Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Dissertação de Mestrado

Medida conforme no bordo ideal de um grafo.

Danilo Oliveira Almeida

Salvador-BA
Novembro/2015

Medida conforme no bordo ideal de um grafo.

Danilo Oliveira Almeida

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: **Prof. Dr. Manuel Stadlbauer**

Salvador-BA
Novembro/2015

Medida conforme no bordo ideal de um grafo.

Danilo Oliveira Almeida
Orientador: Manuel Stadlbauer

Dissertação de Mestrado submetida ao Colegiado de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal da Bahia - UFBA, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro -IM/UFBA

Prof. Dr.Antonio Teofilo Ataide do Nascimento - DCET/UNEB

Prof. Dr. Manuel Stadlbauer - IM/UFRJ

Salvador-BA
Novembro/2015

Almeida, Danilo Oliveira.
Medida conforme no bordo ideal de um grafo / Danilo Oliveira Almeida. - 2016. 42f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Manuel Stadlbauer.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Salvador, 2015.

1. Árvores (Teoria dos grafos). 2. Teoria dos grafos. 3. Teoria das medidas. I. Stadlbauer, Manuel. II. Universidade Federal da Bahia. Instituto de Matemática. III. Título.

CDD - 511.52
CDU- 519.172

Dedico este trabalho
aos meus pais, minha irmã, meus tios
e à Graziela,
por ter dado todo suporte
para a realização deste sonho.

Agradecimentos

Eh! A lista é grande, mas vamos lá.

Em primeiro lugar agradeço a Deus por ter me fornecido força nos momentos difíceis que enfrentei até aqui, principalmente para ter superado as dificuldades do dia a dia longe dos meus familiares, mostrando os caminhos que deveria percorrer e por ter suprido as minhas necessidades.

Dedico este trabalho aos meus pais, Iranildes e Mario, por ter me dado a educação, os valores e todo o amor e carinho ao longo de todos os anos da minha vida onde, desde 31/12/1990 até os dias de hoje, incentivando e me apoiando principalmente nas horas difíceis, de desânimo e cansaço.

A minha irmã, Danielle, minha pequena grande mulher, do seu modo de ser sempre soube que estava torcendo por mim e me ajudando no que for necessário.

A Graziela, minha flor, minha princesa que embeleza o meu dia com seu sorriso e sua simplicidade de viver. TE AMO !

A minha tia-mãe. TIA ANA, a senhora acha que não iria dedicar esse trabalho a senhora: Essa mulher é o meu tesouro, minha companheira de muitas conquistas: A primeira delas foi me fazer andar e a última me tornar mestre. Vamos ter mais né Tia Ana?

A todos os meus tios e tias em especial a: Tio Assis, Tia Fau, Tia Bui, Tia Zete, Tio José, Tio Mieu, Tio Tonhe, Tio Joel. De modos diferentes de ser, cada um contribuiu, para que essa conquista fosse concretizada.

Aos meus primos principalmente aquele que considero mais que um primo e sim meu irmão, Vine , que Deus abençoe nossa amizade.

Aos meus padrinhos e madrinhas: Domingos, Gervane, Marilene e Antonildo, o meu singelo agradecimento pela contribuição na minha formação como homem.

E para fechar a família não posso esquecer eles que são os mais amáveis de todas as famílias os nossos avós: Antônio (in memória), Margarida (in memória), Marta (in memória) e Mário. Para quem não conhece esses são: Tonhó, Filinha, Morena e Curinga meus velhinhos que me ensinaram e ensinam muito.

A Ana Maria e Carlos, que me acolheram durantes esses longos e ao mesmo tempo rápidos 6 anos contando a graduação e o mestrado. Que Deus abençoe vocês dois e muito obrigado por ter contribuído para a realização desse sonho, certamente sem vocês a realização desse momento seria muito mais difícil.

Ao meu orientador Manuel Stadlbauer, por ter acreditado em mim, e ter a paciência e a sabedoria para mostrar o caminho da matemática. Um exemplo de profissional a ser seguido o qual contribuiu de forma positiva para o meu crescimento, sua participação foi de fundamental importância para a realização deste trabalho.

Aos meus professores do Instituto, por me proporcionar o conhecimento, por tanto que se dedicaram a mim, não somente por terem me ensinado, mas por terem me feito aprender. Em especial a professora Rita, Cristiana, Glória Márcia e ao professor Samuel Gomes por serem os primeiros a abrirem a porta para mim e acreditarem em minha capacidade, o meu muito obrigado.

Aos amigos e colegas do curso que fizeram parte da minha formação e que vão continuar presentes em minha vida com certeza. Que fizeram parte dessa trajetória sempre me ajudando e incentivando, dando força e apoio. Em especial agradeço a Edvan e Danilo Cerqueira, meus dois primeiros amigos na faculdade.

A UFBA, pela oportunidade de fazer o curso e por ter proporcionado momentos que jamais irei esquecer.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

“É que tem mais chão nos meus olhos do que cansaço nas minhas pernas, mais esperança nos meus passos do que tristeza nos meus ombros, mais estrada no meu coração do que medo na minha cabeça."
Cora Coralina.

Resumo

Neste trabalho, estudamos medidas definidas no bordo de uma árvore enraizada, associadas a um grupoíde de homeomorfismos parciais e uma função potencial. Por aplicação do método de Patterson, obtemos uma construção geral para essa tal medida conforme. Fizemos uma associação ao odômetro e obtemos os seguintes resultados: Se o odômetro for de distorção limitada, a medida é ergódica. Sob variações somáveis, a medida é equivalente à única probabilidade invariante. Além disso, indentificamos essa classe de medidas com a classe das medidas G introduzido por Brown e Dooley.

Palavras-chave: Media conforme, árvore enraizada, odômetro.

Abstract

In this work, we study measures defined on the boundary of a rooted tree for a given groupoid and a potential function. By applying Patterson's method, we obtain a general construction for such measures. In the context of the odometer we obtain the following results. If the potential is of bounded distortion, then the measure is ergodic. Furthermore, if the potential has summable variations, then the measure is equivalent to the unique invariant probability measure. In order to the relate these results to the classical results by Fan, we identify these measures with the class of G-measures introduced by Brown and Dooley.

Keywords: Conformal measure, rooted tree, odometer.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

A definição de medida conforme surgiu em 1976 com Patterson em [18], na qual ele construiu uma família $\{\mu_x : x \in \mathbb{H}\}$ de medidas finitas sobre o conjunto limite do grupo fuchsiano G. Patterson mostrou que

$$\frac{d\mu_x \circ \gamma^{-1}}{d\mu_x}(y) = P(\gamma(x), y)^{\delta} \quad \forall \gamma \in G,$$

onde $P(x, y)$ é chamado de núcleo de Poisson e δ é o expoente de convergência. Hoje em dia essa propriedade da medida de Patterson é chamada de *δ-conformalidade*. Sullivan foi o primeiro a estudar e conhecer o aspecto geométrico da propriedade acima, no referido trabalho o autor mostrou que δ é igual a dimensão de Hausdorff do conjunto limite (ver [5]).

Em 1992 Denker e Urbanski (em [12]), trazem uma outra abordagem sobre as medidas conformes. Onde eles consideram $(X, \mathcal{F})$ um espaço mensurável e T um endomorfismo mensurável de X. Neste trabalho, a medida m tem a propriedade de que $m \circ T$ é localmente absolutamente contínua em relação a m, e a derivada de Radon-Nikodym é uma função contínua f. Essa construção, introduzida por Denker e Urbanski, foi utilizada por Beardon em [4], para iterações de aplicações racionais da esfera de Riemam e (em [14]), para obter relações com o operador de transferência. Além disso, em ([15]), mostrar varias situações em que essas medidas conforme são os estados de equilíbrio dos mapas racionais.

Em meado dos anos 2000, Mauldin e Urbanski, expandiram esses estudos para as funções de sistemas interadas (em [17]), para estudar uma classe mais ampla de sistemas dinâmicos. Ao mesmo tempo (em [19]), Nekrashevych desenvolveu uma descrição algébrica de sistemas dinâmicos, onde ele considerou as simetrias locais de um grafo e as relacionaram com os sistemas dinâmicos. Como por exemplo, a interação de aplicação racionais, esse objeto é chamado de *grupo autosimilar*, que é subgrupo dos automorfismos de grafos enraizados regulares, e possui aplicações, por exemplo, na iteração das funções racionais.

Recentemente, Nekrashevych estendeu esse objeto ao homeomorfismos locais de espaços mais gerais e obteve a classe dos grupoídes hiperbólicos, (ver [20] e [21]). Ele conseguiu obter uma construção de uma medida usando a ideia de Patterson para o caso mais simples de um cociclo de Busemann. Além disso, para obter um objeto independente de um grafo (ou partição de Markov), ele trabalhou com uma notação de medidas conformes baseadas nas propriedades dos homeomorfismos locais.

Nessa dissertação de mestrado, vamos utilizar uma combinação de ideias de Patterson, Denker e Urbanski, para conseguir uma construção de medidas conformes no bordo ideal de uma árvore enraizada qualquer. Além disso, dado um grupoíde de simetrias definido localmente, estudamos a relação das derivadas de Radon-Nikodym destes homeomorfismos com a função potencial dada. No capítulo 4, aplicamos a teoria ao caso do odômetro, que é um grupo compacto e abeliano e obtemos que se o odômetro for de distorção limitada, então a medida é ergódica. Sob variação somável a medida é equivalente a única probabilidade invariante. Por fim identificamos essa classe de medida com a classe das medidas G, introduzidas por Brown e Dooley (em [7]).

Capítulo 2

Grafos

Neste trabalho estudamos um tipo de grafo, que chamaremos de árvore, munido com uma topologia. Então nesse capítulo, através de algumas definições e resultados vamos formalizar os conceitos básicos de grafos e as topologias associadas. Esses conceitos serão de total importância para o estudo nos capítulos seguintes.

Um grafo G é formado por um par (V, E), onde V é um conjunto não vazio e enumerável e E é um conjunto de pares não ordenados de elementos de V, não necessariamente distinto.

Os elementos de V são chamados de vértices e os elementos de E, elos. Note que $e \in E$ se e somente se existem v e w em V tal que $e = \{v, w\}$. Quando consideramos uma orientação entre a ligação dos vértices dizemos que o grafo é orientado e nesse caso $e \in E$ se e somente se existem v e $w \in V$ tal que $e = (v, w)$. Perceba que ultizamos o simbolo () para representar os elos no grafo orientado, diferente da representação dos grafos não orientados que utilizamos {}. Usualmente a representação de geométrica de um grafo pode ser feita utilizando pontos e linhas ou pontos e setas, onde os pontos representam os vértices e os elos são representados por setas se o grafo for orientado, ou linhas caso contrário.

Seja $G = (V, E)$ um grafo orientado, e considere dois elementos u e v em V, a sequência finita $e_1, e_2, \cdots, e_n$ de elementos de E, onde existe um conjunto $A = \{v_1, \cdots, v_n\}$ de elementos em V tal que $v_1 = u$ e $v_n = v$ e $(v_k, v_{k+1}) = e_{k+1}$ para todos k pertecente a $B = \{0, \cdots, n-1\}$ é chamado de caminho de comprimento n entre os vértice u a v. Vamos definir o conjunto dos caminhos de comprimento n entre $u, v \in V$ por $C_n(u, v)$. E determinamos o conjunto dos caminhos entre $u, v \in V$ por :

$$C(u, v) := \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n(u, v).$$

2.1 Árvores enraizadas

Seja $G = (V, E)$ um grafo orientado, se existir um vértice $\mathbf{o}$ onde para qualquer $v \in V : \#C_(\mathbf{o}, v) = 1$, onde # significa a carnidalidade do conjunto, então chamaremos esse grafo de árvore enraizada e $\mathbf{o}$ é dito raiz de G.

A partir de agora quando for mencionado a palavra árvore durante a dissertação, estamos nos referindo a árvores enraizadas.

Nas árvores podemos associar o tamanho de um caminho com o nível que o vértice está ocupando. Dizemos que um vértice v está no nível $n \in \mathbb{N}$ e escrevemos $v \in V_n$ se existe um caminho γ de comprimento n entre $\mathbf{o}$ e v. Vamos definir também que $v_0 := \{\mathbf{o}\}$. Como os caminhos são únicos podemos dizer que

$$\#C_n(\mathbf{o}, v) = \begin{cases} 1, & \text{se } v \in V_n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Definimos posto de um vértice $v \in G$, como a quantidade de elos com origem em v e vamos denotar esse valor por $\rho(v)$. Além disso definimos o posto de um nível n como $\max\{\rho(v); v \in V_n\}$, quando esse máximo não existir dizemos que $\rho(n) = \infty$.

