Universidade Federal da Bahia
Universidade Estadual de Feira de Santana
Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências

Helcimar Moura de Jesus

Análise sobre a equivalência entre as eletrodinâmicas de Lorentz e de Einstein

Salvador
2010

Helcimar Moura de Jesus

Análise sobre a equivalência entre as eletrodinâmicas de Lorentz e de Einstein

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana como um dos pré-requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino, Filosofia e História das Ciências.

Orientador: Ricardo Carneira de Miranda Filho

Salvador

2010

Helcimar Moura de Jesus

Análise sobre a equivalência entre as eletrodinâmicas de Lorentz e de Einstein

Dissertação apresentada como exigência parcial para obtenção do título de Mestre, na área de concentração em Ensino, Filosofia e História das Ciências, à comissão julgadora da Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana.

Aprovada em _____/______/________

BANCA EXAMINADORA

Ricardo Carneiro de Miranda Filho
(IF-UFBA, Orientador)

Profº: **Aurino** Ribeiro Filho
(IF- UFBA, membro interno)

Profº: Edmar Moraes do Nascimento
(IF- UFBA, membro externo)

À Ester

e

João Kaleo

RESUMO

Muitos físicos e filósofos da ciência aceitam a afirmação de que as teorias eletrodinâmicas de Lorentz e de Einstein são empiricamente equivalentes [Dorlig, 1968], isto é, que não existem experimentos para os quais as referidas teorias prevêem resultados distintos. Assumida a mencionada equivalência, os critérios a serem adotados para a escolha entre as duas teorias passam a ser de natureza extra científica, tais como: simplicidade,"força heurística", menor quantidade de pressupostos, etc. A referida equivalência empírica é corroborada com o experimento de Michelson-Morley (EMM) [Michelson 1881, 1887] [Shankland 1963] que pode ser explicado mediante ambas as teorias. Particularmente, na teoria de Lorentz, adota-se a contração de Lorentz-Fitzgerald [Shankland 1963]. No entanto, Miranda Filho [Miranda Filho 2004] revela que a citada hipótese de contração falha ao explicar o resultado negativo do experimento quando se modifica a configuração original do aparato (EMM generalizado ou EMMG) para formar a figura de interferência num plano distinto das superfícies dos espelhos. Em contrapartida, a teoria de Einstein continua a explicá-lo. Mas, na eletrodinâmica de Lorentz de 1904, a referida contração constitui apenas parte de sua teoria. Logo, embora a contração de Lorentz-Fitzgerald não seja suficiente para cobrir a explicação do EMMG apresentada por Miranda Filho, não podemos dizer que a teoria completa não o faça. Este é, portanto, o nosso terreno de investigação para analisar a referida equivalência ou não das duas teorias eletrodinâmicas.

PALAVRAS-CHAVES

Experimento de Michelson-Morley, contração de Lorentz-Fritzgerald, teorias do éter, equações de transformação, equivalência, estados correspondentes.

ABSTRACT

Many physicists and philosophers of science accept the assertion that the electrodynamics theories of Lorentz and of Einstein are empirically equivalent [Dorlig, 1968], e.g., there are no experiments to which those theories predict different results. Assumed the mentioned equivalence, the choice between these theories is based on extra scientific criteria, such as, simplicity, strength heuristic ", fewer assumptions, etc.. This empirical equivalence is corroborated by the Michelson-Morley experiment (EMM) [Michelson 1881, 1887] [Shankland 1963] which can be explained by both theories. In particular, the theory of Lorentz adopted Lorentz-Fitzgerald contraction [Shankland 1963]. However, Miranda Filho [Miranda Filho 2004] reveals that the aforementioned contraction hypothesis fails to explain the negative result of the experiment when it modifies the original configuration of the device (generalized EMM or EMMG) to form the interference pattern in a plan surface different from that of the mirror. By contrast, Einstein's theory continues to explain it. But, in Lorentz's electrodynamic of 1904, contraction is only part of his theory, so although the Lorentz-Fitzgerald contraction is not sufficient to cover the explanation of EMMG presented by Miranda Filho, we can not say that the complete theory does not cover. This is, therefore, our research field to examine this equivalence or not of the two electrodynamics theories.

KEY-WORDS

Michelson-Morley experiment, Lorentz-Fritzgerald contraction, ether theories, equations of transformation, equivalence, corresponding states.

Conteúdo

1. Introdução

Nos anos de 1904 e 1905 são publicados dois artigos cujo conteúdo principal de cada um deles é uma nova eletrodinâmica capaz de explicar a impossibilidade de se detectar a influência dos efeitos de uma translação nos fenômenos eletromagnéticos, ou seja, uma eletrodinâmica que traz o princípio da relatividade de Galileu estendido aos fenômenos eletromagnéticos. O primeiro deles, intitulado "Eletromagnetic Phenomena in a System Moving with any Velocity Smaller then that of Llight"[*] foi escrito por Lorentz e a teoria nele formulada, denominá-la-emos de Eletrodinâmica de Lorentz. No segundo artigo, de autoria de Einstein, sob o título "Zur Elektrodynamik Bewegter Körper"[†], consta a teoria conhecida como relatividade especial, mas que aqui chamaremos de Eletrodinâmica de Einstein.

É interessante notar que, um pouco antes, no século XIX, muitos físicos acreditavam na teoria ondulatória da luz, a qual se propagava em um meio denominado de éter e, portanto, estando a Terra em movimento relativo ao éter, o espaço terrestre seria, supostamente, anisotrópico, isto é, a luz teria velocidades diferentes de acordo com a direção. Decorre, então, como foi primeiramente notado por Maxwell, que o intervalo de tempo que é necessário a um raio de luz para efetuar um percurso de ida e volta entre dois pontos A e B muda de valor logo que esses pontos entrem solidariamente em movimento, sem arrastarem consigo o éter [Lorentz 1895, p.5]. Embora essa diferença na velocidade da luz, de acordo com a direção de propagação, seja de segunda ordem em v/c (sendo v a velocidade de translação da Terra e c a velocidade da luz relativa ao éter), seria possível, com instrumentos devidamente sensíveis, constatar o referido anisotropismo do espaço e, portanto, concluir, por meio de experimentos eletromagnéticos realizados em laboratórios terrestres, que a Terra possui um movimento de translação.

O leitor poderia perguntar, então, quais os motivos que levaram Lorentz e Einstein a construírem teorias que implicassem exatamente na tal impossibilidade de detectar a influência de uma translação nos fenômenos eletromagnéticos. Certamente, a resposta desta questão está nos resultados nulos obtidos nos

[*] Fenômenos Eletromagnéticos em um sistema movendo-se com qualquer velocidade inferior à da luz. (a tradução é nossa, doravante não iremos fazer essa ressalva).
[†] Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento.

experimentos de Michelson e Morley; de Trouton e Noble; e de Rayleigh e Brace [vide: Michelson e Morley 1887; Lord Rayleigh 1902; Brace 1904; Trouton e Noble 1903]; cujo objetivo básico era detectar o vento de éter soprado na superfície da Terra devido ao seu movimento de translação. Ao menos para Lorentz, pois esses são os três experimentos que ele trata em seu artigo de 1904. Lorentz inicia seu artigo falando sobre os resultados nulos desses três experimentos, logo em seguida desenvolve sua eletrodinâmica e, no final, mostra como essa nova eletrodinâmica consegue explicar os resultados nulos dos experimentos em questão. Já para Einstein, que nega ter lido o artigo de Lorentz de 1904 antes da publicação de seu artigo de 1905, mas que, segundo Zahar [Zahar 1989, p.70], era familiar ao *Versuch*, (obra de Lorentz de 1895, onde constam as idéias básicas da sua eletrodinâmica de 1904) talvez, tenha tido inspiração tanto nos resultados experimentais como nos trabalhos de Lorentz.

O primeiro experimento realizado no laboratório terrestre capaz de detectar o movimento de translação da Terra foi o de Michelson. Ele desenvolveu um aparato, baseado no fenômeno de interferência dos raios luminosos, que poderia identificar de forma indireta que a luz possui velocidades diferentes em direções diferentes. Medir diretamente a velocidade da luz em direções diferentes e em seguida comparar o incremento de uma medida em relação a outra era algo impraticável no século XIX. No artigo "Ether" publicado em 1878 na Enciclopédia Britânica, James Clerk Maxwell comenta sobre a dificuldade de aferir o incremento resultante da diferença de tempo com que a luz realiza um percurso de ida e volta entre dois pontos quando mensurados em direções opostas. Em suas palavras:

> *"Se fosse possível determinar a velocidade da luz observando-se o tempo por ela gasto entre um local e outro na superfície terrestre, nós poderíamos, comparando as velocidades observadas em sentidos opostos, determinar a velocidade do éter com respeito a esses locais. Todos os métodos, contudo, pelos quais é praticável a determinação da velocidade da luz a partir de experimentos realizados na Terra, dependem da medida do tempo requerido pela dupla jornada de ida e volta de um ponto a outro e o incremento deste tempo, levando-se em conta uma velocidade do éter igual a da Terra em sua órbita, seria apenas cerca de uma centésima milionésima parte do tempo total de transmissão, sendo assim, imperceptível" [Miranda Filho 2004, p. 43].*

No entanto, o engenhoso Michelson consegue desenvolver um mecanismo capaz de atingir indiretamente o que Maxwell acreditava ser imperceptível. A primeira versão de seu experimento de interferência foi realizada em 1881, em Porstdam. A quantidade a ser medida neste experimento era o deslocamento das franjas provenientes da interferência de dois feixes de luz coerentes com direções perpendiculares, quando o aparato era girado. O interferômetro de Michelson era constituído por dois braços horizontais, P e Q, de igual comprimento e perpendiculares entre si. Um feixe de luz fazia o percurso de ida e volta pelo braço P e o outro fazia o mesmo pelo braço Q, quando, então, convergiam para um telescópio pelo qual seria observado o padrão de interferência. Todo o instrumento, incluindo a fonte luminosa e o dispositivo de observação, podia girar em volta de um eixo vertical. Esperava-se, então, de acordo com a teoria de Fresnel [Fresnel 1818], dada a diferença de velocidade da luz com a direção, que com a rotação do aparelho as franjas de interferência sofressem um deslocamento. O resultado do experimento foi negativo, isto é, nenhum deslocamento das franjas de interferência foi observado ao gira-se o aparato. Esse resultado negativo foi contestado por Lorentz alegando-se que os cálculos de Michelson não estavam corretos; em consequência, o deslocamento das franjas era, de fato, a metade do valor suposto por Michelson podendo, assim, estar encoberto pelos erros experimentais [Michelson 1887, p.335].

A crítica de Lorentz foi aceita por Michelson levando-o a convidar Morley, em 1887, para realizar a segunda versão de seu experimento em Cleveland. Além de adotar as correções teóricas propostas por Lorentz, Michelson incrementou a precisão do aparato experimental obrigando cada feixe luminoso a refletir-se diversas vezes entre vários espelhos. Este artifício equivaleria a um alongamento considerável dos braços do aparelho original. No entanto, os resultados continuaram negativos. Michelson foi bastante cauteloso com a conclusão de seu experimento afirmando que se existe qualquer movimento relativo entre a Terra e o éter luminífero, este deve ser tão pequeno que é capaz de refutar a explicação de Fresnel para a aberração [Michelson 1887, p.341]. Mas, esse resultado foi o bastante para Lorentz procurar uma maneira de solucionar a contradição entre teoria e prática. Diante desse cenário, Lorentz faz a seguinte reflexão:

> "*Dever-se-á, com base nesse resultado, aceitar que o éter toma parte no movimento da Terra e, deste modo, que a teoria da aberração de Stokes é a correta? As dificuldades que essa teoria encontra na explicação da aberração parece-me demasiado grandes para poder aceitar essa opinião e, pelo contrário, levaram- me*

antes a procurar a maneira de remover a contradição entre a teoria de Fresnel e o resultado de Michelson" [Lorentz, 1895, p.7].

A solução apontada por Lorentz foi através de uma *hipótese de contração*, qual seja, postular que o movimento de um corpo sólido através do éter em repouso tem sobre suas dimensões uma influência que varia com a orientação do corpo em relação à direção do movimento [Lorentz*, 1985, p.8*]. Com isso, Lorentz pretendia compensar a variação na diferença de caminho ótico entre os feixes de luz interferentes com uma variação no comprimento dos braços do interferômetro, de acordo com sua direção relativa à translação da Terra e, assim, explicar o não deslocamento das franjas. Ocorre que, recentemente, Miranda Filho *et all* [2002] demonstraram que a hipótese de contração de Lorentz falha ao explicar o resultado nulo do experimento de Michelson quando a figura de interferência é formada em um plano distinto das superfícies dos espelhos, ou seja, quando alteramos o aparato original substituindo o telescópio por um anteparo no qual se formará as franjas de interferência. Em contrapartida, a *Eletrodinâmica de Einstein* continuaria a explicá-lo. Surge, portanto, um forte indício que questiona a equivalência empírica entre as duas referidas eletrodinâmicas. Vale ressaltar que a hipótese de contração de Lorentz é apenas parte de sua teoria eletrodinâmica de 1904.

O objetivo dessa dissertação é fazer uma análise da equivalência entre a eletrodinâmica de Lorentz (1904) e a de Einstein (1905). A equivalência, da qual irei tratar, diz respeito ao fato de duas teorias fazerem as mesmas previsões para resultados experimentais. Contudo, não necessariamente, essas teorias precisam conter as mesmas leis físicas, ou a mesma ontologia.

A escolha dos artigos de 1904 e 1905 deve-se inicialmente à proximidade de suas datas de publicação e, principalmente, à crença de que neles se encontra a principal versão das teorias eletromagnéticas de Lorentz e Einstein. Segundo Zahar, [Zahar 1989, p. 70] a última versão da teoria dos estados correspondentes[‡] (que podemos chamar de "*base da eletrodinâmica de Lorentz*") encontra-se no artigo de Lorentz de 1904.

[‡] Vide apêndice A – Introdução à teoria dos estados correspondentes.

2. Eletrodinâmica de Lorentz

2.1- Pontos fundamentais na interpretação da teoria de Lorentz

A eletrodinâmica de Lorentz pode ser apresentada, segundo a terminologia de Lakatos [Lakatos 1979], por um núcleo rígido que consiste nas Leis de Newton da mecânica, nas transformações de Galileu e nas equações de Maxwell somada à força de Lorentz. Além disso, existe uma heurística que surge do princípio metafísico de que todos os fenômenos físicos são governados por ações transmitidas pelo éter. Essa mesma apresentação é feita por Zahar [Zahar 1989 p.47] no que ele denomina de *Programa de Lorentz.* Mas é preciso, ainda, acrescentar nesta breve definição da eletrodinâmica de Lorentz a sua famosa hipótese de contração e a teoria dos estados correspondentes, que sempre associa para um dado sistema físico real ∑ um, e apenas um, sistema físico imaginário ∑'. A introdução desse sistema imaginário ∑' foi um artifício matemático de Lorentz para reduzir um caso eletrodinâmico, onde o único movimento do sistema de cargas é uma translação, em um caso eletrostático e a partir dos resultados eletrostáticos, que são bem mais fáceis de serem obtidos, chegar nos resultados eletrodinâmicos. Lorentz revela essa simplicidade dizendo:

> *"O resultado pode exprimir-se numa forma simples se se comparar o sistema móvel ∑, que estamos agora a considerar, com o sistema em repouso ∑' " [Lorentz 1904, p.22].*

Vale ressaltar que os termos *sistema móvel* ∑ e *sistema em repouso ∑'* denotam configurações de cargas que existem nos espaços S e S', respectivamente. O referencial ao qual o sistema é dito móvel ou em repouso é, nos dois casos, o do éter. No entanto, em ∑' a carga possui coordenadas *(x', y', z')* independentes do tempo local *t'*, mas em ∑ tem-se a correspondente carga com coordenadas *(x, y, z)* que variam com o tempo *t*.

Nos dias de hoje, é comum sempre expressar uma velocidade ou qualquer outra grandeza física relativa a um ou outro referencial. Por outro lado, no século XIX, nos casos eletromagnéticos, as grandezas físicas eram sempre descritas em termos do referencial etéreo, pois esse era o único referencial onde as equações de

Maxwell eram válidas. Nos artigos de Lorentz de 1904 e de Michelson e Morley de 1887 percebe-se como era habitual naquela época tratar os fenômenos eletromagnéticos a partir do referencial do éter, tal que, em muitos casos, esse referencial aparece tacitamente. Na abordagem desses autores, o problema comumente era tratado com o sistema inicialmente em repouso no éter e em seguida era posto em movimento de translação. Ao fazer isso, tinha-se o sistema com uma translação, supostamente, da Terra, mas ainda visto do referencial do éter. Vejamos essa característica em Lorentz e em Michelson e Morley:

> *"Admitirei agora que o sistema se move como um todo na direção do eixo x com velocidade w, ..." [Lorentz, 1904, p.16].*

> *"Suppose now, the ether being at rest, that the whole apparatus moves in the direction sc, with the velocity of the earth in its orbit, …" [Michelson e Morley 1887, p.335].*[§]

Muitas das dificuldades de interpretação dos trabalhos de Lorentz decorrem da busca pelo referencial do laboratório terrestre, o qual, não é de interesse de Lorentz. Um erro de anacronismo nos leva a conclusão de que o *sistema em repouso* ∑' é aquele visto do referencial da Terra, talvez pela forte influência do tratamento de Einstein. No trato einsteiniano, tem-se um sistema de referência para o qual a carga se desloca com velocidade *v*, digamos S, e outro referencial S' paralelo a S e com velocidade também *v* relativo à S, ou seja, um referencial onde a carga está em repouso, segundo a interpretação de Einstein. Sob essa influência, somos induzidos a interpretar o espaço S', que Lorenz afirma ser aquele onde o sistema de cargas está em repouso, como o referencial do laboratório terrestre. Acontece que para Lorentz, S' é um espaço imaginário, ou ainda, um artifício matemático desenvolvido para descrever a configuração de carga que se move no espaço S preenchido pelo éter em termos de uma outra configuração de carga equivalente à primeira, mas agora em repouso no éter, ou seja, tanto em S como em S' o referencial adotado é o do éter. Pode-se, então, perguntar: Como eu posso explicar os resultados observados na Terra a partir de cálculos realizados relativo ao referencial do éter? Nos trabalhos de Lorentz e de Michelson e Morley está apresentada tacitamente a conclusão de que *se não há deslocamento das franjas de*

[§] Suponha-se, agora, o éter estando em repouso, que todo o aparato move-se na direção sc (sc refere-se à direção do movimento da Terra), com a velocidade da Terra em sua órbita...

interferência no referencial do éter também não haverá no referencial da Terra. Ora, imagine que sobre o anteparo onde é formado o padrão de interferência coloca-se uma tinta explosiva sensível a luz, exatamente sobre uma região escura. Caso haja deslocamento das franjas no referencial do laboratório, sem que haja no referencial do éter, o experimentador estaria vivo no referencial do éter, enquanto que, estaria morto, devido à explosão, no referencial da Terra. Tal inconsistência nos leva a interpretação tácita mencionada acima, feita por Lorentz, Michelson e Morley.

