat{R}$, com $\widehat{R} := \bigcup_{i=0,1,2,3} \bigcup_{n \geq n_0} \rho_i(R_n)$.

Recorde que $f = f_{\geq n_0}$ depende de $n_0 \geq 1$. Omitiremos n_0 sempre que possível para não sobrecarregar a notação.

Lema 4.4.1. *O difeomorfismo $f : D \rightarrow D$ é C^r e está C^r próximo de f_0 , ou seja, $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \|f_{\geq n_0} - f_0\|_{C^r} < \epsilon$. Além disso, $f(Q_1) \subset Q_1$, entre quaisquer duas visitas*

a $\widehat{R} = \bigcup_{n \geq n_0} \rho_i(R_n)$ existe uma visita a $Q_1 \setminus C_0$ e qualquer órbita que não entra em Q_1 converge para um subconjunto de um círculo invariante topológico ou a um ponto fixo.

Demonstração. Devido às funções bump $\alpha(x, y)$ temos que as aplicações f_n são C^∞ . Como f_0 é C^∞ , segue que as aplicações f serão C^r se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - I\|_{C^r} = 0, \quad (4.1)$$

ou seja, se g_n estiver bem próximo da identidade na topologia C^r . Pois assim, como $f_n|_{R_n} = f_0 \circ g_n$, teremos que f_0 estará bem próximo de f_n .

Calculemos as derivadas parciais de $g_n - I$ de ordem 1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_n - I}{\partial x} &= \left(0, \frac{\partial \alpha_n(x, y)}{\partial x} \frac{1}{\Lambda^{T_n}} \{2 + \sin(\frac{\pi N_n(x - a_n)}{l_n})\} + \alpha_n(x, y) \frac{1}{\Lambda^{T_n}} \{\cos(\frac{\pi N_n(x - a_n)}{l_n}) (\frac{\pi N_n l_n}{(l_n)^2})\}\right) \\ &= \left(0, \frac{1}{\Lambda^{T_p}} \frac{\partial \alpha_n(x, y)}{\partial x} \{2 + \sin(\frac{\pi N_n(x - a_n)}{l_n})\} + \frac{1}{\Lambda^{T_n}} \alpha_n(x, y) \frac{\pi N_n}{l_n} \cos(\frac{\pi N_n(x - a_n)}{l_n})\right) \\ &\leq \left(0, \frac{1}{\Lambda^{T_p}} \frac{\partial \alpha_n(x, y)}{\partial x} 3 + \frac{1}{\Lambda^{T_n}} \alpha_n(x, y) \frac{\pi N_n}{l_n}\right) \\ &= \left(0, \Lambda^{-T_n} \left(3 \frac{\partial \alpha_n(x, y)}{\partial x} + \alpha_n(x, y) \frac{\pi N_n}{l_n}\right)\right) \\ &= \left(0, C \left(\frac{N_n}{l_n}\right) \Lambda^{-T_n}\right) \\ &= \left(0, o(\Lambda^{-1(1-\frac{1}{r})T_n})\right) \\ &= \left(0, o(1)\right) \\ \frac{\partial g_n - I}{\partial y} &= \left(0, \frac{\partial \alpha_n(x, y)}{\partial y} \Lambda^{-T_n} \{2 + \sin(\frac{\pi N_n \pi(x - a_n)}{l_n})\}\right) \\ &\leq \left(0, 3 \Lambda^{-T_n} \frac{\partial \alpha_n(x, y)}{\partial y}\right) \\ &= \left(0, C \left(\frac{N_n}{l_n}\right) \Lambda^{-T_n}\right) \\ &= \left(0, o(\Lambda^{-1(1-\frac{1}{r})T_n})\right) \\ &= \left(0, o(1)\right) \end{aligned}$$

Como as derivadas parciais estão indo para 0, a igualdade 4.1 é satisfeita para $r = 1$. Para $r \geq 1$ qualquer, o raciocínio é análogo e omitiremos as contas.

Também temos que f , na coordenada x , é igual a f_0 na mesma coordenada. Além disso, f , na coordenada y é maior ou igual a f_0 na mesma coordenada. Logo, pela afirmação 4 da proposição 4.3.1, temos que $f(Q_1) \subset Q_1$. Finalmente, f , ainda restrita a C_0 , na primeira coordenada é menor ou igual a $K^{-1}x$ e $K^{-1}(1 + \frac{1}{n_0^2} + \frac{1}{n_0^4}) < 1$. Lembrando da vizinhança U da afirmação 5 da proposição 4.3.1, podemos assumir

que $\widehat{R} \subset U$. Assim, $f(\widehat{R}) \setminus Q_1 = f_0(\widehat{R}) \setminus Q_1 \subset f_0(U \setminus Q_1)$. Mostremos esta última inclusão:

$$f_0(\widehat{R}) \setminus Q_1 \subset f_0(U \setminus Q_1).$$

De fato, seja y pertencente a $f_0(\widehat{R}) \setminus f_0(Q_1)$. Isto implica que existe x em $\widehat{R} \subset U$ tal que $f_0(x) = y$ pertence a $f_0(\widehat{R}) \subset f_0(U)$ e $f_0(x) = y$ não pertence a $f_0(Q_1) = Q_1$. Logo x não pertence a Q_1 , então y pertence a $f_0(U \setminus Q_1)$

Por indução, temos que $f^k(\widehat{R}) \setminus Q_1 = f_0^k(\widehat{R}) \setminus Q_1$ não intercepta \widehat{R} para todo $k \geq 1$. Assim, as órbitas de f que não entram em Q_1 visitam \widehat{R} no máximo uma vez, deste modo, eventualmente coincide com as órbitas de f dentro de Q_1 . A última afirmação segue do item 3 da proposição 4.3.1. \square

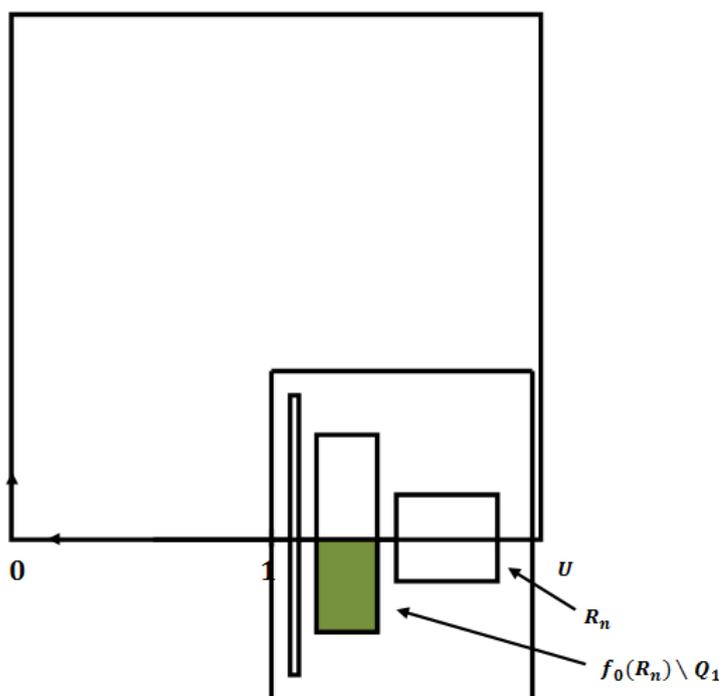


Figura 4.4: Vizinhança de $[1,2] \times \{0\}$

Lema 4.4.2. As aplicações $f : D \rightarrow D$ satisfazem, para todo $(x, y) \in C_0$,

$$\left| \frac{\partial(f(x, y))_2}{\partial x} \right| \leq o((f(x, y))_2)^{1-\frac{1}{r}}. \quad (4.2)$$

Demonstração. Observe que para $(x, y) \in R_n$, temos que

$$\begin{aligned} (g_n(x, y))_2 &= y + \alpha_n(x, y) \Lambda^{-T_n} \left\{ 2 + \sin\left(\frac{\pi N_n(x - a_n)}{l_n}\right) \right\} \\ &\geq y + \alpha_n(x, y) \Lambda^{-T_n}. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $\alpha_n(x, y) = \alpha\left(\frac{N_n(x-a_n)}{l_n}\right)\alpha\left(\frac{N_n(b_n-x)}{l_n}\right)\beta\left(\frac{N_n y}{l_n}\right)$, temos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \alpha_n(x, y)}{\partial x} \right| &= \left| \alpha' \left(\frac{N_n(x-a_n)}{l_n} \right) \frac{N_n}{l_n} \alpha \left(\frac{N_n(b_n-x)}{l_n} \right) \beta \left(\frac{N_n y}{l_n} \right) \right. \\ &\quad \left. + \alpha \left(\frac{N_n(x-a_n)}{l_n} \right) \left[\alpha' \left(\frac{N_n(b_n-x)}{l_n} \right) \left(-\frac{N_n}{l_n} \right) \beta \left(\frac{N_n y}{l_n} \right) \right] \right| \\ &\leq \left| \alpha' \left(\frac{N_n(x-a_n)}{l_n} \right) \frac{N_n}{l_n} \alpha \left(\frac{N_n(b_n-x)}{l_n} \right) \beta \left(\frac{N_n y}{l_n} \right) \right| \\ &\quad + \left| \alpha \left(\frac{N_n(x-a_n)}{l_n} \right) \alpha' \left(\frac{N_n(b_n-x)}{l_n} \right) \frac{N_n}{l_n} \beta \left(\frac{N_n y}{l_n} \right) \right| \\ &= \frac{N_n}{l_n} \left[\left| \alpha' \left(\frac{N_n(x-a_n)}{l_n} \right) \alpha \left(\frac{N_n(b_n-x)}{l_n} \right) \beta \left(\frac{N_n y}{l_n} \right) \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \alpha \left(\frac{N_n(x-a_n)}{l_n} \right) \alpha' \left(\frac{N_n(b_n-x)}{l_n} \right) \beta \left(\frac{N_n y}{l_n} \right) \right| \right] \end{aligned}$$

Assim,

$$\left| \frac{\partial \alpha_n(x, y)}{\partial x} \right| \leq \frac{N_n}{l_n} o(\alpha_n(x, y)^{1-\frac{1}{r}})$$

onde nós usamos que $|\alpha'(u)| = o(\alpha(u)^{1-\frac{1}{r}})$ e $|\alpha(u)|, |\beta(u)| \leq 1$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial g_n(x, y)_2}{\partial x} \right| &= \left| \frac{\partial \alpha_n(x, y)}{\partial x} \Lambda^{-T_n} \left\{ 2 + \sin \left[\frac{\pi N_n(x-a_n)}{l_n} \right] \right\} + \alpha_n(x, y) \Lambda^{-T_n} \left\{ \cos \left[\frac{\pi N_n(x-a_n)}{l_n} \right] \frac{\pi N_n l_n}{(l_n)^2} \right\} \right| \\ &\leq \left| 2 \frac{\partial \alpha_n(x, y)}{\partial x} \Lambda^{-T_n} \right| + \left| \frac{\partial \alpha_n(x, y)}{\partial x} \Lambda^{-T_n} \sin \left[\frac{\pi N_n(x-a_n)}{l_n} \right] \right| \\ &\quad + \left| \alpha_n(x, y) \Lambda^{-T_n} \cos \left[\frac{\pi N_n(x-a_n)}{l_n} \right] \frac{\pi N_n l_n}{(l_n)^2} \right| \\ &\leq 2 \Lambda^{-T_n} \left| \frac{\partial \alpha_n(x, y)}{\partial x} \right| + \Lambda^{-T_n} \left| \sin \left[\frac{\pi N_n(x-a_n)}{l_n} \right] \right| \left| \frac{\partial \alpha_n(x, y)}{\partial x} \right| \\ &\quad + \Lambda^{-T_n} \left| \cos \left[\frac{\pi N_n(x-a_n)}{l_n} \right] \right| \left| \frac{\pi N_n}{l_n} \right| |\alpha_n(x, y)| \\ &\leq 2 \Lambda^{-T_n} \left| \frac{\partial \alpha_n(x, y)}{\partial x} \right| + \Lambda^{-T_n} \left| \frac{\partial \alpha_n(x, y)}{\partial x} \right| + \Lambda^{-T_n} \frac{\pi N_n}{l_n} \alpha_n(x, y) \\ &= \Lambda^{-T_n} \left(3 \left| \frac{\partial \alpha_n(x, y)}{\partial x} \right| + \frac{\pi N_n}{l_n} \alpha_n(x, y) \right) \end{aligned}$$