Proposição 2.1.1. *Seja $G = (V, E)$ uma árvore então existe uma indentificação entre $\mathcal{C}(v)$ e V onde $\mathcal{C}(v)$ são todos os caminhos iniciados na raiz e terminados em $v \in V$.*

Demonstração. Para cada v em V existe um único caminho entre $\mathbf{o}$ e v, logo existe uma bijeção entre V e $\mathcal{C}(\mathbf{o})$ □

Seja $G = (V, E)$ uma árvore e $C : E \to \mathbb{N}$ uma aplicação que chamaremos de Coloração.

Proposição 2.1.2. *Seja G uma árvore e C uma coloração tal que, $\forall v \in V$ a restrição $C : \{(v, w) \in E : w \in V\} \to \{k : 1 \leq k < \rho(v) + 1\}$ é uma bijeção. Então existe uma aplicação injetora $\phi : V \to X_{k=0}^{\infty}\mathbb{N}^k$.*

Demonstração. Vamos mostrar a existência da aplicação. Seja $k \in \mathbb{N}$ fixo , e $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$ onde $a_i's \in \mathbb{N}$ tal que $a_j \leq \rho(j)$ $j \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$. Como G é uma árvore então existe um único elo $(\mathbf{o}, v_1)$ tal que $C(0, v_1) = a_0$.
Pelo mesmo motivo existe um único caminho $\gamma = ((0, v_1), (v_1, v_2))$ tal que $C(v_1, v_2) = a_1$. Assim por indução temos que existe um único caminho $\gamma_i = ((\mathbf{o}, v_1), (v_1, v_2), \cdots, (v_{k-1}, v_k))$ tal que $C(v_i, v_{i+1}) = a_i$ $\forall i \in \{1, \cdots, k-1\}$.

Então vamos definir

$$\phi(v_k) := (a_0, \ldots, a_k).$$

A injetividade segue do fato que existe um único caminho para qualquer dois vértices na árvore. $\square$

Consideramos um conjunto enumerável $\mathcal{A}$, onde chamaremos de alfabeto. Uma sequência finita $w = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ de elementos de $\mathcal{A}$ é chamada de palavra, onde podem ser representada por $w = a_0 a_1 \cdots a_n$, onde $a_i's \in \mathcal{A}$. Em analogia a teoria dos grupos livres vamos representar a palavra vazia pelo símbolo 1, pois ela representa o neutro da operação nos grupos livres. Considerando uma palavra $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ dizemos que o comprimento de w é n e denotamos esse comprimento por $|w|$. Vamos definir o conjunto das palavras de comprimento n por

$$\mathcal{P}_n := \{w = a_1 a_2 \cdots a_n \ : \ a_i \in \mathcal{A} \ \forall i \in 1, 2, \cdots, n\}.$$

Assim dada uma árvore G, podemos definir $\mathcal{A}_n := C(\{(u, v) \in E; u \in V_n\})$ como o alfabeto do nível n para qualquer $n \in \mathbb{N}$. E definimos agora $\mathcal{A} := \biguplus_{I \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_i$, em que $\mathcal{A}$ pode ser visto como um alfabeto da árvore G.

Definição 2.1.3. *Dada uma palavra $w = (a_0, \cdots, a_k) : k \in \mathbb{N}, a_i \in \mathcal{A}_i$, dizemos que esta palavra é admissível se $w = \phi(v)$, para algum $v \in G$. Onde ϕ é definido na proposição* 2.1.2.

2.2 Topologia em árvores enraizadas.

Seja G uma árvore e V o seu conjunto de vértices, e seja $\mathcal{A}$ o alfabeto. Pela proposição 2.1.1 temos uma identificação entre V e $\mathcal{A}^{**}$ onde $\mathcal{A}^*$ é o conjunto de todas as palavras admissíveis finitas do alfabeto $\mathcal{A}$, ou seja $\mathcal{A}^* := \{(a_0, \cdots, a_k) : k \in \mathbb{N}, a_i \in \mathcal{A}_i$. Vamos definir:

$$d : \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^* \to (0, +\infty);$$

$$d(x,y) = \begin{cases} r^{\max\{i\in\mathbb{N}; x_j = y_j \forall 1\leq j\leq i\}} \text{ se } x \neq y \\ 0, \text{ se } x = y \end{cases}$$

onde $r \in (0,1)$.

Temos que d é uma métrica sobre $\mathcal{A}^*$ pois

Se $x = y$ temos que $d(x,y) = 0$, senão $\exists\ i \in \mathbb{N}; x_i \neq y_i$ logo $d(x,y) \geq r^{i-1} > 0$. Assim temos que $d(x,y) \geq 0$ para todos $x, y \in V$.

Vamos mostrar agora que $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in V$. Se $x = y$ então $d(x,y) = 0 = d(y,x)$.
Supondo que $x \neq y$ então $d(x,y) = r^{\max\{i\in\mathbb{N}; x_j = y_j \forall 1\leq j\leq i\}} = r^{\max\{i\in\mathbb{N}; y_j = x_j \forall 1\leq j\leq i\}} = d(y,x)$. Portanto temos que $d(x,y) = d(y,x)$ para todos $x, y \in V$.

Seja $x, y, z \in V$, se $x = y = z$ então $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z) = 0$, suponhamos agora x, y, z sejam diferentes. Sem perda de generalidde vamos assumir que $d(x,y) \leq d(y,z)$, além disso existe $M \in \mathbb{N}$; $d(x,y) = r^M$. Assim

$$\max\{i \in \mathbb{N}; x_j = y_j \forall 1 \leq j \leq i\} \geq \max\{i \in \mathbb{N}; y_k = z_k \forall 1 \leq k \leq i\}$$

Logo temos que $x_i = y_i = z_i \forall i \leq M$, o que implica em $\max\{i \in \mathbb{N}; y_j = z_j \forall 1 \leq j \leq i\} \geq M$. Logo $d(x,y) \leq r^M = d(y,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.
Acabamos de mostrar que $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, para todo $x, y, z \in V$.

Assim temos que d é uma métrica em V

Uma sequência infinita $(v_0, v_1, v_2, \cdots)$ de elementos de $\mathcal{A}$ é chamada de palavra infinita admissível onde representamos por $v_0 v_1 \cdots$ tal que $v_i's \in \mathcal{A}$. Vamos denotar o conjunto de todas as palavras infinitas por $\mathcal{A}^\omega$.

Definimos $\mathcal{A}^\infty := \mathcal{A}^\omega \cup \mathcal{A}^*$. Vamos achar um critério para que $\mathcal{A}^\infty$ seja compacto.

Usando os mesmos argumentos da prova anterior podemos demonstrar que $(\mathcal{A}^\infty, d)$ é um espaço métrico, onde:

$$d : \mathcal{A}^\infty \times \mathcal{A}^\infty \to (0, +\infty);$$

$$d(x,y) = \begin{cases} r^{\max\{i\in\mathbb{N}; x_j = y_j \forall 1\leq j\leq i\}} \text{ se } x \neq y \\ 0, \text{ se } x = y \end{cases}$$

onde $r \in (0,1)$.

Ao conjunto $[v_1] := [(v_1 \cdots v_k)] := \{(w_n) \in \mathcal{A}^\infty : w_i = v_i : \forall 1 \leq i \geq k\}$ chamaremos de cilindros. Esses conjuntos são fechados e abertos.

Seja (X, d) um espaço métrico não completo, pela proposição 13 do capítulo 7 de [6], podemos ampliar esse espaço de modo que obtenha um novo espaço $\overline{X}$ métrico e completo, onde chamamos $\overline{X}$ de completamento de X. Em geral um completamento de um espaço métrico X é um par $(\overline{X}, \varphi)$, onde $\overline{X}$ é completo e $\varphi : X \to \overline{X}$ é uma imersão isométrica cuja imagem $\varphi(X)$ é densa em $\overline{X}$.

Teorema 2.2.1. *$(\mathcal{A}^\infty, d)$ é o completamento de $(\mathcal{A}^*, d)$.*

Demonstração. Seja $(x_n) := (x_n^{(l)})$ uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{A}^*, d)$. Logo

$$\forall m \in \mathbb{N}\ \exists\, k_m \in \mathbb{N};\ \forall\, a, b \geq k_m \Rightarrow d(x_a, x_b) \leq r^m$$

Então temos que

$$\forall m \in \mathbb{N}\ \exists\, k_m \in \mathbb{N};\ \forall\, a, b \geq k_m \Rightarrow x_a^{(l)} = x_b^{(l)}\ \forall l < m$$

Sem perda de generalidade, assumimos que $(k_m)_m$ é uma sequência não descrecente, ou seja $(k_1)_1 \leq (k_2)_2 \leq \cdots$
Logo temos que

$$x_{k_1}^1 \leq x_{k_2}^2 \leq \cdots$$

Sempre existe uma única palavra $x \in \mathcal{A}^\omega$ tal que $x = x^m = x_{k_m}^m\ \forall m \in \mathbb{N}$
Seja $\epsilon > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tal que $r^m < \epsilon$ e tome $n \geq k_m$, logo $x_n^{(m)} = x_{k_n}^{(m)}$; Por outro lado temos que $x_n^{(m)} = x_{k_n}^{(m)}$
Logo temos que $x_n^{(m)} = x^{(m)}$ o que implica que $d(x_n, x) < r^m < \epsilon$
Assim $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Logo

$$(\mathcal{A}^\infty, d) \text{ é completo.}$$

De fato temos que

$$\mathcal{A}^\infty = \{\lim_{n\to\infty}(x_n) : (x_n) \in \mathcal{A}^\omega \text{ e } (x_n) \text{ de Cauchy}\}$$

Pois: Tome $\omega \in \mathcal{A}^\infty$ então $\omega = (v_0 v_1 \cdots)$ e definimos

$$\omega_n := (v_0, \cdots, v_n)$$

Logo temos que

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n = \omega.$$

Assim temos que $(\mathcal{A}^\infty, d)$ é o completamento de $(\mathcal{A}^*, d)$ $\square$

Temos que $\mathcal{A}^\infty$ é separável, pois $\mathcal{A}^*$ está contido em $\mathcal{A}^\infty$ é denso e enumerável. Concluimos assim que $\mathcal{A}^\infty$ é um espaço métrico, separavél e completo, com respeito a topologia gerada pelos cilindros, logo $\mathcal{A}^\infty$ é um espaço Polonês. No teorema a seguir vamos dar uma caracterização para que o espaço seja compacto.

Teorema 2.2.2. *Uma árvore $G = \mathcal{A}^\infty$ é compacta se e somente se o posto de qualquer vértice $v \in V$ é finito.*

Demonstração. Suponhamos que G é compacto então $\cup_{v_1\cdots v_n}[v_1, \cdots, v_n]$ é uma cobertura de G de abertos disjuntos, logo é uma cobertura finita, portanto $\rho(v) < \infty$, para qualquer vértice $v \in V$.
Por outro lado para provar que se $\rho(n) < \infty$ implica que G é compacto, basta mostrar que $\mathcal{A}^\omega$ é compacto.
Já vimos que $\mathcal{A}^\omega$ é métrico, logo é suficientemente mostrar que $\mathcal{A}^\omega$ é sequêncialmente compacto.

Seja
$$x_n := \left(v_1^{(n)}, v_2^{(n)}, v_3^{(n)} \cdots\right) \text{ uma sequência em } \mathcal{A}^\omega$$
Temos que $\rho(v) < \infty$ para qualquer vértice $v \in V$, logo $\mathcal{A}_n$ é finito, onde $\mathcal{A}_n$ é o alfabeto do nível n. Assim :
Temos que $\mathcal{A}_1$ é finito, logo existe ao menos um $v_1 \in \mathcal{A}_1$, onde um número infinito de subsequência x_{n_k} começam com a letra v_1. Ou seja ;

$$\exists n_k \in \mathbb{N}; x_{n_k} = (v_1 v_2^{(n_k)} \cdots) \text{ onde } n_k \to \infty \text{ isto, é } v_1^{(n_k)} = v_1$$

Utilizando novamente a hipótese de que $\mathcal{A}_2$ é finito logo existe ao menos um $v_2 \in \mathcal{A}_2$, onde um número infinito de subsubsequência $x_{n_{k_l}}$ tem segunda letra v_2. Isto é;

$$\exists n_{k_l} \in \mathbb{N}; x_{n_{k_l}} = (v_1 v_2 v_3^{(n_{k_l})} \cdots) \text{ onde } n_{k_l} \to \infty \text{ isto, é } v_2^{(n_{k_l})} = v_2$$

Indutivamente e utilizando o fato que a cardinalidade de $\mathcal{A}_m$ é finito

$$\exists n_\beta \in \mathbb{N}; x_{n_\beta} = (v_1 v_2 v_3 \cdots v_m v_{m+1}^{(n_\beta)} \cdots) \text{ onde } n_\beta \to \infty \text{ isto, é } v_m^{(n_\beta)} = v_m$$

Logo temos que existe uma subsequência

$$v_n^{m_k} \text{ com } m_k \to \infty \text{ tal que } \lim_{k\to\infty} v_n^{n_k} = v_n.$$

Portanto temos que $\mathcal{A}^\omega$ é sequêncialmente compacto, o que implica $\mathcal{A}^\omega$ compacto. $\square$

Capítulo 3

Construção da medida nas árvores

Nesse capítulo vamos construir uma medida conforme sobre a árvore enraizada e iremos estudar algumas propriedades sobre essa medida.