2.2- O artigo de Lorentz de 1904

Três experimentos obtiveram resultados negativos ao tentar-se mostrar a influência de uma translação nos fenômenos eletromagnéticos. As grandezas analisadas foram: o deslocamento das franjas no interferômetro de Michelson (1881) e de Michelson e Morley (1887); a dupla refração investigada por Rayleigh (1902) e Brace (1904) e o momento de rotação de um condensador carregado pesquisado por Trouton e Noble (1903). Em seu artigo de 1904 Lorentz pretende mostrar a invariância dos fenômenos eletromagnéticos por efeito de uma translação. O primeiro passo tomado por Lorentz foi a hipótese de contração, ou seja, que os corpos ao adquirirem uma translação sofrem uma redução nas suas dimensões paralela ao movimento. Vejamos o comentário de Lorentz a esse respeito:

> "*... experiência interferencial de Michelson, cujo resultado negativo nos levou, a mim e a Fitzgerald, à conclusão de que as dimensões dos corpos rígidos se modificam um pouco em conseqüência de seu movimento através do éter .*" [Lorentz 1904, p.13]

A introdução de uma nova hipótese para explicar o resultado negativo de Michelson foi criticada por Poincaré argumentando que isso se tornaria necessário cada vez que novos fatos fossem descobertos. Lorentz aceita a crítica de Poincaré e aponta que seria mais satisfatório que fosse possível mostrar, por meio de certas hipóteses fundamentais e sem desprezar termos de nenhuma ordem de grandeza, que *muitas ações* eletromagnéticas são completamente independentes do movimento do sistema [Lorentz 1904, pp.15,16]. Ele toma como ponto de partida, para construção de sua teoria, as equações de Maxwell, denominadas por ele de equações fundamentais da teoria dos elétrons. O sistema ao qual se aplica estas equações é descrito por ele, nos termos:

> *Seja $\vec{D}$ o deslocamento elétrico no éter, $\vec{H}$ a força magnética, ρ a densidade volumétrica de carga de um elétron, $\vec{v}$ a velocidade de uma partícula desses, $\vec{f}$ a força ponderomotriz, isto é, a força, medida por unidade de carga, que o éter exerce sobre um elemento de volume de um elétron.* [Lorentz 1904, p.16]

Aplicando-se as equações de Maxwell ao sistema descrito por Lorentz, escolhendo um referencial fixo no éter S, temos:

$$\begin{cases} div\vec{D} = \rho \\ div\vec{H} = 0 \\ rot\vec{H} = \dfrac{1}{c}\left(\dot{D} + \rho\vec{v}\right) \\ rot\vec{D} = -\dfrac{1}{c}\dot{H} \end{cases} \tag{2.1}$$

A força de Lorentz por unidade de carga, fica:

$$\vec{f} = \vec{D} + \frac{1}{c}\left(\vec{v} \times \vec{H}\right) \tag{2.2}$$

Até aqui, estamos tratando um sistema ou configuração de cargas com velocidade $\vec{v}$ relativa ao éter. Para termos, ainda que no referencial do éter, tal configuração de cargas movimentando-se solidariamente com a Terra, todo o sistema de cargas adquire a translação $\vec{w}$ (*w*,0,0), que é translação da Terra. A velocidade da carga, no referencial do éter, agora será $\vec{v} = \left(w + u_x, u_y, u_z\right)$.

Se, então, aplicarmos as transformações de Galileu, ou seja, se representarmos as coordenadas espaciais em termos da diferença $\vec{r}_1 - \vec{r}_T$, em que $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ é um ponto qualquer relativo aos eixos de referência fixos no éter e

$\vec{r}_T = (wt,0,0)$ é a localização da Terra no instante t no mesmo sistema de referência, as novas coordenadas representadas por x, y e z serão dadas por:

$$x = x_1 - wt_1, \qquad y = y_1, \qquad z = z_1, \qquad \text{e} \qquad t = t_1 \tag{2.3}$$

Note que, nestas transformações, o tempo tem uma função identidade, ou seja, t_1, relativo às coordenadas (x_1, y_1, z_1), é o mesmo t relativo às coordenadas (x, y, z). Destas transformações resultam:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \text{mas} \qquad \frac{\partial}{\partial t_1} = \frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}. \tag{2.4}$$

Com isso, as equações fundamentais do eletromagnetismo assumem uma nova forma e não podemos mais chamá-las de equações de Maxwell, pois agora elas são escritas assim:

$$divD = \rho, \quad div\vec{H} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)D_x + \frac{1}{c}\rho(w+u_x), \\
\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)D_y + \frac{1}{c}\rho(u_y), \\
\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)D_z + \frac{1}{c}\rho(u_z),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D_z}{\partial y} - \frac{\partial D_y}{\partial z} &= -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)H_x \\
\frac{\partial D_x}{\partial z} - \frac{\partial D_z}{\partial x} &= -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)H_y \\
\frac{\partial D_y}{\partial x} - \frac{\partial D_x}{\partial y} &= -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)H_z
\end{aligned}$$

E as componentes da força de Lorentz, uma vez aplicada as transformações de Galileu para o espaço e o tempo, se tornam as funções:

$$f_x = D_x + \frac{1}{c}\left(u_y H_z - u_z H_y\right)$$

$$f_y = D_y - \frac{1}{c} w H_z + \frac{1}{c}\left(u_z H_x - u_x H_z\right) \tag{2.6}$$

$$f_z = D_z + \frac{1}{c} w H_y + \frac{1}{c}\left(u_x H_y - u_y H_x\right).$$

Observe que as equações (2.5) e (2.6) são expressas com coordenadas em termos da diferença $\vec{r}_1 - \vec{r}_T$. Talvez Lorentz considerasse que essas novas equações do eletromagnetismo, isto é, as equações de Maxwell transformadas, descrevessem os campos medidos no referencial da Terra, mas isso só poderia ser incluído em sua teoria através de um postulado. Como as equações de Maxwell só eram válidas no referencial do éter, seria coerente afirmar que as novas equações do eletromagnetismo são válidas no referencial terrestre, pois agora não mais se trata das equações de Maxwell. Contudo, Lorentz não se pronuncia sobre os campos mensurados em nenhum referencial senão o do éter.

Uma vez estando as equações de Maxwell reescritas em termos das variáveis x, y, z e t, para resolver as referidas equações, Lorentz faz uma outra transformação de variáveis:

$$x' = klx, \qquad y' = ly, \qquad z' = lz, \qquad t' = \frac{l}{k}t - kl\frac{w}{c^2}x, \tag{2.7}$$

onde $k^2 = \dfrac{c^2}{c^2 - w^2}$ (2.8)

e l é uma constante que mais tarde Lorentz percebe que é igual a unidade. Uma transformação para os vetores campo elétrico e campo magnético, $\vec{D}$ e $\vec{H}$, também é feita.

$$D'_x = D_x, \qquad D'_y = k\left(D_y - \frac{w}{c}H_z\right), \qquad D'_z = k\left(D_z + \frac{w}{c}H_y\right) \tag{2.9}$$

$$H'_x = H_x, \qquad H'_y = k\left(H_y + \frac{w}{c}D_z\right), \qquad H'_z = k\left(H_z - \frac{w}{c}D_y\right)$$

Finalmente, faz-se uma transformação na densidade de carga e na velocidade $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ que a carga possui além da translação, qual sejam:

$$\rho' = \frac{\rho}{k} \tag{2.10}$$

$$u'_x = k^2 u_x, \qquad u'_y = k u_y, \qquad u'_z = k u_z \tag{2.11}$$

Com todas essas transformações, as equações (2.5) e (2.6) retornam a forma inicial (sem translação) reassumindo a forma das equações de Maxwell, agora descritas em termos das novas variáveis com linhas, à exceção do segundo termo do segundo membro da primeira equação abaixo:

$$\begin{cases} div'\vec{D}' = \left(1 - \dfrac{wu'_x}{c^2}\right)\rho' \\ div'\vec{H}' = 0 \\ rot'\vec{H}' = \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\partial D'}{\partial t'} + \rho'\vec{u}'\right) \\ rot'\vec{D}' = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial H'}{\partial t'} \end{cases} \tag{2.12}$$

onde, *div'* e *rot'* correspondem aos operadores *div* e *rot* relativos as variáveis (*x', y', z'*). A relação entre a força elétrica $\vec{f}$ e as novas variáveis fica:

$$\begin{aligned} f_x &= D'_x + \frac{1}{c}\left(u'_y H'_z - u'_z H'_y\right) + \frac{w}{c^2}\left(u'_y D'_y + u'_z D'_z\right) \\ f_y &= \frac{D'_y}{k} + \frac{1}{ck}\left(u'_z H'_x - u'_x H'_z\right) - \frac{1}{k}\frac{w}{c^2}u'_x D'_y \\ f_z &= \frac{D'_z}{k} + \frac{1}{ck}\left(u'_x H'_y - u'_y H'_x\right) - \frac{1}{k}\frac{w}{c^2}u'_x D'_z \end{aligned} \tag{2.13}$$

Lorentz percebe que a solução das equações (2.12) se torna fácil se se considerar que as grandezas com linhas compõem um espaço imaginário S' e possuem uma correspondência com as grandezas sem linhas do espaço real S. Em suas palavras:

> *"Para obter de maneira simples a solução de ..., tomemos x', y', z' como coordenadas de um ponto P' no espaço S' e atribuamos a este ponto, para cada valor de t', os valores ρ', u', φ', α', que pertencem ao ponto correspondente P(x, y, z) do sistema eletromagnético" [Lorentz,1904, p.20].*

De acordo com as equações (2.12), os vetores $\vec{D}'$ e $\vec{H}'$ são representáveis por um potencial escalar φ' e um potencial vetor $\vec{\alpha}'$ que satisfazem as equações:

$$\nabla'^2\varphi' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial^2 t'} = -\rho' \qquad \nabla'^2\vec{\alpha}' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\alpha}'}{\partial^2 t'} = -\frac{1}{c^2}\rho'\vec{u}' \tag{2.14}$$

cujas soluções são:

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho'}{r'}dS' \tag{2.15}$$

$$\vec{\alpha}' = \frac{1}{4\pi c}\int\frac{\rho'\vec{u}'}{r'}dS' \tag{2.16}$$

Em que dS' é um elemento do espaço *S'*, r' a sua distância ao ponto *P'* que para cada valor de *t'* possui os valores $\rho', \vec{u}', \varphi'$ e $\vec{\alpha}'$, pertencentes ao ponto correspondente *P(x,y,z)* do sistema eletromagnético. As grandezas ρ' e $\rho'\vec{u}'$ são tomadas tais como se apresentam no elemento de volume dS' no instante $t' - \frac{r'}{c}$, tal que, r'/c é o tempo que o sinal gasta para percorrer a distância r' de *P'* à origem do sistema de coordenadas *S'*. Os vetores $\vec{D}'$ e $\vec{H}'$ são representados em função e φ' e $\vec{\alpha}'$, como:

$$\vec{D}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\alpha}'}{\partial t'} - grad'\varphi' + \frac{w}{c}grad'\alpha'_x \tag{2.17}$$

$$\vec{H}' = rot'\vec{\alpha}'. \tag{2.18}$$

Lorentz trata a velocidade da carga como uma soma vetorial de duas velocidades. Uma é a translação da carga $\vec{w}$ e a outra é qualquer velocidade além desta primeira, representada por $\vec{u}$, ou seja, a velocidade da carga é $\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$. O objetivo principal de Lorentz era mostrar a independência dos fenômenos eletromagnéticos de efeitos causados por uma translação, em vista deste fim, ele percebe que basta considerar, inicialmente, o caso particular em que o único movimento da carga é a translação de velocidade $\vec{w}$, isto é, $\vec{u} = 0$. Embora a carga possua a velocidade $\vec{w}$, Lorentz denomina esta situação particular como *sistema eletrostático* [Lorentz 1904 §6, p.21]. Neste caso, as equações (2.11) resultam em $\vec{u}' = 0$ e em consequência de (2.15), $\vec{\alpha}' = 0$. Por outro lado, como se trata de um caso eletrostático, φ' é independente de t' e, portanto, as equações (2.13), (2.16) e (2.17) se simplificam em:

$$\nabla'^2\varphi' = -\rho' \quad , \qquad \vec{H}' = 0 , \qquad \vec{D}' = -grad'\varphi'. \tag{2.19}$$

Além disto, com $\vec{u}' = 0$, as equações (2.13) para a força elétrica dada em função das variáveis com linha, se reduzem em:

$$f_x = D'_x$$

$$f_y = \frac{D'_y}{k} \tag{2.20}$$

$$f_z = \frac{D'_z}{k}.$$

Com esse resultado Lorentz conclui que, no caso em que $\vec{u}' = 0$, se podem obter as forças que atuam no sistema móvel ∑, a partir das forças correspondentes no sistema em repouso ∑'. A componente x da força em ambos os sistema tem o mesmo valor, mas tanto a componente na direção y como na direção z da força no sistema móvel ∑ são *k* vezes menores do que as suas correspondentes do sistema em repouso ∑'. Para representar esse resultado Lorentz usa a seguinte expressão:

$$\vec{F}(\Sigma) = \left(1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)\vec{F}'(\Sigma'), \qquad \text{válida quando } \vec{u}' = 0 \qquad (2.21)$$

As palavras de Lorentz se referem apenas ao caso das forças que atuam sobre os elétrons, vejamos:

> *"Obteremos então as forças que atuam sobre os elétrons do sistema móvel ∑, se antes determinarmos as forças correspondentes em ∑' e depois multiplicarmos as suas componentes na direção do eixo de x por l^2 e as componentes perpendiculares a essa por l^2/k"* [Lorentz, 1904, p.22].

Mas, logo em seguida ele indica como encontrar também o valor da quantidade de movimento *p* do sistema móvel ∑, conhecendo-se as grandezas linhas do sistema ∑'. Lorentz pretende mostrar que para cada estado de movimento possível do sistema sem translação existe um estado correspondente do mesmo sistema animado de translação. A correspondência de cada estado possível no sistema sem translação com um outro estado possível no sistema com translação é caracterizada de acordo com a teoria dos estados correspondentes. Quando no sistema em que não há translação se estabelece uma translação, tal que, nesse novo estado de movimento, num determinado local, as componentes de $\vec{p}$, $\vec{D}$ e $\vec{H}$ são certas funções do tempo t, é possível estabelecer no mesmo sistema, após posto em movimento e, consequentemente, deformado, um estado de movimento em que as componentes de $\vec{p}'$, $\vec{D}'$ e $\vec{H}'$ são, num local correspondente ao primeiro, as mesmas funções do tempo local t'.

Para explicar o resultado nulo do experimento de Michelson, Lorentz considera um sistema sem translação, no qual, em alguns pontos do seu espaço as componentes de $\vec{D}$ e $\vec{H}$ são nulas. Então no estado de movimento correspondente do sistema animado de movimento, teremos nas partes correspondentes as primeiras $\vec{D}'$ e $\vec{H}'$ também nulos. Sendo $\vec{D}' = 0$ e $\vec{H}' = 0$ as relações entre as grandezas com linhas e as sem linhas resulta em $\vec{D} = 0$ e $\vec{H} = 0$, pois sempre que esses campos são nulos em ∑ o mesmo ocorre em ∑'. Portanto, é impossível descobrir uma influência do movimento terrestre em qualquer experiência ótica que seja feita com uma fonte luminosa terrestre e consista na distribuição geométrica de luz e obscuridade como o exemplo da experiência de Michelson. Também pode-se mostrar que a razão das amplitudes que a luz apresenta em dois pontos quaisquer do sistema não se modifica por efeito de uma translação.

2.3- As previsões de Maxwell e de Lorentz para fenômenos eletromagnéticos

A teoria eletrodinâmica de Maxwell é bastante semelhante à teoria eletrodinâmica de Lorentz. A diferença básica entre elas repousa sobre pequenas alterações realizadas por Lorentz na teoria de Maxwell. Lorentz pretendia ajustar a eletrodinâmica de Maxwell, que previa resultados experimentais diferentes caso o sistema ou aparato estivesse em repouso ou em movimento relativo ao éter, para uma nova teoria em que os fenômenos eletromagnéticos fossem completamente independentes do movimento do sistema. As duas teorias possuem em comum um núcleo constituído pelas Leis de Newton da Mecânica, as transformações de Galileu e as equações de Maxwell adicionada à força de Lorentz. Também, em ambas as teorias existe a heurística que surge do princípio metafísico de que todos os fenômenos físicos são governados por ações transmitidas pelo éter. Mas, é somente na teoria de Lorentz que ocorre a hipótese de contração juntamente com a teoria dos estados correspondentes. Com isso, Lorentz consegue atingir seu objetivo principal que é o de fazer as mesmas previsões quer o experimento esteja em repouso ou em movimento no éter.

Para compreendermos melhor a distinção entre as previsões dos resultados experimentais sobre fenômenos eletromagnéticos realizadas por ambos esses autores vamos estabelecer um problema exemplo e analisá-lo sob o ponto de vista de cada uma das teorias. Suponhamos dois observadores em locais distintos, um em uma estação espacial em repouso no éter e o outro na Terra movendo-se com a translação $\vec{v} = (v,0,0)$ também relativa ao éter. Imagine que, inicialmente, os dois observadores estivessem na estação espacial, em repouso no éter, onde verificaram a forma geométrica esférica de dois corpos idênticos medindo-se o diâmetro em direções transversais. As duas esferas foram carregadas eletricamente do mesmo modo e identificadas pelas letras *A* e *B*. Um dos observadores leva a esfera *A* para a Terra com o intuito de realizar os mesmos experimentos que serão desenvolvidos na estação espacial com a esfera *B*. Suponha, ainda, que o observador na estação espacial disponha de instrumentos de medida capazes de estudar os fenômenos eletromagnéticos provenientes da esfera *A* localizada na Terra.

