



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

Caio Batalha Dias Oliveira

**Modelos Aditivos Generalizados para Posição, Escala e Forma (GAMLSS) na
modelagem paramétrica da taxa de congestionamento na fase de
conhecimento**

Salvador
2015

Caio Batalha Dias Oliveira

Modelos Aditivos Generalizados para Posição, Escala e Forma (GAMLSS) na modelagem paramétrica da taxa de congestionamento na fase de conhecimento

Trabalho monográfico apresentado ao Curso de Bacharelado em Estatística, Departamento de Estatística, Instituto de Matemática, Universidade Federal da Bahia, como requisito para aprovação na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso II para obtenção do grau de Bacharel em Estatística.

Orientador: Prof. Dr. Jalmar Manuel Farfan Carrasco

Salvador
2015

*Dedico este trabalho à minha mãe Rosângela
Santana Dias.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, por guiar minha vida e iluminar minha mente.

Aos meus pais, Rosângela Santana Dias e Henrique Duarte Oliveira por estarem sempre ao meu lado.

A Clara e Camila, minhas irmãs, pelo afeto.

As minhas tias Neide, Naíra, Naiara, Nilce, Jane, Márcia, Angela, e aos meus tios Jorge, Roque, João.

Aos meus avós, pelo carinho.

Aos meus primos, Laise, Diana, Taís e Leonardo, os quais eu tenho como irmãos.

Aos meus padrinhos, Luís Cláudio e Lara Ferrari, pelo acompanhamento ao longo da vida, principalmente na minha infância e adolescência.

A minha afilhada Sara.

A Maíra, pela dedicação em momentos difíceis.

A Aullus, pelo incentivo aos estudos relacionados a assuntos extra-curriculares, que influenciaram muito em minhas decisões.

A Carlos Marlon, Giuliano, “Cachorro”, “Beni”, Nelci, Márcia Telma, Ênio Veras, Diogo, pela amizade.

A Riane Brito, pelo apoio na apresentação deste trabalho.

Ao meu orientador Jalmar Manuel Farfan Carrasco, que com paciência, disponibilidade, versatilidade e dedicação, me conduziu de forma segura na produção deste trabalho.

A professora Giovana Oliveira Silva, pelos momentos de pesquisa e pelos conselhos que significativamente contribuíram em minha vida. Eu guardo todos com muito carinho.

Aos professores: Denise, Gilênio, Leila, Lia Terezinha, Andrea, Gecynalda, Maristela, Verônica, entre outros, pelo conhecimento compartilhado, bem como ao apoio acadêmico no decorrer deste curso.

A Coordenadoria de Pesquisa e Estatística do Tribunal Regional do Trabalho da 5ª Região, pela experiência de vida e pela disposição do banco de dados. Gostaria de agradecer especialmente a Fábio, pelo auxílio neste trabalho.

A Lizandra e a Renata, por comporem a banca deste trabalho de conclusão de curso e pelas sugestões.

Enfim, a todos que de algum modo se fizeram presentes nessa caminhada, muito obrigado!!!

*Ainda que eu atravessasse o vale da sombra da morte, não temerei mal algum porque o
Senhor está comigo. (Salmo 23:4)*

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo principal estudar a família dos Modelos Aditivos Generalizados para Posição, Escala e Forma (GAMLSS) no âmbito paramétrico. Esta classe de modelos foi proposta por [Rigby R.A. e Stasinopoulos \(2005\)](#), com o propósito de aumentar o leque de distribuições de probabilidade para a variável resposta, bem como permitir o uso de termos paramétricos e não paramétricos para as variáveis explicativas.

Este trabalho também objetiva aplicar a família dos modelos GAMLSS paramétrico a um conjunto de dados. Este por sua vez, foi fornecido pelo Tribunal Regional do Trabalho da 5ª região, que engloba o estado da Bahia. Uma característica deste conjunto de dados é que a variável resposta, taxa de congestionamento na fase de conhecimento é limitada no intervalo contínuo $(0,1)$. Desta forma, uma distribuição de probabilidade que tem sido relevante para este tipo variáveis é a distribuição Beta. Técnicas bootstrap não-paramétrico são utilizadas com o intuito de corrigir o viés dos estimadores. Encontramos também, diferentes tipos de intervalos de confiança bootstrap.

Palavras-chave: GAMLSS, regressão beta, bootstrap, taxa de congestionamento.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	8
LISTA DE TABELAS	9
1 INTRODUÇÃO	10
2 REFERENCIAL TEÓRICO	13
2.1 Modelos Lineares Generalizados	13
2.1.1 Estimação e diagnóstico nos MLG	14
2.2 Modelos Aditivos Generalizados	15
2.3 Modelos aditivos generalizados, para posição, escala e forma - GAMLSS . .	16
2.3.1 Análise de diagnóstico	21
3 MATERIAIS E MÉTODOS	22
3.1 MATERIAIS	22
3.2 MÉTODOS	23
3.2.1 Modelo de regressão beta	23
3.2.2 Método de reamostragem Bootstrap	29
3.2.2.1 Intervalo bootstrap básico	31
3.2.2.2 Intervalo bootstrap normal	31
3.2.2.3 Intervalo bootstrap percentil	32
3.2.2.4 Intervalo bootstrap BCa	32
4 RESULTADOS	34
5 CONCLUSÕES	45
REFERÊNCIAS	46
APÊNDICE	49
ANEXO A	55
ANEXO B	56
ANEXO C	57

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Gráficos de histograma para variáveis explanatórias, onde (a) se refere a Carga de trabalho, (b) Proporção de decisões sem mérito, e (c) prazo até a primeira audiência.	34
Figura 2 - Gráficos de histograma para variáveis explanatórias, onde (d) se refere a Sentenças alteradas, (e) Número de servidores , e (f) Número de audiências.	35
Figura 3 - Gráficos de boxplot para variáveis explanatórias, onde (a) se refere a Carga de trabalho, (b) Proporção de decisões sem mérito, e (c) prazo até a primeira audiência.	35
Figura 4 - Gráficos de boxplot para variáveis explanatórias, onde (d) se refere a Senteças alteradas, (e) Número de servidores , e (f) Número de audiências.	36
Figura 5 - Gráficos de setores onde (a) corresponde a PJE, e (b) a Origem	36
Figura 6 - Gráficos de dispersão, considerando as variáveis:(a) Sentenças reformadas, (b) Carga de trabalho os magistrados,(c) Número de audiência, com a variável Taxa de congestionamento na fase de conhecimento.	36
Figura 7 - Gráficos de dispersão, considerando as variáveis: Número de servidores, Proporção de decisões com mérito e Número de audiências, com a variável Taxa de congestionamento na fase de conhecimento.	37
Figura 8 - Boxplots que relaciona variáveis categóricas e variável resposta	37
Figura 9 - Gráfico de visualização da distribuição beta a variável resposta	38
Figura 10 - Worm-plot, considerando modelo final ajustado	41
Figura 11 - Gráficos de resíduos, considerando modelo final ajustado	41

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Distribuições de probabilidade contínuas pertencente a família GAMLSS	19
Tabela 2 - Distribuições de probabilidade discretas pertencente a família GAMLSS	20
Tabela 3 - Distribuições de probabilidade inflacionadas pertencente a família GAMLSS	21
Tabela 4 - Tabela com estatísticas descritivas das variáveis contínuas	34
Tabela 5 - Estimativa dos parâmetros considerando todas as variáveis para $g(\mu)$. .	39
Tabela 6 - Valores obtidos para modelo final encontrado considerando a distribuição beta.	39
Tabela 7 - Tabela com valores do AIC, BIC, GAIC e $PseudoR^2$	40
Tabela 8 - Intervalos de confiança gerados para os parâmetros β_{j1} e β_{m2}	42
Tabela 9 - Valores obtidos através do bootstrap.	42
Tabela 10 -Intervalos de confiança bootstrap	44
Tabela 11 -Banco de dados	57

1 INTRODUÇÃO

Em 1809, o alemão Carl Friedrich Gauss, publicou um artigo intitulado *Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solum Ambientium*, ([MEMÓRIA, 2004](#)). Nele se encontram combinações de observações e curva dos erros, onde esses estudos o levaram a enunciar o Princípio dos Mínimos Quadrados. Esta curva de erros, também conhecida como curva normal e a utilização do princípio dos mínimos quadrados, teve grande contribuição no que é conhecido como modelo de regressão clássica ou modelo de regressão simples. Este tipo de modelo, visa estudar a relação entre uma variável explicativa e uma variável resposta. Algumas suposições para regressão clássica são: que a variável resposta siga uma distribuição normal, os erros sejam homoscedásticos (isto é, que os erros apresentem variância constante), sejam normalmente distribuídos e independentes. Na regressão múltipla, onde são utilizadas mais que uma variável explicativa observa-se ainda a questão da multicolinearidade.

Devido a funcionalidade e com os avanços tecnológicos, estudos que envolvem modelos de regressão foram se desenvolvendo e foi percebido que para alguns tipos de variáveis resposta a atribuição da distribuição normal não era cabida, influenciando o desenvolvimento de técnicas que visassem o uso de outras distribuições para a variável resposta. Assim foram propostos modelos de regressão que utilizassem outras distribuições de probabilidade, por exemplo as distribuições Poisson, binomial, gama, binomial negativa, e normal inversa. Koopman, Pitman e Darmois ([CORDEIRO; DEMÉTRIO, 2007](#)), através de propriedades de suficiência estatística, reuniram estas e outras distribuições de probabilidade, numa classe denominada como família exponencial. Esta classe de distribuições, serviu de base para que fossem elaborados os Modelos Lineares Generalizados (MLG) ([NELDER; WEDDERBURN, 1972](#)).

Como nem sempre termos paramétricos são suficientes para explicar modelos, o uso de termos aditivos fizeram-se necessários ([HASTIE; TIBSHIRANI, 1990](#)), onde foram propostos os Modelos Aditivos Generalizados (MAG). Tanto os MLG quanto os MAG, restringem a variável resposta às distribuições de probabilidade pertencentes à família exponencial e não admitem variáveis explicativas para modelar outros parâmetros que não seja a média.

A classe de modelos aditivos generalizados para posição, escala e forma (GAMLSS), permite que a variável resposta pertença a uma família mais ampla que a família exponencial, denominada família D , onde além de considerar uma estrutura sistemática para o parâmetro de posição μ , os parâmetros: σ de escala, τ e ν de forma, podem ser associados a grupos de variáveis explicativas, a partir de um preditor linear η . O preditor η , é composto por duas componentes: uma paramétrica e outra não-paramétrica. A segunda permite associar funções suavizadoras, e a inclusão de termos de efeitos aleatórios.

Este trabalho de monografia é motivado por um conjunto de dados concedido pelo Tribunal Regional do Trabalho da quinta região (TRT5) que serve ao estado da Bahia. O TRT5 tem entre suas tarefas elaborar estatísticas a respeito da Justiça do Trabalho. Este órgão possui 88 unidades judiciárias distribuídas entre cidades do interior e capital. Um dos objetivos do TRT5 é investigar quais variáveis influenciam na taxa de congestionamento na fase de conhecimento que é descrita como a vazão dos processos que são julgados em um determinado período. Nesse sentido, pretende-se investigar a relação da taxa de congestionamento na fase de conhecimento com algumas variáveis de interesse.

A taxa de congestionamento na fase de conhecimento corresponde a uma variável limitada no intervalo $(0,1)$, sendo recomendado, portanto, a utilização da distribuição Beta. Através de simulações [Kieschnick e McCullough \(2003\)](#) destacam que a distribuição Beta como a melhor este tipo de variável resposta. Posteriormente, [Ferrari S. e Cribari-Neto \(2004\)](#) propõem o modelo de regressão beta.

O modelo de regressão beta em alguns casos mostra resultados viesados e, um método recomendado para solução destes casos é o método bootstrap ([OSPINA; CRIBARI-NETO; VASCONCELLOS, 2006](#)), com o intuito de corrigir possíveis vieses, dos estimadores de máxima verossimilhança. Uma das distribuições contínuas que pertencem a família D é a distribuição beta. Nesse sentido, será usado neste trabalho a classe de família GAMLSS, para analisar o conjunto de dados.

É interessante perceber que este estudo adentra uma área ainda pouco explorada conhecida como Jurimetria. O termo Jurimetria é dado pelo advogado Minnesota Lee Lovinger, que escreveu o artigo “Jurimetrics: the methodology of legal inquiry” na década de 60 ([ZABALA; SILVEIRA, 2014](#)). Este estudo objetivou servir na tomada de decisões judiciais. Esta proposta não foi bem aceita devido ao conceito de que o pensamento de um juiz, ao decidir por uma causa, não é nem de perto semelhante ao de estatístico quando desenvolve uma equação. Porém, com o passar do tempo, avanços tecnológicos possibilitaram, que estudos de jurimetria ganhassem espaço, devido ao serviço de segurança jurídica, previsibilidade de decisões judiciais, entre outros. Jurimetria recebe também o conceito de Estatística aplicada ao Direito. No Brasil, técnicas estatísticas aplicadas ao Direito são vistas a partir de 1970 ([HADDAD, 2010](#)), porém ainda em pouca intensidade. Este trabalho visa enriquecer este campo da ciência, bem como trazer informações de amplo interesse ao TRT5, uma vez que o estudo estatístico da taxa de congestionamento na fase de conhecimento, pode apontar elementos que reduzam essa taxa, melhorando o maquinário judicial.

Assim os objetivos deste trabalho são:

- Estudar a estrutura da família GAMLSS;
- Estudar métodos de estimação e análise de diagnóstico da família GAMLSS;

- Aplicar GAMLSS estritamente paramétrico, ao conjunto de dados sugerido pelo TRT5;
- Utilizar método bootstrap não paramétrico para corrigir o viés e encontrar intervalos de confiança.

Este trabalho foi elaborado utilizando o editor de texto \LaTeX , com interface gráfica TexnicCenter na versão 2.02. Para análise dos dados foi utilizado o *software* R na versão 3.1.1, o qual disponibiliza os pacotes `gamlss()` para ajuste de modelos da família GAMLSS, e `boot()` para calculo de medidas bootstrap.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no Capítulo 2, será apresentado o referencial teórico, onde o mesmo traz informações sobre os MLG, MAG e GAMLSS. O Capítulo 3 descreve a composição do conjunto de dados e abordamos o modelo de regressão beta e bootstrap; os resultados estarão apresentados no Capítulo 4. Finalmente, tem-se o Capítulo 5 que apresenta algumas conclusões.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Esta seção tem como objetivo revisar conceitos que incentivam o uso da família dos modelos GAMLSS, como proposta de estudo. O primeiro ponto a ser abordado são informações sobre os modelos lineares generalizados (MLG). Logo após os modelos aditivos generalizados (MAG) serão tratados, ressaltando que este é uma extensão dos modelos MLG, onde termos não paramétricos são permitidos. E para finalizar informações sobre os modelos aditivos generalizados (GAMLSS) serão trazidas.

2.1 Modelos Lineares Generalizados

Os modelos lineares generalizados (MLG), foram propostos por (NELDER; WEDDERBURN, 1972), onde a idéia básica consiste em abrir o leque de distribuições de probabilidade para a variável resposta. Estas devem pertencer a família exponencial proposta por Koopman, Pitman e Darmais, (CORDEIRO; DEMÉTRIO, 2007). Algumas dessas tornaram-se bastante conhecidas como por exemplo: normal, normal inversa, binomial, binomial negativa, Poisson e gama. Dizemos que uma distribuição pertence à família exponencial quando, dado Y_1, \dots, Y_n variáveis aleatórias independentes, com função densidade de probabilidade, descrita como:

$$f(y_i, \theta_i, \phi) = \exp[\phi\{y_i\theta_i - b(\theta_i)\} + c(y_i, \phi)], \quad (2.1)$$

em que $E(Y_i) = \mu_i = b'(\theta_i)$, $\text{Var}(Y_i) = \phi^{-1}V_i$, $V_i = d\mu_i/d\theta_i$ é a função de variância e $\phi^{-1} > 0$ é o parâmetro de dispersão. Uma propriedade que envolve a distribuição de Y e a função de variância é:

$$\sqrt{\phi}(Y - \mu) \xrightarrow{d} N(0, V(\mu)), \text{ quando } \phi \rightarrow \infty,$$

ou seja, para ϕ grande Y segue distribuição aproximadamente normal de média μ e variância $\phi^{-1}V(\mu)$. Esse tipo de abordagem, diferente da usual em que n é grande, foi introduzida por (JORGENSEN, 1987). Os MLG são definidos por (2.1), e pela componente sistemática

$$g(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\eta}$$

onde $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\beta}$ é o preditor linear, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$, para $p < n$, é um vetor de parâmetros desconhecidos a serem estimados, $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{ip})$ representa os valores de p variáveis explicativas e $g(\cdot)$ é uma função monótona e diferenciável, conhecida por função de ligação.