Usaremos as idéias de Denker e Urbanski em [13] e de Patterson em [18] para a construção dessa medida. Comecaremos o capítulo apresentando a definição clássica de uma medida conforme e dando alguns resultados conhecidos sobre essa medida.

3.1 Medida conforme

Seja $(X, \mathcal{F})$ um espaço mensurável e consideremos $T : X \to X$ um endomorfismo mensurável e f uma função mensurável não negativa sobre X.

Definição 3.1.1. *Uma medida m em $(X, \mathcal{F})$ é dita f-conforme se*

$$m(T(A)) = \int_A f(x)dm$$

onde $A \in \mathcal{F}$ é um conjunto mensurável no qual TA é mensurável e $T : A \to TA$ é inversível.

Note que $m(T(A)) = \int_A f(x)dm$ implica que $m \circ T$ é absolutamente contínua com respeito a m, sobre a $\sigma-$álgebra $\mathcal{F} \cap A$ para cada conjunto A, tal que $T : A \to TA$ é um isomorfismo mensurável.

Note que dada m uma medida $f-$conforme podemos definir $f^{(1)} = f$ e $f^{(n)} = (f^{(n-1)} \circ T)f$ para $n \geq 2$, temos que m é támbem $f^{(n)}-$conforme com respeito a transformação T^n para $n \geq 1$. Além disso $\int_{T(A)} gdm = \int_A (g \circ T) f dm$ onde g é integrável sobre TA.

Considerando T um endomorfismo mensurável em $(X, \mathcal{F})$, onde o número de pré-imagem dos pontos é uniformemente limitado. Para uma função mensurável $f : X \to \mathbb{R}^+$ o operador de Perron-Frobenius

$$L_f \varphi(x) \quad = \quad L_\varphi(x) \sum_{T(y)=x} \frac{\varphi(y)}{f(y)}$$

é bem definido, onde φ é uma função mensuravel e $x \in X$ talque $f(y) > 0$ para toda pré-imagem y de x.

Proposição 3.1.2. *Suponhamos que existe uma partição enumerável de* X_i ; $(1 \geq i \geq s)$ *de* X *tal que* $T : X_i \to TX_i$ *é um isomorfismo mensurável. Seja* $f : X \to \mathbb{R}_+$ *uma função mensurável e* m *uma medida de probabilidade sobre* $(X, \mathcal{F})$. *Então* m *é* f*- conforme se e somente se* L_f *age sobre* $L^*m = m$.

Demonstração. Temos que m é $f-$conforme.
Seja $A_i = \{x \in X_i; f(x) = 0\}$, logo temos que $m(T(A_i)) = 0$ para $1 \geq i \geq s$. Consideramos L_φ, onde φ é uma função integrável . Assim

$$\begin{aligned}\int_{TX_i} \frac{\varphi}{f} \circ (T|_{X_i})^{-1} dm &= \int_{X_i} \frac{\varphi}{f} \circ (T|_{X_i}) f dm \\ &= \int_{X_i} \varphi dm \ \{1 \leq i \leq s\}\end{aligned}$$

Somando todos i obtemos que

$$\int_X L_f \varphi(x) dm \quad = \quad \int_X \varphi dm$$

O que implica que L_f age sobre $L^{(1)}(m)$ e $L^*m = m$.

Por outro lado se L_f age sobre $L^{(1)}(m)$ e $L^*m = m$ e tomando $A \in \mathcal{F}$ temos

$$
\begin{aligned}
\int_A f dm &= \int_A f dL^* m \\
&= \int_X L(\mathbf{1}_A f) dm \\
&= \int_X \sum_{T(y)=x} \mathbf{1}_A(y) m(d(x)) \\
&= m(T(A))
\end{aligned}
$$

Então m é f- conforme . □

3.2 Medida conforme nas árvores enraizadas

Em [13] mostra-se que a construção principal das medidas conformes foi feita usando o seguinte fato analítico. Para uma sequencia (a_n) de números reais, o número $c = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ onde chamaremos de parametro de transição de (a_n), é unicamente determinado pelo fato que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \exp(a_n - ns)$ converge para $s > c$, diverge para $s < c$ e para $s = c$ o somatório não converge nem diverge.
Assim dado uma função

$$
\begin{array}{cccc}
\varphi: & V & \to & (0,\infty) \\
 & v & \to & \varphi_v
\end{array}
$$

, denotamos

$$
Z_n = \sum_{v\in V_n} \varphi_v \quad (n \in \mathbb{N}),
$$

onde V é o conjunto de vértices de $\bar{G}$, note que esse conjunto é denso em $\bar{G}$. Vamos definir uma família de medida $\{m_s : s < 1/\rho\}$, $\rho := \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{Z_n}$ do seguinte modo:

$$
m_s := \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n \sum_{v\in V_n} \varphi_v \delta_v}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n \sum_{v\in V_n} \varphi_v} \tag{3.1}
$$

Onde, δ_v é a medida de Dirac em $v \in V$ e (a_n) é escolhido tal que:

- Para todo n, $0 \le a_n \le a_{n+1}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1$;

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n Z_n = \begin{cases} < \infty, |s| < \frac{1}{\rho} \\ = \infty, |s| \geq \frac{1}{\rho} \end{cases}$

Para nos auxiliar nas contas vamos denotar por $\mathcal{P}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n \sum_{v \in V_n} \varphi_v$. Assim temos que

$$m_s := \frac{1}{\mathcal{P}(s)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n \sum_{v \in V_n} \varphi_v \delta_v \tag{3.2}$$

Exemplo: Árvore homogênea de posto variado. Esse é um exemplo em que para qualquer vértice no nível n dar origem ao mesmo número de elos. A árvore que tem essa propriedade chamamos de árvore homogênea.

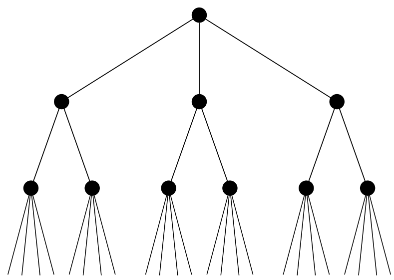

Figura 3.1: Árvore homogênea com $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 2$ e $\rho_3 = 4$.

Dado $v \in V_m$ definimos $\varphi_v := \frac{1}{\rho(0)} \frac{1}{\rho(1)} \frac{1}{\rho(2)} \cdots \frac{1}{\rho(m-1)} \frac{1}{\rho(m)}$, onde $\rho(i)$ com $0 \leq i \leq m$ é o posto do nível i.

Temos que

$$\begin{aligned} Z_n &= \sum_{v \in V_m} \varphi_v \\ &= \sum_{v \in V_m} \prod_{i=0}^{m-1} \frac{1}{\rho(i)}(v) \\ &= \#(V_m) \prod_{i=0}^{m-1} \frac{1}{\rho(i)} \\ &= \#(V_m) \varphi_v \end{aligned}$$

Note que $0 < \prod_{i=0}^{m-1} \frac{1}{r(i)} < 1$, logo temos que $\limsup \sqrt[n]{Z_n} \leq 1$. Seja $s > 1$, tomando $a_n = 1$ temos que $a_n s^n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Seja $[v]$ um cilindro, vamos agora determinar a medida $m_s[v]$

Tome $y \in [v]$, e denotamos W^m todas as palavras de comprimento infinito, assim

$$\begin{aligned}
m_s([v]) &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} s^n \sum_{y\in V_n} \varphi_v.\delta_y([v])}{\sum_{n=1}^{\infty} s^n \sum_{y\in V_n} \varphi_v} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} s^n \sum_{y\in V_n} \varphi_v.\delta_y([v])}{\sum_{n=1}^{\infty} s^n Z_n} \\
&= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} s^n \sum_{y\in V_n,[y]\subset[v]} \varphi_v}{\sum_{n=1}^{\infty} s^n Z_n} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} s^n \sum_{vu\in W^m} \varphi_v}{\sum_{n=1}^{\infty} s^n Z_n} \\
&= \frac{\sum_{n\geq|v|} s^n \sum_{vu\in W^m} \varphi_v}{\sum_{n=1}^{\infty} s^{-n} Z_n} + \frac{\sum_{n<|v|}^{\infty} s^n \sum_{vu\in W^m} \varphi_v}{\sum_{n=1}^{\infty} s^n Z_n} \\
&= \frac{\sum_{n\geq|v|} s^n \varphi_v \sum_{vu\in W^m} \frac{\varphi_{vu}}{\varphi_v}}{\sum_{n=1}^{\infty} s^n Z_n} + \frac{\sum_{n<|v|}^{\infty} s^n \sum_{vu\in W^m} \varphi_v}{\sum_{n=1}^{\infty} s^n Z_n} \\
&= \varphi_v \frac{\sum_{n\geq|v|} s^n (v,\eta_v) \sum_{vu\in W^m} \frac{\varphi_{vu}}{\varphi_v}}{\sum_{n=1}^{\infty} s^{-n} Z_n} + \frac{\sum_{n<|v|}^{\infty} s^{-n} \sum_{vu\in W^m} \varphi_v}{\sum_{n=1}^{\infty} s^n Z_n}
\end{aligned}$$

Como, $\frac{\sum_{n\geq|v|} s^n (v,\eta_v) \sum_{vu\in W^m} \frac{\varphi_{vu}}{\varphi_v}}{\sum_{n=1}^{\infty} s^n Z_n}$ converge para 1 e $\frac{\sum_{n<|v|}^{\infty} s^n \sum_{vu\in W^m} \varphi_v}{\sum_{n=1}^{\infty} s^n Z_n}$ converge para 0. Logo temos que

$$m_s[v] = \varphi_v$$

Esse exemplo nos mostra que $\{m_s : s < 1/\rho\}$ é não vazio se e somente se $\rho < \infty$. Além disso note que, se $\rho < \infty$ então $Z_n < \infty$.

Proposição 3.2.1. *Suponhamos que $\rho < \infty$ e que existe uma sequência (s_k) não descrecente convergindo para $1/\rho$ tal que m_{s_k} converge fracamente para μ. Então μ é uma medida de probabilidade com suporte sobre ∂G.*

Demonstração. Seja f uma função contínua definida em $\bar{G}$ que é um compacto logo f é limitada. Como por hipótese m_{s_k} converge fracamente para μ então

$$\lim_{k\to\infty} \int f dm_{s_k} = \int f d\mu$$

Seja A um subconjunto de $\bar{G}$, como A é discreto temos que $\mathbf{1}_w$ é uma função contínua para cada $w \in A$. Assim

$$\lim_{k\to\infty} \int \mathbf{1}_w dm_{s_k} = \int \mathbf{1}_w d\mu \qquad \text{para cada } w \in A.$$

Assim temos que

$$\lim_{k\to\infty} m_{s_k}([w]) = \mu([w])$$

Consequentemente temos que

$$\begin{aligned} m_s([w]) &= \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n s_k^n \sum_{v\in V_n \ w\in A} \varphi_v \delta_v}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n s_k^n Z_n} \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\sum_{n=1}^{|V_n|} a_n s_k^n \sum_{v\in V_n \ w\in A} \varphi_v \delta_v}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n s_k^n Z_n} + \frac{\sum_{n\geq |V_n|} a_n s_k^n \sum_{v\in V_n \ w\in A} \varphi_v \delta_v}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n s_k^n Z_n} \right) \\ &\leq \frac{\sum_{n=1}^{|V_n|} a_n \rho^{-n} \sum_{v\in V_n \ w\in A} \varphi_v \delta_v}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^{-n} Z_n} + \frac{\sum_{n\geq |V_n|} a_n \rho^{-n} \sum_{v\in V_n \ w\in A} \varphi_v \delta_v}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^{-n} Z_n} \end{aligned}$$

Note que para n grande temos que $\frac{\sum_{n\geq |V_n|} a_n \rho^{-n} \sum_{v\in V_n \ w\in A} \varphi_v \delta_v}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^{-n} Z_n}$ é igual a zero. Portanto temos que

$$\mu([w]) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{|V_n|} a_n \rho^{-n} \sum_{v\in V_n \ w\in A} \varphi_v \delta_v}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^{-n} Z_n} \quad = \quad 0$$

Já que o numerador é um número finito e o denominador tende a infinito.