Daqui, utilizando que $\left| \frac{\partial \alpha_n(x, y)}{\partial x} \right| \leq \frac{N_n}{l_n} o(\alpha_n(x, y)^{1-\frac{1}{r}})$, deduzimos que

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial g_n(x, y)_2}{\partial x} \right| &\leq \frac{N_n}{l_n} o(\alpha_n(x, y)^{1-\frac{1}{r}}) \leq \Lambda^{-T_n} \left[3 \frac{N_n}{l_n} o(\alpha_n(x, y)^{1-\frac{1}{r}}) + \frac{\pi N_n}{l_n} \alpha_n(x, y) \right] \\
 &= \Lambda^{-T_n} \frac{N_n}{l_n} [o(\alpha_n(x, y)^{1-\frac{1}{r}}) + \pi \alpha_n(x, y)] = o(\Lambda^{-(1-\frac{1}{r})T_n}) [o(\alpha_n(x, y)^{1-\frac{1}{r}}) + \pi \alpha_n(x, y)] \\
 &\leq o(\Lambda^{-(1-\frac{1}{r})T_n}) (\alpha_n(x, y)^{1-\frac{1}{r}}) \leq o[(g_n(x, y)_2)^{1-\frac{1}{r}}]
 \end{aligned}$$

Finalmente, como $f_n(x, y) = f_0 \circ g_n$, ou seja, $f_n(x, y) = (K^{-1}x, \Lambda(y + \alpha_n(x, y)\Lambda^{-T_n}\{2 + \sin[\frac{\pi N_n(x-a_n)}{l_n}]\})$ em C_0 , temos que $|\frac{\partial f_n(x, y)_2}{\partial x}| = \Lambda |\frac{\partial g_n(x, y)_2}{\partial x}|$, além disso, $(g_n(x, y)_2)^{1-\frac{1}{r}} = \Lambda^{-1+\frac{1}{r}}(f_n(x, y)_2)^{1-\frac{1}{r}}$. Logo, $|\frac{\partial f(x, y)_2}{\partial x}| = \Lambda |\frac{\partial g_n(x, y)_2}{\partial x}| \leq \Lambda o((g_n(x, y)_2)^{1-\frac{1}{r}}) = \Lambda o(\Lambda^{-1+\frac{1}{r}}(f(x, y)_2)^{1-\frac{1}{r}}) = o((f(x, y)_2)^{1-\frac{1}{r}})$. Nos outros retângulos o mesmo é obtido por simetria. \square

4.4.2 Entropia das ferraduras

Mostraremos que $h(f_n^{T_n} | R_n) \geq \log N_n$ para cada $n \geq n_0$ e, como $h(f_n^{T_n}) = T_n h(f_n)$ isto implicará que $h(f) \geq \frac{\log N_n}{T_n} = \frac{\log \frac{\Lambda^{T_n}}{n^5}}{T_n} = \frac{\log \Lambda^{T_n} - \log n^5}{T_n} = \frac{T_n \log \Lambda}{T_n} - \frac{\log n^5}{T_n} = \frac{1}{r} \log \Lambda - \frac{\log n^5}{T_n}$. Nós começaremos exibindo uma ferradura dentro de R_n . $\|\cdot\|_{sup}$ denotará a norma do supremo.

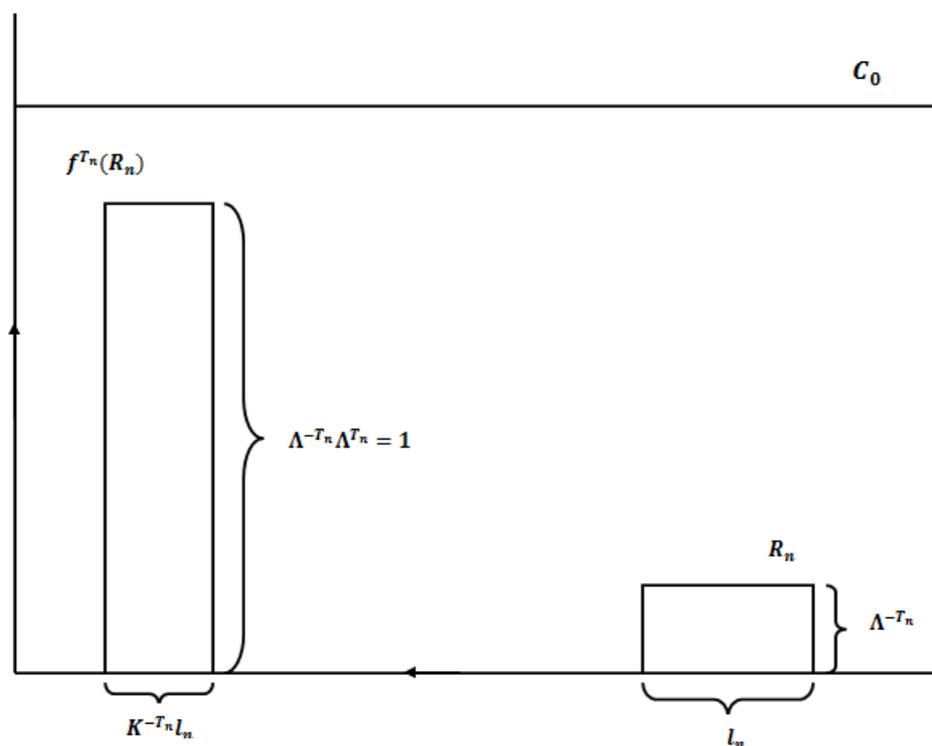


Figura 4.5: $f^{T_n} R_n$

Lema 4.4.3. *Seja $K \geq C$, $n_0 \geq C(K)$ e seja f dependendo de $n \geq n_0$ e de K e L . Para $j = 1, \dots, N_n - 1$, seja $I_{n,j} : [a_n + (j - \frac{1}{4})\frac{l_n}{N_n}, a_n + (j + \frac{1}{4})\frac{l_n}{N_n}]$ e seja $\mathcal{G}_{n,j}$ o conjunto das curvas que, em coordenadas do canto, são gráficos de funções $\phi : I_{n,j} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $\|\phi\|_{sup} < \frac{\Lambda^{-T_n-1}}{10}$ e $\|\phi'\|_{sup} < K^{-T_n}$. Então, para cada dupla $j, k = 1, \dots, N_n - 1$, para todo $\Gamma \in \mathcal{G}_{n,j}$, existe $\Gamma' \in \mathcal{G}_{n,k}$ tal que $\Gamma' \subset \rho_{i+1}^{-1} \circ f^{T_n}(\rho_i(\Gamma))$, para $i = 0, 1, 2, 3$.*

Demonstração. Por simetria, podemos assumir que $i = 0$. Observe que Γ é o gráfico de alguma função $\phi : I_{n,j} \rightarrow \mathbb{R}$. Seja $(x, y) := f_n(x_0, y_0) \in f_n(\Gamma)$. Como $f_n(x_0, y_0) = (K^{-1}x_0, \Lambda(y_0 + \alpha_n(x_0, y_0)\Lambda^{-T_n}\{2 + \sin(\frac{\pi N_n(x_0 - a_n)}{l_n}\}))$, temos que $|x| = |K^{-1}x_0| \leq K^{-1} \|x_0\| = K^{-1} |x_0|$ e $|\cos(\frac{\pi N_n(x_0 - a_n)}{l_n})| \geq \cos(\frac{\pi}{4})$ e $\alpha_n(x_0, y_0) = 1$. Além disso,

$$\begin{aligned} |y| &= \left| \Lambda(y_0 + \alpha_n(x_0, y_0)\Lambda^{-T_n}\{2 + \sin(\frac{\pi N_n(x_0 - a_n)}{l_n})\}) \right| \\ &\leq \Lambda |y_0| + \Lambda |2\alpha_n(x_0, y_0)\Lambda^{-T_n}| + \Lambda |\alpha_n(x_0, y_0)\Lambda^{-T_n} \sin(\frac{\pi N_n(x_0 - a_n)}{l_n})| \\ &\leq \Lambda |y_0| + \Lambda |2\alpha_n(x_0, y_0)\Lambda^{-T_n}| + \Lambda |\alpha_n(x_0, y_0)\Lambda^{-T_n}| \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\leq \Lambda |y_0| + (2 + \frac{\sqrt{2}}{2})\Lambda^{-T_n+1} \\ &\leq 3\Lambda^{-T_n+1} \end{aligned}$$

onde esta última desigualdade foi obtida devido ao fato de que $(x_0, y_0) \in \Gamma$, o que implica que $|y_0| < \frac{\Lambda^{-T_n-1}}{10}$ e assim, $\Lambda|y_0| < \frac{\Lambda^{-T_n+1}}{10\Lambda} < (2 + \frac{\sqrt{2}}{2})\Lambda^{-T_n+1}$. Estamos tomando valores de y em $[2\Lambda^{-T_n}, 3\Lambda^{-T_n}]$.

Façamos $y_0 = \phi(x_0)$. Assim,

$$(x, y) = f_n(x_0, \phi(x_0)) = (K^{-1}x_0, \Lambda[\phi(x_0) + \alpha_n(x_0, \phi(x_0))\Lambda^{-T_n}\{2 + \sin(\frac{\pi N_n(x_0 - a_n)}{l_n})\}])$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left| \frac{dy}{dx} \right| &= \left| \frac{[\Lambda[\phi(x_0) + \alpha_n(x_0, \phi(x_0))\Lambda^{-T_n}\{2 + \sin(\frac{\pi N_n(x_0 - a_n)}{l_n})\}]]'}{[K^{-1}x_0]'} \right| \\ &= K\Lambda\phi'(x_0) + K\Lambda \frac{\partial \alpha_n(x_0, \phi(x_0))}{\partial x_0} \{2 + \sin(\frac{\pi N_n(x_0 - a_n)}{l_n})\} \\ &\quad + K\Lambda\alpha_n(x_0, \phi(x_0))\Lambda^{-T_n} \cos(\frac{\pi N_n(x_0 - a_n)}{l_n}) \frac{\pi N_n K}{l_n} \\ &\geq K\Lambda\Lambda^{-T_n} \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \frac{N_n}{l_n} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{\Lambda^{-(1-\frac{1}{r})T_n}}{n} \Lambda K \\ &= C^{-1}(K\Lambda) \frac{\Lambda^{-(1-\frac{1}{r})T_n}}{n}. \end{aligned}$$

já que a primeira parcela não supera a segunda parcela, pois $\phi'(x_0) < K^{-T_n}$, $|\frac{\partial \alpha_n(x,y)}{\partial x}| \leq \frac{N_n}{l_n} o(\alpha_n(x,y)^{1-\frac{1}{r}})$ e $\{2 + \sin(\frac{\pi N_n(x_0 - a_n)}{l_n})\} \leq 3$.

