



# UFBA

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA  
ESCOLA POLITÉCNICA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA INDUSTRIAL - PEI

MESTRADO EM ENGENHARIA INDUSTRIAL

RAONY MAIA FONTES

IDENTIFICAÇÃO DE MODELOS DINÂMICOS COM  
INCERTEZA DE MEDIÇÃO ATRAVÉS DE LÓGICA FUZZY



**SALVADOR**  
**2012**



IDENTIFICAÇÃO DE MODELOS DINÂMICOS COM INCERTEZA DE  
MEDIÇÃO ATRAVÉS DA LÓGICA *FUZZY*

Raony Maia Fontes

Dissertação de Mestrado apresentada ao  
Programa de Pós-graduação em Engenharia  
Industrial, da Universidade Federal da  
Bahia, como parte dos requisitos necessários  
à obtenção do título de Mestre em  
Engenharia Industrial.

Orientadores: Cristiano Hora Fontes

Ricardo de Araújo Kalid

Salvador

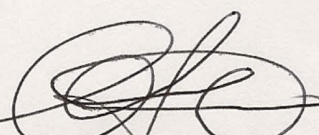
Setembro de 2012

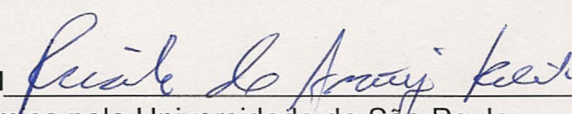
**IDENTIFICAÇÃO DE MODELOS DINÂMICOS COM INCERTEZA DE MEDIÇÃO  
ATRAVÉS DA LÓGICA FUZZY**

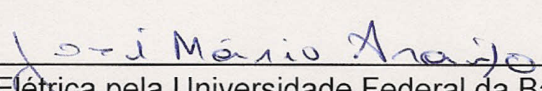
**RAONY MAIA FONTES**

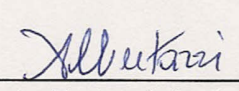
Dissertação submetida ao corpo docente do programa de pós-graduação em Engenharia Industrial da Universidade Federal da Bahia como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de mestre em Engenharia Industrial.

Examinada por:

**Prof. Cristiano Hora de Oliveira Fontes**   
Doutor em Engenharia Química pela Universidade Estadual de Campinas,  
UNICAMP, Brasil;

**Prof. Ricardo de Araújo Kalid**   
Doutor em Engenharia Química pela Universidade de São Paulo,  
USP, Brasil;

**Prof. José Mário Araújo**   
Doutor em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal da Bahia,  
UFBA, Brasil;

**Prof. Aramando Albertazzi Gonçalves Junior**   
Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal de Santa Catarina,  
UFSC, Brasil.

Salvador, BA - BRASIL  
setembro/2012

F683 Fontes, Raony Maia

Identificação de modelos dinâmicos com incerteza de medição através da lógica *fuzzy*/Raony Maia Fontes. – Salvador: UFBA, 2012.

XXVII, 119 p. 29,7cm.

Orientadores: Cristiano Hora Fontes

Ricardo de Araújo Kalid

Dissertação (mestrado) – UFBA/Programa de Engenharia Industrial, 2012.

Referências Bibliográficas: p. 109 – 118.

1. Lógica difusa. 2. Controle de processo. 3. Modelos matemáticos. I. Fontes, Cristiano Hora *et al.*. II. Universidade Federal da Bahia, Programa de Engenharia Industrial. III. Título.

CDD: 511.3

*Aos meus pais, José Antônio  
Fontes e Vera Lúcia Maia*

---

# Agradecimentos

---

Há 3 anos o processo começou, e mesmo com a forte não linearidade e os mais variados distúrbio e perturbações externas, o controlador do tipo FAA (Família Amigos e Amor), eu, consegui manter o processo com poucas oscilações e um mínimo *off-set* em relação a seu ponto ótimo de operação.

Isso é graças a sintonia do controlador realizada pela VIDA, onde a incerteza dos parâmetros, FAMÍLIA, AMIGOS e AMOR foi praticamente nula.

A FAMÍLIA e os AMIGOS são parâmetros com melhor estimação, pois são atualizados constantemente considerando informações desde a época do meu nascimento, e com certeza é fundamental para o perfeito funcionamento deste controlador. O AMOR é o parâmetro mais difícil de sintonizar, porém há sete anos ele vem sendo estimado, de maneira turbulenta, mas perfeita, graças a admissão de uma pessoa dedicada exclusivamente para esse trabalho.

Somado a tudo isso, o controlador aprimorou sua capacidade preditiva devido ao treinamento contínuo de sua Rede Neural e sua base de Regras, realizada pelos chefes do processo.

Agradeço aos meus orientadores Cristiano Hora Fontes e Ricardo de Araújo Kalid, pelas perturbações inseridas ao processo, pois só assim fui capaz de obter informações para treinar minha Rede Neural e minha Base de Regras.

Agradeço aos alunos de ENG-D01 (2011 à 2012.1), a Maísa Paraguassú, a Filipe Freitas e aos alunos do GI, pelos distúrbios gerados ao longo do processo, pois através das dúvidas e das minhas tentativas em ajudá-los, eu aprendi bastante, além de ganhar novos AMIGOS.

Agradeço a meu pai, José Antônio Fontes, a minha mãe, Vera Lúcia Maia e a minha irmã Aruanã Fontes pelo imenso apoio e dedicação, não só nesses três anos,

mas durante toda a minha VIDA.

Agradeço aos meu avós, Justino e Darci Costa, aos meus tios e tias e aos meus primos e primas pela dedicação, criação, pelo suporte e claro pelo AMOR incondicional dessa FAMÍLIA abençoada por DEUS.

Agradeço aos meu AMIGOS pesquisadores: Carol Amaro, Isabel Sartori, Marcos Narciso, Márcio Martins, Leonardo Souza, Reiner Requião, Robson Pessoa e Vitor Andrade, pelas diversas discussões, almoços (Sexta-feira é certo o bolinho de estudante no Bangalô) e descontrações que passamos juntos.

Agradeço aos meus amigos, Edcarlos Santiago, Jason Almeida, Robervan Hohenfeld, Angelo Fernandes, Dilson Silva, José Orrico, Poliandra e Swean Santos, pelos momentos divertidos em nossas viagens musicais.

Agradeço a Ariel Zanini, Iara Brandão e Clarissa Amaral por proporcionarem minha iniciação no ramo acadêmico.

Agradeço a minha princesa Diana, minha namorada, responsável pela difícil tarefa de sintonizar o AMOR deste controlador. Diana, com você nesse cargo, tudo parece mais fácil. TE AMO/ADORO/TUDO!

A todos um MUITO OBRIGADO!

Resumo da Dissertação apresentada à UFBA como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

Este trabalho apresenta uma metodologia para a identificação de modelos dinâmicos usando lógica *fuzzy*, que considera a inclusão da incerteza de medição do processo, descrito por uma função de densidade de probabilidade, diretamente na estrutura do modelo. O modelo compreende um sistema de inferência *fuzzy*, baseado em Takagi-Sugeno e na estrutura dinâmica NARX (*Non linear AutoRegressive with eXogeneous Input*). As entradas e saídas são representadas na forma não-singleton e descritas por funções de pertinência. Para isso são avaliados alguns métodos para a transformação de probabilidade em possibilidade, a transformação ótima (DUBOIS; PRADE; SANDRI, 1993) e a transformação truncada (MAURIS, 2000), para a representação da incerteza, que, então, são comparadas com metodologias clássicas descritas no GUM e GUM-S1 (*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* e seu Suplemento n°1). O modelo identificado, além de representar o comportamento dinâmico da variável de saída, é capaz de prever o seu intervalo de abrangência ao longo do tempo, contribuindo assim para os estudos na área de avaliação de incerteza dinâmica, uma vez que é um campo ainda pouco explorado e de grande importância para aplicação em engenharia. Três estudos de caso foram analisados e os resultados obtidos pelo modelo *fuzzy* foram comparados com a simulação de Monte Carlo estendida para a avaliação da incerteza em regime dinâmico. O sistema de inferência *fuzzy* apresentou bom desempenho em todos os casos analisados com um tempo de processamento até  $1 \times 10^3$  vezes menor que a técnica de Monte Carlo. Isto sugere que a metodologia de identificação desenvolvida é viável em aplicações industriais, como desenvolvimentos de analisadores virtuais, filtros e controladores.



Abstract of Dissertation presented to PEI/UFBA as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

This paper presents a methodology for identifying dynamic models using fuzzy logic, which considers the inclusion of measurement uncertainty of the process, described by a probability density function, directly in the model structure. The model comprises a fuzzy inference system based on Takagi-Sugeno and dynamic structure NARX (Non linear AutoRegressive with eXogeneous Input). The inputs and outputs are represented in a non-singleton and described by membership functions. For some methods that are evaluated for transforming possibility into probability, optimal transformation (DUBOIS; PRADE; SANDRI, 1993) and transformation truncated (MAURIS, 2000), for the representation of uncertainty, which are then compared with classical methods described in GUM and GUM-S1 (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement and its Supplement No. 1). The model identified, besides representing the dynamic behavior of the output variable is able to predict their range of coverage over time, contributing to studies on the evaluation of dynamic uncertainty, since it is still largely unexplored field of great importance for engineering applications. Three case studies were analyzed and the results obtained by the fuzzy model were compared with Monte Carlo simulation extended to the evaluation of uncertainty in dynamic regime. The fuzzy inference system showed good performance in all cases analyzed with a processing time of up to 1000 times smaller than the Monte Carlo technique. This suggests that the developed methodology for identification is feasible for industrial applications such as development of virtual analyzers, controllers and filters.

# Sumário

Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xv
Lista de Quadros	xvii
Lista de Símbolos	xviii
Lista de Abreviaturas	xxvi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Considerações iniciais . . . . .	1
1.2 Objetivos . . . . .	4
1.2.1 Geral . . . . .	4
1.2.2 Específicos . . . . .	4
1.3 Estrutura da dissertação . . . . .	5
<b>2 Teoria <i>fuzzy</i></b>	<b>7</b>
2.1 Conjuntos <i>fuzzy</i> . . . . .	8
2.1.1 Definição . . . . .	9
2.1.2 Função de pertinência . . . . .	9
2.1.3 $\alpha$ -Cut's . . . . .	10
2.1.4 Variável linguística . . . . .	11
2.1.5 Operações . . . . .	12
2.1.5.1 Operadores . . . . .	13
2.1.6 Princípio da extensão . . . . .	15
2.2 Sistema de inferência <i>fuzzy</i> . . . . .	17
2.2.1 Base de regras . . . . .	17

2.2.2	Fuzzificação . . . . .	18
2.2.3	Inferência . . . . .	19
2.3	Cluster . . . . .	23
2.3.1	Agrupamento subtrativo . . . . .	26
2.3.2	Definição das regras . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Incerteza de medição</b>	<b>30</b>
3.1	Propagação da incerteza em regime estacionário . . . . .	34
3.1.1	Método LPU . . . . .	35
3.1.1.1	Avaliação do Tipo A . . . . .	35
3.1.1.2	Avaliação do Tipo B . . . . .	37
3.1.1.3	Incerteza padrão combinada . . . . .	38
3.1.1.4	Incerteza expandida . . . . .	41
3.1.2	Método LPP . . . . .	44
3.1.2.1	Método Monte Carlo . . . . .	45
3.2	Propagação via conjuntos <i>fuzzy</i> : Regime estacionário . . . . .	47
3.2.1	Teoria básica da função de distribuição de possibilidade . . . . .	47
3.2.2	Transformação . . . . .	49
3.2.2.1	Distribuição de possibilidade triangular truncada . . . . .	51
3.2.3	Propagação . . . . .	53
3.2.3.1	Propagação TPD . . . . .	54
3.3	Propagação da incerteza em regime dinâmico pelo método Monte Carlo . . . . .	61
3.3.0.2	Método Monte Carlo: Dinâmico . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Materiais e métodos</b>	<b>65</b>
4.1	Definição do FIS . . . . .	67
4.1.1	NSFIS do tipo TPD . . . . .	69
4.2	Identificação do modelo . . . . .	72
4.2.1	Estimativa inicial dos parâmetros . . . . .	72
4.2.2	Função objetivo . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Resultados e discussões</b>	<b>76</b>
5.1	SISO: Estudo de Caso 1 . . . . .	76
5.2	SISO: Estudo de Caso 2 . . . . .	83

5.3	MISO: Estudo de caso 3 . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Conclusões, sugestões e contribuições</b>	<b>93</b>
6.1	Sugestões . . . . .	96
6.2	Contribuições . . . . .	96
<b>A</b>	<b>Estimação de parâmetros</b>	<b>98</b>
<b>B</b>	<b>Princípio da extensão</b>	<b>101</b>
<b>C</b>	<b>Inferência <i>fuzzy</i></b>	<b>103</b>
<b>D</b>	<b>Informações do CSTR de isomerização</b>	<b>106</b>
<b>E</b>	<b>Produção bibliográfica</b>	<b>108</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>109</b>

# Lista de Figuras

2.1	Representação dos principais ( <i>Suporte</i> e <i>Núcleo</i> ) e de um $\alpha$ -cut's genérico de um conjunto <i>fuzzy</i> . . . . .	11
2.2	Representação dos termos da variável linguística altura em conjuntos <i>fuzzy</i> . . . . .	12
2.3	Representação gráfica das operações mostradas na Tabela 1: (a) mostra os resultados das operações <i>t-norma</i> ; (b) apresenta os resultados da operações <i>t-conorma</i> . . . . .	15
2.4	Representação gráfica da operações de fuzzificação: (a) e (c) mostram os resultados da fuzzificação <i>non-singleton</i> (NS) e <i>singleton</i> (S) com diferentes conjuntos de entrada usando a <i>t-norma</i> mínimo e <i>t-conorma</i> máximo; (b) e (d) apresentam os resultados das fuzzificações usando uma diferente <i>t-norma</i> : produto. . . . .	20
2.5	Ilustração de regras obtidas através de um conjunto de dados (Adaptado de Andrade (2012)) . . . . .	28
3.1	Ilustração do método LPP . . . . .	44
3.2	Transformações das PDF mais comuns para a PoDF ótima. (a) gaussiana, (b) triangular, (c) uniforme e (d) lognormal. . . . .	51
3.3	Distribuição de possibilidade triangular truncada . . . . .	52
3.4	Comparação entre a transformação ótima das distribuições de probabilidade, (a) gaussiana, (b) uniforme e (c) triangular, com os TPD . . . . .	53
3.5	Comparação entre a transformação ótimas das distribuições de probabilidade simétricas mais comuns, com a TPD Generalizada . . . . .	54
3.6	Representação das incertezas das grandezas de entrada $X_i$ na forma de PDF empíricas ((a) e (b)) e os respectivos conjuntos <i>fuzzy</i> ((c) e (d)) resultantes das diferentes transformações . . . . .	56

3.7	Representação das incertezas na forma de PDF empíricas (a) e em conjuntos <i>fuzzy</i> (b) resultantes da propagação da incerteza através da função linear $Y = X_1 + X_2$ . . . . .	58
3.8	Representação das incertezas na forma de PDF empíricas (a) e em conjuntos <i>fuzzy</i> (b) resultantes da propagação em uma função não linear $Y = X_1 \cdot X_2$ . . . . .	59
4.1	Distribuição de possibilidade triangular truncada estimada pelo modelo	72
5.1	Ilustração do Tanque autorregulado . . . . .	77
5.2	Representação dos grupos e seus centros que compõe os antecedentes do NSFIS . . . . .	79
5.3	Representação dos conjuntos que compõe os antecedentes do NSFIS representado na Equação 5.5 : (a) Função de pertinência geradas a partir do grupos encontrados para a vazão de alimentação $X_1 \equiv Q_{in}$ ; (b) Função de pertinência dos grupos encontrados para o sinal de altura realimentada $X_2 \equiv H(k)$ . . . . .	79
5.4	Comportamento da estimativa da vazão de alimentação $q_{in}$ , e sua incerteza ( $u_c(q_{in})$ ) ao longo do tempo . . . . .	80
5.5	Comparação da metodologia desenvolvida (Sobreíndice NSFIS) com a propagação dinâmica via a simulação de Monte Carlo (Sobreíndice MCM) e a simulação da EDO (Equação 5.1) (Sem Sobreíndice) . . .	81
5.6	Representação das PDFs empíricas, na forma de histograma (a - vazão de alimentação inicial; b - altura no instante 1 e c - altura no instante 2), obtidas pelo MCM e os TPDs gerais (TPD-G) usados (d - vazão de alimentação inicial; e - altura no instante 1 e f - altura no instante 2). . . . .	82
5.7	Representação esquemática do Reator de isomerização $A \rightarrow B$ . . . . .	84
5.8	Comportamento da estimativa da vazão de catalisador da alimentação e sua incerteza ao longo do tempo . . . . .	84

5.9	Representação dos conjuntos que compõe os antecedentes do NSFIS representado na Equação 5.7: (a) Função de pertinência geradas a partir do grupos assumidos para a vazão de catalisador na alimentação. (b) Função de pertinência dos grupos assumidos para o sinal de concentração do produto B realimentada . . . . .	85
5.10	Comparação da metodologia desenvolvida (Sobreindice NSFIS) com a propagação dinâmica via a simulação de Monte Carlo (Sobreindice MCM) e a simulação da sistema de equações diferenciais ordinárias que modela o CSTR (Sem Sobreindice) . . . . .	86
5.11	Representação do sistema de Tanques aquecido . . . . .	87
5.12	Representação dos grupos e seus centros que compõe os antecedentes do NSFIS representado pela Equação 5.12 . . . . .	89
5.13	Representação dos conjuntos <i>fuzzy</i> que compõe os antecedentes do NSFIS representado na Equação 5.12 : (a) Função de pertinência dos grupos encontrados para a temperatura da alimentação $X_1 \equiv T_{in}$ ; (b) Função de pertinência dos grupos encontrados para a vazão de alimentação $X_2 \equiv Q_{in}$ ; (c) Função de pertinência dos grupos encontrados para o sinal de temperatura da descarga realimentada $X_3 \equiv T_{out}(k)$ .	90
5.14	(a) Comportamento da estimava da temperatura na carga ( $T_{in}$ ) e sua incerteza combinada ( $u_c(T_{in})$ ) ao longo do tempo; (b) Comportamento da estimava da vazão de carga ( $q_{in}$ ) e sua incerteza combinada ( $u_c(q_{in})$ ) ao longo do tempo. . . . .	91
5.15	Comparação da metodologia desenvolvida (Sobreindice NSFIS) com a propagação dinâmica via a simulação de Monte Carlo (Sobreindice MCM) e a simulação da SEDO (Equação 5.10) (Sem Sobreindice) . .	92