□

Corolário 3.2.2. *Se $|V_n| < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\rho < \infty$, então existe μ suportada em ∂G e uma sequência (s_k) não descrescente convergindo para $1/\rho$ tal que m_{s_k} converge fracamente para μ*

Demonstração. A demonstração segue do fato que em um espaço métrico compacto completo, qualquer sequência de medida de probabilidade possui um ponto de acumulação, isto é o espaço de medida de probabilidade é fraca* sequencialmente compacto. □

3.3 Estrutura conforme e a árvore enraizada

A fim de mostrar a importância da construção da medida 3.2, vamos considerar uma árvore enraizada equipada com uma família de simetrias local. Isto é, fixemos um subconjunto $\mathcal{R}_0 \subset V \times V$ tal que, para cada $(v, w) \in \mathcal{R}_0$ os subgrafos $G \cap [v]$ e $G \cap [w]$ são isomorfos. Além disso, seja $\mathcal{G}_0$ o conjunto dos isomorfismos do grafo tal que para cada $g \in \mathcal{G}_0$, existe $(v_g, w_g) = (v, w) \in \mathcal{R}_0$ tal que $g : [v] \cap G \to [w] \cap G$ é um isomorfismo do grafo. Isto é, para cada $v \in V_n$ e $w \in V_m$ $g : [v] \cap V_{n+k} \to [w] \cap V_{m+k}$ é uma bijeção para cada $k \geq 0$, isto é esse mapa induz uma bijeção entre os caminhos do grafo. Note que o conjunto $\mathcal{G}_0$ dos isomorfismos do grafo pode ser visto como o conjunto gerador de um grupo.

Assim apresentamos a seguinte definição, expondo algumas propriedades para obtenção de uma estrutura conforme.

Definição 3.3.1. *Dizemos que a quadruple $(G, \varphi, \mu, \mathcal{G}_0)$ é admissível se as seguintes condições são verificadas:*

1. *G é uma árvore enraizada e $V_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*
2. *$\rho \in (0, \infty)$ e existe uma sequência (s_k) onde $s_k \nearrow 1/\rho$ e $m_{s_k} \to \mu$ fracamente.*
3. *Para cada $g \in \mathcal{R}_0$ com $v_g \in V_m$, $w_g \in V_{m+k}$, temos que a função*

$$F_g : [v_g] \cap V \to (0, \infty),\ u \mapsto \rho^k \frac{\varphi_{g(u)}}{\varphi_u}$$

extende-se a uma função F_g uniformemente contínua sobre $\bar{G}$.

Os teoremas a seguir dão uma caracterização das medidas conformes sobre as árvores enraizadas.

Teorema 3.3.2. *(Medida conforme nas árvores enraizadas): Se $(G, \varphi, \mu, \mathcal{G}_0)$ é admissível, dado $g \in \mathcal{G}_0$ definimos $b := g(d)$ onde $d \in [v_g] \cap G$, para v_g em V_m e suponhamos que $w_g \in V_{m+k}$ então*

$$\mu([b]) = \int_{[d]} F_g d\mu \tag{3.3}$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{[d]} F_g dm_s - m_s([b]) \right| &= \left| \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n \sum_{u \in V_n \cap [d]} \varphi_u F_g(u)}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n Z_n} - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n \sum_{u \in V_n \cap [b]} \varphi_u}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n Z_n} \right| \\
&= \left| \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n \sum_{u \in V_n \cap [d]} \varphi_u F_g(u)}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n Z_n} - \frac{\sum_{n=|b|}^{\infty} a_n s^n \sum_{u \in V_n \cap [b]} \varphi_u}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n Z_n} \right| \\
&= \left| \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n \sum_{u \in V_n \cap [d]} \varphi_u F_g(u)}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n Z_n} - \frac{\sum_{n=|g(d)|}^{\infty} a_n s^n \sum_{u \in V_n \cap [g(d)]} \varphi_u}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n Z_n} \right| \\
&\leq \frac{\sum_{n=|d|}^{\infty} a_n s^n \sum_{u \in V_n \cap [d]} \left| \varphi_u F_g(u) - \frac{a_{n+k}}{a_n} s^k \varphi_{g(u)} \right|}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n Z_n} \\
&= \sum_{n=|d|}^{\infty} a_n s^n \sum_{u \in V_n \cap [d]} \varphi_u \left| F_g(u) - s^k \frac{a_{n+k}}{a_n} \frac{\varphi_{g(u)}}{\varphi_u} \right|
\end{aligned}$$

Usando o fato que $(G, \varphi, \mu, \mathcal{G}_0)$ é admissível temos que $\left| F_g(u) - s^k \frac{a_{n+k}}{a_n} \frac{\varphi_{g(u)}}{\varphi_u} \right|$ tende a zero uniformemente, implicando assim que $\left| \int_{[d]} F_g d\mu - m_s([b]) \right|$ converge a zero quando $s \to 1/\rho$. □

Como consequência da regra de transformação de medidas podemos extender 3.3.2 para um grupoíde gerado por $\mathcal{G}_0$ apresentado abaixo. Note que para qualquer $g \in \mathcal{G}_0$ a inversa é um isomorfismo de $G \cap [w_g] \to G \cap [v_g]$ com $g \circ g^{-1} = id_{[v_g]}$ e $g^{-1} \circ g = id_{[w_g]}$. Além disso, se g e h são elementos de $\mathcal{G}_0$ com $w_g = v_h$ então $h \circ g$ é um isomorfismo entre $G \cap [w_h] \to G \cap [w_g]$. Em particular a extensão $\mathcal{G}$ de $\mathcal{G}_0$ existe e é definida como o subconjunto minimal dos isomorfismos dos subgrafos de G tal que :

1. $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$,
2. se $g \in \mathcal{G}$, então $g^{-1} \in \mathcal{G}$,
3. se $g, h \in \mathcal{G}$ com $w_g = v_h$, então $h \circ g \in \mathcal{G}$.

Assim temos o seguinte resultado.

Teorema 3.3.3. *Se $(G, \varphi, \mu, \mathcal{G}_0)$ é adimissível e $F_g > 0$ μ quase certamente para todo $g \in \mathcal{G}_0$ então para todo $g \in \mathcal{G}$ definimos $b := g(d)$ onde $d \in [v_g] \cap G$, para v_g em V_m e suponhamos que $w_g \in V_{m+k}$ então temos*

$$\mu([b]) = \int_{[d]} F_g d\mu$$

Demonstração. Seja $g \in \mathcal{G}$, logo como $\mathcal{G}$ é finitamente gerado por $\mathcal{G}_0$, existem $g_1, g_2, \cdots, g_k$ funções em $\mathcal{G}_0$ tal que

$$g([d]) = g_k\Big(g_{k-1} \circ g_{k-2} \circ \cdots \circ g_1([d])\Big)$$

Como g_k pertence a $\mathcal{G}_0$, podemos aplicar o teorema anterior assim

$$\begin{aligned} \mu([b]) &= \int_{g_{k-1} \circ g_{k-2} \circ \cdots \circ g_1([d])} F_{g_k} d\mu \\ &= \int_{g_{k-2} \circ \cdots \circ g_1([d])} F_{g_k} \circ F_{g_{k-1}} \circ g_{k-1} d\mu \end{aligned}$$

Indutivamente obtemos que

$$\mu([b]) = \int_{[d]} F_{g_k} \circ F_{g_{k-1}} \circ \cdots \circ F_{g_2} \circ g_1 d\mu$$

Tomando $F_g = F_{g_k} \circ F_{g_{k-1}} \circ \cdots \circ F_{g_2} \circ g_1 d\mu$, temos que

$$\mu([b]) = \int_{[d]} F_g d\mu$$

□

3.4 A extensão de Caratheodory nas árvores enraizadas

Dado uma árvore G, vamos agora aplicar alguns resultados da teoria das medidas, para mostrarmos a existência de uma medida m_s'definida no semi anel de $\bar{G}$, tal que $m_s'|_{\mathcal{A}} = m_s$, onde m_s é a medida dada pelo teorema da Medida conforme nas árvores enraizada e $\mathcal{A}$ é a coleção disjuntas dos elementos do semi anel.

Proposição 3.4.1. *Seja G uma árvore, então $S = (\{[w]; w \in V_n, \;\; n \in \mathbb{N}\} \cup V)$ é um semi- anel de $\bar{G} = G \cup \partial G$. (A definição de um semi-anel pode ser encontrada no anexo).*

Demonstração. Seja $v_1, v_2 \in S$, sem perda de generalidade vamos supor que $v_1 \in V_n$ e $v_2 \in V_m$, com $n \leq m$

- $S \neq \emptyset$ pois $\bar{G} = [\mathbf{o}] \in S$
- Seja v_1, $v_2 \in S$,temos dois casos para analisar a interseção.
  1. Se $v_2 \notin [v_1]$ então $[v_1] \setminus [v_2] = [v_1] \in S$
  2. Se $v_2 \in [v_1]$ então $[v_1] \setminus [v_2] = \bigcup_{\substack{w \in V_m \cap [v_1] \\ w \neq v_2}} [w] \cup v$, onde $v \in \{V_{n+1} \cap [v_1] \cdots V_{m-1} \cap [v_1]\}$ que de fato é disjuntos.

□

Proposição 3.4.2. *m_s definida no teorema da medida conforme nas árvores enraizadas é uma medida de probabilidade sobre $S = (\{[w]; w \in V_n n \in \mathbb{N}\} \cup V)$.*

Demonstração. Temos que

- $m_s(\emptyset) = \frac{1}{\mathcal{P}(s)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n \sum_{v \in V_n} \mathbf{1}_{\emptyset}(v) = 0$
- $m_s(A) \geq 0 \;\; \forall \in S$
- Seja $A \in S$ e seja A_i elementos de S tais que $A = \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ com $i \in \mathbb{N}$

Pela convergência absoluta, temos que

$$\begin{aligned}
m_s(A) &= \frac{1}{\mathcal{P}(s)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n \sum_{v \in V_n} \varphi_v \mathbf{1}_A(v) \\
&= \frac{1}{\mathcal{P}(s)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n \sum_{v \in V_n} \varphi_v \cdot \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_i}(v) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{\mathcal{P}(s)} \sum_{n=1}^{k} a_n s^n \sum_{v \in V} \varphi_v \mathbf{1}_{A_i}(v) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} m_s(A_i)
\end{aligned}$$

Assim temos que $m_s(\cup_{i \in \mathbb{N}}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} m_s(A_i)$

$\square$

Proposição 3.4.3. *Seja K um semi- anel e $\mathcal{U}(K) = \mathcal{U}$ a coleção das uniões finitas disjuntas de elementos de K. Então:*

1. *$\mathcal{U}$ é um anel,*
2. *Toda medida μ em K pode ser estendida de maneira única para uma medida μ^* em $\mathcal{U}$ definida por*

$$\mu^*(\sum_{j=1}^{m} K_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu(K_j)$$

3. *Se uma medida μ em K é $\sigma-$aditiva, então sua extensão μ^* é também σ-aditiva*

A demostração desse teorema pode ser encontrada em [2]

Assim utilizando a proposição acima, temos que existe uma única extensão m_s^* em $\mathcal{A}(S) = \mathcal{A}$ σ- finita, onde $\mathcal{A}$ é a coleção das uniões finitas disjuntas de elementos de S.

Definição 3.4.4. *Seja X um conjunto qualquer. Uma função $\lambda : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ é chamada de medida exterior se satisfaz a seguintes condições:*

- $\lambda(\emptyset) = 0$

- $A \subset B \Rightarrow \lambda(A) < \lambda(B)$
- *Se (A_n) é uma sequência de subconjuntos de X então $\lambda\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$*

Podemos apresentar um caracterização das medidas exterior que é demostrada em [16] do seguinte modo:

Teorema 3.4.5. *Seja B um subconjunto qualquer de X então $\lambda(B) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$, onde $B \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} E_j$.*

Seja λ uma medida exterior em X. Vamos definir G_λ o conjunto de todos os subconjuntos $A \subset X$, tal que para algum $B \subset X$ temos que

$$\lambda(B) = \lambda(B \cap A) + \lambda(B \cap A^c)$$

Assim podemos apresentar a seguinte proposição:

Proposição 3.4.6. *Seja λ uma medida exterior em X e seja G_λ como definida anteriormente. Temos que G_λ é uma σ algebra sobre X*

Demonstração. De fato temos que $\emptyset \in G_\lambda$

Seja agora $A \in G_\lambda$ e $B \subset X$ tal que $\lambda(B) = \lambda(B \cap A) + \lambda(B \cap A^c)$ mas $\lambda(B) = \lambda(B \cap A^c) + \lambda(B \cap A)$ logo $A^c \in G_\lambda$.