Observemos que $f^k(f_n(\Gamma)) \subset [0, 1] \times [0, 3\Lambda^{-T_n+1+k}] \subset C_0$. (Veja a figura 4.6.)

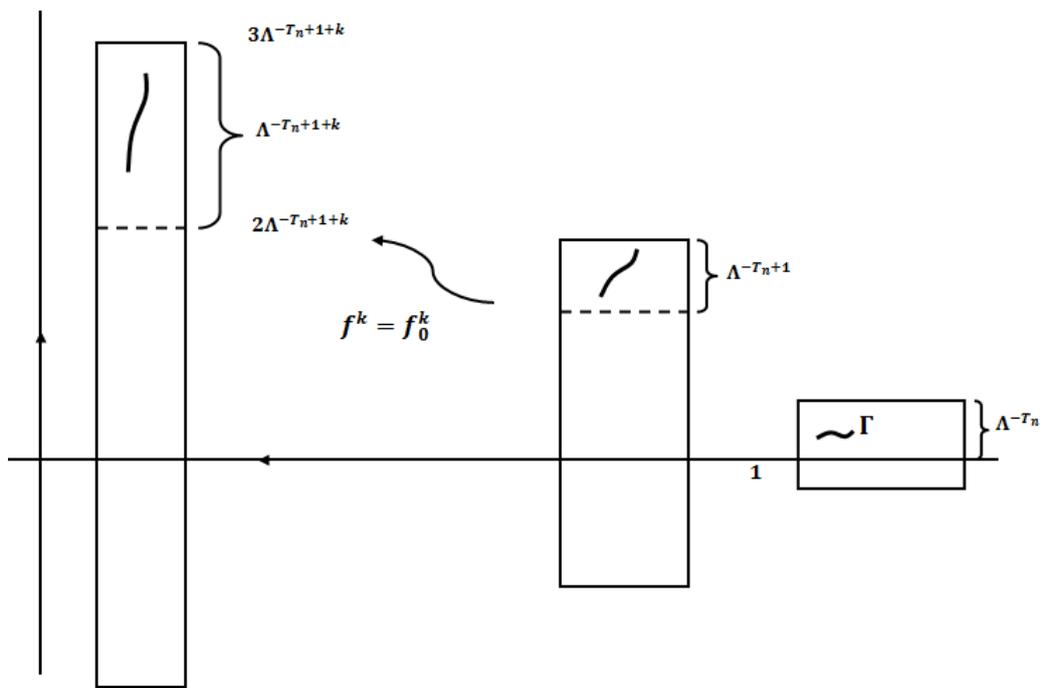


Figura 4.6: Curva Γ (Passo 1)

Assim, f^{T_n+3} contém uma parte que está a uma distância de Hausdorff de no máximo $b_n K^{-t_j}$ para um segmento vertical contendo $\{0\} \times [2, 3] \subset f(C_0) \setminus C_0$ com inclinação grande de pelo menos, $C^{-1}(K\Lambda)^{T_n} \frac{\Lambda^{-(1-\frac{1}{r})T_n}}{n}$ que vai para infinito quando n vai para infinito. (Veja a figura 4.7.)

Aplicando f_0^r que tem diferencial

$$\begin{pmatrix} \mathcal{O}(1) & K^{C^{\pm 1}} \\ 0 & C^{\pm 1} \log K \end{pmatrix}$$

com respeito às coordenadas do canto respectivamente a C_0 e a $\rho_1(C_0)$, nós obtemos uma curva na CK^{-T_n} -vizinhança de $\{\frac{-1}{2}\} \times [0, \frac{1}{6}]$ com inclinação $|\frac{dx}{dy}| \leq K^{-t_j}$. Tal curva contém a imagem por ρ_1 de algum gráfico $\Gamma' \in \mathcal{G}_k$, provando o lema. □

Corolário 4.4.4. Para todo $K, L \geq C$, $\zeta > 0$ e $n_0 \geq C(K, L, \zeta)$ a aplicação f é C^r e satisfaz:

$$\|f - f_0\|_{C^r} < \zeta \quad e \quad h(f) \geq \sup_{n \geq n_0} \frac{1}{T_n} \log(N_n - 1) = \frac{1}{r} \log \Lambda$$

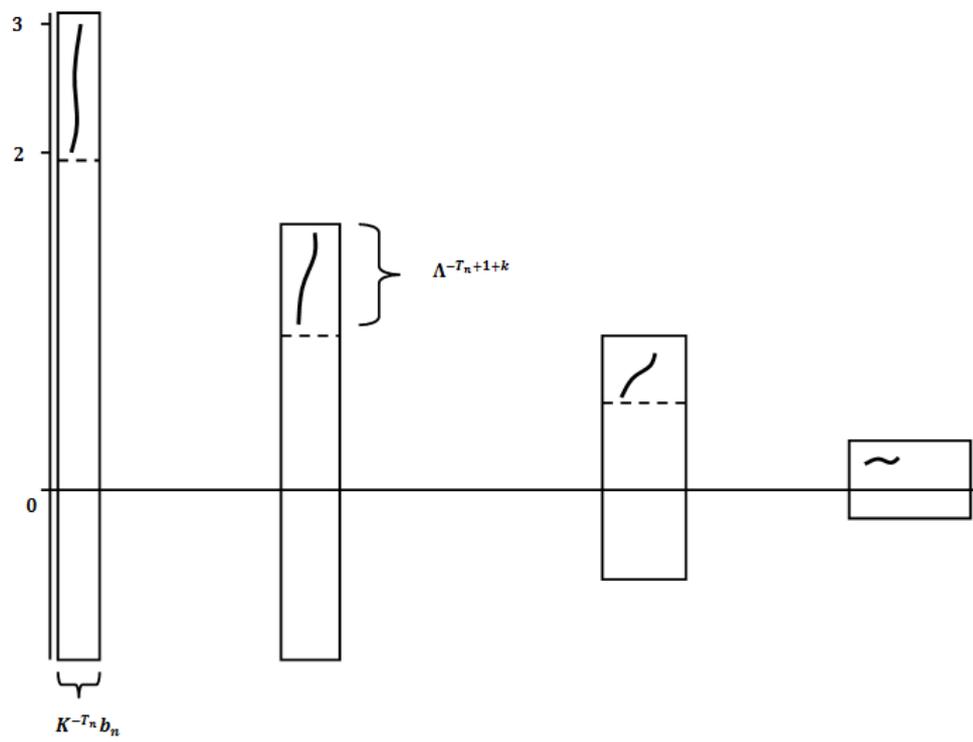


Figura 4.7: Curva Γ (Passo 2)

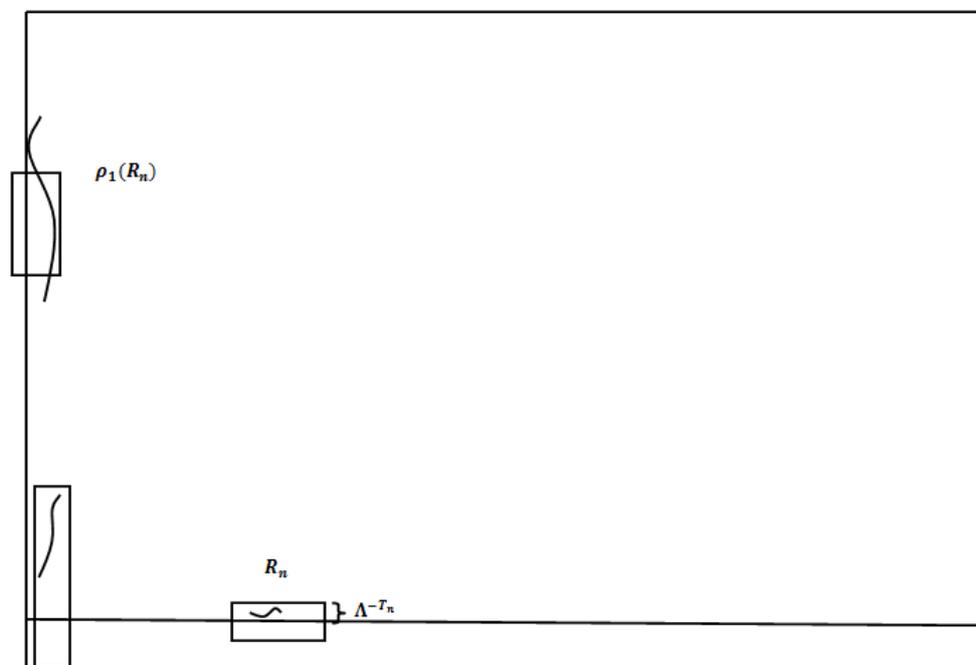


Figura 4.8: Curva Γ (Passo 3)

4.5 Expoente de Lyapunov

Nós consideraremos f dependendo de parâmetros K, L e n_0 tais que $K \geq C$, $L \geq C(K)$ e $n_0 \geq C(K, L)$ para limitantes inferiores que especificaremos no decorrer desta seção.

Cada vetor não nulo $(x, v) \in \bigcup_{x \in D} T_x^1 D$ define um expoente inferior

$$\lambda(x, v) := \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \| Df^n(x) \cdot v \|. \quad (4.3)$$

Observe que substituindo, na igualdade 4.3, o vetor (x, v) por alguma iterada $(f(x), w)$, com $w = Df(x) \cdot v$, o valor de $\lambda(x, v)$ não muda, pois:

$$\begin{aligned} \lambda(f(x), Df(x) \cdot v) &= \liminf_{n+1 \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \log \| Df^n(f(x)) \cdot Df(x)v \| \\ &= \liminf_{n+1 \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \log \| Df^{n+1}(x) \cdot v \| \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \| Df^n(x) \cdot v \| = \lambda(x, v). \end{aligned}$$

Nós definimos, em coordenadas do canto, $\Delta := \bigcup_{i=0}^3 \rho_i([2K^{-1}, 2] \times (0, 2])$.

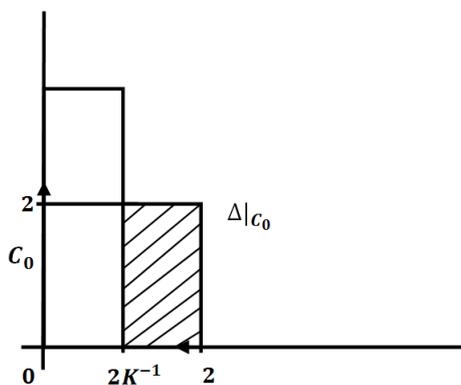


Figura 4.9: $\Delta|_{c_0}$

Proposição 4.5.1. Para todo $K \geq C$, $L \geq C(K)$, $n_0 \geq C(K, L)$, existe $\chi > 0$ tal que para todo $x \in \text{int}(Q_1 \setminus Q_3)$ e todo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$\lambda(x, v) < \frac{1}{r} \log \Lambda - \chi \cdot \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{0 \leq k < n; f^k x \in \Delta\} \quad (4.4)$$

Na seguinte seção veremos alguns resultados chave para a demonstração da proposição acima.