# Lista de Tabelas

2.1	Comparativo entre os resultados encontrados para o nível de ativação encontrado para diferentes <i>t-norma</i> e fuzzificação . . . . .	21
3.1	Valores de probabilidade de abrangência mais comuns . . . . .	42
3.2	Valores das distribuição de possibilidade e probabilidade de um programador tomar $\xi_i^k$ xícaras de café. . . . .	49
3.3	Parâmetros para construção da TPD a partir das PDFs, gaussiana, triangular e uniforme, além da TPD generalizada (TPD-G), para representar a estimativa de $X$ . . . . .	53
3.4	Informações sobre as grandezas de entrada usadas para comparação da metodologia <i>fuzzy</i> com o GUM e GUM-S1 . . . . .	55
3.5	Comparação dos diferentes métodos apresentados para avaliação dos intervalos da grandeza de entrada $X_1$ . . . . .	56
3.6	Comparação dos diferentes métodos apresentados para avaliação dos intervalos da grandeza de entrada $X_2$ . . . . .	57
3.7	Comparação dos diferentes métodos apresentados para avaliação dos intervalos de abrangências aplicados a uma função de medição do tipo $Y = X_1 + X_2$ . . . . .	58
3.8	Comparação dos diferentes métodos apresentados para avaliação dos intervalos de abrangências aplicados a uma função de medição do tipo $Y = X_1 \cdot X_2$ . . . . .	59
3.9	Comparação dos diferentes métodos apresentados para avaliação das incertezas combinadas . . . . .	60
5.1	Estimativas dos parâmetros de caracterização do Tanque e suas respectivas incertezas calculadas a partir de um distribuição uniforme . . . . .	77



6.1	Comparação entre tempos de processamento das metodologias estudadas . . . . .	95
D.1	Limites assumidos na construção das PDF uniformes . . . . .	107
D.2	Valores de estimativas e incertezas para a construção das PDF gaussianas . . . . .	107

# Lista de Quadros

2.1 Operadores <i>t-norma</i> e <i>t-conorma</i> mais aplicados . . . . .	15
2.2 Comparativo entre as propriedades de conjunto aplicadas para o caso <i>crisp</i> e para o caso <i>fuzzy</i> . . . . .	17
3.3 Valores graus de liberdades a partir do tipo de informação obtida . . . . .	43
3.4 Cálculo dos parâmetros da parte triangular da TPD do mensurando com base na função de medição $Y = f(X_1, X_2)$ . . . . .	55
3.5 Cálculo dos parâmetros da parte uniforme da TPD do mensurando com base na função de medição $Y = f(X_1, X_2)$ . . . . .	55
5.6 Estimativas dos parâmetros de caracterização do conjunto de Tanque aque- cidos e sua respectivas incertezas calculadas a partir de um distribuição assumida . . . . .	88

---

# Lista de Símbolos

---

$A_{X_i,k}$	Conjunto <i>fuzzy</i> que representa um valor observado, $X_{i,k}$ da variável de entrada $X_i$ , p. 19
$A_Y$	Conjunto <i>fuzzy</i> que representa o mensurando $Y$ , p. 19
$D_{i,j}$	$j$ -ésimo fator intrínseco ao sistema de medição da variável $X_i$ , p. 35
$F$	Conjunto <i>fuzzy</i> genérico, p. 9
$F_\alpha$	$\alpha$ -cut do conjunto <i>fuzzy</i> $F$ , p. 10
$F_{\bar{\alpha}}$	<i>strong</i> $\alpha$ -cut do conjunto <i>fuzzy</i> $F$ , p. 10
$F_r$	Conjunto <i>fuzzy</i> que atua com restrição, p. 47
$I_{PA}$	Intervalo de abrangência para uma dada probabilidade de abrangência $PA$ , p. 42
$J$	Função objetivo, p. 25
$J_{MQ}$	Função objetivo para o problema de mínimos quadrados, p. 100
$M$	Numero de amostra para a simulação Monte Carlo, p. 46
$N$	Numero de variáveis de entrada, p. 35
$N_D$	Numero de fatores de correções do sistema de medição, p. 35
$N_c$	Numero de <i>clusters</i> , p. 25
$PA$	Probabilidade de abrangência para qual se deseja obter o intervalo de abrangência, p. 41

$Q_i$	Observação da variável $X_i$ , p. 35
$RB$	Resultado Base do mensurando, p. 30
$RM$	Resultado da Medição do mensurando, p. 30
$RM_{\max}$	O valor máximo do Resultado da Medição do mensurando, p. 30
$RM_{\min}$	O valor mínimo do Resultado da Medição do mensurando, p. 30
$R^l$	Regra genérica de um sistema de inferência <i>fuzzy</i> , p. 18
$T(X)$	Conjunto de termos da variável linguística $X$ , p. 12
$U(y)$	Incerteza expandida em torno da estimativa do mensurando, p. 41
$Vv$	Valor verdadeiro ou valor mais esperado de uma variável, p. 30
$W_E(t)$	$e$ -ésima variável exógena para a função de medição das grandezas de entradas dinâmicas $X_1(t)$ , p. 64
$X_i$	Variável que representa $i$ -ésima grandeza de entrada, p. 35
$X_{i,\max}$	Maior valor observado ou possível valor para a variável $X_i$ , p. 37
$X_{i,\min}$	Menor valor observado ou possível valor para a variável $X_i$ , p. 37
$X_{i,k}$	$k$ -ésima observação da variável $X_i$ , p. 35
$Y$	Variável a qual representa o mensurando, inferido por uma função de medição, p. 35
$\Phi_k$	Potencial do possível centro de <i>cluster</i> , $\Xi_k$ , p. 26
$\Pi_X$	Distribuição de probabilidade associada à variável $X$ , p. 47
$\Xi_k$	$k$ -ésimo objeto com $N$ atributos, p. 25

$\hat{Y}(k+1)$	Conjunto <i>fuzzy</i> estimado pelo modelo para o instante $k+1$ , p. 69
$\alpha$	Grau de pertinência para a construção de um $\alpha$ -cut, p. 10
$\xi$	Vetor de possíveis valores do conjunto de entradas $\mathbf{X}$ , p. 45
$\delta$	função delta de Dirac, p. 45
$\zeta$	Vetor contendo o erro da aproximação dos dados experimentais pelo modelo <i>fuzzy</i> , p. 23
$\epsilon_{\hat{Y}(k+1)}$	Parâmetro 1 da TPD do mensurando no instante $k+1$ obtida pelo modelo, p. 71
$\epsilon_{\hat{Y}^l(k+1)}$	Parâmetro 1 da TPD do mensurando no instante $k+1$ obtida pelo modelo em cada regra $l$ , p. 71
$\epsilon$	Parâmetro 1 da TPD, p. 51
$\eta$	Possível valor do mensurando, p. 45
$\eta$	Universo de discurso da variável linguística de saída $Y$ , p. 15
$\eta^k$	Valor possível da grandeza de saída $Y$ , p. 15
$\eta^{\max}$	Maior valor observado ou possível valor para o mensurando, p. 45
$\eta^{\min}$	Menor valor observado ou possível valor para o mensurando, p. 45
$\boldsymbol{\eta}$	Vetor de dados medidos da grandeza de saída, p. 23
$\gamma_u$	Constante de ponderação da avaliação das incertezas na função objetivo, p. 74
$\gamma_y$	Constante de ponderação das medições de $Y$ na função objetivo, p. 74
$\hat{G}_Y(\eta)$	Distribuição acumulada empírica do mensurando, p. 46

$\kappa_c$	O $c$ -ésimo do centro dos $N_C$ grupos, p. 25
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais, p. 48
$\mathbf{G}$	Matriz de coeficiente do sistema para a identificação dos parâmetros do SFIS <i>fuzzy</i> . Cada linha é de terminada por $(\mathbf{g}^k)^\top$ , p. 23
$\mathbf{X}$	Vetor das grandezas de entrada $X_i$ , p. 45
$\mathbf{g}(k)$	Vetor de regressores dos modelos de cada regra do FIS-TS dinâmico, p. 99
$\mathbf{g}^k$	Vetor de coeficiente do sistema de inferência <i>fuzzy</i> do tipo Takagi-Sugeno, p. 23
$\mu_{X_i}$	Esperança ou valor esperado da variável $X_i$ , p. 35
$\mu_Y$	Valor esperado do mensurando $Y$ , p. 39
$\nu_i$	Grau de liberdade do componente $i$ , p. 42
$\nu_{A,i}$	Grau de liberdade referente a parcela de incerteza do Tipo A da variável $X_i$ , p. 43
$\nu_{B,i}$	Graus de liberdade referente a parcela de incerteza do Tipo B da variável $X_i$ , p. 43
$\nu_{\text{eff}}$	Grau de liberdade efetivo do mensurando, p. 41
$\omega^l$	<i>Nível de ativação</i> , ou grau de ativação da regra $R^l$ , p. 19
$\omega_{\text{r}}^l$	<i>Nível de ativação</i> da regra $l$ obtido na fuzzificação da parte uniforme da TPD, p. 71
$\omega_{\text{t}}^l$	<i>Nível de ativação</i> da regra $l$ obtido na fuzzificação da parte triangular da TPD, p. 71
$\oplus$	Operador <i>t-conorm</i> , ou supremo, p. 13
$\overline{F}$	Complemento do conjunto $F$ , p. 13

$\bar{\gamma}$	“Raio de aceite” da metodologia de agrupamento subtrativa, p. 27
$\bar{x}_\epsilon$	Parâmetro 3 da TPD, p. 51
$\bar{x}_n$	Parâmetro 5 da TPD, p. 51
$\phi_F$	Função de pertinência do conjunto <i>fuzzy</i> $F$ , p. 9
$\phi_F(\xi_i^k)$	Grau de pertinência do elemento $\xi_i^k$ ao conjunto $F$ , p. 9
$\phi_{kj}$	grau de pertinência do $k$ -ésimo objeto a $c$ -ésima classe, p. 25
$\pi_X$	Distribuição da função de densidade de possibilidade da variável $X$ , p. 48
$\pi_X(F)$	Medida de possibilidade que representa a proposição $X$ é $F$ , p. 49
$\pi_Y(\eta)$	PoDF do mensurando $Y$ , p. 54
$\sigma_{X_i}^2$	Variância da distribuição de probabilidade da variável $X_i$ , p. 36
$\star$	Operador <i>t-norm</i> , p. 13
$\tau_{d,i}$	Tempo morto da saída em relação a entrada $X_i$ , p. 68
$\theta$	Vetor de parâmetros de um SFIS do tipo Takagi-Sugeno, p. 23
$\theta_{\text{MQ}}$	Vetor de parâmetros ótimos encontrado através do mínimo quadrado, p. 23
$\pi_{\text{TPD},X_i}(\xi_i^k)$	Função de pertinência do TPD obtido da transformação da PDF de $X_i$ , p. 52
$u_A(x_i)$	Avaliação Tipo A da incerteza da estimativa $x_i$ , p. 36
$u_B(x_i)$	Incerteza padrão do Tipo B da estimativa $x_i$ , p. 37
$u_c(\hat{y}^k)$	É a incerteza predita pelo NSFIS no instante $k$ , p. 73

$u_c(y)$	É a avaliação a priori da incerteza da variável de saída (mensurando dinâmico) obtida pelo conhecimento do processo no instante, p. 73
$\underline{\gamma}$	“raio de rejeição” da metodologia de agrupamento subtrativa, p. 27
$\underline{x}_\epsilon$	Parâmetro 2 da TPD, p. 51
$\underline{x}_n$	Parâmetro 4 da TPD, p. 51
$\vee$	Operador <i>t-conorma</i> : “Máximo”, p. 13
$\vee$	Operador <i>t-norma</i> : “Mínimo”, p. 13
$\widehat{y}_\epsilon(k+1)$	Parâmetro 3 da TPD do mesurando no instante $k+1$ obtida pelo modelo, p. 71
$\widehat{y}_n(k+1)$	Parâmetro 5 da TPD do mesurando no instante $k+1$ obtida pelo modelo, p. 71
$\widehat{y}_\epsilon^l(k+1)$	Parâmetro 3 da TPD do mesurando no instante $k+1$ obtida pelo modelagem cada regra $l$ , p. 71
$\widehat{y}_n^l(k+1)$	Parâmetro 5 da TPD do mesurando no instante $k+1$ obtida pelo modelo em cada regra $l$ , p. 71
$\widehat{y}_\epsilon(k+1)$	Parâmetro 2 da TPD do mesurando no instante $k+1$ obtida pelo modelo, p. 71
$\widehat{y}_n(k+1)$	Parâmetro 4 da TPD do mesurando no instante $k+1$ obtida pelo modelo, p. 71
$\widehat{y}_\epsilon^l(k+1)$	Parâmetro 2 da TPD do mesurando no instante $k+1$ obtida pelo modelo em cada regra $l$ , p. 71
$\widehat{y}_n^l(k+1)$	Parâmetro 4 da TPD do mesurando no instante $k+1$ obtida pelo modelo em cada regra $l$ , p. 71
$\widehat{y}^*(k+1)$	Melhor estimativa do mesurando obtida pelo modelo, p. 71



$\widehat{y}^{*l}(k+1)$	Melhor estimativa do mensurando obtida pelo modelo em cada regra $l$ , p. 71
$\mathbf{x}_i$	Vetor de valores dos instantes de tempo das grandezas de entradas $X_i$ , p. 62
$\xi_i$	Possíveis valores da variável $X_i$ , p. 36
$\xi_i^k$	Um possível valor aleatório retirado da PDF de $X_i$ , p. 45
$\xi_i$	Universo de discurso da variável linguística de entrada $X_i$ , p. 9
$\mathbf{y}$	Vetor de valores dos instantes de tempo do mensurando $Y$ , p. 62
$\hat{y}(k+1)$	Estimativa do mesurando no instante $k+1$ a partir de um modelo identificado, p. 68
$\hat{y}$	Estimativa do mensurando obtida pelo modelo, p. 68
$d_{i,j}$	Estimativa de fatores de correção para a função metrológica, p. 40
$g_{\mathbf{x}}(\xi)$	PDF conjunta das grandezas de entradas, p. 45
$g_{X_i}(\xi_i)$	PDF da grandeza $X_i$ , p. 36
$g_Y(\eta)$	PDF do mensurando $Y$ , p. 44
$m_f$	Expoente de fuzzificação dos grupos, p. 25
$n$	Numero de medições independentes, p. 36
$n_Y$	Atraso do modelo NARX em $Y$ , p. 68
$n_{X_i}$	Atraso do modelo NARX em $X_i$ , p. 68
$p_X(\xi)$	Probabilidade da variável $X$ assumir um valor $\xi$ , ou seja, função de probabilidade, p. 48
$q_i$	Média da medições independentes, p. 40

$r(x_i, x_j)$	Coefficiente de correlação entre as estimativas de variáveis aleatórias, p. 40
$r_\alpha$	Raio de vizinhança do primeiro centro de <i>cluster</i> , p. 26
$r_\beta$	Raio de vizinhança com a finalidade de reduzir os novos potenciais, para evitar a proximidade dos centros, p. 27
$s^2(X_{i,k})$	Variância experimental das observações $X_{i,k}$ , p. 36
$s^2(x_i)$	Variância experimental do estimador $x_i$ , p. 36
$u(x_i, x_j)$	Covariância entre as estimativas de variáveis aleatórias, p. 40
$u^2(d_{i,j})$	Incertezas dos fatores de correção da função metrológica, p. 41
$u^2(q_i)$	Incerteza da estimativa das medições independentes de $Q_i$ , p. 41
$u_c^2(y)$	Variância combinada da estimativa do mensurando $Y$ , p. 39
$x^*$	Valor de referencia na construção do conjunto <i>non-singleton</i> , p. 19
$x_i$	Estimador não tendencioso de $\mu_{X_i}$ , p. 36
$x_i^m$	Valor mais provável da variável $X_i$ , p. 38
$y$	Estimativa não tendencioso de $\mu_Y$ , p. 39
$E[X_i]$	Operador esperança aplicado na variável $X_i$ , p. 36
L	Numero de regras de um sistema de inferência <i>fuzzy</i> , p. 21
$\text{Var}[X_i]$	Operador variância aplicado na variável $X_i$ , p. 36
sup	Supremo valor entre função de pertinência, p. 14

---

# Lista de Abreviaturas

---

CDF	<i>Cumulative Distribution Function</i> , p. 46
CPU	<i>Central Processing Unit</i> , p. 76
FCM	<i>Fuzzy C-Means</i> , p. 24
GUM-S1	<i>Guide to the expression of Uncertainty in Measurement - Supplement 1</i> , p. 31
GUM	<i>Guide to the expression of Uncertainty in Measurement</i> , p. 3, 31
GUM	<i>Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement</i> , p. 34
LPP	<i>Law of Propagation of PDF</i> , p. 34
LPU	<i>Law of Propagation of Uncertainty</i> , p. 34
MCM	<i>Monte Carlo Method</i> , p. 45
MQ	Mínimo Quadrado, p. 23
NARX	<i>Nonlinear Autoregressive model with eXogenous variables</i> , p. 68
NSFIS	<i>Non-Singleton Fuzzy Inference System</i> , p. 20
PDF	<i>Probability Density Function</i> , p. 35
PME	<i>Principle of Maximum Entropy</i> , p. 37
PoDF	Função de Distribuição de Possibilidade, p. 47
RAM	<i>Random-Access Memory</i> , p. 76

RSME	<i>Roots Square Mean Erro</i> , p. 73
SC	<i>Subtractive Clustering</i> , p. 26
SEDO	Sistema de Equações Diferencias Ordinárias, p. 64
SFIS	<i>Singleton Fuzzy Inference System</i> , p. 20
TPD-G	TPD Generalizada, p. 52
TPD	<i>Truncated Triangular Possibility Distribution</i> , p. 51
TSK	Takagi-Sugeno-Kang, p. 18
VIM	Vocabulário Internacional de Metrologia, p. 30

---

# Capítulo 1

## Introdução

---

*“I thought of that while riding my bike”*

Albert Einstein on Theory of Relativity

### 1.1 Considerações iniciais

Modelos de processos podem ser obtidos de duas vias. Uma é a modelagem analítica, ou fenomenológica (caixa branca), através de equações de balanços e termodinâmicas, e a outra é conhecida como modelagem empírica ou experimental que utiliza modelos que não guardam relação física com o problema. O avanço na eficiência das técnicas e estruturas de modelos empíricos associados à dificuldade inerente em descrever processos razoavelmente complexos através de um modelo teórico, justifica a potencialidade da alternativa de identificação (modelagem empírica) na caracterização da relação entre múltiplas variáveis (entradas e saídas) de processo (AGUIRRE; RODRIGUES; JÁCOME, 1998), inclusive em regime dinâmico. Esses modelos são obtidos por técnicas de estimação de parâmetros com base em dados de entradas e saídas (caixa preta). Em quaisquer das alternativas de abordagem, as relações entre as variáveis de entrada e de saída são expressas por equações matemáticas e o conhecimento *a priori* sobre o sistema em estudo é sempre um elemento importante para o sucesso do trabalho de modelagem (PAIVA, 1999).