Considere agora $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G_\lambda$, vamos mostrar que $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in G_\lambda$.

Temos que
$\lambda(B \cap (\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n)) + \lambda(B \cap (\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n)^c) \leq \sum_n \lambda(B \cap A_n) + \lambda(B \cap (\cup_{n \in \mathbb{N}})^c) = \lambda(B)$.
Por outro lado temos pela definição de medida exterior que $\lambda(B) \leq \lambda(B \cap (\cup^n A_n)^c) + \lambda(B \cap (\cup_n) A_n)$
Portanto temos que G_λ é uma σ-algebra. □

Lema 3.4.7. *Seja R um anel de X e seja μ a medida sobre R. Seja λ_μ a medida exterior associada a μ. Considere Σ a σ-algebra associada a λ_μ. Então temos que $R \in \Sigma$.*

Teorema 3.4.8. *(Teorema de Caratheodory) Seja R um anel de X e μ a medida sobre R $\sigma-$aditiva.Então existe uma medida μ' σ-aditiva sobre a $\sigma-$algebra gerada por R tal que $\mu'|_R = \mu$*

Demonstração. Seja λ_μ a medida exterior associada a μ, e Σ , a sigma algebra associada a λ_μ, então pelo lema anterior temos que a σ-algebra gerada por R pertence a Σ. Considere agora λ_{mu} restrita a R, vamos mostrar que

$\lambda_\mu|_R = n\mu$. De fato sempre temos que $\lambda_\mu(A) \leq \mu(A)$, para todo A.

Por outro lado , seja (A_n) uma cobertura de A onde $(A_n) \in R$. Vamos definir $B_1 := A_1 \cap A$ e $B_{n+1} := (A_n \cap A) \setminus \cup_{k \geq n}(A_k \cap A)$ para $n \geq 1$. Temos que $B_n \in R$ e todos disjuntos , além disso $\cup_n B_n = A$ e $\mu(B_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$. Como μ é uma medida no anel temos que $\mu(A) = \sum_n \mu(B_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$. Assim temos $\mu(A) \leq \lambda_\mu(A)$.

Portanto temos que $\lambda_\mu|_R = \mu$ $\square$

Utilizando o teorema de Caratheodory, existe uma medida m'_s sobre a σ-algebra gerada por $\mathcal{A}$ tal que $m'_s|_{\mathcal{A}} = m_s$.

Capítulo 4

Aplicações ao Odomêtro

4.1 Odômetro

Nessa aplicação, vamos associar a árvore enraizada a um objeto clássico dos sistemas dinâmicos, conhecido como odômetro [10]. Para $k \geq 2$ consideramos o conjunto $\mathbb{Z}_k := \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ e fixamos uma sequência $(k_n : n \in \mathbb{N})$ com $k_n \geq 2$.

Tomemos o conjunto $M := \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{k_n}$ das sequências de elementos com valores em $\mathbb{Z}_{k_n}$. Identificando $\mathbb{Z}_k$ com $\{0, 1, \cdots, k-1\}$, para $(x_i), (y_i) \in M$ consideremos

$$\epsilon_0 = 0 \quad \epsilon_k = \begin{cases} 0 : x_n + y_n < k_n \\ 1 : x_n + y_n \geq k_n \end{cases}$$

e definimos a soma $(z_i) = (x_i) + (y_i)$ da seguinte forma :

$$z_n := x_n + y_n + \epsilon_{k-1} \mod k_n \ \ (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

Exemplo: Seja $k_n = 3$ para todo n . E tomemos $x = (1, 0, 2, 1, \cdots)$ e $y = (0, 1, 2, 1, \cdots)$. Assim temos que :

$$\begin{array}{rcl} x_0 + y_0 & = & 1 + 0 = 1 < 3 \ \ logo \ \ \epsilon_0 = 0 \ \ z_0 = 1 \\ x_1 + y_1 & = & 0 + 1 = 1 < 3 \ \ logo \ \ \epsilon_1 = 0 \ \ z_1 = 1 \\ x_2 + y_2 & = & 2 + 2 = 4 > 3 \ \ logo \ \ \epsilon_2 = 1 \ \ z_2 = 1 \\ x_3 + y_3 & = & 1 + 1 = 2 < 3 \ \ logo \ \ \epsilon_3 = 0 \ \ z_3 = 0 \end{array}$$

$$\text{Logo } z = x + y = (1, 1, 1, 0, \cdots)$$

Teorema 4.1.1. *O conjunto M com a soma definida acima forma uma estrutura de grupo.*

Demonstração. Vamos dar um esboço da demostração, pois as contas são fáceis de serem feitas.

- Temos de fato que $M \neq \emptyset$ pois $(0, 0, 0, \cdots, 0, \cdots) \in M$
- $(0, 0, 0, \cdots, 0 \cdots)$ é o neutro da operação.
- A associatividade é válida, pois é herdada da associatividade da soma usual.
- Dado $x = (x_0, x_1, x_2, \cdots)$ definimos o inverso $-x := (y_0, y_1, y_2, \cdots)$ onde $y_i = \begin{cases} k_i - x_i : i = 2n \\ k_i - x_i - 1 : i = 2n + 1 \end{cases}$ para $n \in \{0, 1, 2, \cdots\}$

□

Chamamos o grupo acima $(M, +)$ de Odômetro.

Como facilmente pode ser vista a órbita de $(1, 0, 0, 0, \cdots)$ é igual ao do conjunto de todos os elementos cujo coordenadas são eventualmente iguais a 0, e em particular esta órbita é densa em relação a topologia produto.

Definição 4.1.2. *Seja $x \in M$ vamos definir a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} T: M & \mapsto & M \\ x & \mapsto & T(x) = x + (1, 0, 0, 0, \cdots). \end{array}$$

esta aplicação é conhecida como adding machine.

Teorema 4.1.3. *A aplicação adding machine definida acima é unicamente ergódica. Isto é ; para $T : \partial G \mapsto \partial G$ existe uma única medida de probabilidade $T-$invariante.*

Note que essa medida invariante tem que ser automaticamente ergódica.

Demonstração. E um corolário do teorema 1.1 em [3]. □

Para fazer a associação da árvore enraizada $G = (V, E)$ com o odômetro, (ver figura 4.1), vamos considerar $V_0 := \{0\}$ e $V_n := \prod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_{k_i}$ e as arestas como $\cup_n E_n$ onde $E_n = \{((x_1, x_2, \cdots, x_n), (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})); (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in E_{n+1}\}$.

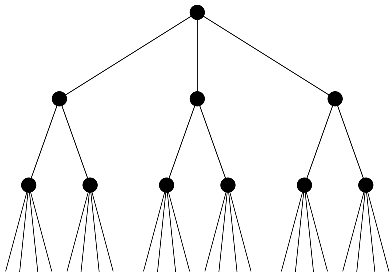

Figura 4.1: Um odômetro com $n_1 = 3$, $n_2 = 2$ and $n_3 = 4$.

Assim para $x \in V_n$ com $|V_n| = k_1 k_2 \cdots k_n$, podemos definir $\varphi_x = (k_1 k_2 \cdots k_n)^{-1}$ e chamaremos essa escolha de φ como escolha canônica. Vimos no capítulo anterior que para a escolha canônica de φ, $Z_n = 1$. Como $\bar{G}$ é compacto, pela proposição 3.2.1 temos que $\{m_s\}$ converge fracamente para μ. Assim

$$\mu([x_1, \cdots, x_n]) = (k_1 k_2 \cdots k_n)^{-1}$$

para $\rho = 1$ e (a_n) a sequência constante igual a 1.

Como a dinâmica do adding machine pode ser encontrada de muitas maneiras diferentes nos livros, a construção de $\mathcal{G}$ é um pouco mais complexa. Aqui vamos escolher uma construção que depende da passagem horizontal de uma órbita. No entanto para considerar a transição de cada passagem horizontal $k_n - 1$ é necessário considerar faixas horizontais, de pelo menos comprimento 2. Isto é, para $v = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ com $x_n \neq k_n - 1$ definimos

$$g_v : \begin{cases} [v] \to [x_1, \ldots, x_{n-1} + 1, x_n], & (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1} + 1, x_n, \ldots) \\ \text{se } x_{n-1} \neq k_{n-1} - 1 & \\ [v] \to [x_1, \ldots, 0, x_n + 1], & (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_1, \ldots, 0, x_n + 1, \ldots) \\ \text{se } x_{n-1} = k_{n-1} - 1 & \end{cases}$$

Teorema 4.1.4. *Para g_v definido acima coincide com T^{α_n} onde $\alpha_n := k_1 \cdots k_{n-2}$ e T é a aplicação adding machine para $n > 2$ sobre $[v] \cap \partial G$ e $v \in V_n$. Por convenção $\alpha_2 := 1$*

Demonstração. Inicialmente vamos supor $n = 2$, assim temos que $v = (x_1 x_2)$ logo

$$g_v = \begin{cases} [x_1 + 1, x_2] & \text{se} \quad x_1 \neq k_1 - 1 \\ [0, x_2 + 1] & \text{se} \quad x_1 = k_1 - 1 \end{cases}$$

Temos nesse caso que $\alpha_2 = 1$ logo

$$\begin{aligned} T(v) &= [x_1, x_2] + (1, 0, 0, \cdots) &= [x_1 + 1, x_2] \quad \text{se} \quad x_1 \neq k_1 - 1 \\ & &= [0, x_2 + 1] \quad \text{se} \quad x_1 = k_1 - 1 \end{aligned}$$

Assim temos que $T(v) = g_v$
Suponhamos que é válido para n assim $T^{\alpha_n}(v) = g_v$ para todo $v \in V_n$

Vamos mostrar agora que é válido para $n+1$, ou seja, $T^{\alpha_{n+1}}(v) = g_v$ para todo $v \in V_{n+1}$.

Nesse caso temos que $v = (x_1 x_2 x_3 \cdots x_n x_{n+1})$ logo

$$g_v = \begin{cases} [x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n + 1, x_{n+1}] & \text{se} \quad x_n \neq k_n - 1 \\ [x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, 0, x_{n+1} + 1] & \text{se} \quad x_n = k_n - 1 \end{cases}$$

$\alpha_{n+1} = 1k_1k_2 \cdots k_{n-1} = \alpha_n k_{n-1}$, segue então que

$$\begin{aligned} T^{\alpha_{n+1}}(v) &= \underbrace{T^{\alpha_n} \circ T^{\alpha_n} \circ T^{\alpha_n} \circ \cdots \circ T^{\alpha_n}}_{k_{n-1} \text{ vezes}} [x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}] \\ &= \begin{cases} \underbrace{T^{\alpha_n} \circ T^{\alpha_n} \circ \cdots \circ T^{\alpha_n}}_{k_{n-1}-1 \text{ vezes}} [x_1, \cdots, x_{n-1} + 1, x_n, x_{n+1}] \text{ se } x_{n-1} \neq k_{n-1} - 1 \\ \underbrace{T^{\alpha_n} \circ T^{\alpha_n} \circ \cdots \circ T^{\alpha_n}}_{k_{n-1}-1 \text{ vezes}} [x_1, \cdots, 0, x_n + 1, x_{n+1}] \text{ se } \begin{matrix} x_{n-1} & = & k_{n-1} - 1 \\ & \text{e} & \\ x_n & \neq & k_n - 1 \end{matrix} \\ \underbrace{T^{\alpha_n} \circ T^{\alpha_n} \circ \cdots \circ T^{\alpha_n}}_{k_{n-1}-1 \text{ vezes}} [x_1, \cdots, 0, 0, x_{n+1} + 1] \text{ se } \begin{matrix} x_{n-1} & = & k_{n-1} - 1 \\ & \text{e} & \\ x_n & = & k_n - 1 \end{matrix} \end{cases} \end{aligned}$$