2.1.1 Estimação e diagnóstico nos MLG

O processo de estimação do vetor de parâmetros β é dada pela função de máxima verossimilhança. Quando respeitadas as condições de regularidade (Anexo A), os estimadores são: consistentes, eficientes e não-viesados (Anexo B).

O logaritmo da função de verossimilhança é dado por

$$\ell(\theta) = \sum_{i=1}^n \phi\{y_i\theta_i - b(\theta_i)\} + \sum_{i=1}^n c(y_i, \phi).$$

Derivando parcialmente $\ell(\theta)$ com respeito ao vetor de parâmetros β obtém-se o vetor escore dos MLG. Para todo $j = 1, \dots, p$, temos que:

$$\begin{aligned} U_{\beta_j} = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_j} &= \sum_{i=1}^n \phi \left\{ y_i \frac{d\theta_i}{d\mu_i} \frac{d\mu_i}{d\eta_i} \frac{d\eta_i}{d\beta_j} - \frac{db(\theta_i)}{d\theta_i} \frac{d\theta_i}{d\mu_i} \frac{d\mu_i}{d\eta_i} \frac{d\eta_i}{d\beta_j} \right\}, \\ &= \sum_{i=1}^n \phi \left\{ y_i \mathbf{V}_i^{-1} \frac{d\mu_i}{d\eta_i} x_{ij} - \mu_i \mathbf{V}_i^{-1} \frac{d\mu_i}{d\eta_i} x_{ij} \right\}, \\ &= \sum_{i=1}^n \phi \left\{ \sqrt{\frac{w_i}{\mathbf{V}_i}} (y_i - \mu_i) x_{ij} \right\}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde $w_i = (d\mu_i/d\eta_i)$. A equação (2.2) pode ser escrita na forma matricial para todo $j = 1, \dots, p$, como:

$$\mathbf{U}_\beta = \phi \mathbf{X}^\top \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{V}^{-1/2} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}),$$

onde \mathbf{X} é uma matrix $n \times p$ de posto completo onde as linhas são apresentadas por \mathbf{x}_i^\top , $i = 1, \dots, n$, $\mathbf{W} = \text{diag}(w_1, \dots, w_n)$ é a matriz de pesos, $\mathbf{V} = \text{diag}(V_1, \dots, V_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$ e $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^\top$. Seja $l = 1, \dots, p$, a informação de Fisher do vetor de parâmetros β é dada pela derivada de $\ell(\theta)$ com respeito ao vetor de parâmetros β até a segunda ordem, da forma:

$$\begin{aligned} \ddot{\ell}_{\beta_j \beta_l} = \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \beta_j \partial \beta_l} &= \phi \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_i) \frac{d^2 \theta_i}{d\mu_i^2} \left(\frac{d\mu_i}{d\eta_i} \right)^2 x_{ij} x_{il} + \phi \sum_{i=1}^n \{y_i - \mu_i\} \frac{d\theta_i}{d\mu_i} \\ &\quad \left(\frac{d^2 \mu_i}{d\eta_i^2} \right)^2 x_{ij} x_{il} - \phi \sum_{i=1}^n \frac{d\theta_i}{d\mu_i} \left(\frac{d\mu_i}{d\eta_i} \right)^2 x_{ij} x_{il}. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{K}}(\beta) = \mathbf{E} \left(- \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \beta_j \partial \beta_l} \right) &= \phi \sum_{i=1}^n \frac{d\theta_i}{d\mu} \left(\frac{d\mu_i}{d\eta_i} \right)^2 x_{ij} x_{il}, \\ &= \phi \sum_{i=1}^n \frac{(d\mu_i/d\eta_i)^2}{V_i} x_{ij} x_{il}, \\ &= \phi \sum_{i=1}^n w_i x_{ij} x_{il}. \end{aligned}$$

Matricialmente a informação de Fisher para o vetor de parâmetros β é:

$$\ddot{K}(\beta) = \phi \mathbf{X}^\top \mathbf{W} \mathbf{X}. \quad (2.3)$$

Uma fase importante no ajuste em modelos de regressão é a verificação da adequação do modelo ao conjunto de dados, esta fase é conhecida como bondade do ajuste. Nesta fase são feitas análises dos resíduos, da componente do desvio, de influência, entre outros (PAULA, 2004).

Uma medida usual de análise de diagnóstico é a função desvio que é definida por:

$$D^*(\mathbf{y}; \hat{\boldsymbol{\mu}}) = \phi D(\mathbf{y}; \hat{\boldsymbol{\mu}}) = 2\{\ell(\mathbf{y}; \mathbf{y}) - \ell(\hat{\boldsymbol{\mu}}; \mathbf{y})\},$$

em que $D^*(\mathbf{y}; \hat{\boldsymbol{\mu}})$ representa a distância entre o logaritmo da função de verossimilhança do modelo com n parâmetros e o modelo a ser avaliado, com p parâmetros, compreendendo a estimativa de máxima verossimilhança $\hat{\boldsymbol{\beta}}$. Um valor pequeno para a função desvio indica que, para um número menor de parâmetros, obtemos um ajuste tão bom quanto o ajuste com o modelo $p = n$.

Também tem-se o critério de Akaike (AIC), proposto por (AKAIKE, 1974) que é definida como:

$$AIC = -2\ell(\hat{\boldsymbol{\beta}}) + 2p.$$

O critério de informação bayesiano proposto por Schwarz (1978) (SCHWARZ et al., 1978), também é usual para selecionar modelos e de maneira análoga ao AIC, que é definida por

$$BIC = -2\ell(\hat{\boldsymbol{\beta}}) + p \log(n).$$

Emfim, considera-se melhor o modelo com melhor ajuste aos dados aquele que apresenta menores valores para os criterios AIC e BIC.

2.2 Modelos Aditivos Generalizados

Os modelos aditivos generalizados(MAG) (HASTIE; TIBSHIRANI, 1990) permitem a utilização de funções suavizadoras na estrutura do modelo de regressão na componente sistemática deixando o modelo mais flexível, do que quando trabalhadas de forma fixa. Algumas funções suavizadoras conhecidas são: os splines cúbicos, splines penalizados, polinômios fracionais entre outros (BITTENCOURT et al., 2010). De forma análoga aos MLG, o MAG atribui à variável resposta uma distribuição de probabilidade pertencente a família exponencial, de acordo com Gonçalves (2009) ela pode ser apresentada de três formas:

- a) Semi-paramétrica

$$g(\mu_i) = \eta_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_p x_{pi} + f(x_{(p+1)i}) + \dots + f(x_{di}),$$

- b) Paramétrica

$$g(\mu_i) = \eta_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_p x_{pi},$$

- c) Não paramétrica

$$g(\mu_i) = \eta_i = \beta_0 + f(x_{(1i)}) + \dots + f(x_{(pi)}),$$

onde $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ são parâmetros desconhecidos a serem estimados e $f(\cdot)$ corresponde a funções suavizadoras.

A estimação nos MAG, é dada pela combinação de dois processos iterativos: o retroajuste (*backfitting*) e o procedimento de propensão local, mais detalhes ver [Gonçalves \(2009\)](#). Observe que o MAG paramétrico, apresenta processo de estimação e análise de diagnóstico igual a nos MLG.

2.3 Modelos aditivos generalizados, para posição, escala e forma - GAMLSS

Na estrutura dos modelos aditivos generalizados para posição, escala e forma (GAMLSS), termos aditivos e paramétricos são utilizados para modelar, p parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)^\top$, de uma função densidade de probabilidade $f(y|\boldsymbol{\theta})$. Considerando-se as variáveis resposta y_i , para $i = 1, 2, \dots, n$, independentes e condicionais a $\boldsymbol{\theta}_i$, com $f(y_i|\boldsymbol{\theta}_i)$, onde $\boldsymbol{\theta}_i = (\theta_{i1}, \dots, \theta_{ip})^\top$ é um vetor de p parâmetros relacionado às variáveis explanatórias e efeitos aleatórios. Enfatizando que quando os valores assumidos pelas cováriaveis são estocásticos, ou as observações y_i dependem de seus valores passados, então $f(y_i|\boldsymbol{\theta}_i)$ é interpretada como sendo condicional a estes valores ([FLORENCIO, 2010](#)).

Seja $\mathbf{y}^\top = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ o vetor de observações da variável resposta, considerando $k = 1, 2, \dots, p$, uma função monótona de $g_k(\cdot)$ relacionando o k -ésimo parâmetro θ_k às variáveis explanatórias e efeitos aleatórios por meio de um modelo aditivo escrito da forma:

$$g_k(\boldsymbol{\theta}_k) = \boldsymbol{\eta}_k = \mathbf{X}_k^\top \boldsymbol{\beta}_k + \sum_{j=1}^{J_k} \mathbf{Z}_{jk} \boldsymbol{\gamma}_{jk}, \quad (2.4)$$

em que $\boldsymbol{\theta}_k$ e $\boldsymbol{\eta}_k$ são vetores ($n \times 1$), por exemplo, $\boldsymbol{\theta}_k = (\theta_{1k}, \dots, \theta_{nk})^\top$, $\boldsymbol{\beta}_k = (\beta_{1k}, \dots, \beta_{J'_k})^\top$ é um vetor de parâmetros de tamanho J'_k , \mathbf{X}_k e \mathbf{Z}_{jk} são matrizes de covariáveis conhecidas e de ordens $(n \times J'_k)$ e $(n \times q_{jk})$, respectivamente. Já $\boldsymbol{\gamma}_{jk}$ é uma variável aleatória q_{jk} -dimensional. O Modelo definido em (2.4) é denominado de GAMLSS ([RIGBY R.A. E STASINOPOULOS, 2005](#)).

Os vetores $\boldsymbol{\gamma}_{jk}$, para $j = 1, 2, \dots, J_k$, podem ser manipulados e combinados em um único vetor $\boldsymbol{\gamma}_k$ e numa única matriz de covariáveis \mathbf{Z}_k . Entretanto, a formulação proposta em (2.4) é mais apropriada por dois motivos: facilita o uso dos algoritmos de retroajuste (*backfitting*) e permite que combinações de diferentes tipos de termos aditivos e/ou de

efeitos aleatórios sejam facilmente incorporadas no modelo (RIGBY R.A. E STASINO-POULOS, 2005). No caso em que $J_k = 0$ não há termos aditivos associados aos parâmetros da distribuição. Então, se reduz a um modelo linear completamente paramétrico dado por

$$g_k(\boldsymbol{\theta}_k) = \boldsymbol{\eta}_k = \mathbf{X}_k^\top \boldsymbol{\beta}_k. \quad (2.5)$$

Quando $Z_{jk} = I_n$, em que I_n é uma matriz identidade de ordem $n \times n$, $\gamma_{jk} = h_{jk} = h_{jk}(x_{jk})$ para todas as combinações de j e k no Modelo (2.4), temos

$$g_k(\boldsymbol{\theta}_k) = \boldsymbol{\eta}_k = \mathbf{X}_k^\top \boldsymbol{\beta}_k + \sum_{j=1}^{J_k} h_{jk}(x_{jk}), \quad (2.6)$$

em que x_{jk} , para $j = 1, 2, \dots, J_k$ e $k = 1, 2, \dots, p$, são vetores de tamanho n . A função h_{jk} é uma função desconhecida da variável explanatória x_{jk} e $h_{jk} = h_{jk}(x_{jk})$, é um vetor que avalia h_{jk} em x_{jk} . Neste caso, assume-se que os vetores x_{jk} são conhecidos e o modelo apresentado na Equação (2.6) é denominado de GAMLSS aditivo semi-paramétrico linear.

O Modelo (2.6) pode ser estendido para permitir a inclusão de termos não-lineares na modelagem dos k parâmetros da distribuição, na forma:

$$g_k(\boldsymbol{\theta}_k) = \boldsymbol{\eta}_k = h_k(\mathbf{X}_k, \boldsymbol{\beta}_k) + \sum_{j=1}^{J_k} h_{jk}(x_{jk}), \quad (2.7)$$

em que h_k para $k = 1, 2, \dots, p$ são funções não-lineares e \mathbf{X}_k é uma matriz de covariáveis conhecida de ordem $n \times J_k''$. O Modelo (2.7) é designado de GAMLSS aditivo semiparamétrico não-linear. Se $J_k = 0$, o Modelo (2.7) transforma-se num GAMLSS paramétrico não-linear, dado por:

$$g_k(\boldsymbol{\theta}_k) = \boldsymbol{\eta}_k = h_k(\mathbf{X}_k, \boldsymbol{\beta}_k). \quad (2.8)$$

Quando $h_k(\mathbf{X}_k, \boldsymbol{\beta}_k) = \mathbf{X}_k \boldsymbol{\beta}_k$, para $k = 1, 2, \dots, p$, então, o Modelo (2.8) se transforma no modelo paramétrico linear (2.5). Note que alguns termos de $h_k(\mathbf{X}_k, \boldsymbol{\beta}_k)$ podem ser lineares, o que resulta num modelo GAMLSS com a combinação de termos paramétricos lineares e não-lineares.

É comum encontrar artigos que atribuem quatro parâmetros ($p = 4$), comumente caracterizados por posição (μ), escala (σ), assimetria (ν) e curtose (τ). Enquanto os dois primeiros parâmetros populacionais θ_1 e θ_2 no Modelo (2.4), aqui denotados por μ e σ , são referidos na literatura por parâmetros de posição (ou locação) e escala, respectivamente, os dois últimos $\nu = \theta_3$ e $\tau = \theta_4$ são denominados de parâmetros de forma. Com isto, temos os seguintes modelos:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\eta}_1 = \mathbf{X}_1^\top \boldsymbol{\beta}_1 + \sum_{j=1}^{J_1} \mathbf{Z}_{j1} \gamma_{j1}, \\ g_2(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\eta}_2 = \mathbf{X}_2^\top \boldsymbol{\beta}_2 + \sum_{j=1}^{J_2} \mathbf{Z}_{j2} \gamma_{j2}, \\ g_3(\boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{\eta}_3 = \mathbf{X}_3^\top \boldsymbol{\beta}_3 + \sum_{j=1}^{J_3} \mathbf{Z}_{j3} \gamma_{j3}, \\ g_4(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\eta}_4 = \mathbf{X}_4^\top \boldsymbol{\beta}_4 + \sum_{j=1}^{J_4} \mathbf{Z}_{j4} \gamma_{j4}. \end{array} \right.$$

Vale ressaltar que a estrutura do modelo GAMLSS, tem a opção de fazer modelagem com mais de quatro parâmetros.

A função densidade de probabilidade $f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$ no Modelo (2.4), pode pertencer a uma família de distribuições bastante geral sem que haja a obrigatoriedade de uma forma explícita para \mathbf{y} .

O GAMLSS, atribui à variável resposta, distribuições de probabilidade que pertencem a família \mathcal{D} , a qual engloba distribuições da família exponencial, entre outras. Usando a seguinte notação, tem-se:

$$\mathbf{y} \sim D\{g_1(\theta_1) = t_1, g_2(\theta_2) = t_2, \dots, g_p(\theta_p) = t_p\}, \quad (2.9)$$

onde $\theta_1, \dots, \theta_p$, são parâmetros de D , g_1, \dots, g_p são funções de ligação, e t_1, \dots, t_p são as fórmulas dos modelos para os termos explanatórios e efeitos aleatórios nos preditores η_1, \dots, η_p , respectivamente. Um exemplo seria:

$$\mathbf{y} \sim NO\{\mu = x, \log(\sigma)\} \quad (2.10)$$

é um modelo GAMLSS em que a variável resposta \mathbf{y} tem distribuição normal (NO), o parâmetro de posição é μ , o qual é modelado usando uma função de ligação identidade sendo x o termo seu termo explanatório, já o parâmetro de escala σ é modelado a partir de um modelo log-linear em x .

No *software R*, os modelos GAMLSS são implementados, a restrição é que as primeiras derivadas de $f(y_i|\mu_i, \sigma_i, \nu_i, \tau_i)$ em relação ao parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ sejam computáveis. Derivadas explícitas são preferíveis, mas é possível utilizar funções numéricas para o calculo delas.

A seguir são descritas as distribuições de probabilidade, que estão implementadas no pacote `gamlss()` do *software R*, considerando suas respectivas nomenclaturas e funções de ligação padrão, divididas em distribuições contínuas, discretas e inflacionadas.

A Tabela (1) mostra todas as distribuições contínuas.

