UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

JEAN LÁZARO DA ENCARNAÇÃO COUTINHO

MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE COMBINAÇÃO SIMPLES

Salvador
2015

JEAN LÁZARO DA ENCARNAÇÃO COUTINHO

MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE COMBINAÇÃO SIMPLES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação.

Orientador: Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa

SIBI/UFBA/Faculdade de Educação – Biblioteca Anísio Teixeira

Coutinho, Jean Lázaro da Encarnação.
Matemática para o ensino do conceito de combinação simples / Jean Lázaro da Encarnação Coutinho. - 2015.
118 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal da Bahia. Faculdade de Educação, Salvador, 2015.

1. Análise combinatória - Estudo e ensino. 2. Combinações (Matemática) - Estudo e ensino. 3. Matemática - Estudo e ensino. I. Barbosa, Jonei Cerqueira.

II. Universidade Federal da Bahia. Faculdade de Educação. III. Título.

CDD 511.6 - 23. ed.

JEAN LÁZARO DA ENCARNAÇÃO COUTINHO

MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE COMBINAÇÃO SIMPLES

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Educação, Faculdade de Educação, da Universidade Federal da Bahia.

Resultado da banca: ________________________

Jonei Cerqueira Barbosa – Orientador ____
Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, UNESP, Brasil.
Universidade Federal da Bahia

Rute Elizabete de Souza Rosa Borba ____
Doutora em Educação Matemática pela Oxford Brookes University, Reino Unido.
Universidade Federal de Pernambuco

Maria Helena Silveira Bonilla ____
Doutora em Educação pela Universidade Federal da Bahia, UFBA, Brasil.
Universidade Federal da Bahia

À minha mãe Alda, minha avó Edna e meu irmão Jeferson por todo amor, carinho e apoio.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela minha vida, por ser o guia nesse meu caminhar e pelas inspirações nos momentos certos.

Às forças positivas da natureza que sempre renovaram as minhas energias quando me encontrava abatido.

À minha mãe Alda, por ser meu alicerce, minha companheira, minha inspiração e minha motivação. Te amo!

À minha avó Edna e meu irmão Jeferson, por sempre estarem ao meu lado e acreditarem na minha vitória.

Às minhas primas-irmãs Leidiane, Flávia e Rafaela, pelas alegrias da convivência e apoio.

A Jonei, meu orientador, pelo acompanhamento desse processo e por todo incentivo durante este trabalho.

Aos amigos do grupo de pesquisa: Roberta, Graça, Jamille, Thiago, Ana Virgínia, Flávia, Olmar, Paulo, Rachel, Thaine. Obrigado por todas as contribuições.

Ao Instituto Steve Biko por me proporcionar discussões acerca das questões étnico-raciais que contribuíram para o meu crescimento e reconhecimento.

À direção do IFBA/Barreiras, em nome de Dicíola Baqueiro, pelo apoio a qualificação do quadro de servidores.

Aos professores de Matemática do IFBA/Barreiras, em nome do coordenador Anderson Almeida e da professora Eliana, pelo apoio, principalmente na finalização desse processo.

Ao professor Antônio dos Santos Filho, por me apresentar a Educação Matemática como campo científico.

Ao Grupo de Discussão em Educação Matemática (GruDEM), por todas as proveitosas discussões e interlocuções.

À professora Drª. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba e à professora Drª. Maria Helena Silveira Bonilla, por todas as contribuições dadas no exame de qualificação e por aceitarem participar da banca examinadora.

Aos professores participantes dessa pesquisa, por terem cedido seus tempos e contribuições para o desenvolvimento deste estudo.

Aos amigos de mestrado, em especial, Raphaelle, Helena, Shirley e Atauan, que também foram meus pontos de equilíbrio nos momentos difíceis da minha caminhada.

À Cláudia, minha amiga e assistente de pesquisa, pela disponibilidade e apoio.

A todos os professores e funcionários do Programa de Pós-graduação em Educação Universidade Federal da Bahia que de alguma forma contribuíram para realização desse estudo.

A todos os amigos que sempre estiveram ao meu lado, pelas conversas e mensagens de apoio.

Enfim, a todos aqueles que contribuíram positivamente para a minha caminhada, o meu MUITO OBRIGADO! .

COUTINHO, Jean Lázaro da Encarnação. Matemática para o Ensino do conceito de combinação simples. 118 f. il. 2015. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015.

RESUMO

O objetivo deste estudo foi modelar uma Matemática para o Ensino do conceito de combinação simples em Análise Combinatória. Os materiais de análise utilizados nesta pesquisa foram observados em duas fontes: produções científicas a partir de uma Revisão Sistemática e um estudo com professores. A estrutura de análise proposta foi o Estudo do Conceito e suas ênfases: *realizações*, *panoramas* e *vinculações*. Para tal propósito, foi analisado um *corpus* de dez artigos publicados em periódicos brasileiros, nas áreas de Educação e Ensino, avaliados pelo sistema *WebQualis* da CAPES como A1, A2, B1 e B2. Além disso, foi organizado um estudo coletivo cujos integrantes foram seis professores atuantes nos níveis fundamental, médio e/ou superior que possuíam experiência no ensino de Análise Combinatória. Como resultado, foi apresentado um modelo de Matemática para o Ensino de *combinação simples*, estruturado em quatro panoramas: formalista, instrumental, ilustrativo e comparativo, que sugerem implicações para o fazer do professor que ensina *combinação simples* e desdobramentos da pesquisa.

Palavras-chave: Matemática para o Ensino. Estudo do Conceito. Combinação Simples.

COUTINHO, Jean Lázaro da Encarnação. Matemática para o Ensino do conceito de combinação simples. 118 pp. ill. 2015. Master Dissertation – Faculdade de Educação, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015.

ABSTRACT

The aim of this study was to model a Mathematics for Teaching the concept of simple combination in Combinatory Analysis. Materials observed in this investigation came from two sources: a systematic review of scientific production and a study with teachers. The proposed structure for the analysis was a Concept Study in its emphases: realizations, landscapes and entailments. In favor of that, a corpus of ten articles published in Brazilian journals in the areas of Education and Teaching was analyzed, all of them evaluated by CAPES' system WebQualis as A1, A2, B1 and B2. In addition, there was a collective study with six teachers acting in primary, secondary and/or higher education who had experience in teaching Combinatory Analysis. As a result, presented a model of Mathematics for Teaching the concept of simple combination, structured in four landscapes: formalist, instrumental, illustrative, and comparative, which suggest implications for the actions of the teacher that teaches simple combination, and for possible outspread of research.

Keywords: Mathematics for Teaching. Concept Study. Simple Combination.

Sumário

1. INTRODUÇÃO

Nesta introdução, apresento uma síntese de trajetórias pessoal e acadêmica que me influenciaram diretamente na aproximação com o tema de pesquisa. Ressalto que a opção por iniciar este texto com essas trajetórias tem o intuito de trazer a implicação do pesquisador com o tema, mostrando que o interesse surge de uma relação de vivência com aquele. Apresento, também, uma discussão da literatura que circunstancia o objeto de estudo, enunciando tanto o objetivo, quanto a sua relevância. Além disso, aponto os procedimentos metodológicos utilizados e a organização do presente relatório de pesquisa.

1.1 TRAJETÓRIA PESSOAL/ACADÊMICA E APROXIMAÇÃO COM O OBJETO DE ESTUDO.

Durante todo o Ensino Fundamental, não apresentei problemas de desempenho quantitativo na disciplina Matemática. O método de ensino por repetição adotado pelos professores levou-me a acreditar que estava desenvolvendo uma boa aprendizagem[1]. As dificuldades de compreensão e reflexões sobre essa aprendizagem em Matemática começaram a aparecer quando ingressei no Ensino Médio no Centro Federal de Educação Tecnológica da Bahia (CEFET-BA) [2]. Naquele cenário, deparei-me com uma realidade que exigia um fazer matemático do aluno para além da repetição, fato que me levou a tentar compreender os conceitos matemáticos. O caminho foi trilhado, muitas vezes, individualmente, outras vezes, com o auxílio de professores, o que me fez despertar novos olhares para essa ciência.

No 2º ano do Ensino Médio, conheci o ramo matemático da Análise Combinatória o qual, no corpo deste trabalho, passarei a referir-me, na maioria das vezes, apenas como AC. Senti-me seduzido pelo fato de as soluções dos problemas apresentarem, por diversas vezes, um ponto de partida diferente, embora o professor responsável pelo ensino na época tentasse enquadrar todas as soluções em simples aplicações de fórmulas-solução. Para mim, era perceptível não ser a melhor forma de ensinar esse tópico, devido ao fato de, muitas vezes, os problemas exigirem mais que simples aplicações de fórmulas, o que transformava o caminho para suas soluções em uma trilha bastante dificultosa. À medida que os níveis de dificuldades dos problemas aumentavam mais me sentia instigado na busca de suas soluções. Tal

[1] Neste momento, concebia boa aprendizagem como obtenção de bom desempenho quantitativo em avaliações.
[2] Hoje conhecido como Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA).

aproximação com esta ciência, por intermédio da AC, fez-me optar por prestar vestibular para Matemática.

Obtendo aprovação no vestibular para graduação em Matemática, no ano de 2003, na Universidade Federal da Bahia (UFBA), deparei-me com uma estrutura de curso que me permitia, no 5º semestre, optar por uma das duas modalidades de formação acadêmica: Licenciatura ou Bacharelado. No período citado, influenciado pelos acontecimentos do Ensino Médio, optei pela Licenciatura. Uma vez como licenciando, sentia falta de um trabalho mais direcionado para o que iria vivenciar em minha prática como docente, e de discussões acerca da Educação Matemática, embora ainda não conhecesse a área como campo profissional e científico. Pelo contrário, a maior ênfase era dada aos conteúdos específicos da chamada "Matemática Pura", conteúdos esses que não apresentavam conexões diretas com o que realmente iria levar para sala de aula. Até mesmo as disciplinas pedagógicas e específicas ministradas no mesmo curso não apresentavam articulações.

Sobre essas desarticulações, Gatti e Barreto (2009) trazem um estudo sobre os currículos de instituições que formam docentes em Matemática para atuarem no Ensino Fundamental, e os sintetizam assim:

> Fica claro que esses cursos de licenciatura em Matemática estão formando profissionais com perfis diferentes, alguns com uma formação Matemática profunda, que talvez não se sintam preparados para enfrentar as situações de sala de aula, que não se restringem ao saber matemático. Outros, com uma formação pedagógica desconexa da formação específica em Matemática, forçando o licenciado a encontrar as inter-relações entre esses tipos de formação (p. 145).

Por conta disto, algumas vezes questionei-me: − Do que eu preciso para ensinar? Conhecer o conteúdo matemático é o suficiente para ensinar bem? Quais conhecimentos o professor mobiliza durante as realizações de suas práticas?

Cabe explicitar, neste momento, o que entendo por "ensinar bem". Segundo Ball, Hill e Bass (2005), o bom ensino da Matemática deverá resultar numa compreensão dos conceitos e procedimentos, assim como de compreensões acerca da Matemática e do que significa fazer Matemática. Dessa forma, ensinar bem perpassa por contribuir na construção de caminhos que permitam ao aluno tomar decisões coerentes frente aos problemas a serem solucionados.

Meus questionamentos iniciais intensificaram-se quando, a partir do 5º semestre, assumi efetivamente, turmas do Ensino Básico em escolas dos municípios de Salvador e Camaçari. Eles se tornaram mais explícitos em aulas do conteúdo de AC em que, apesar de conhecer bem o tema, não conseguia fazer-me entender pelos meus alunos. Corroborando essa minha constatação, minha trajetória de formação acadêmica permitiu-me responder, sem nenhum fundo científico, ao segundo questionamento: conhecer o conteúdo matemático não é o suficiente para ensinar bem. O contato com inúmeros professores que possuíam um maior tempo de experiência profissional e ainda assim não conseguiam uma conexão com o “ensinar bem”, levaram-me a concluir, ainda que de forma intuitiva, que saber o conteúdo matemático não é de todo suficiente para oferecer um bom ensino.

A finalização do curso de graduação, no segundo semestre de 2008, reservou um primeiro contato, agora de maneira mais sistemática, com a área da Educação Matemática. Ministradas pelo professor Antônio dos Santos Filho[3], as aulas das disciplinas Metodologia do Ensino da Matemática I e II me faziam refletir, com embasamento teórico da área, sobre ensino, aprendizagem e práticas pedagógicas. Em paralelo ao curso dessas disciplinas, entra em cena o GruDEM (Grupo de Discussão em Educação Matemática) formado por alunos das referidas disciplinas e por outros alunos regulares do curso de Licenciatura, cujo objetivo inicial era dar continuidade às discussões iniciadas com o professor Antônio.

Após alguns integrantes do grupo concluírem a Licenciatura, as reuniões foram mantidas por um longo período e tinham como novo objetivo discutir o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, tomando como base as teorias da Educação Matemática. O grupo funcionava para os professores licenciados como uma espécie de ambiente de busca por crescimento profissional.

Seguindo minha trajetória acadêmica/profissional, posterior ao meu efetivo ingresso em sala de aula deparei-me com sérias dificuldades para ministrar alguns conteúdos para os alunos. Por algumas vezes, houve a necessidade de abandonar, ainda que por alguns instantes, o formalismo no qual eu fui formado. Essa necessidade era gerada pelos questionamentos dos alunos referentes à escrita matemática que estava sendo utilizada. Percebi, em conversas com os colegas do grupo, que tais dificuldades não se restringiam somente a mim, elas eram compartilhadas por outros professores.

Durante esses encontros, era quase impossível não discutirmos sobre o que era necessário para ensinar determinados conteúdos aos nossos alunos. Nos relatos dos integrantes do grupo era perceptível como os professores concebiam, de diferentes formas, determinados conceitos e maneiras de desenvolvê-los em sala de aula.

O excesso de formalismo de alguns professores nos levava a questionar até que ponto essas diferentes formas de realizar o ensino desses conteúdos em sala de aula eram adequados.

---

[3] Professor Especialista em Educação Matemática (na época).

A falta de um aporte teórico no início dos nossos encontros nos levava apenas a externar nossas impressões. Dessa maneira, ainda que de forma implícita, surgiu um questionamento particular: que Matemática o professor realiza em suas práticas?

De todos os conteúdos matemáticos postos como dificultosos para o ensino pelos integrantes do grupo, o que mais despertava meu interesse era, por motivos já citados, a Análise Combinatória. No universo do ensino da Matemática, eu percebia que a AC é um dos temas de maior dificuldade[4]. As discussões feitas anteriormente com o professor Antônio e as minhas inquietações em torno desse tema aumentaram o meu interesse pelo campo da Educação Matemática, principalmente no que dizia respeito ao seu ensino. Isso me fez ingressar, no final de 2009, no curso de Especialização em Educação Matemática oferecido pela Universidade Católica do Salvador (UCSal), onde pude ampliar as minhas bases teóricas e desenvolver um projeto de intervenção de ensino referente a Resolução de Problemas[5] em AC. O desenvolvimento desse projeto fez-me refletir sobre a necessidade de investir no ensino desse ramo matemático.

Ingressando, no ano de 2011, como professor do IFBA, tive a oportunidade de permanecer trabalhando com AC e pude dar continuidade ao projeto iniciado na Especialização, além de iniciar trabalhos no Laboratório de Ensino de Matemática com materiais manipuláveis[6] em AC. A manutenção das inquietações fez-me buscar outras possibilidades para o ensino desse ramo matemático, no qual a necessidade em ampliar meu aporte teórico levou-me a participar da seleção para o Mestrado no Programa de Pós--Graduação em Educação da UFBA. Após aprovação, o meu intuito inicial era dar continuidade aos estudos iniciados na Especialização.

Visitando a literatura na área de Educação Matemática, percebi a relevância de investigar, ainda sem um aporte teórico definido, a Matemática mobilizada para o ensino de AC. Essa relevância fica evidente pelo fato de diversas pesquisas em AC terem foco no aluno (AZEVEDO; BORBA, 2013; LANDÍN; SÁNCHEZ, 2010; MORO; SOARES, 2006; PESSOA; BORBA, 2009; 2010) ou na formação inicial dos professores (ALVES; SEGADAS, 2012; SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013), embora, na

---

[4] Discussões acerca dessa dificuldade serão tratadas na próxima seção.

[5] Uma das tendências metodológicas de ensino em Educação Matemática caracterizada, em termos gerais, pelo envolvimento em uma tarefa cujo método de solução não é conhecido, levando o indivíduo a conjecturar e refletir constantemente sobre as estratégias adotadas por ele a cada fase da resolução proposta.

[6] Objetos que representam problemas matemáticos de forma concreta no qual os alunos podem buscar as soluções a partir da manipulação desses objetos.

última década, as atenções se tenham voltado ao ensino (FERNANDES; CARVALHO; CARVALHO, 2010; GAUTÉRIO; RODRIGUES, 2012; ROCHA; BORBA, 2013).

Borba, Rocha, Martins e Lima (2009) discutem estudos recentes (a época) sobre o desenvolvimento da Combinatória nos diferentes níveis de ensino e sugerem a necessidade de uma atenção voltada ao ensino de AC para que essa prática não seja baseada exclusivamente em fórmulas, e que o professor tenha a oportunidade de oferecer ao aluno outras formas que possam auxiliar o entendimento de Combinatória. Desse modo, buscando contribuir com esse campo profissional e, consequentemente com o campo científico, decidi lançar meu olhar sobre a Matemática que o professor mobiliza ao realizar o ensino de AC, mais especificamente o conceito de *combinação simples*[7]. Esse olhar especifico para o fazer matemático do professor vem sendo discutido em termos de Matemática para o Ensino[8], o que passo a demonstrar na próxima seção.

1.2 UMA DISCUSSÃO DE LITERATURA

Nesta seção, inicio com aspectos relevantes à AC e depois discuto acerca da Matemática para o Ensino, tema de pesquisa bastante discutido, atualmente, no que tange ao ensino da Matemática (ADLER, 2005; DAVIS; RENERT, 2009; KOTSOPOULOS; LAVIGNE, 2008; RYVE; NILSSON; MASON, 2011), afunilando para o Estudo do Conceito (DAVIS; RENERT, 2009, 2014), abordagem que será utilizada como estrutura metodológica neste trabalho. Vale salientar que o intuito aqui é situar o leitor com aspectos gerais das perspectivas teóricas que circunstanciam o objeto deste estudo.

1.2.1 Sobre a Análise Combinatória

Embora a literatura possa trazer diferentes definições de AC, como Correa e Oliveira (2011) e Pessoa e Borba (2010), elas, de alguma maneira, são convergentes. Dessa forma, assumo que AC é o ramo da Matemática que compreende técnicas de contagem de elementos pertencentes a um determinado agrupamento que satisfazem determinadas condições. Alguns estudos tratam a AC em termos de Raciocínio Combinatório (BORBA, 2010; 2013; PESSOA; BORBA, 2010). Para Borba (2010), o Raciocínio Combinatório é um modo de pensar em

[7] Essa escolha será justificada adiante. Este conceito também aparece neste estudo apenas como "*combinação*".
[8] Por ora, entenda como a Matemática mobilizada pelo professor em sua tarefa específica de ensinar.

função de agrupamentos de elementos que atendam a critérios específicos de escolhas e ordenação de elementos, a partir de procedimentos de enumeração direta ou indireta.

Quanto à importância das discussões sobre AC e, consequentemente, sobre seu ensino na educação formal, apresento duas análises: uma no campo das aplicações e outra no campo didático-pedagógico. No que diz respeito às aplicações, a AC tem importância notória não somente no campo da Matemática. Almeida (2010, p.18) cita Roa e Navarro-Pelayo (2001) quando dizem:

> [...] os problemas combinatórios e as técnicas para sua resolução tiveram e têm profundas implicações no desenvolvimento de outras áreas da Matemática como a probabilidade, a teoria dos números, a teoria dos autômatos e inteligência artificial, investigação operativa, geometria e topologia combinatórias.

Isso faz pensar nas diversas aplicações que a AC possui em situações práticas como o emplacamento de carros, códigos telefônicos, elaboração de horários escolares, dentre outros. Por exemplo, é possível saber, sem enumerar, quantos carros podem ser emplacados usando uma sequência de três letras seguidas de quatro números.

Quanto ao campo didático-pedagógico, pesquisas indicam que o ensino de AC e o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório têm importância direta no desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático-dedutivo (BORBA et al., 2009; BORBA; PESSOA; ROCHA, 2013; PESSOA; BORBA, 2010). O desenvolvimento dessa ideia teve início com Inhelder e Piaget *apud* Pessoa; Borba (2010), quando analisaram que a busca de soluções graduais de problemas combinatórios é relevante para o desenvolvimento do que eles chamam de pensamento operatório formal[9], possibilitando ao aluno, no avançar de sua escolaridade, trabalhar com situações hipotéticas, generalizadas e sistemáticas, itens indispensáveis no aprendizado matemático.

Por conta disso, Borba (2010) e Borba, Pessoa e Rocha (2013), reafirmam a relevância das discussões em torno de AC e indicam o ensino que acontece nas escolas, desde os anos iniciais, como ambiente propício para esse ensinamento. Assim, a escola formal, tanto dos anos iniciais quanto de outros níveis de ensino, tem grande importância no desenvolvimento dos conceitos combinatórios, colocando os professores como agentes diretamente responsáveis por isso. O que se percebe nos tempos atuais é que o sistema de educação se questiona sobre o que pode ser considerado como um bom ensino, mas parece ser na

---

[9] Sem o intuito de aprofundar essa discussão, assumimos pensamento operatório formal como o estágio no qual o aluno avança para raciocínios mais abstratos.

Matemática que este problema é mais sentido (ADLER, 2005; LOUREIRO, 2004; TEIXEIRA; CAMPOS; VASCONCELLOS; GUIMARÃES, 2011).

Sobre isto, Teixeira et al. (2011) sintetizam pesquisas anteriores, focando no caráter didático, e afirmam que existem causas fundantes para a problemática do ensino da Matemática. Uma delas é a dissonância entre o que se recomenda como um ensino que resulte numa compreensão dos conceitos e procedimentos – bem como compreensões acerca da Matemática e do que significa fazer Matemática – e aquilo que o professor faz o aluno vivenciar em sala de aula.

Em AC, essa problemática não é diferente (ALVES; SEGADAS, 2012; BORBA ET AL, 2009; TEIXEIRA ET AL, 2011). Segundo Alves e Segadas (2012), existem lacunas na formação em Combinatória dos alunos que serão futuros professores, de modo que, se não sanadas na graduação, há uma grande probabilidade de retornarem às salas de aula gerando o que eles chamam de ensino cascata desse ramo. Sobre esta relação, Sabo (2007, p. 8) diz:

> Algumas vezes, observo professores afirmando que eles próprios não têm esses conceitos construídos de forma sólida e significativa, e, por esse motivo, evitam abordar o tema ou, optam, apenas, a apresentar aos alunos um processo de aplicação de fórmulas prontas, sem justificativas ou explicações. Assim sendo, o aluno necessita utilizar-se da memorização para aplicar a fórmula certa na resolução de problemas específicos, ou seja, o ensino de Análise Combinatória torna-se tecnicista e operacional. Acredito que, neste contexto, o aluno sente a necessidade de adivinhar a fórmula pertinente para encontrar a resposta do problema. Essa atitude pode favorecer o não desenvolvimento do raciocínio combinatório como também, a não construção dos conceitos desse tema.

Considero que, a partir dessa afirmação, um dos fatores que devem gerar problemas no ensino de AC é a formação docente. Borba et al. (2009) apontam uma urgência no investimento em formação docente, no que tange à AC, para que o seu ensino não seja reduzido à exploração de fórmulas. Além disso, as mesmas autoras sugerem que os livros didáticos ampliem os tipos de problemas combinatórios abordados, buscando explorar a construção de modelos de soluções que contribuam para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Dessa forma, é possível ir ao encontro do que propõem os PCN+:

> As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande (BRASIL, 2002, p. 126).

Como consequência do ensino, a aprendizagem dos alunos também se apresenta de forma problemática na literatura. Alguns estudos investigam as dificuldades dos alunos na compreensão desse tema (ALVES; SEGADAS, 2012; CORREA; OLIVEIRA, 2011; TEIXEIRA et al., 2011). Teixeira et al. (2011) trazem um levantamento das principais dificuldades que alunos do Ensino Fundamental apresentam nas soluções de problemas combinatórios ou nas tentativas de encontrá-las: a primeira refere-se aos modelos multiplicativos intuitivos[10] que os alunos possuem, o que dificulta a multiplicação de mais de dois fatores entre si e compromete a compreensão do *princípio fundamental da contagem* (PFC)[11]; a segunda dificuldade enfrentada por estudantes refere-se à estrutura semântica do problema, ou seja, os alunos apresentam dificuldade em dar significado ao que o problema requer.

Sobre esses fatores, Correa e Oliveira (2011, p. 80) sintetizam outros estudos e dizem que "o emprego de qualquer das técnicas de contagem de análise combinatória exige em primeiro lugar a compreensão dos diversos modos de formar os agrupamentos". Dessa forma, mais uma vez os olhares se lançam sobre os professores, particularmente sobre as variadas formas que os professores têm utilizado para ensinar AC.

Sobre essa variabilidade, Rocha e Borba (2013) chamam a atenção para as diferentes formações a que os professores têm acesso. No geral, professores dos anos finais do Ensino Fundamental e professores de Ensino Médio possuem formações matemáticas diferentes dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Isto pode refletir na forma como eles encaram as discussões de AC em salas de aula. Além disso, as formas de soluções em Combinatória podem variar de um problema para outro. Os problemas podem ser resolvidos a partir de uma aplicação direta do PFC ou com a utilização de técnicas de contagem mais elaboradas (CORREA; OLIVEIRA, 2011). Essas técnicas, obtidas a partir do PFC, também conhecidas como modos de formar agrupamentos, são apresentadas no Ensino Básico por *produto cartesiano, permutações, arranjos* e *combinações.*

Compreender e aplicar essas diferentes técnicas em problemas específicos traz dificuldades para os alunos. No entanto, parece que os problemas de *combinações* são os que apresentam os menores índices de acertos ou se apresentam como os de compreensão mais difícil (CORREA; OLIVEIRA, 2011; PESSOA; BORBA, 2010). Para Correa e Oliveira (2011), o primeiro passo para empregar um tipo de técnica é compreender os diversos modos de agrupamento e o que é específico de cada um. Mais especificamente, a dificuldade que os alunos apresentam frente aos problemas de *combinação* pode estar na percepção de que, na

[10] Multiplicação como soma repetida.
[11] Também conhecido como *princípio multiplicativo* que diz: Se há x modos de tomar uma decisão A e, tomada a decisão A, há y modos de tomar a decisão B, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões A e B é xy (LIMA et al., 2004).

contagem de elementos, têm-se num conjunto, m elementos de onde serão escolhidos n elementos, com $n \leq m$, em que a ordem desses elementos não gera novas possibilidades (PESSOA; BORBA, 2010).

Com o intuito de exemplificar o que foi dito, apresento o seguinte problema de *combinação*: *De quantas maneiras Carlos pode levar 3 camisetas em sua viagem, se ele dispõe de 5 camisetas de cores diferentes?* Neste problema, escolher as camisetas amarela/verde/vermelha, por exemplo, é idêntico a escolher verde/vermelha/amarela. Isso sugere que a *combinação* das camisetas de cores amarela, verde e vermelha não devem ser contadas mais de uma vez. É exatamente esse detalhe que muitas vezes não é percebido pelos alunos.

Essa dificuldade com os problemas de *combinação* não é inerente apenas aos alunos. Em uma investigação sobre o que pensam os professores sobre Combinatória, Borba, Pessoa e Rocha (2013, p.904) constataram que professores também apresentavam algumas dificuldades com problemas combinatórios:

> As professoras reconheceram a natureza multiplicativa dos problemas, mas, assim como as crianças, acharam difícil diferenciar arranjos e combinações, ou seja, quando a ordem dos elementos designa diferentes possibilidades, ou não.

Neste sentido, o ensino de AC apresenta um vasto campo de investigações com implicações pedagógicas que propiciam questionamentos quanto ao professor neste processo. Uma vez que o fazer matemático do professor desempenha um importante papel no ensino (Ball, 2003), que Combinatória o professor possui? Que Combinatória o professor ensina? Quais formas os professores utilizam para ensinar Combinatória? Estas questões, embora não se configurem como os problemas desta pesquisa, destacam-se como parte da problematização deste estudo, conduzindo para o seu delineamento mais rigoroso.

Com intuito de refinar e melhor direcionar essas perguntas, discuto na próxima seção estudos que abordam outro tema integrante dessa pesquisa: Matemática para o Ensino.

1.2.2 Matemática para o Ensino

Os estudos apresentados por Shulman (1986, 1987) propõem bases de conhecimentos para o ensino em geral. Nesses trabalhos, embora não tratem especificamente do professor de Matemática, notamos que a base do *conhecimento pedagógico do conteúdo* tem levado ao reconhecimento de um domínio próprio, uma especificidade nas formas de ensinar desses professores.

Segundo Adler (2005, p.3, tradução nossa), "[...] a matemática que é usada para o ensino do currículo não é sinônimo do fazer matemática em outros domínios de prática (por exemplo, engenharia, enfermagem, negócios)." [12]. Ball, Hill e Bass (2005), sugerem que esse domínio próprio do saber matemático para o ensino tem como característica essencial à ideia de "descompactar" a Matemática. Em termos mais simples, o professor tem um papel de descomprimir para os alunos as informações que a Matemática comprime em suas representações abstratas. Ryve, Nilsson e Mason (2012) entendem essa especificidade como uma forma de conceituar a Matemática que os professores precisam saber, com a finalidade de promover entendimentos matemáticos para os seus alunos.

Essa especificidade é discutida por alguns autores em termos de Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), o que pode ser traduzido, em português, como Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL; BASS, 2003; BALL, THAMES; PHELPS, 2008). Outros falam em Mathematics for Teaching (MFT), o que pode ser traduzido para o português, como Matemática para o Ensino (ADLER, 2005; DAVIS; RENERT, 2009; DAVIS; SIMMT, 2006; KOTSOPOULOS; LAVIGNE, 2008; RYVE; NILSSON; MASON, 2012).

Sobre essa variação na nomenclatura, Kotsopoulos e Lavigne (2008) indicam que, apesar das diversas denotações dessa especificidade, a epistemologia subjacente a elas é consistente e possui bases comuns: o professor deve saber como usar a Matemática que detém para desenvolver o seu ensino. Investigando o fazer matemático do professor na prática, Ball e Bass (2003) e Ball, Thames e Phelps (2008) identificam um domínio de conhecimentos que o professor deve ter para aplicar na sua tarefa de ensinar. Davis e Renert (2009, 2014), embora também considerem o fazer matemático do professor na prática, entendem que esse domínio está distribuído na comunidade dos professores, que emerge na prática desses docentes e não é estático, não é facilmente nomeado ou mensurado.

Um contraste evidente é que o MKT foca no indivíduo, no professor, no saber matemático para ação, e o MFT abrange as dimensões participativas, as interações, o contexto, o saber matemático na ação. Faço, na sequência, uma explanação sistemática do MKT, a partir de Shulman (1986), como movimento inicial, afunilando para o MFT. Além

---

[12] *"... the mathematics that is used in Teaching the curriculum is not synonymous with doing mathematics in other domains of practice (e.g. engineering, nursing, business)."*

disso, apresento o Estudo do Conceito (DAVIS; RENERT, 2009, 2012) como uma estrutura para ajudar a modelar teoricamente uma Matemática para o Ensino.