No contexto da modelagem dinâmica, uma estrutura de modelo empírico bem estabelecida compreende a estrutura NARX (*Nonlinear Auto-Regressive with exogenous inputs*) na qual a saída do sistema, em um determinado instante, é determi-

nada por dados passados do próprio sinal de saída juntamente com os sinais de entrada (variáveis exógenas) (AGUIRRE; RODRIGUES; JáCOME, 1998; AGUIRRE, 2000). Alternativas sem realimentação da saída também podem ser utilizadas, como a estrutura (N)FIR ((Nonlinear) Finite Impulse Response) e a estrutura (N)OBF ((Nonlinear) Orthonormal Basis Functions) (CAMPELLO; OLIVEIRA; AMARAL, 2007).

Como alternativas às estruturas clássicas de identificação, surgem às chamadas técnicas inteligentes. Elas se diferenciam por englobar métodos que são motivados por sistemas biológicos e inteligência humana e fazem uso de linguagem natural, heurística, regras, redes semânticas ou modelos qualitativos (SERRA; BOTTURA, 2007). As redes neurais artificiais (RNA) compreendem estruturas de modelo inspiradas no funcionamento do cérebro humano (rede neural biológica) tendo potencial intrínseco de predição. No entanto, estruturas de modelos baseadas em RNA não oferecem em geral uma interpretação física clara dos efeitos entre as variáveis e o conhecimento prévio do processo analisado não é facilmente introduzido na modelagem (BABUSKA; VERBRUGGEN, 1996).

A lógica *fuzzy* (ou lógica difusa) é também uma alternativa para identificação de modelos. A modelagem difusa permite a representação matemática de características de um determinado sistema, sejam informações registradas e/ou conhecimento de especialistas, por meio de regras e variáveis linguísticas (MAMDANI, 1977; TAKAGI; SUGENO, 1985; MENDEL, 2000).

Por outro lado, as metodologias de identificação empírica estão sujeitas à qualidade e incertezas inerentes aos sistemas de medição que, inclusive, recebem influência de fatores externos (ALBERTAZZI; SOUSA, 2008). Portanto devem-se usar técnicas de identificação capazes de contemplar (de forma direta ou indireta) a incerteza de medição para obter modelos mais robustos (SCHWAAB; PINTO, 2007). No estado estacionário essas técnicas são desenvolvidas, desde que se conheça o modelo matemático do processo, tendo-se alguns trabalhos de aprimoramento (LIRA, 2011b; LIRA; GRIENTSCHNIG, 2012). No que diz respeito ao regime dinâmico novas técnicas tem sido desenvolvidas na comunidade científica (MOUZOURIS; MENDEL, 1997a; MOUZOURIS; MENDEL, 1997b; SERRA; BOTTURA, 2007; FERRERO;

SALICONE, 2009; FONTES et al., 2011b), mas continua sendo um problema aberto.

A avaliação da incerteza em regime estacionário de um mensurando em um sistema MISO está bem definida no GUM (*Guide to the expression of Uncertainty in Measurement*) (BIPM et al., 2008a) e no seu primeiro suplemento, GUM – S1 (BIPM et al., 2008b). O GUM propõe a caracterização de um mensurando através dos dois primeiros momentos estatísticos (média, desvio padrão) e em alguns casos, quando conveniente, é capaz de apresentar um intervalo que contenha o resultado de medição. Nele são definidas duas categorias: avaliação Tipo A e a Tipo B da incerteza, sendo a primeira avaliada por métodos estatísticos frequentistas e a segunda por métodos bayesianos (MARTINS, 2010).

Além dos métodos consagrados pela comunidade metrológica para a avaliação de incerteza em estado estacionário, algumas alternativas eficientes ainda são estudadas pela comunidade, como a inferência bayesiana (LIRA; KYRIAZIS, 1999; LIRA; WÖGER, 2001; LIRA; WÖGER, 2006; LIRA, 2006; LIRA; GRIENTSCHNIG, 2010) e a lógica *fuzzy* (DUBOIS; PRADE; SANDRI, 1993; MAURIS; LASSERRE; FOULLOY, 2000; MAURIS, 2000; MAURIS; LASSERRE; FOULLOY, 2001; DUBOIS et al., 2004; FERRERO; GAMBA; SALICONE, 2004; FERRERO; SALICONE, 2004; FERRERO; SALICONE, 2007; FERRERO; SALICONE, 2009).

No que diz respeito a aplicações para engenharia, métodos para a avaliação da incerteza em regime dinâmico possuem ainda um domínio de entendimento e consolidação inferiores às técnicas praticadas para o estado estacionário (KALMAN, 1960; ALLAN, 1987; HISKENS; PAI; NGUYEN, 2000; MARTINS; PESSOA; KALID, 2009; MARTINS; KALID, 2010). Soma-se a isto o fato de que a propagação da incerteza requer uma função de medição bem definida (modelo do processo) que em muitos casos pode não ser facilmente obtida, exigindo a necessidade de técnicas de identificação.

Frente aos bons resultados das metodologias de modelagem dinâmica que consideram as incertezas das entradas, metodologias capazes de mesclar as duas vertentes, identificação e propagação da incerteza dinâmica são focos de estudos e se apresentam com alto potencial para aplicações em engenharia (SERRA; BOTTURA, 2007; FERRERO; SALICONE; TODESCHINI, 2007; FERRERO; FEDERICI; SA-

LICONE, 2010; FONTES et al., 2011b).

Neste trabalho é apresentada uma metodologia de identificação não linear, como opção para identificação de modelos dinâmicos, incluindo a incerteza de medição e com potencial para avaliação do intervalo de abrangência do mensurando em regime transitório. O modelo é definido como um *Non-Singleton Fuzzy Inference System* do tipo Takagi-Sugeno (NSFIS) (TAKAGI; SUGENO, 1985) com os conjuntos de entrada baseado na transformação de probabilidade/possibilidade (MAURIS; LASSERRE; FOULLOY, 2000). Cada conseqüente é composto por modelos NARX (AGUIRRE, 2000) e regras extraídas através da análise de grupos de (CHIU, 1994) de onde também são obtidas as estimativas iniciais para os parâmetros do modelo. Através da propagação *fuzzy* feita por (MAURIS; LASSERRE; FOULLOY, 2001), neste trabalho o NSFIS foi então reduzido a equações algébricas, o que facilita a sua implementação.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Geral

Definir uma metodologia de identificação dinâmica baseada em um sistema de inferência *fuzzy* com a capacidade de aceitar dados contendo suas informações de variabilidade e propagá-las para o mesurando identificado.

### 1.2.2 Específicos

Com intuito de alcançar o objetivo geral, alguns objetivos específicos são traçados:

- Avaliar as metodologias de transformação da informação contida em uma distribuição de densidade de probabilidade em conjuntos *fuzzy* comparando-as com as metodologias tradicionais de avaliação da incerteza, GUM e GUM-S1;
- Desenvolver as etapas para a possível inserção dos conjuntos *não-singleton* gerados pelas transformações probabilidade/possibilidade;



- Desenvolver equações algébricas do sistema de regras *fuzzy* para melhor implementá-lo;
- Propor um método para avaliação da incerteza através do conjunto *fuzzy* estimado pelo sistema de inferência *fuzzy*;

### 1.3 Estrutura da dissertação

Essa dissertação está dividida em quatro capítulos, além deste capítulo, e quatro apêndices. Cada um contém informações, conceitos e aplicações julgados necessários para a compreensão da presente proposta.

O Capítulo 2 é destinado a apresentar os conceitos básicos para a compreensão dos conjuntos *fuzzy* e como um sistema de lógica *fuzzy* é usado para a identificação de modelos, com destaque para o sistema proposto por Takagi e Sugeno (1985) combinado à técnica de geração regras apresentada por Chiu (1994).

No Capítulo 3 são apresentados os fundamentos básicos da avaliação da incerteza com o objetivo de introduzir as metodologias reconhecidas pela comunidade metro-lógica internacional. Também são descritas as metodologias alternativas, como a transformação da função de distribuição de probabilidade em distribuição de possibilidade, os conceitos básicos envolvidos na definição da distribuição de possibilidade e seu uso como conjunto *fuzzy*. É feita a comparação entre a metodologia de transformação ótima (DUBOIS; PRADE; SANDRI, 1993; DUBOIS et al., 2004), a proposta de Mauris, Lasserre e Foulloy (2000) e Mauris, Lasserre e Foulloy (2001) e as tradicionais GUM e GUM-S1 (BIPM et al., 2008a; BIPM et al., 2008b). Além disso, são apresentadas as etapas e equações necessárias para a aplicação do método de avaliação da incerteza dinâmica proposto por Martins e Kalid (2010).

O Capítulo 4 apresenta uma metodologia alternativa para identificação de modelos dinâmicos incluindo a incerteza de medição capaz de avaliar o intervalo de abrangência do mensurando dinâmico.

No Capítulo 5 são apresentados os resultados e discussões enfatizando as possibilidades na utilização da metodologia proposta.

No Capítulo 6 são apresentadas as principais conclusões dessa investigação e sugestões para prosseguimento dessa linha de pesquisa.

No Apêndice A são apresentadas etapas e equações necessárias para a estimação de parâmetros de um modelo SFIS com conseqüente NARX.

O Apêndice B detalha as etapas de cálculos para a resolução do princípio da extensão quando aplicado a uma função linear.

No Apêndice C é detalhado o procedimento matemático usado para a determinação da função de pertinência de um conjunto resultante de um sistema de inferência *fuzzy*.

No Apêndice D são mostradas as equações, as estimativas dos parâmetros e suas respectivas PDFs, necessárias para a realização do estudo de caso 2.

---

# Capítulo 2

## Teoria *fuzzy*

---

*“Fuzzy logic is cool”*

Mendel (2000)

A vaguidade da informação está presente massivamente no cotidiano através de expressões como, por exemplo: “Nos encontramos próximo à lanchonete”, “Quanto mais cedo melhor!”. Este tipo de informação é naturalmente processado pelo ser humano podendo inclusive assumir significados diversos para diferentes pessoas ou mesmo ter interpretações variadas ao longo do tempo.

Para quase todo problema existirá dois diferentes tipos de conhecimento sobre o mesmo: o conhecimento objetivo e o subjetivo. O primeiro é muitas vezes representado por equações enquanto que o segundo não é quantificado pela matemática tradicional (MENDEL, 2000).

As expressões “Estarei a 100 m da lanchonete”, ou “Chegue às 10h” definem de forma objetiva a instrução. A informação, entretanto, pode contemplar um caráter subjetivo associado à definição das variáveis ou quantidade envolvidas. Nestes casos, as variáveis em questão (nos exemplos distância e horário de chegada) passam a ser caracterizadas como variáveis linguísticas e assumem “valores” como, por exemplo, “próximo”, “longe”, “cedo” ou “tarde”(ZADEH, 1975a; ZADEH, 1975b; ZADEH, 1975c; MENDEL, 2000). Por sua vez, para quantificar cada “valor linguístico” atribuído a uma variável linguística Zadeh (1965) introduziu o conceito de conjunto *fuzzy* como uma extensão da teoria clássica de conjuntos. Cada conjunto é associado a uma dada função de pertinência que admite valores graus de pertinência parciais de um dado elemento ao conjunto, ao contrário do que ocorre na teoria convencional.

Além de termos ou expressões, o conhecimento armazenado em um sistema de inferência *fuzzy* é também descrito através de sentenças lógicas compostas por combinações de regras do tipo “SE-ENTÃO”(MENDEL, 2000). Os sistemas de inferência *fuzzy* podem ser construídos com bases em informações registradas sobre o processo combinadas ao conhecimento de especialistas. Essa versatilidade em combinar o conhecimento objetivo com o subjetivo tornou o sistema de lógica *fuzzy* uma alternativa para a modelagem de processos principalmente não lineares (BABUSKA; VERBRUGGEN, 1996).

O desenvolvimento e aplicação de sistemas de inferência *fuzzy* possui uma aplicação diversificada em vários setores com metas específicas bastante variadas. Mamdani (1977) apresenta a aplicação do FLS para projeto de controladores industriais; Takagi e Sugeno (1985) introduz uma variação do FLS apresentando as ferramentas matemáticas, propriedades e aplicações em casos variados; Babuska e Verbruggen (1996) apresenta uma revisão bem detalhada dos diferentes tipos de sistemas de lógica *fuzzy* e suas aplicações; Lima, Fontes e Schnitman (2007) apresenta diferenças entre a potencialidade da lógica *fuzzy* para uso em controle de tráfego aéreo; Meleiro (2002) apresenta um projeto de controladores preditivos a partir da identificação de modelos não lineares, baseados em redes neurais e lógica *fuzzy*; Wakabayashi (2007) faz a análise de um controlador *fuzzy* aplicado a um reator de polimerização; Dokas, Karras e Panagiotakopoulos (2009) apresenta a interação de um sistema *fuzzy* com análise de árvore de falha para emissão de alarme e emergência em operação de campo; Guenounou, Belmehdi e Dahhou (2009) apresenta um algoritmo para otimização de um sistema de lógica *fuzzy* do tipo Takagi e Sugeno (1985) através da combinação do algoritmo de *backpropagation* e algoritmos genéticos; Ahn, Pham e Anh (2010) mostra a aplicação de um sistema de lógica *fuzzy* com consequentes NARX no controle de movimento de um protótipo de braços robótico.

## 2.1 Conjuntos *fuzzy*

Os conjuntos *fuzzy*, propostos por Zadeh (1965), representam a evolução da teoria dos conjuntos tradicionais de forma a representar o conhecimento subjetivo e

combiná-lo com o conhecimento objetivo.

### 2.1.1 Definição

Considere  $\xi_i$  como sendo um conjunto de valores possíveis da variável  $X_i$  denominado universo de discurso, cujo  $\xi_i^k$  represente um elemento genérico deste conjunto (ZADEH, 1965).

Um conjunto *fuzzy*  $F$  (Equação 2.1) é definido como o conjunto de pares ordenados entre um valor do universo de discurso e o seu grau de pertinência,  $\phi_F(\xi_i^k)$ , proveniente de uma função (Equação 2.2), a qual relaciona cada elemento de  $\xi_i$  com o intervalo real  $[0,1]$  (ZADEH, 1965). Essa função recebe o nome de *função de pertinência*.

$$F = \{ (\xi_i^k, \phi_F(\xi_i^k)) \mid \xi_i^k \in \xi_i \} \quad (2.1)$$

$$\phi_F : \xi_i \rightarrow [0, 1] \quad (2.2)$$

A representação dos conjuntos *fuzzy* varia de acordo com a sua natureza. Para universos de discursos contínuo, os conjuntos *fuzzy* são representados pela Equação 2.3<sup>1</sup>, enquanto que para os casos discretos, a representação adotada é a Equação 2.4<sup>1</sup>

$$F = \int_{\xi_i} \phi_F(\xi_i^k) / \xi_i^k \quad (2.3)$$

$$F = \sum_{\xi_i} \phi_F(\xi_i^k) / \xi_i^k \quad (2.4)$$

### 2.1.2 Função de pertinência

A função de pertinência tem como objetivo caracterizar um conjunto, relacionando cada elemento do universo de discurso ao seu respectivo grau de pertinência, contido no intervalo real  $[0, 1]$ , a este conjunto (Equação 2.2). Este valor representa a medida do “grau de aderência” do elemento ao conjunto (MENDEL, 2000) de forma

---

<sup>1</sup>É importante destacar que os símbolos  $\int_{\xi_i}$  e  $\sum_{\xi_i}$  não representam integração e nem soma aritmética, respectivamente. Ambos se referem ao conjunto de associações, simbolizadas pela /, de todos os pontos  $\xi_i^k \in \xi_i$  com o seu respectivo grau de pertinência  $\phi_F(\xi_i^k)$ .

que, quanto maior for, mais alta é a compatibilidade do elemento com o conjunto (ZADEH, 1965).