Tabela 1 – Distribuições de probabilidade contínuas pertencente a família GAMLSS

Distribuições de probabilidade	Nomenclatura	μ	σ	ν	ρ
Beta	BE()	logito	logito	-	-
Box-Cox, Cole e Green	BCCG()	ident	log	ident	-
Exponencial poder Box-Cox	BCPE()	ident	log	ident	log
Box-Cox-t	BCT()	ident	log	ident	ident
Delaport	DEL()	log	log	logito	-
Exponencial	EXP()	log	-	-	-
Exponencial Gaussiana	exGAUS()	ident	log	log	-
Beta exponencial tipo 2	EGB2()	ident	log	log	log
Gama	GA()	ident	ident	-	-
Beta Generalizada tipo 1	GB1()	ident	log	log	log
Beta Generalizada tipo 2	GB2()	ident	log	log	log
Gama Generalizada	GG()	log	log	ident	-
Inversa gaussiana generalizada	GIG()	log	log	ident	-
t generalizada	GT()	ident	log	log	log
Geometrica	GEOM()	log	-	-	-
Gumbel	GU()	ident	log	-	-
Gumbel	IGAMMA()	log	log	-	-
Inversa gaussiana	IG()	log	log	-	-
Johnson's SU	JSU()	ident	log	ident	log
Logartimica	LG()	logito	logito	-	-
Lógica	LO()	ident	log	-	-
Log-Normal	LOGNO()	ident	log	-	-
Log-Normal (Box-Cox)	LNO()	ident	log	-	-
Exponencial Normal t	NET()	ident	log	-	-
Normal	NO()	ident	log	-	-
Familia normal	NOF()	ident	log	ident	-
Pareto tipo 2	PARETO2()	log	log	-	-
Pareto tipo 2 original	PARETO2o()	log	log	-	-
Exponencial poder	PE()	ident	log	log	-
Exponencial poder tipo 2	PE2()	ident	log	log	-
Extrema generalizada reversa	RGE()	ident	log	log	-
Gumbel reversa	RG()	ident	Log	-	-
Skew Power Exponential type 1	SEP1()	ident	log	log	log
Skew Power Exponential type 2	SEP2()	ident	log	log	log

Tabela 1 – (Continuação)

Distribuições de probabilidade	Nomenclatura	μ	σ	ν	ρ
Skew Power Exponential type 3	SEP3()	ident	log	log	log
Skew Power Exponential type 4	SEP4()	ident	log	log	log
Shash	SHASH()	ident	log	log	log
Shash original	SHASHo()	ident	log	log	log
Shash original 2	SHASH()	ident	log	log	log
Skew t type 1	ST1()	ident	log	ident	log
Skew t type 2	ST2()	ident	log	ident	log
Skew t type 3	ST3()	ident	log	ident	log
Skew t type 4	ST4()	ident	log	ident	log
Skew t type 5	ST5()	ident	log	ident	log
t	TF()	ident	log	log	-
Waring	WARING()	log	log	-	-
Weibull	WEI()	log	log	-	-
Weibull(parametrização PH)	WEI2()	log	log	-	-
Weibull (μ é a média)	WEI3()	log	log	-	-
Yule	YULE()	log	-	-	-

A Tabela (2) traz distribuições de probabilidade discretas.

Tabela 2 – Distribuições de probabilidade discretas pertencente a família GAMLSS

Distribuições de probabilidade	Nomenclatura	μ	σ	ν	ρ
Beta Binomial	BB()	logito	log	-	-
Binomial	BI()	logito	-	-	-
Binomial Negativa tipo 1	NBI()	log	log	-	-
Binomial Negativa tipo 2	NBII()	log	log	-	-
Poisson	PO()	log	-	-	-
Poisson Inversa Gaussiana	PIG()	log	log	-	-
Sichel (original)	SI()	log	log	ident	-
Sichel (μ é a média)	SICHEL()	log	log	ident	-

E por fim a Tabela (3) abrange as distribuições inflacionadas.

Tabela 3 – Distribuições de probabilidade inflacionadas pertencente a família GAMLSS

Distribuições de probabilidade	Nomenclatura	μ	σ	ν	ρ
Beta inflacionada de 1	BEOI()	logito	log	logito	-
Beta infacionada de 0	BEZI()	logito	log	logito	-
Beta inflacionada	BEINF()	logito	logito	log	log
Binomial ajustada em zero	ZABI()	logito	logito	-	-
Binomial inflacionada em zero	ZIBI()	logito	logito	-	-
Logarítmica ajustada em zero	ZALG()	logito	logito	-	-
Poisson ajustada em zero	ZIP()	log	logito	-	-
Poisson inflacionada em zero (média μ)	ZIP2()	log	logito	-	-
Poisson inflacionada em zero	ZAP()	log	logito	-	-
IG ajustada em zero	ZAIG()	log	log	logito	-

2.3.1 Análise de diagnóstico

A análise de diagnóstico é uma etapa importante na modelagem estatística. Esta etapa consiste em verificar a existência de possíveis afastamentos das suposições do modelo. A metodologia de diagnóstico iniciou-se com a análise de resíduos para detectar a presença de pontos extremos e avaliar a adequação da distribuição proposta para a variável resposta. A análise de resíduos num modelo estatístico pode ser baseada nos resíduos ordinários, em versões padronizadas, em resíduos construídos a partir dos componentes da função desvio ou em resíduos generalizados.

Assim para a seleção de modelos, utiliza-se gráficos como, worm plot, normal QQ-plot, densidade dos resíduos, resíduos versus valores ajustados, e resíduos versus observações, onde é utilizado o resíduo quantílico proposto por (DUNN; SMYTH, 1996) r_i o qual é escrito da forma:

$$r_i = \Phi^{-1}\{F(y_i; \hat{\theta})\}$$

onde Φ é a distribuição normal padronizada, $F(\cdot)$ corresponde a distribuição acumulada a ser utilizada, sendo $\hat{\theta}$ o vetor de parâmetros de posição, escala e forma.

Também utilizando-se o critério de informação de Akaike generalizado (GAIC) (FLORENCIO, 2010), que é descrito como $GAIC(a) = GD + a$, onde GD é desvio global ajustado, definido como $GD = -\ell(\hat{\theta})$ em que $\ell(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^n \ell(\hat{\theta}_i)$, a corresponde a quantidade de graus de liberdade efetivos utilizada no modelo. Considerando também o critério de informação de Akaike (AIC), onde $a = 2$, e o critério de informação bayesiano de Schwarz(BIC) com $a = \log(n)$. O melhor modelo será aquele que apresenta o menor valor, para cada um dos critérios.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Esta seção tem como característica descrever o conjunto de dados (Anexo C) utilizados na subseção Materiais, mostrando as características das variáveis a serem estudadas. Logo após informações sobre a regressão beta pertencente à família GAMLSS, o método bootstrap será abordado.

3.1 MATERIAIS

O conjunto de dados é composto por 8 variáveis explicativas e uma variável resposta representada pela taxa de congestionamento. O tamanho da amostra considerado aqui, é o número de varas trabalhistas do estado da Bahia. As covariáveis utilizadas são:

- 1) x_{1i} : Carga de trabalho dos magistrados, $X_{1i} = (S_i + R_i)/M_i$, onde S_i representa o saldo de processos não julgados do ano anterior; R_i refere-se ao número de processos recebidos do ano de 2013 e M_i número de magistrados na i -ésima vara, para $i = 1, \dots, 88$.
- 2) x_{2i} : Origem da vara, variável categórica que considerada (0) se a vara pertence a uma cidade do interior, e (1) se for capital.
- 3) x_{3i} : Quantidade de audiências realizadas na i -ésima vara.
- 4) x_{4i} : Proporção de decisões com mérito, $X_{4i} = N_{dcm_i}/(N_{dcm_i} + N_{dsm_i})$, em que N_{dcm_i} é o número de decisões com mérito, que acontece quando o magistrado tem competência para julgar um processo e, N_{dsm_i} é o número de decisões sem mérito, que acontece quando o juiz trabalhista declara não ter competência para julgar o processo.
- 5) x_{5i} : Número de sentenças alteradas do ano de 2012, na i -ésima vara.
- 6) x_{6i} : PJE (Processo Judicial Eletrônico), é um sistema de tramitação eletrônica de processos judiciais, o mesmo foi aderido em 29 de março de 2010, pela Justiça do Trabalho. Consideramos para esta covariável (0) se a i -ésima vara apresenta o sistema e (1) caso contrário.
- 7) x_{7i} : Quantidade de servidores, na i -ésima vara.
- 8) x_{8i} : Prazo médio até a primeira audiência, representando o tempo médio, em dias corridos, decorrido do ajuizamento das ações até a primeira audiência.

A variável resposta, Taxa de Congestionamento na fase de Conhecimento, é dada por:

$$y_i = 1 - \frac{J_i}{(S_i + R_i)}, i = 1, \dots, 88, \quad (3.1)$$

onde J_i representa a quantidade de processos julgados, S_i e R_i foram definidas anteriormente. Logo a Taxa de Congestionamento na fase de Conhecimento corresponde a proporção de processos não julgados no ano.

3.2 MÉTODOS

Nesta seção serão mostrados os modelos de regressão beta, e as técnicas bootstrap. Com referencia ao modelo de regressão beta, vale ressaltar que esta será tratada na sua condição paramétrica, e serão apresentadas as reparametrizações para análise de dados, o processo de estimação e a matriz de informação de Fisher. Uma vez que os estimadores de máxima verossimilhança costumam apresentar vícios em especial aqueles obtidos pelo modelo de regressão beta. [Ospina, Cribari-Neto e Vasconcellos \(2006\)](#) sugere o uso da técnica de bootstrap para detecta-los, e assim estimadores corrigidos, bem como intervalos bootstrap serão apresentados.

3.2.1 Modelo de regressão beta

A distribuição beta é vista com frequência em trabalhos que tem sua variável resposta no intervalo $(0, 1)$, como no o caso de taxas e proporções. A variável resposta y possui distribuição beta se sua função de densidade é dada por:

$$f(y; p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} y^{p-1} (1-y)^{(q-1)}, \quad (3.2)$$

onde $0 < y < 1$, $p > 0$, $q > 0$ e $\Gamma(\cdot)$ corresponde a função gama. A média e variância de y , são dadas por :

$$E(y) = \frac{q}{p+q}, \quad (3.3)$$

$$\text{Var}(y) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}. \quad (3.4)$$

Casos particulares da distribuição beta, são a distribuição uniforme quando $p = q = 1$, e a distribuição arco seno quando $p = q = 1/2$ bastante utilizada em estudos que envolvem passeios aleatórios. Para distribuições beta com $p = q = 1$ e $p \neq 1/2$ temos a distribuições arco seno generalizadas. [Ferrari S. e Cribari-Neto \(2004\)](#), propuseram uma reparametrização que possibilita a modelagem da média da variável resposta através de uma estrutura de regressão e que envolve também um parâmetro de precisão. Sejam $\mu = p/(p+q)$ e $\phi = p+q$, $p = \mu\phi$ e $q = (1-\mu)\phi$, logo as equações (3.3) e (3.4) são

dadas por $E(y) = \mu$ e $\text{Var}(y) = \mu(1 - \mu)/(1 + \phi)$ a função de variância em que μ é a média da variável resposta e ϕ pode ser interpretado como parâmetro de precisão. Nesta reparametrização a função densidade para y apresenta a seguinte forma:

$$f(y; \mu, \sigma) = \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\mu\phi)\Gamma((1 - \mu)\phi)} y^{\mu\phi-1} (1 - y)^{(1-\mu)\phi-1}, \quad (3.5)$$

onde $0 < y < 1$, $0 < \mu < 1$ e $\phi > 0$.

No entanto, a distribuição beta, considerado na família de modelos aditivos generalizados, para posição, escala e forma, assume que $\sigma^2 = 1/(1 + \phi)$ e $\phi = (1 - \sigma^2)/\sigma^2$, e a função (3.2) pode ser rescrita como:

$$f(y; \mu, \sigma) = \frac{\Gamma(\frac{1-\sigma^2}{\sigma^2})}{\Gamma(\mu\frac{1-\sigma^2}{\sigma^2})\Gamma((1 - \mu)\frac{1-\sigma^2}{\sigma^2})} y^{\mu(\frac{1-\sigma^2}{\sigma^2})-1} (1 - y)^{(1-\mu)(\frac{1-\sigma^2}{\sigma^2})-1}, \quad (3.6)$$

onde $0 < y < 1$, $0 < \mu < 1$ e $0 < \sigma < 1$. Observe que μ é um parâmetro de posição dado que este identifica um ponto de localização, e σ corresponde a um parâmetro de escala já que este influi na expansão ou compressão de uma distribuição. O modelo de regressão beta considerado neste trabalho, para uma amostra aleatória y_1, \dots, y_n , em que cada y_i segue uma distribuição beta definida por (3.6) em que

$$\begin{aligned} g_1(\mu_i) &= \log\left(\frac{\mu_i}{1 - \mu_i}\right) = \eta_{1i} = \sum_{j=1}^p x_{1ji}\beta_{1j}, \\ g_1(\sigma_i) &= \log\left(\frac{\sigma_i}{1 - \sigma_i}\right) = \eta_{2i} = \sum_{m=1}^q x_{2mi}\beta_{2m}, \end{aligned}$$

sendo que a função $g_1(\cdot)$ é monótona e duas vezes diferenciável, com suporte $(0,1)$. Denotaremos por $y_i \sim \mathcal{B}(\mu_i, \sigma_i)$ se uma variável aleatória segue uma distribuição beta. Nesse contexto, dada uma amostra aleatória, o logaritmo da função de verossimilhança é:

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \ell_i(\mu_i, \sigma_i),$$

em que

$$\begin{aligned} \ell_i(\mu_i, \sigma_i) &= \log \Gamma\left(\frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2}\right) - \log \Gamma\left(\mu_i \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2}\right) - \log \Gamma\left(\left(1 - \mu_i\right) \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} - 1\right) + \\ &\quad \left(\mu_i \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} - 1\right) \log(y_i) + \left(\left(1 - \mu_i\right) \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} - 1\right) \log(1 - y_i). \end{aligned}$$

Derivando parcialmente $\ell(\boldsymbol{\theta})$ com respeito aos parâmetros podemos obter o vetor escore. Então, para $j = 1, \dots, p$ a função escore para β_{1j} é dada por

$$\mathbf{U}_{\beta_1} = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)}{\partial \beta_{1j}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell_i(\mu_i, \sigma_i)}{\partial \mu_i} \frac{d\mu_i}{d\eta_i} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_{1j}}, \quad (3.7)$$

onde

$$\frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} = \frac{1}{g'_1(\mu_i)},$$

$$\frac{\partial\eta_i}{\partial\beta_{1j}} = x_{1ji},$$

e

$$\frac{\partial\ell(\mu_i, \sigma_i)}{\partial\mu_i} = \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} (y_i^* - \mu_i^*),$$

em que $y_i^* = \log(y_i/(1 - y_i))$ e $\mu_i^* = \psi(\mu_i \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2}) - \psi((1 - \mu_i) \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2})$, em que $\psi(\cdot)$ é uma função digama, sendo esta definida como:

$$\psi(x) = \frac{d \log(\Gamma(x))}{dx},$$

sendo $\Gamma(\cdot)$ a função gama. Logo,

$$\mathbf{U}_{\beta_1} = \frac{\partial\ell(\beta_1, \beta_2)}{\partial\beta_{1j}} = \sum_{i=1}^n \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} (y_i^* - \mu_i^*) \frac{1}{g'_1(\mu_i)} x_{1ji}.$$

O vetor $\mathbf{U}_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2)$, função escore de β_1 na forma matricial é definida por:

$$\mathbf{U}_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2) = \mathbf{X}_1^\top \mathbf{S} \mathbf{G}_1 (\mathbf{y}^* - \boldsymbol{\mu}^*),$$

onde \mathbf{X}_1 é uma matriz $n \times p$ cuja i -ésima linha é \mathbf{x}_{1i}^\top , $\mathbf{S} = \text{diag} \left\{ \frac{1 - \sigma_1^2}{\sigma_1^2}, \dots, \frac{1 - \sigma_n^2}{\sigma_n^2} \right\}$, $\mathbf{G}_1 = \text{diag} \{1/g'_1(\mu_1), \dots, 1/g'_1(\mu_n)\}$, $\mathbf{y}^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)^\top$ e $\boldsymbol{\mu}^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_n^*)^\top$.