Tanto Maxwell como Lorentz estão de acordo que o observador na estação espacial, portanto em repouso no éter, verificaria que os campos eletromagnéticos da esfera *B* são descritos pelas equações de Maxwell, assim como os da esfera *A* antes de adquirir a translação da Terra. Para esse mesmo observador, após a esfera *A* ser submetida à translação $\vec{v} = (v,0,0)$ da Terra, descrevendo as coordenadas em termos de eixos que se movam com a referida translação, os campos eletromagnéticos são expressos no espaço e no tempo por leis que não mais as equações de Maxwell, a saber, as equações (2.5). Daqui em diante as divergências entre as duas teorias aparecem. Em Maxwell, o observador da Terra iria mensurar, através de instrumentos de medidas que não sofrem qualquer modificação devida à translação, comprimentos, intervalos de tempo e campos que são soluções das equações (2.5); em particular, a medida da velocidade da luz não teria o mesmo valor em todas as direções e ele perceberia que estava se movendo relativo ao éter. Já Lorentz, argumentaria que os instrumentos de medidas são afetados pela translação, de acordo com a sua teoria de estados correspondentes, e o observador da Terra faria medidas de comprimentos, de intervalos de tempo e de campos que, no caso livre de fontes, satisfazem as equações de Maxwell, portanto, a luz teria velocidade constante. O observador da Terra teria a impressão de que estaria em repouso no éter e não haveria nenhum experimento explorando os fenômenos eletromagnéticos capaz de identificar seu movimento de translação absoluto. Essa interpretação está implícita no artigo de Lorentz de 1904, pois, ele não se pronuncia a respeito dos campos medidos no laboratório terrestre, como discutimos na seção 2.1. Seus cálculos são voltados para o referencial do éter sobre a idéia tácita de que a ocorrência de um fenômeno físico é independente do referencial, ou seja, para o caso particular do experimento de Michelson e Morley, se não há, no referencial do éter, deslocamento das franjas de interferência ao girar o aparato, o mesmo deve acontecer no referencial do laboratório na Terra.

Na teoria dos estados correspondentes, o *"referencial" S',* onde as quantidades mensuráveis $(x', y', z', t', u', \rho', \vec{D}', \vec{H}')$ foram alteradas no sentido de vir satisfazer as equações de Maxwell e a luz se apresentar com uma velocidade constante, não é exposto por Lorentz como o referencial da Terra, mas sim, como um referencial equivalente a uma configuração de carga em repouso no éter, ou melhor dizendo, sem translação. A correspondência é feita biunivocamente entre cada estado do sistema animado de translação com o correspondente estado do mesmo sistema sem translação. A extensão da teoria eletrodinâmica de Lorentz à interpretação que acabamos de fazer só seria completa se Lorentz postulasse que *S'* é o referencial do laboratório terrestre, mas, ele não faz isso. Contudo, essa explanação fica implícita, uma vez que, a nossa boa física deve tratar também de medidas realizadas no laboratório terrestre e, portanto, tais medidas não poderiam estar ausentes.

3. Eletrodinâmica de Einstein

3.1. Introdução

O fenômeno de indução eletromagnética resultante da interação entre um condutor e um ímã foi o primeiro fato, mencionado por Einstein em seu artigo de 1905, que o levou a questionar a teoria eletromagnética daquela época. Einstein argumentou que a corrente induzida em uma espira condutora por um ímã depende apenas do movimento relativo entre ambos, enquanto a teoria de então em voga considerava distintos os casos em que o móvel era a espira ou o ímã, sendo os movimentos nas duas situações idênticos. Somando-se a isso, as frustrações nas tentativas de detectar um movimento da Terra em relação a um meio luminífero, Einstein concluiu dizendo que, tal como ocorre na Mecânica, os fenômenos eletromagnéticos não possuem nenhuma particularidade que indique a idéia de um repouso absoluto. Diante desses resultados, Einstein decide investir em uma nova teoria eletrodinâmica onde a introdução de um éter luminífero revela-se supérflua por não necessitar de inserir um espaço em repouso absoluto nem de atribuir um vetor velocidade a qualquer ponto do espaço vazio em que tenha lugar um processo eletromagnético.

Neste capítulo iremos fazer uma apresentação da teoria eletrodinâmica encontrada no artigo de Einstein de 1905. Faremos uma discussão sobre a definição de tempo envolvendo as formas de mensurá-lo e, ainda, sobre a relatividade da simultaneidade. Uma apresentação do conceito de referencial de Einstein é feita juntamente com as equações de transformação entre as grandezas de um referencial para outro. Na eletrodinâmica, veremos a determinação dos campos em diferentes referenciais.

Rumo à construção de sua nova teoria eletrodinâmica, Einstein percebe que é preciso elaborar uma nova cinemática dos corpos rígidos. Segundo Einstein [Einstein 1905, pp.48,49], qualquer eletrodinâmica deve ser apoiada em uma cinemática, uma vez que, as proposições de uma teoria desse gênero consistem na afirmação de relações entre corpos rígidos (sistemas de coordenadas), relógios e processos eletromagnéticos.

Na cinemática einsteiniana são trabalhados: a definição de simultaneidade; a relatividade de comprimentos e tempos; a transformação das coordenadas e do tempo na passagem de um sistema em repouso para outro que está animado, em relação ao primeiro, de uma translação uniforme e, também, o significado físico das equações de transformações do espaço e do tempo. Após construída a parte cinemática de sua teoria, Einstein inicia a sua parte eletrodinâmica.

A estrutura da teoria eletrodinâmica de Einstein é alicerçada em dois postulados que darão apoio tanto a parte cinemática quanto a parte eletrodinâmica. Deles se chegará na relatividade de comprimentos e tempos, nas equações de transformações do espaço e do tempo, como também, aos campos elétricos e magnéticos medidos em referenciais distintos. Tais postulados foram enunciados por Einstein, da seguinte forma:

1. *As leis segundo as quais se modificam os estados dos sistemas físicos são as mesmas, quer sejam referidas a um determinado sistema de coordenadas, quer o sejam a qualquer outro que tenha movimento de translação uniforme em relação ao primeiro.*
2. *Qualquer raio de luz move-se no sistema de coordenadas em repouso com uma velocidade determinada c, que é a mesma quer esse raio seja emitido por um corpo em repouso, quer o seja por um corpo em movimento [Einstein,1905, p.52].*

Observe que é exigido pelo segundo postulado em combinação com o primeiro que a velocidade da luz medida em um sistema de referência ("*sistema em repouso*") tem o mesmo valor daquela medida em outro sistema de referência ("*sistema em movimento*") que se move, em relação ao primeiro, com uma translação uniforme.

3.2- A Determinação do Tempo

De que maneira medimos o tempo? Ou indo a um ponto mais fundamental, o que se entende por tempo? Segundo Einstein, todas as nossas apreciações em que intervém o tempo são sempre apreciações sobre acontecimentos simultâneos

[Einstein 1905, p. 49]. Nossas medidas de tempo estão, portanto, relacionadas com a simultaneidade de eventos. Ao mensurar o tempo em que ocorre um determinado fato estamos, na verdade, verificando a simultaneidade de dois eventos: o primeiro é o do fato em si e o segundo é o da indicação dos ponteiros do relógio em repouso nas vizinhanças de ocorrência do primeiro evento. A definição de tempo fica aparentemente resolvida se substituir a palavra "*tempo*" por *"indicação dos ponteiros do relógio*". Essa forma de entender o tempo é aplicável para eventos simultâneos que ocorrem no mesmo lugar, mas tal definição não é suficiente quando se deseja estabelecer uma relação temporal entre séries de acontecimentos que se desenrolam em locais diferentes, longe do relógio. Se um observador, com um relógio em repouso na origem de um sistema de referência, desejasse por em ordem cronológica uma série de eventos que ocorrem em lugares distintos e afastados do relógio anotando, para tal fim, a indicação dos ponteiros do relógio de acordo com a chegada dos respectivos sinais luminosos enviados por cada um dos eventos, através do espaço vazio, tal ordenação teria a desvantagem de não ser independente da localização do observador. Portanto, não há dificuldades em ordenar cronologicamente uma série de acontecimentos que se produzem nas vizinhanças do relógio, mas o mesmo não ocorre se esses acontecimentos se desdobram em posições distintas e longínquas.

A solução apontada por Einstein foi colocar relógios, de funcionamento idêntico, em cada local onde ocorra um evento e, assim, constituir a relação temporal entre os eventos. Mas, para comparar os tempos medidos nos vários relógios é preciso que todos eles estejam sincronizados e, por isso, Einstein estabeleceu um critério para verificar o sincronismo entre os relógios. Imagine um astronauta na Lua e outro em Marte, munidos de relógios. O astronauta em Marte emite um sinal luminoso em direção a Lua simultâneo a indicação t_A de seu relógio. O astronauta na Lua constata a reflexão do referido sinal, em um espelho nas suas proximidades, quando seu relógio marcava o tempo t_B. O sinal refletido na Lua retorna a Marte e o astronauta que lá se encontra observa a sua chegada simultânea a indicação t'_A. Considerando que a distância entre a Lua e Marte permaneceu inalterada durante o experimento, os relógios serão síncronos, por definição, se

$$t_B - t_A = t'_A - t_B \,. \qquad (3.1)$$

Note que nesta definição levou-se em conta que a luz no espaço vazio se propaga com velocidade constante de tal forma que sendo a distância entre a Lua e Marte designada por AB esta velocidade é dada por

$$c = \frac{2AB}{t'_A - t_A}, \qquad (3.2)$$

Einstein atribuiu a essa grandeza o status de constante universal.

Os locais aqui tratados poderiam ser quaisquer outros e, portanto, tal definição de sincronismo se estende a um número arbitrário de pontos. Deste modo, dado os relógios R_A, R_B e R_C localizados nos pontos A, B e C, respectivamente, são válidas as seguintes relações:

a) Se R_A é síncrono com R_B, também R_B é síncrono com R_A.

b) Se R_A é síncrono com R_B e também com R_C, então os relógios R_B e R_C são síncronos entre si.

Por conseguinte, a definição de tempo poderia agora ser resumida com as seguintes palavras de Einstein:

> *"<< Tempo>> de um acontecimento será então a indicação, simultânea desse acontecimento, que é fornecida por um relógio que satisfaz as seguintes condições: está colocado em repouso, no local do acontecimento; é síncrono de um outro relógio em repouso, mantendo-se esse sincronismo em todas as determinações de tempo"[Einstein 1905, p. 52].*

3.3- Equações de Transformação do Espaço e do Tempo entre Sistemas de Referências

Ao iniciar a teoria de transformação das coordenadas e do tempo entre um sistema de referência e outro com translação uniforme em relação ao primeiro Einstein faz uma breve definição do que seja um sistema de referência. Trata-se de um sistema de três linhas materiais, rígidas, perpendiculares entre si, munido de uma régua rígida e de um certo número de relógios rigorosamente idênticos. Einstein usa o termo sistema de coordenadas referindo-se as três linhas materiais, mas admite, tacitamente, a idéia de sistema de referência ao introduzir os aparelhos de medidas (régua e relógios).

Tomando-se dois desses sistemas de referência, *K* e *k*, com eixos paralelos, por razões de simetria, em que as coordenadas espaciais e o tempo são (x, y, z, t) e (ξ, η, ζ, τ) respectivamente, Einstein põe o problema de encontrar as equações que ligam entre si essas grandezas, as quais, devem ser lineares devido as propriedades homogêneas atribuídas ao espaço e o tempo. As coordenadas espaciais x, y, z e o tempo t são mensurados por uma régua e por relógios síncronos, de acordo com a convenção de Einstein, que se encontram em repouso em *K*. De maneira equivalente, ξ, η, ζ e τ são medidos por régua e relógios síncronos em repouso em *k*. O sistema *k* possui uma translação *v* em relação a *K* no sentido dos *X* crescentes.

Einstein deduz as equações de transformação das coordenadas espaciais e do tempo entre sistemas de referência a partir da sua definição de sincronismo, a qual é usada para construir uma equação que relaciona instantes de tempos no referencial *k*. Considera-se um ponto fixo em *k* com coordenadas no referencial *K* dadas por $x' = x - vt$, y e z. Um raio de luz emitido a partir da origem de *k* no instante τ_0 percorre o eixo *X* em direção a x' onde é refletido no instante τ_1 e regressa a origem de *k* onde chega no instante τ_2. Da definição de sincronismo entre os relógios em *k*, temos:

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1 \qquad (3.3)$$

Para calcular τ como função de x', y, z e t; temos que a emissão do raio de luz, ocorre no momento em que as origens de *k* e *K* coincidem e, portanto, para esse instante a função τ pode ser escrita como

$$\tau_0 = \tau\,(0,0,0,t).$$

Aplicando o princípio da constância da velocidade da luz no sistema *K*, os demais instantes terão os seguintes argumentos:

$$\tau_1 = \tau\left(x',0,0,t+\frac{x'}{c-v}\right) \qquad \text{e} \qquad \tau_2 = \tau\left(0,0,0,t+\frac{x'}{c-v}+\frac{x'}{c+v}\right).$$

Reescrevendo a equação (3.3) com os argumentos da função τ, obtemos:

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t)+\tau\left(0,0,0,t+\frac{x'}{c-v}+\frac{x'}{c+v}\right)\right]=\tau\left(0,0,0,t+\frac{x'}{c-v}\right) \tag{3.4}$$

Para chegar na equação diferencial cuja solução constitui-se de τ como função de (x', y, z, t), Einstein toma x' infinitamente pequeno e expande os dois lados da equação (3.4) como uma série em x'. Negligenciando termos de segunda ordem em diante, o resultado fica

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{v}{c^2-v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t}=0\,. \tag{3.5}$$

Considerando que ao longo dos eixos Y e Z do referencial *K* a luz emitida por uma fonte fixa na origem de *k* se propaga nestas direções com velocidade $\sqrt{c^2-v^2}$, um raciocínio análogo ao que nos levou a equação (3.5) resulta em

$$\frac{\partial\tau}{\partial y}=0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial\tau}{\partial z}=0 \tag{3.6}$$

Sendo τ independente de y e z, Einstein deduz a função $\tau(x',t)$ consistente com as equações (3.5) e (3.6) , qual seja:

$$\tau = a\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2}x'\right),$$

em que a é uma função arbitrária em *v* e supôs-se, por brevidade, que no ponto de origem de *k* era $t=0$ para $\tau=0$. Einstein em seguida demonstra ser a=1escrevendo a função $\tau(x',t)$ como:

$$\tau = \left(t - \frac{v}{c^2 - v^2}x'\right) \tag{3.7}$$

A partir desse resultado podemos encontrar as funções para ξ, η, ζ. O princípio da constância da velocidade da luz indica que em *k* a luz se desloca com velocidade *c.* O princípio da relatividade sugere que para um raio de luz emitido no instante $\tau=0$ no sentido de ξ crescente, tem-se

$$\xi = c\tau \qquad \text{ou} \qquad \xi = c\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2}x'\right). \tag{3.8}$$

Contudo, em relação ao sistema de referência *K*, o raio de luz se distancia da origem de *k* com velocidade $c - v$. Desta forma temos

$$t = \frac{x'}{c - v}. \tag{3.9}$$

Levando o resultado (3.9) em (3.8), obtemos

$$\xi = \frac{c^2}{c^2 - v^2}x'$$

Analogamente,

$$\eta = c\tau \qquad \text{ou} \qquad \eta = c\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2}x'\right).$$

Como neste caso temos: $x' = 0$ e $t = \dfrac{y}{\sqrt{c^2 - v^2}}$,

logo, $\eta = \dfrac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}y$.

Como a direção ζ é, neste caso, equivalente a direção η, podemos também escrever

$$\zeta = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} z \, .$$

Substituindo x' pelo seu valor, obtemos:

$$\begin{cases} \xi = \gamma(x - vt) \\ \eta = y \\ \zeta = z \\ \tau = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \tag{3.10}$$

em que, $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$. (3.11)

Einstein preocupa-se com a aparente incompatibilidade dos dois princípios fundamentais de sua teoria eletrodinâmica e busca provar que eles não são incompatíveis. Ele demonstra de forma simples que uma onda esférica emitida no instante $t= \tau=0$ a partir da origem de *K,* que é coincidente com a origem de *k* neste instante de emissão, possui a mesma velocidade em ambos referenciais e é vista também como uma onda esférica em *k*. Seja (x, y, z) um ponto atingido pela frente de onda em *K*, temos

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \; .$$

Usando as equações (3.10) de transformação do espaço e do tempo obteremos

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c^2 \tau^2 .$$

Logo, a onda considerada também é vista no sistema *k* como uma onda esférica de velocidade de propagação *c,* demonstrando, assim, que os dois princípios são compatíveis.

3.4- A Relatividade da Simultaneidade

Eisntein apresenta o segundo parágrafo de seu artigo de 1905 com o título "*sobre a relatividade de comprimentos e tempos*", mas aqui ele apenas demonstra que a simultaneidade não possui um caráter absoluto. Miller [1981 p.204] comenta que Eisntein desejava que o leitor deduzisse a partir da relatividade da simultaneidade que os comprimentos e os tempos também são relativos.

Para demonstrar a relatividade da simultaneidade Einstein reporta ao problema de que dois relógios sincronizados em relação a um sistema de referência podem não ser síncronos em outro referencial. Considere os sistemas de referências K e k descritos na secção 3.3 em que k translada com velocidade v em relação a K na direção do X crescente. Em k tem-se uma haste em repouso de comprimento l medido por uma régua também em repouso neste referencial. Um observador em K deseja medir o comprimento da haste determinando os pontos que coincidem com a origem e a extremidade da haste no instante t, empregando para tal fim uma régua e relógios síncronos, situados em repouso em K. Neste ponto Einstein ressalta que a cinemática usual admite tacitamente que os comprimentos medidos nos dois referenciais são os mesmos, mas na sua nova cinemática tais comprimentos têm valores diferentes, ou seja, um corpo rígido em movimento no instante t, não é inteiramente equivalente, do ponto de vista geométrico, ao mesmo corpo considerado em repouso, numa determinada posição [Einstein 1905, p.54].

Suponha que no sistema k temos dois observadores localizados nas extremidades A e B da haste com relógios que são síncronos daqueles do sistema K, isto é, dão indicações que estão de acordo com o tempo do sistema K nos locais em que se encontram, sendo assim síncronos no sistema K. Mas, então, esses dois observadores desejam saber se os dois relógios fixos nas extremidades A e B da haste são síncronos no sistema k, no qual se encontram, aplicando para isso o critério de funcionamento síncrono entre dois relógios estabelecido por Einstein.