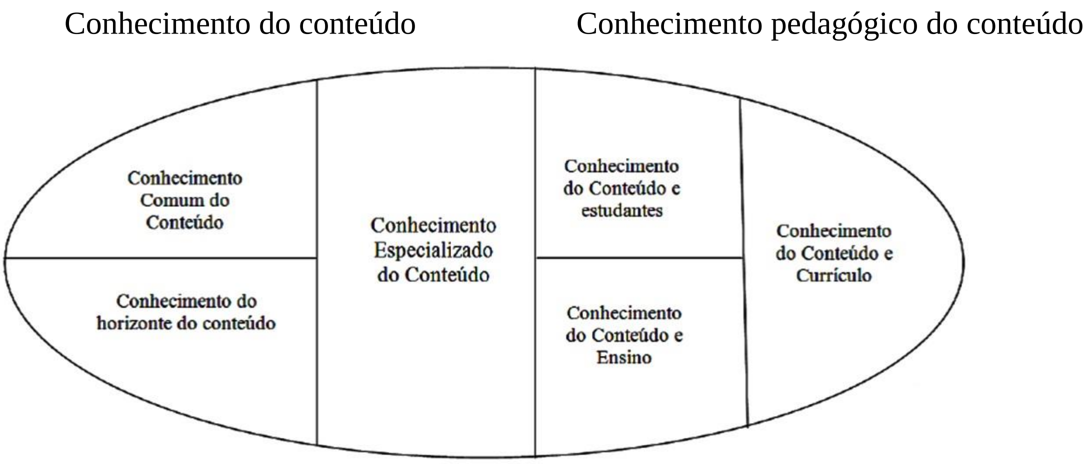
Shulman (1986) define distintas bases de conhecimento para o ensino e dentre essas, o *conhecimento do conteúdo* e o *conhecimento pedagógico do conteúdo*. O *conhecimento do conteúdo* está atrelado à ideia de que o professor deve compreender tanto as formas como a validade e a invalidade que se estabelecem em um determinado conteúdo quanto à variedade das maneiras como os conceitos em torno desse assunto são organizados (SHULMAN, 1986). Essa base está focada apenas na matéria, sem compromissos com o ensino (RANGEL; GIRALDO; MACULAN, 2014). O *conhecimento pedagógico do conteúdo* está atrelado à mescla de conteúdo e pedagogia buscando formas de representação e formulação de um determinado assunto para que ele seja compreensível aos alunos (SHULMAN, 1987).

Rangel, Giraldo e Maculan (2014) chamam a atenção para o fato de que a atividade de ensinar Matemática requer um olhar especial de alguns aspectos pedagógicos que não são tratados apenas pelo *conhecimento do conteúdo* – embora indispensável na formação docente – e que são contemplados com o *conhecimento pedagógico do conteúdo*. Há evidências de que esse conhecimento pedagógico do conteúdo desempenha importante papel no ensino e, consequentemente, na aprendizagem dos alunos (BALL, 2003).

A noção de Conhecimento Matemático para Ensino, desenvolvida por Deborah Ball e seus colaboradores, surgiu a partir dos trabalhos de Shulman (1986, 1987). Ribeiro (2012) sintetiza a ideia do Conhecimento Matemático para o Ensino proposta pelo grupo de Deborah Ball, quando diz que "o conhecimento matemático para o ensino refere-se a um tipo de conhecimento necessário para o professor poder desenvolver a sua 'tarefa' de ensinar matemática" (p. 535).

De acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), o Conhecimento Matemático para o Ensino necessita de uma profundidade detalhada que vai muito além do domínio teórico. Os professores precisam de cuidados na condução de seus trabalhos em sala de aula, para analisar erros conceituais nos argumentos e desenvolvimento dos alunos, bem como suas origens. Além disso, segundo os mesmos autores, os professores precisam ser capazes de reconhecer, questionar e confrontar diferentes estratégias utilizadas pelos alunos nas soluções de problemas. Na busca de uma síntese à ideia do Conhecimento Matemático para o Ensino, Ball, Thames e Phelps (2008) propõem o esquema apresentado na Figura 1.

Figura 1 – Domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino



Fonte: Ball, Thames e Phelps (2008, p. 403, tradução nossa)

Ribeiro (2012) exemplifica que reconhecer uma resposta errada é referente ao conhecimento comum do conteúdo; dimensionar rapidamente a natureza de um erro que não é familiar refere-se ao conhecimento especializado do conteúdo; saber por que diversos alunos cometem os mesmos erros é um conhecimento de conteúdo e de estudantes; elaborar estratégias para superar certas dificuldades apresentadas pelos alunos é um conhecimento do conteúdo e de seu ensino.

O grupo liderado por Deborah Ball sugere que o Conhecimento Matemático para o Ensino é abrangente em relação ao repertório de conteúdo matemático comum que o professor detém. Este conteúdo matemático comum é necessário, mas não é suficiente. É perceptível, do ponto de vista desses autores, que o Conhecimento Matemático para o Ensino é visto como um domínio a ser incorporado pelos professores, como uma estrutura estabelecida. Segundo Silverman e Thompson (2008), o Conhecimento Matemático para o Ensino é constituído pelas formas como o professor irá ensinar determinado conteúdo.

Algumas pesquisas, sublinhando a dimensão coletiva do Conhecimento Matemático para o Ensino, têm utilizado a expressão Matemática para o Ensino (ADLER, 2005; DAVIS; ADLER; PARKER, 2007; DAVIS; SIMMT, 2006; DAVIS; RENERT, 2009, 2014). Para esses pesquisadores, o saber matemático não é estático e individual, mas dinâmico e coletivo. Não é constituído apenas para a prática, mas também na prática, na interação e nas experiências compartilhadas com seus pares, com seus alunos e com os contextos escolares dos quais participam.

Adler, Davis, Kazima, Parker e Webb (2005, p. 5) marcam a Matemática para o Ensino "[...] como uma forma distinta de conhecimento matemático, produzido em e usado para a prática de ensino".[13] Davis, Adler e Parker (2007) e Bednarz e Proulx (2009) também reconheceram em seus trabalhos que existem especificidades para o ensino de Matemática e que contextos diferentes podem produzir Matemáticas para o Ensino diferentes, pois as situações emergem com o trabalho pedagógico, na prática.

Segundo Davis e Simmt (2006), o caráter dinâmico da Matemática para o Ensino sublinha a ideia de que a essa matéria não deve ser considerada um corpo de conhecimentos a serem dominados por indivíduos. Ela está implicada na noção de coletividade (DAVIS; RENERT, 2009). Isso ocorre em contextos que envolvam outros, em que diferentes formas de saber e fazer matemática escolar se combinam com novas formas ou diferentes contextos de ensino (ADLER et al., 2005).

Matemática para o Ensino refere-se aos entendimentos de uma comunidade, no caso, a comunidade de professores que ensinam essa matéria, em que a Matemática é produzida *na prática* e usada *para* a prática de ensino. Dessa forma, pode-se considerar que a Matemática para o Ensino representa uma variabilidade da Matemática ensinada. O presente estudo também está interessado na Matemática para o Ensino, mobilizada por professores em uma dimensão coletiva, na qual a interação com seus pares faça emergir essa variabilidade (DAVIS; RENERT, 2009).

Nessa perspectiva de dimensão coletiva, na qual as contribuições de cada membro são valorizadas e as diversas formas de comunicar um determinado tema matemático emergem e são compartilhadas, a Matemática para o Ensino lança olhar sobre as compreensões dos professores no desenvolvimento dessa Matemática no âmbito coletivo (DAVIS; SIMMT, 2006).

Davis e Renert (2009) argumentam que a Matemática para o Ensino é uma disposição aberta para Matemática, o que implica uma vontade de harmonizar as tensões evolutivas da matéria e as tensões no seu ensino que possam surgir em contextos pedagógicos. Em outras palavras, a Matemática dos professores pode ser vista como aquela que surge na aproximação com o fazer matemático desses docentes os, que buscam raiz, sentido e análise de erros de alunos, e entre outras coisas, conciliam diferentes interpretações com o intuito de dar sentido a um determinado conceito, uma vez que a Matemática é dinâmica e não pré-estabelecida. Como conexão entre as discussões feitas até aqui, Davis e Renert (2014) sugerem que o

[13] *"... as a distinctive form of mathematical knowledge, produced in, and used for, the practice of teaching."*

conhecimento pedagógico do conteúdo (SHULMAN, 1986, 1987) ajudou a trazer à tona a diferença entre a Matemática usada por físicos, matemáticos e engenheiros, por exemplo, e a Matemática usada pelos professores com fins no ensino.

A partir dessas discussões, assumo que a Matemática para o Ensino é uma agenda de investigação no campo da Educação Matemática e refere-se a uma matemática mobilizada no ensino e para o ensino por agentes encarregados de comunicar a Matemática, entre eles, o professor. Nesta concepção, a Matemática para o Ensino refere-se à Matemática específica daqueles que ensinam em ambientes formais de educação. Com esse entendimento, proponho um modelo teórico dessa Matemática para o Ensino que expresse, ainda que de forma parcial, a variabilidade das formas como os professores realizam o ensino de Matemática, ou seja, um modelo teórico do que acontece no ensino dessa matéria.

Trabalhos atuais na área de Educação Matemática utilizam o Estudo do Conceito como abordagem metodológica para suscitar uma Matemática para o Ensino (DAVIS; RENERT, 2009; 2014; RANGEL; GIRALDO; MACULAN, 2014). Embora Ribeiro (2013) focalize uma variação em relação ao Estudo do Conceito proposto por Davis e Renert (2009, 2013), traz uma discussão acerca da importância de se estudarem conceitos no ensino da Matemática, uma vez que considera em suas bases a diversidade de significados que circunstanciam conceitos matemáticos, sejam eles da Matemática Pura, da Matemática Escolar ou do senso comum. Utilizo como definição de certo conceito em Matemática como uma combinação da palavra que indica o tema em discussão e seus símbolos, imagens, metáforas, analogias e outros recursos textuais que são reconhecidos como forma de comunicação de tal conceito (DAVIS; RENERT, 2009) ou podemos dizer, um conceito matemático é a palavra – que indica o tema em questão – e todas as suas formas de comunicação.

Nesta pesquisa, trato do Estudo do Conceito que, segundo Davis e Renert (2009), são ocasiões para trazer à tona os diversos significados que certo conceito pode ter, bem como momentos coletivos para extensões de possibilidades interpretativas para fins do ensino. O Estudo do Conceito é uma estrutura colaborativa composta por quatro ênfases e que envolve diversos professores convidados a analisar e elaborar entendimentos acerca de um determinado conceito matemático (DAVIS; RENERT, 2009, 2014).

Os autores supracitados sublinham que a opção pela palavra *ênfase* é atribuída ao fato de evitar uma hierarquia dos elementos presentes no Estudo do Conceito, marcando a simultaneidade entre eles. As ênfases citadas são: *realizations (realizações); landscapes (panoramas); entailments (vinculações); blends (misturas)*[14] (DAVIS; RENERT, 2014).

Para Davis e Renert (2009, 2014), as *realizações* são as diversas associações (definições, algoritmos, analogias, metáforas, imagens, aplicações, gestos) que o professor utiliza para expor um entendimento sobre certo conceito. Como exemplo, apresento uma lista de *realizações* (Figura 2) apresentada em Davis (2012) e gerada por professores em um Estudo do Conceito a partir do tema multiplicação.

Figura 2 - Lista de *realizações* do conceito de multiplicação

Some Realizations of Multiplication

- grouping process
- repeated addition
- times-ing
- expanding (i.e., distributing across factors; e.g., how can you write $(x + 3)$, $(x + 2)$ times?)
- scaling
- repeated measures
- making areas (continuous)
- making arrays (discrete)
- proportional/steady increase/slope/rise
- splitting, folding, branching, sharing, and other 'dividings' (i.e., multiplyings)
- skip counting (jumping along a number line)
- transformations
- stretching/compressing a number line

Lingering worries:

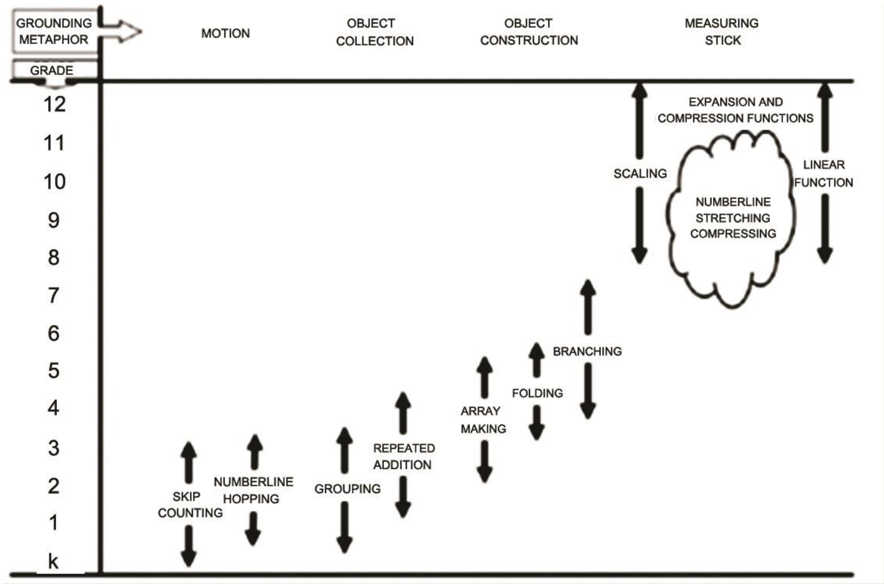
- none of these on their own seem to do much to illuminate -2×-3
- what's going on when units are introduced – e.g., 3 g/L × 5 L?
- most of the entries rely on/suggest a linear or rectilinear basis/image of multiplication, which might work through middle school, but won't stretch across some things encountered in and beyond high school

Fonte: Davis (2012, p. 8)

A ênfase *panoramas* representa a organização das *realizações* – que possuem características em comum – em esquemas mais amplos, um mapa de macro nível (DAVIS; RENERT, 2009, 2014). A Figura 3 exemplifica a ênfase *panoramas* a partir do mesmo trabalho de Davis (2012) sobre multiplicação.

Figura 3 - *Panoramas* do conceito de multiplicação

[14] A ênfase *misturas* não se manifestou em nosso estudo.



Fonte: Davis (2012, p. 10)

Na figura é perceptível a localização ao longo da escolarização dos *panoramas* construídos do conceito de multiplicação.

Considerando que todas as *realizações* – e, por consequência, os *panoramas* – possuem uma gama de implicações e relevâncias, a intenção da ênfase *vinculações* é exatamente descrevê-las (DAVIS; RENERT, 2009, 2014). Uma representação desta ênfase pode ser vista na Figura 4.

Figura 4 - *Vinculações* do conceito de multiplicação

If multiplying is ...	... a factor is ...	... a product is ...	... commutativity is ...	... a prime is ... (necessary conditions, but not sufficient)
REPEATED ADDITION	ADDEND or NUMBER OF ADDENDS (2 × 3: 2 added to itself 3 times or vice versa)	a SUM	2 + 2 + 2 = 3 + 3	sum of ones
REPEATED GROUPING	NUMBER OF GROUPS or NUMBER OF ELEMENTS IN EACH GROUP	a SUM: total number of all the elements in the groups (cardinality of the set)	2 groups of 3 = 3 groups of 2	one group, or one element in each group
MAKING A GRID OR RECTANGULAR ARRAY	DIMENSION: number of rows (number in each column) and number of columns (number in each row)	NUMBER of cells	90°-DEGREE ROTATION (a 2-by-3 grid has the same number of cells as a 3-by-2)	one of the dimensions has to be 1
SKIP COUNTING	SIZE OF THE JUMP and NUMBER OF JUMPS	END DESTINATION (the last number you land on)	*a* jumps of distance *b* lands you in the same place as *b* jumps of length *a*	must make only a single jump or jump one space at a time
SCALING	SCALE FACTOR and ORIGINAL MEASURE	MEASURE OF THE FINAL MAGNIFICATION/ REDUCTION	size *a* scaled by a factor of *b* gives the same result as size *b* scaled by a factor of size *a*	when a magnification/ reduction can only be reached in unit increments or directly
AREA GENERATION	DIMENSIONS (lengths and widths)	AREA	90°-ROTATION: *lw* = *wl*	one dimension must be 1
NUMBER-LINE STRETCHING AND COMPRESSING	SCALE FACTOR and STARTING POSITION ON UNALTERED NUMBER LINE	CORRESPONDING POSITION ON STRETCHED/ COMPRESSED NUMBER LINE	If *c* corresponds to *point a* when line is scaled by *b*, it will correspond to *point b* when scalar is *a*	to get to *point c*, you must EITHER start at 1 with a scalar of c OR vice versa
FOLDING	NUMBER OF HORIZONTAL AND VERTICAL DIVISIONS (made by the folds)	NUMBER OF LAYERS	folding into *a* layers, then into *b* layers gives the same number of layers as *b* first, then *a*	can only be folded directly using $a - 1$ folds
BRANCHING	NUMBER OF STEMS and NUMBER OF BRANCHES PER STEM	TOTAL NUMBER OF BRANCHES AT THE LAST LEVEL	*a* branches of *b* stems has the same product as *b* branches of *a* stems	must either have 1 stem or 1 branch/stem
LINEAR FUNCTION $y = mx$	SLOPE and *x*-COORDINATE	*y*-COORDINATE	If $y = c$ when $m = a$ and $x = b$, then $y = c$ when $m = b$ and $x = a$.	To get to the desired y-coordinate *c*, either $m = c$ and $x = 1$ or $m = 1$ and $x = c$.

Fonte: Davis (2012, p. 11)

Por fim, a ênfase *misturas* tem o intuito de buscar meta-níveis de coerências, explorando as conexões entre as *realizações* e/ou *panoramas* em uma nova interpretação que seja emergente nesse contexto (DAVIS; RENERT, 2014). Não apresento exemplificações dessa ênfase devido à sua não ocorrência nesse estudo. O que me fez perceber a não ocorrência dessa ênfase foi a não percepção da reunião de *realizações* e/ou *panoramas*, aparentemente diferentes, que originasse uma nova interpretação.

Dessa forma, a intenção neste trabalho foi identificar as diversas *realizações* que podem ser utilizadas por professores no ensino de Combinatória, mais precisamente no ensino de *combinação simples* e propor um modelo que apresente uma Matemática para o Ensino desse conceito estruturado nas ênfases do Estudo do Conceito. Salientamos aqui que parte dessas evidências já se encontra na literatura, em estudos que, de alguma forma, contemplam o ensino de *combinação*. Com isso, outras evidências serão geradas por um estudo empírico por meio de um trabalho com professores. É importante esclarecer que a estrutura do Estudo do Conceito percebida durante as investigações dos trabalhos que o utilizam (DAVIS; SIMMT, 2006; DAVIS; RENERT, 2009, 2014; RANGEL; GIRALDO; MACULAN, 2014) desenvolvem-se a partir de um conceito específico.

No meu caso, esse conceito foi *combinação simples*, mas não impediu que outros conceitos, como *arranjos simples*, aparecessem no estudo e fossem analisados tomando sempre as *combinações* como parâmetro.

1.3 OBJETIVOS

Considerando o que foi discutido na revisão de literatura, o objetivo é *modelar uma Matemática para o Ensino do conceito de combinação simples em Análise Combinatória.*

Assumindo a ideia de que este é um estudo de modelagem teórica, podemos utilizar alguns procedimentos para capturar essa variabilidade de formas de *realizações* de professores de Matemática na discussão do conceito de *combinação simples*, por exemplo, análise de livros didáticos, trabalho com os professores, revisão sistemática da literatura, entre outros. Neste trabalho, por se tratar de uma investigação limitada a dois anos (tempo de Mestrado), utilizo apenas dois, enunciados nos objetivos específicos a seguir.

A primeira busca tem foco na literatura, pois nela estão registradas diversas formas pelas quais o conceito de *combinação simples* é comunicado. Para isso, elaborei um primeiro objetivo específico: *modelar uma Matemática para o Ensino do conceito de combinação simples a partir de uma Revisão Sistemática de literatura.*

Além disso, fiz a proposta de um ambiente no qual essas *realizações* pudessem emergir e provocar reflexões coletivas, contemplando a discussão da Matemática para o Ensino por meio do Estudo do Conceito. É neste trabalho, feito com professores, que foi comunicado como eles realizam o conceito de *combinação* em suas salas de aulas. Para isso, elaborei um segundo objetivo específico: *modelar uma Matemática para o Ensino de combinação simples a partir do Estudo do Conceito realizado com um grupo de professores.*

1.4 JUSTIFICATIVA

Como advertem Pessoa e Borba (2010), existe a necessidade de desenvolver em nossos alunos aspectos da Combinatória, uma vez que estes se constituem instrumento importante no fazer matemático do aluno. Corroborando, Ferraz, Borba e Azevedo (2010) sugerem que o estudo de Combinatória possibilita ao aluno organizar, analisar, generalizar e tomar decisões em contextos variados. Entendo que essas questões, aliadas à importância de estudar AC, trazida na discussão da literatura, justificam a escolha por este ramo matemático neste estudo.

O foco no ensino é resultado da observação de que grande parte das pesquisas realizadas sobre AC se volta para aprendizagem de alunos (ALVES; SEGADAS, 2012; CORREA; OLIVEIRA, 2011; TEIXEIRA ET AL, 2011), embora, como já foi dito, as atenções ultimamente têm se voltado ao ensino (FERNANDES; CARVALHO; CARVALHO, 2010; GAUTÉRIO; RODRIGUES, 2012; ROCHA; BORBA, 2013). No campo do ensino, estou interessado nessa Matemática específica que é mobilizada na atividade de ensino pelo professor. Esse foco justifica-se pelo fortalecimento de tal tendência nas pesquisas em Educação Matemática. Essas especificidades no ensino de Matemática – Matemática para o Ensino – se manifestam pelo que chamamos neste estudo de *realizações*. Algumas pesquisas têm utilizado o Estudo do Conceito para capturar essas *realizações* (DAVIS; RENERT, 2009, 2014; RANGEL; GIRALDO; MACULAN, 2014).

Tal abordagem pode revelar novas formas com que os professores realizam AC, em especial o ensino de *combinação simples*, em suas práticas. O acesso a esse conjunto de interconexões que constituem um conceito é essencial para o ensino, pois faz emergir uma variabilidade de formas de *realizações*. Além disso, muitos aspectos dos entendimentos de professores sobre temas matemáticos estão indisponíveis para uma avaliação explícita, eles só podem surgir por meio da participação em explorações coletivas, tais como Estudos do Conceito (DAVIS; RENERT, 2014) e na sistematização das evidências que ocorrem na literatura.

No universo da AC, de acordo com os estudos de Correa e Oliveira (2011) e Pessoa e Borba (2010), a *combinação simples* revela-se como um conceito de difícil entendimento. Nesse sentido, estudar as diversas formas de *realizações* de professores experientes no ensino de AC, com foco na *combinação*, a partir do Estudo do Conceito, pode preencher uma lacuna nas possibilidades desse ensino. A lacuna é evidente, uma vez que alguns professores foram formalmente apresentados a esses conceitos e, possivelmente, não reconhecem as imagens e metáforas que também podem circunstanciar esses mesmos conceitos. Dessa forma, a presente pesquisa pode contribuir teoricamente para outros professores, pesquisadores e autores de livros didáticos com uma variabilidade de formas que são utilizadas para o ensino do conceito de *combinação* e suscitar investigações referentes a outros conceitos em AC.

De posse disso, investiguei que Matemática os professores têm mobilizado para o ensino de AC, mais precisamente para o conceito de *combinação simples*. Sistematizei, também, essas formas de mobilização como proposta de uma ferramenta teórico--metodológica que possa subsidiar estudos futuros e o fazer do professor no ensino deste conceito.

1.5 ENCAMINHAMENTO DA PESQUISA

Neste estudo, devido à natureza dos objetivos específicos, existiu a necessidade de utilizar métodos e procedimentos diferentes. Farei aqui apenas a apresentação, em termos gerais, dos encaminhamentos metodológicos que foram seguidos. Isso será desenvolvido com maior rigor em capítulos específicos que tratam de cada objetivo específico.

Para o primeiro objetivo específico, *modelar uma Matemática para o Ensino do conceito de combinação simples a partir de uma Revisão Sistemática de literatura*, fez-se necessária uma pesquisa bibliográfica do tipo Revisão Sistemática. Segundo Moresi (2003), a pesquisa bibliográfica é o estudo sistematizado desenvolvido com base em relatórios de pesquisas publicados em livros, periódicos e afins. A Revisão Sistemática é um método de pesquisa bibliográfica que busca "identificar toda a evidência de pesquisa disponível de qualidade suficiente sobre um assunto específico[15]." (VICTOR, 2008, p. 1). Para o mesmo autor, na medida do possível, ela deve ser abrangente na cobertura da literatura.

Segundo De-la-Torre-Ugarte-Guanillo, Takahashi e Bertolozzi (2011), o que difere a Revisão Sistemática da revisão tradicional – também chamada de Revisão Narrativa – é o fato de ela ter um objetivo de pesquisa bem definido, bem como o seu *corpus* de análise. As Revisões Sistemáticas não visam simplesmente a um resumo do que há na literatura sobre o assunto definido, mas está destinada a fornecer dados que contribuam para o cumprimento de um objetivo através de métodos explícitos e sistemáticos, desde a seleção da literatura até o

[15] *...method of identifying and synthesising all the available research evidence of sufficient quality concerning a specific subject.*

tratamento dos dados coletados (PETTICREW; ROBERTS, 2006). Sobre a importância do rigor nas Revisões Sistemáticas, Ramos, Faria e Faria (2014, p. 21) sintetizam:

> [...] o facto de se registar um número crescente de indivíduos a utilizar um largo conjunto de recursos infindáveis em ambiente digital, torna cada vez mais complexa a atividade de seleção, não só no momento de pesquisa para encontrar o assunto inquerido, mas acima de tudo na determinação do que é ou não cientificamente credível e relevante para a revisão de literatura.

Seguindo tais pressupostos, delimitei o ambiente de busca em artigos indexados em periódicos brasileiros, no período de 2004 a 2014, de maior abrangência no campo da Educação Matemática. Os periódicos selecionados tinham avaliação com classificações A1, A2, B1 e B2 nas áreas de Educação e Ensino pelo sistema *WebQualis* da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), resultando em uma lista com oito periódicos (ACTA SCIENTIAE – Revista de Ensino de Ciências e Matemática; ALEXANDRIA – Revista de Educação em Ciência e Tecnologia; BOLEMA – Boletim de Educação Matemática; BOLETIM GEPEM; EMP – Educação Matemática Pesquisa; EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana; JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática; ZETETIKÉ – Revista de Educação Matemática). A aplicação dos critérios de seleção resultou em onze produções científicas que apresentaram em suas redações formas de *realizações* – implícita ou explicitamente – do conceito de *combinação simples*. Produções que tratavam de Combinatória, mas não contemplavam de alguma maneira as *combinações*, não foram selecionadas.

As restrições quanto ao período, ao tipo de literatura escolhida e às fontes da literatura justificam-se pelo tempo limitado, uma vez que este estudo foi fruto de um curso de mestrado com duração de dois anos. Ressalto que entendo a importância dos artigos referentes ao meu tema, publicados nos anais dos eventos como ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática) e SIPEM (Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática), mas a adoção dessa literatura teria implicações na viabilidade do trabalho, considerando-se o tempo disponível. Posteriormente, para categorização e análise dos dados coletados, apropriei-me da estrutura do Estudo do Conceito e discuti os resultados a partir da identificação de quatro *panoramas*[16]: formalista, instrumental, ilustrativo e comparativo.

Para o segundo objetivo específico, *modelar uma Matemática para o Ensino de combinação simples a partir do Estudo do Conceito realizado com um grupo de professores,*

[16] As construções desses *panoramas* serão tratadas nos capítulos posteriores.

compreendi a necessidade de uma pesquisa empírica compreensiva através do método qualitativo (CRESWELL, 2010), uma vez que pretendi pesquisar essas *realizações* de professores, a partir do Estudo do Conceito. Segundo Creswell (2010), esse método é um meio para explorar e entender o significado que os indivíduos ou grupos atribuem a um problema social ou humano.

Dessa forma, percebi que cabia fundamentar a minha estratégia metodológica para alcance do segundo objetivo, a partir de uma pesquisa qualitativa, utilizando como fonte de coletas de informações um grupo composto por seis professores. Esses professores eram atuantes nos níveis Fundamental, Médio e/ou Superior da cidade de Barreiras, localizada no Estado da Bahia. A formação do grupo teve como motivação um curso de extensão com carga horária total de 80 horas, promovido no *campus* do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA) da referida cidade.

Para a produção, coleta, categorização e análise de dados utilizei a estrutura do Estudo do Conceito (DAVIS; SIMMT, 2006; DAVIS; RENERT, 2009, 2014; DAVIS, 2012; RANGEL; GIRALDO; MACULAN, 2014). Dessa forma, a Matemática que o professor mobiliza foi capturada por essa estrutura colaborativa que, para os mesmos autores, envolve professores que são convidados a analisar e elaborar entendimentos sobre um determinado conceito, a partir de atividades propostas pelo pesquisador, como elaborações e resoluções de problemas e ainda elaboração e execução de planos de aulas.

Devido à problemática no ensino, apontada na discussão de literatura, o grupo foi formado com certos critérios como: (1) características em comum associadas ao tópico que está sendo pesquisado – no caso desta pesquisa, todos eram professores de Matemática com experiência no ensino de AC; (2) a heterogeneidade dos contextos no qual ocorriam suas práticas – para esta pesquisa, foram escolhidos professores que atuavam em diferentes níveis de ensino; (3) tempos de docência diferentes.

Posto isso, o grupo foi convidado a refletir, coletivamente, sobre o conceito de *combinação simples* em AC. Os encontros foram devidamente registrados com os dados de observações e filmagens que foram posteriormente analisadas na busca de mapear formas de *realizações* emergidas nesse contexto. A análise de dados também foi categorizada em quatro *panoramas*, os mesmos já citados na análise dos resultados do primeiro objetivo específico.

Para alcance do objetivo geral, confrontei os resultados obtidos referentes aos objetivos específicos na busca de construir um modelo teórico de uma Matemática para o Ensino do conceito de *combinação simples*.

1.6 FORMATO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação está estruturada no formato conhecido como *multipaper,* ou seja, na forma de capítulos/artigos. Segundo Duke e Beck (1999), a escolha desse formato permite que, durante o processo de elaboração da dissertação, artigos sejam gerados e a ela incorporados, admitindo, dessa forma, que novos artigos sejam publicados ampliando a acessibilidade da comunidade científica aos resultados gerados pela pesquisa.

Este trabalho consta de quatro capítulos. O primeiro corresponde a presente introdução, que apresenta a aproximação com o problema de pesquisa, o objetivo da dissertação, a justificativa, uma discussão sintética da literatura no que tange à AC, à Matemática para o Ensino e ao Estudo do Conceito. Além disso, também é apresentado o método que foi utilizado nesta pesquisa. Os capítulos 2, 3 e 4, são escritos na estrutura de artigos, mas mantêm na sua consistência as mesmas áreas do conhecimento apresentadas na introdução. Neste modelo de relatório, as repetições das ideias gerais da pesquisa trazidas na introdução são inevitáveis nos artigos, uma vez que cada um deles precisa ser independente e consistente em si mesmo. Porém, cada artigo resguarda textos próprios.

O primeiro artigo, apresentado no segundo capítulo, traz o estudo que teve por objetivo *modelar uma Matemática para o Ensino do conceito de combinação simples a partir de uma Revisão Sistemática de literatura*.