Na teoria clássica de conjuntos, a função de pertinência assume apenas dois valores (0 ou 1) englobando a ideia de pertence ou não pertence. Esses conjuntos recebem o nome de conjuntos *crisp* e sua função de pertinência é descrita pela Equação 2.5.

$$\phi_F(\xi_i^k) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi_i^k \in F \\ 0 & \text{se } \xi_i^k \notin F \end{cases} \quad (2.5)$$

### 2.1.3 $\alpha$ -Cut's

Os conjuntos *fuzzy* podem ser ainda decompostos em subconjuntos a partir de um dado nível de pertinência. Esses subconjuntos são denominados de  $\alpha$ -cut's.

Considere um conjunto *fuzzy*  $F$  inserido em  $\xi_i$ . O  $\alpha$ -cut,  $F_\alpha$ , de  $F$  é um conjunto *crisp*, definido através da Equação 2.6, para todo  $\alpha \in [0, 1]$  (WANG; RUAN; KERRE, 2009).

$$F_\alpha = \{\xi_i^k | \phi_F(\xi_i^k) \geq \alpha \ \& \ \xi_i^k \in \xi_i\}. \quad (2.6)$$

E o seu respectivo *strong*  $\alpha$ -cut é definido pela Equação 2.7 (DUBOIS; PRADE, 1937; WANG; RUAN; KERRE, 2009).

$$F_{\bar{\alpha}} = \{\xi_i^k | \phi_F(\xi_i^k) > \alpha \ \& \ \xi_i^k \in \xi_i\}. \quad (2.7)$$

Dentre os infinitos  $\alpha$ -cut e *strong*  $\alpha$ -cut que podem ser gerados, dois em particular tem destaque na teoria de conjuntos *fuzzy*:

**Suporte:** O conjunto gerado através da Equação 2.7 para um  $\alpha > 0$  é denominado de *suporte* de um conjunto *fuzzy* ( $F$ ), ou seja, o *suporte* é um *strong*  $\alpha$ -cut de um conjunto *fuzzy* (Equação 2.8)

$$F_0 = \{\xi_i^k | \phi_F(\xi_i^k) > 0 \ \& \ \xi_i^k \in \xi_i\}. \quad (2.8)$$

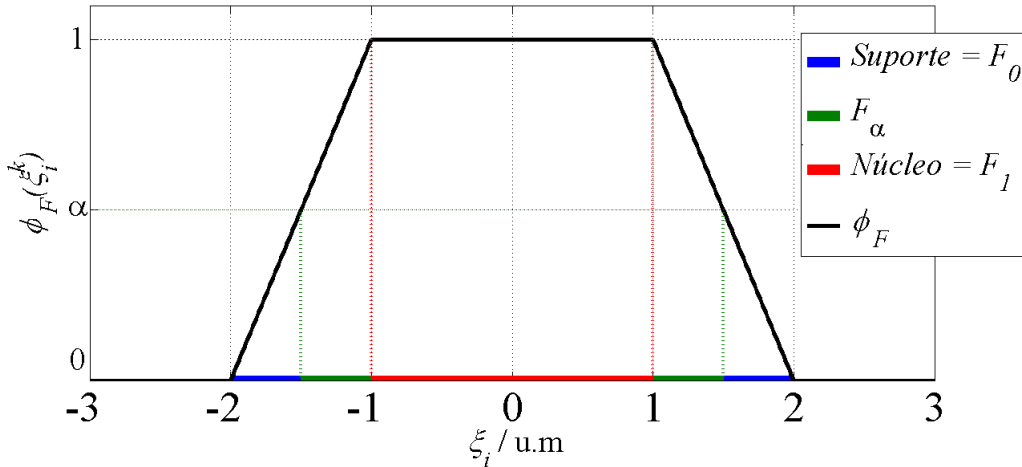
Para alguns conjuntos *fuzzy* o *suporte* é composto por apenas um elemento. A esses conjuntos dar-se o nome de conjunto *singleton* (MENDEL, 2000). Qualquer conjunto *fuzzy* cujo suporte não é um conjunto unitário é denominado de *non-singleton*.

**Núcleo:** O *núcleo* de um conjunto *fuzzy* é o conjunto para  $\alpha = 1$ .

$$F_1 = \{\xi_i^k | \phi_F(\xi_i^k) = 1 \ \& \ \xi_i^k \in \xi_i\} \quad (2.9)$$

A Figura 2.1 ilustra o conceito do  $\alpha$ -cut de um conjunto destacando o *suporte* e o *núcleo*.

Figura 2.1: Representação dos principais (*Suporte* e *Núcleo*) e de um  $\alpha$ -cut's genérico de um conjunto *fuzzy*.



Na Figura 2.1 verifica-se que o núcleo (cor vermelho) e o suporte (cor azul) não são conjuntos unitários e portanto a mesma representa um conjunto *non-singleton*.

#### 2.1.4 Variável linguística

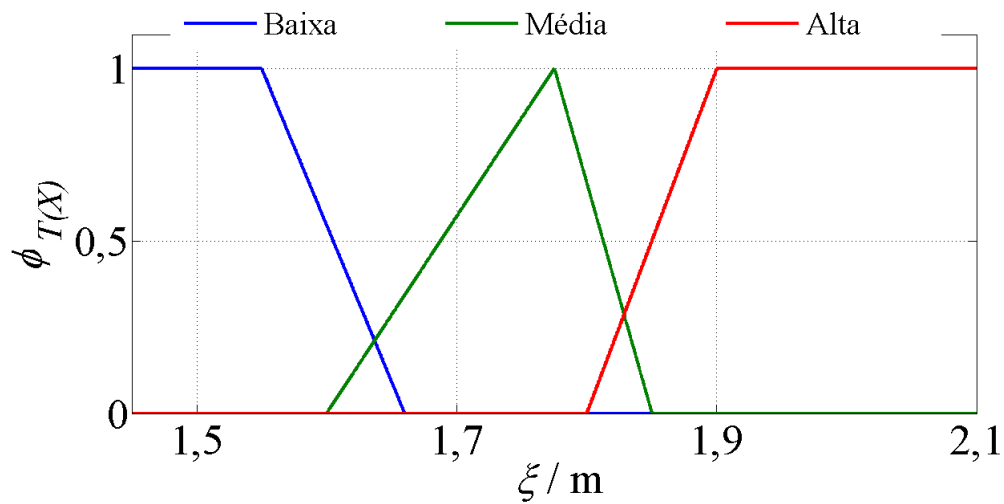
Quando é dito que uma pessoa é “alta”, que a temperatura de fusão da água é “baixa” ou que está “tarde”, essas informações são menos específicas em comparação às expressões como, “uma pessoa mede 1,90 m” ou a “temperatura da fusão da água pura é 0 °C” ou “já são 23 h”.

Uma variável linguística é definida por uma quádrupla que contempla o nome da variável, o universo de discurso, conjunto de valores (termos linguísticos) e as

funções de pertinência que definem cada conjunto associado a um termo linguístico (ZADEH, 1975c; ZADEH, 1975b; ZADEH, 1975a).

**Exemplo 2.1.1** Considere a variável linguística “Altura de uma pessoa”, que será representada pela letra  $X$ , e está dividida no seguinte conjunto de termos:  $T(X) = \{baixa, média, alta\}$ . Cada termo poderá ser caracterizado por conjuntos *fuzzy* dentro do universo de discurso, nesse caso os números reais:  $\xi_i = \mathbb{R}$ .

Figura 2.2: Representação dos termos da variável linguística altura em conjuntos *fuzzy*.



As escolhas das funções trapezoidal e triangular são arbitrárias, o que implica que pessoas diferentes (ou especialistas diferentes) podem definir conjuntos diferentes associados ao mesmo termo linguístico.

### 2.1.5 Operações

As operações entre conjuntos *fuzzy* são extensões das operações intrínsecas à teoria clássica de conjuntos,

**Conjunto *fuzzy* Vazio -  $F_0$ :** Um conjunto *fuzzy*,  $F \subset \xi_i$  é dito vazio se e somente se  $\forall \xi_i^k \in \xi_i, \phi_{F_0}(\xi_i^k) = 0$ .

**Igualdade:** Dois conjuntos *fuzzy* inseridos em  $\xi_i$ , são ditos iguais ( $F^1 = F^2$ ), se e somente se  $\forall \xi_i^k \in \xi_i, \phi_{F^1}(\xi_i^k) = \phi_{F^2}(\xi_i^k)$ .



**Complemento -  $\bar{F}$ :** O complemento de um conjunto *fuzzy* é caracterizado pela função de pertinência descrita pela Equação 2.10.

$$\phi_{\bar{F}}(\xi_i^k) = 1 - \phi_F(\xi_i^k) \quad (2.10)$$

**Convexo:** Um conjunto *fuzzy*  $F$  é dito convexo, se e somente se,  $\phi_F(\lambda \cdot \xi_i^k + (1 - \lambda) \cdot \xi_i^{k+1}) \geq \min[\phi_F(\xi_i^k), \phi_F(\xi_i^{k+1})] \quad \forall \xi_i^k \in \xi_i$  e  $\lambda \in [0; 1]$

**Subconjuntos -  $F^1 \subset F^2$ :**  $F^1$  é dito subconjunto de  $F^2$ , ou  $F^1$  está contido em  $F^2$  se e somente se  $\forall \xi_i^k \in \xi_i, \phi_{F^1}(\xi_i^k) \leq \phi_{F^2}(\xi_i^k)$ .

**Normal:** Um conjunto *fuzzy*,  $F$ , é dito normal, se seu núcleo é um conjunto diferente do conjunto vazio, ou seja,  $F_1 \neq \emptyset$ .

**Número *fuzzy*:** Um conjunto *fuzzy* normal e convexo, definido no universo de discurso dos números reais é denominado de número *fuzzy*.

**União -  $F^1 \cup F^2$ :** O conjunto *fuzzy*,  $G$ , obtido pela união de  $F^1$  e  $F^2$  é definido como o menor conjunto que contém ambos  $F^1$  e  $F^2$ . Sua função de pertinência é obtidas pelos operadores denominados *t-conorma* que estão definidos na secção 2.1.5.1. Para ilustrar, a Equação 2.11 apresenta um dos operadores mais usados, “Máximo” (ZADEH, 1965).

$$\phi_G(\xi_i^k) = \max[\phi_{F^1}(\xi_i^k), \phi_{F^2}(\xi_i^k)] \equiv \phi_{F^1}(\xi_i^k) \vee \phi_{F^2}(\xi_i^k), \quad \forall \xi_i^k \in \xi_i \quad (2.11)$$

**Intersecção -  $F^1 \cap F^2$ :** O conjunto *fuzzy*,  $G$ , obtido pela intersecção de  $F^1$  e  $F^2$  é definido como o maior conjunto que contém ambos  $F^1$  e  $F^2$ . Assim com a união, sua função de pertinência é obtidas pelos operadores denominados *t-norma* que estão definidos na secção 2.1.5.1. O operador “Mínimo” (ZADEH, 1965) é um dos mais usados.

$$\phi_G(\xi_i^k) = \min[\phi_{F^1}(\xi_i^k), \phi_{F^2}(\xi_i^k)] \equiv \phi_{F^1}(\xi_i^k) \wedge \phi_{F^2}(\xi_i^k), \quad \forall \xi_i^k \in \xi_i \quad (2.12)$$

### 2.1.5.1 Operadores

Para as operações de união e intersecção são definidas uma gama de operadores denominados de *t-conorma* ( $\oplus$ ) e *t-norma* ( $\star$ ). Esses operadores são aplicados às

funções de pertinência dos conjuntos para gerar uma nova função de pertinência resultante da operação de união ou intersecção.

***t-norm*** - ( $\star$  - *star*):  $(\phi_{F^1}(\xi_i^k) \star \phi_{F^2}(\xi_i^k))$  Operador aplicado para construir a função de pertinência referente a operação de intersecção e implicação.

- Propriedades:

Simetria:  $\phi_{F^1} \star \phi_{F^2} = \phi_{F^2} \star \phi_{F^1}, \forall \phi_{F^1}, \phi_{F^2} \in [0; 1];$

Monotonicidade:  $\phi_{F^1}(\xi_i^1) \star \phi_{F^2}(\xi_i^1) \leq \phi_{F^1}(\xi_i^2) \star \phi_{F^2}(\xi_i^2)$   
 $\forall \phi_{F^1}(\xi_i^1) \leq \phi_{F^2}(\xi_i^1) \ \& \ \phi_{F^1}(\xi_i^2) \leq \phi_{F^2}(\xi_i^2)$

Associatividade:  $(\phi_{F^1} \star \phi_{F^2}) \star \phi_{F^3} = \phi_{F^1} \star (\phi_{F^2} \star \phi_{F^3}), \forall \phi_{F^1}, \phi_{F^2}, \phi_{F^3} \in [0; 1];$

Condição de contorno:  $\phi_{F^1} \star 1 = \phi_{F^1}, \forall \phi_{F^1} \in [0; 1];$

***t-conorm*** - ( $\oplus$  - *sup*):  $(\phi_{F^1}(\xi_i^k) \oplus \phi_{F^2}(\xi_i^k))$  Operador aplicado na obtenção da função de pertinência referente a operação de união.

- Propriedades:

Simetria:  $\phi_{F^1} \oplus \phi_{F^2} = \phi_{F^1} \oplus \phi_{F^2}, \forall \phi_{F^1}, \phi_{F^2} \in [0; 1];$

Monotonicidade:  $\phi_{F^1}(\xi_i^1) \oplus \phi_{F^2}(\xi_i^1) \leq \phi_{F^1}(\xi_i^2) \oplus \phi_{F^2}(\xi_i^2)$   
 $\forall \phi_{F^1}(\xi_i^1) \leq \phi_{F^2}(\xi_i^1) \ \& \ \phi_{F^1}(\xi_i^2) \leq \phi_{F^2}(\xi_i^2)$

Associatividade:  $(\phi_{F^1} \oplus \phi_{F^2}) \oplus \phi_{F^3} = \phi_{F^1} \oplus (\phi_{F^2} \oplus \phi_{F^3}), \forall \phi_{F^1}, \phi_{F^2}, \phi_{F^3} \in [0; 1];$

Condição de contorno:  $\phi_{F^1} \oplus 0 = \phi_{F^1}, \forall \phi_{F^1} \in [0; 1];$

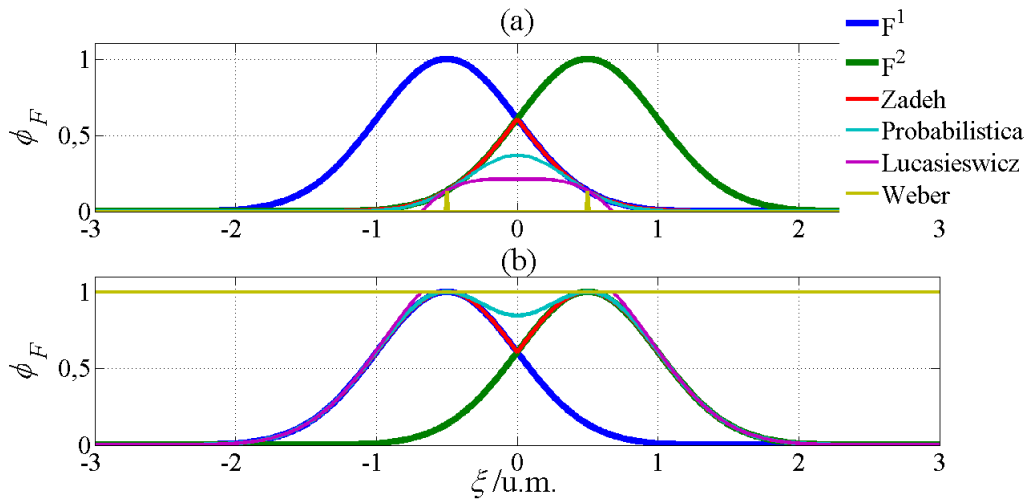
Os primeiros operadores foram criados por Zadeh (1965) e em seguida novos operadores foram surgindo. O Quadro 2.1 mostra os operadores mais usados e a Figura 2.3 mostra o resultado da aplicação desses operadores sobre dois conjuntos quaisquer.

Quadro 2.1: Operadores *t-norma* e *t-conorma* mais aplicados

Nome	<i>t-norm</i>	<i>t-conorm</i>
Zadeh	$\phi_{F^1} \wedge \phi_{F^2}$	$\phi_{F^1} \vee \phi_{F^2}$
Probabilística	$\phi_{F^1} \cdot \phi_{F^2}$	$\phi_{F^1} + \phi_{F^2} - \phi_{F^1} \cdot \phi_{F^2}$
Lukasiewicz	$0 \vee [\phi_{F^1} + \phi_{F^2} - 1]$	$1 \wedge [\phi_{F^1} + \phi_{F^2}]$
Weber	$\begin{cases} \phi_{F^1}, & \text{se } \phi_{F^2} = 1 \\ \phi_{F^2}, & \text{se } \phi_{F^1} = 1 \\ 0, & \text{outro caso} \end{cases}$	$\begin{cases} \phi_{F^1}, & \text{se } \phi_{F^2} = 0 \\ \phi_{F^2}, & \text{se } \phi_{F^1} = 0 \\ 1, & \text{outro caso} \end{cases}$

Fonte: Mendel (2000)

Figura 2.3: Representação gráfica das operações mostradas na Tabela 1: (a) mostra os resultados das operações *t-norma*; (b) apresenta os resultados da operações *t-conorma*.



### 2.1.6 Princípio da extensão

O princípio da extensão viabiliza de modo generalizado a operação entre conjuntos *fuzzy*.