4.5.1 Divisão da órbita

Pela proposição 4.3.1, definimos $C := \bigcup_{i=0}^3 \rho_i(C_0)$ onde f_0 é afim. Chamamos de segmentos afins os intervalos maximais de inteiros $k \in \mathbb{Z}$ tais que $f^k(x) \in C$. Há um número infinito deles em \mathbb{N} . Estamos assumindo que $x \in C$ e $x \notin f(C)$. Nós denotamos os segmentos afins por $[t_0, s_1] < [t_1, s_2] < \dots$ e assumimos que $t_0 = 0$.

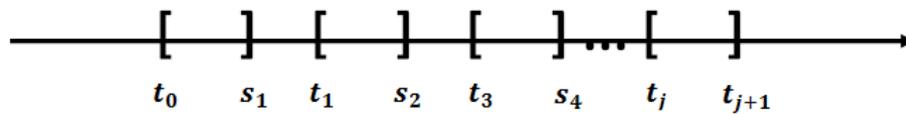


Figura 4.10: Momentos os quais a órbita está contida em C (Visualização 1)

De acordo com o lema 4.4.1, os inteiros t_j são somente os inteiros $t \geq 0$ para o qual $f^t(x)$ pode pertencer ao suporte R_n de uma perturbação (para algum $n \geq n_0$). Note também que para cada $t \geq 0$, $f^t x \in C_0 \setminus f(C_0)$ se e somente se $f^t x \in \Delta$. Em particular, $\{t_0 < t_1 < t_2 < \dots\} = \{t \geq 0 : f^t x \in \Delta\}$.

Fixemos v . Utilizaremos as seguintes notações correspondentes aos momentos de primeira entrada em C :

$$\begin{cases} x_j = f^{t_j}(x) \\ v_j = Df^{t_j}(x)v \end{cases}$$

Mais geralmente, para todo $l \geq 0$:

$$\begin{cases} x(l) = f^l(x) \\ v(l) = Df^l(x)v \end{cases}$$

Dividiremos períodos na órbita de acordo com a posição relativa a C :

$$\begin{cases} \tau_j = t_j - t_{j-1} & \text{(Diferença de tempos de entrada consecutivos)} \\ \tau'_j = s_j - t_{j-1} & \text{(Tempo "gasto" na } j\text{-ésima visita a } C) \end{cases}$$

Dado $v_j = ((v_j)_1, (v_j)_2)$, o seu declive é:

$$\theta_j = \frac{(v_j)_2}{(v_j)_1} \quad (\text{Declive no momento de entrada em } C).$$

Analogamente, se $v_{s_j} = ((v_{s_j})_1, (v_{s_j})_2)$, definimos como sendo:

$$\tilde{\theta}_j = \frac{(v_{s_j})_1}{(v_{s_j})_2} \quad (\text{Declive no momento de saída de } C).$$

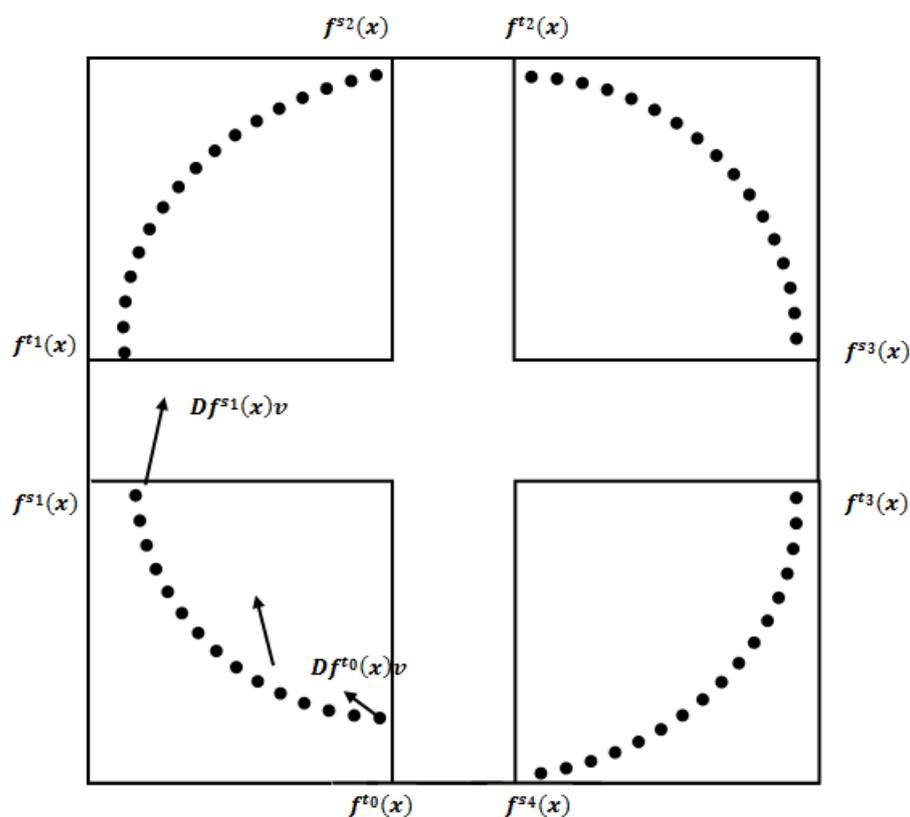


Figura 4.11: Momentos os quais a órbita está contida em C (Visualização 2)

Os seguintes lemas são aplicações diretas das estimativas anteriores da proposição 4.3.1 e lema 4.4.2 para as seqüências $x(t)$, $v(t)$, $t \geq 0$.

Lema 4.5.2. Considerando o intervalo de tempos $[t_{j-1} + 1, s_j]$ valem:

1. $x(s_j)_1 = K^{-\tau_j+1}x(t_{j-1} + 1)_1$ e $x(s_j)_2 = \Lambda^{\tau_j-1}x(t_{j-1} + 1)_2$, ou seja: $f^{s_j}(x)_1 = K^{t_{j-1}-t_j+1}f^{t_{j-1}+1}(x)_1$ e $f^{s_j}(x)_2 = K^{t_{j-1}-t_j+1}f^{t_{j-1}+1}(x)_2$;
2. $v(s_j)_1 = K^{-\tau_j+1}v(t_{j-1} + 1)_1$ e $v(s_j)_2 = \Lambda^{\tau_j-1}v(t_{j-1} + 1)_2$, ou seja: $((f^{s_j})'(x)v)_1 = K^{t_{j-1}-t_j+1}((f^{t_{j-1}+1})'(x)v)_1$ e $((f^{s_j})'(x)v)_2 = K^{t_{j-1}-t_j+1}((f^{t_{j-1}+1})'(x)v)_2$.

Lema 4.5.3. Considerando o intervalo de tempos $[t_j, t_j + 1]$, se $x_j \in R_n$ então:

1. $x(t_j + 1)_1 = K^{-1}(x_j)_1$ e $x(t_j + 1)_2 = \Lambda((x_j)_2 + (2 \pm 1)\alpha_n(x_j)\Lambda^{-T_n})$;
2. $v(t_j + 1)_1 = K^{-1}(v_j)_1$ e $v(t_j + 1)_2 = \Lambda((v_j)_2 \pm C(x(t_j + 1)_2)^{1-\frac{1}{r}}(v_j)_1)$.

Lema 4.5.4. Considerando o intervalo $[s_j, t_j]$ de tempos fora da região de coordenadas lineares dos cantos, valem:

1. $(x_j)_1 = \tilde{h}(x(s_j)_2)$ e $(x_j)_2 = \tilde{\alpha}(x(s_j)_2)x(s_j)_1$;
2. $(v_j)_1 = \tilde{h}(x(s_j)_2)v(s_j)_2$ e $(v_j)_2 = |\tilde{\alpha}(x(s_j)_2)v(s_j)_1 + \tilde{\alpha}'(x(s_j)_2)x(s_j)_1v(s_j)_2|$.

Lema 4.5.5. Para cada $j \geq 1$, $K^{-\tau'_j}\Lambda^{\tau'_{j+1}} \leq K^C$.

Demonstração. Usando 4.5.2, 4.5.3 e 4.5.4, temos que:

$$\begin{aligned}
 x(s_{j+1})_2 &= \Lambda^{\tau'_{j+1}-1}x(t_j + 1)_2 = \Lambda^{\tau'_{j+1}-1}\Lambda((x_j)_2 + (2 \pm 1)\alpha_n(x_j)\Lambda^{-T_n}) \\
 &= \Lambda^{\tau'_{j+1}}((x_j)_2 + (2 \pm 1)\alpha_n(x_j)\Lambda^{-T_n}) \geq \Lambda^{\tau'_{j+1}}((x_j)_2) \\
 &= \Lambda^{\tau'_{j+1}}\tilde{\alpha}(x(s_j)_2)x(s_j)_1 = \Lambda^{\tau'_{j+1}}k^{-C\pm 1}x(s_j)_1 \\
 &\geq \Lambda^{\tau'_{j+1}}K^{-C}x(s_j)_1 = K^{-C}\Lambda^{\tau'_{j+1}}K^{-\tau'_j+1}x(t_{j-1} + 1)_1 \\
 &= K^{-C}\Lambda^{\tau'_{j+1}}K^{-\tau'_j+1}K^{-1}(x_{j-1})_1 = K^{-C}\Lambda^{\tau'_{j+1}}K^{-\tau'_j}K^{-1}(x_{j-1})_1.
 \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
 x(s_{j+1})_2 &= \Lambda^{\tau'_{j+1}-1}x(t_j + 1)_2 = \Lambda^{\tau'_{j+1}}((x_j)_2 + (2 \pm 1)\alpha_n(x_j)\Lambda^{-T_n}) \\
 &= \Lambda^{\tau'_{j+1}}(\tilde{\alpha}(x(s_j)_2)x(s_j)_1 + (2 \pm 1)\alpha_n(x_j)\Lambda^{-T_n}) \\
 &= \Lambda^{\tau'_{j+1}}(\tilde{\alpha}(x(s_j)_2)K^{-\tau'_j+1}x(t_{j-1} + 1)_1 + (2 \pm 1)\alpha_n(x_j)\Lambda^{-T_n}) \\
 &= \Lambda^{\tau'_{j+1}}(\tilde{\alpha}(x(s_j)_2)K^{-\tau'_j+1}K^{-1}(x_{j-1})_1 + (2 \pm 1)\alpha_n(x_j)\Lambda^{-T_n}) \\
 &= \Lambda^{\tau'_{j+1}}(\tilde{\alpha}(x(s_j)_2)K^{-\tau'_j+1}K^{-1}\tilde{h}(x(s_{j-1})_2) + (2 \pm 1)\alpha_n(x_j)\Lambda^{-T_n}) \\
 &= \Lambda^{\tau'_{j+1}}(K^{-C\pm 1}K^{-\tau'_j+1}K^{-1}C^{\pm 1}\log K + (2 \pm 1)\alpha_n(x_j)\Lambda^{-T_n}) \\
 &\leq \Lambda^{\tau'_{j+1}}(K^{\frac{-1}{c}}K^{-\tau'_j+1}K^{-1}C\log K + 3\alpha_n(x_j)\Lambda^{-T_n}) \\
 &= \Lambda^{\tau'_{j+1}}\left(\frac{1}{K^{\frac{1}{c}+\tau'_j}}C\log K + 3\alpha_n(x_j)\Lambda^{-T_n}\right) \\
 &\leq \Lambda^{\tau'_{j+1}}\left(\frac{1}{K^{\frac{1}{c}+\tau'_j}}C\log K + 3\Lambda^{-T_n}\right) \\
 &\leq \frac{1}{K^{\frac{1}{c}+\tau'_j}}C\log K + 3 \leq C,
 \end{aligned}$$