Imaginemos que um observador em K monitora a operação de sincronismo realizada em k. Três eventos (E_1, E_2 e E_3) são anotados de acordo com as indicações dos relógios de K:

- E_1 – um raio de luz parte de A quando A coincide com a posição de um relógio em *K* cuja indicação é t_A;
- E_2 – após percorrer a distância r_{AB} relativo a *K* o raio é refletido em B quando B coincide com a posição de um relógio em *K* indicando t_B;
- E_3 – o raio refletido percorre a distância r_{AB} de volta para A atingindo-o no momento em que A coincide com a posição de um relógio em *K* marcando o instante t'_A.

Levando-se em conta o princípio da constância da velocidade da luz, temos:

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{c-v} \qquad \text{e} \qquad t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{c+v}\,. \tag{3.12}$$

Logo, se os relógios fixos nas extremidades A e B da haste são síncronos dos relógios do sistema *K*, eles não são síncronos do sistema *k*. Em consequência, o que é simultâneo em um referencial pode não ser no outro e, desta forma, a simultaneidade não pode ter um caráter absoluto.

As equações (3.10) de transformação do espaço e do tempo deixam claro o caráter não absoluto de intervalos de tempo e de comprimentos. O propósito de Einstein no §2 do artigo de 1904 era essencialmente epistemológico e por isso ele não deduz matematicamente que o comprimento da haste possui valores diferentes em *k* e em *K,* deixando tal dedução aberta para o leitor. Por exemplo, se o observador em *k* localizado na extremidade A da haste registra o tempo de ida e volta com que a luz percorre o comprimento *l* da haste, medido em *k*, ele irá constatar que o intervalo de tempo é:

$$\Delta\tau = {}^{2l}\!/_{c} \tag{3.13}$$

Por outro lado, de acordo com as equações (3.12), o observador em *K* registrará o intervalo de tempo

$$\Delta t = 2r_{AB}\big/c(1 - v^2\big/c^2) \tag{3.14}$$

Comparando os dois intervalos de tempos, obtemos:

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \frac{r_{AB}}{l(1 - v^2/c^2)}$$

Para prosseguir na nossa comparação precisamos conhecer a relação entre r_{AB} e l. Para isso, precisamos também conhecer a relação entre $\Delta\tau$ e Δt. Usando a relação obtida por Einstein no §4 para a relatividade do tempo $\left(\tau = t\sqrt{1 - v^2/c^2}\right)$, chegamos em

$$r_{AB} = l\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{3.15}$$

que é matematicamente equivalente ao resultado obtido na eletrodinâmica de Lorentz através da hipótese de contração.

3.5. O Campo Eletromagnético em Diferentes Referenciais

Após estabelecer os fundamentos de sua cinemática Einstein parte para a construção da eletrodinâmica que será apoiada nesta nova cinemática. Aplicando o princípio da relatividade e o princípio da constância da velocidade da luz, juntamente com as equações (3.10) de transformação do espaço e do tempo desenvolvidas na secção 3.3, ele chega às equações de transformação entre os campos elétricos e magnéticos medidos em referenciais inerciais distintos. No §6 Einstein usa as equações da eletrodinâmica para o caso da radiação no espaço vazio, ou seja, na ausência de cargas. O caso em que a densidade de carga é diferente de zero é explorado no § 9. Neste ponto, ele encontra a equação de transformação da densidade de carga de um referencial inercial para outro. Esta equação difere daquela encontrada por Lorentz a menos de um termo, embora, devemos lembrar que em Lorentz não se trata da transformação de densidade de carga de um referencial inercial para outro e, sim, do referencial do éter para um outro referencial imaginário.

Ao iniciar o §6, que trata das transformações das equações de Maxwell para o espaço vazio, Einstein aparenta um certo receio em aplicar as equações de Maxwell em um referencial diferente daquele do éter, o qual ele denomina de *"sistema em repouso"*. A eletrodinâmica vigente admitia que apenas no referencial privilegiado do éter é que as equações de Maxwell seriam válidas e, portanto, supor a validade delas em outro referencial seria um passo ousado ou, como diria Tomas Khun, uma quebra de paradigma. Por isso, Einstein introduz o parágrafo com a conjunção condicional "*se*", evidenciando, deste modo, a sua dúvida quanto o emprego das equações de Maxwell em outro referencial que não o do éter.

Nas teorias eletrodinâmicas pré-relativísticas aceita-se a validade das equações de campo e a constância da velocidade da luz em apenas um único referencial, qual seja, o do éter. Já na eletrodinâmica relativística, essa validade engloba qualquer referencial inercial. Usando a notação vetorial, a versão de Einstein para o conjunto das equações de Maxwell no referencial *K* aplicadas à radiação no espaço vazio, isto é, paro o caso com densidade de carga nula ($\rho=0$), é

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\vec{E}=0\,, \\ &\nabla\cdot\vec{B}=0\,, \\ &\nabla\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,, \\ &\nabla\times\vec{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\,. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Esse conjunto de equações é matematicamente equivalente às equações (1) de Lorentz com $\vec{B}=\vec{H}$ e $\vec{E}=\vec{D}$, dado o diferente sistema de unidades usado por cada um deles. Enquanto Einstein emprega o sistema gaussiano (cgs), Lorentz utiliza o sistema Heaviside-Lorentz [Jackson, 1962, pp. 611-621], um sistema de unidades dentro do sistema gaussiano onde a constante elétrica ε_0 e a constante magnética μ_0 estão incorporadas implicitamente no próprio sistema de unidades. Einstein não exibe as duas primeiras equações acima, embora, subsequentemente, faça uso delas. Apesar de muitos autores nos primeiros anos do século XX já empregarem a notação vetorial, Einstein opta por não utilizar tal notação. Segundo Miller [Miller

1981, p.287] a notação vetorial não foi escolhida por Einstein porque complicaria desnecessariamente as transformações relativísticas que seguem.

Einstein converte o espaço e o tempo nas equações (3.16) de *K* para *k*, usando as transformações (3.10) que resultam em

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \gamma\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial \tau}\right), \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \eta}, \\
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial \zeta}, \\
\frac{\partial}{\partial t} &= \gamma\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - v\frac{\partial}{\partial \xi}\right).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Após as equações obtidas por meio destas transformações, Einstein evoca o princípio da relatividade para ressaltar que ele exige a validade das equações de Maxwell para esse mesmo problema visto do referencial *k*, cuja forma seria

$$\begin{aligned}
\nabla' \times \vec{E}' &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}'}{\partial \tau} \\
\nabla' \times \vec{B}' &= \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}'}{\partial \tau}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

onde as grandezas com linha referem-se a *k*, ou seja, $\nabla' = (\partial/\partial\xi, \partial/\partial\eta, \partial/\partial\zeta)$, $\vec{E}' = (E_\xi, E_\eta, E_\zeta)$ e $\vec{B}' = (B_\xi, B_\eta, B_\zeta)$. Então, ele constata que os campos elétricos e magnéticos nesses dois sistemas inerciais devem ser relacionados por:

$$\begin{aligned}
E_\xi &= E_x & B_\xi &= B_x \\
E_\eta &= \gamma\left(E_y - \frac{v}{c}B_z\right) & B_\eta &= \gamma\left(B_y + \frac{v}{c}E_z\right) \\
E_\zeta &= \gamma\left(E_z + \frac{v}{c}B_y\right) & B_\zeta &= \gamma\left(B_z - \frac{v}{c}E_y\right)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Analogamente, Einstein aborda no §9 o problema eletrodinâmico com densidade de carga não nula, ou seja, *ρ ≠ 0*. Neste caso, as equações de campo no sistema *K* ficam

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$
$$\nabla\times\vec{B}=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\rho\vec{u}\right). \tag{3.20}$$

onde, $\rho=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$ representa o produto por 4π da densidade de carga e $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ é o vetor velocidade da carga. Aplicando às equações (4.20) as transformações (4.10) e (4.19) para passarmos do sistema *K* para *k*, obtemos:

$$\nabla'\times\vec{E}'=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}'}{\partial\tau}$$
$$\nabla'\times\vec{B}'=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{E}'}{\partial\tau}+\rho'\vec{u}'\right) \tag{3.21}$$

onde, $\rho'=\frac{\partial E_\xi}{\partial\xi}+\frac{\partial E_\eta}{\partial\eta}+\frac{\partial E_\zeta}{\partial\zeta}$ e $\vec{u}'=(u_\xi,u_\eta,u_\zeta)$ são a densidade de carga e a velocidade da carga em *k,* respectivamente. Tal que:

$$\rho'=\gamma\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)\rho \tag{3.22}$$

$$u_\xi=\frac{u_x-v}{1-\frac{vu_x}{c^2}},\qquad u_\eta=\frac{u_y}{1-\frac{vu_x}{c^2}},\qquad u_\zeta=\frac{u_z}{1-\frac{vu_x}{c^2}} \tag{3.23}$$

Ao chegar nestas equações Einstein [§9, p.80] conclui dizendo: "*fica assim demonstrado que, uma vez aceites os nossos princípios cinemáticos, se realiza o acordo entre o princípio da relatividade e a base eletrodinâmica da teoria de Lorentz sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento* ".

4. Transformações de Referenciais

Antes de falarmos em transformações de referenciais é preciso definir o que vem a ser um referencial. Para definir a nossa concepção de referencial faremos, inicialmente, uma explanação do significado de referencial para Lorentz e para Einstein. O conceito de referencial de Einstein assume uma definição mais rigorosa e precisa quando comparado ao de Lorentz.

Lorentz não define explicitamente o que é um referencial, mas, está implícito que o seu conceito é o de um sistema matemático de três eixos perpendiculares entre si com um ponto em comum marcando a origem do sistema. Esses eixos darão a localização em um espaço euclidiano do acontecimento de um fenômeno físico qualquer em um dado instante que pode ser medido com um relógio. Aqui, há a idéia tácita de que basta apenas um relógio para marcar o instante de ocorrência de qualquer fenômeno físico, em particular, fenômenos que tenham localização distante do relógio devem ter instantes subtraídos do tempo de retardo, ou seja, tempo gasto pela luz para ir do local do fenômeno até o relógio. Além disso, embora os eixos sejam matemáticos ou imateriais, as posições só podem ser determinadas com réguas físicas.

O conceito de Einstein sobre referencial pode ser visto como uma evolução do conceito de Lorentz. Em Einstein, as coordenadas espaciais de um evento são dadas por um sistema físico de três linhas materiais, rígidas e perpendiculares entre si tendo origem no ponto de intersecção entre elas. É interessante notar que, ao tratar tais eixos como um sistema material, a existência de um espaço euclidiano físico torna-se supérflua. Uma contração do espaço trata-se, na verdade, de uma contração nas linhas materiais do sistema métrico de coordenadas e, portanto, estendida a todos os corpos materiais.

Uma grandeza refinada na definição de Einstein sobre referencial é o tempo. Einstein aponta para as dificuldades em compreender o significado da grandeza tempo. A conclusão de Einstein é que o tempo está ligado à simultaneidade de eventos, ou seja, o tempo de um evento A é a indicação dos ponteiros do relógio simultânea ao evento A se esses dois eventos ocorrem no mesmo local. Mas, como podemos constatar a simultaneidade de dois eventos que ocorrem em locais diferentes e, assim, marcar o tempo de um evento ocorrido longe do relógio?

Um método, por exemplo, seria aquele que sugerimos estar implícito no conceito de Lorentz sobre referencial, ou seja, conhecendo a distância *d* entre o evento A e o relógio. Com efeito, sendo *v* a velocidade com que o sinal luminoso proviniente do evento percorre a distância *d*, a indicação t_1 do ponteiro do relógio simultânea com o evento A será:

$$t_1 = t_2 - d/v$$

onde, t_2 é a indicação do ponteiro do relógio simultânea com a chegada do sinal ao relógio. Mas, como sabemos que a velocidade do sinal é *v?* Ora, medido o tempo que o sinal gasta para percorrer a distância *d,* de modo que a definição é circular. Ao contrário da simultaneidade de eventos que ocorrem no mesmo local, a simultaneidade de eventos que ocorrem em locais distantes não possui nenhum significado *a priori*: ela tem de ser definida por uma convenção. A definição de Einstein da simultaneidade de eventos distantes está relacionada com o método acima e o princípio que confere a luz no vácuo o caráter de constante universal.

A coordenada temporal no referencial einsteiniano é mensurada por relógios rigorosamente idênticos distribuídos por todo o espaço de tal forma que sempre haverá um relógio no local de ocorrência de um evento. Além disso, todos os relógios foram sincronizados de acordo a convenção de Einstein para simultaneidade de eventos distantes. Após termos apresentado o conceito de referencial de Lorentz e de Einstein segue aqui o nosso próprio conceito o qual iremos usá-lo para guiar nossa discussão sobre transformação de referenciais. De forma concisa, mas sem perder a sua precisão, definiremos referencial como um conjunto de instrumentos de medidas em repouso entre si. Se há dois conjuntos idênticos de instrumentos de medida, tal que, existe uma translação uniforme de um conjunto relativo ao outro, então, teremos dois sistemas de referência e a equação que relaciona os valores do mesmo tipo de aparelho de medida de cada referencial será a equação de transformação de referencial. Por outro lado, é preciso ainda definir evento com um fenômeno físico independente do referencial, por exemplo, a colisão entre duas partículas. Esse fato deverá ocorrer em todos referenciais, do contrário, a série de acontecimentos desencadeada por ele geraria graves inconsistências. Imagine que dois meteoros estejam em rota de colisão quando sua trajetória é mensurada pelo conjunto de instrumentos de medida que constitui o referencial S, constatando a colisão no instante t, a qual, destruiu completamente os dois corpos. Caso o evento da colisão não ocorresse em qualquer outro referencial, digamos S´, uma inconsistência se faria presente, qual seja, existência e não existência dos meteoros.

Iniciaremos nossa discussão sobre transformações de referenciais com um tratamento puramente matemático para em seguida estendê-lo a um problema físico e, então, fazer uma aplicação ao caso eletrodinâmico.

Seja φ um campo definido em R^4, isto é, φ: $R^4 \rightarrow R^n$ (se n = 3 trata-se de um campo vetorial; se n = 1, trata-se de um campo escalar). Seja F um operador que atua sobre o espaço dos φ's, ou seja, F: $\Omega^{4,n} \rightarrow \Omega^{4,m}$, em que $\Omega^{4,n}$={φ tais que φ é uma função de R^4 em R^n}. Observe que se n = 3 e m = 3, o operador F leva um campo vetorial noutro campo vetorial. Se n= 3 e m = 1, F leva um campo vetorial num campo escalar.

Suponhamos que F(φ) = 0 e consideremos uma bijeção, σ, de R^4 em R^4. σ induz uma aplicação no espaço dos campos, σ^*: $\Omega^{4,n} \rightarrow \Omega^{4,n}$, assim definida:

$$[\sigma^*(\psi)](\sigma(P)) = \psi(P), \qquad \text{para todo } P \in R^4 \text{ e toda } \psi \in \Omega^{4,n}.$$

Desta última expressão, obtém-se:

$$[\sigma^*(\psi) \circ \sigma](P) = \psi(P), \qquad \text{para todo } P \in R^4.$$

Logo,

$$\sigma^*(\psi) \circ \sigma = \psi.$$

Conseqüentemente,

$$\sigma^*(\psi) = \psi \circ \sigma^{-1}.$$

Seja W o espaço dos operadores, ou seja, W = {G tais que G é uma função de $\Omega^{4,n}$ em $\Omega^{4,n}$}. De maneira similar, σ induz uma aplicação no espaço dos operadores, $\sigma^{\#}$: W $\rightarrow$ W, definida da seguinte forma:

$$[(\sigma^{\#}(F))(\sigma^*(\psi))](P) = [F(\psi)](P),$$

para todo P$\in$ R^4, toda $\psi \in \Omega^{4,n}$ e toda F $\in$ W.

Assim sendo, da equação F(φ) = 0, deduz-se a equação

$(\sigma^{\#}(F))(\sigma^{*}(\varphi)) = 0$.

Com efeito, se $F(\varphi)= 0$, então $[F(\varphi)](P) = 0$, para todo $P \in R^4$. Assim, usando-se as definições fornecidas, obtém-se que $0 = [F(\varphi)](P) = [(\sigma^{\#}(F))(\sigma^{*}(\varphi))](P)$. Logo,

$(\sigma^{\#}(F))(\sigma^{*}(\varphi)) = 0$.

Se denotarmos $\sigma{*}(\varphi)$ por φ' e $\sigma^{\#}(F)$ por F', então o que acabamos de provar foi que:

$F(\varphi) = 0 \Rightarrow F'(\varphi') = 0$.

A bijeção σ gera uma perturbação no domínio de φ tornando cada um de seus pontos do R^4 em outro ponto também do R^4. Essa perturbação se reflete num nível mais acima transformando a função φ: $R^4 \to R^n$ em $[\sigma{*}(\varphi)]$: $R^4 \to R^n$, que por sua vez reverbera no espaços dos operadores reduzindo F: $\Omega^{4,n} \to \Omega^{4,m}$ em $[\sigma^{\#}(F)]$: $\Omega^{4,n} \to \Omega^{4,m}$. Além disso, se o operador F aplicado ao campo φ resulta na função nula, o mesmo ocorre após a propagação desencadeada por σ.

Essa discussão matemática pode, agora, ser inserida no campo da física no que diz respeito às transformações de referenciais. Interpretemos cada quádrupla $(x, y, z, t) \in R^4$ como as coordenadas espaço temporais num dado referencial, digamos S. Interpretemos $\varphi(x, y, z, t)$ como o "valor" de uma grandeza física medido neste mesmo referencial, na posição (x, y, z) e no instante t. A bijeção $\sigma(x, y, z, t) = (x', y', z', t')$ transforma a quádrupla $(x, y, z, t) \in R^4$ em outra quádrupla $(x', y', z', t') \in R^4$ e interpretá-la como as novas coordenadas espaço temporais num outro referencial, digamos S´, transcende a matemática e perpassa para o campo da física, ou seja, é preciso postular que (x´, y´, z´, t´) serão as medidas de comprimento e de tempo realizadas pelos os aparelhos de medidas em repouso entre si que constitui o referencial S´. Feito isso, suponhamos que a grandeza física φ satisfaça a equação $F(\varphi) = 0$, quando medida em S. Então, conforme provamos, a equação $F'(\varphi') = 0$ deve ser satisfeita por φ'. A questão que se coloca é a seguinte:

$\varphi'(x', y', z', t')$ é o valor da grandeza em foco medido em S´?

Tal questão não possui uma resposta única. Se acreditarmos que a grandeza física em tela deve satisfazer uma equação invariante por mudança de referencial, então a resposta é não! Com efeito, a equação $F'(\varphi') = 0$ é distinta da equação $F(\varphi) = 0$. Neste caso, pode ser possível encontramos φ'' tal que

$[F(\varphi'')](x', y', z', t') = [F'(\varphi')](x', y', z', t')$, para todo $(x', y', z', t') \in R^4$.