Considere o produto cartesiano  $\xi = \xi_1 \times, \dots, \times \xi_N$  e  $f$  uma função que faz o mapeamento de  $\xi$  para o um universo de discurso resultante  $\eta$ , de forma que  $\eta^k = f(\xi_1^k, \dots, \xi_N^k) \in \eta$ , e  $F^1, \dots, F^2$  são conjuntos *fuzzy* de  $\xi_1, \dots, \xi_N$ .

O princípio da extensão permite encontrar um novo conjunto *fuzzy*  $G$  definido no

universo de discurso  $\eta$  através da aplicação da função  $f$  sobre os conjuntos  $F^1, \dots, F^2$  (Equação 2.13 e 2.14).

$$\phi_G(\eta^k) = \begin{cases} \sup \min [\phi_{F^1}(\xi_1^k), \dots, \phi_{F^N}(\xi_N^k)] \\ 0 \quad \text{se } f^{-1}(\eta^k) = \emptyset \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} G = f(F^1, \dots, F^N) &= \int_{\eta^k \in \eta} \phi_G(\eta^k) / f(\xi_1^k, \dots, \xi_N^k) \\ &= \int_{\eta^k \in \eta} \phi_G(\eta^k) / \eta^k. \end{aligned} \quad (2.14)$$

O princípio de extensão é essencialmente uma identidade que permite estender o domínio de uma função para um conjunto *fuzzy* (ZADEH, 1975b), ou seja, é possível construir conjuntos *fuzzy* a partir de relações matemáticas comuns  $Y = f(\mathbf{X})$  (MENDEL, 2000).

Uma aplicação mais comum do princípio da extensão é a obtenção do conjunto *fuzzy* resultante da uma combinação linear entre outros conjuntos *fuzzy*, ou seja,  $G = \sum_{i=1}^n \theta_i \cdot F^i + \theta_0$ . Um exemplo típico se refere à combinação linear entre conjuntos *fuzzy* intervalares.

Um conjunto *fuzzy* intervalar é aquele cujo, suporte e o núcleo são iguais e não unitários e, desta forma pode ser descrito apenas pelo intervalo de valores que definem o seu suporte.

Sendo  $F_i$  um conjunto intervalar,  $F_i = [x_{i,\min}; x_{i,\max}]$ , sendo  $x_{i,\min} = x_i^* - a_i$  e  $x_{i,\max} = x_i^* + b_i$ , então  $G$  (conjunto resultante da combinação linear entre vários conjuntos intervalares) é obtido por (KARNIK; MENDEL, 2001; WANG; RUAN; KERRE, 2009) (Apêndice B):

$$G \equiv \left[ \sum_{i=1}^N \theta_i \cdot x_i^* + \theta_0 - \sum_{i=1}^N |\theta_i| \cdot a_i; \sum_{i=1}^N \theta_i \cdot x_i^* + \theta_0 + \sum_{i=1}^N |\theta_i| \cdot b_i \right], \quad (2.15)$$

$$\phi_G(\eta^k) = \sup \{ \alpha | \eta^k \in G_\alpha \}, \quad \forall \alpha \in [0; 1]. \quad (2.16)$$

A Tabela 2 apresenta algumas propriedades inerentes às operações entre conjuntos *fuzzy* e o equivalente em relação aos conjuntos *crisp* (teoria clássica de conjuntos).

Quadro 2.2: Comparativo entre as propriedades de conjunto aplicadas para o caso *crisp* e para o caso *fuzzy*

Propriedades	Conjunto <i>crisp</i>	Conjunto <i>fuzzy</i>
<i>Comutatividade</i>	$F^1 \cup F^2 = F^2 \cup F^1$	$\phi_{F^1} \oplus \phi_{F^2} = \phi_{F^2} \oplus \phi_{F^1}$
<i>Distributiva</i>	$F^1 \cap (F^2 \cup F^3) = (F^1 \cap F^2) \cup (F^1 \cap F^3)$ $F^1 \cup (F^2 \cap F^3) = (F^1 \cup F^2) \cap (F^1 \cup F^3)$	$\phi_{F^1} \star (\phi_{F^2} \oplus \phi_{F^3}) = (\phi_{F^1} \star \phi_{F^2}) \oplus (\phi_{F^1} \star \phi_{F^3})$ $\phi_{F^1} \oplus (\phi_{F^2} \star \phi_{F^3}) = (F^1 \oplus F^2) \star (F^1 \oplus F^3)$
<i>Lei de Morgan</i>	$\overline{F^1 \cup F^2} = \overline{F^1} \cap \overline{F^2}$ $\overline{F^1 \cap F^2} = \overline{F^1} \cup \overline{F^2}$	$1 - [\phi_{F^1} \oplus \phi_{F^2}] = (1 - \phi_{F^1}) \star (1 - \phi_{F^2})$ $1 - [\phi_{F^1} \star \phi_{F^2}] = (1 - \phi_{F^1}) \oplus (1 - \phi_{F^2})$
<i>Associativa</i>	$F^1 \cup F^2 \cup F^3 = (F^1 \cup F^2) \cup F^3$ $= F^1 \cup (F^2 \cup F^3)$	$\phi_{F^1} \oplus \phi_{F^2} \oplus \phi_{F^3} = (\phi_{F^1} \oplus \phi_{F^2}) \oplus \phi_{F^3}$ $= \phi_{F^1} \oplus (\phi_{F^2} \oplus \phi_{F^3})$

## 2.2 Sistema de inferência *fuzzy*

Um sistema de lógica *fuzzy* (FLS - *Fuzzy Logic System*) é composto por 4 componentes conectados entre si, quais sejam, base de regras, fuzzificador, inferência e defuzzificador.

### 2.2.1 Base de regras

Depois de estabelecidas as regras, um FLS pode ser interpretado como um função que relaciona entradas e saída o que justifica sua aplicação em sistemas de engenharia, como controladores e processadores de sinal (MENDEL, 2000).

As regras são parte fundamental de um FLS, sendo geralmente definidas através do conhecimento de especialista ou a partir de dados experimentais. Uma regra é essencialmente a combinação de proposições através da operação de implicação denotada por  $p \rightarrow q$  (“**SE**  $p$  **ENTÃO**  $q$ ”).

Até então, uma proposição pode assumir dois valores lógicos, “verdadeiro” ou “falso”, o que indica uma correspondência com a álgebra Boleana. Sendo assim, na lógica comum uma proposição ou regra, pode ser caracterizada por uma função de pertinência do tipo *crisp* (Equação 2.5). No caso *fuzzy* a proposição pode ser parcialmente verdadeira, ou se preferir, parcialmente falsa, podendo, então ser caracterizada por uma função de pertinência *fuzzy* (Equação 2.2).

Uma regra na forma “SE-ENTÃO” possui um antecedente, geralmente composto por uma combinação de conjunções (“SE  $p_1$  e  $p_2$ , e ... e ,  $p_N$ ”), enquanto que a sentença final, “ENTÃO  $q$ ” é denominada de conseqüente.

Um sistema de regras pode ser apresentado através de duas abordagens padrão, quais sejam Mamdani (MAMDANI, 1977) e Takagi-Sugeno (TSK) (TAKAGI; SUGENO, 1985). Essas estruturas são diferenciadas apenas pela formação do conseqüente das regras. Na primeira o conseqüente é descrito por conjuntos *fuzzy* (Equação 2.17) e na segunda por funções matemáticas (Equação 2.18). As Equações 2.17 e 2.18 mostram uma regra genérica  $R^l$  (em ambas as abordagens) de um sistema de inferência *fuzzy* com  $N$  variáveis linguísticas de entrada e os respectivos conjuntos *fuzzy*  $F^{i,l}$  nos antecedentes.

$$R^l : \text{SE } X_1 \text{ é } F^{1,l} \text{ E } \dots \text{ E } X_N \text{ é } F^{N,l} \text{ ENTÃO } Y \text{ é } G^l \quad (2.17)$$

$$R^l : \text{SE } X_1 \text{ é } F^{1,l} \text{ E } \dots \text{ E } X_N \text{ é } F^{N,l} \text{ ENTÃO } Y^{l,k} = f^l(X_1, \dots, X_N, \text{parâmetros}) \quad (2.18)$$

## 2.2.2 Fuzzificação

Um sistema de inferência *fuzzy*, representando essencialmente uma estrutura de modelo, será disparado a partir da alimentação dos valores das entradas do modelo. Neste contexto, visando mimetizar uma situação real, os valores das entradas são grandezas medidas diretamente de um processo.

A operação de fuzzificação transforma o valor medido da entrada em um conjunto *fuzzy* correspondente que será efetivamente processado nos antecedentes de todas as regras. A operação de fuzzificação está associada diretamente ao processo de medição das entradas podendo, como será visto adiante, ser contemplada a possibilidade de considerar diretamente a incerteza de medição da variável na fuzzificação e, por conseguinte, no sistema de inferência *fuzzy*.

De forma geral, a fuzzificação transforma um valor observado, ou medido  $X_{i,k} \in \xi_i$ , em um conjunto *fuzzy* com uma dada função de pertinência. Neste caso, existem duas grandes abordagens:

**Singleton:** Um fuzzificador *singleton* é aquele que transforma o valor medido em

conjunto *fuzzy*  $A_{X_{i,k}}$  de *suporte* unitário sendo caracterizado, portanto, pela seguinte função de pertinência (Equação 2.19) (MENDEL, 2000).

$$\phi_{A_{X_{i,k}}}(\xi_i^k) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi_i^k = X_{i,k} \\ 0 & \text{se } \xi_i^k \neq X_{i,k} \end{cases}, \quad \xi_i^k \in \xi_i \quad (2.19)$$

**Non-singleton:** É aquele pelo qual existe um valor  $x^*$  no qual  $\phi_A(x^*) = 1$ . A medida em que os valores de  $\xi_i^k$  se afastam de  $x^*$  a função de pertinência é decrescente. Geralmente o valor de  $x^*$  é assumido como o valor mais provável ( $x^m$ ), ou a média ( $x_i$ ) da grandeza de entrada  $X_i$ . O fuzzificador *non-singleton* viabiliza a inserção direta da incerteza de medição das variáveis de entrada (MENDEL, 2000) no modelo *fuzzy*, como será visto mais a frente (Capítulos 3 e 4).

### 2.2.3 Inferência

A inferência propriamente dita consiste em combinar as regras *fuzzy* e determinar o conjunto de saída  $A_Y$  a partir dos conjuntos de entrada  $A_{X_{1,k}} \times, \dots, \times A_{X_{N,k}}$ .

Se adotado um sistema de regras Mamdani (Equação 2.17), a função pertinência dos conjuntos obtidos para cada regra,  $R^l$  será descrita pela Equação 2.20 (MENDEL, 2000).

$$\phi_{A_Y^l}(\eta^k) = \phi_{G^l}(\eta^k) \star \left\{ \left[ \sup_{\xi_1^k \in \xi_1} \phi_{A_{X_{1,k}}}(\xi_1^k) \star \phi_{F^{1,l}}(\xi_1^k) \right] \star \dots \star \left[ \sup_{\xi_N^k \in \xi_N} \phi_{A_{X_{N,k}}}(\xi_N^k) \star \phi_{F^{N,l}}(\xi_N^k) \right] \right\} \quad (2.20)$$

O termo entre chaves é denominado de *nível de ativação* ( $\omega^l$  - Equação 2.21) ou grau de ativação da regra  $R^l$ , e determina o grau de pertinência da regra ao valor lógico “verdade”.

$$\omega^l = \left\{ \left[ \sup_{\xi_1^k \in \xi_1} \phi_{A_{X_{1,k}}}(\xi_1^k) \star \phi_{F^{1,l}}(\xi_1^k) \right] \star \dots \star \left[ \sup_{\xi_N^k \in \xi_N} \phi_{A_{X_{N,k}}}(\xi_N^k) \star \phi_{F^{N,l}}(\xi_N^k) \right] \right\} \quad (2.21)$$

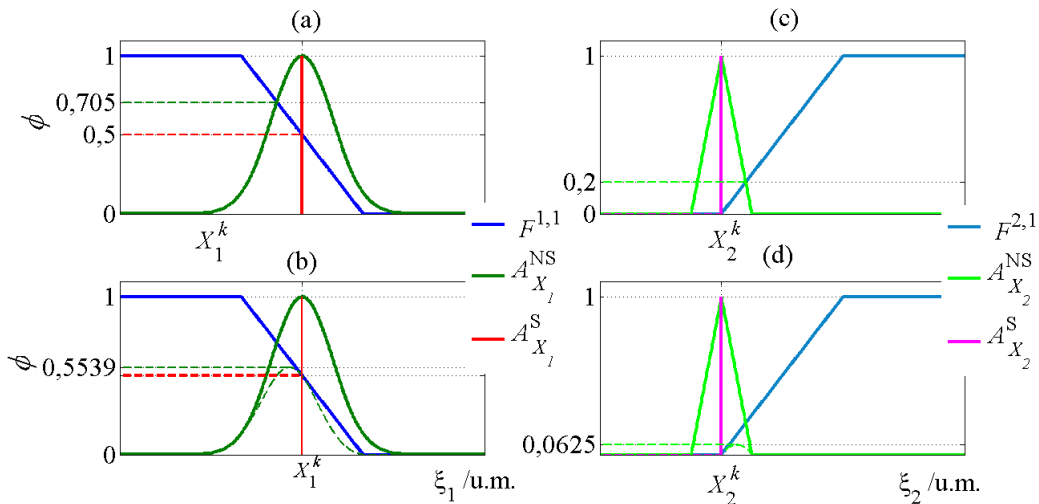
Os termos entre colchetes, por sua vez, avaliam a pertinência do conjunto de entrada ( $A_{X_{i,k}}$ ) ao conjunto que representa um termo da variável linguística de entrada ( $F^{i,l}$ ) na regra  $R^l$ . A determinação deste valor de pertinência é parte da

operação de fuzzificação apresentada na seção anterior e depende, conforme já visto, do fuzzificador escolhido, ou seja, *singleton*, SFIS (*Singleton Fuzzy Inference System*), ou *non-singleton*, NSFIS (*Non-Singleton Fuzzy Inference System*). O Apêndice C descreve os detalhes dessa operação.

A Figura 2.4 ilustra a determinação do nível de ativação através dos antecedentes das regras apresentada pela Equação 2.17 com duas variáveis de entrada. Analisando primeiramente a fuzzificação *singleton* (Sobreíndice S) para ambas as variáveis  $X_1$  e  $X_2$ , o resultado da operação  $\sup_{\xi_i^k \in \xi_i} \phi_{A_{X_i,k}^S}(\xi_i^k)$  não muda independente da escolha dos operadores *t-conorma* e *t-norma* (máximo-mínimo na Figura 2.4 (a) e (c); máximo-produto na Figura 2.4 (b) e (d)).

Para o caso *non-singleton* (Sobreíndice NS) o valor encontrado pela fuzzificação desse tipo de conjunto produz resultados diferentes a depender da combinação *t-conorma* e *t-norma*. O valor encontrado para a fuzzificação de  $A_{X_i,k}^{NS}$  difere para ambas variáveis (máximo-mínimo na Figura 2.4 (a) e (c); máximo-produto na Figura 2.4 (b) e (d)).

Figura 2.4: Representação gráfica das operações de fuzzificação: (a) e (c) mostram os resultados da fuzzificação *non-singleton* (NS) e *singleton* (S) com diferentes conjuntos de entrada usando a *t-norma* mínimo e *t-conorma* máximo; (b) e (d) apresentam os resultados das fuzzificações usando uma diferente *t-norma*: produto.



Além da operação de fuzzificação, o nível de ativação de cada regra é também influenciado pelo operador t-norma escolhido para efetuar as interseções em todo o antecedente. A Tabela 2.1 mostra os resultados extraídos da Figura 2.4 de maneira



a simplificar a compreensão da recente discussão.

Tabela 2.1: Comparativo entre os resultados encontrados para o nível de ativação encontrado para diferentes *t-norma* e fuzzificação

<i>Firinglevel</i>	produto		mínimo	
	max-min	max-prod	max-min	max-prod
Singleton	0,00	0,00	0,00	0,00
Non-singleton	$1,40 \times 10^{-2}$	$3,50 \times 10^{-2}$	$2,00 \times 10^{-1}$	$6,25 \times 10^{-2}$

Calculado o nível de ativação de cada regra, o conjunto gerado para cada uma pode ser determinado de maneira simplificada por:

$$A_Y^l = \int_{\eta^k \in \eta} [\phi_{G^l}(\eta^k) \star \omega^l] / \eta^k \quad (2.22)$$

Os  $L$  conjuntos são então combinados através da união (Equação 2.23) para gerar o conjunto final que representa a variável de saída  $Y$ . Esse conjunto, por sua vez, é transformado novamente em número através de uma operação de defuzzificação<sup>2</sup>.

$$A_Y = \int_{\eta^k \in \eta} [\phi_{A_Y^1}(\eta^k) \oplus, \dots, \oplus \phi_{A_Y^L}(\eta^k)] / \eta^k \quad (2.23)$$

Na abordagem TSK (Equação 2.18), o consequente é constituído por funções e o resultado final do sistema de inferência *fuzzy* é simplesmente a média ponderada dos valores obtidos em cada consequente, tomando como pesos os respectivos níveis de ativação de cada regra.

$$\eta^k = \frac{\sum_{l=1}^L \omega^l \cdot \eta^{k,l}}{\sum_{l=1}^L \omega^l} \quad (2.24)$$

É importante destacar, que independente da combinação dos operadores, *t-norma* e *t-norma*, o simples fato de assumir a dúvida sobre o valor medido, ou seja, ao utilizar um conjunto *non-singleton* na fuzzificação implicará em um resultado diferente (Tabela 2.1 e Figura 2.4) em ambas as estruturas de regras, Mamdani ou TSK.