e

$$(x_{j-1})_1 = \tilde{h}(x(s_{j-1})_2) = C^{\pm 1}\log K \geq C^{-1}\log K \geq C^{-1}$$

segue que

$$C \geq x(s_{j+1})_2 \geq K^{-C} \Lambda^{\tau'_{j+1}} K^{-\tau'_j} (x_{j-1})_1 \geq K^{-C} \Lambda^{\tau'_{j+1}} K^{-\tau'_j} C^{-1}$$

e isto implica que $2C \geq K^{-C} \Lambda^{\tau'_{j+1}} K^{-\tau'_j} \Rightarrow$. Assim sendo, $C^* \geq K^{-C} \Lambda^{\tau'_{j+1}} K^{-\tau'_j} \Rightarrow$. Isto prova que $K^{-\tau'_j} \Lambda^{\tau'_{j+1}} \leq K^C$ e assim completamos a prova do lema. \square

O próximo lema nos diz que o tempo "gasto" na j -ésima visita a C é grande.

Lema 4.5.6. Para cada $n_0 \geq C(K)$, para cada j suficientemente grande, $\tau'_j \geq \frac{T_{n_0}}{3r}$.

Demonstração. A prova segue de duas afirmações.

Afirmção 4.5.7. Se $x_j \in R_n$ com $n \geq n_0$, então $\tau'_{j+1} \geq \frac{T_n}{2r} - C \log n$.

Observe que se $x_j \in R_n$, para algum $n \geq n_0$, implica que $(x_j)_2 \leq n \Lambda^{\frac{-T_n}{r}}$ (Lembre-se de que o ponto extremo superior de R_n é $\frac{1}{N_n}$). Assim, $x(t_j + 1)_2 = \Lambda((x_j)_2 + (2 \pm 1)\alpha_n(x_j)\Lambda^{-T_n}) \leq \Lambda(n\Lambda^{\frac{-T_n}{r}} + 3\Lambda^{-T_n}) = n\Lambda^{\frac{-T_n}{r}+1} + 3\Lambda^{-T_n+1} \leq 2n\Lambda^{\frac{-T_n}{r}+1}$ e pelo Lema 4.5.2, como

$$\begin{aligned} x(s_{j+1})_2 &= \Lambda^{\tau'_{j+1}-1} x(t_j + 1)_2 \leq \Lambda^{\tau'_{j+1}-1} 2n\Lambda^{\frac{-T_n}{r}+1} \Rightarrow \\ \log x(s_{j+1})_2 &\leq \log \Lambda^{\tau'_{j+1}-1} + \log 2n \Rightarrow \\ \log x(s_{j+1})_2 &\leq (\tau'_{j+1} - \frac{T_n}{r}) \log \Lambda + \log 2n \Rightarrow \\ \log x(s_{j+1})_2 &\leq \tau'_{j+1} \log \Lambda - \frac{T_n}{r} \log \Lambda + \log 2n \Rightarrow \\ \log x(s_{j+1})_2 + \frac{T_n}{r} \log \Lambda - \log 2n &\leq \tau'_{j+1} \log \Lambda \Rightarrow \\ \frac{\log x(s_{j+1})_2}{\log \Lambda} + \frac{T_n}{r} - \frac{\log 2n}{\log \Lambda} &\leq \tau'_{j+1} \Rightarrow \\ \tau'_{j+1} &\geq \frac{T_n}{r} - \log 2n.C \geq \frac{T_{n_0}}{2r} - \log n_0.C, \end{aligned}$$

o que prova a afirmação para $n_0 \geq C$.

Afirmção 4.5.8. $\limsup_{j \rightarrow \infty} \tau'_j > \frac{T_{n_0}}{3r}$.

Pela afirmação 4.5.7, $\limsup_{j \rightarrow \infty} \tau'_j \leq \frac{T_{n_0}}{3r}$ implica que a órbita de x eventualmente coincide com a órbita de f_0 . O item 4 da proposição 4.3.1 implica que $\lim_{j \rightarrow \infty} \tau'_j = \infty$, o que é uma contradição.

Afirmção 4.5.9. Se $x_j \notin \bigcup_{n \geq n_0} R_n$, então $\tau'_{j+1} \geq \eta \tau'_j - C^* \log K$, onde $\eta := \frac{\log K}{\log \Lambda} > 1$.

Utilizando os lemas 4.5.2, 4.5.3 e 4.5.4 e assumindo que $x(s_{j+1})_2 = C^{\pm 1}$ e $(x_{j-1})_1 = C^{\pm 1}$, temos que

$$\begin{aligned} C^{\pm 1} &= x(s_{j+1})_2 = \Lambda^{\tau'_{j+1}-1} x(t_j + 1)_2 = \Lambda^{\tau'_{j+1}} (x_j)_2 \\ &= \Lambda^{\tau'_{j+1}} K^{-C^{\pm 1}} x(s_j)_1 = \Lambda^{\tau'_{j+1}} K^{-C^{\pm 1}} K^{-\tau'_j+1} x(t_{j-1} + 1)_1 \\ &= \Lambda^{\tau'_{j+1}} K^{-C^{\pm 1}} K^{-\tau'_j+1} K^{-1} (x_{j-1})_1 = \Lambda^{\tau'_{j+1}} K^{-C^{\pm 1}} K^{-\tau'_j} (x_{j-1})_1 \\ &= \Lambda^{\tau'_{j+1}} K^{-C^{\pm 1}} K^{-\tau'_j} C^{\pm 1} = \Lambda^{\tau'_{j+1}} K^{\pm C} K^{-\tau'_j} \end{aligned}$$

Assim,

$$C = K^{\pm C} \Lambda^{\tau'_{j+1}} K^{-\tau'_j} \Rightarrow$$

$$\log C = \pm C \log K + \tau'_{j+1} \log \Lambda - \tau'_j \log K$$

$$\tau'_{j+1} \log \Lambda = \log C + \tau'_j \log K \pm C \log K$$

Assim sendo:

$$\tau'_{j+1} = \frac{\log C}{\log \Lambda} + \tau'_j \frac{\log K}{\log \Lambda} \pm C \frac{\log K}{\log \Lambda} \geq \tau'_j \eta \pm C^* \log K$$

Tomando $n_0 \geq C(K)$, nós garantimos que $\frac{(\eta-1)T_{n_0}}{3r} > 2C \log K$ e $C \log n_0 < \frac{T_{n_0}}{6r}$

Da afirmação 4.5.8 existe algum $\tau'_{j_*} \geq \frac{T_{n_0}}{3r}$. Assumindo, por indução, que $\tau'_j \geq \frac{T_{n_0}}{3r}$, nós obtemos, para cada $n \geq j_*$, aplicando a afirmação 4.5.7 ou 4.5.9 que,

$$\tau'_{j+1} \geq \min\left(1 + \frac{(\eta-1)}{2}\right) \tau'_{j_*} \frac{T_{n_0}}{3} \geq \frac{T_{n_0}}{3r}$$

□

Nós podemos supor, dessa maneira, que $n_0 \geq C(K)$ e que, para cada $j \geq 0$, $\tau'_j \geq \frac{T_{n_0}}{3r}$.

Lema 4.5.10. $\theta_j = K^{-C^{\pm 1}} (\tilde{\theta}_j + \mathcal{O}(x(s_j)_1)) = K^{-C^{\pm 1}} (\tilde{\theta}_j + \mathcal{O}(K^C \Lambda^{-\tau'_{j+1}}))$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 \theta_j = \frac{(v_j)_2}{(v_j)_1} &= \frac{\tilde{\alpha}(x(s_j)_2)v(s_j)_1 + \tilde{\alpha}'(x(s_j)_2)x(s_j)_1v(s_j)_2}{\tilde{h}'(x(s_j)_2)v(s_j)_2} = \frac{\tilde{\alpha}(x(s_j)_2)}{\tilde{h}'(x(s_j)_2)}\tilde{\theta}_j + \frac{\tilde{\alpha}'(x(s_j)_2)x(s_j)_1}{\tilde{h}'(x(s_j)_2)} \\
 &= \frac{\tilde{\alpha}(x(s_j)_2)}{\tilde{h}'(x(s_j)_2)}\tilde{\theta}_j + \frac{C\tilde{\alpha}(x(s_j)_2)x(s_j)_1}{\tilde{h}'(x(s_j)_2)} = \frac{\tilde{\alpha}(x(s_j)_2)}{\tilde{h}'(x(s_j)_2)}(\tilde{\theta}_j + Cx(s_j)_1) \\
 &= \frac{\tilde{\alpha}(x(s_j)_2)}{\tilde{h}'(x(s_j)_2)}(\tilde{\theta}_j + \mathcal{O}(x(s_j)_1)) = \frac{K^{-C^{\pm 1}}}{C^{\pm 1} \log K}(\tilde{\theta}_j + \mathcal{O}(x(s_j)_1))
 \end{aligned}$$

Observe que fizemos $\frac{K^{-C^{\pm 1}}}{C^{\pm 1} \log K} = K^{-C^{\pm 1}}$. Usando os lemas 4.5.4, 4.5.3 e 4.5.2, nesta ordem, concluímos que:

$$x(s_j)_1 = \mathcal{O}(K^c(x_j)_2) = \mathcal{O}(K^C x(t_j + 1)_2) = \mathcal{O}(K^C \Lambda^{-\tau'_{j+1}}).$$

□

4.5.2 Expansão em um segmento afim

Após a descrição da órbita de pontos típicos descrevemos o comportamento das iteradas dos vetores por Df . Construiremos expansões em segmentos afins, distinguidas de acordo com o valor da tangente $\theta_j = \frac{(v_j)_2}{(v_j)_1}$ (em coordenadas do canto).

Definição 4.5.11. Um tempo t_j é dito especial se $\theta_j > \Lambda^{-(1-\frac{1}{r})\tau'_{j+1}}$.

(Note que a definição depende de j .)

O próximo lema garante cota de crescimento dos vetores v_{j-1} para v_j se t_{j-1} não é especial.

Lema 4.5.12. Para cada $j \geq 1$, se t_{j-1} não é especial então

$$|v_j| \leq C \log K \cdot \Lambda^{\frac{\tau'_j}{r}} |v_{j-1}|$$

(em que $|\cdot|$ é a norma euclidiana).