O segundo artigo, que corresponde ao terceiro capítulo da dissertação, teve como objetivo *modelar uma Matemática para o Ensino de combinação simples a partir do EC realizado com um grupo de professores*.

O capítulo quatro, que é apresentado sob a forma do terceiro e conclusivo artigo, por sua vez, tem o papel de confrontar e sistematizar os resultados dos capítulos 2 e 3, gerando o modelo de uma Matemática para o Ensino de *combinação simples,* a partir das diversas formas de *realizações* capturadas na literatura e no estudo com professores, apresentando limitações e possibilidades que podem subsidiar pesquisas futuras e o fazer matemático de professores. Ressaltamos neste último artigo que, embora as análises tenham sido feitas com textos próprios, algumas figuras são repetições das figuras dos artigos 1 e 2.

Os artigos mencionados serão submetidos, respectivamente, aos periódicos EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, Educação Matemática Pesquisa e Educação & Realidade. Entendo ser possível, dessa forma, atingir um número maior de pesquisadores, pois, segundo Duke e Beck (1999), esse modelo aumenta o potencial de disseminação no meio acadêmico e profissional.

REFERÊNCIAS

ADLER, Jill. Mathematics for teaching: what is it and why is it important that we talk about it? **Pythagoras:** University of the Witwatersrand, 2005.

ADLER, Jill et al. Working with learners mathematics: exploring key elements of mathematical knowledge for teaching. In: CONFERÊNCIA INTERNACIONAL GRUPO DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 29., 2005. **Anais**…Melbourne: PME, 2005.v.2. p. 1-8. Disponível em: < http://www.emis.de/proceedings/PME29/PME29RRPapers/ PME29Vol2AdlerEtAl.pdf> Acesso em: 01 ago. 2015.

ALMEIDA, Adriana Luziê de. **Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação:** um estudo de caso com o 2º ano do ensino médio**.** 2010. 166 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto, 2010.

ALVES, Renato; SEGADAS, Claudia. Sobre o ensino da análise combinatória: fatores a serem considerados, lacunas a serem evitadas. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 14, n. 3, p. 405-420. Canoas, 2012.

AZEVEDO, Juliana; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Combinatória: a construção de árvores de possibilidades por alunos dos anos iniciais com e sem uso de software. **ALEXANDRIA- Revista de Educação em Ciência e Tecnologia,** Santa Catarina, v. 6, n. 2, p. 113-140, 2013.

BALL, Deborah Loewenberg. **What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics?** Prepared for the Secretary’s Summit on Mathematics, U.S. Department of Education, February 6, 2003; Washington, D.C.

BALL, Deborah Loewenberg; BASS, Hyman. Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In: SIMMT, Elaine, DAVIS, Brent (Ed.). **Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group**, 2003. p. 3-14.

B ALL, Deborah Loewenberg; HILL, Heather C.; BASS, Hyman. Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide?. 2005.

BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. Content knowledge for teaching what makes it special?. **Journal of teacher education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BEDNARZ, Nadine; PROULX, Jérôme. Knowing and using mathematics in teaching: conceptual and epistemological clarifications. **For the learning of mathematics**, Canadá, v.

29, n. 3, p. 1-7, Nov. , 2009. Disponível em: < http://flm-journal.org/Articles/90007B35446B191D39748441966D2.pdf> Acesso em: 01 ago. 2015.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. O raciocínio combinatório na educação básica. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática (X ENEM)**. Bahia, 2010.

_________________. Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática (XI ENEM)**. Curitiba, 2013.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa et al. O que dizem os estudos recentes sobre o raciocínio combinatório? **Anais do X Encontro Gaúcho de Educação Matemática.** Inijuí, 2009.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; PESSOA, Cristiane Azevêdo dos Santos; ROCHA, Cristiane de Arimatéa. Como estudantes e professores de anos iniciais pensam sobre problemas combinatórios. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 15, n. esp. p. 895-908, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica (SEMTEC). **PCN+: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília/DF. MEC, 2002.

CORREA, Jane; OLIVEIRA, Gisele. A escrita do problema e sua resolução: o entendimento intuitivo acerca da combinatória. The written text of mathematical word problems and the success of solution. **Educar em Revista**, Curitiba, n. esp. 1, p. 77-91, 2011.

CRESWELL, John W. Projeto de pesquisa métodos qualitativo, quantitativo e misto. In: **Projeto de pesquisa métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Artmed, 2010.

DAVIS, Brent. Subtlety and complexity of mathematics teachers' disciplinary knowledge. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 12., Seoul, Korea, 2012. **Anais**… Seoul, Korea: ICME, 2012.

DAVIS, Zain; ADLER, Jill; PARKER, Diane. Identification with images of the teacher and teaching in formalized in-service mathematics teacher education and the constitution of mathematics for teaching. **Journal of Education**, v. 42, p. 33-60, 2007.

DAVIS, Brent; RENERT, Moshe. Mathematisc-for-Teaching as shared dynamic participation. **For the Learning of Mathematics**, v. 29, n. 3, p. 37-43, 2009.

___________________. **The Math Teachers Know:** Profound Understanding of Emergent Mathematics. Routledge, 2014.

DAVIS, Brent; SIMMT, Elaine. Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. **Educational Studies in Mathematics,** v. 61, n. 3, p. 293-319, March, 2006.

DE-LA-TORRE-UGARTE-GUANILO, Mônica Cecilia; TAKAHASHI, Renata Ferreira; BERTOLOZZI, Maria Rita. Revisão sistemática**:** noções gerais. **Revista da Escola de Enfermagem da USP**, São Paulo, v. 45, n. 5, p. 1260-6, out., 2011.

DUKE, Nell K.; BECK, Sarah W. Education should consider alternative formats for the dissertation. **Educational Researcher**, p. 31-36, 1999.

FERNANDES, José António; CARVALHO, Bárbara do Alvar de; CARVALHO, Carolina Fernandes de. O trabalho colaborativo como meio de desenvolver o conhecimento didático de duas professoras em combinatória. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 12, n. 1, p. 43-74. São Paulo, 2010.

FERRAZ, Martha; BORBA, Rute; AZEVEDO, Juliana. Usando o software Árbol na construção de árvores de possibilidades para a resolução de problemas combinatórios. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática (X ENEM). Bahia**, 2010.

GATTI, Bernadette; BARRETTO, Elba Siqueira de Sá. **Professores do Brasil: impasses e desafios**. Unesco Representação no Brasil, 2009.

GAUTÉRIO, Vanda LB; RODRIGUES, Sheyla C. "Se tivessem me ensinado isso antes...": um estudo sobre as aprendizagens docentes. **Zetetiké: Revista de Educação Matemática**, v. 20, n. 38, p. 125-150, 2013.

KOTSOPOULOS, Donna.; LAVIGNE, Susan. Examining ―mathematics for teaching‖ through an analysis of teachers' perceptions of student ―learning paths**. International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 3, n.1 , p. 1-23, 2008.

LANDÍN, Pedro Rubén; SÁNCHEZ, Ernesto. Níveis de razonamiento probabilístico de estudantes de bachillerato frente a tareas de distribucíon binomial. **Educação Matemática Pesquisa,** v. 12, n. 3, p. 598-618. São Paulo, 2010.

LIMA, Elon Lages et al. **A matemática do ensino médio**. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. v.2 (Professor de Matemática).

LOUREIRO, Cristina. Que formação matemática para os professores do 1. º ciclo e para os educadores de infância. **A Matemática na formação do professor**, p. 30-67, 2004.

MORESI, Eduardo. Metodologia da Pesquisa. **Universidade Católica de Brasília**, 2003.

MORO, Maria Lúcia Faria; SOARES, Maria Thereza Carneiro. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. ***Educação Matemática Pesquisa***, v. 8, p. 99-124, 2006.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **Zetetiké**, Campinas, SP, v. 17, n. 31 , p.105-150, jun. 2009.

___________________. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **EM TEIA| Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 1, n. 1, 2010.

PETTICREW, Mark; ROBERTS, Helen. **Sistematic reviews in the social sciences:** a practical guide. Oxford, Blackwell, 2006.

RAMOS, Altina; FARIA, Paulo M.; FARIA, Ádila. Revisão sistemática de literatura: contributo para a inovação na investigação em Ciências da Educação = Systematic review : contribution to innovation in Educational Research . **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v.14, n.41 , p. 17-36, jan. 2014.

RANGEL, Letícia; GIRALDO, Victor; MACULAN, Nelson. Matemática elementar e saber pedagógico de conteúdo: estabelecendo relações. **Professor de Matemática Online – SBM**. v. 2, n. 1, p. 1-14, 2014.

RIBEIRO, Alessandro Jacques. Equação e conhecimento matemático para o ensino: relações e potencialidades para a educação matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42B, abr., 2012. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/> Acesso em: 02 ago. 2013.

RIBEIRO, Alessandro Jacques. Elaborando um perfil conceitual de equação: desdobramentos para o ensino e a aprendizagem de matemática. **Ciência & Educação**, v. 19, n. 1, p. 55-71. Santo André (SP), 2013.

ROA, Rafael; NAVARRO-PELAYO, Virginia. Razonamiento Combinatorio e Implicaciones para la Enseñanza de la Probabilidad. **Jornadas europeas de estadística, Ilhas Baleares**, v. 10, 2001.

ROCHA, Cristiane de Arimatéa; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Reflexões de docentes sobre o ensino de combinatória: transitando entre conhecimento pedagógico e do conteúdo. **Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística**, n. 2, p. 555-562, 2013.

RYVE, Andreas; NILSSON, Per; MASON, John. Establishing mathematics for teaching within classroom interactions in teacher education. **Educational Studies in Mathematics**, v. 81, n. 1, p. 1-14, 2012.

SABO, Ricardo Dezso. Análise de livros didáticos do ensino médio: um estudo dos conteúdos referentes à combinatória. **Monografia de Especialização em Educação Matemática, Centro Universitario Fundação Santo André, SP**, 2007.

SANTOS-WAGNER, Vânia Maria Pereira; BORTOLOTI, Roberta D´Angela Menduni; FERREIRA, Juliana Rodrigues. Análise das resoluções corretas e erradas de combinatória de futuros professores de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 15, n. 3, p. 606-629, 2013.

SILVERMAN, Jason; THOMPSON, Patrick W. Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. **Journal of mathematics teacher education**, v. 11, n. 6, p. 499-511, 2008.

SHULMAN, Lee S. Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, Lee. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard educational review**, v. 57, n. 1, p. 1-23, 1987.

TEIXEIRA, Leny RM et al. Problemas multiplicativos envolvendo combinatória: estratégias de resolução empregadas por alunos do Ensino Fundamental público. **Educar em Revista**, v. 1, p. 245-270, 2011.

VICTOR, Liz. Systematic reviewing. **Social research update,** Surrey, n. 54, 2008.

2. ARTIGO I - UMA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE COMBINAÇÃO SIMPLES A PARTIR DE UMA REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA

RESUMO: Neste artigo, buscamos modelar uma Matemática para o Ensino do conceito de *combinação simples* a partir de uma Revisão Sistemática de literatura. Para isto, analisamos um *corpus* de dez artigos de periódicos brasileiros avaliados no sistema *WebQualis* do portal da *CAPES* com classificações A1, A2, B1 e B2 nas áreas de Educação e Ensino. Em seguida, apresentamos um modelo parcial, a partir das diferentes formas de *realizações*, categorizados em quatro *panoramas*: formalista, instrumental, ilustrativo e comparativo. Esses *panoramas* explicitam uma variabilidade de formas – e suas *vinculações* – que são utilizadas para comunicar o conceito de *combinação simples*.

Palavras-chave: Matemática para o Ensino. Revisão Sistemática. Combinação Simples.

ABSTRACT: In this article, we intend to model a Mathematics for Teaching from the concept of simple combination starting from a systematic review of the literature. For this, we analyse a corpus of ten articles of Brazilian journals evaluated by the WebQualis system from CAPES portal with ratings A1, A2, B1 and B2 in the areas of Education and Teaching. Then we present a partial model, from different forms of realizations, categorised into four landscapes: formal, instrumental, illustrative and comparative. These panoramas explain a variability of forms - and its entailments - which are used to communicate the concept of simple combination.

Keywords: Mathematics for Teaching. Systematic Review. Simple Combination

2.1 INTRODUÇÃO

Os estudos com foco em Análise Combinatória (AC) vêm ganhando visibilidade no campo da Educação Matemática, tanto no que se refere à aprendizagem (PESSOA; BORBA, 2010; TEIXEIRA; CAMPOS; VASCONCELLOS; GUIMARÃES, 2011; CORREA; OLIVEIRA, 2011), quanto no que se refere ao ensino (ALVES; SEGADAS, 2012; BORBA, 2013). Neste trabalho, lançamos olhares sobre discussões que vêm sendo feitas no Brasil em torno do ensino desse ramo da Matemática, convergindo para os entendimentos sobre o conceito de *combinação simples* que também será chamado neste estudo apenas de *combinação*[17].

Buscando nos aproximar da estrutura metodológica que utilizaremos neste trabalho, tomaremos a definição de conceito matemático como a composição da palavra – que

[17] As ideias deste conceito serão tratadas ao longo do texto.

referencia o tema abordado – e todas as suas formas de representação (símbolos, imagens, metáforas, analogias e outros recursos textuais) que se reconhecem como parte da Matemática (DAVIS; RENERT, 2009). Neste trabalho, quando nos referimos ao conceito de *combinação* temos como interesse lançar olhar sobre as possíveis formas de comunicação utilizadas na tarefa de ensinar[18] esse conceito.

No que se referem à tarefa de ensinar Matemática, pesquisas atuais têm reconhecido a existência de uma Matemática específica mobilizada pelos professores ao fazê-la, que se diferencia da utilização da Matemática em outros domínios de prática (ADLER, 2005; DAVIS; SIMMT, 2006; DAVIS; RENERT, 2009, 2012). Em outras palavras, podemos entender que, da mesma maneira como um enfermeiro ou um engenheiro mobiliza uma Matemática específica para desempenhar suas respectivas tarefas, a Matemática mobilizada pelo professor em sua tarefa de ensinar também possui as suas características particulares. Essas especificidades vêm sendo discutidas em termos de Matemática para o Ensino (ADLER, 2005; DAVIS; SIMMT, 2006; DAVIS; RENERT, 2009, 2012), conforme discutiremos adiante.

Nosso interesse neste estudo é mapear, utilizando uma literatura pré-definida, a Matemática específica, a partir das diversas formas utilizadas para comunicar o conceito de *combinação simples* na específica tarefa de ensinar. Com o intuito de circunstanciar o nosso objeto e apresentar o objetivo em termos mais específicos, faremos uma breve discussão sobre AC e a motivação pela escolha do conceito de *combinação simples*, bem como uma melhor descrição do que apresentaremos como concepção de Matemática para o Ensino.

2.2 MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE COMBINAÇÃO SIMPLES

Segundo Morgado, Carvalho e Carvalho (1991), AC é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas. Podemos dizer que a AC estuda e desenvolve técnicas de contagem de elementos de um conjunto que satisfazem certas condições, sem necessariamente enumerar todos esses elementos (PESSOA; BORBA, 2009). Outro termo também utilizado na literatura para se referir a situações ligadas a AC é o Raciocínio Combinatório. Para Borba (2013), o Raciocínio Combinatório é:

[18] Concebemos como tarefa de ensinar toda situação ligada ao ensino, por exemplo, elaboração e execução de uma aula.

> [...] um modo específico de pensamento, caracterizado pela análise de situações nas quais são dados elementos de um ou mais conjuntos e estes elementos devem ser agrupados em combinações que atendem a relações específicas de escolha e ordenação dos elementos (p. 3).

No que diz respeito à importância do estudo de AC, Pessoa e Borba (2010) e Borba, Pessoa e Rocha (2013) argumentam que o desenvolvimento de pensamentos utilizados em problemas combinatórios é útil no pensar matemático e no pensar de outras áreas do conhecimento e em aplicações práticas do cotidiano. Lopes e Rezende (2010) defendem que as discussões sobre AC têm importância fundamental para argumentação hipotético-dedutiva, pois cada situação nos leva a operar por combinação e avaliação das possibilidades que as satisfazem. Essa defesa pode ser validada pelo fato de o assim chamado pensamento combinatório operar pela decisão das possibilidades que são válidas ou não, em cada situação e, a partir daí, avaliar o melhor caminho para sua solução.

Entretanto, de que maneira podemos perceber o potencial gerado pelo ensino de AC para soluções de problemas e para o desenvolvimento do fazer matemático? Uma resposta a essa pergunta é encontrada em Pessoa e Borba (2010), quando apontam que esse desenvolvimento depende da maneira como ela é trabalhada na escola. Há uma dificuldade do professor ao ensinar AC – e cujo problema pode estar na formação combinatória do professor – que leva os alunos a não elaborarem estratégias diversificadas para as soluções e compreensões das diferentes lógicas dos problemas, nos quais o único papel que lhes resta é o de tentar enquadrar as soluções em aplicações de fórmulas (BORBA; ROCHA; MARTINS; LIMA, 2009; PESSOA; BORBA, 2010).

Tal enquadramento nem sempre se apresenta como a forma mais indicada para as soluções dos problemas, pois, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais Complementares (PCN+), “as fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos [...]” (BRASIL, 2002, p. 126). Esse quadro nos leva a perceber a existência de uma problemática em torno do ensino de AC.

Ferraz, Borba e Azevedo (2010, p. 4) sintetizam o papel do ensino formal (ensino ocorrido na escola) quando afirmam que tal ensino “deve possibilitar o uso de estratégias informais e formais na resolução de situações combinatórias, baseadas sempre na compreensão das situações por parte dos alunos”. Isso mostra que outros estudos já sugerem a variabilidade na forma de comunicar conceitos em AC. No entanto, nos perguntamos se isso tem sido feito e de que maneira. Essas dúvidas evidenciam os professores, responsáveis pelo seu ensino nas salas de aulas. Particularmente, esses questionamentos lançam olhares sobre as várias formas que eles têm mobilizado para ensinar AC.

Essa variabilidade pode ter origem nas diferentes formações a que os professores de Matemática tiveram acesso (SABO, 2010; ROCHA; BORBA, 2013) e nas experiências já adquiridas com o ensino de Matemática (SABO, 2010). Entendemos que isso pode refletir nas diferentes formas como conduzem as comunicações acerca de AC em salas de aula.

As formas de soluções em AC podem variar de um problema para outro, o que requer estratégias diferentes de busca para suas soluções. Essas estratégias podem variar de uma aplicação direta do PFC (Princípio Fundamental da Contagem)[19] ao conhecimento de técnicas de contagem que, embora sejam aplicações do PFC, se apresentam de formas mais elaboradas (CORREA; OLIVEIRA, 2011). Essas técnicas, também conhecidas como modos de formar agrupamentos, são apresentadas na educação básica por *permutações simples*[20], *arranjos simples*[21] e *combinações simples*.

A compreensão dessas diferentes técnicas, bem como de suas aplicações em problemas específicos trazem dificuldades para os alunos. Borba et al. (2009), em trabalho que sintetizou alguns estudos sobre Análise Combinatória, indica a necessidade de uma formação docente mais profunda em AC, para que os professores não reduzam o ensino a aplicações de fórmulas, permitindo aos alunos desenvolverem ferramentas que os auxiliem nos diversos problemas combinatórios. Em particular, os problemas de *combinações simples* são os que apresentam os menores índices de acertos ou são indicados como os mais difíceis para os alunos (PESSOA; BORBA, 2010; CORREA; OLIVEIRA, 2011). Essas dificuldades apresentadas pelos alunos podem ser consequência do que e de como os professores têm mobilizado o conceito em suas salas de aulas (SABO, 2010).

Sinteticamente, as *combinações simples* dão conta da seleção de p objetos de um conjunto com n objetos (com $p \leq n$), em que as diferentes ordenações dos mesmos objetos não formam novas possibilidades, ou seja, nas *combinações simples* a ordem com que os

[19] Segundo Lima et al. (2004), este princípio diz que se há x modos de tomar uma decisão D1 e, tomada a decisão D1, há y modos de tomar a decisão D2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D1 e D2 é $x.y$.

[20] "Uma permutação de n objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses objetos, de modo que, se denominarmos P_n o número das permutações simples dos n objetos, então $P_n = n(n-1)(n-2)...1 = n!$" (SANTOS; MELLO; MURARI,2007, p. 44).

[21] "Arranjos simples de n elementos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e p é um número natural tal que $p \leq n$, são todos os grupos de p elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos p elementos que compõem cada grupo." (SANTOS; MELLO; MURARI,2007, p. 57).

elementos são escolhidos é irrelevante (MORGADO ET AL, 1991; LIMA, CARVALHO; WAGNER; MORGADO, 2004).

Dessa forma, a dificuldade de compreensão e operacionalização ocorre, segundo Correia e Fernandes (2007), pelo fato dos alunos considerarem a ordem em que os elementos são selecionados como respostas diferentes. Como exemplo, podemos citar o seguinte problema: *De um grupo composto por 6 (seis) pessoas (Carlos, Maria, Diego, Rafaela, Pedro e Glória), de quantas maneiras diferentes podemos formar uma comissão com 3 (três) pessoas apenas?* Neste caso, a ordem em que se escolhem os três integrantes da comissão não geram novas possibilidades. Assim, a comissão formada por {Carlos, Glória, Rafaela} é idêntica à comissão formada por {Rafaela, Carlos, Glória}. Na maioria das vezes os alunos não percebem a igualdade desses subconjuntos e acabam considerando os mesmos agrupamentos mais de uma vez em suas soluções.

Diante do que foi exposto até aqui, especialmente no que tange ao conceito de *combinação simples*, surge o nosso interesse em tornar visível e sistematizar o que pesquisadores têm apresentado de contribuições. Neste sentido, sugerimos que o ensino de AC precisa abordar as diversas *realizações* que permeiam o conceito de *combinação simples*, em que essa variabilidade de formas de comunicar esse conceito passa pela figura do professor na condução de sua tarefa de ensinar.

Em Davis (2012) e Davis e Renert (2012, 2014) as *realizações* são as diversas associações (definições, algoritmos, analogias, metáforas, imagens, aplicações, gestos) utilizadas para comunicar certo conceito matemático na tarefa específica de ensinar. Como dito anteriormente, essas especificidades que permeiam a tarefa de ensinar vêm sendo investigadas em termos de Matemática para o Ensino.

Segundo Davis e Renert (2014), Matemática para o Ensino representa o modo como o professor organiza suas aulas, interpreta as ações dos alunos e responde aos questionamentos que lhe são feitos. Para nós, a Matemática para o Ensino tem referência na Matemática específica que é mobilizada na tarefa de ensinar. Em outras palavras, é o conjunto das formas com que um determinado conceito é comunicado no ensino.

Para Adler, Davis, Kazima, Parker e Webb (2005), a ideia é marcar a Matemática para o Ensino como uma forma diferente de mobilizar essa Matemática, produzida na prática e utilizada para a prática do professor. Para eles, essa diferença é evidenciada pelas especificidades nas formas de utilização da Matemática em diferentes práticas culturais, e para o grupo dos professores não seria diferente. Em outras palavras, da mesma forma que diferentes profissionais mobilizam uma Matemática específica nas suas tarefas, os professores, como uma categoria de profissionais, também mobiliza algo que é específico deles. Sendo assim, questionamo-nos sobre que Matemática para o Ensino é mobilizada no ensino do conceito de *combinação simples* em AC.

Para Davis e Renert (2009, 2012, 2014), a Matemática mobilizada no ensino emerge na própria tarefa de ensinar. Ou seja, por exemplo, os professores vão usar metáforas, situações, exemplos, os mais diversos possíveis, para realizar um conceito matemático em sala de aula. De posse disso, entendemos que a descrição dessa Matemática mobilizada na tarefa de ensinar não é exaustiva, mas, mesmo sem o intuito de mudar os termos já estabelecidos, propomos uma descrição parcial, propomos modelar teoricamente tal Matemática.

Retomando a ideia de tarefa de ensinar como toda situação que tenha referência ao ensino, a Matemática mobilizada para esse propósito pode ser observada em diversos contextos, como livros didáticos, documentos oficiais de orientações, salas de aula, curso com professores, publicações científicas, entre outros. Dito isto, podemos agora enunciar o objetivo do presente estudo: modelar uma Matemática para o Ensino do conceito de *combinação simples* a partir de uma Revisão Sistemática de literatura. Esse modelo pode contribuir com professores em todos os níveis de formação e atuação, além de oferecer à área científica da Educação Matemática uma sistematização das diversas formas que são, e podem ser utilizadas na comunicação do conceito de *combinação simples* em AC. Chamamos a atenção para o fato de que, embora alguns estudos utilizados para a construção deste trabalho tenham como objeto de investigação a aprendizagem, estaremos focados nos aspectos referentes ao ensino, às formas de comunicação do conceito de *combinação simples*.

2.3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A Revisão Sistemática (RS) é um método de pesquisa bibliográfica que objetiva responder, a partir de uma síntese de diversos estudos, e com rigor metodológico, a uma questão específica. Este rigor metodológico aparece em termos de uma explicitação e transparência de todo o procedimento utilizado para identificar, selecionar, avaliar e sintetizar todos os estudos que forem incluídos na revisão (PETTICREW; ROBERTS, 2006; SAMPAIO; MANCINI, 2007; VICTOR, 2008).

Seguimos os seguintes passos: definição do objetivo da pesquisa (já enunciado); localização e coleta de estudos; avaliação e seleção de estudos; extração e agrupamento de informações; síntese descritiva das informações extraídas (PETTICREW; ROBERTS, 2006; SAMPAIO; MANCINI, 2007).

Com relação à localização e coleta dos estudos, optamos por analisar apenas artigos presentes em periódicos brasileiros de Educação Matemática no período de 2004 e 2014, configurando-se, assim, uma década de pesquisas publicadas anteriormente ao início da presente pesquisa. A escolha por artigos justifica-se por apresentarem resultados de pesquisa com análises mais sintetizadas.

Inicialmente, selecionamos os periódicos nacionais de maior abrangência em Educação Matemática, avaliados no sistema *WebQualis* do portal da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) com classificações A1, A2, B1 e B2 nas áreas de Educação e Ensino, resultando em uma lista com oito periódicos (Quadro 1). Em seguida, exploramos, no período de tempo definido, todos os volumes e números das publicações em cada periódico, processo em que coletamos artigos por títulos, resumos e/ou palavras-chave que fizessem qualquer referência a AC. Por algumas vezes, fez-se necessária a leitura do texto para permitir a escolha do artigo. Posteriormente, fizemos uma avaliação mais criteriosa dos artigos coletados, selecionando aqueles que, de alguma maneira faziam referência à palavra "combinação", conceito foco desta pesquisa, resultando em um número de quinze artigos. A definição final do *corpus*, onze artigos (Quadro 1), estruturou-se após a leitura completa dos artigos. A partir das leituras, percebemos que três estudos faziam referência ao termo "combinação" como resultado de *produto cartesiano*[22] (MORO; SOARES, 2006; MORO; SOARES; FILHO, 2010; GAUTÉRIO; RODRIGUES; 2012) e outro como sinônimo de possibilidades (SANTOS; GRANDO, 20011), o que não representava o nosso foco nas *combinações simples.* Esses quatro trabalhos foram desconsiderados como materiais de análise.

Quadro 1 – Relação dos periódicos e artigos selecionados

Periódicos selecionados	**Quantidade de artigos**	**Autores**
ACTA SCIENTIAE – Revista de Ensino de Ciências e Matemática	01	Alves e Segadas (2012)

[22] Produto de medidas, onde a partir de dois ou mais conjuntos são selecionados elementos de cada conjunto com o objetivo de gerar um novo conjunto cujos elementos são composições dos elementos dos conjuntos iniciais (BORBA, 2013).

ALEXANDRIA – Revista de Educação em Ciência e Tecnologia	01	Azevedo e Borba (2013)
BOLEMA – Boletim de Educação Matemática	02	Groenwald, Zoch Neto e Homa (2009); Serrazina e Ribeiro (2012).
BOLETIM GEPEM	00	-
EMP – Educação Matemática Pesquisa	04	Fernandes, Carvalho e Carvalho (2010); Landín e Sánchez (2010); Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013); Borba, Pessoa e Rocha (2013).
EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana	01	Pessoa e Borba (2010)
JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática	01	Vega e Borba (2014)
ZETETIKÉ – Revista de Educação Matemática	01	Pessoa e Borba (2009)

Fonte: Elaborado pelos autores

Para extração, agrupamento e síntese das informações, enquadramos o nosso trabalho em estrutura similar do Estudo do Conceito (EC). Como o intuito aqui não é realizar um EC – vamos apenas nos apropriar dele e convertê-lo em uma estratégia metodológica de análise que cumpra o objetivo deste estudo – nós o apresentaremos de maneira sintética.

Na área de Educação Matemática, Davis e Renert (2009, 2012, 2014) utilizaram o EC para os professores trazerem à tona suas formas de comunicar determinados conceitos em Matemática. Segundo Davis e Renert (2009, p. 38, tradução nossa), o EC "são ocasiões para escavar os significados existentes de conceitos, bem como as oportunidades para críticas compartilhadas e extensões de possibilidades interpretativas para fins pedagógicos" [23]. Apropriando-nos do EC como uma estratégia metodológica para modelar uma Matemática para o Ensino de *combinação simples*, apresentamos a síntese da nossa RS em termos de *realizations (realizações); landscapes (panoramas); entailments (vínculos)*.

Como dito anteriormente, as *realizações* são as diversas associações (definições, algoritmos, analogias, metáforas, imagens, aplicações, gestos) que são utilizadas para dar sentido a certo conceito matemático, na tarefa específica de ensinar, e os *panoramas* são as

[23] *"...are occasions for excavating extant meanings of concepts, as well as opportunities for shared critiques and extensions of interpretative possibilities for pedagogical purposes."*

observações das relações entre as *realizações*, são as organizações de listas de *realizações* que apresentam características semelhantes e possíveis contrastes (DAVIS; RENERT, 2009, 2012). Em síntese, "o *panorama* é uma visão de macro nível, ao passo que uma *realização* é uma visão de micro nível, de um conceito."[24] (DAVIS; RENERT, 2014, p. 62, tradução nossa). Para os mesmos autores, cada uma das *realizações* está imbricada de implicações próprias.

O intuito da ênfase *vinculações*, descrito em Davis (2012) e adotado neste estudo é identificar e descrever essas diferentes implicações e relevâncias das diversas *realizações* de um determinado conceito matemático. Utilizamos a literatura para mapear as *realizações* do conceito de *combinação simples* e as apresentamos em termos de *panoramas* e suas *vinculações*.

2.4 APRESENTAÇÃO DESCRITIVA DOS PANORAMAS E SUAS VINCULAÇÕES

A construção feita aqui considera o viés da Matemática para o Ensino estruturada metodologicamente no EC, o qual se apresenta, neste trabalho, como uma ferramenta metodológica que conduz essa modelagem a partir do que foi definido como *realizações*. Assumiremos aqui a ideia de que a Matemática para o Ensino busca identificar e modelar de forma teórica a diversidade de realizações que podem ser mobilizadas na tarefa de ensinar Matemática.

Apresentaremos agora a diversidade de *realizações* observadas na literatura no que diz respeito ao conceito de *combinação simples*. Primeiramente, nossa intenção era identificar, implícita ou explicitamente, como *combinação* aparece ou é concebida na literatura selecionada. Salientamos, fundamentados em Davis e Renert (2014), que nossa intenção não é classificar as *realizações* listadas como adequadas ou inadequadas, mas como entendimentos particulares de um conceito matemático que, muitas vezes, surgem de forma emergente no contato com aqueles. Nessa identificação chegamos à seguinte lista de *realizações*: definição formal, fórmula, ordenação irrelevante; diagrama de árvore das possibilidades, desenho, listagem, tabela, comparação com *arranjo*, objetos concretos ou virtuais.