<sup>2</sup>Operação que transforma um conjunto *fuzzy*, resultante de uma inferência em um número. Existem diversos tipos de operações de defuzzificação que não serão discutidas por não fazer parte do escopo do trabalho

Para a estrutura Mamdani, note que a função de pertinência do conjunto resultante (Equação 2.23) depende das funções de pertinência dos conjuntos gerados em todas as regras (Equação 2.22), que por sua vez são dependentes do nível de ativação que é influenciado pela fuzzificação. Para a estrutura TSK, o valor estimado da grandeza de saída (Equação 2.24) é obtido pela ponderação dos valores obtidos em cada regra, sendo o fator de ponderação o nível de ativação das regras.

Considere uma agora uma regra TSK genérica com  $N$  entradas e uma saída:

$$R^l : \text{SE } \xi_1^k \text{ é } F^{1,l} \text{ E } \dots \text{ E } \xi_N^k \text{ é } F^{N,l} \text{ ENTÃO } \eta^{k,l} = \theta_0^l + \theta_1^l \cdot \xi_1^k + \dots + \theta_N^l \cdot \xi_N^k, \quad (2.25)$$

onde  $l = 1, 2, \dots, L$ .

A partir de uma amostra  $k$  de treinamento das grandezas de entradas e saídas é possível encontrar uma solução analítica para o problema de estimação dos parâmetros através dos Mínimos Quadrados (TAKAGI; SUGENO, 1985; MENDEL, 2000)

Fazendo a substituição do consequente da Equação 2.25 na Equação 2.24, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \eta^k &= \frac{\sum_{l=1}^L \omega^l \cdot (\theta_0^l + \theta_1^l \cdot \xi_1^k + \dots + \theta_N^l \cdot \xi_N^k)}{\sum_{l=1}^L \omega^l} \\ &= \frac{\omega^1 \cdot \theta_0^1 + \omega^1 \cdot \theta_1^1 \cdot \xi_1^k + \dots + \omega^1 \cdot \theta_N^1 \cdot \xi_N^k + \dots + \omega^L \cdot \theta_0^L + \omega^L \cdot \theta_1^L \cdot \xi_1^k + \dots + \omega^L \cdot \theta_N^L \cdot \xi_N^k}{\sum_{l=1}^L \omega^l}. \end{aligned}$$

Se incluído a unidade como uma variável de entrada  $\xi_0^k$ , ou seja,  $\xi_0^k \equiv 1$ , a equação anterior pode ser reescrita na forma:

$$\eta = \frac{\omega^1 \cdot \theta_0^1 \cdot \xi_0^k + \dots + \omega^1 \cdot \theta_N^1 \cdot \xi_N^k + \dots + \omega^L \cdot \theta_0^L \cdot \xi_0^k + \dots + \omega^L \cdot \theta_N^L \cdot \xi_N^k}{\sum_{l=1}^L \omega^l},$$

ou

$$\eta = \frac{\omega^1 \cdot \theta_0^1 \cdot \xi_0^k + \dots + \omega^L \cdot \theta_0^L \cdot \xi_0^k + \dots + \omega^1 \cdot \theta_N^1 \cdot \xi_N^k + \dots + \omega^L \cdot \theta_N^L \cdot \xi_N^k}{\sum_{l=1}^L \omega^l}.$$

Tomando  $g_{l,i}^k = \frac{\omega^l \cdot \xi_i^k}{\sum_{l=1}^L \omega^l}$  verifica-se que equação anterior caracteriza um modelo

linear nos parâmetros:

$$\begin{aligned}
\eta^k &= g_{1,0}^k \cdot \theta_0^1 + \cdots + g_{L,0}^k \cdot \theta_0^L + \cdots + g_{1,N}^k \cdot \theta_N^1 + \cdots + g_{L,N}^k \cdot \theta_N^L \\
\eta^k &= \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^L g_{l,i}^k \cdot \theta_i^l. \\
\eta^k &= (\mathbf{g}^k)^\top \cdot \boldsymbol{\theta},
\end{aligned} \tag{2.26}$$

onde,  $\mathbf{g}^k$  é o vetor  $[g_{1,0}^k, \dots, g_{L,0}^k, \dots, g_{1,N}^k, \dots, g_{L,N}^k]^\top$  e  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_0^1, \dots, \theta_0^L, \dots, \theta_N^1, \dots, \theta_N^L]^\top$  o vetor dos parâmetros do FIS TS, ambos de dimensão  $L \cdot (N + 1) \times 1$ .

Para  $M$  amostras, a equação vetorial é estendida na forma matricial para (TAKAGI; SUGENO, 1985) (Equação 2.26):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^k \\ \vdots \\ \eta^M \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\eta}_{M \times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} (\mathbf{g}^1)^\top \\ \vdots \\ (\mathbf{g}^k)^\top \\ \vdots \\ (\mathbf{g}^M)^\top \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_{M \times L \cdot (N+1)}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_0^1 \\ \vdots \\ \theta_i^l \\ \vdots \\ \theta_N^L \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}_{L \cdot (N+1) \times 1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \zeta^1 \\ \vdots \\ \zeta^k \\ \vdots \\ \zeta^M \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\zeta}_{M \times 1}} \tag{2.27}$$

onde  $\boldsymbol{\eta}$  é o vetor de dados medidos da grandeza de saída,  $\mathbf{G}$  é a matriz de coeficientes que contem os níveis de ativação e os dados experimentais das grandezas de entradas,  $\boldsymbol{\zeta}$  é o vetor contendo o erro da aproximação dos dados experimentais pelo modelo *fuzzy*.

Considerando o problema de MQ (Mínimo Quadrado) é possível obter uma solução analítica para a estimação dos parâmetros da Equação 2.27 (TAKAGI; SUGENO, 1985; MENDEL, 2000):

$$\boldsymbol{\theta}_{\text{MQ}} = [\mathbf{G}^\top \cdot \mathbf{G}]^{-1} \cdot \mathbf{G}^\top \cdot \boldsymbol{\eta} \tag{2.28}$$

## 2.3 Cluster

Dentro da teoria dos FLS as regras são o “coração” do sistema e por isso técnicas para a construção das mesmas a partir de um conjunto de dados são usadas para

obter um melhor conjunto de regras que represente o sistema, com destaque para o algoritmo desenvolvido por Dunn (1973) denominado de *Fuzzy C-means*.

Wang e Mendel (1992) mostra geração de regras através do aprendizado por conhecimento do especialista; Chiu (1994) apresenta uma nova alternativa para a construção do número de regras ótimo. Bezdek et al. (1999), Hoppner et al. (1999) revisam variados métodos para a construção das regras. Andrade (2012) mostra a utilização do algoritmo FCM para a construção de um sistema de lógica *fuzzy* aplicado à detecção e diagnóstico de falhas.

Para construir uma base de regras de um FIS é necessário definir, entre outros, quais conjuntos estarão presentes nos antecedentes das regras e o número de regras que irão compor o FIS (ANDRADE, 2012). A definição das regras pode ser realizada com base no conhecimento do especialista ou através de técnicas de agrupamento aplicadas sobre alguma amostra de dados disponível (BEZDEK et al., 1999). Técnicas de agrupamentos são aplicadas em trabalhos de reconhecimento de padrões (protótipos) e têm o objetivo de particionar um conjunto de dados em grupos ou subconjuntos, classes ou grupos, com base nas seguintes premissas (HOPPNER et al., 1999):

**Homogeneidade:** Dados ou objetos pertencentes ao mesmo grupo devem ser similares;

**Heterogeneidade:** Dados ou objetos pertencentes a diferentes grupos devem ser diferentes;

A similaridade deve ser quantificada através de alguma métrica adequada ao tipo de objeto e ao tipo de algoritmo de agrupamento empregado. Dentre os algoritmos ou modelos de agrupamento, existem os modelos de protótipos pontuais (objetos representados por vetores de atributos) e não pontuais (séries temporais multivariáveis, objetos elípticos, esféricos, etc...) (BEZDEK et al., 1999). No primeiro caso, destaca-se o algoritmo FCM (*Fuzzy C-Means*), um dos mais usados e estudados (CHIU, 1994; ANDRADE, 2012; HOPPNER et al., 1999).

Tendo-se  $M$  objetos a serem agrupados em  $N_c$  de grupos, o algoritmo FCM faz parte dos chamados modelos c-means de agrupamento e é baseado no seguinte

problema de otimização:

$$\min J = \sum_{k=1}^M \sum_{c=1}^{N_c} (\phi_{k,c})^{m_f} \cdot \|\Xi_k - \kappa_c\|^2$$

Sujeito à:

$$0 \leq \phi_{k,c} \leq 1 \quad (2.29)$$

$$\sum_{k=1}^M \phi_{k,c} > 0, \quad \forall c$$

$$\sum_{c=1}^{N_c} \phi_{k,c} = 1, \quad \forall k$$

onde,  $M$  é o tamanho do conjunto de dados,  $\Xi_k = (\xi_1^k, \dots, \xi_N^k)$  é o  $k$ -ésimo objeto (com  $N$  atributos),  $\phi_{k,j}$  grau de pertinência do  $k$ -ésimo objeto a  $c$ -ésima classe e  $\kappa_c = (\xi_1^c, \dots, \xi_N^c)$  é o  $c$ -ésimo centro entres  $N_C$  grupos (protótipo ou padrões) e  $m_f$  é o grau de fuzzificação dos grupos.

Na Equação 2.29, a segunda restrição estabelece que não pode haver um grupo vazio, enquanto que a terceira indica que a soma das pertinências de um objeto, a todos os grupos, deve ser igual à unidade. No entanto o FCM é muito sensível aos parâmetros, número de *cluster* e ao expoente de fuzzificação. Para atenuar esses problemas alguns autores definem que a escolha do  $m_f$  deve ocorrer dentro da faixa  $[1,1; 5]$  (BEZDEK et al., 1999). Quando  $m_f = 1$  os grupos encontrados pelo o algoritmo FCM possuirá limites precisos (*hard clusters*) enquanto que se  $m_f \rightarrow \infty$  os graus de pertinência  $\phi_{i,k}$  tendem ao valor de  $1/N_c$ , gerando grupos muito dispersos.

A aplicação das condições necessárias de primeira ordem ao problema de otimização descrito (Equação 2.29) leva às seguintes equações, 2.30 e 2.31, para determinação iterativa das variáveis de decisão do problema, quais sejam, o grau de pertinência de cada objeto a cada um dos grupos reconhecidos ( $\phi_{k,j}$ ) e os protótipos (ou padrões) reconhecidos ( $\kappa_c = (\xi_1^c, \dots, \xi_N^c)$ ).

$$\phi_{k,c} = \sum_{j=1}^{N_c} \left( \frac{\|\Xi_k - \kappa_c\|}{\|\Xi_k - \kappa_j\|} \right)^{\frac{-2}{m_f-1}} \quad (2.30)$$

$$\kappa_j = \frac{\sum_{k=1}^M (\phi_{k,j})^{m_f} \cdot \Xi_j}{\sum_{k=1}^M (\phi_{k,j})^{m_f}} \quad (2.31)$$

O algoritmo compreende uma resolução iterativa usando as equações 2.30 e 2.31 a partir de uma estimativa inicial para os centros ou padrões.

Por se tratar de um problema de otimização a depender da escolha do número de centros, o resultado pode representar um mínimo local, ou seja, os grupos gerados podem não representar a verdadeira distribuição dos dados.

Como solução para este problema, uma validação dos grupos pode ser realizada usando algoritmos que avaliam o melhor número de protótipos para um determinado conjunto de dados (CHIU, 1994).

### 2.3.1 Agrupamento subtrativo

A proposta de Chiu (1994), aqui denominado de “Agrupamento Subtrativo”(SC (*Subtractive Clustering*)), é uma modificação do *Mountain Method* aplicado para clusterização (YAGER; FILEV, 1994). Consiste em dividir a nuvem de pontos em ”grades”e atribuir potenciais aos pontos das mesmas. O objeto que possuir o maior potencial é determinado como centro da classe.

Assumindo um conjunto de  $M$  objetos  $\{\Xi_1, \dots, \Xi_M\}^\top$  em um espaço  $N$ -dimensional normalizado em cada dimensão, o potencial de objeto  $\Xi_k$  é definido por:

$$\Phi_k = \sum_{j=1}^M \exp \left[ -\frac{4}{r_\alpha^2} \cdot \|\Xi_k - \Xi_j\|^2 \right]. \quad (2.32)$$

A medida de potencial ( $\Phi_k$ ) do objeto  $\Xi_k$  é dada em função da sua distância em relação aos outros objetos ponderada por um parâmetro positivo definido como raio de vizinhança ( $r_\alpha$ ). Desta forma, quanto mais objetos houver ao redor do possível centro de grupo,  $\Xi_k$ , maior será seu potencial.

Uma vez obtido o potencial para os  $M$  objetos, o objeto com maior potencial é selecionado como o primeiro centro  $\kappa_1$  de potencial  $\Phi_1$ . Então os potenciais dos outros objetos são atualizados, usando o primeiro potencial como referência, através da Equação 2.33.

$$\Phi_k \leftarrow \Phi_k - \Phi_1 \cdot \exp \left[ -\frac{4}{r_\beta^2} \cdot \|\Xi_k - \kappa_1\|^2 \right], \quad (2.33)$$

onde,  $k = 1, 2, \dots, M$  e  $r_\beta$  também é um raio de vizinhança, um raio de vizinhança, mas com a finalidade de reduzir os novos potenciais. Para evitar a proximidade dos centros  $r_\beta$  é fixado em um valor padrão  $r_\beta = 1,5 \cdot r_\alpha$  (CHIU, 1994).

A Equação 2.33 mostra que os possíveis centros de potencias próximos ao primeiro terão seus potenciais reduzidos e, portanto, uma menor chance de serem selecionados.

Após a atualização dos potenciais, o objeto com maior potencial será selecionado como um segundo centro. Essas etapas são repetidas sucessivamente, tomando como referência sempre o último centro selecionado. Genericamente:

$$\Phi_k \leftarrow \Phi_k - \Phi_i \cdot \exp \left[ -\frac{4}{r_\beta^2} \cdot \|\Xi_k - \kappa_i\|^2 \right]. \quad (2.34)$$

No entanto esse procedimento é feito seguindo alguns critérios usados para definir se o valor  $\kappa_i$ , apontado como um centro é, de fato, um centro. Cada valor de maior potencial escolhido é submetido a esses critérios, dessa forma o método consegue determinar o melhor numero de grupos para o conjunto de dados.

Após a determinação dos centros eles são submetidos a um algoritmo de validação que seguem dois critérios, matematicamente representados pelas constantes  $\bar{\gamma}$  (“raio de aceite”) e  $\underline{\gamma}$  (“raio de rejeição”). Essas constantes fixam o potencial do centro escolhido como uma fração do primeiro potencial (sendo o valor padrão da primeira igual a 0,5 e da segunda 0,15). Desta forma, o método consegue determinar o melhor número de grupos para o conjunto de dados (CHIU, 1994).

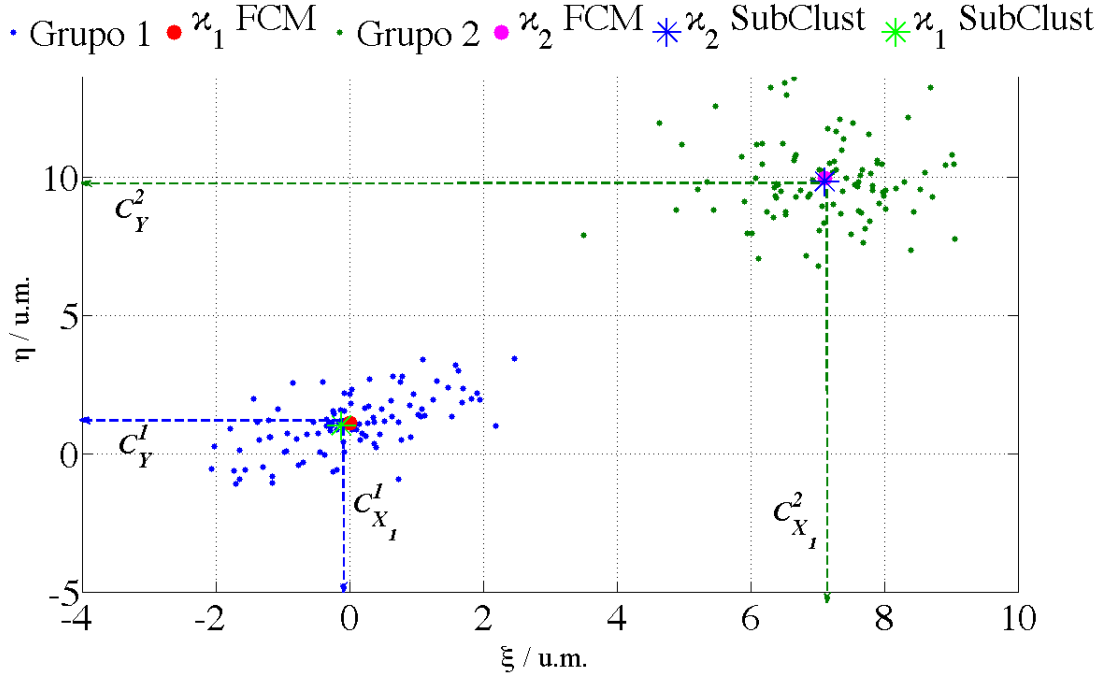
### 2.3.2 Definição das regras

Como mencionado anteriormente, as técnicas de agrupamentos são usada para determinar a base de regras de um sistema de inferência *fuzzy*.

Cada centro (protótipo) ou grupo será reconhecido a partir de dados das variáveis do modelo (entradas e saída) que comporão os objetos a serem agrupados. Neste sentido, cada grupo representará uma regra do FIS e a cada um será associada uma função de pertinência de forma a obter os conjuntos *fuzzy* que compõe os antecedentes.