Demonstração. Usando os lemas 4.5.2 e 4.5.3 e que $x(t_{j-1} + 1)_2 \leq C\Lambda^{-\tau'_j}$ temos que

- O crescimento na direção horizontal é dado por $|v(s_j)|_1 = |K^{-\tau'_j+1}v(t_{j-1} + 1)_1|$;
- O crescimento na direção vertical é dado por $|v(s_j)|_2 = \Lambda^{\tau'_j-1}v(t_{j-1} + 1)_2$.

Assim,

$$\begin{aligned}
 |v(s_j)| &\leq v(s_j)_1 + v(s_j)_2 = K^{-\tau'_j+1}v(t_{j-1}+1)_1 + \Lambda^{\tau'_j-1}v(t_{j-1}+1)_2 \\
 &= K^{-\tau'_j+1}k^{-1}(v_{j-1})_1 + \Lambda^{\tau'_j-1}v(t_{j-1}+1)_2 \\
 &\leq K^{-\tau'_j}|v_{j-1}| + \Lambda^{\tau'_j-1}\Lambda((v_{j-1})_2 \pm C(x(t_{j-1}+1)_2)^{1-\frac{1}{r}}(v_{j-1})_1) \\
 &= K^{-\tau'_j}|v_{j-1}| + \Lambda^{\tau'_j}((v_{j-1})_2 \pm C(x(t_{j-1}+1)_2)^{1-\frac{1}{r}}(v_{j-1})_1) \\
 &= K^{-\tau'_j}|v_{j-1}| + \Lambda^{\tau'_j}(\theta_{j-1}(v_{j-1})_1 \pm C(x(t_{j-1}+1)_2)^{1-\frac{1}{r}}(v_{j-1})_1) \\
 &= K^{-\tau'_j}|v_{j-1}| + \Lambda^{\tau'_j}(\theta_{j-1} \pm C(x(t_{j-1}+1)_2)^{1-\frac{1}{r}})(v_{j-1})_1 \\
 &= K^{-\tau'_j}|v_{j-1}| + \Lambda^{\tau'_j}(\theta_{j-1} + (x(t_{j-1}+1)_2)^{1-\frac{1}{r}})(v_{j-1})_1 \\
 &\leq K^{-\tau'_j}|v_{j-1}| + \Lambda^{\tau'_j}(\theta_{j-1} + (C\Lambda^{-\tau'_j})^{1-\frac{1}{r}})|v_{j-1}| \\
 &= K^{-\tau'_j}|v_{j-1}| + \Lambda^{\tau'_j}(\theta_{j-1} + C\Lambda^{-(1-\frac{1}{r})\tau'_j})|v_{j-1}|
 \end{aligned}$$

Como $\theta_{j-1} \leq \Lambda^{-(1-\frac{1}{r})\tau'_j}$, pois t_{j-1} não é especial, então substituímos na relação anterior e obtemos que

$$\begin{aligned}
 |v(s_j)| &\leq (K^{-\tau'_j} + \Lambda^{\tau'_j}(\theta_{j-1} + C\Lambda^{-(1-\frac{1}{r})\tau'_j}))|v_{j-1}| \\
 &\leq (K^{-\tau'_j} + \Lambda^{\tau'_j}(\Lambda^{-(1-\frac{1}{r})\tau'_j} + C\Lambda^{-(1-\frac{1}{r})\tau'_j}))|v_{j-1}| \\
 &= (K^{-\tau'_j} + \Lambda^{\frac{\tau'_j}{r}} + C\Lambda^{\tau'_j}\Lambda^{-(1-\frac{1}{r})\tau'_j})|v_{j-1}| \\
 &\leq (1 + C\Lambda^{\tau'_j}\Lambda^{-(1-\frac{1}{r})\tau'_j})|v_{j-1}| \\
 &= (1 \pm C\Lambda^{\frac{\tau'_j}{r}})|v_{j-1}| = |v_{j-1}| + C\Lambda^{\frac{\tau'_j}{r}}|v_{j-1}| \leq C\Lambda^{\frac{\tau'_j}{r}}|v_{j-1}|.
 \end{aligned}$$

Usando o lema 4.5.4,

$$\begin{aligned}
 |v_j| &= |\tilde{h}(x(s_j)_2)v(s_j)_2 + \tilde{\alpha}(x(s_j)_2)v(s_j)_1 + \tilde{\alpha}'(x(s_j)_2)x(s_j)_1v(s_j)_2| \\
 &\leq |\tilde{h}(x(s_j)_2)v(s_j)_2| + |\tilde{\alpha}(x(s_j)_2)v(s_j)_1| + |\tilde{\alpha}'(x(s_j)_2)x(s_j)_1v(s_j)_2| \\
 &\leq C \log K |v(s_j)_2| + K^{-C-1}|v(s_j)_1| + CK^{-C-1}K^{-1}C1 \log K |v(s_j)_2| \\
 &= C \log K |v(s_j)_2| + K^{-C-1}|v(s_j)_1| \\
 &\leq C \log K |v(s_j)| \leq C \log K (|v_{j-1}| + C\Lambda^{\frac{\tau'_j}{r}}|v_{j-1}|) \\
 &\leq C \log K |v_{j-1}| + C^* \log K \Lambda^{\frac{\tau'_j}{r}}|v_{j-1}|.
 \end{aligned}$$

□

O próximo lema garante cota de crescimento dos vetores v_{j-2} para v_j se t_{j-1} é especial.

Lema 4.5.13. Para cada $j \geq 2$, se t_{j-1} é especial então $|v_j| \leq K^C |v_{j-2}|$.

Demonstração. Seja n tal que t_{j-1} é especial, isto é, $\theta_{j-1} > \Lambda^{-(1-\frac{1}{r})\tau'_j}$. Pelo lema 4.5.10,

$$\tilde{\theta}_{j-1} = \frac{\theta_{j-1}}{K^{-C\pm 1}} - \frac{K^{-C\pm 1}CK^C\Lambda^{-\tau'_j}}{K^{-C\pm 1}} = \frac{\theta_{j-1}}{K^{-C\pm 1}} - CK^C\Lambda^{-\tau'_j}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\theta}_{j-1}}{\theta_{j-1}} &= \frac{1}{K^{-C\pm 1}} - \frac{CK^C\Lambda^{-\tau'_j}}{\theta_{j-1}} \\ &\geq \frac{1}{K^{-C-1}} - \frac{CK^C\Lambda^{-\tau'_j}}{\theta_{j-1}} \geq K^{-C} - \frac{K^C\Lambda^{-\tau'_j}}{\Lambda^{-(1-\frac{1}{r})\tau'_j}} \\ &= K^{-C} - \frac{K^C\Lambda^{-\tau'_j}}{\Lambda^{-\tau'_j}\Lambda^{\frac{\tau'_j}{r}}} \geq K^{-C} - C\Lambda^{-\frac{\tau'_j}{r}} \geq K^{-C} \end{aligned}$$

quando $\tau'_j \geq \frac{T_{n_0}}{3r}$ é grande.

Por definição, $(v_{j-1})_2 = \theta_{j-1}(v_{j-1})_1$. Assim, $(v_{j-1})_2 \leq \theta_{j-1} |v_{j-1}|$ o que implica que $(v_{j-1})_2 \leq \min(\theta_{j-1}, 1) |v_{j-1}|$. Além disso, como $\frac{1}{\theta_{s_{j-1}}} = \frac{(v_{s_{j-1}})_2}{(v_{s_{j-1}})_1}$ e $|v_{s_{j-1}}|^2 = |(v_{s_{j-1}})_1|^2 + |(v_{s_{j-1}})_2|^2$, $|v_{s_{j-1}}| = \sqrt{|(v_{s_{j-1}})_1|^2 + \frac{1}{|\theta_{j-1}|^2} |(v_{s_{j-1}})_1|^2} = (v_{s_{j-1}})_1 \sqrt{1 + \frac{1}{|\theta_{j-1}|^2}}$. Daqui, se $\tilde{\theta}_{j-1} > 1$ então $|v_{s_{j-1}}| \leq (v_{s_{j-1}})_1 \frac{2}{\min(\theta_{j-1}, 1)}$. De outra maneira, como $|v_{s_{j-1}}| = (v_{s_{j-1}})_1 \frac{1}{\theta_{j-1}} \sqrt{1 + (\tilde{\theta}_{j-1})^2}$, segue que se $\tilde{\theta}_{j-1} < 1$ então $|v_{s_{j-1}}| \leq (v_{s_{j-1}})_1 \frac{2}{\min(\theta_{j-1}, 1)}$.

Do lema 4.5.4, utilizando o fato de que $|v_j| \leq C(\log K) |v(s_j)|$, pelos lemas 4.5.2 e 4.5.3 e pelo fato de t_{j-1} ser especial, segue que

$$\begin{aligned} |v(s_j)| &\leq \Lambda^{\tau'_j-1} v(t_{j-1}+1)_2 + K^{\tau'_j+1} v(t_{j-1}+1)_1 \\ &\leq \Lambda^{\tau'_j} ((v_{j-1})_2 + C(x(t_{j-1}+1)_2)^{1-\frac{1}{r}} (v_{j-1})_1) + K^{-\tau'_j} (v_{j-1})_1 \\ &\leq \Lambda^{\tau'_j} ((v_{j-1})_2 + C\Lambda^{-(1-\frac{1}{r})\tau'_j} (v_{j-1})_1) + K^{-\tau'_j} (v_{j-1})_1 \\ &= \Lambda^{\tau'_j} (v_{j-1})_2 + (C\Lambda^{-\frac{\tau'_j}{r}} + K^{-\tau'_j}) (v_{j-1})_1 \\ &\leq \Lambda^{\tau'_j} \cdot 2 \min(\theta_{j-1}, 1) |v_{j-1}| + (C\Lambda^{-\frac{\tau'_j}{r}} + K^{-\tau'_j}) |v_{j-1}| \\ &= (\Lambda^{\tau'_j} \cdot 2 \min(\theta_{j-1}, 1) + C\Lambda^{-\frac{\tau'_j}{r}} + K^{-\tau'_j}) |v_{j-1}| \\ &\leq C\Lambda^{\tau'_j} \min(\theta_{j-1}, 1) |v_{j-1}| \end{aligned}$$

Nós também temos que $|v_{j-1}| \leq C(\log K) |v(s_{j-1})|$ e

$$\begin{aligned}
 |v(s_{j-1})| &\leq \frac{2}{\min(\widetilde{\theta}_{j-1}, 1)} v(s_{j-1})_1 \\
 &= \frac{2}{\min(\widetilde{\theta}_{j-1}, 1)} K^{-\tau'_{j-1}+1} v(s_{j-2} + 1)_1 \\
 &= \frac{2}{\min(\widetilde{\theta}_{j-1}, 1)} K^{-\tau'_{j-1}} (v_{j-2})_1 \\
 &\leq \frac{2}{\min(\widetilde{\theta}_{j-1}, 1)} K^{-\tau'_{j-1}} |v_{j-2}|.
 \end{aligned}$$