A partir de análises e reflexões em torno das *realizações*, e considerando que algumas não são disjuntas, ou seja, podem ocorrer ao mesmo tempo, esboçamos um primeiro quadro

[24] *"... a landscape is a macro-level map, whereas a realization is a micro-level snapshot, of a concept."*

de Matemática para o Ensino do conceito de *combinação simples* em termos de *panoramas*. (Quadro 02).

Quadro 02 – Panoramas construídos.

Panorama	**Realizações originárias**
Formalista	Definição formal
Instrumental	Fórmula
Ilustrativo	Diagrama de árvore das possibilidades; Desenho; Listagem; Tabela; Objetos concretos ou virtuais.
Comparativo	Ordenação irrelevante; Comparação com arranjo.

Fonte: Elaborado pelos autores

A seguir, a descrição dos *panoramas*, suas manifestações na literatura estudada e algumas *vinculações*.

2.4.1 Panorama Formalista

Neste *panorama*, o conceito de *combinação* é comunicado a partir da definição matemática formal, onde é apresentado em termos de uma generalização da contagem de subconjuntos que possuem determinadas características.

A *realização* de *combinação simples* como definição formal tem como propósito a apresentação formal das relações e propriedades que se mantêm constantes no conceito. No caso das *combinações*, essas relações e propriedades são referentes à característica dos elementos que formam o agrupamento e da irrelevância da ordem com que os elementos são escolhidos no processo. Exemplos dessa situação podem ser encontrados na literatura pesquisada.

Para Pessoa e Borba (2010, p.5), *combinação* pode ser definida da seguinte forma: "Tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... **p** elementos, com 0 < **p** < **n**, **p** e **n** naturais; a ordem dos elementos não gera novas possibilidades."

Pessoa e Borba (2009, p. 116) e Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013, p. 609) citam a definição utilizada por Merayo (2001) quando, a partir de um conjunto formado por **m** elementos, define *combinação* de ordem **n** desses elementos como:

> [...] cada grupo formado por n elementos tomado dos m, tal que duas combinações se consideram distintas se diferem em algum de seus elementos. Nesta ordenação não influi a ordem de colocação, isto quer dizer que dois agrupamentos são iguais se contém os mesmos elementos, ainda que colocados em distinta ordem.

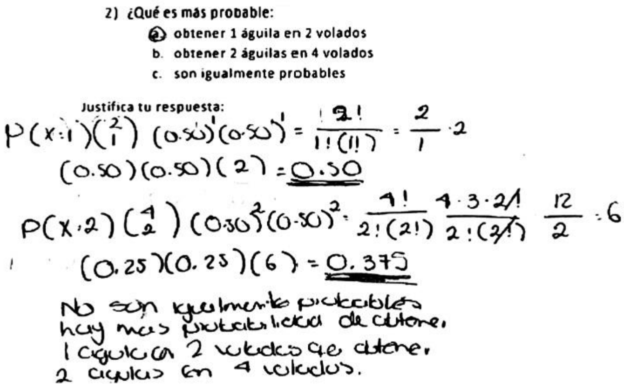
As manifestações do *panorama* formalista do conceito de *combinação simples* são vistas em séries mais avançadas do Ensino Básico, mais precisamente no Ensino Médio (AZEVEDO; BORBA, 2013; PESSOA; BORBA, 2009; 2010), o que sugere que o *panorama* tenha mais visibilidade nesse momento. Analisando a carga teórica e generalista da definição formal, sugerimos que a utilização exclusiva deste *panorama* pode acarretar a falta de compreensão por parte de estudantes, uma vez que essa definição se apresenta pronta e não reflete o entendimento dos alunos em cada etapa de sua construção. Como exemplo, Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013), em discussão sobre o que os alunos compreendiam dos conceitos de combinatória, perceberam que muitos os definiam de forma errada ou imprecisa.

2.4.2 Panorama Instrumental

Neste *panorama*, o conceito de *combinação* é concebido a partir do uso de fórmulas e é caracterizado pelo foco em procedimentos mecânicos de algoritmos. Este cenário é marcado, muitas vezes, por uma falta de preocupação com a compreensão do que está sendo desenvolvido (SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013). O que vemos neste *panorama* é a tentativa, tanto de alunos como de professores, de enquadrar as soluções dos problemas de combinação na fórmula: $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, onde n representa a quantidade de elementos do conjunto do qual se quer tomar p elementos distintos.

A *realização* de *combinação simples* como fórmula tem como propósito contar elementos em uma determinada situação sem ter que enumerá-los (PESSOA; BORBA, 2010; SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013). Manifestações deste panorama podem ser vistas em alguns estudos (LANDIN, SÁNCHEZ, 2010; SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013) como ilustrados nas Figuras 1 e 2, respectivamente.

Figura 1: Exemplo de utilização da fórmula de combinação simples



Fonte: Landín e Sánchez (2010, p. 611)

Figura 2: Interação discursiva entre professor e alunos

> Aluno L: *[...] ele foi buscando modos pra satisfazer uma resposta [...]. Na verdade ele não compreendeu a pergunta da questão. Tipo assim ele só queria colocar isso na fórmula. Os dados que ele tinha ele queria colocar na fórmula e dar uma resposta [...]*
>
> Professor I: *e porque você acha que o aluno faz isso?*
>
> Aluno L: *...ée...condicionado, a utilizar fórmulas...ele tem essa fórmula e ele tem alguns valores ele vai jogar na fórmula.*
>
> Prof. I: *A pergunta é: daqui há um ano ou menos vocês vão se formar. Tá certo? Como vocês vão ensinar Análise Combinatória?*
>
> Aluno B: *eu sinceramente, eu vou pegar o meu caderno do 3° ano e pegar um livro pra estudar... tentar passar pelo menos do mesmo jeito que a minha professora passou.*
>
> Aluno L: *E a gente pensa assim também, a gente só ensina o que a gente aprendeu. Você só vai ensinar aos alunos no nível que a gente aprendeu. Você não vai ensinar nada além.*

Fonte: Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013. p. 619)

Landin e Sánchez (2010) chamam a atenção para a utilização da fórmula de *combinação* pelos estudantes em soluções de problemas de distribuição binomial e probabilidade, sugerindo que o domínio sobre ela é item necessário para o sucesso nessas soluções. Dessa forma, conceber *combinação* através da fórmula não pode ser um passo descartável.

Corroborando a figura 2, Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013) trazem reflexões de que até mesmo os professores admitem não possuir os conceitos de combinatória construídos de maneira sólida e significativa e que optam por ensiná-los como um processo de aplicação de fórmulas prontas. Para os mesmos autores, as fórmulas existem para facilitar a contagem de elementos sem ter que listá-los; no entanto, conhecer apenas as fórmulas não garante sucesso na solução de problemas combinatórios.

Pessoa e Borba (2010) sublinham que problemas de *combinação* com números grandes – o que torna a enumeração dos casos impraticáveis – requerem um procedimento mais formal, ou seja, aplicação de fórmula. Ainda assim, as autoras trazem a preocupação pela maneira inadequada com que alunos utilizam essas fórmulas, pois isso evidencia um entendimento de que a aplicação da fórmula deve ser priorizada nas soluções de problemas de *combinação.*

Alves e Segadas (2012) em trabalho desenvolvido com alunos de graduação constataram que a utilização de fórmulas domina as tentativas de soluções de problemas de *combinação* e sugerem que a motivação disso está na ênfase que é dada na aplicação de fórmulas nas séries anteriores. A quantidade de soluções erradas que utilizam a via das fórmulas levaram-nos a concluir que, embora a utilização das fórmulas seja um caminho possível, nem sempre ele é feito de maneira eficaz (ALVES; SEGADAS, 2012).

A utilização da fórmula não deve ser um passo descartado no processo de discussão do conceito de *combinação*, uma vez que problemas com quantidades muito grandes requerem um processo mais instrumental (PESSOA; BORBA, 2010), mas deve ser considerado como ferramenta de apoio e não como elemento indispensável na solução de problemas. Os alunos precisam ser levados, antes, a compreender a fórmula em lugar de sua utilização de maneira mecânica/instrumental (SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013).

A forma de ensino por meio de aplicações diretas de fórmulas pode não contribuir para uma efetiva compreensão das relações matemáticas, criando, como consequência obstáculos à sua aprendizagem (PESSOA; BORBA, 2010; SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013).

2.4.3 Panorama Ilustrativo

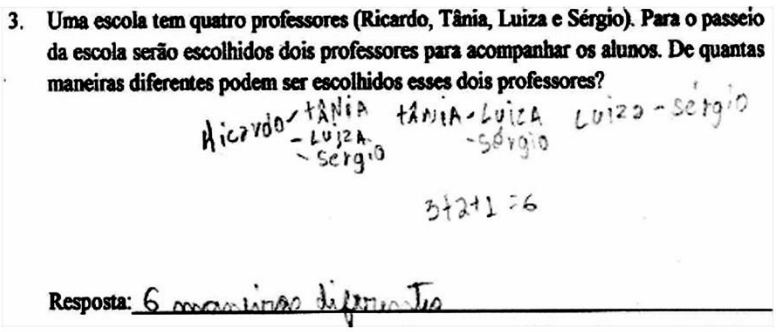
Neste *panorama*, o conceito de *combinação* é concebido a partir de diversas representações ilustrativas (diagrama de árvores ou árvore de possibilidades; desenhos; listagens; tabela; objetos concretos ou virtuais) e é caracterizado pelo foco em procedimentos visuais na busca de contagem dos elementos em questão. A ocorrência deste *panorama* é mais perceptível nas soluções de problemas com número pequeno de objetos a serem combinados e com alunos que estão iniciando sua trilha nos problemas combinatórios (PESSOA; BORBA, 2009; AZEVEDO; BORBA, 2013). As diversas *realizações* que compõem este *panorama* podem ser percebidas em diversos estudos (AZEVEDO; BORBA, 2013; SERRAZINA; RIBEIRO, 2012; SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013; PESSOA;

BORBA, 2009; GROENWALD; ZOCH NETO; HOMA, 2009; FERNANDES; CARVALHO; CARVALHO, 2010).

A *realização* de *combinação simples* como árvore das possibilidades tem como propósito servir como recurso útil à visualização da estrutura do problema de forma macro (AZEVEDO; BORBA, 2013).

Azevedo e Borba (2013) fazem uma discussão em torno das possibilidades de aprendizagens geradas a partir da utilização de árvores das possibilidades (diagrama de árvores) por alunos dos anos iniciais e trazem exemplo (Figura 3) de problema resolvido de maneira correta com utilização desse recurso. Concluem que “alunos que constroem árvore de possibilidades [...] avançam em seus raciocínios combinatórios”. (p. 137).

Figura 3: Exemplo da utilização da árvore de possibilidades



Fonte: Azevedo e Borba (2013, p. 133)

A exploração dessa *realização* pode levar à construção da regra de cálculo (AZEVEDO; BORBA, 2013), que podemos entender como fórmula. A árvore das possibilidades apresenta-se como uma boa estratégia de ensino que contribui para o desenvolvimento das ideias combinatórias (PESSOA; BORBA, 2010; AZEVEDO; BORBA, 2013).

Na *realização* de *combinação simples* como tabela, desenho ou listagem, o propósito é enumerar, representar e esgotar todas as possibilidades/combinações de escolha dos elementos em questão (SERRAZINA; RIBEIRO, 2012).

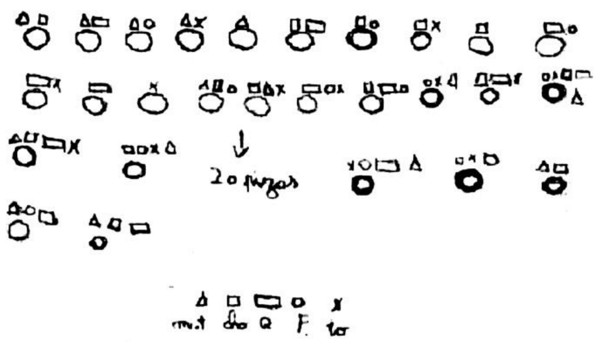
Serrazina e Ribeiro (2012), em trabalho que girou em torno da compreensão das interações que ocorrem em atividades de Resolução de Problemas capazes de desenvolver a capacidade de comunicação de alunos do 4º ano do Ensino Básico, trazem a utilização de desenhos (Figura 5) e tabelas (Figura 6) utilizadas nas discussões de um problema (Figura 4) de *combinação*.

Figura 4 - Problema

NA PIZARIA
Na pizaria do Sr. André há um anúncio:
"Mais de 20 pizas diferentes"
Sabendo que se fazem pizas até 5 ingredientes, digam se o anúncio é verdadeiro.

Fonte: Serrazina e Ribeiro (2012, p. 1374)

Figura 5 - Desenho utilizado por alunas na solução



Fonte: Serrazina e Ribeiro (2012, p. 1378)

Figura 6 - Tabela utilizada pela professora para apresentar a solução

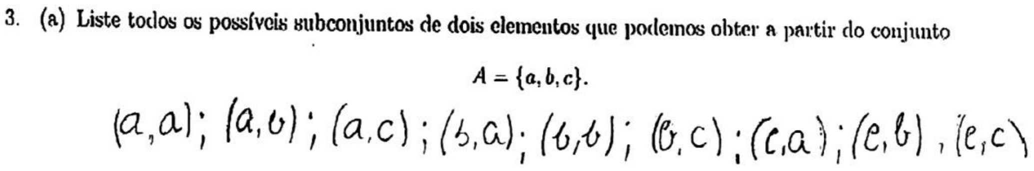
n.º de ingredientes	0	1	2	3	4	5	TOTAL
Combinações possíveis com os ingredientes A,B,C,D,E	MASSA ou BASE	A B C D E	AB AC AD AE BC BD BE CD CE DE	ABC ABD ABE ACD ACE ADE BCD BCE BDE CDE	ABCD ABCE ABDE BCDE ACDE	ABCDE	
n.º de pizas diferentes	1	5	10	10	5	1	32

Fonte: Serrazina e Ribeiro (2012, p. 1379)

Essas figuras apresentam procedimentos visuais diferentes para comunicar o conceito de *combinação simples* na solução de um mesmo problema.

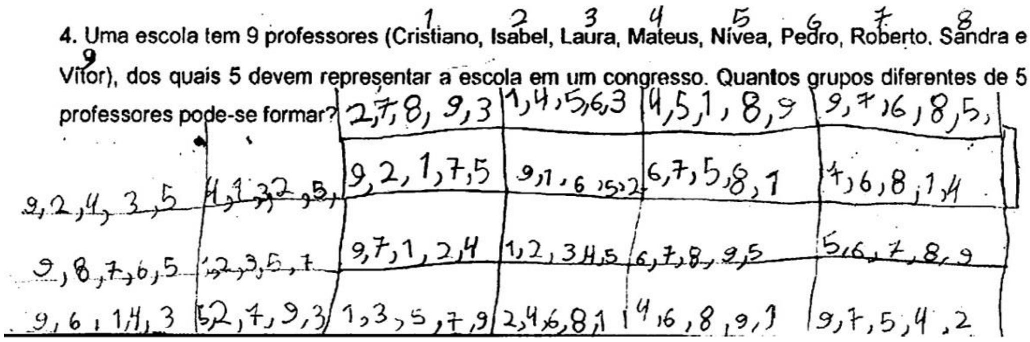
Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013) e Pessoa e Borba (2009) trazem o exemplo de estudantes que se utilizaram de listagem (Figuras 7 e 8) para apresentar as possibilidades de agrupamentos requeridos nos problemas em questão.

Figura 7 - Listagem utilizada por estudante na solução



Fonte: Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013, p. 623)

Figura 8 - Listagem utilizada por estudante na solução

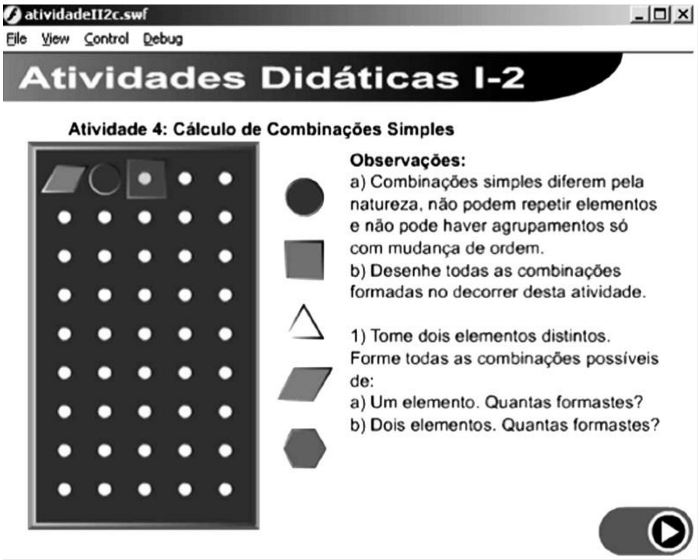


Fonte: Pessoa e Borba (2009, p. 135)

Ainda que a solução apresentada na Figura 7 extrapole o resultado correto e a da Figura 8 esteja incompleta, a listagem dos agrupamentos é uma forma bem comum de comunicação de conceito de *combinação*. Todas as formas de comunicação (listagem, desenho, tabela) apresentadas nas Figuras de 5 a 8 podem ser auxiliares na compreensão do conceito de *combinação simples,* antes de sua comunicação de maneira mais formal (PESSOA, BORBA, 2009).

Já a *realização* de *combinação simples* como objetos concretos ou virtuais consiste em manipular os objetos citados de modo a representar, total ou parcialmente, as possibilidades/combinações dos elementos presentes no problema (Figura 9).

Figura 9 - Ambiente de manipulação virtual



Fonte: Groenwald, Zoch Neto e Homa (2009, p. 45)

Acima, um exemplo de atividade de construção e recuperação do conceito de *combinação* apresentado em Groenwald, Zoch Neto e Homa (2009), em que é possível arrastar e soltar peças sobre um tabuleiro virtual visando à formação das *combinações* desejadas.

Como os problemas combinatórios são abertos a várias representações (FERNANDES; CARVALHO; CARVALHO, 2010), o *panorama* ilustrativo permite aos alunos que iniciam seu percurso com a técnica de contagem das *combinações simples* uma visão diferente de entendimento desse conceito. A partir daí, podem levantar subsídios para generalização do conceito. Porém, essas estratégias têm mais significância no início da trajetória de resoluções de problemas de combinação, quando a grandeza numérica envolvida tende a ser pequena (PESSOA; BORBA, 2009). Em outras palavras, esgotar todas as possibilidades das *combinações simples* com grandezas numéricas de valores elevados, utilizando-se das *realizações* descritas neste *panorama* tende a ser inviável.

2.4.4 Panorama Comparativo

No *panorama* comparativo, o conceito de *combinação* é concebido a partir do contraste com o conceito de *arranjo*. É ligado à questão de ordenação e refere-se aos problemas em que a ordem é irrelevante. Neste *panorama* – composto pelas *realizações:* comparação com arranjo e ordenação irrelevante – as discussões em torno da *combinação* surgem em paralelo ou posteriormente às ideias de *arranjo*, para que seja possível a comparação. Nesse sentido, "o que difere arranjo de combinação é a forma como agrupamos um conjunto dado, levando em consideração a ordem do agrupamento" (SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013, p. 621). Alguns exemplos de ocorrência deste *panorama* podem ser vistas nos trabalhos apresentados a seguir.

A *realização* de *combinação simples* como ordenação irrelevante ou comparação com arranjo tem como propósito contrastar essas duas técnicas de contagem, arranjos e combinações, bem como perceber que mudanças nas ordens dos elementos em questão não geram novas possibilidades (PESSOA; BORBA, 2010; SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013; VEGA; BORBA, 2014).

Pessoa e Borba (2010), em estudo realizado com alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio relatam as dificuldades dos alunos em diferenciar os problemas em que a ordenação é imprescindível ou não, ou seja, a diferença entre *arranjo* e *combinação* e sugerem que "este invariante é necessário ser considerado e os alunos precisam observar quais casos são idênticos e não podem ser contados mais de uma vez." (p. 18).

Situação semelhante é abordada em Borba, Pessoa e Rocha (2013) em trabalho realizado com professores e alunos para os quais um dos objetivos era analisar o que professores do Ensino Fundamental pensam sobre Combinatória. No desenvolvimento de uma das atividades, as autoras relatam que "As professoras reconheceram a natureza multiplicativa dos problemas, mas [...] acharam difícil diferenciar *arranjos* e *combinações* [...]" (BORBA; PESSOA; ROCHA, 2013, p. 904).

Em Groenwald, Zoch Neto e Homa (2009) é possível perceber (Figura 10) o conceito de *combinação* a partir de problemas onde a ordem não é relevante.

Figura 10 - Problemas de ordem irrelevante

2 Quantas comissões de 3 alunos podemos formar com um grupo de 5 alunos, sendo eles, Artur (A), Bruna (B), Carmen (C), Diva (D) e Eduardo (E)?

Note que as comissões (A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (B, C, A), (C, A, B), (C, B, A) formam a mesma comissão, pois a ordem não modifica o grupo. Então, para cada seis comissões formadas pelas mesmas pessoas, na realidade temos apenas uma.

Logo, as comissões serão:

(A, B, C), (A, B, D), (A, B, E), (A, C, D), (A, C, E), (A, D, E), (B, C, D), (B, C, E), (B, D, E), (C, D, E).

O total será de 10 comissões possíveis, formadas por três alunos em cada comissão, formando um agrupamento chamado Combinação simples.

Fonte: Groenwald, Zoch Neto e Homa (2009, p. 38)

Fernandes, Carvalho e Carvalho (2010) trazem exemplo de uma atividade (Quadro 3) em que o conceito de *combinação* foi mobilizado a partir do uso de objetos concretos em turma do 12º ano do Ensino Secundário em Portugal, cuja professora se chamava Margarida.

Quadro 3 - Ordenação irrelevante

Margarida: Ora, vamos fazer assim. Eu tenho aqui pessoas coloridas.

Aluno: Oh, professora, não me confunda.

Aluna: Interessa escolher as pessoas, não interessa a ordem.

Margarida: Não me confunda?! Eu vou te dar uma pessoa verde, uma branca e uma amarela, pode ser? Anda aqui explicar como é que o teu raciocínio bate certo. Tens aqui as pessoas, pega nelas. Pronto, então fazemos o seguinte, eu seguro naquelas que tu rejeitas. Neste momento eu tenho-as todas.

Aluno: Vou tirar AB.

Margarida: Para já, AB. Para ti contou um caso?

Aluno: Um caso.

Margarida: Um caso. E agora se a trocares de mão?

Aluno: E agora se eu a meter aí e tirar BA, é a mesma coisa.

Margarida: Por quê?

Aluna: São as mesmas cores.

Aluno: Mas são as mesmas pessoas, são duas maneiras diferentes de escolher as pessoas.

Aluna: Mas neste caso não interessa a ordem com que são tiradas.

Fonte: Fernandes, Carvalho e Carvalho (2010, p. 65).

Nos episódios ilustrados na Figura 10 e Quadro 3, é possível visualizar que a ordem de escolha dos elementos em um problema de *combinação simples* não gera novas possibilidades.

O *panorama* comparativo permite contrastar os dois conceitos que se apresentam como maiores problemas de diferenciação em AC (PESSOA; BORBA, 2010; SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013; GROENWALD; ZOCH NETO; HOMA, 2009), permitindo uma maior segurança no seu entendimento.

2.4.5 Modelando uma Matemática para o Ensino de combinação simples

Após descrição, exemplificação e discussão em torno das *vinculações* de cada *panorama*, propomos uma síntese (Quadro 4) de uma Matemática para o Ensino de *combinação simples* em AC.

Este quadro retoma e amplia o Quadro 2 em que, além de mencionar os panoramas, os descreve sinteticamente e apresenta as estratégias utilizadas em cada forma de comunicar o conceito de *combinação*.

Quadro 4 – Matemática para o Ensino de combinação simples

Se combinação simples é concebida no panorama...	**Breve descrição:**	**A estratégia é...**	**O resultado é interpretado como...**
Formalista	O conceito de *combinação* é comunicado a partir da definição matemática formal.	Compreender os invariantes (relações e propriedades) que compõem o conceito.	Uma quantidade de agrupamentos que satisfazem as características pré-estabelecidas.
Instrumental	O conceito de *combinação* é comunicado a partir do uso de fórmulas e é caracterizado pelo foco em procedimentos mecânicos de cálculos.	Substituir cada incógnita da expressão $C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ pela respectiva quantidade atribuída no problema em questão.	O valor obtido após procedimento do cálculo.
Ilustrativo	O conceito de *combinação* é comunicado a	Representar por meio de diagrama de árvores, desenhos,	A quantidade de agrupamentos que foram visualizados pela

	partir de diversas representações ilustrativas e é caracterizado pelo foco em procedimentos visuais.	listagens, tabelas ou objetos concretos/virtuais, todos – ou em parte - os elementos que serão contados.	estratégia escolhida.
Comparativo	O conceito de *combinação* é comunicado a partir do contraste com o conceito de *arranjo.*	Contar os subconjuntos indistintamente em relação à sua ordem e depois excluir todos os subconjuntos excedentes em que os elementos que os compõem se repetem.	A quantidade de subconjuntos restantes após as exclusões.

Fonte: Elaborado pelos autores

Os resultados apresentados no quadro anterior, sintetizados a partir de uma Revisão Sistemática de literatura, apresenta uma variabilidade de formas de mobilizar o conceito de *combinação simples,* presentes na tarefa de ensinar tal conceito.

2.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como explicitado anteriormente, o objetivo deste trabalho foi modelar uma Matemática para o Ensino do conceito de *combinação simples* a partir de uma Revisão Sistemática de literatura. Concebemos aqui a Matemática para o Ensino de *combinação simples* como um modelo teórico que apresenta a variabilidade de formas com que esse conceito pode ser comunicado. Para a construção do modelo, utilizamos a estrutura metodológica do Estudo do Conceito.

Sobre a importância desta variabilidade, Borba, Pessoa e Rocha (2013, p. 903) defendem que, para um mais amplo desenvolvimento das compreensões acerca da AC, "é necessário trabalhar diferentes tipos de problemas e estimular o uso de procedimentos variados [...] e representações simbólicas (utilizadas nos procedimento) devem ser apresentados aos estudantes".

Percebemos que com este trabalho é possível observar diversas formas de comunicar o conceito de *combinação simples,* diferentes daquelas que convergem apenas para o uso de fórmulas e apresentação da definição (SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013). Esse modelo oferece principalmente aos professores, outras possibilidades, inclusive a busca de relações entre os vários tipos de *realizações*, na busca do que Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013) nomeiam de compreensão relacional. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), “conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática” (BRASIL, 1997, p. 42).

Conhecer esse modelo também possibilita ao professor compreender e explorar as formas de comunicação que os alunos utilizam ao mobilizar o conceito de combinação simples. A partir desse reconhecimento, o professor pode aprofundar as discussões relacionadas à AC (PESSOA; BORBA, 2010), no nosso caso, relacionadas ao conceito de *combinação simples*. Esta ideia converge com o entendimento de que “a apresentação dos conceitos com mais de uma perspectiva didática favorece a aprendizagem [...], o que demonstra a importância da diversificação didática para um ensino de qualidade.” Groenwald, Zoch Neto e Homa (2009, p. 49).

Além dessas contribuições no campo profissional, este estudo também traz contribuições no campo da pesquisa em Educação Matemática. Como consideramos aqui, a Matemática mobilizada para o ensino do conceito de *combinação simples* pode ser observada em diversos contextos como livros didáticos, documentos oficiais de orientações, salas de aula, curso com professores, entre outros. Cada contexto oferece uma visão parcial da Matemática para o Ensino desse conceito em AC. Com este trabalho, oferecemos uma versão parcial do modelo no contexto das publicações científicas, que poderá ser ampliado e revisitado em pesquisas futuras.

REFERÊNCIAS

ADLER, Jill. Mathematics for teaching: what is it and why is it important that we talk about it? **Pythagoras:** University of the Witwatersrand, 2005.

ADLER, Jill et al. Working with learners mathematics: exploring key elements of mathematical knowledge for teaching. In: CONFERÊNCIA INTERNACIONAL GRUPO DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 29., 2005. **Anais**…Melbourne: PME, 2005.v.2. p. 1-8. Disponível em: < http://www.emis.ams.org/proceedings/PME29/PME29RRPapers/PME29Vol2AdlerEtAl.pdf > Acesso em: 01 ago. 2015.

ALVES, Renato; SEGADAS, Claudia. Sobre o ensino da análise combinatória: fatores a serem considerados, lacunas a serem evitadas. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 14, n. 3, p. 405-420. Canoas, 2012.

AZEVEDO, Juliana; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Combinatória: a construção de árvores de possibilidades por alunos dos anos iniciais com e sem uso de software.

ALEXANDRIA- Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Santa Catarina, v. 6, n. 2, p. 113-140, 2013.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização. In: **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática (XI ENEM).** Curitiba, 2013.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; PESSOA, Cristiane Azevêdo dos Santos; ROCHA, Cristiane de Arimatéa. Como estudantes e professores de anos iniciais pensam sobre problemas combinatórios. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 15, n. esp. p. 895-908, 2013.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa et al. O que dizem os estudos recentes sobre o raciocínio combinatório? **Anais do X Encontro Gaúcho de Educação Matemática.** Injuí, 2009.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática.** Brasília/DF. MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica (SEMTEC). **PCN+: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília/DF. MEC, 2002.

CORREA, Jane; OLIVEIRA, Gisele. A escrita do problema e sua resolução: o entendimento intuitivo acerca da combinatória. The written text of mathematical word problems and the success of solution. **Educar em Revista**, Curitiba, n. esp. 1, p. 77-91, 2011.

CORREIA, Paulo Ferreira.; FERNANDES, José Antônio. Estratégias intuitivas de alunos do 9º ano de escolaridade na resolução de problemas de combinatória. **Libro de Actas do Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia**, 2007.

DAVIS, Brent. Subtlety and complexity of mathematics teachers' disciplinary knowledge. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 12, Seoul, Korea, 2012. **Anais**… Seoul, Korea: ICME, 2012.

DAVIS, Brent; RENERT, Moshe. Mathematisc-for-Teaching as shared dynamic participation. **For the Learning of Mathematics**, v. 29, n. 3, p. 37-43, 2009.

___________________. Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge. **Educational Studies in Mathematics**, v. 82, n. 2, p. 245-265, Feb. 2012.

___________________. **The math teachers know:** profound understanding of emergent mathematics. New Yor: Routledge, 2014.

DAVIS, Brent; SIMMT, Elaine. Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. **Educational Studies in Mathematics,** v. 61, n. 3, p. 293-319, March, 2006.

FERNANDES, José António; CARVALHO, Bárbara do Alvar de; CARVALHO, Carolina Fernandes de. O trabalho colaborativo como meio de desenvolver o conhecimento didático de duas professoras em combinatória. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 12, n. 1, p. 43-74. São Paulo, 2010.

FERRAZ, Martha; BORBA, Rute; AZEVEDO, Juliana. Usando o software Árbol na construção de árvores de possibilidades para a resolução de problemas combinatórios. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática (X ENEM). Bahia**, 2010.