Assim sendo, $\varphi''(x', y', z', t')$ é o valor da grandeza em foco medido em S´.

Caso não acreditemos que a equação é invariante, então a resposta pode ser sim! Ou seja, φ' é a grandeza medida em S´ e a equação que a governa em S´ não é mais a equação que a governava em S, $F(\varphi) = 0$, e sim a nova equação $F'(\varphi') = 0$. Mas a resposta poderia ter sido não. Neste caso, estaríamos dizendo que nem $\sigma*(\varphi)$ é a grandeza expressa em S´, nem a equação obtida de $\sigma^{\#}(F)$ governa a grandeza física em foco.

Vamos exemplificar tudo que dissemos com um exemplo no campo da eletrodinâmica: o campo elétrico (e o magnético) e as equações de Maxwell. Para facilitarmos, consideremos, primeiramente, as condições de vácuo: inexistência de cargas (e correntes). Nestas condições, teremos:

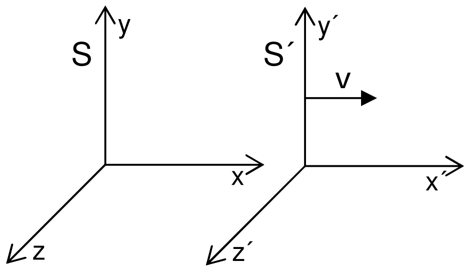
$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0\ ;\ \frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial y}=-\frac{\partial B_x}{\partial t};\frac{\partial E_z}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial z}=-\frac{\partial B_y}{\partial t};\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}=-\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t};\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t};\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t}$$

onde, $\vec{E}(x, y, z, t) = (E_x(x, y, z, t), E_y(x, y, z, t), E_z(x, y, z, t))$ é o "valor" do campo elétrico medido, no referencial S, na posição (x, y, z) e no instante t. Idem para o campo magnético, $\vec{B}$. A primeira (e a segunda) das equações acima possui a forma $F(\varphi) = 0$, em que o campo φ é o campo vetorial $\vec{E}: R^4 \to R^3$ e o operador F é o operador $\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot = \vec{\nabla}\cdot$. Observe-se que $\vec{\nabla}\cdot$ leva um campo vetorial definido no R^4, $\vec{E}$, por exemplo, no campo escalar definido no R^4, $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$, isto é, $\vec{\nabla}\cdot$ é uma aplicação de $\Omega^{4,3}$ em $\Omega^{4,1}$.

Consideremos, agora, que o referencial S´ se move, relativamente a S, com velocidade V no sentido positivo do eixo das abscissas, conforme indica a figura.



Vamos supor que o espaço e o tempo se transformam de acordo com as transformações de Lorentz. Neste caso, a bijeção σ: $R^4 \rightarrow R^4$ será determinada pelas equações:

$$x=\gamma(x'+Vt'); \quad y=y'; \quad z=z'; \quad t=\gamma\left(t'+\frac{V}{c^2}x'\right),$$

em que (x, y, z, t) são as coordenadas espaço-temporais relativas a S, (x´,y´,z´,t´) são as coordenadas espaço-temporais relativas a S´, $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$ é o fator de Lorentz e c é a velocidade da luz no vácuo.

Teremos que σ(x,y,z,t)=(x´,y´,z´,t´).

Então, $\vec{E}'=\sigma^*(\vec{E})=\vec{E}\circ\sigma^{-1}$

e

$\vec{E}'(x',y',z',t')=(\vec{E}\circ\sigma^{-1})(x',y',z',t')=\vec{E}(\sigma^{-1}(x',y',z',t'))=\vec{E}(x,y,z,t)$.

Repetimos a pergunta já feita: $\vec{E}'$ pode ser considerado o campo elétrico relativo a S´? Em outras palavras, se $\vec{E}(x,y,z,t)$ for o valor do campo elétrico medido no referencial S no ponto do espaço-tempo de coordenadas, relativas a S, iguais a (x, y, z, t), então o valor do campo elétrico, medido no referencial S´, no mesmo ponto do espaço-tempo, cujas coordenadas relativas a S´ pressupõe-se ser (x´, y´, z´, t´), será $\vec{E}'(x',y',z',t')$? Dito de outra forma: se interpretarmos $\vec{E}$ como sendo o campo elétrico relativo a S, então podemos interpretar a função $\vec{E}'$, que foi obtida de $\vec{E}$ aplicando-se σ*, como sendo o campo elétrico relativo ao referencial S´? Veremos que a resposta é não, caso adotemos o ponto de vista de que as equações de

Maxwell são invariantes por mudança de referencial e que um campo vetorial, para representar o campo elétrico num dado referencial, deve satisfazer as equações de Maxwell escritas com respeito a este referencial.

Escrevamos a primeira das equações de Maxwell no referencial S´. Para isso, encontremos a aplicação $\sigma^{\#}$ que leva F em F´= $\sigma^{\#}$(F), no nosso caso, que leva $\vec{\nabla}\cdot$ em $\vec{\nabla}'\cdot = \sigma^{\#}(\vec{\nabla}\cdot)$. Para tanto, usando-se a regra da cadeia para funções compostas e as transformações de Lorentz para o espaço-tempo acima arroladas, escrevamos:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y'}+\frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z'}+\frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'}=\gamma\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{\gamma V}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'}+\frac{\partial z'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z'}+\frac{\partial t'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial x'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial y'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y'}+\frac{\partial z'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z'}+\frac{\partial t'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial z'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial y'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y'}+\frac{\partial z'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z'}+\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}=-\gamma V\frac{\partial}{\partial x'}+\gamma\frac{\partial}{\partial t'}$$

Dessa forma,

$$\left[\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\right)\right](x,y,z,t)=\left[\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\vec{E}\right)\right](x,y,z,t)=\left[\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{\gamma V}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'},\frac{\partial}{\partial y'},\frac{\partial}{\partial z'}\right)\cdot\left(\vec{E}'\right)\right](x',y',z',t')=$$
$$\left[\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{\gamma V}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'},\frac{\partial}{\partial y'},\frac{\partial}{\partial z'}\right)\cdot\sigma*\left(\vec{E}\right)\right]\left(\sigma(x,y,z,t)\right).$$

Logo, pela definição de $\sigma^{\#}$, temos que $\vec{\nabla}'\cdot=\sigma^{\#}\left(\vec{\nabla}\cdot\right)=\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{\gamma V}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'},\frac{\partial}{\partial y'},\frac{\partial}{\partial z'}\right)\cdot$. Para que a função $\vec{E}'$ pudesse ser interpretada como o campo elétrico relativo a S´, seguindo a nossa premissa de que esse campo deve atender as equações de Maxwell escritas com respeito a este referencial, ela deveria satisfazer a equação $\left(\frac{\partial}{\partial x'},\frac{\partial}{\partial y'},\frac{\partial}{\partial z'}\right)\cdot\vec{E}'=0$, a qual tem a forma da primeira das equações de Maxwell: o divergente do campo elétrico é nulo. Só que $\vec{E}'$ satisfaz uma equação distinta dessa, a saber: $\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{\gamma V}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'},\frac{\partial}{\partial y'},\frac{\partial}{\partial z'}\right)\cdot\vec{E}'=0$. Resumindo, seja (x, y, z, t) as medidas de comprimento e de tempo realizada pelos aparelhos de medida do referencial S para determinar a posição e o instante de um evento. Considerando que a bijeção σ, dada pelas transformações de Lorentz, conduz aos valores (x´, y´, z´, t´) lidos pelos instrumentos de medida do referencial S´ referente ao mesmo evento. Supondo-se que as equações de Maxwell são invariantes por mudança de referencial e, por conseguinte, os campos vetoriais elétrico e magnético devem ser soluções dessas equações neste novo referencial, a função que se obtém de $\vec{E}$ aplicando-se a transformação σ^*, isto é, $\vec{E}'$, não pode ser interpretada como o campo elétrico em S´ posto que $\vec{E}'$ não obedece à primeira das equações de Maxwell. Mas, levando-se em conta todos esses pressupostos citados acima, qual deve ser, portanto, a transformação, τ, que deve ser aplicada a $\vec{E}$ para que $\tau(\vec{E})$ seja interpretada como o campo elétrico em S´, ou seja, para que $\tau(\vec{E})$ (denominemo-lo $\vec{E}''$) satisfaça a equação $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}''\right)=0$?

Escrevendo-se a equação $\vec{\nabla}'\cdot\left(\vec{E}'\right)=0$ ”por extenso”, obtém-se:

$$\gamma\frac{\partial E'_x}{\partial x'}-\frac{\gamma V}{c^2}\frac{\partial E'_x}{\partial t'}+\frac{\partial E'_y}{\partial y'}+\frac{\partial E'_z}{\partial z'}=0\,.$$

A equação desejada é:

$$\frac{\partial E''_x}{\partial x'}+\frac{\partial E''_y}{\partial y'}+\frac{\partial E''_z}{\partial z'}=0\,.$$

Para que o que temos transforme-se no que desejamos, é necessário, em primeiro lugar, “sumir” com a derivada temporal, ou seja, o termo $\frac{\partial E'_x}{\partial t'}$ deve “desaparecer” da equação. Isto pode ser conseguido fazendo-se as componentes do campo elétrico transformado dependerem adequadamente das componentes do campo magnético original, posto que as derivadas espaciais de E dependem da derivada temporal de B e vice-versa, conforme exigem as leis de Faraday e Ampère. As transformações para o campo dadas por:

$$E''_x = E_x \circ \sigma^{-1}\ ;\ E''_y = \gamma(E_y - VBz) \circ \sigma^{-1};\ E''_z = \gamma(E_z + VB_y) \circ \sigma^{-1}.$$

conduzem ao efeito desejado (vide apêndice B), ou seja: $\frac{\partial E''_x}{\partial x'}+\frac{\partial E''_y}{\partial y'}+\frac{\partial E''_z}{\partial z'}=0$.

Portanto, na análise da transformação de referenciais é fundamental o estabelecimento dos pressupostos: (I) há uma bijeção $\sigma(x,y,z,t)=(x',y',z',t')$ que liga as coordenadas espaciais e o instante de um evento medidos no referencial S com aqueles medidos no referencial S´, (II) As leis físicas são invariantes por mudança de referencial. Neste caso, $\vec{E}''$ seria o campo elétrico medido em S´ e $\vec{E}'$ não teria um significado físico *a priori*. Mas, se o pressuposto (II) fosse dito de maneira inversa, então, $\vec{E}'$ poderia ser o campo elétrico em S´ por inclusão de um pressuposto (III).

5. Paralelo entre as Teorias Eletrodinâmicas de Lorentz e de Einstein

Neste capítulo vamos colocar as duas teorias eletrodinâmicas de Lorentz e de Einstein em paralelo comparando as suas semelhanças e diferenças. Iniciaremos com as justificativas e os pontos de partida de cada autor para a construção de suas respectivas teorias. Uma questão importante para a compreensão dessas eletrodinâmicas é a definição de referencial de cada autor, que não poderia deixar de ser abordada. Trataremos também das equações de transformação entre um referencial e outro, fazendo uma analise sobre o significado físico interpretado por Lorentz e Einstein sobre suas respectivas transformações e trazendo, também, o comentário de sumidades sobre este assunto.

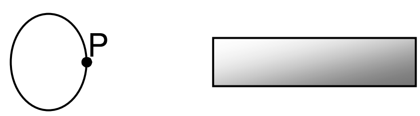
5.1 Justificativas para a Construção das Teorias

O resultado nulo obtido pelas experiências de Michelson e Morley, de Rayleigh e Brace e de Trouton e Noble foi o principal motivo que levou Lorentz à construção de uma nova eletrodinâmica em que alguns fenômenos eletromagnéticos fossem completamente independentes de uma translação do sistema. Além deste, existia outro que se devia a uma crítica de Poincaré quanto à introdução de hipóteses auxiliares (sempre que novos fatos fossem descobertos) para conciliar os resultados teóricos com os experimentais. Lorentz, portanto, desejava explicar os resultados dos experimentos mencionados acima construindo sua nova teoria eletrodinâmica sem inclusão de nenhuma hipótese auxiliar. Vejamos alguns comentários de Lorentz que tornam evidente a sua motivação:

> *"As experiências que falei não são a única razão que torna desejável um novo exame dos problemas relacionados com o movimento da Terra. (...)Poincaré opôs como objeção o fato de ter sido necessária a introdução de uma nova hipótese para explicar o resultado negativo de Michelson, (...). Seria mais satisfatório (...) mostrar, por meio de certas hipóteses fundamentais (...), que muitas ações eletromagnéticas são completamente independentes do movimento do sistema" [Lorentz 1904 pp.15,16].*

Embora Lorentz desejasse não incluir nenhuma hipótese auxiliar na sua nova eletrodinâmica, sua hipótese de contração não foi descartada. Zahar [Zahar 1989, pp.47-85] defende que a hipótese de contração não é uma hipótese *ad hoc* na teoria eletrodinâmica de Lorentz. Para tanto, ele aponta que tal hipótese não foi introduzida na eletrodinâmica de 1904 para explicar um problema específico, mas para compor os fundamentos dessa teoria.

Do outro lado, Einstein aponta em seu artigo de 1905 que a justificativa para construção de sua nova eletrodinâmica está, depois do insucesso nos experimentos que tentavam detectar um movimento da Terra relativo ao éter, na simetria presente na geração de uma corrente elétrica em uma espira condutora quando aproximamos o ímã da espira ou vice-versa, desde que os movimentos relativos sejam idênticos. Tal simetria não ocorre na interpretação de Lorentz. Vejamos a seguir os diferentes tratamentos dados por Lorentz e Einstein para o fenômeno de indução eletromagnética.



Considere uma espira condutora e um ímã. Seja P um ponto qualquer do condutor no qual um elétron pode estar localizado. Agora, em relação ao éter, mantém-se a espira em repouso e move-se o ímã. Do ponto de vista de Lorentz, devido à variação do campo magnético surge um campo elétrico em cada ponto do espaço e o elétron em P irá experimentar uma força

$$\vec{F} = e\left(\vec{D} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H}\right), \quad \text{onde } \vec{D} \neq 0 \quad \text{e} \quad \vec{v} = 0,$$

consequentemente, surgirá uma corrente elétrica no condutor. Mas se, agora, mantém-se fixo o ímã enquanto se move o condutor com velocidade $\vec{v}$ relativa ao éter, o campo elétrico é zero $(\vec{D} = 0)$, posto que o campo magnético é estático, ou seja, independente do tempo. No entanto, em vista da fórmula de Lorentz

$$\vec{F} = e\left(\vec{D} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H}\right), \quad \text{onde } \vec{D} = 0 \quad \text{e} \qquad \vec{v} \neq 0,$$

a força não se anula e dará origem a uma corrente no condutor. Para Einstein, a assimetria presente neste tratamento era algo questionável. Ele ressalta que se o movimento relativo entre o condutor e o ímã é o mesmo nos dois casos, a corrente também será a mesma, concluindo, portanto, que o resultado do experimento depende somente do movimento relativo entre o condutor e o ímã, e não do movimento absoluto com respeito ao éter. A partir daí, Einstein constrói a sua teoria eletrodinâmica sem a necessidade de hipóteses auxiliares e sem a existência de um éter não detectável.

Einstein não indica de quais experimentos negativos ele se refere, mas supostamente deveriam ser os mesmos ou pelo menos alguns daqueles referidos por Lorentz em seu artigo de 1904. Todos esses resultados empíricos levaram Einstein a trilhar um caminho diferente do de Lorentz, mas que convergia para uma teoria eletrodinâmica em que os fenômenos não tivessem dependência do movimento do sistema. Enquanto Lorentz, sendo mais cauteloso, procura mostrar apenas que *muitas ações eletromagnéticas* são completamente independentes do movimento do sistema, Einstein é decisivo neste ponto afirmando o princípio da relatividade para todos os fenômenos eletromagnéticos. Nas palavras de Einstein:

> *"(...) o insucesso das experiências feitas para constatar um movimento da Terra em relação a um meio lumինífero levaram à suposição de que, tal como na Mecânica, também na Eletrodinâmica os fenômenos não apresentam nenhuma particularidade que possa fazer-se corresponder à idéia de um repouso absoluto"* [Einstein 1905 p.48]

5.2- O Ponto de Partida para Construção das Teorias e a Questão dos Referenciais

Einstein decide iniciar sua teoria eletrodinâmica com a construção de uma nova cinemática do corpo sólido rígido. Ele acreditava que uma eletrodinâmica deveria tratar, antes, do movimento dos corpos rígidos, envolvendo suas posições, os instantes de tempos relacionados e sistemas de coordenadas para, então, abordar os processos eletromagnéticos. Após enunciar os dois primeiros postulados de sua teoria, (o princípio da relatividade e o postulado de que a luz, no espaço vazio, se propaga sempre com uma velocidade determinada, independentemente do estado de movimento da fonte luminosa) Einstein, confiante de que ela deveria ser apoiada sobre uma cinemática adequada, sem a qual resultaria em grandes dificuldades, ressalta:

> *"Essa teoria vai apoiar-se – como qualquer outra eletrodinâmica – na cinemática do corpo sólido rígido, uma vez que as proposições de uma teoria deste gênero consistem na afirmação de relações entre corpos rígidos (sistemas de coordenadas), relógios e processos eletromagnéticos. A insuficiente atenção a este fato é a raiz das dificuldades com que presentemente se defronta a eletrodinâmica dos corpos em movimento" [Einstein 1905 pp. 48-49].*

Certamente Lorentz também compartilhava deste mesmo ponto de vista ressaltado por Einstein. Acontece que Einstein percebe que a sua teoria eletrodinâmica necessitaria de uma cinemática distinta da que se tinha até então. Já a eletrodinâmica de Lorentz estava apoiada sobre a cinemática de costume o que tornava desnecessária por em discussão.

Como foi observado no capítulo anterior (Eletrodinâmica de Einstein), um dos conceitos revistos na cinemática einsteiniana foi o de simultaneidade. Ao tratar deste assunto, Einstein chama a atenção para os métodos empregados na medida de tempo e para os cuidados que devemos ter ao se comparar tempos medidos em locais diferentes. Para se medir os instantes de dois acontecimentos A e B que ocorrem em locais distintos deve-se ter um relógio em repouso em cada um dos locais. A simultaneidade entre o acontecimento A e a leitura do relógio em A caracteriza o *tempo A*, de maneira semelhante, a simultaneidade da leitura do relógio em B com o acontecimento em B nos fornece o *tempo B*. No entanto, para compararmos os tempos *A* e *B* é fundamental que os dois relógios sejam síncronos, do contrário, tal comparação não teria o menor sentido. Com esse discurso, Einstein define com uma relativa precisão o que hoje chamamos de sistema de referência acrescentando relógios sincronizados, de acordo com a sua convenção, distribuídos por certos pontos do sistema. Vejamos a seguir um trecho em que Einstein define claramente a sua concepção de sistema de referência considerando dois sistemas, um com uma translação uniforme relativo ao outro.