Assim, através das desigualdades acima, temos que:

$$\begin{aligned}
 |v_j| &\leq C(\log K) |v(s_j)| \\
 &\leq C(\log K) C \Lambda^{\tau'_j} \min(\theta_{j-1}, 1) |v_{j-1}| \\
 &\leq C(\log K) \Lambda^{\tau'_j} \min(\theta_{j-1}, 1) C(\log K) |v(s_{j-1})| \\
 &= C(\log K)^2 \Lambda^{\tau'_j} \min(\theta_{j-1}, 1) |v(s_{j-1})| \\
 &\leq C(\log K)^2 \Lambda^{\tau'_j} \min(\theta_{j-1}, 1) \frac{2}{\min(\widetilde{\theta}_{j-1}, 1)} K^{-\tau'_{j-1}} |v_{j-2}| \\
 &= C(\log K)^2 \frac{\min(\theta_{j-1}, 1)}{\min(\widetilde{\theta}_{j-1}, 1)} \Lambda^{\tau'_j} K^{-\tau'_{j-1}} |v_{j-2}| \\
 &\leq C(\log K)^2 \frac{\min(\theta_{j-1}, 1)}{\min(\widetilde{\theta}_{j-1}, 1)} K^C |v_{j-2}| \\
 &\leq C(\log K)^2 K^C |v_{j-2}| \\
 &= K^C |v_{j-2}|
 \end{aligned}$$

Nesta última igualdade utilizamos que $\log K \ll K$, já que K é grande. Dessa forma, $(\log K)^2 K^C \leq K^2 K^C = K^{C'}$, com $C' > 0$. Aqui, denotamos $C' = C$. \square

4.5.3 Prova da Proposição 4.5.1

Lembremos que substituindo (x, v) por $(f^t(x), Df^t(x).v)$ a proposição 4.5.1 não é afetada. Assim, nós podemos continuar assumindo que $t_0 = 0$, $K, L \geq C$, $n_0 \geq C(K)$ e, para cada $j \geq 0$, $\tau'_j \geq \frac{T_{n_0}}{3r}$. Estas hipóteses permitirão a aplicação do corolário 4.4.4 e dos lemas 4.5.12 e 4.5.13.

Se necessário nós aumentamos os limitantes inferiores $L \geq CK$ e $n_0 \geq C(K)$ para garantir que, para todo $\epsilon > 0$ dado,

$$1000.C \log K < \Lambda^{C-1} L \text{ e } 1000^2 K^C < \Lambda^{\frac{2\epsilon T_{n_0}}{(3r^2)}}.$$

Quando $\tau_j = \tau'_j + C^{\pm 1}L$, os lemas 4.5.12 e 4.5.13 implicam, respectivamente, que

$$\begin{aligned} |v_j| &\leq C \log K \Lambda^{\frac{\tau'_j}{r}} |v_{j-1}| \leq \frac{\Lambda^{C^{-1}L}}{1000} \Lambda^{\frac{\tau'_j}{r}} |v_{j-1}| \\ &= \frac{\Lambda^{\frac{\tau'_j}{r} + C^{-1}L}}{1000} |v_{j-1}| = \frac{\Lambda^{\frac{\tau'_j + C^{-1}L}{r}}}{1000} |v_{j-1}| \\ &= \frac{\Lambda^{\frac{\tau_j - C^{-1}L + C^{-1}L}{r}}}{1000} |v_{j-1}| = \frac{\Lambda^{\frac{\tau_j}{r}}}{1000} |v_{j-1}| \end{aligned} \quad (4.5)$$

e

$$\begin{aligned} |v_j| &\leq K^C |v_{j-2}| \\ &\leq \frac{\Lambda^{2\epsilon T_{n_0}} (3r^2)}{1000^2} |v_{j-2}| \\ &\leq \frac{\Lambda^{\frac{2\epsilon}{r} \tau'_j}}{1000^2} |v_{j-2}| \\ &\leq \frac{\Lambda^{\frac{\epsilon}{r} (\tau_j + \tau_{j-1})}}{1000^2} |v_{j-2}| \end{aligned} \quad (4.6)$$

Usaremos os seguintes grupos de segmentos afins para (x, v) escolhidos como na demonstração da proposição.

Definição 4.5.14. Um bloco especial é um intervalo inteiro $[t_{j-2}, t_j) \subset \mathbb{Z}_+$, tal que t_{j-1} é especial. Um bloco normal é um intervalo inteiro não vazio $[t_{j-1}, t_j) \subset \mathbb{Z}_+$ tal que t_{j-1} é não especial.

Provaremos a proposição 4.5.1 em dois passos:

Afirmção 4.5.15. Para todo $N \geq 1$ existe uma partição de $[0, t_N)$ ou $[t_1, t_N)$ em uma união disjunta de blocos especiais e blocos normais.

Para definir a partição em blocos, seja $a_1 := t_N$ e, por indução,

$$a_{k+1} := \min\{t_j; j > 0 \text{ tal que } [t_j, a_k) \text{ é um bloco especial ou um bloco normal.}\}$$

Seja $I \geq 1$ o mínimo tal que a_{I+1} não é definido. Para $k = 1, \dots, I$ j_k denota o único inteiro tal que $a_k = t_{j_k}$. Vamos mostrar que j_I é 0 ou 1. Assuma por contradição que $j_I \geq 2$. Se t_{j_I-1} é especial então $[t_{j_I-2}, t_{j_I}) \subset [0, t_N)$ é um bloco especial e pode-se definir $a_{I+1} = t_{j_I-2}$. Se t_{j_I-1} não é especial, $[t_{j_I-1}, t_{j_I}) \subset [0, t_N)$ é um bloco normal e pode-se definir $a_{I+1} = t_{j_I-1}$. Em ambos os casos, isto contradiz a definição de I , provando que j_I é 0 ou é 1.

Afirmção 4.5.16. *Existe $C(x, v) < \infty$, independente de N , tal que*

$$|v_N| \leq \frac{C(x, v) \Lambda^{\frac{t_N}{r}}}{1000^N}$$

A desigualdade 4.5 estabelece que se $[a_{k+1}, a_k)$ é um bloco normal, então $|v(a_k)| \leq \frac{1}{1000} \Lambda^{\frac{a_k - a_{k+1}}{r}} |v_{a_{k+1}}|$, onde fizemos $j_k = j_{k+1} + 1$. Do mesmo modo, a desigualdade 4.6 mostra que se $[a_{k+1}, a_k)$ é um bloco especial então $|v(a_k)| \leq \frac{1}{1000^2} \Lambda^{\frac{a_k - a_{k+1}}{r}} |v_{a_{k+1}}|$, onde fizemos $j_k = j_{k+1} + 2$, neste caso. Observe que nas desigualdades acima utilizamos que $t_{j_{k+1}+1} - t_{j_{k+1}} = a_k - a_{k+1}$ e $(t_{j_{k+1}+2}) - t_{j_{k+1}} = a_k - a_{k+1}$, respectivamente. Nós obtemos, então, que

$$|v_N| \leq C(x, v) \prod_{i=1}^I \frac{\Lambda^{\frac{(a_i - a_{i+1})}{r}}}{1000^{j_i - j_{i+1}}} \frac{\Lambda^{\frac{a_I}{r}}}{1000^{a(I)}} \leq C(x, v) \Lambda^{\frac{t_N}{r}} / 1000^N$$

com $C(x, v) := |v_{a(I)}| \Lambda^{-\frac{a(I)}{r}} 1000^{a(I)} < \infty$. Assim, a desigualdade 4.7 é estabelecida. Para concluir a prova da proposição, observemos que N é igual ao número de visitas a Δ antes do tempo t_N , pois como $\|Df^{t_N}(x).v\| \leq \frac{C \Lambda^{\frac{t_N}{r}}}{1000^N}$, implica que

$$\begin{aligned} \liminf_{t_N \rightarrow \infty} \frac{1}{t_N} \log \|Df^{t_N}(x).v\| &\leq \liminf_{t_N \rightarrow \infty} \frac{1}{t_N} \log \left(\frac{C \Lambda^{\frac{t_N}{r}}}{1000^N} \right) \\ &= \liminf_{t_N \rightarrow \infty} \frac{1}{t_N} \left(\log C + \frac{t_N}{r} \log \Lambda - N \log 1000 \right) \\ &= \liminf_{t_N \rightarrow \infty} \frac{1}{t_N} \log C + \frac{1}{r} \log \Lambda - \liminf_{t_N \rightarrow \infty} \frac{1}{t_N} \cdot N \cdot \log 1000 \\ &= \frac{1}{r} \log \Lambda - (\log 1000) \cdot \liminf_{t_N \rightarrow \infty} \frac{N}{t_N} \\ &= \frac{1}{r} \log \Lambda - \chi \liminf_{t_N \rightarrow \infty} \frac{1}{t_N} \#\{0 \leq k < t_N; f^k \in \Delta\}. \end{aligned}$$

4.6 Teoremas principais

Seja $P'(f)$ o conjunto das medidas de probabilidade, invariantes e ergódicas para f que não são quase-periódicas. Seja também, $\lambda^u(P'(f)) := \sup_{v \in P'(f)} \lambda^u(f, v)$.

Teorema 4.6.1. *Existe $f_0 \in \text{Dif} f_0^\infty(D)$ com $h_{\text{top}}(f_0) = 0$ e a seguinte propriedade: Para cada número $1 \leq r < \infty$ e cada vizinhança U_0 de f_0 em $\text{Dif} f_0^r(D)$, existe $f \in U_0$ tal que $h_{\text{top}}(f) = \frac{1}{r} \lambda(f_0) > 0$ e $\lambda^u(P'(f)) = \frac{1}{r} \lambda(f_0)$ e este supremo não é atingido. Por consequência, f não tem medida de entropia maximal.*

Demonstração. Fixemos os parâmetros $k \geq C$, $L \geq C(K)$, como no corolário 4.4.4 e proposição 4.5.1. Seja $f_0 := f_0^{k,L}$. Temos que $h_{top}(f_0) = 0$ já que f_0 é a aplicação tempo 1 de um campo vetorial do disco de duas dimensões. Dada uma vizinhança U_0 de f , ela contém a esfera $B(f_0, \gamma)$ na norma C^r para algum $\gamma > 0$. Agora, para cada $n_0 \geq C(K, L, \gamma)$, $f := f_{\geq n_0}^{K,L} \in U_0$ pelo corolário 4.4.4. Seja $\mu \in P'(f)$. Observe que μ não pode satisfazer $\mu(int(Q_1 \setminus Q_2)) = 0$, já que seria uma medida invariante para f_0 . E por consequência seria quase-periódica, conforme item 3 da proposição 4.3.1. Por ergodicidade e invariância da segunda afirmação do lema 4.4.1, $\mu(int(Q_1 \setminus Q_2)) = 1$. Então a órbita $\mu - qtp$ visita o conjunto Δ , implicando que $\mu(\Delta) > 0$. De acordo com a proposição 4.5.1, $\lambda(x, v) < \frac{1}{r} \log \Lambda \mu - qtpx$ e todo vetor não-nulo $v \in \mathbb{R}^2$. Em particular, o Expoente de Lyapunov instável de μ é estritamente menor do que $\frac{1}{r} \log \Lambda$. Utilizando a desigualdade de Ruelle, segue que