GAUTÉRIO, Vanda LB; RODRIGUES, Sheyla C. “Se tivessem me ensinado isso antes...”: um estudo sobre as aprendizagens docentes. **Zetetiké: Revista de Educação Matemática**, v. 20, n. 38, p. 125-150, 2013.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; ZOCH NETO, Lisiane; HOMA, Agostinho Iaqchan Ryokiti. Sequência didática com análise combinatória no padrão SCORM. **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 22, n. 34, p. 27-56, 2009.

LANDÍN, Pedro Rubén; SÁNCHEZ, Ernesto. Níveis de razonamiento probabilístico de estudantes de bachillerato frente a tareas de distribucíon binomial. **Educação Matemática Pesquisa,** v. 12, n. 3, p. 598-618. São Paulo, 2010.

LIMA, Elon Lages et al. **A matemática do ensino médio**. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. v.2 (Professor de Matemática).

LOPES, José Marcos; REZENDE, Josiane de Carvalho. Um novo jogo para o estudo do raciocínio combinatório e do cálculo de probabilidade. **Bolema**, p. 657-682, 2010.

MORGADO, AC de O. et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Impa/vitae, 1991.

MORO, Maria Lúcia Faria; SOARES, Maria Thereza Carneiro. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. ***Educação Matemática Pesquisa***, v. 8, p. 99-124, 2006.

MORO, Maria Lúcia Faria; SOARES, Maria Thereza Carneiro; FILHO, Jomar Antônio Camarinha. Raciocínio combinatório em problemas escolares de produto cartesiano. **ZETETIKÉ –** FE – Unicamp, v. 18, n. 33, 2010.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. Zetetiké, Campinas, SP, v. 17, n. 31 , p.105-150, jun. 2009.

___________________. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **EM TEIA Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, São Paulo, v. 1, n. 1, 2010.

PETTICREW, Mark; ROBERTS, Helen. **Sistematic reviews in the social sciences:** a practical guide. Oxford, Blackwell, 2006.

RAMOS, Altina; FARIA, Paulo M.; FARIA, Ádila. Revisão sistemática de literatura: contributo para a inovação na investigação em Ciências da Educação = Systematic review : contribution to innovation in Educational Research . **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v.14, n.41 , p. 17-36, jan. 2014.

ROCHA, Cristiane de Arimatéa; RUTE, Elizabete de Souza Rosa Borba. Reflexões de docentes sobre o ensino de combinatória: transitando entre conhecimento pedagógico e do conteúdo. **Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística**, n. 2, p. 555-562, 2013.

SABO, Ricardo Dezso. **Saberes docentes:** análise combinatória no ensino médio. 2010. 2010f. Dissertação (Mestrado acadêmico em Educação Matemática)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SAMPAIO, Rosana Ferreira; MANCINI, Marisa Cotta. Estudos de Revisão Sistemática: um guia para síntese criteriosa da evidência científica. **Revista Brasileira de Fisioterapia,** v. 11, n. 1, p. 83-89. São Carlos, 2007.

SANTOS, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão; GRANDO, Regina Célia. O Movimento das Ideias Probabilísticas no Ensino Fundamental: análise de um caso. **Bolema,** v. 24, n. 39, p. 561-584. Rio Claro, 2011.

SANTOS, José Plinio Oliveira; MELLO, Margarida Pinheiro; MURARI, Idani Theresinha Calzolari. **Introdução à análise combinatória**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

SANTOS-WAGNER, Vânia Maria Pereira; BORTOLOTI, Roberta D´Angela Menduni; FERREIRA, Juliana Rodrigues. Análise das resoluções corretas e erradas de combinatória de futuros professores de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 15, n. 3, p. 606-629, 2013.

SERRAZINA, Maria de Lurdes; RIBEIRO, Deolinda. As Interações na atividade de resolução de problemas e o desenvolvimento da capacidade de comunicar no ensino básico. **Bolema,** Rio Claro, v. 26, n. 44, p. 1367-1393, 2012.

TEIXEIRA, Leny RM et al. Problemas multiplicativos envolvendo combinatória: estratégias de resolução empregadas por alunos do Ensino Fundamental público. **Educar em Revista**, v. 1, p. 245-270, 2011.

VEGA, Danielle Avanço; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Etapas de escolha na resolução de produtos cartesianos, arranjos, combinações e permutações. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 7, n. 3, 2014.

VICTOR, Liz. Systematic reviewing. **Social research update,** Surrey, n. 54, 2008.

3. ARTIGO II – UMA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE COMBINAÇÃO SIMPLES A PARTIR DE UM ESTUDO DO CONCEITO COM PROFESSORES

RESUMO: Neste artigo, buscamos modelar uma Matemática para o Ensino de *combinação simples* a partir do Estudo do Conceito realizado com um grupo de professores. Para tanto, foi elaborado um estudo coletivo com professores atuantes nos níveis fundamental, médio e/ou superior com experiência no ensino de Análise Combinatória, no intuito de identificar formas de comunicar o conceito de *combinação simples* que utilizavam na mobilização desse tema. Foram identificados quatro *panoramas* de análise: formalista; instrumental; ilustrativo e comparativo. O estudo sugere um modelo que apresenta potencialidades para a formação de professores e para outras pesquisas no campo da Educação Matemática.

Palavras-chave: Matemática para o Ensino. Estudo do Conceito. Combinação Simples.

ABSTRACT: In this article, we intend to model a Mathematics for Teaching from the concept simple combination starting point of the Concept Study conducted with a group of teachers. To this end, we elaborated a collective study with teachers working in primary, secondary and / or higher with experience in teaching Combinatorial Analysis in order to identify ways to communicate the concept of simple combination that used to mobilize this issue. It was identified four analysis landscapes: formal; instrumental; illustrative and comparative. The study suggests a model that has potential for teacher training and for other research in the field of Mathematics Education.

Keywords: Mathematics for teaching. Concept Study. Simple Combination.

3.1 INTRODUÇÃO

Segundo Morgado, Carvalho e Carvalho (1991), a Análise Combinatória (AC) é um ramo em Matemática que estuda as estruturas e relações discretas, ocupando-se da existência e da contagem de subconjuntos de conjuntos finitos que satisfazem determinadas condições. Nessa contagem, não há necessidade de listar ou enumerar todos os elementos que compõem o referido subconjunto (PESSOA; BORBA, 2009). No Ensino Básico, essas estratégias de contagem são discutidas em termos de *produto cartesiano*[25]*, permutações simples*[26], *arranjos simples*[27] *e combinações simples*[28].

Estudos indicam que AC é um importante conteúdo a ser ensinado e aprendido em Matemática, pelo seu significado em práticas profissionais em outras áreas do conhecimento (Computação, Estatística, Genética, Engenharia, Gestão Empresarial), no cotidiano (MORO; SOARES, 2006; GROENWALD; ZOCH NETO; HOMA, 2009) e na própria Matemática (FERNANDES; CARVALHO; CARVALHO, 2010; AZEVEDO; BORBA, 2013). A AC apresenta-se como um dos ramos de maior complexidade para os alunos (GROENWALD; ZOCH NETO; HOMA, 2009). Essa problemática pode ter origem na forma com que ela vem sendo comumente abordada, e o que se vê, na maioria das vezes, são tentativas de enquadramento dos exercícios ou problemas em fórmulas e, em muitas vezes, de maneira inadequada (PESSOA; BORBA, 2010).

Entre todos os tipos de problemas de AC discutidos no Ensino Básico, os que envolvem o conceito[29] de *combinação simples* se evidenciam como os mais problemáticos em sua abordagem (ALVES; SEGADAS, 2012; PESSOA; BORBA, 2010; CORREA; OLIVEIRA, 2011). Uma das maiores dificuldades é encontrar formas de diferenciar as *combinações* dos *arranjos*, pois as mudanças na ordenação dos elementos nas *combinações* não geram novas possibilidades (PESSOA; BORBA, 2009; SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013). Inicialmente, essas constatações nos despertaram os seguintes questionamentos: O que os professores mobilizam do conceito de *combinação simples* no ensino? Há algo específico nessa ação?

Tais especificidades na ação do professor ao ensinar algum conceito em Matemática vêm sendo discutidas amplamente em termos de Matemática para o Ensino[30], as quais reconhecem a existência de uma Matemática mobilizada especificamente por professores ao ensinar – o que inclui abordagem de conceitos matemáticos – que se diferencia da Matemática

---

[25] Produto de medidas em que, a partir de dois ou mais conjuntos, são selecionados elementos de cada conjunto com o objetivo de gerar um novo conjunto cujos elementos são composições dos elementos dos conjuntos iniciais (BORBA, 2013).

[26] "Uma permutação de n objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses objetos, de modo que, se denominarmos P_n o número das permutações simples dos n objetos, então $P_n = n(n-1)(n-2)...1 = n!$" (SANTOS; MELLO; MURARI,2007, p. 44).

[27] "Arranjos simples de n elementos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e p é um número natural tal que $p \leq n$, são todos os grupos de p elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos p elementos que compõem cada grupo." (SANTOS; MELLO; MURARI,2007, p. 57).

[28] Discutiremos ao longo do texto.

[29] Mais adiante explicaremos o que entendemos por conceito matemático. Neste momento, leiam de forma intuitiva.

[30] Faremos uma maior discussão ao longo do texto.

mobilizada por outros profissionais (ADLER, 2005; DAVIS; SIMMT, 2006; DAVIS; RENERT, 2009, 2012; RIBEIRO, 2012). Como um exemplo dessa diferença, Ribeiro (2012) destaca a prática de matemáticos e de professores de Matemática. Embora ambos, por exemplo, precisem realizar análises de erros matemáticos, o foco no fazer do professor são os erros produzidos por outros, nesse caso, os alunos (RIBEIRO, 2012).

Entendemos que essa especificidade também perpassa pela variabilidade de formas de comunicar das quais o professor se utiliza no ensino de um determinado conceito. Embora não se refira à Matemática para o Ensino, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) recomendam as diversas possibilidades na comunicação em sala de aula pelo fazer do professor. O reconhecimento dessa heterogeneidade possibilita ao docente sustentar suas tomadas de decisões quanto a que caminhos e estratégias adotarem frente ao ensino (RANGEL; GIRALDO; MACULAN, 2014; RIBEIRO, 2013). No que se refere à AC, Pessoa e Borba (2010) e Fernandes, Carvalho e Carvalho (2010) corroboram o reconhecimento dessa variabilidade, quando sublinham a solução de problemas combinatórios por meio de diferentes formas.

Tomando o conceito de *combinação simples*, percebemos essa variabilidade na literatura, onde tal conceito é comunicado por meio de diagrama de árvores (PESSOA; BORBA, 2010; BORBA; PESSOA; ROCHA, 2013; AZEVEDO; BORBA, 2013), fórmula (LANDÍN; SANCHEZ, 2010; PESSOA; BORBA, 2010; ALVES; SEGADAS, 2012; SANTOS-WAGNER, BORTOLOTI; FERREIRA, 2013), tabela e desenho (SERRAZINA; RIBEIRO, 2012), listagem (PESSOA; BORBA, 2009; SERRAZINA; RIBEIRO, 2012), manipulação de objetos (GROENWALD; ZOCH NETO; HOMA, 2009) ou, ainda, sendo comparado aos *arranjos* (PESSOA; BORBA, 2010; BORBA, PESSOA; ROCHA, 2013).

Diante do exposto, nosso interesse neste estudo é mapear, a partir de uma investigação com professores, as diversas formas com as quais eles comunicam o conceito de *combinação simples* em sua tarefa de ensinar. Com o intuito de apresentar o nosso objetivo em termos mais específicos, faremos uma discussão sobre o que concebemos como Matemática para o Ensino e uma das formas – o Estudo do Conceito – que pode ser utilizada para modelá-la.

3.2 MATEMÁTICA PARA O ENSINO E O ESTUDO DO CONCEITO

Como mencionado anteriormente, a forma pela qual um professor faz uso da Matemática no ensino difere da forma como outros profissionais a utilizam em suas respectivas tarefas (ADLER, 2005; ADLER; DAVIS; KAZIMA; PARKER; WEBB, 2005;

BEDNARZ; PROULX, 2009; RIBEIRO, 2012). Essa especificidade que permeia a tarefa de ensinar do professor de Matemática vem sendo discutida em termos de Matemática para o Ensino (ADLER, 2005; DAVIS; SIMMT, 2006; DAVIS; RENERT, 2009, 2012, 2014).

Adler et al. (2005) marcam a Matemática para o Ensino como uma Matemática que, por característica própria, é produzida na prática de ensino e nela utilizada. Davis, Adler e Parker (2007), Bednarz e Proulx (2009) e Rangel, Giraldo e Maculan (2014) também reconheceram em seus trabalhos que existem especificidades para o ensino de Matemática e que contextos diferentes podem produzir diferentes Matemáticas para o Ensino, pois elas emergem com o trabalho pedagógico, no fazer do professor.

Segundo Davis e Renert (2014), Matemática para o Ensino está pautada na forma como o professor organiza as ações que compõem sua tarefa de ensinar, por exemplo, a organização e execução de uma aula. Assumiremos Matemática para o Ensino neste estudo como a Matemática específica que o professor mobiliza na sua tarefa de ensinar. Além disso, lançamos como proposta modelá-la teoricamente, ou seja, apresentá-la de forma sistematizada de modo que possamos identificar sua diversidade de *realizações*. Essas especificidades – aqui reconhecidas como Matemática para o Ensino – vêm sendo estudadas de formas variadas e em contextos variados (DAVIS; ADLER; PARKER, 2007), por exemplo, no estudo com professores.

Davis e Simmt (2006) e Davis e Renert (2009, 2012, 2014) propõem uma abordagem investigativa para suscitar tal Matemática para o Ensino, sustentada nas reflexões coletivas de professores. Essa abordagem investigativa é denominada de Estudo do Conceito (EC) (DAVIS; SIMMT, 2006; DAVIS; RENERT, 2009, 2012, 2014). Para eles, o EC pode ser visto como uma estrutura de colaboração em que professores interagem – apresentando, interpretando, confrontando, elaborando e reelaborando imagens, metáforas, analogias, modelos, exercícios – segundo seus entendimentos sobre um determinado conceito matemático selecionado por algum motivo.

O EC está estruturado em quatro ênfases principais: *realizations (realizações); landscapes (panoramas); entailments (vinculações); blends (misturas)*[31] (DAVIS; RENERT, 2012, 2014). Segundo eles, a opção pelo termo ênfase é atribuída ao fato de evitar uma hierarquia dos elementos presentes no EC, marcando possíveis simultaneidades entre eles. Caracterizaremos, a seguir, cada ênfase proposta neste trabalho, tomando por base os estudos de Davis e Renert (2009, 2014) e Davis (2012) com o conceito de multiplicação. Também

[31] A ênfase *misturas* não se manifestou em nosso estudo, por isso não a discutiremos aqui.

tomaremos o estudo de Rangel, Giraldo e Maculan (2014), os quais utilizaram a abordagem, para discutir o conceito de números racionais com um grupo de professores.

As *realizações* podem ser descritas como as diversas formas – definições, algoritmos, metáforas, imagens, aplicações, gestos – que o professor utiliza para comunicar um determinado conceito matemático (DAVIS, 2012; DAVIS; RENERT, 2014). Para os mesmos autores, as *realizações* não são fixas, podendo variar com grupos diferentes ou com a evolução do processo de compartilhamento; não são nem certas nem erradas, mas emergentes de um entendimento pessoal que surge na própria tarefa de ensinar. Vale a pena ressaltar que, ainda assim, existe uma estabilidade, um núcleo comum de *realizações* mobilizado por professores.

Os *panoramas* são estruturas interpretativas maiores, obtidas da lista de *realizações* (DAVIS; RENERT, 2009, 2014). Essas estruturas são entendidas aqui como as relações existentes entre as *realizações* que apresentam características semelhantes. Sintetizando, "o *panorama* é uma visão de macro nível, ao passo que uma *realização* é uma visão de micro nível, de um conceito"[32] (DAVIS; RENERT, 2014, p. 62, tradução nossa).

A ênfase *vinculações* busca identificar, descrever e refletir sobre as diferentes implicações e relevâncias imbricadas em cada uma das *realizações* de um determinado conceito (DAVIS; RENERT, 2009, 2014; DAVIS, 2012). No trabalho de Davis (2012), a intenção dessa ênfase, por exemplo, é examinar as possibilidades de entendimento da multiplicação como uma adição repetida.

Apesar da identificação de elementos que buscam caracterizar cada ênfase, é perceptível, na estrutura metodológica do EC, uma abertura interpretativa para as ênfases *panoramas* e *vinculações*. A constatação surge da própria análise dos autores que afirmam: "apenas a primeira ênfase poderia ser descrita como intencional em qualquer sentido estrutural. As outras são emergentes – inesperadas, não planejadas, decorrentes da partilha de interesses, saberes divergentes, e encontros acidentais"[33] (DAVIS; RENERT, 2009, p. 38).

Uma vez que apresentamos o EC, passamos agora a delimitar o nosso entendimento de "conceito matemático" neste estudo, para que os dados coletados e analisados como formas de comunicar o conceito de *combinação simples* fiquem claros. Tomaremos a definição de conceito matemático como uma combinação da palavra que indica o tema em discussão e seus símbolos, imagens, metáforas, analogias e outros recursos textuais reconhecidos como parte

[32]" *...a landscape is a macro-level map, whereas a realization is a micro-level snapshot, of a concept."*

[33] *"Only the first layer could be described as intentional in any structural sense. The others were emergent – unanticipated, unplanned, arising from shared interests, divergent knowings, and accidental encounters."*

da Matemática (DAVIS; RENERT, 2009), ou seja, é a reunião da palavra que indica o tema a ser discutido e todas as suas *realizações*. Portanto, o conceito matemático, ele mesmo, constitui-se na comunicação realizada e atrelada à palavra que o nomeia.

Considerando a discussão delineada até este ponto em temos de especificidades na tarefa de ensinar do professor – apresentadas como Matemática para o Ensino – e da variabilidade de formas de comunicar um conceito nessa tarefa e suas implicações – suscitadas a partir da estrutura do EC – podemos enunciar o nosso objetivo: modelar uma Matemática para o Ensino de *combinação simples* a partir do EC realizado com um grupo de professores. Este estudo – e, por consequência, seu modelo – justifica-se pelo fato de servir como subsídio para professores que ensinam AC, mais precisamente *combinação simples*, bem como para processos de formação de professores sobre esse conceito. Além disto, a elaboração do modelo supracitado pode fornecer à área da Educação Matemática elementos para o desenvolvimento de estudos futuros sobre o ensino e aprendizagem do conceito de *combinação simples*.

3.3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

De acordo com o objetivo deste estudo, entendemos a necessidade de uma pesquisa empírica compreensiva através do método qualitativo (CRESWELL, 2010: ROSA, 2010). Segundo Creswell (2010), o método qualitativo é um meio para explorar e entender o significado que os indivíduos ou grupos atribuem a um problema social ou humano.

Para a produção, coleta, categorização e análise de dados, utilizamos a estrutura do EC (DAVIS; SIMMT, 2006; DAVIS; RENERT, 2009, 2012, 2014; DAVIS, 2012; RANGEL; GIRALDO; MACULAN, 2014), em que a Matemática que o professor mobiliza foi capturada por tal estrutura. Para os mesmos autores, essa é uma estrutura colaborativa que envolve professores convidados a analisar e elaborar entendimentos sobre um determinado conceito.

Assim, focalizamos um grupo de professores trabalhando coletivamente, de maneira que, na interação entre/com eles pudemos identificar a variabilidade de formas do conceito de *combinação simples*. No EC, o papel do pesquisador consiste em "estruturar as tarefas que são significativas e apropriadas para os participantes e organizar ambientes de modo a permitir que os participantes e suas ideias possam interagir"[34] (DAVIS; SIMMT, 2006, p. 300, tradução nossa). Por conta disso, organizamos os encontros de tal forma que os

[34] *"Our principal role as researchers, then, is to structure tasks that are meaningful and appropriate to participants and to organize the settings in ways that allow participants and their ideas to interact."*

professores pudessem evidenciar as *realizações* utilizadas na discussão do conceito de *combinação simples*. Por isso propomos: construções e resoluções de problemas; rodas de discussões em que eram convidados a explanar interpretações do conceito; elaboração e apresentação de aulas; entre outras atividades.

Como ponto de partida para nossas discussões no grupo, utilizamos alguns problemas de *combinação simples* com o intuito de que o nome do conceito aparecesse. A partir daí lançamos a pergunta de partida: *O que é combinação?* Diante das respostas, que foram interpretadas como a ênfase das *realizações,* deu-se início à construção da lista pelos pesquisadores. O nosso papel foi incentivar os professores a explicitarem mais este conceito com perguntas do tipo: *O que mais? E daí? Como vocês falam sobre isso para os alunos? E quando eles não entendem quais estratégias vocês usam?*

Essas primeiras atividades foram as únicas pré-definidas, pois, como já foi dito, no EC apenas a primeira ênfase, *realizações*, pode ser estruturada intencionalmente. Para o registro das informações, utilizamos o diário de anotações dos pesquisadores, recolhimento de todo o material escrito produzido pelos participantes e o procedimento de gravações audiovisuais para posteriores análises. Essas gravações permitiram registrar ações dos participantes da pesquisa que não foram percebidas durante o processo. Além disso, foi solicitado que os participantes respondessem a um questionário[35] (Apêndice B) com intuito de melhor caracterizá-los.

Seguindo os pressupostos do EC, após a coleta das informações, a análise foi feita a partir da identificação e discussão de três ênfases[36]: *realizações, panoramas* e *vinculações.* Por fim, apresentamos uma Matemática para o Ensino de *combinação simples* a partir de um EC.

3.4 O CONTEXTO E OS PARTICIPANTES DA PESQUISA

Esta pesquisa teve como contexto de coleta de dados um grupo de professores que atuam nos níveis fundamental, médio e superior da cidade de Barreiras, localizada no Estado da Bahia. O grupo foi formado a partir de um curso de extensão promovido pelo primeiro autor deste artigo no *campus* do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA) da referida cidade.

[35] Listas de perguntas a serem respondidas pelos participantes do estudo (ROSA, 2010).
[36] Como dito anteriormente, a ênfase *misturas* não foi identificada neste estudo.

A formação do grupo por seus sujeitos levou em consideração critérios como: (1) todos eram professores de Matemática que tinham experiência no ensino de AC; (2) a heterogeneidade dos contextos onde trabalhavam/trabalharam – no nosso caso, foram escolhidos professores que atuassem em diferentes níveis de ensino; (3) tempos de docência diferentes. O grupo foi convidado a refletir coletivamente sobre o conceito de *combinação* em AC. O convite para o curso de extensão se estendeu à comunidade de professores do próprio IFBA e de outras escolas, municipais e estaduais, que ofertavam Ensino Fundamental e Médio.

O curso teve carga horária total de oitenta horas, divididas em quarenta horas de atividades presenciais e quarenta horas de atividades não presenciais. O grupo contou com a participação de seis professores, sendo um licenciando, os quais estão caracterizados na Tabela 1. No início do primeiro encontro, houve a apresentação da proposta, a consulta sobre a possibilidade de utilizarmos as informações geradas durante os encontros em pesquisa científica, o pedido de permissão para as gravações audiovisuais e o preenchimento do questionário de caracterização do participante. Após concordância, todos eles assinaram Termo de Consentimento Livre e Declarado (Apêndice A), e optaram pela utilização de pseudônimos na escrita do relatório de pesquisa.

Tabela 1 - Perfil dos professores participantes

IDENTIFICAÇÃO	FORMAÇÃO INICIAL	TEMPO DE DOCÊNCIA	NÍVEL DE ATUAÇÃO EM QUE TRABALHA OU TRABALHOU COM AC
Professor Alberto	Licenciatura em Matemática	32 anos	Fundamental
Professor Biano	Licenciatura em Matemática	15 anos	Médio
Professora Carla	Licenciatura em Matemática	12 anos	Médio e Superior
Professor Diogo	Licenciatura em Matemática	13 anos	Fundamental, Médio e Superior
Professora Elba	Licenciatura em Matemática	15 anos	Fundamental e Médio
Professor Fausto	Licenciatura em Matemática (em curso)	06 meses	Médio

Fonte: Elaborado pelos autores

Os dois primeiros encontros tiveram como propósito preparar o ambiente para o EC. Os participantes foram convidados a apresentar suas formas de entender AC, que culminou em discussões em torno das problemáticas no seu ensino. A maioria dos professores já evidenciava que uma das maiores problemáticas está em apresentar ao aluno os diferentes conceitos de AC. Com a concordância de todos, ficou definido que o nosso foco seria o conceito de *combinação simples*.

Esses dois encontros iniciais já indicavam que os professores estavam bastante à vontade no ambiente e eram receptíveis às potencialidades das discussões e reflexões coletivas, fundamentais para a estrutura metodológica escolhida. Dessa forma, entendemos que o ambiente se encontrava pronto para o início do EC, que ocorreu a partir do terceiro encontro. Seguimos os pressupostos da nossa abordagem metodológica, gerando as informações que transformamos em dados e submetemos à análise, as quais serão apresentadas e discutidas na próxima seção.

3.5 AS ÊNFASES DO NOSSO ESTUDO DO CONCEITO

Como dito anteriormente, das quatro ênfases atribuídas ao Estudo do Conceito (EC) (DAVIS; RENERT, 2009, 2014), conseguimos identificar três no nosso estudo: *realizações*, *panoramas* e *vinculações*. Embora não tenha ocorrido uma sucessão temporal linear entre as ênfases – algumas *realizações*, por exemplo, emergiram nos últimos encontros – nós as analisaremos em dois grandes blocos, buscando as possíveis conexões entre elas. Referente à temporalidade não linear, a situação corrobora o ponto sublinhado por Davis e Renert (2012, 2014) e Rangel, Giraldo e Maculan (2014), de que as ênfases não são hierárquicas e podem ocorrer simultaneamente.

3.5.1 O início do estudo

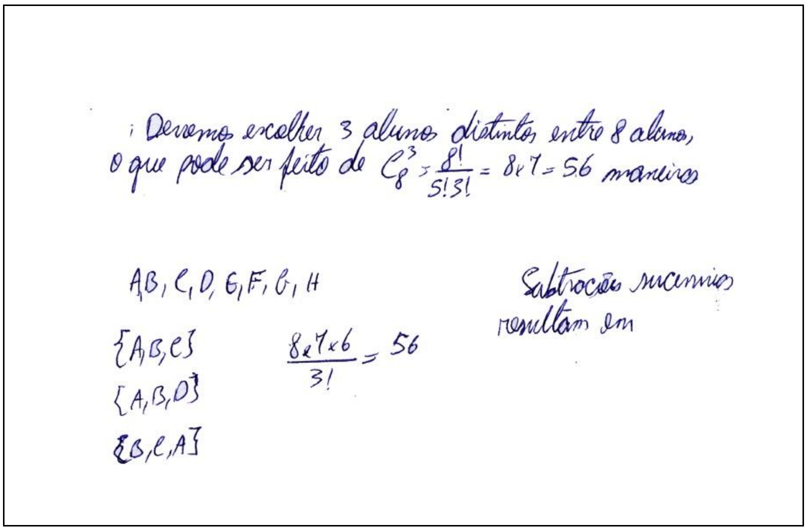
No terceiro encontro, com o intuito de lançar a pergunta diretriz (DAVIS; SIMMT, 2006; DAVIS; RENERT, 2009) para o início do EC, convidamos os participantes a buscarem solução do seguinte problema:

Figura 1 – Problema motivador

Em uma sala de aula há 8 alunos. De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos três alunos para representar a turma?

Durante as discussões com o intuito de resolver o problema (Figura 1) em que uma variabilidade de *realizações* já emergia, o professor Fausto foi convidado a apresentar sua solução na lousa (Figura 2), para o que contou com a participação dos demais.

Figura 2 – Solução do professor Fausto para o problema motivador



Fonte: Registros escritos do Professor Fausto

Em sua apresentação, ele explicou: "*O que eu estou fazendo na questão é pegando um conjunto de 8 elementos e pegando 3 elementos lá de dentro*". A visualização da solução e a fala do professor já nos permitia perceber o aparecimento das noções de *combinação simples* e suas primeiras formas de *realizações.* O grupo evidenciou que o problema poderia ser resolvido de várias maneiras, o que referenciava a existência de outras formas de *realizações.* Nessas discussões, a seguinte intervenção nos permitiu lançar a pergunta diretriz.

> Professor Diogo: Como nesse caso aqui ele diz que você tem lá: quantas maneiras diferentes eu posso escolher 3. Aí, você tem 8, 7, 6 (multiplicação). Porém, se eu pegar esses 3 aqui ou esses 3 aqui (indicando os subconjuntos {A, B, C} e {B, C, A}) não vai fazer diferença na formação do grupo. E é aí, como não tem diferença, você tem que lembrar de fazer a divisão pela permutação dos 3. Que é o caso que depois vai se definir a *combinação*.

Com a explicação do professor Diogo, indagamos o professor Fausto sobre a fórmula que havia sido utilizada na solução e sua resposta foi de que se tratava da fórmula de *combinação simples.* Nesse momento, lançamos a pergunta diretriz para o grupo: "O que é *combinação*?". As respostas iniciais foram pautadas na definição formal, na construção de subconjuntos. Essas manifestações são chamadas por Davis e Renert (2009) de definições bem ensaiadas.

Como nosso intuito era ampliar entendimentos e mapear as diversas formas que podemos utilizar para comunicar o conceito de *combinação simples*, elaboramos algumas atividades e solicitamos outras dos professores participantes. Dentre essas atividades – que contou com resoluções de problemas, elaboração e execução de uma proposta de aula – requisitamos a elaboração de uma lista com todas as possíveis maneiras que retratassem como esse conceito era introduzido, retomado, aplicado, e/ou elaborado no nível de ensino em que cada um atuava.

A análise de todas essas atividades teve como resultado uma lista – elaborada pelos autores – que chamamos de *realizações* do conceito de *combinação simples* a ser apresentada na próxima seção. Essas *realizações* foram caracterizadas em termos de descrições, exemplificações, convergências, implicações e relevâncias – que nos permitiram configurar os *panoramas* e *vinculações*, ao longo dos encontros.

3.5.2 Realizações

Retomando as *realizações* como as diversas formas (definições, algoritmos, analogias, metáforas, imagens, aplicações, gestos) de que o professor se utiliza para comunicar certo conceito matemático na sua tarefa de ensinar (DAVIS; RENERT, 2009, 2014), iniciamos seu processo de identificação no contexto coletivo com professores. Como Davis e Renert (2012), nosso interesse é analisar a *realização* como ela emerge das tarefas de cada professor e na interação com seus pares.

Não tivemos o intuito de elaborar julgamento de certo ou errado para cada *realização* e à medida que cada *realização* era identificada, discussões em torno de suas implicações, potencialidades e limitações eram elaboradas. Essas discussões realizadas coletivamente apresentaram um bom entrosamento entre os participantes, requisito necessário para o EC. Além disso, a heterogeneidade dos componentes, principalmente no quesito nível de ensino em que atua, contribuiu para discussões bastante produtivas. A lista construída a partir de nossas análises das atividades desenvolvidas no curso é apresentada no Quadro 1.

Quadro 1 – Lista de *realizações* resultante das análises.