Para $x_{n-1} = k_{n-1} - 1$ e $x_n \neq k_n - 1$ temos

$$\underbrace{T^{\alpha_n} \circ T^{\alpha_n} \circ \cdots \circ T^{\alpha_n}}_{k_{n-1}-1 \text{ vezes}}[x_1, \cdots, 0, x_n + 1, x_{n+1}] = \underbrace{T^{\alpha_n} \circ T^{\alpha_n} \circ \cdots \circ T^{\alpha_n}}_{k_{n-1}-2 \text{ vezes}}[x_1, \cdots, 1, x_n + 1, x_{n+1}]$$

$$= \underbrace{T^{\alpha_n} \circ T^{\alpha_n} \circ \cdots \circ T^{\alpha_n}}_{k_{n-1}-3 \text{ vezes}}[x_1, x_2, \cdots, 2, x_n + 1, x_{n+1}]$$

$$\vdots$$

$$= T^{\alpha_n}[x_1, x_2, \cdots, k_{n-1} - 2, x_n + 1, x_{n+1}]$$

$$= [x_1, x_2, \cdots, k_{n-1} - 1, x_n + 1, x_{n+1}]$$

$$= [x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n + 1, x_{n+1}]$$

Para $x_{n-1} = k_{n-1} - 1$ e $x_n = k_n - 1$ temos

$$\underbrace{T^{\alpha_n} \circ T^{\alpha_n} \circ \cdots \circ T^{\alpha_n}}_{k_{n-1}-1 \text{ vezes}}[x_1, \cdots, 0, 0, x_{n+1} + 1] = \underbrace{T^{\alpha_n} \circ T^{\alpha_n} \circ \cdots \circ T^{\alpha_n}}_{k_{n-1}-2 \text{ vezes}}[x_1, \cdots, 1, 0, x_{n+1} + 1]$$

$$= \underbrace{T^{\alpha_n} \circ T^{\alpha_n} \circ \cdots \circ T^{\alpha_n}}_{k_{n-1}-3 \text{ vezes}}[x_1, x_2, \cdots, 2, 0, x_{n+1} + 1]$$

$$\vdots$$

$$= T^{\alpha_n}[x_1, x_2, \cdots, k_{n-1} - 2, 0, x_{n+1} + 1]$$

$$= [x_1, x_2, \cdots, k_{n-1} - 1, 0, x_{n+1} + 1]$$

$$= [x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, 0, x_{n+1}]$$

Assim temos que

$$T^{\alpha_{n+1}} = \begin{cases} [x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n + 1, x_{n+1}] & \text{se} \quad x_n \neq k_n - 1 \\ [x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, 0, x_{n+1} + 1] & \text{se} \quad x_n = k_n - 1 \end{cases}$$

Portanto temos que $T^{\alpha n+1}(v) = g_v$ para todo $v \in V_{n+1}$.

$\square$

Definimos agora o conjunto $\mathcal{G}_0 := \{g_v : v = (x_1, \cdots, x_n), x_n \neq k_n - 1, n \leq 2\}$. Note que a ação g_v substitui as coordenadas $|v| - 1$ e |v|. Assim a órbita de $[(x_1, \cdots, x_n, 0, 0)]$ sobre uma ação de $\mathcal{G}_0$ é igual a $\{[(x_1, \cdots, x_n, a, b)] : a \in \mathbb{Z}_{k_n+1}, b \in \mathbb{Z}_{k_n+2}, b \neq k_{n-2} - 1\}$. Assim segue que g pertence ao grupoíde $\mathcal{G}$ gerado por $\mathcal{G}_0$ se e somente se existem $n \in \mathbb{N}$, $v \in V_n$ e $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}_{k_{n+1}}, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}_{k_{n+2}} \setminus \{k_{n+2} - 1\}$ tal que

$$g : [v, x_1, x_2] \mapsto [v, y_1, y_2],\ (v_1, \ldots, v_n, x_1, x_2, \ldots) \mapsto (v_1, \ldots, v_n, y_1, y_2, \ldots).$$

Teorema 4.1.5. *Dado $g \in \mathcal{G}_0$ temos que $F_g = 1$.*

Demonstração. Por definição temos que

$$F_g : [v_g] \cap V \to (0, \infty),\ u \mapsto \rho^k \frac{\varphi_{g(u)}}{\varphi_u}$$

. Seja $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$
Como para todo $g \in \mathcal{G}_0$ atua apenas deslocando horizontalmente, logo temos que $\varphi_u = \varphi_{g(u)}$, pois $g(u)$ e u estão no mesmo nível assim $k = 0$ e $F_g = 1$.

$\square$

Vamos agora ver como o odômetro T está associado com a árvore enraizada G.

Seja α_1, segue que $T(x) = g_v(x)$, para todo $v \in (ab)$ com $b \neq k_2 - 1$ e $x \in [ab] \cap \partial G$. Consideraremos $x \in [(k_1 - 1)(k_2 - 1) \cdots (k_n - 1)b] \cap \partial G$ para $b \neq k_n - 1$, assim pela caracterização de $\mathcal{G}$ acima, é possível substituir $[(k_1 - 1)(k_2 - 1) \cdots (k_n - 1)b]$ por $[0, 0, \cdots, (b + 1)]$ atráves de uma aplicação de interação dos elementos em $\mathcal{G}$. Note que para $g \in \mathcal{G}$ onde $g : (x_1 \cdots x_{n-1}(k_{n-1} - 1)b) \mapsto (x_1 \cdots x_{n-1} 0(b+1))$ corresponde a $T^{-(k_l-1)\alpha_l}$. Além disso $(x_1 \cdots x_{n-1}(k_{n-1} - 1)b) \mapsto (x_1 \cdots x_{n-1} 0(b+1))$, consequentimente a substituição acima é associada a T atrvés da seguinte identidade.

$$\alpha_n = 1 + \sum_{l=2}^{n-1} (k_{l-1} - 1)\alpha_l.$$

Discutiremos agora a relação entre a medida μ dada pelo teorema 3.3.3 e a única medida de probabilidade invariante de T já que vimos que T é unicamente ergódica. Vamos começar mostrando que μ é ergódica, dependendo da escolha de φ.

Definição 4.1.6. *Dizemos que φ é um potencial de* distorção limitada, *se existe $C \geq 1$ tal que para todo $k, m, n \in \mathbb{N}$ com $k < m < n$ e $a \in V_k$, $(ab), (ac) \in V_m$ e $(abx), (acx), (aby), (acy) \in V_n$*

$$C^{-1} \leq \frac{\varphi_{abx}\varphi_{acy}}{\varphi_{acx}\varphi_{aby}} \leq C. \tag{4.1}$$

Note que essa definição não implica que φ se estende a uma função contínua em $G \cup \partial G$, o que é de total importância, pois se esse fato fosse verdade excluiria muitos exemplos importantes. Contudo se φ se estendesse a uma função contínua possitiva, então φ automaticamente seria de distorção limitada. Além disso a demonstração abaixo revela que a definição acima, dar origem a uma estimativa mais clássica que também é referida como distorção limitada.

O principal argumento para a prova da ergodicidade é baseada na prova de Kolmogorov's de 0-1, lei que leva o seu nome. Ou seja, provamos que a σ- algebra dos eventos terminais, que definimos agora como uma sequência de relação de equivalência , é trivial. Isto é , para $n \in \mathbb{N}$, dizemos que $(x_1, \ldots, x_n, \ldots) \sim_n (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$ se $x_i = y_i$ para todo $i \geq n$ e definimos o conjunto $V_n^\infty := \bigcup_{k \geq n} V_n \cup \partial G$. Assim podemos definir a sequência de mapas

$$\pi_n : V_n^\infty \to X_n := V_n^\infty / \sim_n$$

e a σ- *algebra terminal*

$$\mathcal{T} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ A \in \mathcal{B} : \pi_n^{-1} \circ \pi_n(A) = A \right\}.$$

Teorema 4.1.7. *Suponha que $(G, \mathcal{G}_0)$ são dados pelos odomêtro e que $(G, \varphi, \mu, \mathcal{G}_0)$ é admissível e que φ é de distorção limitada, então a σ- álgebra terminal é trivial e T é conservativa e ergódica.*

Demonstração. Pelo teorema 3.3.3, obtivemos uma estrutura conforme com respeito aos elementos de $\mathcal{G}$. Vamos dividir a demonstração em três passos. O primeiro passo vamos encontrar a estimativa da distorção para essas medidas da estrutura conforme em $\mathcal{G}$, no passo dois mostraremos que a σ- álgebra terminal é de fato trivial e no último passo, provamos a ergodicidade de T.
Passo 1. Seja $k, m, n \in \mathbb{N}$ com $k < m < n$ e $v = (v_1 v_2 \ldots) \in V_n$ e, para $B \in \mathcal{B}$, denote por $[B]_m$ a classe de equivalência de B em relação a $\sim_m$, isto

é $[B]_m = \pi_m^{-1} \circ \pi_m(B)$

$$\begin{aligned}
\mu([v]_m) &= \sum_{(a_1\ldots a_m)\in V_m} \mu([a_1 \ldots a_m v_{m+1} \ldots v_n]) \\
&= \sum_{(a_1\ldots a_m)\in V_m} \mu \circ T^{\sum_{l=k+1}^m (a_l - v_l)\alpha_{l-1}}([a_1 \ldots a_k v_{k+1} \ldots v_n]) \\
&= \sum_{(a_1\ldots a_k)\in V_k} \int_{[a_1\ldots a_k v_{k+1}\ldots v_n]} \left(\sum_{(a_{k+1}\ldots a_m)} \frac{d\mu \circ T^{\sum_{l=k+1}^m (a_l - v_l)\alpha_{l-1}}}{d\mu} \right) d\mu.
\end{aligned}$$

Como n é arbritário, segue que a medida μ_k sobre X_k definida por $\mu_k(A) := \mu(\pi_k^{-1}(A))$, que

$$d\mu_m \circ \pi_m(x) = \left(\sum_{(a_1\ldots a_m)} \frac{d\mu \circ T^{\sum_{l=k+1}^m (a_l - v_l)\alpha_{l-1}}}{d\mu}(a_1 \ldots a_k x_{k+1} \ldots) \right) d\mu_k(x),$$

para $x = (x_1 x_2 \ldots) \in [(v_1 \ldots v_m)]_k$. Como $T^{\sum_{l=k+1}^m (a_l - v_l)\alpha_{l-1}}$ restrito a $[a_1 \ldots a_k v_{k+1} \ldots v_n]$ pode ser escrito como uma composição de $(m-k)$ elementos $(g_{a_l, v_l} \in \mathcal{G} : l = k+1, \ldots, m)$, segue que cada termo da soma acima é igual a um produto. Mais precisamente, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d\mu_m \circ \pi_m}{d\mu_k}(\pi_k(x)) &= \sum_{(a_1\ldots a_m)} \frac{d\mu \circ T^{\sum_{l=k+1}^m (a_l - v_l)\alpha_{l-1}}}{d\mu}(a_1 \ldots x_k \ldots) \\
&= \sum_{(a_1\ldots a_m)} \prod_{l=k+1}^{m} F_{g_{a_l, v_l}} \circ g_{a_{l-1}, v_{l-1}} \circ \cdots g_{a_{k+1}, v_{k+1}}(a_1 \ldots x_k \ldots) \\
&= \sum_{(a_1\ldots a_m)} \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_{a_1\ldots a_k a_{k+1}\ldots a_m x_{m+1}\ldots x_n}}{\varphi_{a_1\ldots a_k x_{k+1}\ldots x_m x_{m+1}\ldots x_n}}
\end{aligned}$$

Como φ é de distorção limitada, temos que para todo $x, y \in [(v_1 \ldots v_m)]_k$

$$\frac{d\mu_m \circ \pi_m}{d\mu_k}(\pi_k(x)) = C^{\pm 1} \frac{d\mu_m \circ \pi_m}{d\mu_k}(\pi_k(y))$$

Usando essa estimativa, segue que para $v = (v_1 \ldots v_k \ldots v_m)$, $x \in [v]_k$ e $A \in \mathcal{B}$ com $A = [A]_m$

$$\mu_m(A) = \int_{[v]_k \cap A} \frac{d\mu_m \circ \pi_m}{d\mu_k} d\mu_k = C^{\pm 1} \frac{d\mu_m \circ \pi_m}{d\mu_k}(x) \mu_k([v]_k \cap A).$$

Assim, para $A = \partial G$, obtemos que $C^{-1} \leq \frac{d\mu_m \circ \pi_m}{d\mu_k}(x)\mu_k([v]_k) \leq C$. Portanto, para $A \in \mathcal{B}$ com $A = [A]_m$, temos que

$$\mu_k([v]_k)\mu_m(A) = C^{\pm 2}\mu_k([v]_k \cap A). \tag{4.2}$$

Passo 2. Vamos mostrar agora que a σ-algebra terminal é trivial. Assuma que $m < n$, e que $A = [A]_n$ além disso seja B uma união finita de conjuntos do tipo $[v]_m$, para $v \in V_n$. Da estimativa (4.2) segue que

$$\mu_k(B \cap A) = C^{\pm 2}\mu_k(B)\mu_m(A) = C^{\pm 2}\mu_k(B)\mu_k(A).$$

Em particular, se $A \in \mathcal{T}$, isto é $A = [A]_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, implica que

$$\mu_k(B \cap A) = C^{\pm 2}\mu_k(B)\mu_k(A).$$

para todo $B \in \mathcal{B}$. Fazendo $B = A^c$, temos que

$$0 = \mu_k(A^c \cap A) = C^{\pm 2}(1 - \mu_k(A))\mu_k(A),$$

logo implica que $\mu_k(A) = 1$ ou $\mu_k(A) = 0$.
Passo 3. Para mostrar a ergodicidade, vamos mostrar que qualquer função T-invariante é constante.