A Figura 2.5 ilustra resultados de agrupamento com dados de uma variável de entrada e uma variável de saída juntamente com os centros obtidos pelo algoritmo

Figura 2.5: Ilustração de regras obtidas através de um conjunto de dados (Adaptado de Andrade (2012))



FCM e SC. Neste caso, o resultado sugere a seguinte base de regras:

$$\begin{aligned} R^1 &: \text{SE } X_1 \text{ é } C^1_{X_1} \text{ ENTÃO } Y \text{ é } C^1_Y \\ R^2 &: \text{SE } X_1 \text{ é } C^2_{X_1} \text{ ENTÃO } Y \text{ é } C^2_Y, \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde,  $C^c_{X_i}$  é o conjunto *fuzzy* que representa o  $c$ -ésimo *cluster* da  $i$ -ésima da grandeza de entrada  $X_i$  e  $C^c_Y$  o equivalente para a grandeza de saída  $Y$

Nesse caso é possível notar que os algoritmos FCM e de agrupamento subtrativo encontraram centros semelhantes. O exemplo ilustrado pela Figura 2.5 é um caso clássico de regras do tipo Mamdani. Contudo, as técnicas de agrupamento podem ser usadas para gerar as regras de um FIS do tipo TSK. Os parâmetros dos consequentes podem ser obtidos usando a Equação 2.27, para o caso linear, ou por uma otimização para casos não lineares.

Em ambos os casos, a função de pertinência gaussiana é comumente usada para a caracterização dos conjuntos  $C^c_{X_i}$ . No caso do FCM, uma gaussiana é ajustada através da mínima diferença entre a mesma e uma função de pertinência obtida para o problema de otimização Equação 2.30. Para o algoritmo SC a função gaussiana é



dada por:

$$\phi_{C_{\tilde{X}_i}^c}(\xi_i^k) = \exp \left[ 4 \cdot \frac{(\xi_i^k - \kappa_c(i))^2}{r_\alpha^2} \right] \quad (2.36)$$

---

# Capítulo 3

## Incerteza de medição

---

*“A incerteza dos acontecimentos é sempre mais difícil de suportar do que o próprio acontecimento ”*

Jean Massillon

Quando se deseja, monitorar, controlar e/ou investigar um fenômeno, a primeira ação, geralmente realizada, é conhecer as variáveis que fazem parte do mesmo, ou seja, para tomar decisões é necessário aplicar sobre este fenômeno um processo de medição ou de estimação. No entanto, sobre o resultado desse processo de medição há sempre uma dúvida, uma incerteza, em relação aos valores coletados, pois todo processo de medição está sujeito a erros sistemáticos e aleatórios (ALBERTAZZI; SOUSA, 2008).

O que se obtém de um sistema de medição não é apenas a indicação, ou um resultado base ( $RB$ ), mas sim um resultado que o contenha, ou possa conter, o valor verdadeiro ( $Vv$ ) do mensurando. A esse resultado dar-se o nome de Resultado de Medição ( $RM$ ), representado (Equação 3.1) em forma de uma faixa em torno do resultado base (ALBERTAZZI; SOUSA, 2008).

$$RM = [RM_{\min} \quad RM_{\max}], \quad \text{onde } RB \in RM \quad (3.1)$$

ou,  $RM = RB \pm IM$ , para o caso de um intervalo simétrico centrado em  $RB$ , sendo  $IM$  a incerteza de medição.

A incerteza de medição representa a dúvida sobre o resultado da medição e é consequência de uma série de componentes de erros, que combinados, impactam no resultado final de medição (ALBERTAZZI; SOUSA, 2008; BIPM et al., 2008a).

A afirmativa anterior denota o conceito geral da incerteza, porém seu conceito formal, documentado no VIM (Vocabulário Internacional de Metrologia) (BIPM et

al., 2012), é dito como: “O parâmetro não negativo que caracteriza a dispersão dos valores atribuídos a um mensurando com base nas informações utilizadas” (BIPM et al., 2012)

Essa definição visa o mensurando e sua incerteza avaliada, podendo ser considerada como um conceito operacional (BIPM et al., 2008a) mantendo compatibilidade com outras formulações conceituais que são focadas em grandezas desconhecidas como *erro de medição* e *valor verdadeiro*.

Então, com a finalidade de unificar a expressão e avaliação da incerteza de um mensurando bem definido por um único valor, foram desenvolvidos os guias, GUM (*Guide to the expression of Uncertainty in Measurement*) (BIPM et al., 2008a) e o GUM-S1 (*Guide to the expression of Uncertainty in Measurement - Supplement 1*) (BIPM et al., 2008b) diferenciados pelo método usado na propagação da incerteza, sendo que o primeiro aplica a propagação das variâncias e o segundo a propagação da função de densidade de probabilidade.

No GUM um mensurando é caracterizado pelos dois primeiros momentos estatísticos (média e desvio padrão), além da unidade. Complementarmente, expressar o resultado por um intervalo em torno da estimativa do mensurando, também pode ser usado quando conveniente.

A avaliação é dividida em dois tipos, Tipo A e Tipo B. A avaliação do Tipo A, usualmente representada pelo desvio padrão ou variância, é calculada por métodos estatísticos aplicados a uma série de observações. A avaliação do Tipo B é toda aquela que encontrada por análise não estatística (BIPM et al., 2008a; BIPM et al., 2012).

Existem muitos trabalhos na área de avaliação de incerteza, usando GUM e GUM-S1: Goncalves, Teixeira e Kalid (2009) avalia a influencia do número de amostras da simulação Monte Carlo aplicado para a propagação das funções de densidade de probabilidade (GUM-S1); Almeida et al. (2011) avalia a sensibilidade da incerteza do mensurando referente à determinação dos graus de liberdades atribuídos a avaliação da incerteza do Tipo B; Mendes (2011), Mendes et al. (2011) e Mendes, Kalid e Oliveira-Esquerre (2011) aplicam as metodologias descritas em ambos os guias para avaliar a incerteza de indicadores ambientais, validando a utilização do

GUM, nesta aplicação, através do GUM-S1; Fontes et al. (2011a) faz a avaliação da incerteza sobre um procedimento de verificação volumétrica de vidraria utilizando os guias além da validação de um software para avaliação da incerteza, desenvolvido por Goncalves, Requiaio e Kalid (2011) por meio de uma planilha eletrônica; Souza et al. (2011) mostra uma metodologia para a avaliação da incerteza de dados reconciliados utilizando um conceito novo de Qualidade da Informação (MARTINS et al., 2010).

Porém as metodologias do GUM e GUM-S1 são aplicáveis à sistemas de múltiplas entradas e uma única saída, além do mais, o GUM é melhor aplicado para funções fracamente não lineares, sendo o GUM-S1 indicado para os casos de forte não linearidade. Alguns trabalhos podem ser citados com complementos aos GUM e GUM-S1. Liu (2005) faz a expansão até quarta ordem para encontrar uma equação de altas ordens para o cálculo do grau de liberdade efetivo. Martins et al. (2011) apresenta a extensão para casos multivariados tanto para a propagação das variâncias como na propagação da função de densidade de probabilidade e suas diferenças aplicando ambas em um sistema de equações “fortemente” não linear; Requiaio, Kalid e Soares (2011) apresenta um software desenvolvido para a avaliação da incerteza na simulação de processos industriais, desenvolvendo uma extensão dos guias para casos de múltiplas entradas e múltiplas saídas; Os trabalhos Martins (2010), Martins, Requiaio e Kalid (2011a) e Martins, Requiaio e Kalid (2011b) demonstram uma extensão do GUM ampliando a série de Taylor para a segunda e terceira ordem obtendo eficiência semelhante ao GUM-S1, mas com menor esforço computacional.

Recentemente, o mesmo grupo responsável pela criação do GUM e GUM-S1 publicaram uma extensão, denominada GUM-S2 (Guide to the expression of Uncertainty in Measurement - Supplement 2) (BIPM et al., 2011), onde está descrita as regras para a avaliação da incerteza em sistemas multivariáveis; Requiaio (2012) estendeu o método do GUM-S2 para avaliação da incerteza em simulações de processo em caso MIMO que calcula e considera os graus de liberdade efetivos das variáveis.

Além dos métodos consagrados, internacionalmente, pela comunidade metrológica para a avaliação de incerteza, algumas alternativas ainda são estudadas pela comunidade com objetivo preencher lacunas das avaliações não estatísticas, como,

por exemplo, a inferência bayesiana: Lira e Kyriazis (1999) e Lira e Wöger (2006) compara a metodologia convencional com a inferência bayesiana, defendendo a flexibilidade da última para a caracterização da incerteza por conseguir tratar os efeitos estatísticos e não estatístico usando a mesma teoria; Lira (2006) mostra a utilização da estatística bayesiana para a comparação de conjuntos de dados; Lira e Grientschnig (2010) faz uma generalização do GUM-S1 cobrindo as funções de medição implícitas e multivariadas, apresenta os princípios da aplicação da inferência bayesiana à incerteza de medição, o princípio do cálculo da probabilidade e as regras para a construção da distribuição a priori, além de demonstrar a expressão analítica para a obtenção da distribuição de probabilidade conjunta dos mensurandos.

Há autores que defendem que a teoria da probabilidade é uma ferramenta eficaz na representação dos efeitos aleatórios e não para os sistemáticos sugerindo os conjuntos *fuzzy* (ZADEH, 1965) para a representação desses efeitos: Dubois, Prade e Sandri (1993) define os princípios básicos, as limitações e a demonstração da transformação probabilidade/possibilidade, denominada de "transformação ótima"; Mauris (2000) descreve um método para a construção de um conjunto *fuzzy* a partir de um conjunto de dados; Mauris, Lasserre e Foulloy (2000) e Mauris, Lasserre e Foulloy (2001) apresentam uma transformação das funções de densidade de probabilidade mais comuns para um conjunto *fuzzy* parametrizado e a aplicação do mesmo, além de equações algébricas que definem a propagação; Dubois et al. (2004) teoriza, de forma mais completa, toda a transformação da função de densidade de probabilidade para a distribuição de possibilidade, e vice versa, e seu uso como conjunto *fuzzy* (ZADEH, 1999); Ferrero e Salicone (2004) define um novo tipo de variável *fuzzy* contendo a representação e tratamento diferentes para os efeitos aleatórios (transformados pela teoria de Dubois2004 e propagados via GUM) e sistemáticos (transformados e propagados pela teoria dos conjuntos *fuzzy*); Mencattini e Salicone (2008) compara alguns métodos *fuzzy* com o GUM-S1 obtendo resultados muito parecidos com um tempo de processamento menor; Ferrero e Salicone (2009) apresenta um complemento para Ferrero e Salicone (2004) utilizando o GUM-S1 em substituição ao GUM no que diz respeito ao tratamento do efeito aleatório.

No tocante a aplicações em engenharia, devido a dinâmica dos processos, métodos para a avaliação da incerteza dinâmica é um tema com grande potencial de

pesquisa, onde ganham destaques o trabalho de Kalman (1960), que propôs a identificação recursiva dos estados considerando as matrizes de covariâncias, que também são atualizadas ao longo do tempo, e Allan (1987) que apresenta uma abordagem capaz de avaliar a variância de um sinal dinâmico usando janelas de tempo.

A pesquisa no âmbito da incerteza dinâmica tem crescido nos últimos anos com destaques para: Hiskens, Pai e Nguyen (2000) faz uso da trajetória de sensibilidade como um caminho para a construção de intervalos de abrangência do mesurando dinâmico, considerando não só as incertezas das grandezas de entradas como nos parâmetros da função de medição; Elster, Link e Bruns (2007), Elster e Link (2008), Hessling (2008a) e Hessling (2008b) apresentam metodologias para avaliar o comportamento das medições dinâmicas utilizando a identificação de filtros digitais; Martins e Kalid (2010) propõem a utilização da lei de propagação da função de densidade de probabilidade, descritas pelo GUM-S1, para sistemas dinâmicos atribuindo incertezas às grandezas de entrada e aos parâmetros de um modelo dinâmico; Kyriazis, Martins e Kalid (2012) desenvolvem o tratamento matemático das equações do filtro de Kalman (1960) pela inferência bayesiana.

### **3.1 Propagação da incerteza em regime estacionário**

As metodologias de propagação da incerteza de medição estão fundamentadas, quando se trata de propagação em regime estacionário, no GUM - (*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*) (BIPM et al., 2008a), que se baseia na LPU - (*Law of Propagation of Uncertainty*) e seu primeiro suplemento GUM-S1 (BIPM et al., 2008b), que apresenta uma abordagem mais apropriada do tratamento da incerteza de medição em sistemas não-lineares, a LPP - (*Law of Propagation of Probability density function*).

### 3.1.1 Método LPU

Para a aplicação da LPU é preciso estabelecer ou conhecer uma relação funcional entre o mesurando ( $Y$ ) e as grandezas de entradas  $X_1, \dots, X_N$ . Essa relação é conhecida com função de medição<sup>1</sup>Equação 3.2.

$$Y = f(X_1, \dots, X_N) \quad (3.2)$$

As grandezas de entradas,  $X_i (i = 1, \dots, N)$ , também podem consideradas como mensurandos, quando são obtidas através de uma medição direta ( $Q_i$ ). Na medida direta, o mensurando também depende de outras grandezas como resolução e fatores de correção para efeitos sistemáticos, além do valor medido bruto, ou valor não corrigidos; essa relação também compõe uma função de medição (Equação 3.3).

$$X_i = Q_i + \sum_{j=1}^{N_D} \alpha_{i,j} \cdot D_{i,j} \quad (3.3)$$

onde  $\alpha_{i,j}$  é o coeficiente de sensibilidade e  $D_{i,j}$  representa as parcelas de correções sistemáticas e aleatórias características do sistema de medição..

A avaliação da incerteza pode ser dividida em duas categorias: a avaliação do Tipo A da incerteza é aquela obtido através de um procedimento estatístico aplicado sobre as observações  $X_{i,k}$  da variável  $X_i$ . Quando não é possível a construção de uma distribuição de frequência através de observações, mas o conhecimento sobre a variável pode ser transformado em uma PDF (*Probability Density Function*), esse tipo de avaliação é denominada de Tipo B.

#### 3.1.1.1 Avaliação do Tipo A

Essa secção segue a abordagem apresentada no GUM (BIPM et al., 2008a)

Uma grandeza qualquer  $X_i$  pode ser representada pelo seu valor esperado  $\mu_{X_i}$

---

<sup>1</sup>Como a LPU é baseada na existência de uma função de medição, é fundamental que a mesma seja estabelecida adequadamente, pois o não comprimento desta etapa acarretará em resultados que não representam nem o mesurando e nem a sua incerteza.

(Equação 3.4) e pela sua variância  $\sigma_{X_i}^2$  (Equação 3.5).

$$\mu_{X_i} = E[X_i] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \xi_i \cdot g_{X_i}(\xi_i) d\xi_i \quad (3.4)$$

$$\sigma_{X_i}^2 = \text{Var}[X_i] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} (\xi_i - \mu_{X_i})^2 \cdot g_{X_i}(\xi_i) d\xi_i \quad (3.5)$$

No entanto como não se conhece todos os valores possíveis ( $\xi_i$ ) que compõe uma função de densidade de probabilidade  $g_{X_i}$ , são usados estimadores que melhor representam o parâmetro de localização (valor esperado) e o parâmetro de escala (variância). Estes parâmetros são avaliados através da PDF empírica, construída a partir dos dados amostrados.

Esses estimadores são a média aritmética ( $x_i$ , Equação 3.6) das  $n$  observações, e a variância amostral  $s^2(X_{i,k})$  (Equação 3.7).

$$\mu_{X_i} \approx x_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n X_{i,k} \quad (3.6)$$

$$\sigma_{X_i} \approx s^2(X_{i,k}) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^n (X_{i,k} - x_i)^2 \quad (3.7)$$

Por não usar o valor mais esperado e sim um estimador que melhor representa-o, é necessário determinar o quão bem  $x_i$  estima a esperança  $\mu_{X_i}$ . Essa dispersão é avaliada pela variância experimental da média  $s^2(x_i)$  (Equação 3.8)

$$s^2(x_i) = \frac{s^2(X_{i,k})}{n} \quad (3.8)$$

Sendo assim, a avaliação do Tipo A da incerteza da estimativa, de uma grandeza conhecida ( $u_A(x_i)$ ) através de observações independentes, é determinada pela raiz quadrada positiva da variância experimental da média, ou seja, o desvio padrão experimental da média (Equação 3.9).

$$u_A(x_i) = \sqrt{\frac{s^2(X_{i,k})}{n}} = \frac{s(X_{i,k})}{\sqrt{n}} \quad (3.9)$$

O uso das Equações 3.6, 3.7, 3.8 e 3.9 só é recomendado para medições independentes e uma amostra suficientemente grande,  $n \geq 23^2$ . Para um intervalo de

---

<sup>2</sup>Em Martins (2010) foi encontrado que  $n = 23$  determina o limiar entre a incerteza padrão avaliada pela inferência bayesiana e frequentista a partir da regra de aproximação de 5% estabelecida pela NBR5891



observações  $4 \leq n \leq 22$  que seguem uma distribuição t-Student pode-se aplicar um fator de correção obtido da inferência bayesiana (LIRA; KYRIAZIS, 1999). No entanto, o processo de medição de algumas variáveis pode implicar em dificuldades inerentes ao próprio processo ou ao sistema de medição tornando difícil a aquisição de uma razoável quantidade de dados ( $n \geq 4$ ) (MARTINS, 2010). Desta forma, a incerteza da estimativa (Tipo A) pode ser genericamente obtida por:

$$u_A(x_i) = \begin{cases} \frac{X_{i,\max} - X_{i,\min}}{2\sqrt{3}} & n \leq 3 \\ \sqrt{\frac{n-1}{n-3}} \cdot \frac{s(X_{i,k})}{\sqrt{n}} & 4 \leq n \leq 22 \\ \frac{s(X_{i,k})}{\sqrt{n}} & n \geq 23 \end{cases} \quad (3.10)$$

### 3.1.1.2 Avaliação do Tipo B

As incertezas podem ser avaliadas através de informações sobre a variável ou sobre o sistema de medição quando não há a possibilidade de um tratamento estatístico para a obtenção das mesmas. A avaliação obtida por esta abordagem recebe a denominação de avaliação do Tipo B da incerteza simbolizada por  $u_B(x_i)$ .