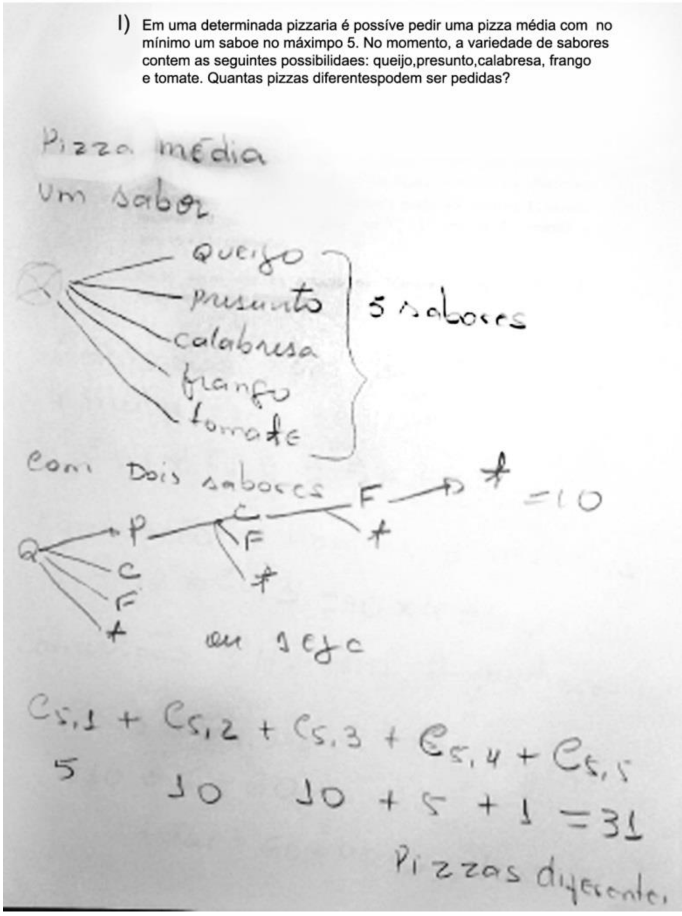
1) Diagrama de árvores.
2) Definição formal.
3) Listagem dos agrupamentos.
4) Fórmula.
5) Ordenação irrelevante dos elementos.

6) Contagem dos agrupamentos usando modelos concretos.
7) Comparação com arranjo.

Fonte: Elaborada pelo autor

Os diagramas de árvore apareceram em diversos momentos durante as sessões com os professores. Como ilustração, trazemos a solução (Figura 3) de um problema proposto por um dos participantes. Observamos que a utilização do diagrama pela professora Elba é feita no intuito de organizar e ilustrar os agrupamentos que ele está considerando como solução.

Figura 3 – *Realização*: diagrama de árvores



Fonte: Registros da Professora Elba

Os professores ainda enfatizaram que defendem a introdução ao conceito, utilizando o diagrama de árvores por tornar a solução mais clara:

> Professor Fausto: Porque é algo mais claro. Quando você vai começar, você vai começar com problemas que envolvem valores pequenos. Então, você começa desenhando (diagrama) e consegue contar um por um no diagrama de árvores. Você conta a quantidade de possibilidades para cada uma das escolhas. Então, fica bem mais claro.

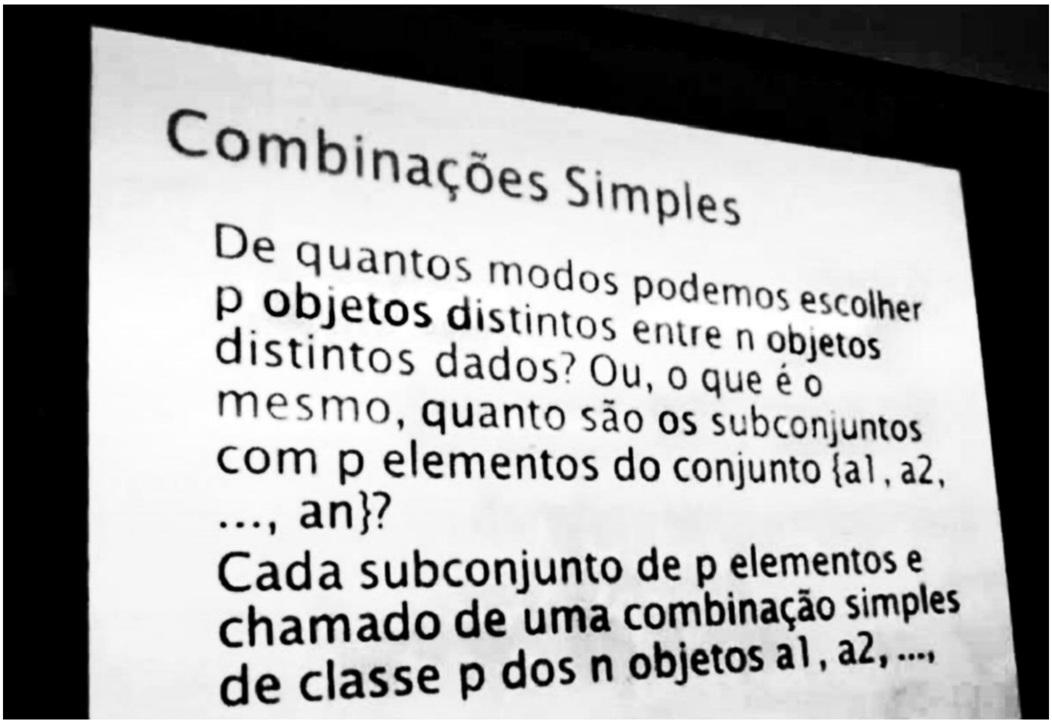
Tal depoimento contribuiu para a caracterização desse item. Assim, a *realização* de *combinação simples* como diagrama de árvores tem como propósito ilustrar a composição da solução do problema, torná-la mais clara e organizada, possibilitando a visualização da solução.

Outra forma de *realizar* observada foi a definição formal. Ela emergiu nas respostas à pergunta diretriz e em uma atividade em que foram sugeridos dois integrantes do grupo para elaboração e execução de um plano de aula. Na resposta à pergunta de partida, um dos participantes explana:

> Professora Elba: A combinação é formar subconjuntos de um conjunto respeitando determinadas condições... Condições essas que cada combinação todos os elementos tem a mesma natureza.

Já na atividade da aula, outro participante traz uma definição (Figura 4) de forma escrita.

Figura 4 – *Realização*: definição formal

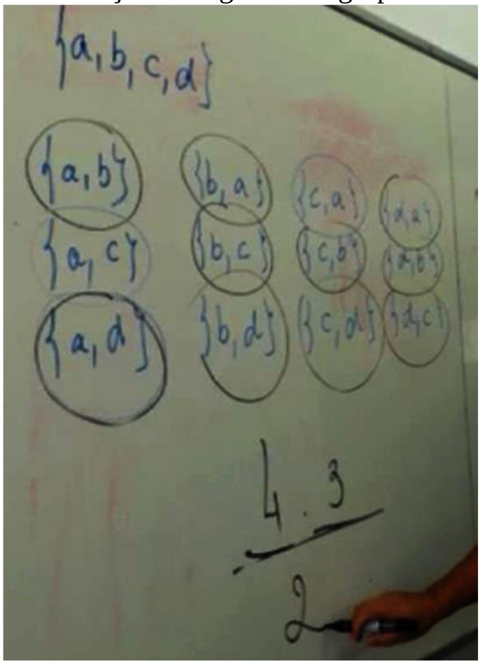


Fonte: Registros do Professor Fausto

Nesses dois episódios e em todas as manifestações deste item, evidenciou-se uma preocupação com uma característica própria dos agrupamentos que podem ou não ser considerados *combinações*. Dessa forma, na *realização* de *combinação simples* como definição formal, o propósito é a caracterização na formação dos agrupamentos a serem contados, apresentando as relações e propriedades que precisam ser verificadas.

A *realização* como listagem dos agrupamentos aparece em dois contextos durante os encontros: nas soluções de problemas com um número pequeno de elementos e na execução de uma aula do professor Diogo (Figura 5).

Figura 5 – *Realização*: listagem dos agrupamentos



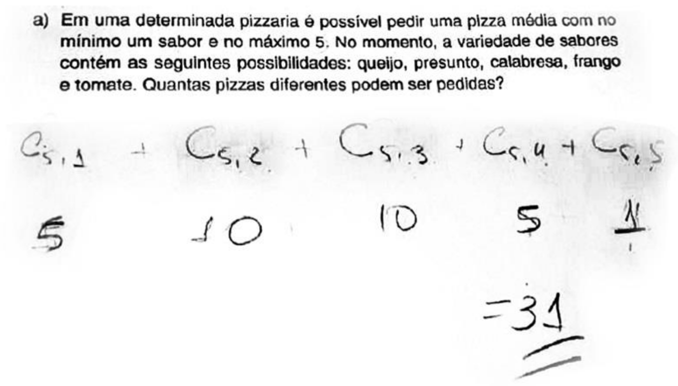
Fonte: Registros do Professor Diogo

Durante a explanação, ele indica que estava repetindo uma aula que havia dado em sua turma para introduzir o conceito e diz: “Eu peguei separadinho um conjunto menor {a, b, c, d} e pedi que fizessem subconjuntos de 2”. O próprio professor apresentou uma possível solução (Figura 5) para o problema listando os agrupamentos.

Observamos que a *realização* de *combinação simples* como listagem dos agrupamentos tem como característica a enumeração de todos os agrupamentos válidos no problema.

A fórmula de *combinação simples* (Figura 6) também emergiu como forma de *realização* do conceito, principalmente nas soluções de professores que buscavam estratégias mais rápidas de solução.

Figura 6 – *Realização*: fórmula



Fonte: Registros da Professora Carla

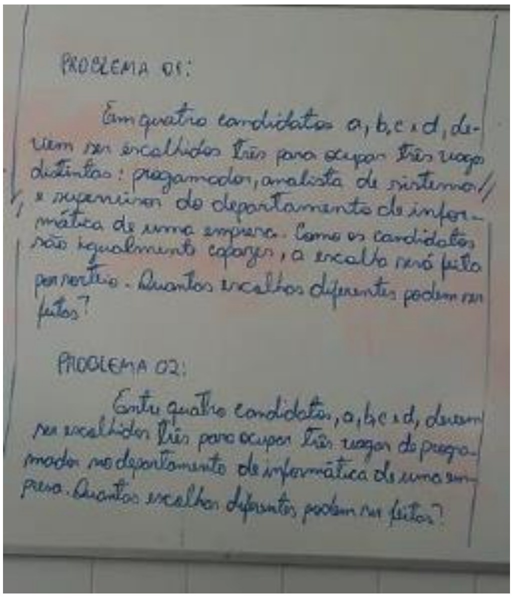
Observamos nesta e nas outras ocorrências que a *realização* desse conceito, partindo de fórmula, tem como característica principal permitir a contagem dos agrupamentos em questão, sem a necessidade da enumeração.

A irrelevância da ordenação dos objetos que compõem os agrupamentos das *combinações simples* também foi identificada como uma forma de *realizar* esse conceito. O diálogo entre dois professores participantes sobre a implicação de alterar a ordem dos elementos torna isso evidente:

> Professora Elba: Essa combinação, se eu mudar a ordem dos elementos vai gerar outra combinação? *Não!* Aí eu fiquei falando de ordem e sem ordem, pra depois chegar na definição.
>
> Professora Carla: Eu geralmente uso 5 nomes de alunos da sala mesmo. Vamos pegar esses 5 alunos e vamos fazer duplas. Se a gente for fazer dupla para apresentação de trabalho, altera se eu pegar João e Pedro ou se eu pegar Pedro e João? *Não!*

O diálogo contribuiu para inferirmos que a *realização* de *combinação simples* como ordenação irrelevante dos elementos tem como objetivo comunicar que mudanças nas ordens dos elementos que compõem os agrupamentos das *combinações simples* não geram novas possibilidades. Outra forma de *realização* observada no curso e que se aproxima de ordenação irrelevante foi a comparação com arranjo. Em um dos episódios em que esta realização emergiu (Figura 7), um dos professores participantes apresentou uma sequência com dois problemas, sendo o primeiro referente a *arranjo* e o segundo à *combinação*.

Figura 7 – *Realização*: Comparação com arranjo



Fonte: Registros do Professor Fausto

Na sequência da atividade proposta, o professor explica que o intuito desses dois problemas é o de que os alunos percebam as *combinações* a partir das diferenças em relação aos *arranjos*. Observamos, por episódios similares a esse, que a *realização* de *combinação simples* como comparação com arranjo tem por característica possibilitar o contraste das duas técnicas de contagem, *arranjos* e *combinações*.

Para essa *realização*, é imprescindível a discussão anterior dos *arranjos*, para que seja possível a comparação, que, por fim, surgiu da solução de um problema que tinha como objetivo formar uma junta médica, por intermédio dos modelos concretos (Figura 8), em que o professor manipulava os objetos para comunicar e ilustrar os agrupamentos que satisfaziam ou não a solução do problema.

Figura 8 – *Realização*: contagem dos agrupamentos usando modelos concretos

Fonte: Professor Fausto

Esse episódio nos permitiu perceber que a *realização* do conceito de *combinação simples* por via da contagem dos agrupamentos usando modelos concretos tem por característica, além da visualização, a manipulação dos elementos com o intuito de formar os agrupamentos desejados.

Entendemos que essa lista de *realizações* representa uma variabilidade de formas de comunicar um mesmo conceito, em que não há a intenção de julgar qualquer um dos itens como certo ou errado, mas apenas como adaptáveis ao contexto em que se constroem as discussões, principalmente naqueles de salas de aulas dos diferentes níveis de ensino.

Nessa direção, Pessoa e Borba (2010, p. 1) indicam que existe a "necessidade de serem considerados em sala de aula os variados significados, distintas relações e propriedades e diversificadas representações simbólicas que compõem as situações combinatórias".

Segundo Rangel, Giraldo e Maculan (2014), considerando as especificidades de cada contexto de ensino, reconhecer as relevâncias de cada uma das *realizações* pode contribuir para elaboração de diferentes estratégias no modo de ensinar. O objetivo da lista é possibilitar a percepção da diversidade de formas que temos para comunicar o conceito de *combinação simples,* na tarefa de ensinar AC, para que possamos conhecer e reconhecer as variabilidades de que poderemos dispor.

3.5.3 Panoramas e Vinculações

Retomando nosso entendimento de que a Matemática para o Ensino busca identificar e modelar de forma teórica a diversidade de *realizações* que professores podem mobilizar na tarefa de ensinar Matemática, no nosso caso o conceito de *combinação simples,* apresentamos ao final desta seção um modelo dessa Matemática (Quadro 2).

Partindo do pressuposto de que os *panoramas* são estruturados com visão de macro nível orientados pela lista de *realizações*, ampliamos a visão sobre tais *realizações*, categorizando os *panoramas* com suas respectivas composições e descrições. As composições dos *panoramas* consideram as características semelhantes de algumas *realizações* que permitiram organizá-las em uma única categoria. Retomando *vinculações* como implicações e relevâncias das diferentes formas de *realizações*, também apresentamos nesta seção uma discussão em torno dessas *vinculações.*

O *panorama* formalista, ilustrado pela *realização* definição formal, é caracterizado em termos de uma generalização da contagem de elementos de um dado subconjunto que possuem características definidas. Dante (2010, p. 286) apresenta que “combinações simples de n elementos tomados **p** a **p** ($p \leq n$) são subconjuntos com exatamente **p** elementos que se podem formar com os **n** elementos dados”. A relevância deste *panorama* repousa na necessidade de saber o que é o conceito visto na Matemática formal, mas ressaltamos que a sua comunicação por este *panorama* requer entendimentos de outros conceitos matemáticos. A definição formal de *combinação simples* mobiliza outros conceitos como subconjuntos.

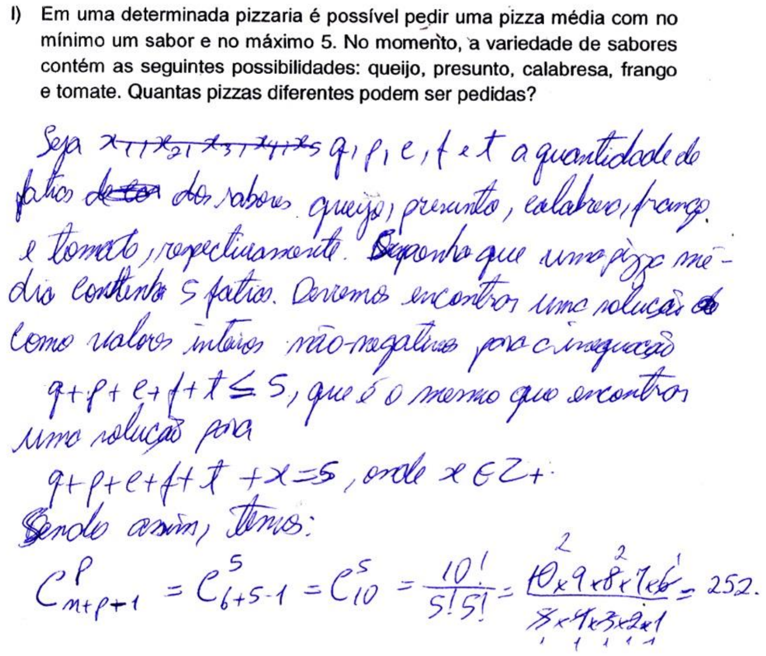
Este *panorama* manifesta-se na literatura considerada neste estudo (PESSOA; BORBA, 2010; SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013). Embora não canalizem seu foco para uma discussão em termos de suas implicações e relevâncias, Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013) indicam que o mais comum são as definições desse conceito de forma imprecisa ou incompleta, situação que pode ocorrer devido à carga generalista mobilizada na definição formal.

Comunicar o conceito de *combinação simples* a partir deste *panorama* implica o reconhecimento da teoria de subconjuntos, como composição e propriedades. É necessário, por exemplo, reconhecer que o subconjunto {a, b, c} do conjunto {a, b, c, d} é igual ao subconjunto {b, c, a} do mesmo conjunto, ou seja, as *combinações* somente serão diferentes pela natureza dos elementos que compõem o agrupamento.

O *panorama* instrumental, ilustrado pela *realização* fórmula, é caracterizado pelo procedimento instrumental/mecânico na busca de soluções através de cálculos utilizando a fórmula: $C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, em que *n* representa a quantidade de elementos do conjunto do qual se quer tomar *p* elementos distintos. Mobilizar o conceito de *combinação simples* por meio de sua fórmula pode ser necessário para soluções de problemas em outros ramos da Matemática que têm AC como pré-requisito, a exemplo de Estatística e Probabilidade (LANDÍN; SANCHEZ, 2010), mas isso precisa ser feito de maneira adequada (PESSOA; BORBA, 2010).

Para Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013), as fórmulas têm por objetivo facilitar a contagem dos agrupamentos sem a necessidade de enumerá-los. Percebe-se que a utilização de fórmulas é a maneira mais comum utilizada nas soluções de problemas de *combinação*, mas nem sempre isso é feito de forma correta (ALVES; SEGADAS, 2012). A tentativa de enquadrar as soluções de problemas combinatórios na aplicação de fórmulas ainda é comum (Figura 9), e foi identificada na tentativa de solução de um dos professores.

Figura 9 – Solução imprecisa enquadrada na aplicação de fórmula



I) Em uma determinada pizzaria é possível pedir uma pizza média com no mínimo um sabor e no máximo 5. No momento, a variedade de sabores contém as seguintes possibilidades: queijo, presunto, calabresa, frango e tomate. Quantas pizzas diferentes podem ser pedidas?

Seja ~~x_1, x_2, x_3, x_4, x_5~~ q, p, c, f e t a quantidade de fatias ~~de ca~~ dos sabores queijo, presunto, calabresa, frango e tomate, respectivamente. Suponha que uma pizza média contenha 5 fatias. Devemos encontrar uma solução com valores inteiros não-negativos para a inequação

$q+p+c+f+t \leq 5$, que é o mesmo que encontrar uma solução para

$q+p+c+f+t+x=5$, onde $x \in \mathbb{Z}_+$.

Sendo assim, temos:

$$C^{p}_{m+p+1} = C^{5}_{6+5-1} = C^{5}_{10} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 252.$$

Fonte: Registros do Professor Fausto

Observamos nessa tentativa de solução do problema pelo professor Fausto que os agrupamentos válidos foram contados mais de uma vez. Segundo Pessoa e Borba (2010), a utilização da fórmula não pode ser desconsiderada no processo de comunicação do conceito de *combinação*, uma vez que problemas com um número muito grande de elementos requerem um processo mais instrumental. Sugerimos que a maneira com que a fórmula é introduzida na comunicação precisa ser cuidadosa.

O *panorama* ilustrativo, mostrado pelas *realizações* diagrama de árvores, listagem dos agrupamentos e contagem dos agrupamentos usando modelos concretos, é comunicado a partir delas, sendo sua característica principal permitir a visualização dos agrupamentos a serem contados em determinada situação. Os professores mostraram-se bem à vontade com a sua utilização, defendendo, inclusive, que as discussões em torno de *combinações simples* deveriam sempre começar por ele.

Isso é corroborado pela literatura em AC estudada neste trabalho, que traz as potencialidades do uso do que chamamos de *panorama* ilustrativo. Essas ilustrações, simultâneas ou não, contribuem para o desenvolvimento combinatório do indivíduo (PESSOA; BORBA, 2010; AZEVEDO; BORBA, 2013) e auxiliam na compreensão do conceito, precedendo sua comunicação de maneira mais formal (PESSOA; BORBA, 2009).

Percebemos, como pudemos ver na Figura 3, que a exploração deste *panorama* torna a compreensão dos problemas iniciais de *combinação* mais claros, pois é possível contar visualmente os agrupamentos que se estão formando, evitando as rotineiras repetições. Essas potencialidades tornam o *panorama* ilustrativo necessário na compreensão do conceito, mas algumas limitações, como resolver um problema com número muito grande de elementos, sugerem que apenas ele não é suficiente.

O *panorama* comparativo, ilustrado pelas *realizações* ordenação irrelevante dos elementos e comparação com arranjo, é caracterizado pelo contraste com o conceito de *arranjo* que, por sua vez, difere das *combinações* devido às questões da ordenação dos seus elementos serem irrelevantes. Fica evidente que a ocorrência deste *panorama* está condicionada a uma discussão prévia da estratégia de contagem dos *arranjos*. Como em Borba, Pessoa e Rocha (2013), os professores evidenciaram a diferenciação dos problemas com ordem relevante e irrelevante como uma das maiores dificuldades para apresentar ao aluno o conceito de *combinação simples*.

O contraste entre esses dois conceitos apresenta-se como uma das maiores dificuldades em AC (PESSOA; BORBA, 2010; SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013; GROENWALD; ZOCH NETO; HOMA, 2009) que é a de conseguir comunicar, quando a ordenação dos elementos que compõem o agrupamento importa ou não. Este *panorama*, ao comunicar *combinação simples* em contraponto com os arranjos, permite um caminho mais preciso na sua diferenciação.

Como o objetivo deste trabalho foi modelar uma Matemática para o Ensino de *combinação simples* a partir do EC, realizado com um grupo de professores, apresentamos uma síntese (Quadro 2) do que foi observado e analisado no curso com os professores e que traz suas *realizações*, *panoramas*, *vinculações* e estratégias utilizadas.

Quadro 2 – Modelo

Panorama	**Realizações originárias**	**Breve descrição**	**Nível de ensino com maior ocorrência**[37]	**A estratégia utilizada é...**	**O resultado é interpretado como...**
Formalista	Definição formal	O conceito de *combinação* é caracterizado em termos de uma generalização da contagem de	Ensino Médio e Superior.	Compreender as relações e propriedades que validam o agrupamento como *combinação simples*.	A quantidade de agrupamentos que satisfazem as características pré-estabelecidas.

[37] Identificados pelos próprios professores de diferentes níveis de ensino que compunham o grupo.

		elementos de um dado subconjunto os quais possuem características definidas.			
Instrumental	Fórmula	O conceito de *combinação* é comunicado a partir do uso de fórmulas e a característica principal está no procedimento instrumental/mecânico na busca de soluções através de cálculos, pela fórmula: $C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, em que n representa a quantidade de elementos do conjunto do qual se quer tomar p elementos distintos.	Ensino Médio e Superior.	Trabalhar com a substituição de n e p da expressão $C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ pelos respectivos valores atribuídos a eles no problema em questão.	O valor obtido após procedimento de substituição e cálculo.
Ilustrativo	Diagrama de árvores; Listagem dos agrupamentos; Contagem dos agrupamentos usando modelos concretos.	O conceito de *combinação* é comunicado a partir de diversas ilustrações e sua característica principal é permitir a visualização dos agrupamentos a serem contados em determinada situação.	Ensino Fundamental e Médio.	Representar por meio de diagrama de árvores, desenhos, listagens, tabelas ou objetos concretos/virtuais, todos – ou em parte – os elementos que serão contados.	A quantidade de agrupamentos que foram visualizados pela(s) *realização/realizações* escolhida(s).
Comparativo	Ordenação irrelevante dos elementos; Comparação com arranjo.	O conceito de *combinação* é concebido a partir do contraste com o conceito de *arranjo* que, por sua vez, difere das *combinações* devido às questões da ordenação de os seus elementos ser irrelevante.	Ensino Fundamental e Médio.	Contagem de todos os subconjuntos com a quantidade de elementos requeridos no problema, para posterior exclusão daqueles que possuem elementos repetidos, mas em ordens diferentes.	A quantidade de subconjuntos restantes após as exclusões.

Fonte: Elaborado pelos autores

O resultado apresentado na tabela anterior, descrito a partir das discussões com o grupo de professores no Estudo do Conceito de *combinação simples* contribui para evidenciar uma diversidade de formas de comunicar o conceito de combinação simples utilizada por professores em sua tarefa de ensino. Essa variabilidade permitiu-nos modelar teoricamente uma Matemática para o Ensino de *combinação simples*.

3.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como dito anteriormente, o objetivo deste trabalho foi modelar uma Matemática para o Ensino de *combinação simples* a partir do EC realizado com um grupo de professores. Para isso, seguimos os pressupostos da Matemática para o Ensino e utilizamos o EC como estrutura metodológica de coleta e análise de dados.

Preocupações com as dificuldades de alguns professores ao tratar o tema *combinações simples* são visíveis na literatura (BORBA, PESSOA; ROCHA, 2013). Além disso, Sabo (2010) sugere que os baixos índices de acertos em problemas de *combinação simples* explicitados em sua pesquisa podem ser consequência do que e de como os professores mobilizam esse conceito matemático em suas aulas. Ribeiro (2012) sublinha a importância de os professores reconhecerem estratégias diferentes no ensino de um conceito em sala de aula.

Sugerimos o modelo aqui apresentado como ferramenta para o trabalho dos professores em AC, mas não como receita para a condução de suas atividades. Entendemos que, apresentar formas variadas de comunicar o conceito de combinação simples, potencializa as possibilidades de diálogos entre professores e alunos, para que o ensino desse conceito não se limite apenas a um dos *panoramas*. Como Pessoa e Borba (2010), sustentamos a ideia de que essa variabilidade de formas precisa ser vista, apresentada e discutida. Os panoramas aqui apresentados servem como enriquecedores no repertório de formação de professores de Matemática.

Uma vez que nosso olhar é para o fazer docente, não conseguiríamos investigar a sala de aula de cada professor envolvido no curso. Dessa forma, o EC permitiu-nos reunir no mesmo lugar professores com experiências diferentes. O trabalho coletivo também possibilitou que os diferentes professores explicitassem, analisassem e confrontassem suas diferentes formas de comunicar, contribuindo para um processo coletivo de entendimento do conceito.

Com a finalização do trabalho, destacaríamos que o fato do EC não ser pré-definido ou padronizado (DAVIS; RENERT, 2009), grupos diferentes de professores podem gerar resultados diferentes para o mesmo trabalho. Além disso, a natureza do estudo permite a discussão de um conceito matemático específico por vez. Dessa forma, em se tratando de Análise Combinatória, necessitaríamos de outros estudos para contemplarmos a diversidade de outros conceitos.

As discussões referentes ao conceito de *combinação simples* permitiram-nos perceber a variabilidade das formas que temos para comunicar tal conceito. Segundo Groenwald, Zoch

Neto e Homa (2009, p. 49), “a apresentação dos conceitos com mais de uma perspectiva didática favorece a aprendizagem [...] o que demonstra a importância da diversificação didática para um ensino de qualidade, atingindo um maior número de estudantes em sala de aula.”

Os resultados obtidos neste estudo abrem uma agenda de investigação no campo da Educação Matemática, no que refere à Matemática para o Ensino de conceitos combinatórios, os quais acreditamos ter relevância na formação de professores de Matemática.

REFERÊNCIAS

ADLER, Jill. Mathematics for teaching: what is it and why is it important that we talk about it? **Pythagoras:** University of the Witwatersrand, 2005.

ADLER, Jill et al. Working with learners mathematics: exploring key elements of mathematical knowledge for teaching. In: CONFERÊNCIA INTERNACIONAL GRUPO DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 29., 2005. **Anais**…Melbourne: PME, 2005.v.2. p. 1-8. Disponível em: < http://www.emis.de/proceedings/PME29/PME29RRPapers/ PME29Vol2AdlerEtAl.pdf> Acesso em: 01 ago. 2015.

ALVES, Renato; SEGADAS, Claudia. Sobre o ensino da análise combinatória: fatores a serem considerados, lacunas a serem evitadas. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 14, n. 3, p. 405-420. Canoas, 2012.

AZEVEDO, Juliana; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Combinatória: a construção de árvores de possibilidades por alunos dos anos iniciais com e sem uso de software. **ALEXANDRIA- Revista de Educação em Ciência e Tecnologia,** Santa Catarina, v. 6, n. 2, p. 113-140, 2013.

BEDNARZ, Nadine; PROULX, Jérôme. Knowing and using mathematics in teaching: conceptual and epistemological clarifications. **For the learning of mathematics**, Canadá, v. 29, n. 3, p. 1-7, Nov. , 2009. Disponível em: < http://flm-journal.org/Articles/90007B35446B191D39748441966D2.pdf> Acesso em: 01 ago. 2015.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização. In: **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática (XI ENEM).** Curitiba, 2013.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; PESSOA, Cristiane Azevêdo dos Santos; ROCHA, Cristiane de Arimatéa. Como estudantes e professores de anos iniciais pensam sobre problemas combinatórios. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 15, n. esp. p. 895-908, 2013.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática.** Brasília/DF. MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica (SEMTEC). **PCN+: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília/DF. MEC, 2002.

CORREA, Jane; OLIVEIRA, Gisele. A escrita do problema e sua resolução: o entendimento intuitivo acerca da combinatória. The written text of mathematical word problems and the success of solution. **Educar em Revista**, Curitiba, n. esp. 1, p. 77-91, 2011.

CRESWELL, John W. Projeto de pesquisa métodos qualitativo, quantitativo e misto. In: **Projeto de pesquisa métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Artmed, 2010.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações. V. 2 / Ensino Médio. São Paulo, Editora Ática. 2010.

DAVIS, Brent. Subtlety and complexity of mathematics teachers' disciplinary knowledge. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 12, Seoul, Korea, 2012. **Anais**… Seoul, Korea: ICME, 2012.

DAVIS, Zain; ADLER, Jill; PARKER, Diane. Identification with images of the teacher and teaching in formalized in-service mathematics teacher education and the constitution of mathematics for teaching. **Journal of Education**, v. 42, p. 33-60, 2007.

DAVIS, Brent; RENERT, Moshe. Mathematisc-for-Teaching as shared dynamic participation. **For the Learning of Mathematics**, v. 29, n. 3, p. 37-43, 2009.

___________________. Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge. **Educational Studies in Mathematics**, v. 82, n. 2, p. 245-265, Feb. 2012.

___________________. **The math teachers know:** profound understanding of emergent mathematics. New Yor: Routledge, 2014.

DAVIS, Brent; SIMMT, Elaine. Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. **Educational Studies in Mathematics,** v. 61, n. 3, p. 293-319, March, 2006.