Seja $f : \partial G \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e $f = f \circ T$. Para $n \in \mathbb{N}$ e $x = (x_1 x_2 \ldots) \in \partial G$, seja $k_n(x) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $T^{-k_n(x)}(x) = (0 \ldots 0 x_{n+1} x_{n+2} \ldots)$. Então como T não depende das n primeiras coordenadas temos que :

$$f(x) = f(T^{-k_n(x)}(x) = \frac{1}{\alpha_{n+1}} \sum_{j=0}^{\alpha_{n+1}-1} f(T^{j-k_n(x)}) = \frac{1}{\alpha_{n+1}} \sum_{(a_1 \ldots a_n) \in V_n} f(a_1 \ldots a_n x_{n+1} x_{n+2} \ldots).$$

Assim, f é $\mathcal{T}$-mensurável, e portanto é constante. Como T é invertível e ergódica, segue que T é conservativa (ver [8]), como queríamos. □

O teorema acima fornece uma ampla classe de potenciais, onde μ é ergódica, o que responde a uma pergunta de Schmidt (ver [11]), para um caso específico de um odômetro.

Uma abordagem mais importante é obter condições necessárias para que μ seja equivalente a uma medida unicamente invariante. Para alcançar esse resultado, vamos apresentar a seguinte definição.

Definição 4.1.8. *Dizemos que um potencial φ é de* variação somável *se $\sum_n \log C_n < \infty$, onde*

$$C_n := \sup\left\{\frac{\varphi_g}{\varphi_h} : |g| = |h| \geq n \text{ e } d(g,h) \leq 2^{-n}\right\}.$$

Assumindo essa condição, e como consequência do teorema de Gottschalk e Hedlund, ver **??**, obtemos que μ é equivalente a uma única medida de probabilidade ergódica T- invariante sobre ∂G. Além disso usaremos na prova do teorema abaixo que, $\log d\mu \circ T^n / d\mu$ é limitado uniformemente pela consequência da continuidade. Contudo depois de ter obtido a prova, descobrimos que Athanassopoulos, utilizou o mesmo argumento em [9] para deduzir a existência de um cobordo multiplicativo para limitação uniforme.

Teorema 4.1.9. *Suponha que $(G, \mathcal{G}_0)$ são dados pelo odômetro e que $(G, \varphi, \mu, \mathcal{G}_0)$ é admissível e que φ é de variação somável. Então existe um cobordo multiplicativo e contínuo, isto é existe $f : \partial G \to (0, \infty)$ contínua tal que $F_g(x) = f(x)/f(g(x))$ para todo $g \in \mathcal{G}$. Além disso, a medida associada $d\mu$ é igual a $f d\mu_0$, com μ_0 referindo a medida associada a escolha canônica de φ.*

Demonstração. Seja $m \in \mathbb{N}$ e consideramos $v = (v_1 \ldots v_m) \in V_m$ e definimos $0_m := (00 \ldots 0) \in V_m$

Assim temos que para $n := \sum_{\ell=1}^{m} v_\ell \alpha_{\ell-1}$, T^n é um homeomorfismo entre $[o_m] \cap \partial G$ e $[v]\partial G$. Além disso podemos escrever T^n como uma composição de elementos $g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{G}$, onde cada $g_\ell \in \mathcal{G}$ é definido como $(x_1 \ldots x_{\ell-1} 0 x_{\ell+1} \ldots) \mapsto (x_1 \ldots x_{\ell-1} v_\ell x_{\ell+1} \ldots)$.

Assim temos que

$$T^n(v) = g_m \circ g_{m-1} \ldots \circ g_1 \text{ para todo v}$$

Assim para $x \in [0_m] \cap \partial G$

$$\begin{aligned}
\left|\log \frac{d\mu \circ T^n}{d\mu}(x)\right| &= \left|\log \frac{d\mu \circ g_m \circ g_{m-1} \ldots \circ g_1}{d\mu}(x)\right| \\
&= \left|\log \prod_{\ell=1}^{m} \frac{d\mu \circ g_\ell}{d\mu}(g_{\ell-1} \circ \cdots g_1(x))\right| \\
&\leq \sum_{\ell=1}^{m} \left|\log \frac{d\mu \circ g_\ell}{d\mu}(g_{\ell-1} \circ \cdots g_1(x))\right| \\
&\leq \sum_{\ell=1}^{m} \left|\lim_{k\to\infty} \log \frac{\varphi_{(v_1 \ldots v_\ell x_{\ell+1} \ldots x_k)}}{\varphi_{(v_1 \ldots v_{\ell-1} x_\ell \ldots x_k)}}\right| \\
&\leq \sum_{\ell=0}^{m} \log C_\ell \quad \leq \sum_{\ell=0}^{\infty} \log C_\ell =: M < \infty.
\end{aligned}$$

Note que para qualquer $v, w \in V_m$ e qualquer $m \in \mathbb{N}$

$$\mu([w]) = \mu([v])e^{(\pm 2M)} \tag{4.3}$$

Definimos agora o conjunto $D_\infty := \{(x_\ell) : \exists n : x_\ell = k_\ell - 1 \forall \ell \geq n\}$. Por 4.3 segue que esse conjunto tem medida 0.

Suponhamos então que $x \in V_m \setminus D_\infty$, vamos analisar $\left|\frac{d\mu\circ T^n}{d\mu}(x)\right|$ para $n \in \mathbb{N}$.

Temos que para todo $x \in V_m \setminus D_\infty$, a aplicação $T^n(x)$ troca um número finito de coordenadas, mais precisamente substitui até as n primeiras coordenadas de $[x]$. Assim existem n_1 e $n_2 \in \mathbb{N}$ talque $n = n_1 + n_2$ e $T^{n_1}(x) \in [0]_m$ logo temos que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d\mu \circ T^n}{d\mu}(x)\right| &= \left|\frac{d\mu \circ T^{n_1+n_2}}{d\mu}(x)\right| \\
&= \left|\frac{d\mu \circ T^{n_2}}{d\mu}(T^{n_1}(x)).\frac{d\mu \circ T^{n_1}}{d\mu}(x)\right| \\
&= \left|\frac{d\mu \circ T^{n_2}}{d\mu}(T^{n_1}(x))\right|\left|\left(\frac{d\mu \circ T^{-n_1}}{d\mu}(T^{n_1}(x))\right)^{-1}\right|
\end{aligned}$$

Como $T^{n_1}(x) \in [0]_m$ temos então que

$$\begin{aligned}
\left|\log\frac{d\mu \circ T^n}{d\mu}(x)\right| &= \log\left|\frac{d\mu \circ T^{n_2}}{d\mu}(T^{n_1}(x))\right| + \log\left|\left(\frac{d\mu \circ T^{-n_1}}{d\mu}(T^{n_1}(x))\right)^{-1}\right| \\
&\leq \left|\log\frac{d\mu \circ T^{n_2}}{d\mu}(T^{n_1}(x))\right| + \left|\log\left(\frac{d\mu \circ T^{-n_1}}{d\mu}(T^{n_1}(x))\right)^{-1}\right| < 2M
\end{aligned}$$

Como temos que o D^c_∞ é denso em G segue que $\left|\log\frac{d\mu\circ T^n}{d\mu}(x)\right| < 2M$ para todo $x \in G$. Onde mostra que $\log\frac{d\mu\circ T^n}{d\mu}(x)$ é uniformemente limitado.
Pelo teorema de Gottschall-Hedlund, temos que existe uma função $h : \partial G \to (0, \infty)$ tal que

$$\log(\frac{d\mu \circ T^m}{d\mu}(x)) = h(x) - h \circ T^{(m)}(x)$$

aplicando a exponencial obtemos que

$$\frac{d\mu \circ T^m}{d\mu}(x) = e^{h(x) - h\circ T^m(x)} = \frac{e^{h(x)}}{e^{h\circ T^m(x)}}$$

Seja

$$\begin{array}{rccc} f: & \partial G & \to & (0,\infty) \\ & x & \to & e^{h(x)} \end{array}$$

Assim temos que

$$\frac{d\mu \circ T^m}{d\mu}(x) = \frac{f}{f(T^m)}(x)$$

Implicando que f é invariante em relação a T. Como T é unicamente ergódica e $fd\mu$ é invariante então temos que $e^{fd\mu}$ é ergódica. □

4.2 Medidas G

Nessa seção vamos associar a medida conforme determinada no teorema 3.3.2 com as *Medidas-G*, apresentadas em [1] e [7].

Definimos, $X_n := \mathbb{Z}_{k_n}$ e $\Gamma_n = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$. Para $\gamma \in X_n$ e $x \in \prod_{n-1}^{\infty} X_n$ definimos a ação $\gamma x = \gamma \cdot x = (x_1, x_2, \cdots, x_n + \gamma, \cdots)$. Particulamente vamos considerar uma sequência de funções $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, positiva e contínua, e seja γ aplicações tais que:

1. $g_{n+1} \circ \gamma = g_{n+1}$, para todo $\gamma \in \Gamma_n$
2. $\frac{1}{|X_{n+1}|} \sum_{\gamma \in X_{n+1}} g_{n+1}(\gamma x) = 1$, para todo $x \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$.

Definição 4.2.1. *Dado uma sequência de funções $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, satisfazendo as propriedades* (1) *e* (2)*. Dizemos que uma medida μ é uma Medida $-$ G se*

$$\frac{1}{|\Gamma_n|} \sum_{\gamma \in \Gamma_n} \frac{d\mu \circ \gamma}{d\mu}(x) = \frac{1}{g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)}.$$

Nosso objetivo aqui é mostrar que dado uma *Medida* $-$ *G* μ, podemos encontrar um potencial φ tal que o teorema 3.3.2 é satisfeito. Além disso se μ é uma medida associada a φ_v admissível, podemos encontrar uma sequência de funções $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazendo as propriedades (1) e (2).

Definição 4.2.2. *Seja $x \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ e $v \in V_n$, definimos*

$$\varphi_v^x := g_1(v_1 \cdots v_n x_{n+1} \cdots) g_2(v_1 \cdots v_n x_{n+1} \cdots) \cdots g_n(v_1 \cdots v_n x_{n+1} \cdots)$$

Lema 4.2.3. *Seja $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções tais que $G_n(x) = g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)$, temos que*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_n} G_n(x) = |\Gamma_n|,$$

para todo $x \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$.

Demonstração. Prova por indução em n.

Para $n = 1$ a afirmação é verdadeira pois

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_1} G(x) = 1 = |\Gamma_1|$$

Suponhamos que vale para n, assim temos que

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_n} G_n(x) = |\Gamma_n|$$

Vamos mostrar para $n + 1$;
Temos que

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_{n+1}} G_{n+1}(x) = \sum_{\tau \in \Gamma_n} \sum_{\sigma \in X_{n+1}} G_{n+1}(\tau\sigma(x))$$

$$= \sum_{\tau\Gamma_n, \sigma \in X_{n+1}} G_n(\tau\sigma(x)) g_{n+1}(\tau\sigma(x)) = \sum_{\sigma \in X_{n+1}} g_{n+1}(\sigma(x)) \sum_{\tau \in \Gamma_n} (\tau\sigma(x))$$

Pela hipótese de indução temos que

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_{n+1}} G_{n+1}(x) = \sum_{\sigma \in X_{n+1}} g_{n+1}(\sigma(x)) |\Gamma_n| = |\Gamma_n| \cdot \sum_{\sigma \in X_{n+1}} g_{n+1}(\sigma(x))$$

Assim usando as propriedades da g e usando o fato que X_n é um grupo, temos que $\sum_{\sigma \in X_{n+1}} g_{n+1}(\sigma(x)) = |X_{n+1}|$, portanto

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_{n+1}} G_{n+1}(x) \quad = \quad |\Gamma_n| \cdot |X_{n+1}| = |\Gamma_{n+1}|.$$

□

Proposição 4.2.4. *A medida μ determinada pelo teorema 3.3.2 associada ao potencial $\varphi_v = g_1(v_1 \cdots V_n x_{n+1} \cdots) g_2(v_1 \cdots V_n x_{n+1} \cdots) \cdots g_n(v_1 \cdots V_n x_{n+1} \cdots)$,onde $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazem as propriedades* (1) *e* (2) *é uma medida* $- G$.