> *"Consideremos no "espaço em repouso" dois sistemas de coordenadas, isto é, dois sistemas de três linhas materiais, rígidas, perpendiculares entre si, e tendo a sua origem comum num determinado ponto. (...). Imaginemos cada sistema munido de uma régua rígida e de um certo número de relógios, e admitamos que as duas réguas e todos os relógios dos dois sistemas são entre si rigorosamente idênticos" [Einstein 1905, p.55]*

Com o descarte do referencial absoluto do éter, qualquer referencial medirá os valores reais das grandezas físicas. Esse é um ponto de divergência entre as teorias eletrodinâmicas de Einstein e de Lorentz. Para Lorentz, o único referencial possível de se trabalhar com as equações fundamentais do eletromagnetismo é o referencial privilegiado do éter. Mesmo tratando de experimentos eletromagnéticos realizados na Terra o referencial usado por ele ainda é o do éter. Não poderia ser diferente, pois, para Lorentz, somente neste referencial é que as equações de Maxwell seriam válidas e os valores das grandezas físicas seriam os valores reais. O leitor que buscar no artigo de Lorentz de 1904 o local onde ele trata dos campos elétricos ou magnéticos medidos no referencial da Terra certamente ficará frustrado, pois, durante toda a obra, Lorentz não sai do referencial do éter.

O conceito de sistema de referência não é muito claro na obra de Lorentz de 1904. Ele usa os termos *sistema em repouso* $\sum'$ e *sistema em movimento* $\sum$, não para citar um sistema de referência, mas para fazer alusão a uma configuração de cargas em repouso ou em movimento relativo ao referencial do éter. A menção a sistema de referência está implícita nos termos: *sistema de coordenadas fixo, eixos que se movam com o sistema, espaço S e espaço S'.* Percebe-se tacitamente que o conceito de referencial de Lorentz é um sistema matemático de três eixos perpendiculares entre si, ou alternativamente, uma base vetorial que gera os vetores que localizam todos os pontos do espaço euclidiano preenchido pelo éter. A coordenada temporal, que em Einstein adquire um papel mais criterioso com respeito a sua medida, é inserida sem muitos pormenores.

O procedimento de Lorentz com respeito ao sistema de referência consiste em partir do referencial fixo do éter, que podemos designar de S_0, onde temos uma configuração de carga ∑ em repouso relativo a este referencial. Em seguida, se comunica uma translação *w* à configuração ∑ e passa-se a usar coordenadas relativas a eixos que se movem com a translação *w* objetivando ter valores fixos de coordenadas. Note que, com esse artifício, nós estamos apenas expressando os valores das coordenadas em termos de uma diferença que subtrai a translação *w*, no entanto, o sistema de referência ainda continua sendo aquele fixo no éter. Expressando as coordenadas desta forma, onde se deve fazer uso das transformações de Galileu, as equações fundamentais do eletromagnetismo não possuem mais a forma das equações de Maxwell. Para distinguir esse caso daquele em que não há translação identificaremos o sistema de referência por S, ao invés de S_0, embora não estejamos mudando de referencial.

Diante das novas equações de campo, Lorentz pretendia resolvê-las através de um método semelhante ao que hoje conhecemos como substituição de variáveis que consiste em substituir algumas variáveis por expressões que facilitam a resolução do problema. Ele desejava encontrar as transformações (para espaço, tempo, campo elétrico e magnético, velocidade e densidade de carga) que reduzissem as novas equações nas equações de Maxwell para uma carga em repouso no éter, pois, neste caso a solução já era conhecida. O retorno às equações de Maxwell vem apenas na sua forma, pois, as grandezas (campos elétrico e magnético) que elas agora tratam não são mais as grandezas de origem dada às transformações que foram empregadas. Poderíamos dizer, então, que essas grandezas tratam de um outro universo ou de um outro referencial, digamos, S’. Mas, para Lorentz, as equações de Maxwell só poderiam ser aplicadas no referencial do éter, por isso, ele busca cobrir todos os detalhes para poder afirmar que S’ é o referencial privilegiado do éter. Neste sentido, ele desenvolve a sua teoria dos estados correspondentes juntamente com sua hipótese de contração. Observe que em Einstein a contração dos corpos está implícita nas suas transformações do espaço, enquanto, em Lorentz, supor a hipótese de contração se torna uma necessidade, pois, os elétrons que ele assume como esferas em S, no referencial S' seriam elipsóides, com eixo maior na direção do eixo *x*, dado o alongamento da coordenada *x'* pelo fator *k* (*x'=k x*). Para contrapor essa distorção das esferas que constituem os elétrons e, consequentemente, ter em S' os mesmos elétrons esféricos que se tinha no referencial do éter quando eles estavam em repouso, Lorentz foi levado a supor que os corpos sofrem alteração nas suas dimensões por efeito de uma translação, tornando-se *k* vezes menores as dimensões paralelas à direção do movimento. Desta forma, tanto em S' como no referencial do éter os elétrons são esferas e somando esse resultado com a teoria dos estados correspondentes pode-se concluir que S' é o referencial que descreve a configuração de carga em repouso no éter.

5.3- Equações de Transformações de Lorentz e de Einstein

Considere um referencial *S* com uma translação $\mathbf{w}(w,0,0)$ relativo a outro referencial *S'*, cujas grandezas que envolve suas equações são representadas por $(x, y, z, t, u, \rho, D, H)$ e $(x', y', z', t', u', \rho', D', H')$ respectivamente. As transformações que une as grandezas linhas com as sem linhas desenvolvidas por Lorentz são matematicamente equivalentes às de Einstein, com exceção da expressão para a densidade de carga, ρ, e a velocidade da carga, u. Na tabela abaixo apresentamos as transformações de cada um deles, onde usamos $k = \sqrt{\dfrac{1}{1 - w^2/c^2}}$.

Tabela 5.1: equações de transformações de Lorentz e de Einstein

Transformações de Lorentz	**Transformações de Einstein**
$x' = k(x - wt);\quad y' = y;\quad z' = z$	$x' = k(x - wt);\quad y' = y;\quad z' = z$
$t' = k\left(t - \dfrac{w}{c^2}x\right)$	$t' = k\left(t - \dfrac{w}{c^2}x\right)$
$D'_x = D_x$	$D'_x = D_x$

$D'_y = k\left(D_y - \frac{w}{c}H_z\right)$ $D'_z = k\left(D_z + \frac{w}{c}H_y\right)$	$D'_y = k\left(D_y - \frac{w}{c}H_z\right)$ $D'_z = k\left(D_z + \frac{w}{c}H_y\right)$
$H'_x = H_x$ $H'_y = k\left(H_y + \frac{w}{c}D_z\right)$ $H'_z = k\left(H_z - \frac{w}{c}D_y\right)$	$H'_x = H_x$ $H'_y = k\left(H_y + \frac{w}{c}D_z\right)$ $H'_z = k\left(H_z - \frac{w}{c}D_y\right)$
$u_x' = k^2\, u_x$	$u'_x = \frac{u_x - w}{\left(1 - wu_x/c^2\right)}$
$u_y' = k\, u_y$	$u'_y = \frac{u_y}{k\left(1 - wu_x/c^2\right)}$
$u_z' = k\, u_z$	$u'_z = \frac{u_z}{k\left(1 - wu_x/c^2\right)}$
$\rho' = \rho/k$	$\rho' = k\left(1 - \frac{wu_x}{c^2}\right)\rho$

É importante salientar que S e S’ não têm o mesmo significado para ambos os autores. Para Lorentz, tanto S como S’ é o referencial etéreo com uma sutil diferença entre ambos. Em S, as coordenadas espaciais se referem a eixos que se movem com o sistema de cargas, logo, caso o único movimento das cargas seja uma translação, tais coordenadas serão independentes do tempo. Além disso, as equações de campo não são mais as equações de Maxwell como é o caso em S’. O referencial S’ corresponde a um sistema imaginário resultante da redução de um sistema com translação a outro sem translação. A ligação entre os dois sistemas é feita de acordo com teoria dos estados correspondentes (vide capitulo 3). Portanto, quando em S o único movimento das cargas é a translação, o referencial S’ descreve um sistema de cargas em repouso no éter o que levou Lorentz a identificar S como *sistema móvel* e S’, *sistema em repouso*.

Em Einstein, S e S’ são referenciais inerciais, tais que, as equações de Maxwell são válidas em qualquer um deles. Embora Einstein também faça uso dos termos "*sistema móvel*" e "*sistema em repouso*", tomando o devido cuidado de colocá-los entre aspas, sua diferença básica é que S e S' podem ser qualquer referencial inercial e não necessariamente o do éter como ocorre em Lorentz. Os campos determinados em S e em S' podem ter valores diferentes, mas serão os campos reais para os respectivos referenciais. O termo "*real*" aqui não faz mais sentido, dado o caráter relativo das medidas. Portanto, sob o ponto de vista da validade das equações de Maxwell, os referenciais S e S' são inteiramente equivalentes distinguindo-se, apenas, pela translação de um relativo ao outro.

5.3.1- Interpretação Física das Transformações

Na eletrodinâmica de Einstein, as equações de transformação ligam as grandezas físicas de um referencial para outro. O valor de uma grandeza física é relativo ao referencial no qual é medido e a equação de transformação nos dá, a partir do valor encontrado em um dado referencial, aquele que seria obtido em outro referencial. Se se mede o campo $\vec{D}$ no referencial S, no referencial S' se mediria o campo correspondente $\vec{D}'$ e as equações de transformação relacionam $\vec{D}$ a $\vec{D}'$. Portanto, a equação de transformação não muda o significado físico da grandeza, ou seja, $\vec{D}$ e $\vec{D}'$ representam o campo elétrico nos seus respectivos referenciais e o mesmo vale para qualquer outra grandeza.

Na eletrodinâmica de Lorentz ocorre algo semelhante, mas aqui tem-se uma sutil diferença no tratamento dos referenciais. Os campos $\vec{D}$ e $\vec{D}'$ são ambos medidos no referencial privilegiado do éter com a diferença de que $\vec{D}$ refere-se ao *sistema em movimento*, isto é, sistema de cargas com uma velocidade $\vec{w}+\vec{u}$ no éter, enquanto $\vec{D}'$ refere-se ao *sistema em repouso*, ou seja, sistema de cargas em repouso no éter. Contudo, as grandezas $\vec{D}$ e $\vec{D}'$ possuem o mesmo significado físico em ambos os casos. Desse modo, a equação de transformação que relaciona $\vec{D}$ a $\vec{D}'$, vale ressaltar que possui a mesma forma da de Einstein, não altera o significado físico da grandeza. Pode-se estender esse resultado às demais grandezas da eletrodinâmica de Lorentz. Para perceber isso, vejamos nos próximos parágrafos a interpretação dada por Lorentz das seguintes grandezas transformadas: *(x', y', z', t', u', ρ',* $\vec{D}'$, $\vec{H}'$*).*

Tacitamente, nota-se que as grandezas transformadas (*x', y', z'*) denotam as coordenadas espaciais no sistema em repouso, S', assim como, *t'* representa o tempo nesse mesmo sistema, embora este último tenha causado estranheza a Lorentz dada a sua dependência com a posição. Lorentz estava acostumando a lidar com o tempo absoluto de Newton e isso, seguramente, levou-o a interpretar *t'* como um tempo matemático. Lorentz destaca [§6,p.22] que a configuração de cargas do *sistema em repouso* deve-se obter daquela que se tinha no *sistema móvel* multiplicando-se os comprimentos paralelos a translação *w(w,0,0)* por *k* e os transversais por 1, ou seja, através da deformação (*k*,1,1). Em seguida [§10, p.32] ele nos convida a imaginar que cada ponto P' do sistema em repouso se transfere para um determinado ponto P do sistema móvel por efeito da deformação inversa (1/k,1,1). Além disso, a correspondência temporal entre P e P' é dada pela equação de transformação para o tempo. Portanto, ao aplicarmos as transformações das grandezas espaciais e temporal, as novas grandezas permanecem com o mesmo significado físico, ou seja, continuam sendo coordenadas espaciais e tempo, só que agora para o novo sistema.

Mas, poderíamos perguntar o que significa fisicamente passar as grandezas de um sistema para a do outro? As coordenadas *y'* e *z'* são obtidas pela função identidade, não ocorrendo, portanto, qualquer modificação na passagem de S para S'. A coordenada *x'*, por sua vez, pode ser explicada simplesmente como uma expansão de *x* pelo fator *k*. Já a coordenada temporal *t'* é um pouco mais complicada de ser interpretada fisicamente, pois envolve além do tempo *t,* a posição *x.* Segundo Zahar [Zahar 1989, pp. 58-59] Lorentz contorna essa dificuldade trabalhando apenas o caso em que o único movimento das cargas é uma translação, consequentemente, em S' tem-se um caso eletrostático e a variável *t'* pode ser ignorada.

Com relação aos campos $\vec{D}'$ e $\vec{H}'$ podemos perceber, implicitamente, o significado físico atribuído por Lorentz a essas grandezas observando seu comentário relativo à força elétrica na passagem do sistema em repouso para o sistema em movimento. Segundo Lorentz, [Lorentz 1904, p.33] o vetor $\vec{D}'$ não tem o mesmo significado em ambos os sistemas. No sistema em repouso ele representa a força elétrica, ao passo que, no sistema em movimento representa uma força relacionada com aquela força elétrica por meio de equação de transformação (2.20). Na sequência, Lorentz afirma que a equação de transformação relaciona as forças elétricas que atuam nos dois sistemas em instantes e em partículas correspondentes. Portanto, assim como a grandeza $\vec{D}'$ em S' possui o mesmo significado físico que a grandeza $\vec{D}$ em S, isto é, ambas representam forças elétricas atuantes nas partículas correntes dos seus respectivos sistemas, o mesmo deve ocorrer para $\vec{H}'$.

Uma grandeza que Lorentz afirma explicitamente possuir o mesmo significado físico em ambos os sistemas é a densidade de carga. Nas palavras de Lorentz:

> *Neste novo sistema, que podemos considerar colocado no espaço S', acima mencionado, demos à densidade o valor ρ' [Lorentz 1904, p.22].*

A equação de transformação sugerida por Lorentz para a densidade de carga, juntamente com a transformação para a velocidade da carga, são as únicas que diferem das transformações de Einstein. Lorentz definiu $\vec{u}$ como sendo a velocidade da carga além da translação, mas ao escrever a equação de transformação ele não afirma que a nova grandeza $\vec{u}'$ é a velocidade da carga em S'. Essa interpretação está implícita na maneira pela qual ele escreve a seguinte equação de Maxwell

$$rot'\vec{H}' = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial D'}{\partial t'} + \rho'\vec{u}'\right).$$

Se um objetivo de Lorentz fosse manter a invariância das equações de Maxwell, u' certamente seria a velocidade da carga em S'. Mas, como podemos notar na forma como ele escreve a equação equivalente a lei de Gauss, isto é,

$$div'\vec{D}' = \left(1 - \frac{wu'_x}{c^2}\right)\rho',$$

sua intenção não era buscar tal invariância. Zahar [Zahar 1989, §2.2, p.52-56] argumenta que a origem das equações de transformações de Lorentz para o espaço e o tempo está na busca pela solução das equações fundamentais do eletromagnetismo, pois, tais transformações reduzem a equação diferencial na equação de onda cuja solução já se sabia. Neste estágio, então, Lorentz estava apenas preocupado em resolver um problema matemático. Mas, a transformação para velocidade, assim como nas demais transformações, sugere que a grandeza transformada continue com o mesmo significado físico para o novo sistema, ademais, quando se observa a suposta origem dessa transformação que veremos na seção seguinte.

5.3.2- Transformações de Lorentz para Densidade e Velocidade de Carga

Lorentz apresenta em seu artigo de 1904 a grandeza $\vec{u}'$ como um novo vetor não especificando qualquer significado físico. Iremos fazer agora uma possível demonstração de como Lorentz chega na transformação que leva $\vec{u}$ a $\vec{u}'$ e evidenciar que, tacitamente, $\vec{u}'$ é a velocidade em S'. O sistema S de Lorentz, denominado por ele de *sistema móvel*, é aquele em que a carga está com velocidade $\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$ no referencial do éter com $\vec{w} = (w,0,0)$ sendo a translação do sistema. Em S, as coordenadas espaciais x, y e z são em relação a eixos fixos no éter, mas Lorentz utiliza, também, as coordenadas x_t, y_t e z_t (embora não faça uso do índice t) referentes a eixo que se movem com a translação $\vec{w}$, ou seja, obtidas através das transformações,

$$x_t = x - wt; \qquad y_t = y \quad e \quad z_t = z,$$

que são as transformações de Galileu. As transformações ligam coordenadas espaciais (x_t, y_t, z_t) e a temporal t do sistema móvel S com as coordenadas espaciais (x', y', z') e a temporal t' do sistema em repouso S', ou, sistema equivalente a S com a carga em repouso, são apresentadas por Lorentz na forma:

$$x' = k\,x_t\,; \qquad y' = y_t\,; \qquad z' = z_t \qquad e \qquad t' = t/k - kwx_t/c^2.$$

Com o objetivo de explicar os resultados nulos dos experimentos que tentavam provar a existência do éter, Lorentz considera apenas o caso em que a velocidade além da translação é zero ($\vec{u} = 0$), em suas palavras:

> "Basta considerar dois casos particulares para o fim que temos em vista, começando pelo de um sistema eletrostático, isto é, um sistema em que o único movimento é uma translação de velocidade *w*" [Lorentz 1904, p.21].