FERNANDES, José António; CARVALHO, Bárbara do Alvar de; CARVALHO, Carolina Fernandes de. O trabalho colaborativo como meio de desenvolver o conhecimento didático de duas professoras em combinatória. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 12, n. 1, p. 43-74. São Paulo, 2010.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; ZOCH NETO, Lisiane; HOMA, Agostinho Iaqchan Ryokiti. Sequência didática com análise combinatória no padrão SCORM. **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 22, n. 34, p. 27-56, 2009.

LANDÍN, Pedro Rubén; SÁNCHEZ, Ernesto. Níveis de razonamiento probabilístico de estudantes de bachillerato frente a tareas de distribucíon binomial. **Educação Matemática Pesquisa,** v. 12, n. 3, p. 598-618. São Paulo, 2010.

MORGADO, AC de O. et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Impa/vitae, 1991.

MORO, Maria Lúcia Faria; SOARES, Maria Thereza Carneiro. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. ***Educação Matemática Pesquisa***, v. 8, p. 99-124, 2006.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **Zetetiké**, Campinas, SP, v. 17, n. 31 , p.105-150, jun. 2009.

____________________. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **EM TEIA Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, São Paulo, v. 1, n. 1, 2010.

RANGEL, Letícia; GIRALDO, Victor; MACULAN, Nelson. Matemática elementar e saber pedagógico de conteúdo: estabelecendo relações. **Professor de Matemática Online – SBM**. v. 2, n. 1, p. 1-14, 2014.

RIBEIRO, Alessandro Jacques. Equação e conhecimento matemático para o ensino: relações e potencialidades para a educação matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42B, abr., 2012. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/> Acesso em: 02 ago. 2013.

____________________. Elaborando um perfil conceitual de equação: desdobramentos para o ensino e a aprendizagem de matemática. **Ciência & Educação**, v. 19, n. 1, p. 55-71. Santo André (SP), 2013.

ROSA, Paulo Ricardo da Silva. Um curso de metodologia da pesquisa em ensino de ciências. **Universidade Federal de Mato Grosso do Sul**, 2010.

SABO, Ricardo Dezso. **Saberes docentes:** análise combinatória no ensino médio. 2010. 2010f. Dissertação (Mestrado acadêmico em Educação Matemática)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SANTOS-WAGNER, Vânia Maria Pereira; BORTOLOTI, Roberta D´Angela Menduni; FERREIRA, Juliana Rodrigues. Análise das resoluções corretas e erradas de combinatória de futuros professores de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 15, n. 3, p. 606-629, 2013.

SERRAZINA, Maria de Lurdes; RIBEIRO, Deolinda. As Interações na atividade de resolução de problemas e o desenvolvimento da capacidade de comunicar no ensino básico. **Bolema,** Rio Claro, v. 26, n. 44, p. 1367-1393, 2012.

4. ARTIGO III – UMA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE COMBINAÇÃO SIMPLES

RESUMO: Este artigo apresenta um estudo no qual se busca modelar uma Matemática para o Ensino do conceito de *combinação simples,* estruturado metodologicamente no Estudo do Conceito a partir de uma Revisão Sistemática da literatura pertinente ao tema, em que analisamos um corpus de dez artigos de periódicos brasileiros avaliados no sistema *WebQualis* do portal da CAPES com classificações A1, A2, B1 e B2 nas áreas de Educação e Ensino. Foi também desenvolvido um estudo coletivo com professores atuantes nos níveis fundamental, médio e/ou superior com experiência no ensino de Análise Combinatória. Apresentamos um modelo, a partir das diferentes formas de *realizações* do conceito de *combinação simples* identificadas na literatura e no estudo com professores, no qual foram categorizados quatro *panoramas*: formalista, instrumental, ilustrativo e comparativo. O resultado traz um modelo que apresenta potencialidades para a formação de professores e para outras pesquisas no campo da Educação Matemática.

Palavras-chave: Matemática para o Ensino. Estudo do Conceito. Professores. Análise Combinatória.

ABSTRACT: This article presents a study that intends to model a Mathematics for Teaching from the concept simple combination, structured methodologically in the Concept Study from a Systematic Review of the literature concerning the matter, in which we analysed a corpus of ten articles evaluated Brazilian journals in the WebQualis system from CAPES portal with ratings A1, A2, B1 and B2 in the areas of Education and Teaching. It was also developed a collective study with teachers working in primary, secondary and / or higher with experience in teaching Combinatorial Analysis. We present a model, from different forms of realizations identified, from the concept of simple combination in the literature and at the study with teachers, in which were categorised four landscapes: formal, instrumental, illustrative and comparative. The result presents a model that has potential for teacher training and for other researches in the field of Mathematics Education.

Keywords: Mathematics for Teaching. Concept Study. Teachers. Combinatory Analysis.

4.1 INTRODUÇÃO

Pesquisas, na área de Educação Matemática, discutem a ocorrência de uma matemática específica mobilizada por professores em suas tarefas de ensinar[38] que difere daquela mobilizada por profissionais de outras áreas diferentes do ensino (ADLER, 2005; ADLER et al. 2005; BEDNARZ; PROULX, 2009; DAVIS; RENERT, 2009, 2012, 2014; DAVIS; SIMMT, 2006). Esses autores discutem essa especificidade em termos de Matemática para o

[38] Concebemos como tarefa de ensinar toda situação associada ao ensino, por exemplo, planejamento e execução de uma aula.

Ensino. Essa orientação nos permite investigar maneiras como essa especificidade se manifesta, tomando como parâmetro as fontes associadas à tarefa de ensinar do professor, como por exemplo, no modo como o professor ministra suas aulas, os textos dos livros didáticos que ele utiliza, as atividades que propõe, a forma de apropriação das orientações dos documentos oficiais que orientam a educação, entre outros.

Nesse cenário de especificidades que envolvem a tarefa de ensinar do professor de Matemática, nosso estudo enfocou as formas como determinado conceito matemático[39] vem sendo comunicado nos diversos contextos atrelados ao ensino. O foco em conceito matemático justifica-se por sua importância para a Matemática e pela diversidade de suas interpretações (SILVEIRA, 2006). Sobre essa importância, Fernandes, Carvalho e Carvalho (2010) sintetizam pesquisas que evidenciam as potencialidades das diversas representações associadas a um determinado conceito que permitem diferentes formas de comunicá-lo, como exemplo, indicam o uso de tabelas, modelos concretos e listagens como formas de comunicar conceitos frentes a problemas combinatórios. Pessoa e Borba (2009) corroboram a necessidade de possibilitar situações diversas no ensino que permitam ao aluno estabelecer relações e construir seus próprios entendimentos.

As discussões suscitadas até aqui sugerem a existência de uma variabilidade de formas de como o professor de Matemática deve lidar/trabalhar com um conceito, em sua tarefa de ensinar. Essa inferência nos despertou o interesse por investigar essas possíveis formas de comunicação permeadas por aquela variabilidade. Neste estudo, interessa-nos o conceito de *combinação simples.* Consideramos que "*combinação simples* de *n* elementos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e p é um número natural tal que $p \leq n$, são todas as escolhas não ordenadas de p desses n elementos" (SANTOS; MELLO; MURARI, 2007, p. 62).

A escolha por esse conceito específico se justifica por ele ter sido indicado na literatura como um dos conceitos de maior dificuldade no ensino e aprendizagem de Matemática (ALVES; SEGADAS, 2012; CORREA; OLIVEIRA, 2011), resultante das dificuldades de se tratar a irrelevância que a mudança de ordem dos elementos escolhidos tem na formação dos agrupamentos (PESSOA; BORBA, 2009; SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013).

Nossos materiais de análise provêm de duas fontes: a literatura científica publicada em

[39] Tomamos a definição de conceito matemático como uma combinação da palavra que indica o tema em discussão e seus símbolos, imagens, metáforas, analogias e outros recursos textuais que se reconhecem como parte da Matemática (DAVIS; RENERT, 2009).

periódicos de Educação Matemática, no Brasil, de 2004 a 2014, que discute o conceito de *combinação simples*, e um curso que reuniu professores de vários níveis de ensino e tempos de carreiras diferentes com experiência em Análise Combinatória, contextos que serão caracterizados ao longo do trabalho.

A seguir, com o intuito de definir nosso objetivo em termos mais específicos, discorreremos sobre o que consideramos Matemática para o Ensino. Em seguida apresentaremos as informações obtidas em cada fonte já mencionada, e os analisaremos conjuntamente.

4.2 A MATEMATICA ESPECÍFICA DO PROFESSOR E O ESTUDO DO CONCEITO

Como dito anteriormente, há uma especificidade na tarefa de ensinar do professor de Matemática que a difere da forma como outros profissionais mobilizam a Matemática em suas tarefas (ADLER, 2005; ADLER et al., 2005; DAVIS; RENERT, 2009, 2012). Buscando uma ilustração para essas especificidades, Davis e Renert (2012) trazem um exemplo apresentado por Ball e Bass (2003), que evidenciam a diferença entre a tarefa do investigador matemático (formular e demonstrar teoremas e fórmulas matemáticas, por exemplo) e a tarefa do professor (descompactar a Matemática com objetivo de ensino).

As discussões sobre essa forma específica de mobilizar a Matemática utilizada pelos professores pode ser denominada Matemática para o Ensino (ADLER, 2005; DAVIS; RENERT, 2014). Adler e Davis (2011) apresentam a Matemática para o Ensino como uma descrição do que ocorre na ação escolar do professor. Davis e Renert (2014) corroboram e substanciam que essa definição perpassa a organização e execução de uma aula em todas as suas nuances. Para os mesmos autores, a Matemática para o Ensino é o modo como o professor se relaciona com a Matemática que lhe possibilita organizar situações de ensino, interpretar ações dos alunos e promover entendimentos da disciplina. Em termos mais objetivos, assumimos a Matemática para o Ensino como o modo como o professor mobiliza a Matemática em sua tarefa de ensinar, como a Matemática específica do professor. Dessa forma, essa ação não pode ser vista como estática, mas, sim, emergindo na ação do professor (DAVIS; RENERT, 2014).

Segundo Bednarz e Proulx (2009), na tarefa de ensinar, os professores propõem novos caminhos e novas representações em resposta às diferentes formas de fazer dos alunos, ou seja, o professor está munido de uma variabilidade de formas de comunicar Matemática em suas tarefas. Com intuito de fazer essa variabilidade emergir e suscitar essa Matemática para o Ensino, Davis e Simmt (2006) e Davis e Renert (2009, 2012, 2014) propõem o Estudo do Conceito (EC).

O EC é uma estrutura coletiva composta por professores da qual eles compartilham e na qual confrontam suas experiências e seus modos de comunicar Matemática em suas tarefas de ensinar (DAVIS; RENERT, 2009, 2014). Nesse contexto, os professores são convidados a identificar, questionar, propor e elaborar metáforas, analogias, exemplos, aplicações de um determinado conceito matemático, com base no seu ensino (DAVIS; SIMMT, 2006). A opção por trabalhar em cada EC com apenas um conceito justifica-se pelo fato de se considerar essa estrutura como ocasiões para escavar os significados existentes de conceitos (DAVIS; RENERT, 2009), ou seja, esgotar, ao máximo, todas as possibilidades inerentes a cada conceito matemático.

Inspirados em Davis e Renert (2009), não consideramos os professores como agentes periféricos que apenas transmitem resultados matemáticos estabelecidos. Como os autores, concebemos os professores como participantes ativos na comunicação de possibilidades matemáticas que emergem da própria prática. Como estamos interessados no que o professor comunica ao ensinar, a estrutura do EC permite a observação coletiva de diversos professores, em um mesmo ambiente, e não de cada um suas respectivas salas de aula.

O EC está estruturado em quatro ênfases: *realizations (realizações), landscapes (panoramas), entailments (vinculações), blends (misturas)*[40] que emergem do ambiente participativo e partilhado, que gerarão divergências e convergências decorrentes das experiências dos professores participantes. Baseados nos estudos de Davis e Renert (2009, 2012, 2014), que trabalharam o conceito de multiplicação, apresentamos uma caracterização (Quadro 1) das três ênfases que discutimos neste trabalho. Assim como os autores, não temos intuito de julgar essas ênfases como certas ou erradas, mas, apenas como emergentes da tarefa de ensinar.

Quadro 1 - Caracterização das ênfases do EC

Ênfase	**Caracterização**
Realizações	Dizem respeito às diversas formas (definições, algoritmos, metáforas, imagens, aplicações, gestos) de que o professor faz uso na sua tarefa de comunicar um conceito matemático.

[40] A ênfase *misturas* não se manifestou em nosso estudo, por isso não a discutiremos neste trabalho.

Panoramas	Representam uma visão mais ampla das *realizações* de um dado conceito. Dizem respeito à categorização dessas *realizações* em estruturas maiores a partir das relações de convergências (características semelhantes) que podem existir entre elas.
Vinculações	Caracterizadas pelas discussões em torno das *realizações* e/ou *panoramas*, buscam identificar, descrever e refletir sobre as diferentes implicações e relevâncias imbricadas em cada um deles.

Fonte: Davis; Renert (2009, 2014).

Podemos dizer que a Matemática para o Ensino é uma disposição específica que representa o modo que professor mobiliza a Matemática em sua tarefa, especificidade que pode apresentar uma variabilidade de formas de ensinar Matemática (ADLER et al., 2005; DAVIS; RENERT, 2009). Essa variabilidade vai depender do contexto - salas de aulas, curso com professores, livros didáticos, publicações científicas, entre outros - nos quais for observado, embora contextos de mesma natureza possam, também, apresentar diferenças na captura dessa variabilidade. Cada um deles nos fornece uma versão parcial da Matemática para o Ensino. No contexto de curso com professores, o EC representa a estrutura com a qual capturamos as *realizações* do conceito de *combinação simples*. O EC está interessado em fazer emergirem dessa estrutura coletiva possibilidades para o ensino de Matemática, além de organizar sistematicamente as formas de comunicação de um determinado conceito.

Inspirados na ideia de Matemática para o Ensino (ADLER, 2005; ADLER et al., 2005; DAVIS; RENERT, 2009, 2012, 2014), o objetivo deste estudo é modelar uma Matemática para o Ensino do conceito de *combinação simples* em Análise Combinatória. Consideramos apenas dois contextos: publicações científicas e o estudo com professores.

No que tange às publicações científicas, partimos de uma Revisão Sistemática da literatura pertinente a fim de capturar informações (*realizações* do conceito de *combinação simples*) e analisá-las inspirados na estrutura do EC. No estudo com professores, utilizamos a própria estrutura do EC para dirigir uma discussão coletiva que nos permitiu coletar os dados para a análise. O tópico a seguir, traz os procedimentos utilizados em cada contexto.

4.3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para identificar as *realizações* do conceito de *combinação simples* presentes nas produções científicas, utilizamos uma Revisão Sistemática de literatura. A Revisão Sistemática é um método de pesquisa bibliográfica que tem como meta detectar evidências de um assunto específico - no nosso trabalho, o conceito de *combinações simples* - disponíveis em produções científicas (VICTOR, 2008), utilizando métodos rigorosos de seleção da literatura e coleta de informações (PETTICREW; ROBERTS, 2006).

Esse rigor é justificado por Ramos, Faria e Faria (2014), quando indicam que os crescentes números de publicações, cientificamente confiáveis ou não, em ambientes digitais, tornam cada vez mais complexa a seleção destes trabalhos. Por isso, até mesmo as fontes em que as publicações aparecem, possuem um critério bem definido. É importante salientarmos que as Revisões Sistemáticas não configuram, simplesmente, um resumo da literatura selecionada, já que ela tem por caráter fornecer contextos para cumprimento de um objetivo bem definido (DE-LA-TORRE-UGARTE-GUANILLO; TAKAHASHI; BERTOLOZZI, 2011; PETTICREW; ROBERTS, 2006).

Utilizando tais pressupostos, limitamos nossa seleção a alguns periódicos brasileiros do campo da Educação Matemática classificadas pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) - nas áreas de Educação e Ensino – com *qualis* A1 à B2, resultando a seleção em uma lista com oito periódicos (Quadro 2). Após explorarmos os artigos presentes nos volumes e números desses periódicos. A busca foi feita por títulos, resumos, palavras-chave e, quando necessário, leitura completa dos textos, chegamos a uma lista de onze artigos, (Quadro 2) para posterior análise.

Quadro 2 - Relação dos periódicos e artigos selecionados

Periódicos selecionados	Quantidade de artigos	Autores
ACTA SCIENTIAE - Revista de Ensino de Ciências e Matemática	01	Alves e Segadas (2012)
ALEXANDRIA - Revista de Educação em Ciência e Tecnologia	01	Azevedo e Borba (2013)
BOLEMA - Boletim de Educação Matemática	02	Groenwald, Zoch Neto e Homa (2009); Serrazina e Ribeiro (2012).
BOLETIM GEPEM	00	-
EMP – Educação Matemática Pesquisa	04	Fernandes, Carvalho e Carvalho (2010); Landín e Sánchez (2010); Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013); Borba, Pessoa e Rocha (2013).
EM TEIA - Revista de Educação Matemática e	01	Pessoa e Borba (2010)

Tecnológica Ibero-americana		
JIEEM - Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática	01	Vega e Borba (2014)
ZETETIKÉ - Revista de Educação Matemática	01	Pessoa e Borba (2009)

Fonte: Elaborado pelos autores

Salientamos que os artigos listados no quadro anterior apresentaram – implícita ou explicitamente - formas de *realizações* do conceito de *combinação simples*.

Para identificar as *realizações* de *combinação simples* comunicadas por professores de Matemática no ensino deste conceito, utilizamos como contexto o EC (DAVIS, 2012; DAVIS; RENERT, 2009, 2014; DAVIS; SIMMT, 2006; RANGEL; GIRALDO; MACULAN, 2014). Inspirados nos pressupostos do EC, compomos um grupo de seis professores atuantes nos níveis fundamental, médio e superior em instituições de ensino da cidade de Barreiras, cuja motivação foi um curso de extensão promovido no campus do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA), localizado na própria cidade. Para utilizarmos as potencialidades da estrutura colaborativa/coletiva proposta no Estudo do Conceito (DAVIS; RENERT, 2009, 2014; DAVIS; SIMMT, 2006) e capturarmos a Matemática que o professor pode mobilizar, ao comunicar o conceito de *combinação simples* em suas ações, o grupo (Quadro 3) foi formado com certos critérios como:

a) características em comum associadas ao tópico que está sendo pesquisado; no nosso trabalho, todos eram professores de Matemática com experiência no ensino de AC;
b) a heterogeneidade dos contextos no qual ocorrem suas práticas – no nosso trabalho, foram escolhidos professores que atuam em diferentes níveis de ensino;
c) anos de docência diferentes.

Quadro 3 - Perfil dos professores participantes[41]

IDENTIFICAÇÃO[42]	**FORMAÇÃO INICIAL**	**TEMPO DE DOCÊNCIA**	**NÍVEL DE ATUAÇÃO EM QUE TRABALHA OU TRABALHOU COM AC**
Professor Alberto	Licenciatura em	32 anos	Fundamental

[41] Resultado da aplicação de um questionário (Apêndice B) para caracterização.

[42] Na assinatura do Termo de Consentimento Livre e Declarado (Apêndice A), os professores optaram por utilizar pseudônimos que foram escolhidos pelos pesquisadores.

	Matemática		
Professor Biano	Licenciatura em Matemática	15 anos	Médio
Professora Carla	Licenciatura em Matemática	12 anos	Médio e Superior
Professor Diogo	Licenciatura em Matemática	13 anos	Fundamental, Médio e Superior
Professora Elba	Licenciatura em Matemática	15 anos	Fundamental e Médio
Professor Fausto	Licenciatura em Matemática (em curso)	06 meses	Médio

Fonte: Elaborado pelos autores

O grupo foi convidado a refletir coletivamente, analisar e elaborar entendimentos sobre o conceito de *combinação simples* em AC. Os encontros foram devidamente registrados em gravações audiovisuais, além das anotações feitas com a observação dos pesquisadores, que foram posteriormente analisadas, para identificar as diferentes formas de *realizações* utilizadas ou comunicadas pelos professores.

Davis e Simmt (2006) evidenciam que o papel do pesquisador no EC é de propor tarefas e organizar o ambiente de forma a suscitar as *realizações* de um dado conceito. Seguindo essa orientação, conduzimos os encontros estruturando e propondo atividades de elaborações e resoluções de problemas; elaboração de listas indicando metáforas, interpretações, analogias que comunicassem o conceito; elaboração de planos de aulas; apresentação de aulas que tinham o conceito de *combinações simples* como foco.

No nosso terceiro encontro, propusemos um problema motivador: *Em uma sala de aula há 8 alunos. De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos três alunos para representar a turma?*

Para a solução deste problema, um dos integrantes explanou que se tratava de um problema de *combinação simples.* A partir daí, lançamos a pergunta diretriz: *O que é combinação?* As primeiras respostas, com tons próximos à definição formal, já apresentavam alguns modos de *realizar* utilizados pelos professores. Como nosso intuito era identificar outras formas, passamos a questionar o grupo com outras perguntas: *O que mais? E daí? Como vocês falam sobre isso para os alunos? E quando eles não entendem que estratégias vocês usam?*

As respostas a esses questionamentos e o desenvolvimento de todas as outras atividades citadas anteriormente fizeram emergir uma diversidade de *realizações* no que diz respeito ao conceito de *combinação simples* utilizadas pelos professores em suas tarefas de ensinar.

A partir das listas de *realizações* identificadas nos dois contextos propostos - publicações científicas e estudo com professores - enquadramos nossa análise na estrutura do EC. Sendo assim, após identificação e descrição das *realizações*, nós as organizamos em *panoramas*, propusemos uma discussão em torno de suas *vinculações* e sugerimos um modelo teórico de uma Matemática para o Ensino do conceito de *combinação simples* em Análise Combinatória.

4.4 REALIZAÇÕES DO CONCEITO DE COMBINAÇÃO SIMPLES

Como dito anteriormente, as *realizações* são as diversas formas (definições, algoritmos, metáforas, imagens, aplicações, gestos) de que o professor faz uso, na sua tarefa de comunicar um conceito matemático (DAVIS; RENERT, 2014).

Passamos, agora, a apresentar, descrever e exemplificar todas as *realizações* identificadas (Quadro 4) com o intuito de construir *panoramas* . Nessa seção, vamos evidenciar como o conceito de *combinação simples* aparece, ou é entendido, pelos autores (nos artigos selecionados) e pelos professores durante o desenvolvimento do curso. Além disso, pretendemos evidenciar características semelhantes nas realizações que nos permitiram a elaboração dos *panoramas*.

Quadro 4 - Lista de *realizações* identificadas[43]

REALIZAÇÃO IDENTIFICADA	OCORRÊNCIA NA LITERATURA	OCORRÊNCIA NO CURSO COM PROFESSORES	BREVE DESCRIÇÃO
Diagrama de árvores das possibilidades	x	X	Tem como característica permitir a visualização e ilustração da estrutura da solução de um problema a partir da composição desta solução.
Tabelas	x		Tem como característica a representação de todas as possibilidades de combinação inerentes ao problema.
Desenhos			Assim como a tabela, tem como característica a representação de todas as possibilidades de combinação

[43] A marcação com "X" informa que a realização ocorreu naquele contexto.

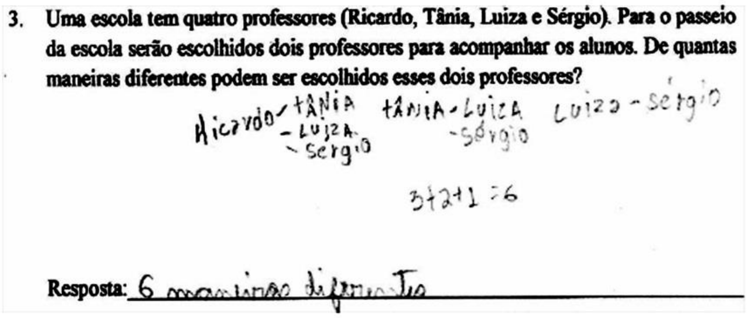
	x		inerentes ao problema por meio de ilustrações dos objetos que compõem a situação.
Listagens dos agrupamentos	x	X	Tem como característica a enumeração das possibilidades de agrupamentos válidos na situação em questão, buscando esgotar todas as possibilidades.
Contagem dos agrupamentos usando modelos concretos ou virtuais	x	X	Além da visualização da solução, tem por característica permitir a manipulação dos objetos que compõem a solução de modo a representar as possibilidades de agrupamentos válidos.
Ordenação irrelevante dos elementos	x	X	Tem por característica comunicar que a ordenação dos elementos na composição dos agrupamentos não gera novas possibilidades.
Comparação com arranjo	x	X	Tem como propósito contrastar duas técnicas de contagem, arranjos e *combinações simples*, evidenciando a irrelevância na ordem dos elementos que compõem os agrupamentos quando se trata de combinação.
Definição formal	x	X	Tem como propósito apresentar os agrupamentos das *combinações simples* de modo formal, evidenciando as relações e propriedades que precisam ser consideradas na formação desses agrupamentos.
Fórmula	x	X	Tem por característica permitir a contagem de todos os agrupamentos de *combinações simples* sem a necessidade de enumeração.

Fonte: Elaborado pelos autores

No intuito de ilustrar e fundamentar a descrição feita no quadro anterior, apresentamos, agora, uma série de exemplos das *realizações* do conceito de *combinação simples* retirados da literatura pesquisada ou do estudo com os professores. Ainda que a ocorrência tenha sido identificada tanto na literatura, quanto no curso com professores, optamos por apenas um exemplo para ilustrar cada *realização*.

Azevedo e Borba (2013), em trabalho que analisou a influência do diagrama de árvores das possibilidades no ensino e a aprendizagem de Combinatória, apresentaram a solução de um aluno pesquisado (Figura 1) que exemplifica o uso de tal diagrama.

Figura 1 - Exemplo da utilização da árvore de possibilidades


3. Uma escola tem quatro professores (Ricardo, Tânia, Luiza e Sérgio). Para o passeio da escola serão escolhidos dois professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses dois professores?

Ricardo - TÂNIA - LUIZA - Sergio   TÂNIA - LUIZA - Sergio   LUIZA - Sergio

3+2+1 = 6

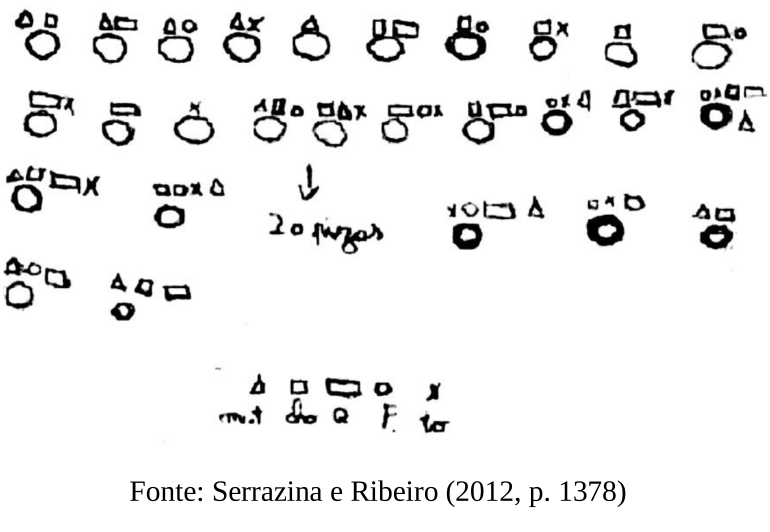
Resposta: 6 maneiras diferentes

Fonte: Azevedo e Borba (2013, p. 133)

Corroborando com a descrição feita no Quadro 4, inferimos que a utilização do diagrama objetiva a organizar e ilustrar os agrupamentos que devem ser considerados na solução.

Serrazina e Ribeiro (2012) em estudo que explorou compreensões das interações que ocorrem num ambiente de resolução de problemas, apresentam uma discussão em torno da solução de um problema de confecção de pizzas, a partir de cinco ingredientes diferentes. Na descrição dessa discussão, identificamos as *realizações* do conceito de *combinação simples* por desenho (Figura 2) e por tabela (Figura 3).

Figura 2 - Desenho utilizado por alunas na solução



Fonte: Serrazina e Ribeiro (2012, p. 1378)

Figura 3 - Tabela utilizada pela professora para apresentar a solução

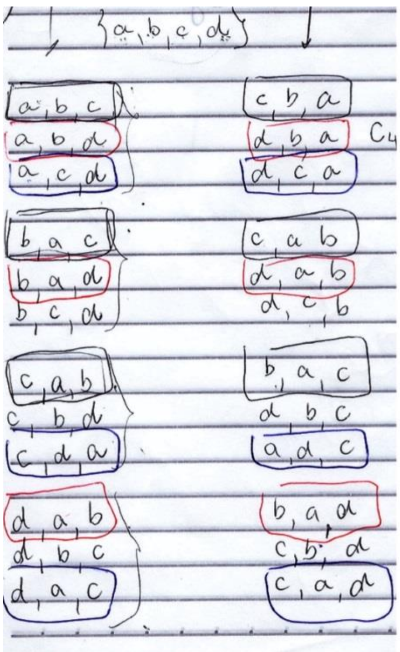
n.º de ingredientes	0	1	2	3	4	5	TOTAL
Combinações possíveis com os ingredientes A,B,C,D,E	MASSA ou BASE	A B C D E	AB AC AD AE BC BD BE CD CE DE	ABC ABD ABE ACD ACE ADE BCD BCE BDE CDE	ABCD ABCE ABDE BCDE ACDE	ABCDE	
n.º de pizas diferentes	1	5	10	10	5	1	32

Fonte: Serrazina e Ribeiro (2012, p. 1379)

As figuras apresentadas sugerem, em consonância com a descrição do Quadro 4, que a comunicação do conceito de *combinação* por essas *realizações* tem por característica a tentativa de representar todas as possibilidades de agrupamentos válidos.

No estudo com os professores, em um problema que visava à construção de subconjuntos distintos com três elementos, a partir de um conjunto com quatro elementos {a, b, c, d}, identificamos, na solução do professor Diogo, a manifestação da listagem de agrupamentos (Figura 4).

Figura 4 - Exemplo da utilização da listagem dos agrupamentos

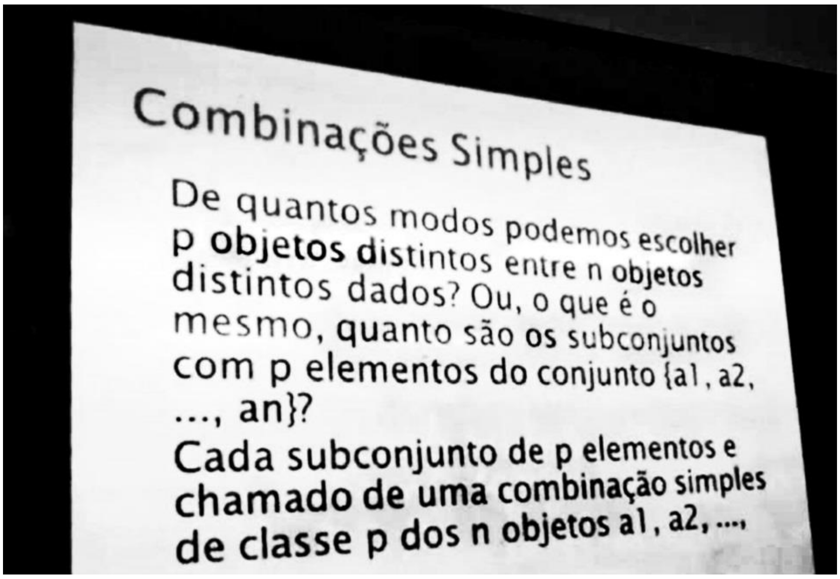


Fonte: Registros do Professor Diogo

O exemplo expresso na figura indica a tentativa do professor em enumerar todas as possibilidades para posterior contagem. Isso evidencia a descrição dessa *realização* no Quadro 4.