Derivando com respeito ao parâmetro β_{2m} em que $m = 1, \dots, q$, temos:

$$\mathbf{U}_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2) = \frac{\partial\ell(\beta_1, \beta_2)}{\partial\beta_{2m}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\ell_i(\mu_i, \sigma_i)}{\sigma_i} \frac{d\sigma_i}{d\eta_{2i}} \frac{\partial\eta_{2i}}{\partial\beta_{2i}},$$

onde $\partial\sigma_i/\partial\eta_{2i} = 1/g'_2(\sigma_i)$ e

$$\frac{\partial\ell(\mu_i, \sigma_i)}{\partial\sigma_i} = -\frac{2}{\sigma_i^3} \left[\mu_i (y_i^* - \mu_i^*) + \log(1 - y_i) + \psi\left(\frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2}\right) + \psi\left(\left(1 - \mu_i\right)\left(\frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2}\right)\right) \right],$$

logo,

$$\frac{\partial\ell(\beta_1, \beta_2)}{\partial\beta_{2m}} = a_i \frac{1}{g'_2(\sigma_i)} x_{2mi},$$

em que

$$a_i = -\frac{2}{\sigma_i^3} \left[\mu_i (y_i^* - \mu_i^*) + \log(1 - y_i) + \psi\left(\frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2}\right) + \psi\left(\left(1 - \mu_i\right)\left(\frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2}\right)\right) \right].$$

O vetor $\mathbf{U}_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2)$, função escore de β_2 , matricialmente é definido como:

$$\mathbf{U}_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2) = \mathbf{X}_2^\top \mathbf{G}_2 \mathbf{a},$$

em que \mathbf{X}_2 é uma matriz $(n \times q)$ cuja a i -ésima linha é \mathbf{x}_{2i}^\top , $\mathbf{G}_2 = \text{diag}(1/g_2'(\sigma_1), \dots, 1/g_2'(\sigma_n))$, e $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$.

Para a obtenção da matriz de informação de Fisher conjunta para os parâmetros β_1 e β_2 , é feita a partir da segunda derivada de $\ell(\beta_1, \beta_2)$ com respeito aos parâmetros então:

$$\begin{aligned} \ddot{\ell}_{\beta_j \beta_m} &= \frac{\partial^2 \ell(\beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_{1j} \partial \beta_{2m}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \mu_i} \left(\frac{\partial \ell_i(\mu_i, \sigma_i)}{\partial \mu_i} \frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} \right) \frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} \frac{\partial \eta_{1i}}{d\beta_{1j}} x_{1ji}, \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 \ell_i(\mu_i, \sigma_i)}{\partial \mu_i} \frac{d\mu_i}{d\eta_i} + \frac{\partial \ell_i(\mu_i, \sigma_i)}{\partial \mu_i} \frac{\partial}{\partial \mu_i} \frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} \right) \frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} x_{1ji} x_{2mi}, \end{aligned}$$

em que $d\mu_i/d\eta_{2i} = 1/g_1'(\mu_i)$ e

$$\frac{\partial^2 \ell(\mu_i, \sigma_i)}{\partial \mu_i^2} = -\frac{(1 - \sigma_i^2)^2}{\sigma_i^4} \left[\psi' \left(\mu_i \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) + \psi' \left(\left(1 - \mu_i \right) \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) \right],$$

sendo $\psi'(\cdot)$ é uma função trigama, que é definida por:

$$\psi'(x) = \frac{d^2 \log(\Gamma(x))}{dx^2}.$$

Considerando que o parâmetro σ_i varia ao longo das observações, então (3.6), pode ser escrita na família exponencial biparamétrica canônica, como:

$$f(y_i; \mu_i, \sigma_i) = \exp \{ \tau_1 T_1 + \tau_2 T_2 - A(\tau) \} \left(1/y_i (1 - y_i) \right),$$

em que $\tau = (\tau_1 + \tau_2) = \left(\mu_i \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2}, \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right)$, $(T_1, T_2) = \left(\log(y_i / (1 - y_i)), \log(1 - y_i) \right)$ e

$$A(\tau) = -\log \Gamma \left(\frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) + \log \Gamma \left(\mu_i \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) + \log \Gamma \left(\left(1 - \mu_i \right) \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right).$$

Assim pode-se encontrar que

$$E(T_1) = \partial A(\tau) / \partial \tau_1 = \psi \left(\mu_i \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) - \psi \left(\left(1 - \mu_i \right) \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right). \quad (3.8)$$

$$E(T_2) = \partial A(\tau) / \partial \tau_2 = -\psi \left(\frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) + \psi \left(\left(1 - \mu_i \right) \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right). \quad (3.9)$$

Utilizando os resultados de (3.8) e (3.9) temos que $E(\partial \ell_i(\mu_i, \sigma_i) / \partial \mu_i) = 0$. Portanto, para $j' = 1, \dots, p$:

$$\ddot{\mathbf{K}}_{\beta_1, \beta_1} = \mathbb{E} \left(- \frac{\partial^2 \ell(\beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_{1j}, \beta_{1j'}} \right) = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 \ell_i(\mu_i, \sigma_i)}{\partial \mu_i^2} \right) \left(\frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} \right)^2 x_{1ji} x_{1j'i}.$$

Seja

$$w_i = \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \left[\psi' \left(\mu_i \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) - \psi' \left((1 - \mu_i) \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) \right] \left(\frac{1}{g'_1(\mu)} \right)^2,$$

então

$$\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \ell(\beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_{1j}, \beta_{1j'}} \right) = - \sum_{i=1}^n \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} w_i x_{1ji} x_{1j'i}.$$

Matricialmente temos que:

$$\ddot{\mathbf{K}}_{\beta_1, \beta_1} = \mathbb{E} \left(- \frac{\partial^2 \ell(\beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_{1j} \beta_{1j'}} \right) = \mathbf{X}_1^\top \mathbf{S} \mathbf{W} \mathbf{X}_1,$$

em que $\mathbf{W} = \text{diag}(w_1, \dots, w_n)$.

Agora temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell(\beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_{1j} \beta_{2m}} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \frac{1 - \sigma^2}{\sigma^2} \left\{ (y^* - \mu^*) \frac{1}{g'_1(\mu_i)} x_{1ji} \right\} \frac{d\sigma_i}{d\eta_{2i}} \frac{d\eta_{2i}}{\beta_{2m}} \\ &= -\frac{2}{\sigma_i^3} \left\{ (y^* - \mu^*) - \left(\frac{1 - \sigma^2}{\sigma^2} \right) \left[\mu_i \psi' \left(\mu_i \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) - (1 - \mu_i) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \psi' \left((1 - \mu_i) \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) \frac{1}{g'_1(\mu_i)} \frac{1}{g'_2(\sigma \mu_i)} x_{1ji} x_{2mi} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Logo

$$\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \ell(\beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_{1j} \beta_{2m}} \right) = - \sum_{i=1}^n c_i \frac{1}{g'_1(\mu_i)} \frac{1}{g'_2(\sigma_i)} x_{1ji} x_{2mi}, \quad (3.10)$$

onde

$$c_i = \frac{2}{\sigma_i^3} \left[\mu_i \psi' \left(\mu_i \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) - (1 - \mu_i) \psi' \left((1 - \mu_i) \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) \right].$$

Escrevendo a equação (3.10) na forma matricial temos

$$= \ddot{\mathbf{K}}_{\beta_1, \beta_2} = \ddot{\mathbf{K}}_{\beta_2, \beta_1} = \mathbb{E} \left(- \frac{\partial^2 \ell(\beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_{1j} \beta_{2m}} \right) = \mathbf{X}_1^\top \mathbf{C} \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{X}_2,$$

em que $\mathbf{C} = \text{diag} \{c_1, \dots, c_n\}$. Encontrando agora $\frac{\partial^2 \ell(\beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_{2m} \beta_{2l}}$, para todo $l = 1, \dots, q$:

$$\frac{\partial^2 \ell(\beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_{2m} \beta_{2l}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 \ell_i(\mu_i, \sigma_i)}{\partial^2 \sigma_i^2} \frac{d\sigma_i^2}{d\eta_{2i}} + \frac{\partial \ell_i(\mu_i, \sigma_i)}{\partial \sigma_i} \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \frac{d\sigma_i^2}{d\eta_{2i}} \right) \frac{d\sigma_i^2}{d\eta_{2i}} x_{2mi} x_{2li},$$

em que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell_i(\mu_i, \sigma_i)}{\partial^2 \sigma_i^2} &= -\frac{4}{\sigma_i^6} \left[-\psi' \left(\frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) + \mu_i^2 \psi' \left(\mu_i \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. \left(1 - \mu_i^2 \right) \psi' \left(\left(1 - \mu_i^2 \right) \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) \right] + \\ &\quad \frac{6}{\sigma_i^4} \left[\mu_i (y_i^* - \mu_i^*) + \log(1 - y_i) + \psi \left(\frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) - \psi \left((1 - \mu_i) \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Logo

$$\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \ell(\beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_{2m} \partial \beta_{2l}} \right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \ell_i(\mu_i, \sigma_i)}{\partial^2 \sigma_i^2} \right) \left(\frac{d\sigma_i^2}{d\eta_{2t}} \right)^2 x_{1mi} x_{2li},$$

pois $\mathbb{E}(\partial \ell_i(\mu_i, \sigma_i) / \partial \sigma_i) = 0$.

Temos ainda que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \ell_i(\mu_i, \sigma_i)}{\partial^2 \sigma_i^2} \right) &= -\frac{4}{\sigma_i^6} \left[-\psi' \left(\frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) + \mu_i^2 \psi' \left(\mu_i \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. \left(1 - \mu_i^2 \right) \psi' \left(\left(1 - \mu_i^2 \right) \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) \right], \\ \mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \ell(\beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_{2m} \partial \beta_{2l}} \right) &= -\sum_{i=1}^n \frac{4}{\sigma_i^6} \left[-\psi' \left(\frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) + \mu_i^2 \psi' \left(\mu_i \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. \left(1 - \mu_i^2 \right) \psi' \left(\left(1 - \mu_i^2 \right) \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) \right] \frac{1}{(g'_2(\sigma_i))^2} x_{2mi} x_{2li}, \end{aligned}$$

em que mesma pode ser escrita na forma matricial como

$$\ddot{\mathbf{K}}_{\beta_2, \beta_2} = \mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2 \ell(\beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_{2m} \partial \beta_{2l}} \right) = \mathbf{X}_2^\top \mathbf{D} \mathbf{X}_2,$$

em que $\mathbf{D} = \text{diag} \{d_1, \dots, d_n\}$, onde

$$\begin{aligned} d_i &= -\sum_{i=1}^n \frac{4}{\sigma_i^6} \left[-\psi' \left(\frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) + \mu_i^2 \psi' \left(\mu_i \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. \left(1 - \mu_i^2 \right) \psi' \left(\left(1 - \mu_i^2 \right) \frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) \right] \frac{1}{(g'_2(\sigma_i))^2}. \end{aligned}$$

Assim, a matriz de informação de Fisher é definida como:

$$\ddot{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\theta}) = \ddot{\mathbf{K}}(\beta_1, \beta_2) = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{K}}_{\beta_1, \beta_1} & \ddot{\mathbf{K}}_{\beta_1, \beta_2} \\ \ddot{\mathbf{K}}_{\beta_2, \beta_1} & \ddot{\mathbf{K}}_{\beta_2, \beta_2} \end{bmatrix},$$

em que $\ddot{\mathbf{K}}_{\beta_1, \beta_1} = \mathbf{X}_1^\top \mathbf{S} \mathbf{W} \mathbf{X}_1$, $\ddot{\mathbf{K}}_{\beta_2, \beta_1} = \ddot{\mathbf{K}}_{\beta_1, \beta_2} = \mathbf{X}_1^\top \mathbf{C} \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{X}_2$, $\ddot{\mathbf{K}}_{\beta_2, \beta_2} = \mathbf{X}_2^\top \mathbf{D} \mathbf{X}_2$

Os estimadores de máxima verossimilhança de β_1 e β_2 são obtidos pela solução do sistema formado por $\mathbf{U}_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2) = 0$ e $\mathbf{U}_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2) = 0$. Tais estimadores não possuem forma fechada. Assim, eles têm que ser obtidos numericamente pela maximização da função de log-verossimilhança com auxílio de um algoritmo de otimização não-linear. Usando a expressão padrão para a inversa das matrizes particionadas, temos que a inversa da matriz da informação de Fisher é dada por

$$\ddot{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\theta})^{-1} = \ddot{\mathbf{K}}(\beta_1, \beta_2)^{-1} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{K}}^{\beta_1, \beta_1} & \ddot{\mathbf{K}}^{\beta_1, \beta_2} \\ \ddot{\mathbf{K}}^{\beta_2, \beta_1} & \ddot{\mathbf{K}}^{\beta_2, \beta_2} \end{bmatrix},$$

onde $\ddot{\mathbf{K}}^{\beta_1, \beta_1} = (\mathbf{X}_1^\top \mathbf{S} \mathbf{W} \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_1^\top \mathbf{C} \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{X}_2 (\mathbf{X}_2^\top \mathbf{D} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}_2^\top \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1 \mathbf{C} \mathbf{X}_1)^{-1}$, $\ddot{\mathbf{K}}^{\beta_1, \beta_2} = -\ddot{\mathbf{K}}^{\beta_2, \beta_1} = \ddot{\mathbf{K}}^{\beta_1, \beta_1} \mathbf{X}_1^\top \mathbf{C} \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{X}_2 (\mathbf{X}_2^\top \mathbf{D} \mathbf{X}_2)^{-1}$, $\ddot{\mathbf{K}}^{\beta_2, \beta_1} = (\mathbf{X}_2^\top \mathbf{D} \mathbf{X}_2)^{-1} \left(\mathbf{I}_q + (\mathbf{X}_2^\top \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1 \mathbf{C} \mathbf{X}_1) \ddot{\mathbf{K}}^{\beta_1, \beta_1} \mathbf{X}_1^\top \mathbf{C} \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{X}_2 (\mathbf{X}_2^\top \mathbf{D} \mathbf{X}_2)^{-1} \right)$.

Sob certas condições de regularidade visto no Anexo(A), temos que

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \sim N(\boldsymbol{\theta}, \ddot{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\theta})^{-1}).$$

3.2.2 Método de reamostragem Bootstrap

De acordo com [Ospina, Cribari-Neto e Vasconcellos \(2006\)](#), o uso da estimação por máxima verossimilhança na regressão beta, em alguns casos produz estimadores viesados, e como estes são em geral pequenos, é comum que na prática sejam ignorados. No caso do modelo de regressão beta, para amostras pequenas, os estimadores de máxima verossimilhança podem ter vieses consideráveis, embora a distribuição beta estudada neste TCC denote outra reparametrização, será utilizada a técnica do bootstrap ([EFRON, 1979](#)) ([EFRON; TIBSHIRANI, 1994](#)), afim de corrigir os vieses dos estimadores gerados por esta modelagem.

A técnica bootstrap, embora requeira um intensivo procedimento computacional, tem sido muito utilizada para correção de viés pois a mesma evita a necessidade do uso de cálculos analíticos complicados para sua obtenção, outras técnicas para correção de viés em geral trazem muita dificuldade para soluções analíticas onde por vezes chegam a ser impossíveis ([LOPES, 2007](#)). Esta técnica pode ser trazida na forma paramétrica e não-paramétrica. Quando utilizada na forma paramétrica deve-se fazer suposições sobre a distribuição dos dados, e então são geradas pseudo amostras baseando-se nas estimativas dos parâmetros dos dados. No bootstrap não-paramétrico, os próprios dados são empregados a fim de se obter subamostras.

Considere uma amostra aleatória $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ de uma variável aleatória popularmente conhecida como X , cuja a distribuição está completamente determinada por sua função de distribuição acumulada F . Seja, $\theta = t(F)$, uma função de F denominada

parâmetro e $\hat{\theta} = s(\mathbf{X})$ um estimador de θ . Neste caso, o uso da técnica bootstrap consiste basicamente em obter, de uma amostra original, um grande número de subamostras $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, calcular as respectivas estimativas bootstrap de θ , $\hat{\theta}^* = s(\mathbf{x}^*)$, com base na distribuição empírica de $\hat{\theta}^*$, estimar a função de distribuição de $\hat{\theta}$. Na versão não paramétrica do bootstrap, a amostra \mathbf{x}^* é obtida de uma estimativa não paramétrica \hat{F} de F , que é a função de distribuição empírica da amostra, definida por:

$$\hat{F}(x) = \frac{\#\{x_i \leq x\}}{n}$$

a qual atribui probabilidade $1/n$ a cada x_i , $i = 1, \dots, n$. Desta forma, o bootstrap não paramétrico é uma aplicação direta de \hat{F} no lugar da distribuição populacional desconhecida F . Logo, se $\theta = t(F)$, o seu estimador é dado por $\hat{\theta} = t(\hat{F})$. No caso paramétrico, F deve pertencer a um modelo paramétrico conhecido F_ξ . Assim, obtendo um estimador consistente de ξ viabiliza uma estimativa paramétrica de F , denotada por $F_{\hat{\xi}}$.