Assim, as coordenadas espaciais (x_t, y_t, z_t) não variam em relação ao tempo t, e um intervalo de tempo $\Delta t'$ que é dado por

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{k} - k\frac{w}{c^2}\Delta x_t \ , \quad \text{se torna} \qquad \Delta t' = \frac{\Delta t}{k}$$

e um deslocamento $\Delta x'$ será

$$\Delta x' = k\Delta x - kw\Delta t \, .$$

Se $\vec{u}'$ é a velocidade da carga em S', ela deveria ser expressa pelas componentes

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \qquad u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} \qquad \text{e} \qquad u'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'}$$

e as equações de transformação de S' para S, teriam a forma

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{k\Delta x - kw\Delta t}{\Delta t \big/ k} = k^2 \frac{v_x - w}{} = k^2 u_x$$

$$u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\Delta t \big/ k} = k\frac{\Delta y}{\Delta t} = ku_y$$

$$u'_z = \frac{\Delta z}{\Delta t'} = \frac{\Delta z}{\Delta t \big/ k} = k\frac{\Delta z}{\Delta t} = ku_z$$

que são exatamente as transformações de Lorentz para $\vec{u}$, deixando evidente que $\vec{u}'$ é interpretado como a velocidade da carga em S'. Note que essas transformações foram obtidas do caso particular em que a única velocidade da carga em S é a translação, ou seja, $\vec{v} = \vec{w}$.

Como vimos na seção anterior, Lorentz considerava realmente a grandeza transformada ρ' como sendo a densidade de carga em S'. Um elemento de volume *dV* do sistema S sofre uma dilatação, na direção da translação, quando analisado no sistema S', tornando-se $dV' = kdV$. Com efeito, visto que Lorentz [Lorentz 1904, §8, p.27] considerava que na passagem de S para S' cada elemento de volume conservaria a sua carga, a densidade de carga ρ', no sistema S', torna-se *k* vezes menor que a densidade ρ do sistema S. Assim, justifica-se o procedimento de Lorentz em escrever a equação de transformação para a densidade como

$$\rho' = \rho/k.$$

As transformações para a densidade de carga e para velocidade de carga indicadas por Lorentz têm sido os principais alvos de ataque dos críticos de sua teoria. Muitos autores, seguramente partidários da eletrodinâmica de Einstein, apontam esses duas transformações como o erro de Lorentz. Não por acaso esse é o foco das criticas, pois, é justamente nessas transformações que aparece divergências com as transformações de Einstein, como podemos observar na tabela-5.1. Qualquer um é livre para usar a transformação que quiser na resolução de um problema matemático, então, dizer que Lorentz errou na formulação de suas transformações para a densidade e para a velocidade da carga envolve a interpretação física dada por Lorentz as novas grandezas transformadas, ou seja, é dizer que Lorentz considerava ρ' e $\vec{u}'$ como a densidade de carga e a velocidade da carga em S', respectivamente.

Ao definir o volume dV em S, Lorentz toma um conjunto de pontos do espaço S que envolve os elementos de carga dq. Todos esses elementos de cargas ocupam suas respectivas posições no interior do volume infinitesimal *dV* simultaneamente com a indicação t do relógio do sistema S. Acontece que os eventos simultâneos em S podem não ser simultâneos em S' e é exatamente neste ponto que as criticas são feitas sobre a equação de transformação para a densidade de carga apontada por Lorentz. Em um trabalho independente do de Einstein, Poincaré nos traz em seu paper "On the dynamics of the electron" uma impecável derivação da transformação relativística para a densidade de carga [Poincaré 1906, pp. 3-8]. Neste mesmo paper, Poincaré demonstra que com as definições para ρ' e $\vec{u}'$ apresentadas por Lorentz, a equação de continuidade $\partial\rho'/\partial t' + div'\rho'\vec{u}' = 0$ não é satisfeita. Uma versão mais intuitiva da derivação da transformação relativística para a densidade de carga é feita por Janssen [Janssen 1995, pp. 104-106]. Miller [Miller 1973, p.252] ao discutir o referido paper de Poincaré concorda com as criticas em torno do valor para a densidade de carga ρ' apontadas por Poincaré. Zahar [Zahar 1989, p. 73] indica que o erro de Lorentz na transformação da densidade de carga ρ evidencia a sua dificuldade na interpretação do tempo local *t'*. Holton descreve a definição de Lorentz para ρ' e $\vec{u}'$ como uma falha impressionante [Holton 1969, p.321]. Como foi discutido acima, Lorentz realmente interpretava ρ' e $\vec{u}'$ como a densidade de carga e a velocidade da carga no sistema S', desta maneira, sua equações de transformação para essas grandezas são aplicáveis apenas no caso particular abordado por Lorentz em que a carga não possui velocidade além da translação, isto é, $\vec{u} = 0$. É interessante notar que essas mesmas transformações de Einstein se reduzem as equações de transformação de Lorentz no referido caso particular. Com efeito, se a velocidade da carga é apenas a translação, isto é,

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = \vec{w} = (w,0,0) .$$

A transformação de Einstein para a densidade de carga fica:

$$\rho' = k\left(1 - \frac{wv_x}{c^2}\right)\rho = k\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)\rho , \qquad \text{mas} \quad k^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)}$$

Então, $\rho' = k\dfrac{1}{k^2}\rho = \rho/k$ que é a mesma equação de Lorentz.

Analogamente, para as transformações de velocidades temos:

$$v'_x = \frac{v_x - w}{\left(1 - wv_x/c^2\right)} = \frac{v_x - w}{\left(1 - w^2/c^2\right)} = \frac{v_x - w}{1/k^2} = k^2(v_x - w)$$

$$v'_y = \frac{v_y}{k\left(1 - wv_x/c^2\right)} = \frac{v_y}{k\left(1 - w^2/c^2\right)} = \frac{v_y}{k\left(1/k^2\right)} = kv_y$$

$$v'_z = \frac{v_z}{k\left(1 - wv_x/c^2\right)} = \frac{v_z}{k\left(1 - w^2/c^2\right)} = \frac{v_z}{k\left(1/k^2\right)} = kv_z .$$

Mas, a velocidade além da translação referida por Lorentz seria

$$\vec{u} = \vec{v} - \vec{w} = (v_x - w, v_y, v_z) = (u_x, u_y, u_z) ,$$

logo, as transformações de velocidades se tornam

$$v'_x = k^2 u_x , \qquad v'_y = ku_y \qquad \text{e} \qquad v'_z = ku_z ,$$

que são, novamente, as mesmas transformações de Lorentz, levando-se em conta que $\vec{v}' = \vec{u}'$. Mas, Einstein considera $\vec{v}'$ como sendo a velocidade da carga no referencial S', logo seria coerente dizer que $\vec{u}'$ é a velocidade da carga no sistema S'.

5.3.3- Equivalência entre as Equações de Transformação de Lorentz e de Einstein para a Densidade e a Velocidade da Carga

Na tradução para o alemão do artigo de1904, Lorentz acrescenta uma nota de rodapé onde atribui a Einstein o mérito de ter sido o primeiro a enunciar o princípio da relatividade como uma lei geral. Ele ainda destaca nesta mesma nota que, exatamente, as suas equações de transformações que diferem das correspondentes transformações de Einstein, quais sejam, as transformações para a densidade de carga e para a velocidade da carga, são responsáveis pelos embaraços enfrentados por muitas considerações de sua teoria. Em suas palavras:

> "Deve notar-se que, neste trabalho, eu não cheguei a atingir totalmente as equações de transformação da teoria da relatividade de Einstein. Nem a equação (7), nem as fórmulas (8) têm a forma dada por Einstein e, em conseqüência disso, não cheguei a fazer desaparecer o termo $-\frac{wu'_x}{c^2}$ na primeira equação (9), pelo que não consegui dar às fórmulas (9) uma forma rigorosamente válida para um sistema em repouso. Dependem dessa circunstância os embaraços em que esbarraram muitas das considerações ulteriores deste trabalho" [Lorentz, 1904, p.19].

Para atingir a invariância das equações de Maxwell na passagem de S para S' Lorentz precisava dar um passo ousado, qual seja, formular uma nova cinemática, da forma como procedeu Einstein, mas parece que Lorentz naquele momento não estava disposto a abrir essa porta. Considerando uma carga com velocidade total $\vec{v} = (v_x, 0, 0)$ compondo o sistema móvel S, com efeito, sua velocidade além da translação, $\vec{w} = (w, 0, 0)$, será $\vec{u} = (v_x - w, 0, 0)$. Neste caso, as equações fundamentais do eletromagnetismo ficam:

$$div'\vec{D}' = \left(1 - \frac{wu'_x}{c^2}\right)\rho'$$

$$div'\vec{H}' = 0$$

$$rot'\vec{H}' = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial D'}{\partial t'} + \rho'\vec{u}'\right)$$

$$rot'\vec{D}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial H'}{\partial t'}$$

onde, $\vec{u}' = (k^2(v_x - w), ku_y, ku_z)$ e $\rho' = \rho/k$.

Se Lorentz desejassem alcançar a invariância das equações de Maxwell escrevendo, então, a primeira equação acima na forma

$$div'\vec{D}' = \sigma'$$

A transformação para a densidade de carga se tornaria em

$$\sigma' = \left(1 - \frac{wu_x}{c^2}\right)\rho' = \left(1 - \frac{w}{c^2}k^2(v_x - w)\right)\frac{\rho}{k} = k\left(1 - \frac{wv_x}{c^2}\right)\rho$$

que é equivalente à de Einstein. Mas, se ele tomasse esse caminho iria se defrontar com o problema posto pela terceira equação que se tornaria

$$rot'\vec{H}' = \frac{1}{c}\left[\frac{\partial \vec{D}'}{\partial t'} + \frac{\sigma'\vec{u}'}{\left(1 - wu'_x/c^2\right)}\right],$$

Levando-o a interpretar a velocidade da carga em S' como

$$\vec{v}' = \frac{\vec{u}'}{\left(1 - wu'_x/c^2\right)},$$

e as equações de transformação de velocidade assumiriam a forma**

$$\vec{v}'_x = \frac{\vec{v}_x - \vec{w}}{\left(1 - wv_x/c^2\right)} \qquad \vec{v}'_y = \frac{\vec{v}_y}{k\left(1 - wv_x/c^2\right)} \qquad \vec{v}'_z = \frac{\vec{v}_z}{k\left(1 - wv_x/c^2\right)}$$

que, novamente, são as mesmas transformações sugeridas por Einstein. Portanto, Lorentz precisava estar pronto para interpretar $\frac{\vec{u}'}{\left(1 - wu'_x/c^2\right)}$ como a velocidade efetiva da carga em S' e construir uma nova cinemática que se adequasse a essas transformações de velocidade, tal como a cinemática desenvolvida por Einstein.

** $\vec{v}' = \frac{\vec{u}'}{\left(1 - \frac{wu'_x}{c^2}\right)}$, aplicando as transformações para $\vec{u}'$ suas componentes ficam:

$$v'_x = \frac{k^2 u_x}{\left(1 - \frac{w}{c^2} k^2 u_x\right)} = \frac{k^2 (v_x - w)}{\left(1 - \frac{w}{c^2} k^2 (v_x - w)\right)} = \frac{(v_x - w)}{\left(1 - \frac{w}{c^2} v_x\right)}$$

$$v'_y = \frac{ku_y}{\left(1 - \frac{w}{c^2} k^2 (v_x - w)\right)} = \frac{v_y}{k\left(1 - \frac{w}{c^2} v_x\right)} \quad \text{e} \quad v'_z = \frac{ku_z}{\left(1 - \frac{w}{c^2} k^2 (v_x - w)\right)} = \frac{v_z}{k\left(1 - \frac{w}{c^2} v_x\right)}.$$

6. Conclusões

As teorias eletrodinâmicas de Lorentz e de Einstein fazem as mesmas previsões teóricas quando se trata de fenômenos eletromagnéticos livres de fontes ou com fontes cuja única velocidade é a translação, ou seja, para $\rho=0$ ou $\vec{u}=0$. As equações de transformações de Lorentz apresentam as mesmas formas das de Einstein, à exceção das transformações para a densidade de carga e para a velocidade da carga. Devido essas duas exceções, Lorentz não consegue dar as leis de campo do sistema S´ uma forma rigorosamente válida para um sistema em repouso. No estado do sistema em repouso, ou seja, em S´, as equações de campo são as mesmas equações de Maxwell, à exceção da lei de Gauss, onde aparece o termo extra $\left(-\frac{wu'_x}{c^2}\right)\rho'$. Tal termo desaparece no caso particular mencionado acima, isto é, com $\rho=0$ ou $\vec{u}=0$. Mas, caso Lorentz definisse as equações de transformações dessas grandezas da mesma forma que as de Einstein, as leis de campo do sistema S´ seriam exatamente iguais as equações de Maxwell e S´ seria um sistema rigorosamente em repouso no éter. Com efeito, não haveria nenhum experimento para o qual as duas teorias fizessem previsões distintas. Portanto, conseguir-se-ia a total equivalência empírica entre ambas as teorias eletrodinâmicas com uma simples correção nas equações de transformação para a densidade de carga e para a velocidade da carga apresentadas por Lorentz. Podemos sintetizar esse resultado dizendo que as duas teorias são ***fracamente não equivalentes***, isto é, os ajustes que as tornariam equivalentes são facilmente executáveis.

Por outro lado, as duas teorias possuem ontologias diferentes. Enquanto Einstein considera supérflua a existência de um meio como o éter com status de referencial privilegiado e servindo de suporte para a propagação das ondas eletromagnéticas, Lorentz, contrariamente, tem no éter o foco principal de sua ontologia. É nele que a perturbação dos campos eletromagnéticos tem lugar para sua propagação e, também, é apenas neste referencial que sua eletrodinâmica deve ser tratada. Tanto o sistema em movimento como o sistema em repouso mencionado por Lorentz são referentes ao éter, pois fora dele as equações de Maxwell não seriam válidas e, por conseguinte, a sua eletrodinâmica.

Para Einstein, as leis físicas como, por exemplo, as equações de Maxwell são válidas em qualquer referencial inercial. Se desejássemos encontrar o campo de uma carga com movimento uniforme em um referencial S, poderíamos calcular o campo no referencial da carga S' e a partir das transformações de Einstein determinar o campo em S. Note que nesta metodologia, Einstein muda de um referencial para outro. Uma metodologia semelhante é seguida por Lorentz, contudo, no tratamento dele não ocorre mudança de referencial. Tanto S como S' é o referencial do éter. Aqui, S' trata de um sistema em repouso e S é o mesmo sistema depois de posto em movimento.

O método de Lorentz de resolver os problemas eletrodinâmicos é um tanto confuso e complicado. Resolvem-se as equações fundamentais do eletromagnetismo no sistema em repouso, isto é, no estado correspondente do sistema em movimento e a partir dos resultados do sistema em repouso encontram-se os resultados do sistema móvel por meio das equações de transformações. O curioso é que tanto o sistema móvel como o sistema em repouso têm como referencial o éter. O próprio Lorentz se rende a praticidade da eletrodinâmica de Einstein. Em 1915, no The Theory of Electrons ele desabafa:

> "If I had to write the last chapter now, I should certainly have given a more prominent place to Einstein's theory of relativity (§189) by which the theory of electromagnetic phenomena in moving systems gains a simplicity that I had not been able to attain." [Lorentz, 1952, 2ª edição, nota 72* p.321][††]

Provavelmente, a irrevogável validade das equações de Maxwell apenas no referencial do éter, aliada ao problema em interpretar *t'* como tempo em si e não apenas como uma auxiliar matemática levaram Lorentz a adotar um método diferente do Einstein.

Na eletrodinâmica de Einstein, estão presentes os pressupostos de que há uma bijeção σ(x,y,z,t)=(x´,y´,z´,t´) que liga as coordenadas espaciais e o instante de

---

[††] Se eu tivesse que escrever o último capítulo, agora, certamente daria um lugar mais importante para a teoria da relatividade de Einstein (§ 189), através da qual a teoria dos fenômenos eletromagnéticos em sistemas móveis ganha uma simplicidade que eu não foi capaz de atingir.

um evento medidos num referencial S com aqueles medidos num outro referencial S´ e o de que leis físicas são invariantes por mudança de referencial.

A bijeção σ gera uma mudança nas equações de Maxwell que se propaga também para seus operadores, a saber, *div* e *rot*. Os campos relacionados nas novas equações não podem ser os campos elétricos e magnéticos medidos no outro referencial S´, pois, essas novas equações não são mais as equações de Maxwell. Transformando-se, adequadamente, os campos, a densidade de carga e a velocidade da carga pode-se chegar a leis, relativas às grandezas do referencial S´, que tem a mesma forma das equações de Maxwell. Portanto, os campos agora relacionados por elas serão aqueles medidos no novo referencial, pois, para Einstein, as leis físicas não são alteradas ao se passar de um referencial para outro.

Lorentz não pressupõe a invariância das leis físicas por mudança de referencial e a sua equivalente bijeção σ, diga-se de passagem, que tem a mesma forma da de Einstein (inclusive, tal bijeção é historicamente conhecida como transformações de Lorentz) não realiza a transformação, de um referencial para outro, das coordenadas espaciais e de um instante de um evento. Tais transformações, juntamente com aquelas para os campos, a densidade de carga e a velocidade da carga, ligam o estado de um sistema em repouso com outro estado, do mesmo sistema, depois de posto em movimento. Em ambos os estados, as medidas são feitas com um conjunto de instrumentos em repouso no éter, embora o sistema em repouso seja visto como fictício.

As duas teorias possuem maneiras completamente diferentes de interpretar os fenômenos físicos. As divergências aparecem nas ontologias, na forma de lidar com os referenciais e nas leis de transformações para a densidade de carga e velocidade da carga. Contudo, na situação particular arrolada acima, tais teorias fazem as mesmas previsões experimentais e, se suas leis de transformações fossem todas com a mesma forma, essas previsões seriam equivalentes quaisquer que fossem os experimentos eletrodinâmicos.

No artigo de 1904, Lorentz desenvolve sua eletrodinâmica considerando o caso particular em que o único movimento da carga é uma translação $\vec{w} = (w,0,0)$. Supostamente, suas transformações para a densidade de carga *ρ* e para a velocidade $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, que a carga possui além da translação, foram obtidas nesta mesma situação especial que Lorentz denominava de caso eletrostático.

Embora a carga tivesse a velocidade $\vec{w}$, o termo eletrostático se deve ao fato de que em S' a carga estaria em repouso e, portanto, a variável *t'* poderia ser omitida. Com isso, considerando que a carga de elementos de volumes correspondentes se mantém inalterada e que $\vec{u}=0$, Lorentz, certamente, partido do pressuposto de que

$$\rho' = \frac{dq}{dV'} \qquad \text{e} \qquad \vec{u}'_x = \frac{dx'}{dt'}\,; \qquad \vec{u}'_y = \frac{dy'}{dt'}\,; \qquad \vec{u}'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

chega nas suas transformações para densidade de carga e para velocidade da carga, quais sejam:

$$\rho' = \frac{\rho}{k} \qquad \text{e} \qquad u'_x = k^2 u_x\;; \qquad u'_y = k u_y\;; \qquad u'_z = k u_z$$

Num caso geral, isto é, onde $\vec{u} \neq 0$, a variável *t'* não mais pode ser ignorada. Tomando-se um volume *ΔV* que encerra uma quantidade de carga *Δq* distribuída por diferentes pontos em seu interior simultaneamente com a indicação do instante *t* medidos em S, tais pontos onde se encontra distribuída a carga terão seus correspondentes em S' em diferentes instantes *t',* pois, o tempo correspondente em S' depende do respectivo local tomado em S. Desta forma, a simultaneidade que ocorre em S não ocorrerá em S' e a densidade de carga deve agora ser definida levando-se em conta esta questão. Considerando as transformações para *ρ´* e $\vec{u}'$ apresentadas por Lorentz pode-se mostrar, como fez Poincaré [Poincaré 1906, pp. 3-8], que a equação de continuidade $\partial\rho'/\partial t' + div'\rho'\vec{u}' = 0$ não é satisfeita. Esse resultado evidencia um equívoco nas referidas transformações.