Um exemplo da *realização* de *combinação simples* como definição formal (Figura 5) também foi identificado no estudo com professores, durante o desenvolvimento de uma aula coordenada pelo mesmo professor Diogo.

Figura 5 – Exemplo de utilização da definição formal



Fonte: Registros do Professor Diogo

Percebemos a preocupação, nesta *realização*, da comunicação das relações e propriedades que transformam o agrupamento (subconjunto) em *combinação simples*. Dessa forma, o problema das *combinações* é saber a quantidade de maneiras diferentes com as quais podemos formar subconjuntos com p elementos, a partir de um conjunto com n elementos, sendo $p \leq n$. Cada subconjunto com p objetos é chamado de *combinação*.

Fernandes, Carvalho e Carvalho (2010) investigaram a influência do trabalho colaborativo no desenvolvimento da didática de duas professoras de Matemática em Combinatória. Nesta pesquisa, detectamos uma discussão entre professora e alunos (Quadro 5) em que a *realização* referente à irrelevância da ordem dos elementos na *combinação simples* emerge. Já no estudo com os professores, identificamos uma situação em que o professor Fausto faz emergir a *realização* que tem por característica a comparação com arranjo (Figura 6).

Quadro 5 - Exemplo de ordenação irrelevante e manipulação de objetos

Margarida: Ora, vamos fazer assim. Eu tenho aqui pessoas coloridas.

Aluno: Oh professora, não me confunda.

Aluna: Interessa escolher as pessoas, não interessa a ordem.

Margarida: Não me confunda?! Eu vou te dar uma pessoa verde, uma branca e uma amarela, pode ser? Anda aqui explicar como é que o teu raciocínio bate certo. Tens aqui as pessoas, pega nelas. Pronto, então fazemos o seguinte, eu segura naquelas que tu rejeitas. Neste momento eu tenho-as todas.

Aluno: Vou tirar AB.

Margarida: Para já, AB. Para ti contou um caso?

Aluno: Um caso.

Margarida: Um caso. E agora se a trocares de mão?

Aluno: E agora se eu a meter aí e tirar BA, é a mesma coisa.

Margarida: Por quê?

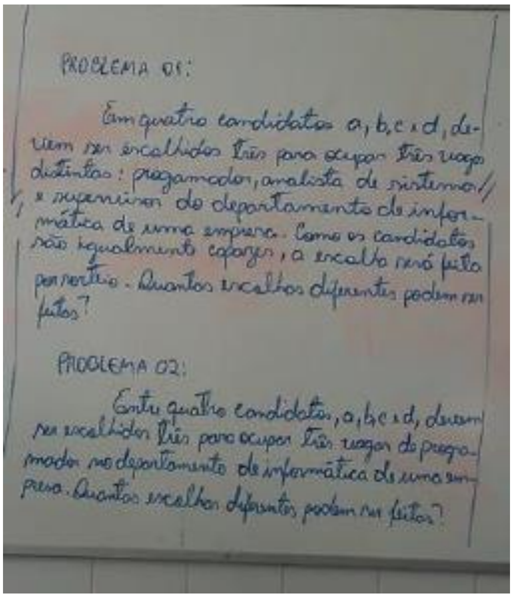
Aluna: São as mesmas cores.

Aluno: Mas são as mesmas pessoas, são é duas maneiras diferentes de escolher as pessoas.

Aluna: Mas neste caso não interessa a ordem com que são tiradas.

Fonte: Fernandes, Carvalho e Carvalho (2010, p. 65)

Figura 6 - Exemplo da *realização* comparação com arranjo



PROBLEMA 01:

Em quatro candidatos a, b, c e d, devem ser escolhidos três para ocupar três vagas distintas: programador, analista de sistemas e supervisor do departamento de informática de uma empresa. Como os candidatos são igualmente capazes, a escolha será feita por sorteio. Quantas escolhas diferentes podem ser feitas?

PROBLEMA 02:

Entre quatro candidatos, a, b, c e d, devem ser escolhidos três para ocupar três vagas de programador no departamento de informática de uma empresa. Quantas escolhas diferentes podem ser feitas?

Fonte: Registros do Professor Fausto

Observamos que a discussão apresentada no Quadro 5, retrata a descrição desta *realização* feita no Quadro 4. Pela Figura 6, podemos inferir que a comunicação do conceito discutido neste estudo é feita, a partir da comparação de dois problemas cujas soluções levam ao contraste de dois agrupamentos: *combinação simples* e arranjo simples.

O mesmo Quadro 5 também evidencia a *realização* contagem de agrupamentos, utilizando modelos concretos. Na situação descrita, os agentes envolvidos manipulam os objetos característicos do problema em questão, para visualizar a irrelevância na ordem das escolhas.

Por fim, a exemplificação da *realização* do conceito, a partir da fórmula, foi identificada na tentativa de solução de um problema (Figura 7), pela professora Elba, no curso com os professores.

Figura 7 - Exemplo da realização fórmula

$$C_{5,1} + C_{5,2} + C_{5,3} + C_{5,4} + C_{5,5}$$

$$5 \qquad 10 \qquad 10 + 5 + 1 = 31$$

Pizzas diferentes

Fonte: Registros da Professora Elba

Solicitados a responderem quantas pizzas diferentes poderiam ser feitas a partir de 5 diferentes ingredientes, a professora Elba - enquanto outros integrantes do curso se utilizavam de listagens, diagramas, entre outros - utilizou a fórmula da *combinação simples* para a solução, chegando de forma mais rápida à resposta. Inferimos que a utilização da fórmula permite a contagem dos agrupamentos envolvidos no problema em questão, sem que se precise enumerá-los, como sugere a descrição do Quadro 4.

A lista de *realizações* descritas nesta seção possibilita o reconhecimento da variabilidade de formas de comunicar o conceito de combinação simples. A diversidade de *realizações* de um determinado conceito pode contribuir para a organização de variadas estratégias de ensino (RANGEL; GIRALDO; MACULAN, 2014).

No que diz respeito à Análise Combinatória, o reconhecimento dessas diversas formas de *realizar* um conceito vai ao encontro da necessidade de se considerar os variados significados e as várias representações que integram as situações combinatórias (PESSOA;

BORBA, 2010).

Considerando as características semelhantes entre algumas *realizações*, buscamos organizá-las em categorias mais amplas que, neste estudo, chamamos de *panoramas* (DAVIS; RENERT, 2009, 2014). Essa categorização é apresentada, descrita e discutida na próxima seção.

4.5 MODELO DE UMA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE COMBINAÇÃO SIMPLES

Retomando nossa posição de modelar, teoricamente, uma Matemática para o Ensino de *combinação simples*, apresentamos, a partir de agora, os *panoramas* e *vinculações* associados a este conceito e que foram interpretados neste estudo. Ao final da seção, sugerimos um modelo dessa Matemática.

Inspirados em Davis e Renert (2009, 2014), já apresentamos os *panoramas* como uma visão em nível ampliado das *realizações* e as *vinculações* como discussões acerca das implicações e relevâncias imbricadas em cada *panorama*. Diante das características de cada *realização*, organizamos o Quadro 6.

Quadro 6 - Quadro panorâmico

Panorama	Realizações originárias	Característica principal em comum entre as realizações
Formalista	Definição formal	Caracterizado pela própria definição formal.
Instrumental	Fórmula	Caracterizado pela própria fórmula.
Ilustrativo	Contagem dos agrupamentos usando modelos concretos ou virtuais; diagrama de árvore das possibilidades; tabelas; desenhos; listagens dos agrupamentos.	Ilustração dos agrupamentos a serem contados.
Comparativo	Comparação com arranjo; ordenação irrelevante.	A ordem que os elementos são escolhidos para compor os agrupamentos não geram novas possibilidades.

Fonte: Elaborado pelos autores

No *panorama* formalista, o conceito de *combinação simples* é *realizado* pela definição formal. É caracterizado por comunicar a generalização, através de propriedades e relações, que leva ao reconhecimento de certo agrupamento como *combinação*. A estratégia utilizada na contagem é a compreensão de tais propriedades e relações que levam a contagem dos agrupamentos que satisfazem essas características.

Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013) sublinham as formas erradas ou imprecisas com as quais os alunos descrevem conceitos combinatórios. Tratando das *combinações simples*, isso poderia ser reflexo da carga de abstração presente neste *panorama*, cuja comunicação está pautada na teoria de conjuntos. Isso pode ser visto em Lima et al. (2004, p. 96): “Para resolver o problema das combinações simples basta notar que selecionar *p* entre os *n* objetos equivale a dividir os *n* objetos em um grupo de *p* objetos, que são os selecionados, e um grupo de *n* – *p* objetos, que são os não-selecionados”.

Essa situação também emergiu no curso com professores, quando o professor Diogo fez uma intervenção nesse sentido.

> Professor Diogo: Nas combinações, você está pegando subconjuntos de um conjunto. Tem que perceber, também, que esses subconjuntos pegos podem ser iguais. Que o conjunto {a, b, c, d} é a mesma coisa que o conjunto {d, c, b, a}. Então, essas situações tem que ser perceptíveis para o aluno. E, tem que perceber que você tem que ter essa diferenciação desses subconjuntos, quais são iguais e quais não são...

A preocupação do professor Diogo estava, justamente, no entendimento de que conjuntos com os mesmos elementos são considerados iguais, ou seja, se a definição formal fala em termos de subconjuntos, este não pode ser contado mais de uma vez. Dessa forma, o *panorama* formalista sugere que o entendimento sobre teoria dos subconjuntos é importante para a compreensão do que é comunicado pela definição formal de *combinação simples.*

No *panorama* instrumental, o conceito de *combinação simples* é *realizado* pela fórmula. É caracterizado por ser um procedimento mecânico em busca da contagem dos agrupamentos de *combinações simples*, sem a necessidade de listá-los através da utilização da fórmula $C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$. Nesta configuração, *n* representa a quantidade de elementos do conjunto do qual se quer tomar *p* elementos distintos.

As fórmulas, e por consequência o *panorama* instrumental, facilita a contagem dos agrupamentos, sem a necessidade de enumeração (SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013). Essa vantagem destaca-se, principalmente, quando o problema traz um número grande de elementos (PESSOA; BORBA, 2010), mas nem sempre é aplicada de maneira correta (ALVES; SEGADAS, 2012).

Sobre equívocos e tentativas de enquadramento dos problemas combinatórios, e por consequência os de *combinações simples*, Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013) trazem uma discussão entre professor e aluno:

Figura 09: Discussão sobre a utilização de fórmulas

> Aluno L*: [...] ele foi buscando modos pra satisfazer uma resposta [...]. Na verdade ele não compreendeu a pergunta da questão. Tipo assim ele só queria colocar isso na fórmula. Os dados que ele tinha ele queria colocar na fórmula e dar uma resposta [...]*
>
> Professor I*: e porque você acha que o aluno faz isso?*
>
> Aluno L*:...ée...condicionado, a utilizar fórmulas...ele tem essa fórmula e ele tem alguns valores ele vai jogar na fórmula.*

Fonte: Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013, p. 619)

Discussões semelhantes foram registradas no curso com professores:

> Professor Diogo: Quando eu aprendi no Ensino Médio, os professores trabalhavam muito com a ideia da fórmula. E a ideia da fórmula é assim: você olhar para o problema e saber que fórmula usar? Aí, você tinha que ler o problema e não sabia se usava combinação, se usava arranjo ou que fórmula que era. [...] Como é que eu vou encaixar essa fórmula aqui? E, nem sempre, a fórmula se encaixa em determinadas situações.
>
> Professora Elba: Quando o aluno não tem essa apropriação do conceito, em toda situação, por mais elementar que seja, ele acha que tem que aplicar fórmula. Ele fica condicionado a só usar fórmula. O professor também já passa isso pra ele, né? Quando pergunta: *E essa questão, qual a fórmula?*

Essas discussões trazem à tona uma preocupação sublinhada por Alves e Segadas (2012) sobre a ênfase do ensino com o uso de fórmulas, "embora seja um caminho possível, não parece trazer grandes benefícios para a aprendizagem [...]" (ALVES; SEGADAS, 2012, p. 415). E concluem que essa quase obrigatoriedade do uso de fórmula pode ser consequência da generalização precoce das técnicas de contagem.

No *panorama* ilustrativo, o conceito de *combinação simples* é comunicado através das r*ealizações*: contagem dos agrupamentos, usando modelos concretos ou virtuais; diagrama de árvore das possibilidades; tabelas; desenhos; listagens dos agrupamentos. É caracterizado por focar diversas ilustrações que permitem a visualização dos agrupamentos que estão sendo contados nos problemas de *combinações simples*. Essas estratégias ilustrativas podem auxiliar o ensino desse conceito antes de sua introdução formal (PESSOA; BORBA, 2009).

Pessoa e Borba (2009) e Azevedo e Borba (2013) sublinham que o uso do que aqui chamamos de *realizações* que compõem este *panorama* – principalmente em problemas com um número pequeno de objetos - contribuem para o fazer do aluno em Análise Combinatória e, por consequência, na comunicação do conceito de *combinação simples*, contribuindo para seu entendimento. Essa análise foi corroborada pelos professores no curso:

> Professor Fausto: Quando você trabalha só com quadro e listas de exercícios, os alunos imaginam o que tem o problema, mas talvez, o que ele imagina, não seja...
> Professor Diogo: A visualização com um modelo, por exemplo, é melhor.
> Professor Fausto: E, também, a gente pode manipular e desenhar. Sair daquela forma tradicional. Porque é algo mais claro. Quando você vai começar, você vai começar com problemas que envolvem valores pequenos. Então, você começa, desenhando (diagrama) e consegue contar, um por um, no diagrama de árvores. Você conta a quantidade de possibilidades para cada uma das escolhas. Então, fica bem mais claro.

Os professores discorriam sobre as potencialidades da utilização dos modelos concretos, diagrama de árvores e desenhos, para iniciarem a comunicação do conceito de combinação. As discussões em torno da fala desses professores e as indicações presentes na literatura pesquisada nos leva a sugerir que o *panorama* ilustrativo representa a visualização das *combinações*. Para Fernandes, Carvalho e Carvalho (2010), explorar o diagrama de árvores, por exemplo, pode levar a descobrir uma regra de cálculo. O *panorama* em questão pode levar a generalizações desse conceito que atendam às soluções de problemas com um número grande de objetos.

No *panorama* comparativo, o conceito de *combinação simples* é comunicado através das *realizações*: ordenação irrelevante dos elementos e comparação com arranjo. É caracterizado por comunicar o conceito de *combinação simples*, a partir do contraste com o conceito de arranjo simples, que difere, em sua natureza, pela relevância, ou não, da ordem nos elementos que compõem cada agrupamentos. Essa característica sugere que, na ocorrência deste *panorama*, o conceito de *combinação* precede o de arranjo. Borba, Pessoa e Rocha (2013) sublinham a dificuldade de alguns professores para comunicar o conceito de *combinação*, devido à irrelevância na ordem dos elementos.

A discussão proposta pelo professor Fausto, referente aos problemas apresentados na Figura 6, evidenciam o potencial deste *panorama*. Ao resolver o primeiro problema[44], professor Fausto deixou evidente que a permuta de candidatos se configurava em uma nova possibilidade. Para a solução do segundo problema[45], ele inicia, comparando com a solução do primeiro:

---

[44] Contar de quantas maneiras diferentes quatro candidatos poderiam ocupar três vagas distintas de analista, programador e supervisor de um departamento de informática.

[45] Contar de quantas maneiras diferentes quatro candidatos poderiam ocupar três vagas de programados de um departamento de informática.

> Professor Fausto: No problema dois, temos, novamente, os mesmos quatro candidatos, nas mesmas situações, com a mesma capacidade. Só que eu não tenho três vagas diferentes, eu tenho uma vaga que é para programador... Se eu escolher {a, b, c} e {b, c, a}, eu vou ter os candidatos a, b e c, em ambas as situações.

Essas análises nos levam a sugerir que este *panorama* pode ser um potencial para a discussão da ordenação dos elementos nos agrupamentos nomeados por arranjos e *combinações*, uma vez que permite comunicar os dois conceitos, ao mesmo tempo.

Diante do que foi apresentado e analisado nas duas últimas seções, apresentamos a proposta do modelo de uma Matemática para o ensino de *combinação simples*, a partir de um quadro-síntese (Quadro 7) que visa a convergir e complementar os Quadros 5 e 6.

Quadro 7 - Modelo

Panorama	**Realizações originárias**	**Breve descrição**	**Nível de ensino com maior ocorrência**[46]	**A estratégia utilizada é...**	**O resultado é interpretado como...**
Formalista	Definição formal	O conceito de *combinação simples* é *realizado* pela definição formal e é caracterizado por comunicar a generalização, através de propriedades e relações, que leva ao reconhecimento de certo agrupamento como *combinação*.	Ensino Médio e Superior.	A compreensão de propriedades e relações que levam a contagem dos agrupamentos que satisfazem as características de *combinações simples*.	Uma quantidade de agrupamentos que satisfazem as relações e propriedades pré-estabelecidas.
Instrumental	Fórmula	O conceito de *combinação simples* é *realizado* pela fórmula e é caracterizado por ser um procedimento mecânico na busca da contagem dos agrupamentos de *combinações simples* sem a necessidade de listá-los através da utilização da	Ensino Médio e Superior.	Substituição na expressão $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)}$ de n pelo valor que representa a quantidade de elementos do conjunto do qual se quer selecionar objetos distintos e substituição de p pelo valor que representa a	O valor que resulta após operacionalização da substituição e do cálculo com base na fórmula $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

[46] Identificados a partir de análises da literatura utilizada na Revisão Sistemática e pelos próprios professores de diferentes níveis de ensino que compunham o grupo.

		fórmula $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, em que n representa a quantidade de elementos do conjunto do qual se quer tomar p elementos distintos.		quantidade de elementos distintos que se quer escolher. Cada problema pode apresentar valores de n e p diferentes.	
Ilustrativo	Diagrama de árvores; Listagem dos agrupamentos; Contagem dos agrupamentos usando modelos concretos.	O conceito de *combinação simples* é comunicado através das *realizações*: contagem dos agrupamentos usando modelos concretos ou virtuais; diagrama de árvore das possibilidades; tabelas; desenhos; listagens dos agrupamentos. É caracterizado por focar diversas ilustrações que permitem a visualização dos agrupamentos que estão sendo contados nos problemas de *combinações simples*.	Ensino Fundamental e Médio.	Ilustração, a partir de uma das *realizações* que compõem o *panorama*, dos elementos que serão selecionados para compor o agrupamento em questão.	O total de agrupamentos que foram contados na ilustração escolhida para representar o problema.
Comparativo	Ordenação irrelevante dos elementos; Comparação com arranjo.	O conceito de *combinação simples* é comunicado através das *realizações*: ordenação irrelevante dos elementos e comparação com arranjo. É caracterizado por comunicar o conceito de *combinação simples* a partir do contraste com o conceito de arranjo simples, que diferem em sua natureza pela relevância, ou não, da ordem nos elementos que	Ensino Fundamental e Médio.	Formar os agrupamentos com a quantidade de elementos requeridos no problema excluindo aqueles que diferem apenas pela ordem.	A quantidade de subconjuntos restantes após as exclusões.

		compõe cada agrupamento.			

Fonte: Elaborado pelos autores

O resultado apresentado, no quadro anterior, aponta a variabilidade de formas de comunicar o conceito de *combinações simples* no ensino de Análise Combinatória, representando uma modelagem teórica.

4.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste estudo foi modelar uma Matemática para o Ensino do conceito de *combinação simples* em Análise Combinatória. Para proceder a tal modelagem, coletamos os materiais de análise em duas fontes – publicações científicas rigorosamente selecionadas e um estudo com professores -, utilizando o Estudo do Conceito como ferramenta metodológica de estruturação.

O modelo compreende uma variabilidade de formas – aqui chamadas de *realizações* que foram categorizadas em *panoramas* – de comunicar o conceito de *combinação simples*, na tarefa de ensinar do professor. Há, no meio acadêmico, preocupações com as dificuldades do professor, e dos futuros professores, para tratar situações combinatórias, e, consequentemente, *combinações simples* (ALVES; SEGADAS, 2012; BORBA; PESSOA; ROCHA, 2013). Além disso, considera-se a importância dos professores reconhecerem diferentes estratégias de comunicar um conceito matemático em sala de aula (RIBEIRO, 2012). Por conta dessas análises, consideramos relevante a proposta aqui apresentada sobre o conceito de *combinação simples*, para o trabalho atrelado à prática de ensino.

Como sublinham Davis e Renert (2012), o objetivo deste tipo de trabalho não é criar uma Matemática formal, uma nova Matemática. Nosso interesse foi organizar, sistematicamente, possibilidades de ensino de uma Matemática já existente que circula nos ambientes formais de ensino. Essa sistematização oferece a pesquisadores e professores a variabilidade que pode ser encontrada, tendo como foco o conceito de *combinação simples* em Análise Combinatória.

Sugerimos a possibilidade de incorporação deste modelo na tarefa de ensinar *combinações simples*, como instrumento de auxilio aos professores, sobre os entendimentos das diversas formas de *realizações* deste conceito. Contudo, investigações sobre os impactos desses tipos de modelos – como o proposto neste estudo - no ensino, talvez, ainda estejam em fase embrionária nos estudos científicos (DAVIS; RENERT, 2014).

É importante destacar que o modelo será enriquecido quanto mais fontes de materiais para análise forem observadas. Tudo isso conduz à necessidade de continuidade desta investigação, em pesquisas futuras que se debrucem sobre fontes como: análise de livros didáticos, de documentos oficiais e de estudo com alunos. Entendemos que ainda há muito o que se investigar, não apenas sobre o conceito de *combinação simples*, mas em termos de Matemática para o Ensino de Análise Combinatória.

O que apresentamos aqui foram resultados iniciais dessa agenda de pesquisa em Educação Matemática, na qual identificamos e discutimos a variabilidade de formas de comunicar o conceito de *combinação simples* na tarefa de ensinar do professor de Matemática.

REFERÊNCIAS

ADLER, Jill. Mathematics for teaching: what is it and why is it important that we talk about it? **Pythagoras:** University of the Witwatersrand, 2005.

ADLER, Jill; DAVIS, Zain. Modelling teaching in mathematics teacher education and the constitution of mathematics for teaching. In: ROWLAND, Tim; RUTHVEN, Kenneth (Ed.) **Mathematical knowledge in teaching**. New York: Springer Netherlands, 2011. (Mathematics Education Library, 50).

ADLER, Jill et al. Working with learners mathematics: exploring key elements of mathematical knowledge for teaching. In: CONFERÊNCIA INTERNACIONAL GRUPO DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 29., 2005. **Anais**…Melbourne: PME, 2005.v.2. p. 1-8. Disponível em: < http://www.emis.de/proceedings/PME29/PME29RRPapers/ PME29Vol2AdlerEtAl.pdf> Acesso em: 01 ago. 2015.

ALVES, Renato; SEGADAS, Claudia. Sobre o ensino da análise combinatória: fatores a serem considerados, lacunas a serem evitadas. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 14, n. 3, p. 405-420. Canoas, 2012.

AZEVEDO, Juliana; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Combinatória: a construção de árvores de possibilidades por alunos dos anos iniciais com e sem uso de software. **ALEXANDRIA- Revista de Educação em Ciência e Tecnologia,** Santa Catarina, v. 6, n. 2, p. 113-140, 2013.

BALL, Deborah L.; BASS, Hyman. Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In: SIMMT, Elaine, DAVIS, Brent (Ed.). **Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group**, 2003. p. 3-14.

BEDNARZ, Nadine; PROULX, Jérôme. Knowing and using mathematics in teaching: conceptual and epistemological clarifications. **For the learning of mathematics**, Canadá, v. 29, n. 3, p. 1-7, Nov. , 2009. Disponível em: < http://flm-journal.org/Articles/90007B35446B191D39748441966D2.pdf> Acesso em: 01 ago. 2015.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; PESSOA, Cristiane Azevêdo dos Santos; ROCHA, Cristiane de Arimatéa. Como estudantes e professores de anos iniciais pensam sobre problemas combinatórios. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 15, n. esp. p. 895-908, 2013.

CORREA, Jane; OLIVEIRA, Gisele. A escrita do problema e sua resolução: o entendimento intuitivo acerca da combinatória. The written text of mathematical word problems and the success of solution. **Educar em Revista**, Curitiba, n. esp. 1, p. 77-91, 2011.

DAVIS, Brent. Subtlety and complexity of mathematics teachers' disciplinary knowledge. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 12., Seoul, Korea, 2012. **Anais**… Seoul, Korea: ICME, 2012.

DAVIS, Brent; RENERT, Moshe. Mathematisc-for-Teaching as shared dynamic participation. **For the Learning of Mathematics**, v. 29, n. 3, p. 37-43, 2009.

___________________. Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge. **Educational Studies in Mathematics**, v. 82, n. 2, p. 245-265, Feb. 2012.

___________________. **The math teachers know:** profound understanding of emergent mathematics. New Yor: Routledge, 2014.

DAVIS, Brent; SIMMT, Elaine. Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. **Educational Studies in Mathematics,** v. 61, n. 3, p. 293-319, March, 2006.

DE-LA-TORRE-UGARTE-GUANILO, Mônica Cecilia; TAKAHASHI, Renata Ferreira; BERTOLOZZI, Maria Rita. Revisão sistemática**:** noções gerais. **Revista da Escola de Enfermagem da USP**, São Paulo, v. 45, n. 5, p. 1260-6, out., 2011.

FERNANDES, José António; CARVALHO, Bárbara do Alvar de; CARVALHO, Carolina Fernandes de. O trabalho colaborativo como meio de desenvolver o conhecimento didático de duas professoras em combinatória. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 12, n. 1, p. 43-74. São Paulo, 2010.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; ZOCH NETO, Lisiane; HOMA, Agostinho Iaqchan Ryokiti. Sequência didática com análise combinatória no padrão SCORM. **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 22, n. 34, p. 27-56, 2009.

LANDÍN, Pedro Rubén; SÁNCHEZ, Ernesto. Níveis de razonamiento probabilístico de estudantes de bachillerato frente a tareas de distribucíon binomial. **Educação Matemática Pesquisa,** v. 12, n. 3, p. 598-618. São Paulo, 2010.

LIMA, Elon Lages et al. **A matemática do ensino médio**. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. v.2 (Professor de Matemática)

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. Zetetiké, Campinas, SP, v. 17, n. 31 , p.105-150, jun. 2009.

___________________. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **EM TEIA Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, São Paulo, v. 1, n. 1, 2010.

PETTICREW, Mark; ROBERTS, Helen. **Sistematic reviews in the social sciences:** a practical guide. Oxford, Blackwell, 2006.

RAMOS, Altina; FARIA, Paulo M.; FARIA, Ádila. Revisão sistemática de literatura: contributo para a inovação na investigação em Ciências da Educação = Systematic review : contribution to innovation in Educational Research . **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v.14, n.41 , p. 17-36, jan. 2014.

RANGEL, Letícia; GIRALDO, Victor; MACULAN, Nelson. Matemática elementar e saber pedagógico de conteúdo: estabelecendo relações. **Professor de Matemática Online – SBM**. v. 2, n. 1, p. 1-14, 2014.

RIBEIRO, Alessandro Jacques. Equação e conhecimento matemático para o ensino: relações e potencialidades para a educação matemática. **Bolema: Boletima de Educação Matemática**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42B, abr., 2012. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/> Acesso em: 02 ago. 2013.

SANTOS, José Plinio Oliveira; MELLO, Margarida Pinheiro; MURARI, Idani Theresinha Calzolari. **Introdução à análise combinatória**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

SANTOS-WAGNER, Vânia Maria Pereira; BORTOLOTI, Roberta D´Angela Menduni; FERREIRA, Juliana Rodrigues. Análise das resoluções corretas e erradas de combinatória de futuros professores de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 15, n. 3, p. 606-629, 2013.

SERRAZINA, Maria de Lurdes; RIBEIRO, Deolinda. As Interações na atividade de resolução de problemas e o desenvolvimento da capacidade de comunicar no ensino básico. **Bolema,** Rio Claro, v. 26, n. 44, p. 1367-1393, 2012.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. O conceito em matemática e seus contextos. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v.13,n. 20/21 , p. 47-58, dez. 2006.

VARGAS, Pedro Rubén Landín; SÁNCHEZ, Ernesto. Níveis de razonamiento probabilístico de estudantes de bachillerato frente a tareas de distribucíon binomial. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 12, n. 3, p. 598-618. 2010.

VEGA, Danielle Avanço; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Etapas de escolha na resolução de produtos cartesianos, arranjos, combinações e permutações. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 7, n. 3, 2014.

VICTOR, Liz. Systematic reviewing. **Social research update,** Surrey, n. 54, 2008.

APÊNDICE A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, ____, portador do RG nº __________________ aceito participar da pesquisa intitulada “Matemática para o Ensino do conceito de Combinação Simples” sob a responsabilidade do pesquisador Jean Lázaro da Encarnação Coutinho. Autorizo e concordo, para os devidos fins acadêmicos, o uso das informações audiovisuais geradas a partir de minha participação nos encontros conduzidos por este pesquisador no curso Análise Combinatória: Reflexões e Possibilidades, para que ele possa utilizá-las em sua pesquisa de Mestrado desenvolvida no programa de Pós-Graduação em Educação, da Universidade Federal da Bahia, sob orientação do Professor Doutor Jonei Cerqueira Barbosa. Confirmo que fui informado que minha identidade será resguardada ao longo da pesquisa por meio da utilização de pseudônimo. Confirmo também que li as informações contidas neste documento antes de assiná-lo e que recebi uma cópia deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

Dou meu consentimento de livre e espontânea vontade para participar deste estudo.

Barreiras, ___ de ______________ de 2015.

________________________________ ________________________________

Assinatura do Participante da Pesquisa Assinatura do pesquisador responsável

APÊNDICE B – Questionário

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

Questionário

1) Nome

____

2) Formação

Formação inicial ( ) Graduado ( ) Especialista ( ) Mestre ( ) Doutor ( )

3) Sua graduação é em Matemática?

Sim ( ) Não ( ). Qual? ____

4) Quanto tempo de experiência na docência em Matemática você possui?

____

5) Em qual rede de ensino você atua?

Municipal ( ) Estadual ( ) Federal ( )

6) Em que nível você atua?

Fundamental ( ) Médio ( ) Superior ( )

7) Qual o nome da escola?

____

8) Você já mencionou de alguma forma aspectos da Análise Combinatória neste tempo de experiência docente?

Sim (   )   Não (   )

9) Em qual nível de ensino isso aconteceu ou acontece?

Fundamental (   )   Médio (   )   Superior (   )

10) Durante sua formação, você estudou o conteúdo Análise Combinatória?

Sim (   )   Não (   )   Não lembro (   )

11) Se estudou, quando ocorreu?

Fundamental (   )   Médio (   )   Graduação (   )   Pós-graduação (   )   Não lembro ( )

12) Se estudou, qual o tópico apresentou maior dificuldade de aprendizagem?

____

13) Atuando como docente, qual o tópico de Análise Combinatória você tem maior dificuldade em ensinar? E qual o aluno apresenta maior dificuldade em entender? Ao que você atribui essas dificuldades?

____
____
____
____
____