$$h(f, \mu) \leq \lambda^u(f, \mu)^+ < \frac{1}{r} \log \Lambda \quad (4.7)$$

Pelo Princípio Variacional,

$$h_{top}(f) = \sup_{\mu \in P'(f)} h(f, \mu) \leq \frac{1}{r} \log \Lambda$$

já que as medidas quase-periódicas tem entropia zero. Pelo corolário 4.4.4, obtemos que $h_{top}(f) = \frac{1}{r} \log \Lambda$. Logo, a primeira parte do teorema está provada. Observemos que se existisse $\mu_0 \in P'(f)$ tal que $h(f, \mu_0) = h_{top}(f) = \frac{1}{r} \log \Lambda$, entraríamos em contradição com a desigualdade 4.7, visto que ali, $h(f, \mu) < \frac{1}{r} \log \Lambda$, $\forall \mu \in P'(f)$. Assim, f não admite medida de entropia maximal. Temos que $h(f, \mu) \leq \lambda^u(f, \mu)^+$. Logo, também pelo Princípio Variacional, temos que $h_{top}(f) = \sup_{\mu \in P'(f)} h(f, \mu) \leq \sup_{\mu \in P'(f)} \lambda^u(f, \mu)^+ = \lambda^u(P'(f))$. Além disso,

$$\lambda^u(f, \mu)^+ < \frac{1}{r} \log \Lambda \quad (4.8)$$

o que implica que $\sup_{\mu \in P'(f)} \lambda^u(f, \mu)^+ \leq \frac{1}{r} \log \Lambda$ o que é equivalente a $\lambda^u(P'(f)) \leq \frac{1}{r} \log \Lambda$. Logo, $\frac{1}{r} \log \Lambda = \lambda^u(P'(f)) = \sup_{\mu \in P'(f)} \lambda^u(f, \mu)$ e este número não é atingido, pois se existisse $\mu_0 \in P'(f)$ tal que $\lambda^u(f, \mu_0) = \frac{1}{r} \log \Lambda$, entraríamos em contradição com a desigualdade 4.8. \square

Corolário 4.6.2. *Em qualquer variedade de dimensão pelo menos dois, para cada número $1 < r < \infty$, existe um difeomorfismo C^r com entropia topológica finita e sem medida de entropia maximal.*

Demonstração. Seja M uma variedade de dimensão $d \geq 2$. Seja $K := D \times \mathbb{T}^{d-2}$ (com D um disco fechado de dimensão 2) e $F : K \rightarrow K$ em que $(x, t) \mapsto (f(x), t)$. Temos que

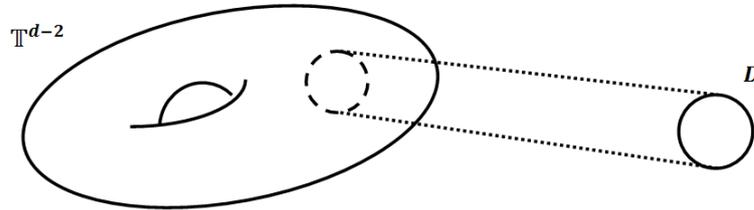


Figura 4.12: $K = D \times \mathbb{T}^{d-2}$

$\partial K = \partial D \times \mathbb{T}^{d-2}$. Assim, F é um difeomorfismo C^r que coincide com a identidade perto da fronteira de K ; M contém uma bola de dimensão d e portanto uma cópia difeomórfica de K . Defina um difeomorfismo C^r , G , por $G|_{M \setminus K} = Id$ e $G|_K = F$. Conforme o Princípio Variacional, $h_{top}(G) = h_{top}(F) > 0$. Observemos que qualquer medida ergódica com entropia maximal para G deve ser realizada por K . Mas então a medida projeção $\pi : K \rightarrow D$ em que $(x, t) \mapsto x$ é uma medida por f com alguma entropia, que seria uma entropia maximal para f , uma contradição com o teorema 4.6.1. Logo G não tem medida de entropia maximal. \square

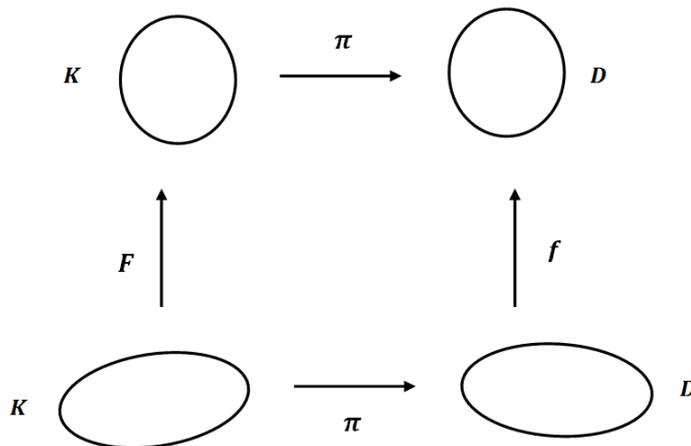


Figura 4.13: Projeção

Corolário 4.6.3. No d -Toro, para qualquer $d \geq 4$, existe um difeomorfismo fortemente parcialmente hiperbólico com centro de dimensão 2 e sem medida de entropia maximal.

Demonstração. Seja $\phi : \mathbb{T}^{d-2} \rightarrow \mathbb{T}^{d-2}$ um automorfismo hiperbólico, isto é, existe uma matriz $A : \mathbb{R}^{d-2} \rightarrow \mathbb{R}^{d-2}$, tal que $\det A = \pm 1$, com entradas inteiras que é

hiperbólica e tal que $\phi \circ \pi = \pi \circ A$, onde $\pi : \mathbb{R}^{d-2} \rightarrow \mathbb{R}^{d-2}$ é a projeção canônica dada por $\pi(x, y) = [(x, y)] \in \mathbb{R}^{d-2} / \mathbb{Z}^{d-2}$.

Como A é hiperbólico então $\mathbb{R}^{d-2} = E_A^s \oplus E_A^u$, onde E_A^s é o subespaço estável e E_A^u é o subespaço instável de A . Como ϕ é hiperbólico, para cada $x \in \mathbb{T}^{d-2}$ podemos decompor $T_x \mathbb{T}^{d-2} = E_{x,A}^s \oplus E_{x,A}^u$, onde $E_{x,A}^s$ é subespaço uniformemente contraído e $E_{x,A}^u$ é subespaço uniformemente expandido por $D\phi(x) = \phi$. Agora, para $d = 4$ considere a aplicação $F : \mathbb{T}^4 \rightarrow \mathbb{T}^4$ dada por $F(x, y) = (\phi^N(x), f(y))$, onde N é um inteiro grande o suficiente tal que $\Lambda^u := \min\{\Lambda \in sp(\phi) : |\Lambda| > 1\}$ e $\Lambda^s := \max\{\Lambda \in sp(\phi) : |\Lambda| < 1\}$. Vejamos que F é parcialmente hiperbólico:

Para cada $(x, y) \in \mathbb{T}^4 = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$, coloquemos $T_{(x,y)} \mathbb{T}^4 = T_x \mathbb{T}^2 \oplus T_y \mathbb{T}^2 = E_{x,A}^s \oplus E_{x,A}^u \oplus T_y \mathbb{T}^2 = E_{x,A}^s \oplus T_y \mathbb{T}^2 \oplus E_{x,A}^u$ e denotemos

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} \phi^N(x) & 0 \\ 0 & Df(y) \end{pmatrix}$$

onde $D\phi^N(x)$, $Df(y)$ e 0 são matrizes de ordem 2.

Coloque então $E_{(x,y)}^s := E_{x,A}^s$, $E_{(x,y)}^c := T_y \mathbb{T}^2$ e $E_{(x,y)}^u := E_{x,A}^u$, com $\dim E_{(x,y)}^s = 1 = \dim E_{(x,y)}^u$ e $\dim E_{(x,y)}^c = 2$. Assim, $DF(x, y)E_{(x,y)}^s = D\phi^N(x)E_{x,A}^s = \phi^N E_{x,A}^s = E_{\phi^N(x), A}^s = E_{(\phi^N(x), f(y))}^s = E_{F(x,y)}^s$. Analogamente, $DF(x, y)E_{(x,y)}^u = E_{F(x,y)}^u$ e $DF(x, y)E_{(x,y)}^c = E_{F(x,y)}^c$. Ou seja, $E_{(x,y)}^s$ é o subfibrado uniformemente contraído por $DF(x, y)$ e $E_{(x,y)}^u$ é o subfibrado uniformemente expandido por $DF(x, y)$, com $T_y \mathbb{T}^2$ sendo a direção central.

Se existisse uma medida μ com entropia maximal para $F = \phi^N \times f$, suas projeções $\pi_1 \mu$ e $\pi_2 \mu$ satisfariam

$$h(F, \mu) \leq h(\phi^N, \pi_1 \mu) + h(f, \pi_2 \mu). \quad (4.9)$$

Como

$$h_{top}(F) = h_{top}(\phi^N) + h_{top}(f), \quad (4.10)$$

as projeções teriam que ter medida de entropia maximal para ϕ^N e f , pois se isso não fosse verdade, ou seja, se $h_{top}(\phi^N) = \sup_{\lambda_1} h(\phi^N, \lambda_1) > h(\phi^N, \lambda_1)$ e existisse $\pi_2 \mu$ tal que $h_{top}(f) = \sup_{\lambda_2} h(f, \lambda_2) = h(f, \pi_2 \mu)$, por 4.9, teríamos

$$h(F, \mu) \leq h(\phi^N, \pi_1 \mu) + h(f, \pi_2 \mu) < h_{top}(\phi^N) + h_{top}(f),$$

uma contradição com 4.10.

Portanto, F , assim como f , não tem medida de entropia maximal. \square

Bibliografia

- [1] Brin, M. Stuck, G. *Introduction to Dynamical Systems*. 2003. Cambridge - University Press
- [2] Bronzi, M. A. *Tangências homoclínicas, entropia e medidas de SRB*. 2010. 66 f. Tese (Doutorado em Matemática)- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.
- [3] Bronzi, M. Tahzibi, A. *Homoclinic Tangency and variation of entropy*. Departamento de Matemática, ICMC-USP São Carlos. 2010.
- [4] Buzzi, J. *Sufarce Diffeomorphisms with no maximal entropy measure*. C.N.R.S & Département de Mathématiques, Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France. 2012.
- [5] Newhouse, S. *Topological entropy and Hausdorff dimension for area preserving diffeomorphisms of sufarces*. Dynamical systems, Vol.III- Warraw, Soc. Math. France, Paris, 1978, pp.323-324- Astérisque, No.51.
- [6] Oliveira, K. Viana, M. *Fundamentos da Teoria Ergódica*. Disponível em: (<http://w3.impa.br/viana/out/fte.pdf>).
- [7] Palis, J. Takens, F. *Hiperbolicity e sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*. Cambridge studies in advanced mathematics 35. Cambridge.
- [8] Robinson, C. *Dynamical systems: Stability, Symbolic Dynamics and Chaos*. p. cm. (Studies in advanced mathematics). ISBN G-8493-8493-1.
- [9] Smale, S. *Differentiable dynamical systems*. Bull. Amer. Math. Soc. 73(1967),747-817.
- [10] Shub, M. *Global Stability of dynamical systems*. 1987, New York.
- [11] Yomdin, Y. *Volume growth an entropy*. Israel Journal of Mathematics. Vol.57, No. 3, 1987.

Universidade Federal da Bahia-UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus de Ondina, Salvador-BA

CEP: 40170 -110

www.pgmat.ufba.br