Pode-se utilizar o método bootstrap para estimar o viés de um determinado estimador. Denotando o viés de $\hat{\theta} = t(\hat{F})$ por $B_F(\hat{\theta}, \theta)$, definido como:

$$B_F(\hat{\theta}, \theta) = E_F[s(\mathbf{x})] - t(F).$$

Os estimadores bootstrap de viés nas versões não paramétrica e paramétrica:

$$\begin{aligned} B_{\hat{F}}(\hat{\theta}, \theta) &= E_{\hat{F}}[s(\mathbf{x})] - t(\hat{F}), \\ B_{F_{\hat{\xi}}}(\hat{\theta}, \theta) &= E_{F_{\hat{\xi}}}[s(\mathbf{x})] - t(F_{\hat{\xi}}). \end{aligned}$$

Gerando B amostras bootstrap independentes, (x^{*1}, \dots, x^{*B}) de \mathbf{x} , calcula-se suas respectivas réplicas bootstrap $(\hat{\theta}^{*1}, \dots, \hat{\theta}^{*B})$, onde $s(z^{*i})$ para $i = 1, \dots, B$ podemos aproximar $E_{\hat{F}}[s(\mathbf{x})]$ e $E_{F_{\hat{\xi}}}[s(\mathbf{x})]$ pela média

$$\hat{\theta}^{*(\cdot)} = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \hat{\theta}^{*i}.$$

Obtendo então, as estimativas bootstrap de viés $B_{\hat{F}}(\hat{\theta}, \theta)$ e $B_{F_{\hat{\xi}}}(\hat{\theta}, \theta)$, dadas por

$$\begin{aligned} B_{\hat{F}}(\hat{\theta}, \theta) &= \hat{\theta}^{*(\cdot)} - s(\mathbf{x}), \\ B_{F_{\hat{\xi}}}(\hat{\theta}, \theta) &= \hat{\theta}^{*(\cdot)} - s(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Observe que a diferença entre as estimativas está na forma de geração das pseudo amostras. Portanto, pode-se a partir das estimativas bootstrap de viés, definir estimadores corrigidos até a segunda ordem por bootstrap como

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_1 &= s(\mathbf{x}) - B_{\hat{F}}(\hat{\theta}, \theta) = 2s(\mathbf{x}) - \hat{\theta}^{*(\cdot)}, \\ \bar{\theta}_2 &= s(\mathbf{x}) - B_{F_{\hat{\xi}}}(\hat{\theta}, \theta) = 2s(\mathbf{x}) - \hat{\theta}^{*(\cdot)}, \end{aligned}$$

onde $\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$ são denominadas estimativas CBC (Constant-Bias-Correcting) como dado em [MacKinnon e Smith \(1998\)](#).

Os intervalos de confiança bootstrap utilizados neste trabalho serão: basico, normal, percentil e BCa.

3.2.2.1 Intervalo bootstrap básico

O intervalo de confiança básico foi proposto por [Davison e Hinkley \(1997\)](#), e é calculado da seguinte forma:

$$(2\hat{\theta} - \hat{\theta}_{(B+1)(1-\alpha/2)}^*, 2\hat{\theta} - \hat{\theta}_{(B+1)(\alpha/2)}^*).$$

Uma ressalva é que opte por um valor de B tal que $(B+1)\alpha$ e $(B+1)(1-\alpha)$ sejam inteiros, caso contrário, será necessário o uso de interpolação a escala de probabilidade normal, ações.

3.2.2.2 Intervalo bootstrap normal

Considerando um estimador $\hat{\theta}$ do parâmetro θ . Uma primeira alternativa de aproximação da distribuição de $(\hat{\theta} - \theta)$ para uma normal, de tal forma que:

$$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\theta})}} \sim N(0, 1),$$

o qual permite a construção de um intervalo bilateral com $(1 - \alpha)\%$ de confiança

$$(\hat{\theta} - z_{1-\alpha}\sqrt{\text{Var}(\hat{\theta})}, \hat{\theta} - z_{\alpha}\sqrt{\text{Var}(\hat{\theta})})$$

sendo z_{α} e $z_{1-\alpha}$ quantis da distribuição normal padrão. O bootstrap pode ser aplicado, neste caso, no cálculo da variância do estimador $\text{Var}_B(\hat{\theta})$ onde esta é calculada da seguinte forma:

$$\text{Var}_B(\hat{\theta}) = \frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^b (\hat{\theta}_b^* - \bar{\theta}^*)^2,$$

E na obtenção do vício estimado $B_{\hat{F}}(\hat{\theta}, \theta)$, produzindo um fator de correção para a estimativa pontual. Tais quantidades são obtidas mediante a geração de B amostras bootstrap, e para calcular as quantidades requeridas faz-se:

$$B_{\hat{F}}(\hat{\theta}, \theta) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^b (\hat{\theta}_b^* - \hat{\theta}^*),$$

onde $\hat{\theta}_b^*$ refere-se à estimativa conseguida através da b -ésima reamostra e $\bar{\theta}^*$ à média das B estimativas:

$$\bar{\theta}^* = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^b (\hat{\theta}_b^*),$$

logo, um intervalo de confiança usando a aproximação normal, com vício e variância calculados com o bootstrap, pode ser escrito assim:

$$(\hat{\theta} - b_B(\hat{\theta}) - z_{1-\alpha}\sqrt{\text{Var}_B(\hat{\theta})}, \hat{\theta} - b_B(\hat{\theta}) - z_{\alpha}\sqrt{\text{Var}_B(\hat{\theta})}).$$

3.2.2.3 Intervalo bootstrap percentil

A partir de um número B reamostras, que originaram B estimativas, um intervalo bootstrap percentil $(1 - \alpha)$ será determinado pelos quantis $(\alpha/2)$ e $(1 - \frac{\alpha}{2})$ de \hat{F}^* , função de distribuição acumulada de $\hat{\theta}^*$ (EFRON; TIBSHIRANI, 1994), podendo o intervalo ser escrito como:

$$(\hat{F}_{\alpha/2}^{-1}, \hat{F}_{1-\alpha/2}^{-1}) \quad (3.11)$$

Sabendo que $\hat{F}^{-1}(\alpha/2)$ refere-se ao $(\alpha/2)$ -ésimo quantil da distribuição bootstrap, o intervalo (3.11) pode ser re-escrito desta forma:

$$(\hat{\theta}_{\alpha/2}^*, \hat{\theta}_{1-\alpha/2}^*) \quad (3.12)$$

As expressões (3.11) e (3.12), segundo (EFRON; TIBSHIRANI, 1994) referem-se a uma situação em que o número de replicações é infinita. Na prática, utiliza-se um número finito B de reamostras, e consequentemente o mesmo número de estimativas. Os percentis da distribuição de θ , possibilitam o calculo dos intervalos percentis apresentado em (3.13).

$$(\hat{\theta}_{\alpha/2}^{*B}, \hat{\theta}_{1-\alpha/2}^{*B}) \quad (3.13)$$

O intervalo bootstrap percentil é destacado pela simplicidade do método e propriedade de invariância e transformações monótonas (MARTÍNEZ; LOUZADA-NETO, 2001).

3.2.2.4 Intervalo bootstrap BCa

O intervalo bootstrap BCa (*bias corrected and accelerated*) também utiliza os percentis da distribuição bootstrap para sua construção. Os percentis utilizados a delimitação dos intervalos de confiança dependem de duas quantidades \hat{a} e \hat{z}_0 , denominados respectivamente, como correção para tendência e aceleração.

De acordo com Efron e Tibshirani (1994), um intervalo de confiança BCa $(1 - \alpha)$ é dado por

$$(\hat{\theta}^{\alpha_1}, \hat{\theta}^{\alpha_2}) \quad (3.14)$$

onde

$$\alpha_1 = \Phi \left(\hat{z}_0 \frac{\hat{z}_0 + z_{\alpha/2}}{1 - \hat{a}(\hat{z}_0 + z_{\alpha/2})} \right),$$

$$\alpha_2 = \Phi \left(\hat{z}_0 \frac{\hat{z}_0 + z_{1-\alpha/2}}{1 - \hat{a}(\hat{z}_0 + z_{1-\alpha/2})} \right),$$

em que $\Phi(\cdot)$ é a função distribuição acumulada de uma normal padrão e z_α o 100α -ésimo percentil de uma distribuição normal padrão. Se \hat{a} e \hat{z}_0 são iguais a zero, (3.14) é similar a (3.13).

A constante de correção para tendência, \widehat{z}_0 , é obtida da proporção de replicações bootstrap cujas estimativas θ^{*b} são menores que a estimativa original $\widehat{\theta}$, da seguinte forma:

$$\widehat{z}_0 = \Phi^{-1} \left(\frac{\#(\widehat{\theta}^{*b} < \widehat{\theta})}{B} \right),$$

assim, \widehat{z}_0 representa a magnitude da tendenciosidade mediana de $\widehat{\theta}^*$, ou seja, a distância entre a mediana de $\widehat{\theta}^*$ e $\widehat{\theta}$, em uma escala normalizada. Obteremos \widehat{z}_0 igual a zero se exatamente a metade das medidas de $\widehat{\theta}^{*b}$ forem menores ou iguais a $\widehat{\theta}$ (MARTÍNEZ; LOUZADA-NETO, 2001). Dentre as várias possibilidades de se obter \widehat{a} , uma forma é dada em termos dos valores jackknife de $\widehat{\theta} = s(\mathbf{x})$,

$$\widehat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n (\widehat{\theta}_{\dots} - \widehat{\theta}_i)^3}{6 \left(\sum_{i=1}^n (\widehat{\theta}_{\dots} - \widehat{\theta}_i)^2 \right)^{3/2}},$$

onde $\widehat{\theta}_{\dots} = \sum_{i=1}^n \widehat{\theta}_i / n$ e $\widehat{\theta}_{(i)} = s(x_i), i = 1, \dots, n$.

4 RESULTADOS

Nesta seção utilizaremos as técnicas tratadas nas seções (2) e (3). Para início desta análise serão produzidas estatísticas descritivas tais como: mínimo, máximo, mediana, média, e desvio padrão, para se ter uma idéia da assimetria e dispersão das variáveis.

Tabela 4 – Tabela com estatísticas descritivas das variáveis contínuas

Variáveis	Mínimo	Media	Mediana	Máximo	Desvio-padrão
y	0,0652	0,3259	0,3287	0,6118	0,1085
x_1	642,0000	1193,0000	1460,0000	3406,0000	614,8632
x_3	955,0000	2896,0000	3025,0000	5148,0000	843,6726
x_4	0,4408	0,7554	0,7464	0,8519	0,0673
x_6	1,0000	23,0000	31,0000	154,0000	30,3208
x_7	10,0000	14,0000	14,5700	23,0000	2,0555
x_8	21,0100	60,2500	62,8300	114,0800	20,0042

De acordo com as medidas descritivas apresentadas na Tabela (4) é percebido que y , x_4 e x_7 , apresentam valores para média e mediana bem próximos, é também percebido que não há grande dispersão se observado seus respectivos desvios-padrão. As variáveis x_1 e x_3 , são as que apresentam maior dispersão. As variáveis x_6 e x_8 , não apresentam grandes valores para o desvio-padrão, e não mostra grande diferença entre média e mediana.

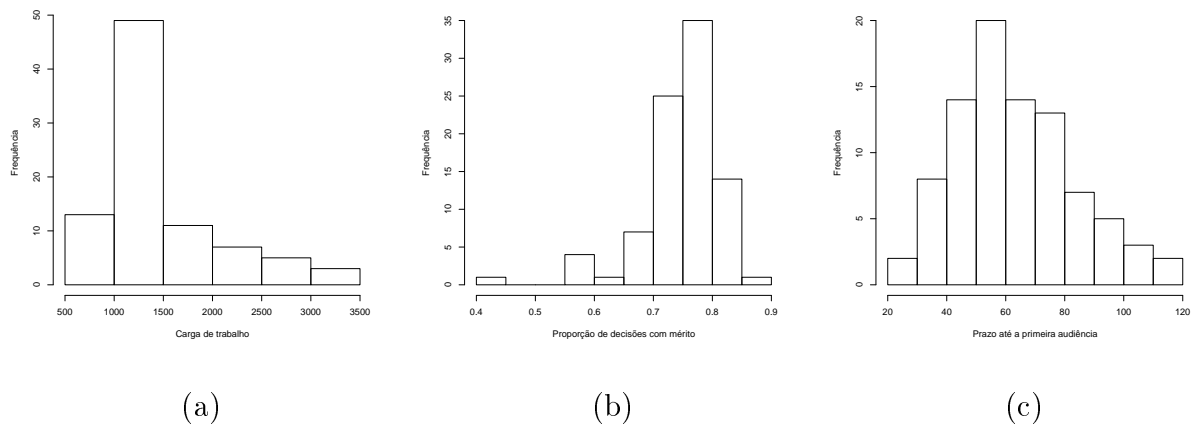


Figura 1 – Gráficos de histograma para variáveis explanatórias, onde (a) se refere a Carga de trabalho, (b) Proporção de decisões sem mérito, e (c) prazo até a primeira audiência.

Nas Figuras (1) e (2), é visto que a variável carga de trabalho, apresenta uma concentração de dados maior entre 1000 e 1500, já as variáveis proporção de decisões com mérito, número de sentenças alteradas e número de servidores apresentam um comportamento assimétrico positivo, isso era presumível uma vez que as medidas de tendência

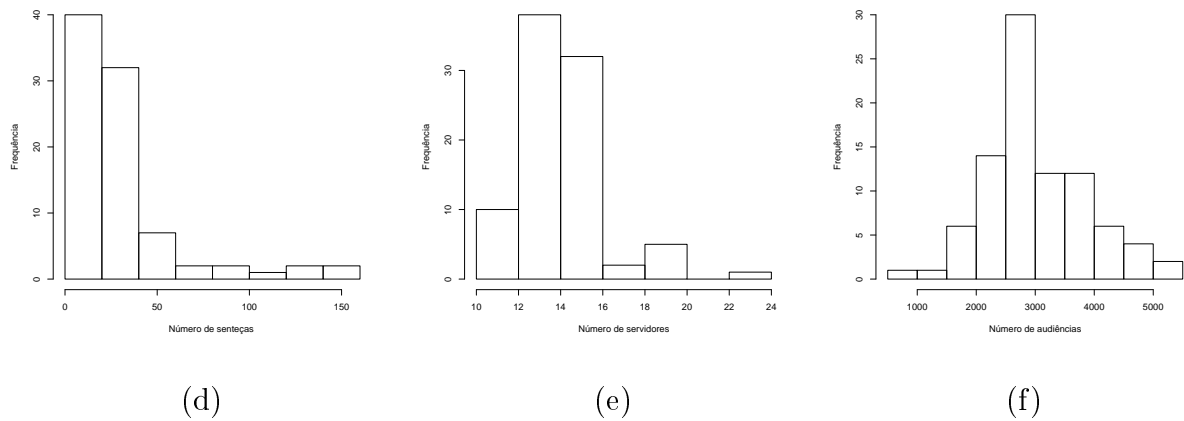


Figura 2 – Gráficos de histograma para variáveis explanatórias, onde (d) se refere a Sentenças alteradas, (e) Número de servidores , e (f) Número de audiências.

central se aproximam do máximo. Prazo até a primeira audiência, e número de audiências denotam fraca assimetria negativa, as medidas descritivas apontaram isso quando as medidas centrais se aproximavam do valor de mínimo.

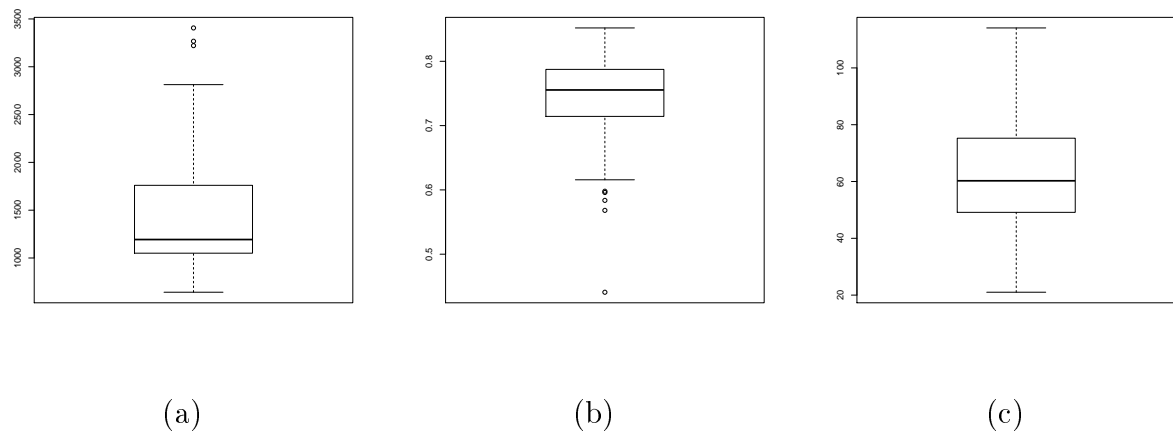


Figura 3 – Gráficos de boxplot para variáveis explanatórias, onde (a) se refere a Carga de trabalho, (b) Proporção de decisões sem mérito, e (c) prazo até a primeira audiência.