Na situação particular em que $\vec{u}=0$, é possível demonstrar que as correspondentes transformações de Einstein para densidade de carga e velocidade da carga se reduzem nas transformações de Lorentz. Portanto, há de se esperar que apenas no caso em que as transformações são equivalentes é que as previsões experimentais de ambas as teorias são as mesmas. Vale ressaltar que quando a densidade de carga é nula, a exemplo da luz nos experimentos de interferência (Michelson e Morley) e de dupla refração (Rayleigh e Brace) seu valor transformado também é nulo em ambas as transformações, tornando os resultados equivalentes.

Similarmente, quando a única velocidade da carga é a translação, ou seja, $\vec{u} = 0$, como ocorre no condensador de Trouton e Noble, as equações de transformação indicam resultados equivalentes e as previsões de ambas as teorias são iguais. Fica aqui a indicação, para pesquisa futura, de se investigar experimentos que mostrem a divergência entre as previsões teóricas das eletrodinâmicas de Lorentz e Einstein para o caso geral em que uma carga possua, além de sua translação, uma velocidade qualquer diferente de zero.

Referências

BRACE, Dewitt Bristol. “On double refraction in matter moving through the aether.” *Philosophical Magazine* **7**, 1904, pp. 317–329.

DORLING, J. Length contraction and clock synchronisation: the empirical equivalence of the einsteinian and lorentzian theories: *The British Journal for the Philosophy of Science*, v. 19, n. 1, p. 67-69, 1968.

EINSTEIN, A. Zur Elektrodynamik Bewegter Körper”. Ann. d. Phys. 17, 1905.

EINSTEIN, A. Sobre a electrodinâmica dos corpos em movimento. 1905. In: Fundação Calouste Gulbenkian (org.). Textos fundamentais da física moderna: O Princípio da Relatividade. 3ª ed. Lisboa, 1983. p. 47-90. (volume I).

FRESNEL, A. Ann. de Chim.. et de Phys. (2), v. 9, p. 56, 1818, cf. Lodge (1893, p. 731)

FRESNEL, A. Annales de chimie, v. 9, p. 57, 1818, cf. Whittaker (1973, p. 108)

HOLTON, G. Einstein, Michelson and the “crucial” experiment. *Isis* **60**, 1969, reimpresso em 1988, pp. 279-370 da edição original de 1973.

JACKSON, J. D. Classical Electrodynamics. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1962.

JANSSEN, M. H. P. A comparison between Lorentz’s ether theory and special relativity in the light of the experiments of Trouton and Noble. University of Pittsburgh, 1995.

LAKATOS, I. O falseamento e a Metodologia dos Progamas de Pesquisa Científica: A Crítica e o desenvolvimento do Conhecimento. Editora Cultrix, São Paulo, 1979.

LORENTZ, H. A. Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leiden, 1895.

LORENTZ, H. A. A experiência interferencial de Michelson. 1895. In: Fundação Calouste Gulbenkian (org.). Textos fundamentais da física moderna: O Princípio da Relatividade. 3ª ed. Lisboa, 1983. p. 5-11. (volume I).

LORENTZ, H. A. Eletromagnetic Phenomena in a Sytem Moving with any Velocity Smaller than that of Light: Proceedings of the Academy of Sciences, Amsterdan, v. 6, p. 809-831, 1904.

LORENTZ, H. A. Fenómenos eletromagnético num sistema que se move com qualquer velocidade inferior a da luz. 1904. In: Fundação Calouste Gulbenkian (org.). Textos fundamentais da física moderna: O Princípio da Relatividade. 3ª ed. Lisboa, 1983. p. 13-43. (volume I).

LORENTZ, H. A. (1916). *The theory of electrons and its applications to the phenomena of light and radiant heat.* (1ª publicação em 1909) 2ª edição, New York, 1952.

MILLER, Arthur I. "A study of Henri Poincaré's "Sur la dynamique de l'électron"."*Archive for History of Exact Sciences* **10**, 1973, pp. 207–328.

MILLER, Arthur I. *Albert Einstein's special theory of relativity. Emergence (1905) and early interpretation (1905–1911).* Addison–Wesley, 1981.

MICHELSON, Albert. A. The relative motion of the Earth and the luminiferous ether. Am. Jour. Sci. 3ª série, v. 22, 1881. p. 120-129.

MICHELSON, Albert A. e MORLEY, Eduard W. On the Relative Motion of the Earth and the luminiferous ether: American Journal of Science – Third Series, Vol. XXXVI, Nov, 1887. p.333-345.

MIRANDA FILHO, R. C., ANDION, N. P., DA COSTA, N. C. A. First order effects in Michelson-Morley experiment: Physics Essays, v. 15, n. 4, 2002.

MIRANDA FILHO, R. C., *Base experimental e teoria em Física: uma análise do experimento de Michelson e Morley*. Tese de doutorado, FFLCH – USP, 2004.

POINCARÉ, H. On the dynamics of the electron. Tradução de Scott Walter do *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 21, 1906, p.129–176.

Lord RAYLEIGH [STRUTT, John William]. “Does motion through the aether cause double refraction.” *Philosophical Magazine* **4**, 1902, pp. 678–683.

SHANKLAND, R. S. Michelson-Morley Experiment. Case Institute of Technology. Cleveland, Ohio (1963) p.16-35

STOKES, M. Trans. Camb. Phil. Soc., v. 8, p. 287, 1845, cf. (WHITTAKER, 1973, p. 128).

STOKES, M. Phil. Mag., v. 27, p. 9, 1845, cf. (LORENTZ, 1886, p. 109).

TROUTON, Frederick T. e NOBLE, Henry R. “The mechanical forces acting on a charged electric condenser moving through space,” *Philosophical Transactions of the Royal Society, London* **202**, 1903, pp.165–181.

ZAHAR, E. Einstein’s Revolution, A Study in Heuristic. Open Court Publishing Company, USA, 1989, p.47-122

Apêndice A - *Introdução à Teoria dos Estados Correspondentes*

Para um dado sistema físico eletromagnético sempre é possível associar um par de estados descrevendo o sistema em duas situações distintas. Uma para o sistema em repouso no referencial do éter, identificado por sistema em repouso Σ', e outra para o sistema transladando em movimento uniforme relativo também ao éter, caracterizado por sistema móvel Σ. A cada par de estados possíveis de um sistema eletromagnético denominamos de estados correspondentes. Existe uma correspondência precisa entre cada estado possível no sistema sem translação e outro estado possível no sistema com translação, sendo que, tal correspondência é única.

Sejam $A_1', A_2', A_3', etc.,$ os centros das partículas no sistema Σ', sem translação. Supondo estes pontos em repouso e desprezando os movimentos moleculares, o conjunto de pontos $A_1, A_2, A_3, etc.,$ formado pelos centros das partículas no sistema móvel Σ, obtém-se a partir de $A_1', A_2', A_3', etc.,$ por meio da deformação $\left({}^{1}\!/_{k}, 1, 1 \right)$ sofrida no espaço. Os centros das partículas tomarão por si próprios as posições $A_1, A_2, A_3, etc.,$ se antes da translação eles ocupavam as posições $A_1', A_2', A_3', etc.$ Saindo dos limites das partículas, cada ponto *P'* do espaço *S'*(*x', y', z'*) onde se encontra o sistema eletromagnético Σ' se transfere para um determinado ponto *P* do espaço *S* (*x, y, z*) referente a Σ. Há, ainda, uma correspondência temporal, isto é, a localização de *P'* em *S'* no tempo verdadeiro (*t'*) é idêntica à localização de *P* em *S* no seu tempo próprio (*t*). A relação matemática que liga as coordenadas espaciais e o tempo entre os estados correspondentes são as transformações de Lorentz referentes a essas grandezas, ou seja:

$$x' = k(x - wt); \qquad y' = y; \qquad z' = z; \qquad t' = k\left(t - \frac{w}{c^2}x\right).$$

A configuração de uma partícula *A* em ∑, num determinado instante *t*, se deduz da configuração da partícula correspondente em ∑', no correspondente instante *t'*, por meio da deformação $\left(\frac{1}{k},1,1\right)$ que constitui a hipótese de contração do espaço aplicável a própria forma dos corpos materiais. Essa hipótese é fundamental para estabelecer a exata correspondência entre as situações com o sistema em repouso e com o sistema em movimento, sem sair do referencial do éter. Imagine um sistema eletromagnético constituído por uma esfera carregada em repouso no éter caracterizando a situação 1. A situação 2 é qualificada por esse mesmo sistema depois de posto em movimento. Usando as transformações de Lorentz do espaço e do tempo para encontrar o estado correspondente deste sistema móvel, ou seja, para determinar o estado correlativo a situação 1, não atingiremos, exatamente, a situação 1, pois, com a referida transformação ocorre a deformação $(k,1,1)$ que torna a esfera um elipsóide devido a dilatação de suas dimensões na direção do eixo x. Mas, como o sistema ao entrar em movimento de translação sobre a contração $\left(\frac{1}{k},1,1\right)$, esta será contraposta com a dilatação $(k,1,1)$ que resultará num sistema em repouso esférico, exatamente como na situação 1.

Com relação aos campos, consideremos que na situação 1 os campos $\vec{D}_1$ e $\vec{H}_1$ são funções de x_1, y_1, z_1 e t_1. Se o sistema estivesse em seu estado de movimento e regressasse ao seu estado correspondente de repouso, deveríamos ter as mesmas funções para os campos $\vec{D}'$ e $\vec{H}'$ em termos das variáveis x´, y´, z´ e t´ para atingir o estado de repouso precisamente igual a situação 1, ou seja, com $\vec{D}_1 = \vec{D}'$ e $\vec{H}_1 = \vec{H}'$. Mas, as transformações para campo elétrico, campo magnético, velocidade da carga além da translação e densidade de carga do sistema móvel para o sistema em repouso apresentadas por Lorentz, quais sejam,

$D'_x = D_x$;	$D'_y = k\left(D_y - \frac{w}{c}H_z\right)$;	$D'_z = k\left(D_z + \frac{w}{c}H_y\right)$	
$H'_x = H_x$;	$H'_y = k\left(H_y + \frac{w}{c}D_z\right)$;	$H'_z = k\left(H_z - \frac{w}{c}D_y\right)$	
$u_x' = k^2 u_x$;	$u_y' = k\, u_y$;	$u_z' = k\, u_z$;	$\rho' = \rho/k$

somente obtém as mesmas funções para os campos, isto é, as equações de Maxwell, no caso particular em que *ρ=0* ou $\vec{u} = 0$. Portanto, Lorentz não consegue atingir as leis rigorosamente válidas para um sistema em repouso. Na tradução para o alemão de seu artigo de 1904 publicado em língua inglesa Lorentz reconhece tal limitação, dizendo em nota de rodapé:

> *"Nem a equação (7) nem as fórmulas (8) tem a forma dada por Einstein e, em conseqüência disso, não cheguei a fazer desaparecer o termo ρ=0* ou $-\frac{wu'_x}{c^2}$ *na primeira equação (9), pelo que não consegui dar às fórmulas (9) uma forma rigorosamente válida para um sistema em repouso. "[Lorentz, 1904 p.19]*

A equação (7) e as fórmulas (8) a que Lorentz se refere são as transformações para densidade de carga e velocidade da carga além da translação. Como podemos notar, ele observa que caso essas transformações fossem iguais às de Einstein ele teria obtido as fórmulas (9), que são as leis de campo, nas mesmas formas das equações de Maxwell.

Apêndice B - *Invariância das Equações de Maxwell por Transformações de Lorentz*

Considere o conjunto das equações de Maxwell aplicado ao caso particular livre de fontes (ρ=0), como ocorre para uma onda eletromagnética,

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0\,; \qquad \frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t}, \qquad \frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}=\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} \qquad \text{(A1)}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t} \qquad \frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}=\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t} \qquad \frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}=\frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}$$

em que c é uma constante e representa a velocidade da luz no espaço vazio. Essas equações descrevem o nosso sistema eletromagnético relativo ao referencial S, onde as grandezas de espaço e tempo mensuradas são escritas como (x, y, z, t). Vamos supor que tais grandezas medidas por outro referencial S´, transladando em relação a S com a velocidade $\boldsymbol{v}=(v,0,0)$, possuem os valares $(x´, y´, z´, t´)$ relacionados com os do referencial S pelas transformações de Lorentz, ou seja:

$$x'=k(x-vt)\,; \qquad y'=y\,; \qquad z'=z\,; \qquad t'=k\left(t-\frac{v}{c^2}x\right) \qquad \text{(A.2)}$$

em que, $k=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$. (A.3)

Analogamente, considerando-se que as equações que relacionam os campos elétrico $\vec{E}$ e indução magnética $\vec{B}$ do referencial S com os correspondentes campos elétrico $\vec{E}'$ e indução magnética $\vec{B}'$ do referencial S´ sejam:

$$E_x = E'_x \qquad\qquad B_x = B'_x$$

$$E_y = k\left(E'_y + \frac{v}{c}B'_z\right) \qquad\qquad B_y = k\left(B'_y - \frac{v}{c}E'_z\right) \tag{A.4}$$

$$E_z = k\left(E'_z - \frac{v}{c}B'_y\right) \qquad\qquad B_z = k\left(B'_z + \frac{v}{c}E'_y\right)$$

que são as transformações de Lorentz para os referidos campos. Vale ressaltar que essas equações possuem a mesma forma das correspondentes equações de Einstein.

Usando-se a regra da cadeia para funções compostas e as transformações de Lorentz para o espaço-tempo acima arroladas, escrevamos:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} = k\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial z'} \tag{A.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} = k\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right)$$

O que vamos mostrar agora é que as transformações (A.2) e (A.4) aplicadas às equações (A.1) de Maxwell não muda a forma dessas equações em termos das novas variáveis com linhas, isto é, as equações de Maxwell (A.1) são invariantes pelas referidas transformações. Tomemos, inicialmente, a primeira das equações (A.1),

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{A.6}$$

Aplicando-se (A.5) e (A.4), temos:

$$k\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)E_x + \frac{\partial}{\partial y'}k\left(E'_y + \frac{v}{c}B'_z\right) + \frac{\partial}{\partial z'}k\left(E'_z - \frac{v}{c}B'_y\right) = 0$$

que resulta em,

$$\frac{\partial E'_x}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{v}{c}\frac{\partial B'_z}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} - \frac{v}{c}\frac{\partial B'_y}{\partial z'} = 0 \tag{A.7}$$

Considerando que os campos $\vec{E}'$ e $\vec{B}'$ também satisfazem equações do tipo (A.1), em termos das variáveis com linhas, temos:

$$\frac{\partial B_z'}{\partial y'} - \frac{\partial B_y'}{\partial z'} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_x'}{\partial t'} \tag{A.8}$$

Levando (A.8) em (A.7),

$$\frac{\partial E_x'}{\partial x'} - \frac{v}{c}\frac{\partial B_z'}{\partial y'} + \frac{v}{c}\frac{\partial B_y'}{\partial z'} + \frac{\partial E_y'}{\partial y'} + \frac{v}{c}\frac{\partial B_z'}{\partial y'} + \frac{\partial E_z'}{\partial z'} - \frac{v}{c}\frac{\partial B_y'}{\partial z'} = 0$$

obtemos:

$$\frac{\partial E_x'}{\partial x'} + \frac{\partial E_y'}{\partial y'} + \frac{\partial E_z'}{\partial z'} = 0 \tag{A.9}$$

que possui a mesma forma da equação (A.6), portanto, invariante pelas transformações de Lorentz. Similarmente, alcançaremos a invariância das demais equações quando submetidas às transformações de Lorentz, ou seja, aplicando-se (A.5) e (A.4) nas equações (A.1) e considerando-se que os campos $\vec{E}'$ e $\vec{B}'$ satisfazem equações do tipo (A.1), em termos das variáveis com linhas, obteremos também:

$$\frac{\partial B_x'}{\partial x'} + \frac{\partial B_y'}{\partial y'} + \frac{\partial B_z'}{\partial z'} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial E_z'}{\partial y'} - \frac{\partial E_y'}{\partial z'} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_x'}{\partial t'} \qquad && \frac{\partial B_z'}{\partial y'} - \frac{\partial B_y'}{\partial z'} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_x'}{\partial t'} \\
&\frac{\partial E_x'}{\partial z'} - \frac{\partial E_z'}{\partial x'} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_y'}{\partial t'} && \frac{\partial B_x'}{\partial z'} - \frac{\partial B_z'}{\partial x'} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_y'}{\partial t'} \\
&\frac{\partial E_y'}{\partial x'} - \frac{\partial E_x'}{\partial y'} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_z'}{\partial t'} && \frac{\partial B_y'}{\partial x'} - \frac{\partial B_x'}{\partial y'} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_z'}{\partial t'}
\end{aligned} \tag{A.10}$$

No caso em que estão presentes as fontes de carga, ou seja, em que $\rho \neq 0$, as equações de campo no sistema *S* ficam

$$\begin{aligned}
&\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\
&\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \rho\vec{u}\right).
\end{aligned} \tag{A.11}$$

onde, $\rho = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$ representa o produto por 4π da densidade de carga e $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ é o vetor velocidade da carga. Aplicando-se (A.4) e (A.5), obteremos:

$$\begin{aligned} \nabla' \times \vec{E}' &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \\ \nabla' \times \vec{B}' &= \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} + \rho' \vec{u}'\right) \end{aligned} \qquad \text{(A.12)}$$

em que, $\rho' = \frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'}$ e $\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$ são a densidade de carga e a velocidade da carga em *S´*, respectivamente. Tal que:

$$\rho' = k\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)\rho \qquad \text{(A.13)}$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \qquad u'_y = \frac{u_y}{k\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}, \qquad u'_z = \frac{u_z}{k\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \qquad \text{(A.14)}$$