Demonstração. Seja $\gamma \in \Gamma_n$, temos que

$$F_\gamma = \frac{\varphi(\gamma x)}{\varphi(x)} = \lim_{m \to \infty} \frac{g_1(\gamma x) \cdots g_m(\gamma x))}{g_1(x) \cdots g_m(x)}$$

Como as g só dependem das n primeiras coordenadas de x, temos então que

$$\begin{aligned} F_\gamma &= \frac{\varphi(\gamma x)}{\varphi(x)} \\ &= \frac{g_1(\gamma x)\cdots g_n(\gamma x)}{g_1(x)\cdots g_n(x)} \end{aligned}$$

Assim para $\sum_{\gamma\in\Gamma_n}\frac{d\mu\circ\gamma}{d\mu} = \sum_{\gamma\in\Gamma_n} F_\gamma$ temos que

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma\in\Gamma_n}\frac{d\mu\circ\gamma}{d\mu} &= \sum_{\gamma\in\Gamma_n}\frac{g_1(\gamma x)\cdots g_n(\gamma x)}{g_1(x)\cdots g_n(x)} \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma_n}\frac{G_n(\gamma x)}{G_n(x)} \\ &= \frac{1}{G_n(x)}\sum_{\gamma\in\Gamma_n} G_n(\gamma x) \quad = \quad \frac{1}{G_n(x)}|\Gamma_n|. \end{aligned}$$

O que mostra que μ é de fato uma *Medida* $-$ G. □

Proposição 4.2.5. *Seja μ uma medida associada a φ_v admissível, então a sequência de funções $(g_n)_{n\,\in\mathbb{N}}$, definida indutivamente por*

$$\prod_{k=1}^{n} g_k(x) = \frac{|\Gamma_k|}{\sum_{\gamma\in\Gamma_k} F_\gamma(x)}$$

satisfazem (1) *e* (2).

Demonstração. Seja $n\in\mathbb{N}$. Por construção, $G_n := \prod_{k=1}^{n} g_k$ é contínua, positiva e satisfaz $G_n = G_n\circ\gamma$ para qualquer $\gamma\in\Gamma_n$ e $n\in\mathbb{N}$. Assim, $g_{n+1} = \frac{G_{n+1}}{G_n}$ é contínua, positiva logo

$$\begin{aligned} g_{n+1}\circ\gamma &= \frac{G_{n+1}\circ\gamma}{G_n\circ\gamma} \\ &= \frac{G_{n+1}}{G_n} \\ &= g_{n+1} \end{aligned}$$

O que mostra que satisfaz (1).

Vamos provar (2), note que

$$\sum_{\gamma\in X_{n+1}} g_{n+1}\circ\gamma \quad = \quad \sum_{\gamma\in X_{n+1}} \frac{|\Gamma_{n+1}|}{|\Gamma_n|}\frac{\sum_{\sigma\in\Gamma_n} F_\sigma\circ\gamma}{\sum_{\sigma\in\Gamma_{n+1}} F_\sigma\circ\gamma}$$

Pelo lema 4.2.3 temos que $\frac{|\Gamma_{n+1}|}{|\Gamma_n|} = |X_{n+1}|$. Assim obtemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma\in X_{n+1}} g_{n+1}\circ\gamma &= |X_{n+1}|\sum_{\gamma\in X_{n+1}} \frac{\sum_{\sigma\in\Gamma_n} F_\sigma(x)\circ\gamma}{\sum_{\sigma\in\Gamma_{n+1}} F_\sigma(x)\circ\gamma} \\
&= |X_{n+1}|\frac{\sum_{\gamma\in X_{n+1}}\sum_{\sigma\in\Gamma_n} F_\sigma\circ\gamma}{\sum_{\sigma\in\Gamma_{n+1}} F_\sigma\circ\gamma} \\
&= |X_{n+1}|\frac{\sum_{\gamma\in\Gamma_{n+1}} F_\gamma}{\sum_{\sigma\in\Gamma_{n+1}} F_\sigma\circ\gamma} \\
&= |X_{n+1}|.
\end{aligned}$$

Então, (g_n) satisfaz (1) e (2).

$\square$

Capítulo 5

Topologia e Teoria da Medida.

Nesse capítulo vamos apresentar alguns resultados da topologia e teoria da medida , em que foi utilizado durante a dissertação. Muito desses resultados podem ser verificados em qualquer livro sobre o assunto.

5.1 Topologia

Definição 5.1.1. *Dado um conjunto X, um subconjunto T de partes de X ($T \subset \mathcal{P}(X)$) , chama-se uma topologia em X se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *$\emptyset \in T$ e $X \in T$;*
2. *se $A, B \in T$ então $A \cap B \in T$*
3. *se $(A_i)_i \in I$ for uma família de elementos de T, então $\bigcup_{i \in I} A_i \in T$*

Um conjunto X munida de uma topologia T é chamado de espaço topológico. Neste caso, dizemos que um subconjunto $A \subset X$ é um conjunto aberto do espaço topológico X, se e somente se $A \in T$. Por outro lado um conjunto F é um conjunto fechado se o seu complementar é um aberto.
Dado B um subconjunto de um espaço topológico X, definimos como o interior de B a união de todos os conjuntos abertos contitos em B. Por outro lado a interseção de todos os conjuntos fechados que contêm B é chamado de fecho de B onde denotamos por $\bar{B}$.

Seja X um espaço topológico. Dado um ponto $x \in X$, qualquer. Um subconjunto $V \subset X$ é uma vizinhança de x, se e somente se , existe um aberto A tal que $x \in A \subset V$.

Definição 5.1.2. *Seja X um espaço topológico, uma coleção C de subconjuntos de X onde a união dos elementos de C é igual a X é chamada de cobertura de X. Além disso se existe uma subcoleção $\mathcal{L} \subset C$ onde a união dos elementos de $\mathcal{L}$ é igual a X, chamamos $\mathcal{L}$ de subcobertura de X*

. Dizemos que um um espaço topológico X, é compacto se e somente se para toda cobertura de X admite uma subcobertura finita , ou seja, existe uma coleção finita de elementos de C, onde a união desses elementos é igual a X. Além disso um espaço topológico X é chamado de sequencialmente compacto se e somente se para todas as sequência em X possuem uma subsequência convergente em X.

Definição 5.1.3. *Seja X um conjunto qualquer não vazio, e seja $d : X \times X \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz as seguintes propriedades:*

- $d(x,y) \geq 0 \forall x, y \in X$;
- $d(x,y) = d(y,x)$;
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \forall x, y, z \in X$

então essa função d é chamada de métrica*.*

Nas condições anteriores, denominamos a imagem $d(x,y)$ de *distância* de x a y. E chamaremos ao par (X,d) de *espaço métrico*.

Teorema 5.1.4. *Seja (X,d) um espaço métrico, X é compacto se e somente se X é sequencialmente compacto.*

Seja (x_n) uma sequência num espaço métrico X. Dizemos que o ponto $a \in X$ é *limite* da sequência (x_n) se:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon.$$

Nesse caso dizemos que (x_n) é convergente em X além disso, se x_n for uma sequência de Cauchy , ou seja, $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall m, n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon$, dizemos que X é um espaço métrico completo.

Proposição 5.1.5. *Todo espaço métrico $X = (X,d)$ é um espaço topológico , onde a topologia T é a topologia induzida pela métrica d, da seguinte forma:*

$$T = \{A \subset X : \forall a \in A, \exists \epsilon > 0, \ com \ B(a;\epsilon) \subset A\},$$

onde $B(a;\epsilon) := \{x \in A; d(a,x) < \epsilon\}$ (Bolas centradas em a e raio ϵ)

5.2 Teoria da Medida

Definição 5.2.1. *Seja X um conjunto qualquer, $S \subset \mathcal{P}(X)$ é dito um semi-anel se:*

- $S \neq \emptyset$;
- $A, B \in S \Rightarrow A \cap B \in S$;
- $A, B \in S \Rightarrow A\ B = \cup_{i=1}^{n} C_i \quad ; C_i \in S$ *com* $i \in \{1, \cdots, n\}$

Definição 5.2.2. *Seja X um conjunto qualquer, dizemos que uma coleção $\mathcal{A}$ de subconjunto de X é um anel se :*

- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- $C_1, C_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow C_1\mathbb{C}_2 \in \mathcal{A}$;
- $C_1, C_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow C_1 \cup C_2 \in \mathcal{A}$

Definição 5.2.3. *Seja $(X, \mathcal{F})$ um espaço mensurável e seja μ, λ duas medidas definidas em $(X, \mathcal{F})$ dizemos que λ é absolutamente continua a respeito a μ se $\mu(A) = 0$ então $\lambda(A) = 0$ para qualquer $A \in \mathcal{F}$.*

Definição 5.2.4. *Sejam μ, μ_n, $n \geq 1$, medidas sobre um espaço métrico M. Dizemos que μ_n converge fracamente para μ, se para toda função contínua $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada temos que*

$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f d\mu_n.$$

As duas próximas definições são de suma importância para o teorema de Prokhorov que apresentaremos logo em seguida.

Definição 5.2.5. *Um conjunto Γ de medida de probabilidade em (X, β) é relativamente compacto se toda sequência de elementos de Γ, se pode extrair uma subsequência fracamente convergente para alguma medida P não nescessariamente em Γ.*

Definição 5.2.6. *Um conjunto Γ de medida de probabilidade em (X, β) é rígida se para todo $\epsilon > 0$ existe um conjunto compacto K tal que $P(K) > 1 - \epsilon$ para todo $P \in \Gamma$.*

Teorema 5.2.7. *Todo conjunto fino de medida de probabilidade em (X, β) é relativamente compacto. Se X é separável e completo então um conjunto de medida de probabilidade em (X, β) é rígida se e somente se for relativamente compacto.*

Bibliografia

[1] A.H. Fan. *On uniqueness of G-measures and g-measures*. Studia Mathematica, Vol.119, 255-269, 1996.

[2] A.A. Castro Jr. *Curso de teoria da medida*. 2ed. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[3] A.M. Fisher. Nonstationary mixing and the unique ergodicity od adic transformations. *Stoch.Dyn.***9**, 13-40, 2009.

[4] A. F. Beardon *Iteration of rational functions. Complex analytic dynamical systems.* Graduate Texts in Mathematics, 132. Springer-Verlag, New York, 1991.

[5] D.Sullivan. *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions* .Inst. Hautes Études Sci. Publ.Math.No. 50, 171-202, 1979.

[6] E.L. Lima *Espaços métricos*. 5ed. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[7] G. Brown and A. Dooley. *Odometer actions on G-measures.* Ergodic Theory Dynam. Systems 11, 279-307, 1991.

[8] J. Aaronson. *An introduction to infinite ergodic theory*, volume 50 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[9] K. Athanassopoulos. *On the existence of absolutely continuous automorphic measures* Preprint 2015.

[10] k. Oliveira e M. Viana. *Fundamentos da Teoria Ergódica*.Coleção Fundamentos da matemática, SBM,2014.

[11] K. Schmidt. Unique ergodicity for quasi-invariant measures. *Mathematische Zeitschrift*, 167(2):169–172, 1979.

[12] M. Denker and B.O. Stratmann. *The Patterson measure :Classics, Variations and Applications* Contributions in analytic and algebraic number theory, 171-195, 2012.

[13] M. Denker and M. Urbanski. *On the existence of conformal measures*. Amer. Math.Soc., Vol.328, 563-587, 1991.

[14] M. Denker; F. Przytycki and M. Urba?ski. *On the transfer operator for rational functions on the Riemann sphere*. Ergodic Theory Dynam. Systems 16, no. 2, 255 - 266 , 1996.

[15] M. Denker, M.; M. Urba?ski,*Ergodic theory of equilibrium states for rational maps*. Nonlinearity 4, no. 1, 103 - 134, 1991.

[16] R. Barthe.*The elements of integration*, New York. 1966

[17] R.D. Mauldin and M. Urbanski: *Graph directed Markov systems. Geometry and dynamics of limit sets*. Cambridge Tracts in Mathematics, 148. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[18] S.J.Patterson. *The limit set of a fuchsian group*, Acta Math.136 (1976),241-273.

[19] V. Nekrashevych. *Self-similar groups*, Surveys and Monographs 177. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[20] V. Nekrashevych. *Hyperbolic groupoids: Metric and measure*.Groups, Geometry, And Dynamics 8(3), 883 - 932, 2014.

[21] V. Nekrashevych. *Hyperbolic groupoids and duality*. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 237, No. 1122, 2015.

[22] W. H. Gottschalk e G. A. Hedlund *Topological dynamics*. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 36. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1955. vii+151 pp.56.0X

Universidade Federal da Bahia-UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus de Ondina, Salvador-BA
CEP: 40170 -110
www.pgmat.ufba.br