Os gráficos das Figuras (3) e (4) mostram que a variável, prazo até a primeira audiência não apresenta *outliers*, as variáveis número de sentenças reformadas e número de servidores apresentam quantidades de *outliers* superiores as demais variáveis.

Os gráficos apresentados na Figura (5), mostram as variáveis PJE e origem, a primeira mostra que 55,68% das varas se encontram em cidades do interior, e a variável PJE destaca que 44,39% já tem implantado o sistema PJE.

De acordo com os gráficos de dispersão, das covariáveis versus a taxa de congestionamento na fase de conhecimento, das Figuras (6) e (7) é percebido que a variável número de audiências, número de servidores, e número de sentenças alteradas apresentam um

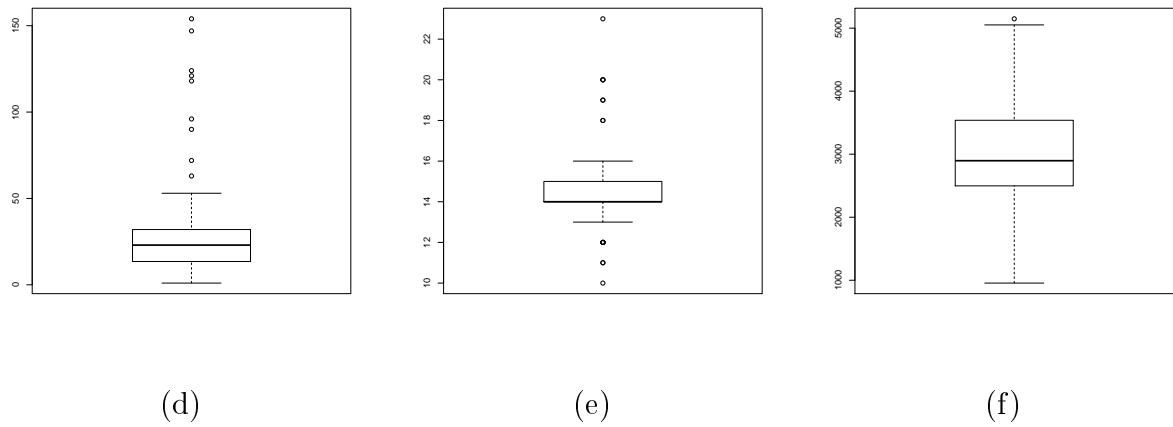


Figura 4 – Gráficos de boxplot para variáveis explanatórias, onde (d) se refere a Sentenças alteradas, (e) Número de servidores , e (f) Número de audiências.

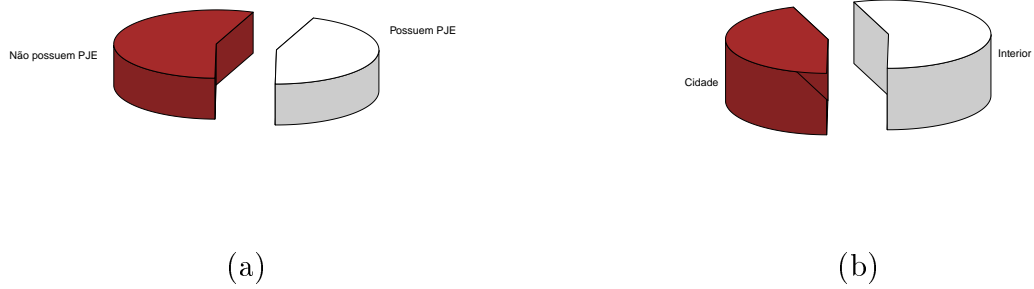


Figura 5 – Gráficos de setores onde (a) corresponde a PJE, e (b) a Origem

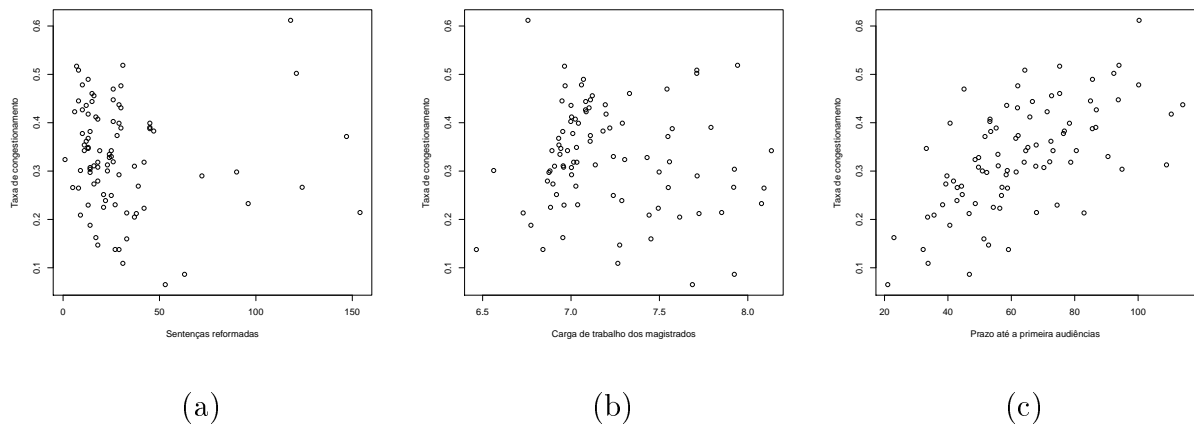


Figura 6 – Gráficos de dispersão, considerando as variáveis:(a) Sentenças reformadas, (b) Carga de trabalho os magistrados,(c) Número de audiência, com a variável Taxa de congestionamento na fase de conhecimento.

comportamento bem aleatório considerando a variável resposta, já as variáveis proporção de decisões com mérito e prazo até a primeira audiência mostra uma relação crescente. E

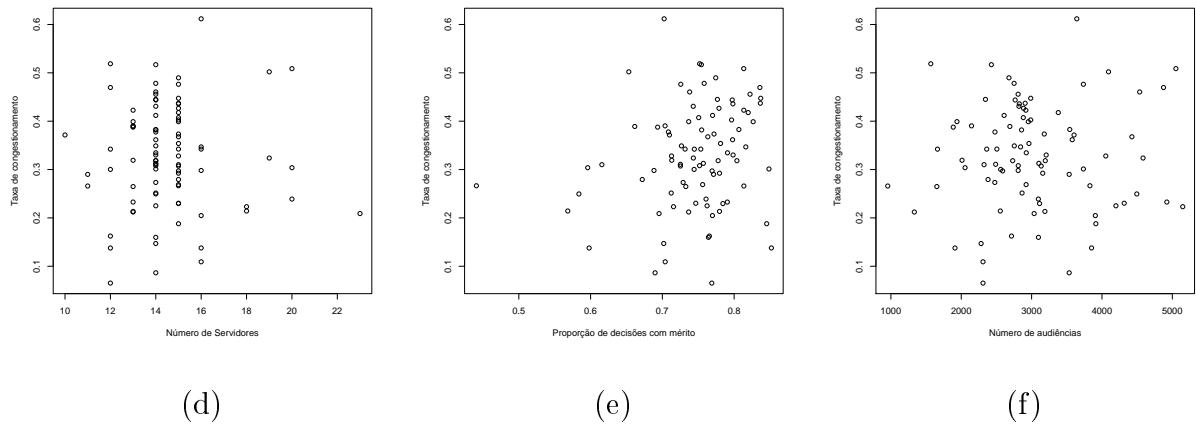


Figura 7 – Gráficos de dispersão, considerando as variáveis: Número de servidores, Proporção de decisões com mérito e Número de audiências, com a variável Taxa de congestionamento na fase de conhecimento.

carga de trabalho dos magistrados, se mostra não aleatório como se houvesse uma relação cúbica com a variável resposta.

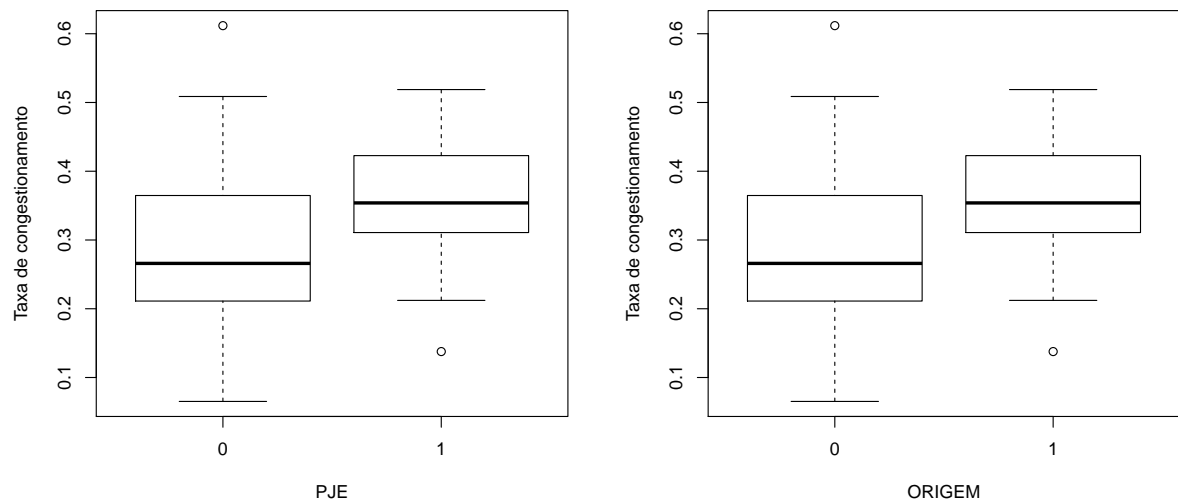


Figura 8 – Boxplots que relaciona variáveis categóricas e variável resposta

Na Figura (8) mostra-se gráficos de boxplots da taxa de congestionamento na fase de conhecimento classificados nas categorias das variáveis PJE e origem. Estes gráficos nos indicam que as varas da capital e as que possuem PJE apresentam menos dispersão, porém as do interior e as que não tem implantado o sistema PJE, apesar da dispersão relativamente maior, denotam também menores valores para Taxa de congestionamento na fase de conhecimento, considerando os valores da mediana.

Percebendo o comportamento das variáveis, modelos serão gerados, e como é sabido que a variável resposta, taxa de congestionamento na fase de conhecimento, pertence ao intervalo (0,1), optou-se por assumir a distribuição beta. Na gráfico da Figura (9) que ajusta apenas a variável resposta a distribuição beta, mostra que o ajuste é plausível.

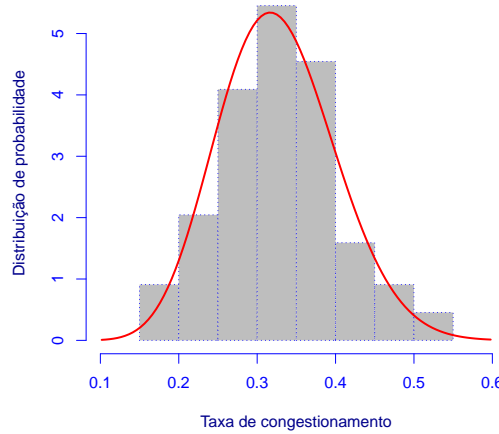


Figura 9 – Gráfico de visualização da distribuição beta a variável resposta

Como a distribuição beta, possui 2 parâmetros, μ e σ , haverá primeiramente um modelo com todas as variáveis apenas para μ , e considerando a função $g(\sigma)$ constante. As variáveis que se apresentaram não significativas foram retiradas, uma de cada vez com fins de verificar o impacto da retirada no modelo, após isso, foi feita uma nova modelagem porém acrescentando o modelo completo em $g(\sigma)$, retirando uma a uma as variáveis não significativas, e recolocando variáveis para $g(\mu)$ para ver eram significativas no novo modelo.

O modelo completo com transformação logarítmica as variáveis carga de trabalho dos magistrados e número de audiências, afim de diminuir a dispersão. Apresenta a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned}
 y_i | \mathbf{x}_i &\sim \mathcal{B}(\mu_i, \sigma), \\
 \log\left(\frac{\mu_i}{1 - \mu_i}\right) &= \beta_{10} + \beta_{11}x_{11i}^* + \beta_{12}x_{12i} + \beta_{13}x_{13i}^* + \beta_{14}x_{14i} + \beta_{15}x_{15i} + \beta_{16}x_{16i} + \\
 &\quad \beta_{17}x_{17i} + \beta_{18}x_{18i}, \\
 \log\left(\frac{\sigma}{1 - \sigma}\right) &= \beta_{20},
 \end{aligned}$$

onde $x_{11}^* = \log(x_{11})$ e $x_{31}^* = \log(x_{31})$

É visto na Tabela 5 os respectivos valores considerando o modelo completo: estimativas, erros-padrão e p-valor. Vale ressaltar que $\beta_{02} = -1,53$ se refere ao valor da estimativa do preditor linear do mesmo, sendo o valor estimado de σ igual a 0,18.

Tabela 5 – Estimativa dos parâmetros considerando todas as variáveis para $g(\mu)$

$g(\mu)$			
Parâmetros	Estimativas	Erro-padrão	P-valor
β_{10}	-5,6252	2,0132	0,0065
β_{11}	0,0181	0,1451	0,9011
β_{12}	0,0325	0,1878	0,8631
β_{13}	0,3552	0,2161	0,1042
β_{14}	1,2114	0,7909	0,1296
β_{15}	0,0014	0,0019	0,4757
β_{16}	0,2886	0,2143	0,1820
β_{17}	0,0010	0,0237	0,9668
β_{18}	0,0126	0,0023	0,0000
$g(\sigma)$			
β_{20}	-1,5300	0,0876	0,0000

O modelo final encontrado, é definido pela estrutura:

$$\begin{aligned}
 y_i | \mathbf{x}_i &\sim \mathcal{B}(\mu_i, \sigma_i), \\
 \log \left(\frac{\mu_i}{1 - \mu_i} \right) &= \beta_{10} + \beta_{13}x_{13i}^* + \beta_{14}x_{14i} + \beta_{16}x_{16i} + \beta_{18}x_{18i}, \\
 \log \left(\frac{\sigma_i}{1 - \sigma_i} \right) &= \beta_{26}x_{26} + \beta_{27}x_{27} + \beta_{28}x_{28},
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Onde os resultados das estimativas, erros-padrão e p-valores, relativos ao modelo final se encontram na Tabela (6).

Tabela 6 – Valores obtidos para modelo final encontrado considerando a distribuição beta.

$g(\mu)$			
Parâmetros	Estimativas	Erro-padrão	P-valor
β_{10}	-6,5175	1,4412	0,0000
β_{13}	0,4627	0,1909	0,0176
β_{14}	1,6234	0,6011	0,0084
β_{16}	0,3667	0,1097	0,0013
β_{18}	0,0106	0,0019	0,0000
$g(\sigma)$			
β_{26}	-0,9811	0,2052	0,0000
β_{27}	-0,1245	0,0198	0,0000
β_{28}	0,0114	0,0049	0,0227

Com o modelo final ajustado utilizou-se o teste de razão de verossimilhança (likelihood ratio- LR), com fins de verificação, se a mesma é homoscedástica ou heteroscedástica, este método requer um modelo restrito com $\tilde{\theta}$ e outro não restrito com $\hat{\theta}$, e é executado da seguinte maneira: seja $L(\tilde{\theta})$ e $L(\hat{\theta})$, funções de verossimilhança dos respectivos modelos, se H_0 é verdadeira então $\text{LR} = -2[\log L(\tilde{\theta}) - \log L(\hat{\theta})] \xrightarrow{d} \chi_g^2$, em que g é o número

de restrições, quando $n \rightarrow \infty$, como o $p - \text{valor} \cong 0$, então temos que o modelo é heteroscedástico, mostrando que modelar σ_i é necessário.

Os mecanismos de diagnóstico, foram o Pseudo R^2 , dado pela fórmula

$$\text{Pseudo } R^2 = \text{cor}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}})^2.$$

Valores do AIC, BIC e GAIC também foram encontrados, conforme Tabela (7). E assim foi percebido que, os valores AIC, BIC e GAIC foram melhores considerando a estrutura do modelo final 4.1, porém o Pseudo R^2 , apresentou uma pequena baixa.

Tabela 7 – Tabela com valores do AIC, BIC, GAIC e Pseudo R^2

Crêterios	Modelo completo	Modelo Final
AIC	-171,9633	-194,5034
BIC	-147,1899	-174,6847
GAIC	-191,9633	-210,5034
Pseudo R^2	0,4349	0,4112

De acordo com as Figuras (10) e (11), o Worm-plot mostra que o *worm* (curva que acompanha os valores centrais do Worm-plot) tem uma concentração na origem, entendo que a média esta bem ajustada, a inclinação do worm não se apresenta inclinação negativa ou positiva, indicando que a variância está bem ajustada, como o *worm* não apresenta forma de “U” então tem-se que o ajuste   simétrico, e pela parte esquerda da curva S se apresenta levemente para cima, indicando que a curtose está um pouco acentuada. Pelo eixo vertical, percebe-se que os pontos estão entre $(-3, 3)$. E também é visto que os desvios não entram no limite elíptico.

O gráfico QQ plot é percebido que os resíduos ficam bem próximos a linha traçada indicando bom ajuste, o gráfico de densidade estimada é visto que os resíduos ficam entre $(-3, 3)$ e que apresenta média = 0,0047 e variância = 1,0123. Os demais gráficos mostram que os resíduos têm comportamento aleatório.

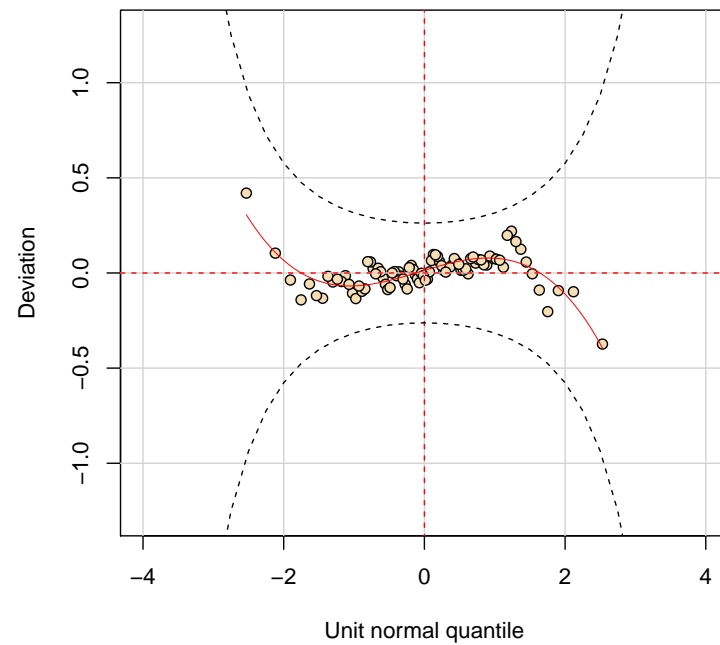


Figura 10 – Worm-plot, considerando modelo final ajustado

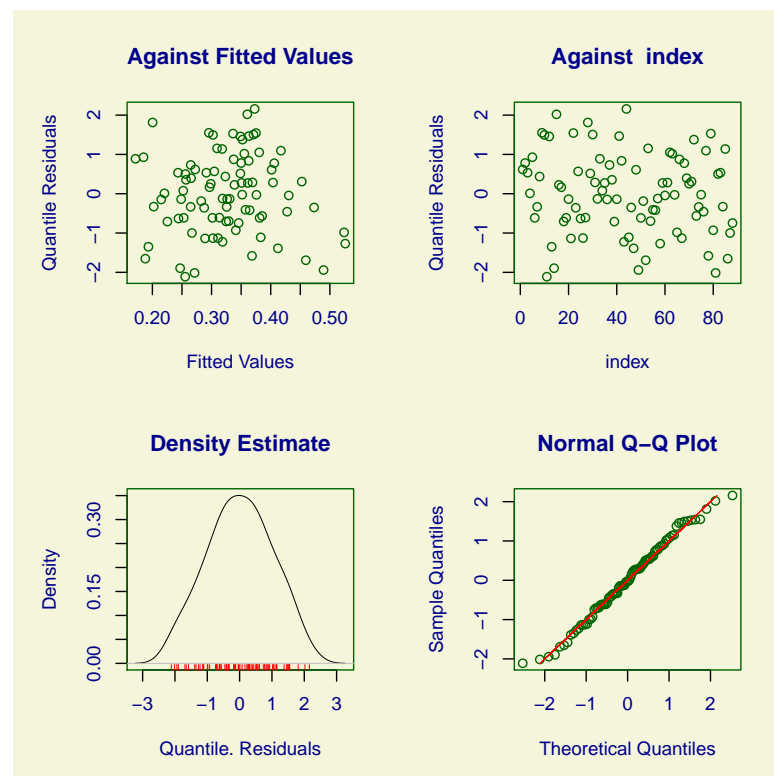


Figura 11 – Gráficos de resíduos, considerando modelo final ajustado

A Tabela (8), mostra os intervalos de confiança gerados a partir da seguinte formula $\hat{\beta}_i \pm \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) ep(\hat{\beta}_i)$, onde α é o nível de significância, Φ é uma distribuição $N(0, 1)$, e $ep(\cdot)$ corresponde ao erro-padrão. Como o valor 0 não é encontrado dentro destes intervalos temos que as estimativas são significativas, considerando nível de confiança de 95%.

Tabela 8 – Intervalos de confiança gerados para os parâmetros β_{j1} e β_{m2}

$g(\mu)$	
Parâmetros	Intervalos de confiança
β_{10}	(-9,3421 ; -3,6928)
β_{13}	(0,0885 ; 0,8369)
β_{14}	(0,4452 ; 2,8015)
β_{16}	(0,1517 ; 0,5817)
β_{18}	(0,0069 ; 0,0143)
$g(\sigma)$	
β_{26}	(-1,3833 ; -0,5789)
β_{27}	(-0,1632 ; -0,0858)
β_{28}	(0,0018 ; 0,0210)

De acordo com a Tabela (9) é percebido que os valores dos vieses são baixos indicando que as estimativas produzidas pelo método de verossimilhança, considerando os dados utilizados são pouco viciadas. Aqui é considerado $B = 5000$.

Tabela 9 – Valores obtidos através do bootstrap.

$g(\mu)$			
Parâmetros	Estimativa corrigida	Desvio-padrão bootstrap	Viés
β_{10}	-6,5742	1,7902	-0,0567
β_{13}	0,4621	0,2272	-0,0006
β_{14}	1,7261	0,6956	0,1028
β_{16}	0,3657	0,1187	-0,0011
β_{18}	0,0103	0,0024	-0,0003
$g(\sigma)$			
β_{26}	-0,9985	0,2063	-0,0174
β_{27}	-0,1215	0,0234	0,0030
β_{28}	0,0117	0,0054	0,0003

Os intervalos de confiança bootstrap construídos também mostram que os parâmetros selecionados por máxima verossimilhança são significativos, uma vez que o valor 0 não está contido nos intervalos bootstrap, como visto na Tabela (10).

Agora, para interpretação das estimativas corrigidas, será utilizada a razão de chances, através da medida $e^{c \times \hat{\beta}_{jk}}$, em que c é um incremento na variável.

Interpretação dos parâmetros em relação a $g(\mu)$: De acordo com o incremento de 0,1, na variável que corresponde a x_{31}^* , que tem como referência o logaritmo da quantidade de audiências, temos o acréscimo de 4,72% na média da variável resposta, o que indica que deve-se diminuir a quantidade de audiências nas varas para assim reduzir a taxa de congestionamento.

A variável X_{41} , que tem como referência a proporção de decisões com mérito, com incremento de 0,1 aumenta em 18,84% na média da variável resposta, como um dos objetivos do TRT5 é aumentar a quantidade deste tipo de decisão, então é interessante observar formas de otimização deste tipo de decisão, uma vez que esta costuma demorar mais tempo do que as decisões sem mérito.

Como a variável PJE é uma variável categórica, será utilizado o valor $e^{\hat{\beta}_{\tau 1}}$, e é visto que a chance de aumento da média da Taxa de congestionamento na fase de conhecimento é de 44,14, como o sistema visa melhorar o movimento processual, então deve-se investigar a erros computacionais, bem como incentivar a instrução do uso do PJE a usuários que o utilizam.

A variável Prazo até a primeira audiência com incremento = 1, mostrou um aumento 1,04% na média de y , então varas, devem visar métodos para diminuir a quantidade de tempo para que se reduza a média de y .

Interpretação dos parâmetros em relação a $g(\sigma)$:

Como visto nos gráficos boxplots da Figura (8), a variável PJE contribui para uma menor dispersão da taxa de congestionamento na fase de conhecimento, com chance de 63,16%.

A variável quantidades de servidores na varas, com incremento de 1, reduz a dispersão da variável resposta em 11,44%, o que indica que varas devem aumentar seu contingente de servidores para produção de resultados na taxa de congestionamento mais homogêneos.

A variável prazo até a primeira audiência, também se mostrou significativa para a dispersão da variável resposta, com incremento de 1, aumenta a dispersão 1,1758% indicando mais uma vez que os valores desta variável deve ser reduzido.

Tabela 10 – Intervalos de confiança bootstrap

$g(\mu)$				
Parâmetros	Normal	Básico	Percentil	BCa
β_{10}	(-10,0830; -3,0650)	(-10,2540; -3,0490)	(-9,9860; -2,7810)	(-9,9900; -2,7850)
β_{13}	(0,0168; 0,9075)	(-0,0009; 0,9074)	(0,0180; 0,9263)	(0,0018; 0,9050)
β_{14}	(0,3630; 3,0890)	(0,3710; 3,1780)	(0,0690; 2,8760)	(0,2860; 3,0490)
β_{16}	(0,1330; 0,5983)	(0,1313; 0,6004)	(0,1331; 0,6021)	(0,1222; 0,5918)
β_{18}	(0,0055; 0,0151)	(0,0050; 0,0147)	(0,0065; 0,0162)	(0,0062; 0,0157)
$g(\sigma)$				
β_{26}	(-1,4029; -0,5942)	(-1,4374; -0,6157)	(-1,3465; -0,5249)	(-1,3677; -0,5531)
β_{27}	(-0,1674; -0,0757)	(-0,1670; -0,0760)	(-0,1730; -0,0820)	(-0,1655; -0,0734)
β_{28}	(0,0011; 0,0223)	(0,0015; 0,0228)	(0,0000; 0,0213)	(0,0007; 0,0217)

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram mostradas características da família GAMLSS, com aplicação no caso estritamente paramétrico, foi verificado uma boa qualidade de ajuste, respondendo à questões apresentadas pelo TRT5.

A família GAMLSS, fornece ao usuário grande quantidade de distribuições de probabilidade que podem ser associadas à variável resposta, sendo importante acrescentar que não era objetivo principal deste estudo trabalhar com a distribuição beta, porém como o problema apresentado pelo TRT5, envolvia uma variável resposta com características adequadas a referente distribuição, optou-se por estudá-la. Assim o estudo deste banco de dados junto ao GAMLSS, possibilitou que se investigasse uma área do conhecimento pouco explorada e de crescente interesse que é a jurimetria.

Foram mostradas também quais as variáveis que se mostraram significativas ao nível de 5%. E o uso do método bootstrap mostrou que o viés dos estimadores estão aceitáveis, e os intervalos de confiança confirmaram que as variáveis selecionadas são significativas para o modelo. Um resultado de destaque foi a variável PJE, que já traz algum resultado satisfatório uma vez que este contribui para redução da dispersão da taxa de congestionamento na fase de conhecimento, porém medidas devem ser tomadas em relação a média, afim de se ter um efeito redutivo.

De acordo com as análises de diagnóstico, foi percebido que houve um bom ajuste, observando o AIC, BIC, GAIC e também os gráficos de Worm-plot, QQ-plot, densidade dos resíduos, além dos gráficos de dispersão de resíduos versus valores ajustados e resíduos versus observações.

É interessante pensar para trabalhos futuros, a utilização de termos não paramétricos. Bem como o uso de uma extensão da distribuição beta para variável resposta, para obtenção de melhores ajustes.

REFERÊNCIAS

- AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 19, p. 716–723, 1974.
- BITTENCOURT, M. C. et al. *Identificação de sistemas dinâmicos lineares: métodos paramétricos e não paramétricos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, 2010.
- CASELLA, G.; BERGER, R. L. Inferência estatística. *Brasil: Cengage Learning*, 2010.
- CORDEIRO, G. M.; DEMÉTRIO, C. G. Modelos lineares generalizados e extensões. *Departamento de Ciências Exatas, ESALQ, USP*, 2007.
- DAVISON, A. C.; HINKLEY, D. V. Bootstrap methods and their applications, cambridge series in statistical and probabilistic mathematics. *Cambridge University Press Cambridge*, 1997.
- DUNN, P. K.; SMYTH, G. K. Randomized quantile residuals. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, v. 5, p. 236–244, 1996.
- EFRON, B. Bootstrap methods: another look at the jackknife. *The annals of Statistics*, v. 7, p. 1–26, 1979.
- EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. J. An introduction to the bootstrap. CRC press, 1994.
- FERRARI S. E CRIBARI-NETO, F. Beta regression for modelling rates and proportions. *Journal of Applied Statistics*, v. 31, p. 799–815, 2004.
- FLORENCIO, L. d. A. *Engenharia de Avaliações com Base em Modelos Gamlss*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2010.
- GONÇALVES, N. F. d. M. *Bootstrap em modelos auto-regressivos aditivos generalizados*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2009.
- HADDAD, R. N. A motivação das decisões judiciais ea jurimetria: contribuições possíveis. *Trabalho publicado nos Anais do XIX Encontro Nacional do CONPEDI realizado em Fortaleza-CE nos dias*, v. 9, p. 10–11, 2010.
- HASTIE, T. J.; TIBSHIRANI, R. J. Generalized additive models. CRC Press, 1990.
- JORGENSEN, B. Exponential dispersion models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, p. 127–162, 1987.
- KIESCHNICK, R.; MCCULLOUGH, B. D. Regression analysis of variates observed on (0, 1): percentages, proportions and fractions. *Statistical modelling*, v. 3, p. 193–213, 2003.
- LOPES, Ê. A. C. *Correção de viés no modelo de regressão normal assimétrico*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2007.
- MACKINNON, J. G.; SMITH, A. A. Approximate bias correction in econometrics. *Journal of Econometrics*, v. 85, p. 205–230, 1998.

- MARTÍNEZ, E. Z.; LOUZADA-NETO, F. Estimación intervalar via bootstrap. *Revista de matemática e estatística*, v. 19, p. 217–251, 2001.
- MEMÓRIA, J. M. P. Breve história da estatística. *Área de Informação da Sede-Texto para Discussão (ALICE)*, Brasília, DF: Embrapa Informação Tecnológica: Embrapa-Secretaria de Gestão e Estratégia, 2004.
- NELDER, J. A.; WEDDERBURN, R. W. M. Generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society, A*, v. 135, p. 370–384, 1972.
- OSPINA, R.; CRIBARI-NETO, F.; VASCONCELLOS, K. L. Improved point and interval estimation for a beta regression model. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 51, p. 960–981, 2006.
- PAULA, G. A. Modelos de regressão: com apoio computacional. IME-USP São Paulo, 2004.
- RIGBY R.A. E STASINOPOULOS, D. Generalized additive models for location, scale and shape. *Journal of the Royal Statistical Society*, v. 54, p. 507–554, 2005.
- SCHWARZ, G. et al. Estimating the dimension of a model. *The annals of statistics*, Institute of Mathematical Statistics, v. 6, p. 461–464, 1978.
- ZABALA, F. J.; SILVEIRA, F. F. Jurimetria: a estatística aplicada ao direito. *Direito e Liberdade*, v. 16, p. 73–86, 2014.

APÊNDICE(S)

APÊNDICE

Nesta seção, alguns comandos elaborados no *software* R utilizados neste trabalho serão listados.

```
##### Estimação por máxima verossimilhança Modelo Final #
require(gamlss)
mod5_beta<-gamlss(TX_CONGEST~log(AUD)+DEC_RES_MERITO+PJE+PZ_1AUD    ,
  sigma.formula= TX_CONGEST~-1+PJE+SERVIDORES+PZ_1AUD    ,method=CG(100),
  family=BE())
summary(mod5_beta)

##### Método Bootstrap #####
require(boot)
f <- function(d, i){
  d2 <- d[i,]
  return(gamlss(d2$TX_CONGEST~log(d2$AUD)+d2$DEC_RES_MERITO+d2$PJE+d2$PZ_1AUD
    ,  sigma.formula= d2$TX_CONGEST~-1+d2$PJE+d2$SERVIDORES+d2$PZ_1AUD,
    family=BE(),method=CG(100))$mu.coefficients[1])
}
set.seed(seed)
c1<-bootcorr <- boot(dados, f, R=replicas)
names(bootcorr)
bootcorr$t
coeficientes[,1]
mean(bootcorr$t)
bootcorr$statistic
boot.ci(bootcorr , level= 0.92 , type = "all")

f <- function(d, i){
  d2 <- d[i,]
  return(gamlss(d2$TX_CONGEST~log(d2$AUD)+d2$DEC_RES_MERITO+d2$PJE+d2$PZ_1AUD
    ,  sigma.formula= d2$TX_CONGEST~-1+d2$PJE+d2$SERVIDORES+d2$PZ_1AUD,
    family=BE(),method=CG(100))$mu.coefficients[2])
}
set.seed(seed)
```

```

c2<-bootcorr <- boot(dados, f, R=replicas)
names(bootcorr)
bootcorr$t
coeficientes[,1]
mean(bootcorr$t)
bootcorr$statistic
boot.ci(c1 , level= 0.95 , type = "all")

f <- function(d, i){
d2 <- d[i,]
return(gamlss(d2$TX_CONGEST~log(d2$AUD)+d2$DEC_RES_MERITO+d2$PJE+d2$PZ_1AUD
, sigma.formula= d2$TX_CONGEST~-1+d2$PJE+d2$SERVIDORES+d2$PZ_1AUD,
family=BE(),method=CG(100))$mu.coefficients[3])
}
set.seed(seed)
c3<-bootcorr <- boot(dados, f, R=replicas)
names(bootcorr)
bootcorr$t
coeficientes[,1]
mean(bootcorr$t)
bootcorr$statistic
boot.ci(c3 , level= 0.95 , type = "all")

f <- function(d, i){
d2 <- d[i,]
return(gamlss(d2$TX_CONGEST~log(d2$AUD)+d2$DEC_RES_MERITO+d2$PJE+d2$PZ_1AUD
, sigma.formula= d2$TX_CONGEST~-1+d2$PJE+d2$SERVIDORES+d2$PZ_1AUD,
family=BE(),method=CG(100))$mu.coefficients[4])
}
set.seed(seed)
c4<-bootcorr <- boot(dados, f, R=replicas)
names(bootcorr)
bootcorr$t
coeficientes[,1]
mean(bootcorr$t)
bootcorr$statistic
boot.ci(c4 , level= 0.95 , type = "all")

```

```

f <- function(d, i){
d2 <- d[i,]
return(gamlss(d2$TX_CONGEST~log(d2$AUD)+d2$DEC_RES_MERITO+d2$PJE+d2$PZ_1AUD
, sigma.formula= d2$TX_CONGEST~-1+d2$PJE+d2$SERVIDORES+d2$PZ_1AUD,
family=BE(),method=CG(100))$mu.coefficients[5])
}
set.seed(seed)
c5<-bootcorr <- boot(dados, f, R=replicas)
names(bootcorr)
bootcorr$t
coeficientes[,1]
mean(bootcorr$t)
bootcorr$statistic
boot.ci(c5 , level= 0.95 , type = "all")

```

```

f <- function(d, i){
d2 <- d[i,]
return(gamlss(d2$TX_CONGEST~log(d2$AUD)+d2$DEC_RES_MERITO+d2$PJE+d2$PZ_1AUD
, sigma.formula= d2$TX_CONGEST~-1+d2$PJE+d2$SERVIDORES+d2$PZ_1AUD,
family=BE(),method=CG(100))$sigma.coefficients[1])
}
set.seed(seed)
c6<-bootcorr <- boot(dados, f, R=replicas)
names(bootcorr)
bootcorr$t
coeficientes[,1]
mean(bootcorr$t)
bootcorr$statistic
boot.ci(c6 , level= 0.95 , type = "all")

```

```

f <- function(d, i){
d2 <- d[i,]
return(gamlss(d2$TX_CONGEST~log(d2$AUD)+d2$DEC_RES_MERITO+d2$PJE+d2$PZ_1AUD
, sigma.formula= d2$TX_CONGEST~-1+d2$PJE+d2$SERVIDORES+d2$PZ_1AUD,
family=BE(),method=CG(100))$sigma.coefficients[2])
}
set.seed(seed)
c7<-bootcorr <- boot(dados, f, R=replicas)

```

```

names(bootcorr)
bootcorr$t
coeficientes[,1]
mean(bootcorr$t)
bootcorr$statistic
boot.ci(c7 , level= 0.95 , type = "all")

f <- function(d, i){
d2 <- d[i,]
return(gamlss(d2$TX_CONGEST~log(d2$AUD)+d2$DEC_RES_MERITO+d2$PJE+d2$PZ_1AUD
, sigma.formula= d2$TX_CONGEST~-1+d2$PJE+d2$SERVIDORES+d2$PZ_1AUD,
family=BE(),method=CG(100))$sigma.coefficients[3])
}
set.seed(seed)

c8<-bootcorr <- boot(dados, f, R=replicas)
names(bootcorr)
bootcorr$t
coeficientes[,1]
mean(bootcorr$t)
bootcorr$statistic
boot.ci(c8 , level= 0.95 , type = "all")

desvio_padrão<-matrix(0,8,1)
desvio_padrão [ 1 ] = sd ( c1 $t)
desvio_padrão [ 2 ] = sd ( c2 $t)
desvio_padrão [ 3 ] = sd ( c3 $t)
desvio_padrão [ 4 ] = sd ( c4 $t)
desvio_padrão [ 5 ] = sd ( c5 $t)
desvio_padrão [ 6 ] = sd ( c6 $t)
desvio_padrão [ 7 ] = sd ( c7 $t)
desvio_padrão [ 8 ] = sd ( c8 $t)
desvio_padrão

#Coeficientes de Verossimilhança
coef_vero <- matrix(0,length(mod5_beta$mu.coefficients)+length(mod5_beta$sigma.coef
i=0
for(i in 1:length(mod5_beta$mu.coefficients)){

```

```

coef_vero[i]= mod5_beta$mu.coefficients[i]
}
i=0
for(i in 1:length(mod5_beta$sigma.coefficients)){
coef_vero[length(mod5_beta$mu.coefficients)+i]= mod5_beta$sigma.coefficients[i]
}
coef_vero

#Estimador corregido
2*coef_vero-medias

#Viés
coef_vero-medias

#Intervalos Bootstrap
boot.ci( c1 , level= 0.95 , type = "all")
boot.ci( c2 , level= 0.95 , type = "all")
boot.ci( c3 , level= 0.95 , type = "all")
boot.ci( c4 , level= 0.95 , type = "all")
boot.ci( c5 , level= 0.95 , type = "all")
boot.ci( c6 , level= 0.95 , type = "all")
boot.ci( c7 , level= 0.95 , type = "all")
boot.ci( c8 , level= 0.95 , type = "all")

```

ANEXO(S)

ANEXO A

Condições de Regularidade

Estas condições de regularidade de acordo com [Casella e Berger \(2010\)](#) são :

- 1) As amostras X_1, \dots, X_n são iid;
- 2) O parâmetro θ é identificável; isto é se $\theta \neq \theta'$, então $f(x|\theta) \neq f(x|\theta')$
- 3) As densidades $f(x|\theta)$ têm suporte comum, e $f(x|\theta)$ é diferenciável em θ .
- 4) O espaço paramétrico Ω contém um conjunto de aberto w do qual o valor de parâmetro verdadeiro é θ_0 é um ponto anterior.

ANEXO B

Características dos Estimadores de Máxima Verossimilhança

Os estimadores de máxima verossimilhança apresentam algumas características apreciadas no meio estatístico sendo elas:

- 1) Consistência: Para grandes amostras ($n \rightarrow \infty$, são não viesadas):

$$P(|T_n(\mathbf{X}) - h(\theta)| > e) \rightarrow 0, \forall e > 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

onde $T(\mathbf{X})$ é um estimador de $h(\theta)$

- 2) Eficiência assintótica: O Teorema do Limite Inferior de Cramer-Rao indica que, para um dado parâmetro qualquer, existe um limite inferior para a variância das estimativas não-viciadas. Para grandes amostras, as estimações feitas por máxima verossimilhança atingem esse limite e, portanto, produzem a menor variância possível dentre as estimativas não-viciadas.

Teorema 1: Sejam y_1, \dots, y_n uma amostra aleatória de $p(x|\theta)$ e $T(X)$ um estimador não viesado de θ . Satisfazendo as condições de regularidade,

$$Var[T(\mathbf{X})] \geq \frac{1}{I(\theta)} \quad (5.1)$$

Sendo a formula (5.1) conhecida como desigualdade de **Crammer-Rao**, e este informa que a variância mínima de um ENV(estimador não viesado) para θ é dada pelo inverso da informação de Fisher

Definição 1: Um estimador de θ é dito ser eficiente, caso não seja viésado e sua variância atingir o limite inferior da desigualdade de Cramer-Rao para todos os valores possíveis de θ .

Com esta definição podemos calcular a eficiência do estimador como a razão entre o limite inferior da desigualdade e sua variância, para um estimador $\hat{\theta}$ de θ

$$\text{eficiência} = \frac{1/I(\theta)}{Var(\hat{\theta})} \leq 1.$$

- 3) Normalidade Assintótica: Os estimadores de máxima verossimilhança convergem em distribuição para distribuição Gaussiana. Para grandes amostras, os estimadores de máxima verossimilhança tem distribuição aproximadamente gaussiana.

Sob condições de regularidade temos que

$$\hat{\theta} \sim N(\theta, 1/I(\theta)), \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

E o resultado pode ser generalizado para uma função $g(\theta)$

$$g(\hat{\theta}) \sim N(g(\theta), g'(\theta)^2/I(\theta)), \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

ANEXO C

Banco de dados

A Tabela (11) mostra o banco de dados utilizado no presente TCC.

Tabela 11 – Banco de dados

Y	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
0,33	1686,00	0	4054,00	0,71	24,00	0	15,00	49,69
0,46	1526,50	0	4536,00	0,74	15,00	0	14,00	75,25
0,32	1485,50	0	4584,00	0,74	1,00	0	19,00	48,57
0,21	2571,00	0	2555,00	0,57	154,00	0	18,00	67,94
0,27	2752,00	0	3829,00	0,44	124,00	0	15,00	57,06
0,20	2027,50	0	3906,00	0,77	37,00	0	16,00	33,59
0,23	1138,50	0	4316,00	0,75	27,00	0	15,00	38,32
0,37	1022,50	0	4425,00	0,76	13,00	0	15,00	61,41
0,48	1060,50	0	3736,00	0,73	30,00	0	15,00	62,03
0,39	1365,50	0	2691,00	0,66	30,00	1	13,00	55,22
0,14	642,00	0	1911,00	0,60	29,00	1	12,00	59,09
0,50	2233,00	0	4093,00	0,65	121,00	0	19,00	92,33
0,11	1429,00	0	2309,00	0,70	31,00	0	16,00	33,74
0,09	2762,00	0	3534,00	0,69	63,00	0	14,00	46,77
0,51	2234,00	0	5051,00	0,81	8,00	0	20,00	64,26
0,36	1222,00	0	3577,00	0,80	12,00	0	14,00	72,49
0,31	1099,00	0	3136,00	0,73	14,00	0	15,00	70,27
0,23	1054,00	0	3113,00	0,78	13,00	0	15,00	74,44
0,23	976,50	0	4198,00	0,76	21,00	0	14,00	54,32
0,30	708,00	0	3736,00	0,85	9,00	0	14,00	58,72
0,19	874,00	0	3913,00	0,85	14,00	0	15,00	40,60
0,61	859,50	0	3642,00	0,70	118,00	0	16,00	100,31
0,26	3267,00	0	1653,00	0,73	8,00	1	13,00	58,79
0,34	3406,00	0	1662,00	0,74	19,00	1	12,00	64,55
0,21	2262,00	0	1333,00	0,74	38,00	1	13,00	46,69
0,22	1796,50	0	5148,00	0,72	42,00	0	18,00	56,36
0,23	3221,00	0	4922,00	0,79	96,00	0	13,00	48,64
0,40	1466,00	0	1939,00	0,74	45,00	0	13,00	40,68
0,39	1944,00	0	1886,00	0,69	45,00	1	13,00	85,55
0,52	2813,00	0	1567,00	0,75	31,00	1	12,00	93,96
0,39	2420,00	0	2146,00	0,70	45,00	1	13,00	86,65
0,32	1914,00	0	2011,00	0,71	26,00	1	13,00	72,11

0,27	1901,00	0	955,00	0,81	5,00	0	11,00	42,94
0,25	1393,00	0	4495,00	0,58	25,00	0	14,00	56,89
0,38	1314,00	0	3542,00	0,81	47,00	0	14,00	76,73
0,21	1705,50	0	3036,00	0,70	9,00	0	23,00	35,62
0,37	1897,00	0	3603,00	0,71	147,00	0	10,00	51,69
0,29	2238,00	0	3534,00	0,77	72,00	0	11,00	39,68
0,15	1444,00	0	2282,00	0,70	18,00	0	14,00	52,82
0,24	1461,50	0	3096,00	0,76	22,00	0	20,00	42,85
0,44	1096,50	1	2825,00	0,80	12,00	1	15,00	58,54
0,41	1100,00	1	2609,00	0,77	17,00	1	14,00	65,84
0,27	1127,00	1	2922,00	0,76	39,00	1	15,00	44,29
0,52	1057,00	1	2428,00	0,75	7,00	1	14,00	75,24
0,32	1113,00	1	3194,00	0,78	42,00	1	14,00	64,05
0,45	1224,00	1	2987,00	0,84	26,00	1	15,00	93,74
0,32	1133,50	1	2731,00	0,80	18,00	1	14,00	78,74
0,45	1042,00	1	2344,00	0,78	8,00	1	14,00	84,98
0,31	1258,00	1	3103,00	0,76	23,00	1	14,00	108,95
0,34	1075,00	1	2506,00	0,73	11,00	1	15,00	80,50
0,27	990,00	1	2477,00	0,73	16,00	1	14,00	39,34
0,33	1393,50	1	3207,00	0,80	25,00	1	14,00	90,49
0,35	1035,00	1	2843,00	0,82	13,00	1	16,00	33,19
0,30	968,00	1	2588,00	0,77	14,00	1	15,00	52,25
0,33	1030,00	1	2924,00	0,79	24,00	1	14,00	55,77
0,34	984,50	1	2362,00	0,75	25,00	1	16,00	73,15
0,31	1049,00	1	2489,00	0,73	16,00	1	14,00	55,87
0,42	1337,00	1	3379,00	0,82	13,00	1	15,00	110,45
0,38	1107,50	1	2479,00	0,71	10,00	1	14,00	76,44
0,43	1190,50	1	2885,00	0,78	10,00	1	15,00	86,81
0,42	1194,50	1	2918,00	0,81	6,00	1	13,00	71,30
0,44	1191,50	1	2766,00	0,80	15,00	1	14,00	66,65
0,40	1095,00	1	2987,00	0,80	26,00	1	15,00	53,23
0,37	1223,50	1	3180,00	0,77	28,00	1	15,00	62,15
0,44	1331,00	1	2908,00	0,84	29,00	1	15,00	114,08
0,38	1046,50	1	2857,00	0,75	14,00	1	14,00	53,50
0,25	1010,00	1	2864,00	0,71	21,00	1	14,00	44,52
0,46	1237,00	1	2808,00	0,82	16,00	1	14,00	72,70
0,28	959,50	1	2381,00	0,67	18,00	1	15,00	41,76
0,31	999,00	1	2324,00	0,62	37,00	1	15,00	67,72
0,48	1163,50	1	2751,00	0,76	10,00	1	14,00	100,17

0,43	1214,50	1	2820,00	0,74	30,00	1	14,00	61,94
0,35	1024,00	1	2962,00	0,78	11,00	1	15,00	67,84
0,31	1051,50	1	2810,00	0,75	18,00	1	14,00	49,64
0,35	1131,00	1	2754,00	0,73	13,00	1	14,00	65,22
0,40	1143,50	1	2953,00	0,83	29,00	1	15,00	78,33
0,49	1176,50	1	2678,00	0,77	13,00	1	15,00	85,60
0,29	1100,00	1	3158,00	0,78	29,00	1	15,00	58,37
0,41	1123,50	1	2882,00	0,75	18,00	1	15,00	53,28
0,30	2763,00	0	2054,00	0,60	14,00	1	20,00	94,92
0,14	935,50	0	3852,00	0,85	27,00	0	16,00	32,19
0,30	1805,00	0	2809,00	0,69	90,00	0	16,00	61,52
0,30	973,50	0	2560,00	0,74	23,00	0	12,00	50,87
0,16	1047,00	0	2714,00	0,77	17,00	0	12,00	22,97
0,47	1887,00	0	4875,00	0,84	26,00	0	12,00	45,08
0,07	2179,00	0	2309,00	0,77	53,00	0	12,00	21,01
0,16	1723,50	0	3097,00	0,76	33,00	0	14,00	51,35
0,21	836,50	0	3189,00	0,78	33,00	0	13,00	82,94