As fontes de incerteza para avaliação do Tipo B pode ser devidas a (BIPM et al., 2008a):

- Experiência sobre o comportamento da variável;
- Especificações do fabricante;
- Dados ou incertezas encontradas em certificados e manuais do instrumento de medição;

A avaliação do Tipo B da incerteza utiliza PDFs *a priori*<sup>3</sup>. Recomenda-se o uso do Princípio da entropia máxima PME (*Principle of Maximum Entropy*), que utiliza as informações conhecidas sobre as grandezas para determinar as PDFs, usadas na avaliação do Tipo B, de modo não arbitrário (BIPM et al., 2008b). As PDF's mais comuns são (BIPM et al., 2008b):

---

<sup>3</sup>A PDF determinada a partir de um estado de conhecimento antes de serem usadas em um procedimento recebe o nome de PDF *a priori*.

**Uniforme:** Quando são conhecidos apenas os limites de uma variável, a distribuição que melhor se ajusta a informação disponível, segundo o Princípio da entropia máxima, PME (BIPM et al., 2008b), é a PDF uniforme Equação 3.11:

$$g_{X_i}(\xi_i) = \begin{cases} \frac{1}{(X_{i,\max} - X_{i,\min})}, & X_{i,\min} \leq \xi_i \leq X_{i,\max} \\ 0, & \text{outro caso} \end{cases} \quad (3.11)$$

$$x_i = \frac{X_{i,\max} + X_{i,\min}}{2} \quad (3.12)$$

$$u_B(x_i) = \frac{X_{i,\max} - X_{i,\min}}{\sqrt{12}} \quad (3.13)$$

A PDF uniforme é muito usada para a representação da resolução do sistema de medição.

**Triangular:** Se além dos limites, o valor mais provável  $x_i^m$  também for conhecido, a distribuição que se adequa, segundo o PME, a este conjunto de informação é a PDF triangular (Equação 3.14).

$$g_{X_i}(\xi_i) = \begin{cases} \frac{2 \cdot (X_i - X_{i,\min})}{(X_{i,\max} - X_{i,\min}) \cdot (x_i^m - X_{i,\min})}, & X_{i,\min} \leq \xi_i \leq x_i^m \\ \frac{2 \cdot (X_{i,\max} - X_i)}{(X_{i,\max} - X_{i,\min}) \cdot (x_{i,\max} - x_i^m)}, & x_i^m \leq \xi_i \leq X_{i,\max} \\ 0, & \text{outro caso} \end{cases} \quad (3.14)$$

$$x_i = \frac{X_{i,\min} + x_i^m + X_{i,\max}}{3} \quad (3.15)$$

$$u_B(x_i) = \sqrt{\frac{X_{i,\min}^2 + (x_i^m)^2 + X_{i,\max}^2 - (X_{i,\min} \cdot x_i^m + x_i^m \cdot X_{i,\max} + X_{i,\min} \cdot X_{i,\max})}{18}} \quad (3.16)$$

**Gaussiana:** Quando é conhecida a média e o desvio padrão de uma variável baseada em dados, de acordo com o PME, a PDF *a priori* aderente à essas informações disponíveis é a distribuição gaussiana.

$$g_{X_i}(\xi_i) = \frac{1}{\sigma_{X_i} \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left[ -\left( \frac{\xi_{i,k} - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \right)^2 \right] \quad (3.17)$$

### 3.1.1.3 Incerteza padrão combinada

O método LPU tem como objetivo avaliar a incerteza das grandezas obtidas indiretamente, ou seja, variáveis que são inferidas por uma *função de medição* (Equação 3.2).

Partindo da linearização<sup>4</sup> da função de medição Equação 3.2, através da série de Taylor truncada no termo de primeira ordem, o método LPU avalia a estimativa e a incerteza do mensurando ( $Y$ ).

$$Y \approx f(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_N}) + \sum_{i=1}^N (X_i - \mu_{X_i}) \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{x_1, \dots, x_N}. \quad (3.18)$$

O valor esperado do mensurando  $\mu_Y$  (Equação 3.19) é obtido aplicando o operador esperança em ambos os lados da Equação 3.18.

$$\mu_Y \approx f(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_N}). \quad (3.19)$$

No entanto, como os valores esperados das grandezas de entradas não são conhecidos e são estimados pela Equação 3.6, o valor esperado do mensurando é estimado pela Equação 3.20.

$$y = f(x_1, \dots, x_n) \quad (3.20)$$

O resultado encontrado pela Equação 3.20 é uma aproximação da esperança do mensurando uma vez que a função de medição é não linear, caso contrário o valor encontrado é exato. Uma alternativa recomendada pelo GUM (BIPM et al., 2008a)[9], para funções não lineares, é a média aritmética ( $y$ ) dos  $n$  valores obtidos ( $Y_k$ ), substituindo as  $n$  amostras,  $X_{1,k}, \dots, X_{N,k}$  na função de medição (Equação 3.2)

$$y = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n Y_k = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f(X_{1,k}, \dots, X_{N,k}) \quad (3.21)$$

Aplicando o operador variância (Equação 3.5), centrado no valor esperado, também em ambos os lados da Equação 3.18, encontra-se a variância combinada ( $u_c^2(y)$ ) onde a raiz quadrada positiva é igual à incerteza padrão combinada de  $y$  ( $u_c(y) = \sqrt{u_c^2(y)}$ ).

$$\begin{aligned} u_c^2(y) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot u(x_i, x_j) \\ &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial X_i} \right)^2 \cdot u_c^2(x_i) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot u(x_i, x_j), \end{aligned} \quad (3.22)$$

---

<sup>4</sup>A linearização da função de medição (Equação 3.2) é feita aplicando a serie de Taylor no ponto determinado pelos valores esperados das grandezas de entrada,  $\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_N}$

onde  $u_c^2(x_i)$  é a variância da estimativa  $x_i$  da grandeza de entrada e  $u(x_i, x_j)$  é covariância atribuída às estimativas  $x_i, x_j$  (Equação 3.23) e  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{x_1, \dots, x_N}$ .

$$u(x_i, x_j) = \frac{1}{n \cdot (n - 1)} \cdot \sum_{k=1}^n (X_{i,k} - x_i) \cdot (X_{j,k} - x_j). \quad (3.23)$$

A covariância (Equação 3.23) representa a dependência mútua entre as grandezas de entrada. No entanto o parâmetro mais fácil de interpretar a dependência entre variáveis é o coeficiente de correlação  $r(x_i, x_j)$  (Equação 3.24).

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u_c(x_i) \cdot u_c(x_j)}. \quad (3.24)$$

O coeficiente de correlação é definido no intervalo  $[-1, 1]$ . No caso em que as variáveis são não correlacionadas o coeficiente assume o valor zero, nesses casos a Equação 3.22 pode ser simplificada para:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N c_i^2 \cdot u_c^2(x_i)}, \quad (3.25)$$

onde,  $c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ .

Como já visto, até mesmo as grandezas de entradas são expressas em funções de outras grandezas, que geralmente são as observações, a resolução e correções sistemáticas (Equação 3.3). Conseqüentemente a sua estimativa e sua incerteza são avaliadas a partir da LPU, assumindo  $X_i$  como mensurando.

Então a partir da Equação 3.20, a estimativa para cada grandeza de entrada é definida por:

$$x_i = q_i + \sum_{j=1}^{N_D} \alpha_{i,j} \cdot d_{i,j} \quad (3.26)$$

onde  $q_i$  representa a média das medições e  $d_{i,j}$  a estimativa do  $j$ -ésimo fator do sistema.

Partindo da hipótese de que o experimento foi conduzido de maneira adequada, as medições  $q_i$  e os fatores  $d_{i,j}$  podem ser consideradas como grandezas independentes o que permite avaliar a incerteza da estimativa de  $x_i$  através da Equação 3.25,

resultando na expressão:

$$u_c(x_i) = \sqrt{u^2(q_i) + \sum_j \alpha_{i,j}^2 \cdot u^2(d_{i,j})} \quad (3.27)$$

onde  $u^2(q_i)$  representa a variância da média das medições e  $u^2(d_{i,j})$  a variância da estimativa do  $j$ -ésimo fator do sistema.

Geralmente as variâncias dos fatores são obtidas através de PDFs *a priori*, e são denominadas de avaliações do Tipo B da incerteza de medição; enquanto que a dispersão das observações é denominada de avaliação do Tipo A da incerteza. Sendo assim a Equação 3.27 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$u(x_i) = \sqrt{u_A^2 + \sum_{j=1}^{N_D} \alpha_{i,j}^2 \cdot u_B^2} \quad (3.28)$$

Após a avaliação da incerteza padrão combinada do mensurando,  $u(x_i)$ , a avaliação da contribuição das incertezas das entradas sobre o resultado final pode ser usada de forma a identificar qual variável tem maior impacto sobre a incerteza do mensurando. Para tanto, é avaliado o coeficiente de contribuição de Kessel, Kacker e Berglund (2006) (Equação 3.29).

$$h(y, x_i) = \frac{c_i \cdot u_c(x_i)}{u_c^2(y)} \cdot \left[ \sum_{j=1}^N c_j \cdot u_c(x_j) \cdot r(x_i, x_j) \right] \quad (3.29)$$

#### 3.1.1.4 Incerteza expandida

O GUM (BIPM et al., 2008a) recomenda a utilização da incerteza padrão combinada como parâmetro para expressar a variabilidade de um mensurando e possíveis comparações internacionais. No entanto, existem casos que é conveniente expressar um intervalo em torno de um resultado de medição. Para esses casos recomenda-se o uso da *incerteza expandida*,  $U$ .

$$U(y) = k(\nu_{\text{eff}}, PA) \cdot u_c(y) \quad (3.30)$$

onde  $\nu_{\text{eff}}$  é o grau de liberdade efetivo e  $PA$  é a probabilidade de abrangência.

O cálculo da incerteza expandida fornece um intervalo simétrico em torno da estimativa do mensurando,  $[y \pm U(y)]$ , denominado de intervalo de abrangência ( $I_{PA}$ ).

O tamanho deste intervalo é determinado pelo fator de abrangência,  $k$ , que por sua vez depende de outros dois parâmetros: probabilidade de abrangência ( $PA$ ) e graus de liberdade .

**Probabilidade de abrangência:** É a probabilidade de que o conjunto de valores verdadeiros de um mensurando esteja contido em um intervalo de abrangência especificado (BIPM et al., 2012).

O valor da probabilidade de abrangência é escolhido a partir da aplicação da incerteza expandida. A Tabela 3.1 reúne quatros situações e seus respectivos valores de  $PA$ , mais usados para a avaliação da incerteza expandida.

Tabela 3.1: Valores de probabilidade de abrangência mais comuns

Aplicação	$p / \%$
Georreferenciamento	68,27
Medições de campo	90,00
Medições de laboratório	95,45
Medições de laboratório sob condições muito bem controladas	99,73

Fonte: Martins (2010)

**Graus de liberdade efetivos:** Os graus de liberdade ( $\nu_i$ ) são inerentes a cada parcela de incerteza e representa a qualidade desse componente (BENTLEY, 2005).

Os graus de liberdade efetivos representam a qualidade combinada das parcelas que compõe a incerteza de medição sendo calculada pela fórmula de Welch-Satterthwaite (W-S) (BIPM et al., 2008a).

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{c_i^4 \cdot u_c^4(x_i)}{\nu_i}} \quad (3.31)$$

No entanto o uso da Equação 3.31 está atrelado à premissas que garantem a sua boa aplicação, quais sejam:

- Todos os componentes e suas incertezas devem ser independentes;

- Todas as grandezas devem ter comportamento gaussiano;

Para as grandezas de entrada é conhecido que sua incerteza é composta de parcelas proveniente das avaliações dos Tipo A e Tipo B da incerteza (Equação 3.28). Portanto, para a análise dos graus de liberdade efetivos de cada  $X_i$  é necessário determinar os graus de liberdade de cada componente.

No caso das componentes referentes às avaliações do Tipo A das incertezas, o seu respectivo grau de liberdade ( $\nu_{A,i}$ ) depende da quantidade de observações realizadas no experimento, sendo determinada por: :

$$\nu_{A,i} = n - 1 \quad (3.32)$$

Para as parcelas referentes às avaliações do Tipo B, que são obtidas das PDFs *a priori*, o GUM recomenda que os graus de liberdades ( $\nu_{B,i}$ ) sejam assumidos como infinitos.

No entanto a aplicação deste “valor” pode não ser compatível com a realidade de como a informação usada para a construção da PDF *a priori* foi obtida. Os autores Bentley (2005) e Martins (2010) propõem valores para os graus de liberdade a partir do tipo de informação disponível (Quadro 3.3)

Quadro 3.3: Valores graus de liberdades a partir do tipo de informação obtida

Qualidade da informação (BENTLEY, 2005)	Tipo de PDF (MARTINS, 2010)	$\nu_{B,i}$
Pouco confiável	Exponencial ou U	3
Razoável	Uniforme	10
Boa	Triangular ou lognormal	30
Excelente	Gaussiana ou <i>t</i> -Student	100

Então de posse dos graus de liberdade efetivo ( $\nu_{\text{eff}}$ ) e da probabilidade de abrangência ( $PA$ ), o valor do fator de abrangência ( $k$ ) pode ser avaliado pela distribuição *t-Student* e assim o intervalo de abrangência pode ser obtido pela Equação 3.30.

### 3.1.2 Método LPP

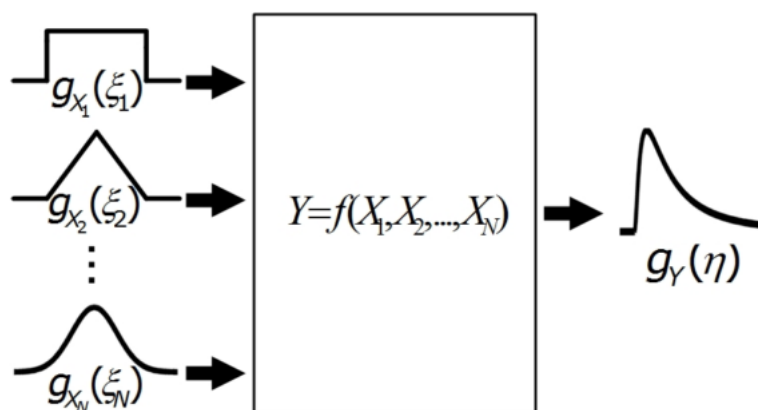
Analisando o método LPU, nota-se algumas limitações e/ou restrições para o seu uso. O GUM utiliza-se de aproximações que fazem dele um procedimento “simples”, porém restrito às seguintes condições:

- Conhecer o modelo de medição;
- Função de medição linear ou fracamente não-linear;
- Se for avaliar a incerteza expandida às grandezas de entrada e saída devem ter comportamento gaussiano, ser independentes entre si e suas incertezas também devem ser independentes;

Visando ultrapassar os limites inerentes ao GUM, foi publicado o primeiro suplemento, GUM-S1, (BIPM et al., 2008b). Nele é descrita a lei de propagação das PDFs, LPP, que consiste em obter a PDF do mensurando ( $g_Y(\eta)$ ) através da função de medição (Equação 3.2) a partir das PDFs das grandezas de entradas ( $g_{X_i}(\xi_i)$ ). Dessa forma, não mais são usadas estimativas das variáveis e nem aproximações lineares da função de medição, mas sim a informação completa do sistema de medição, ou seja, as PDFs das grandezas de entrada, o que proporcionará um resultado mais fidedigno com a realidade, se as citadas PDFs são conhecidas.

A Figura 3.1 ilustra a obtenção da PDF do mensurando através da LPP.

Figura 3.1: Ilustração do método LPP



Fonte: Martins (2010)



Para um conjunto de grandezas de entradas  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)^\top$  representada pela PDF conjunta,  $g_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\xi})$ , a PDF do mesurando é obtida através da Equação 3.33

$$g_Y(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \delta(\eta - f(\boldsymbol{\xi})) d\xi_N \dots d\xi_1 \quad (3.33)$$

onde,  $\eta$  são os possíveis valores do mesurando,  $\boldsymbol{\xi}$  é o vetor dos possíveis valores de  $\mathbf{X}$  ( $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_N)^\top$ ) e  $\delta$  é a função delta de Dirac apresentada na Equação 3.34.

$$\delta(z - a) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{se } z \neq a \\ \infty, & \text{se } z = a \end{cases} \quad (3.34)$$

Caso as variáveis de entrada sejam independentes a PDF conjunta,  $g_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\xi})$ , é o produtório das “N” PDFs das grandezas  $X_i$  de forma que a Equação 3.33 pode ser reescrita para:

$$g_Y(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\eta - f(\boldsymbol{\xi})) \cdot \left[ \prod_{i=1}^N g_{X_i}(\xi_i) \right] d\xi_N \dots d\xi_1 \quad (3.35)$$

De posse da PDF do mesurando, pode se extrair as informações desejadas, quais sejam, a estimativa, aplicando o operador esperança (Equação 3.4)), variância, aplicando o operador variância, (Equação 3.5) e o intervalo de abrangência através da Equação 3.36.

$$PA = \int_{\eta^{\min}}^{\eta^{\max}} g_Y(\eta) d\eta \quad (3.36)$$

onde  $\eta^{\max}$  é o maior valor para o mesurando;  $\eta^{\min}$  é o menor valor para o mesurando que definem um intervalo de abrangência  $[\eta^{\min}, \eta^{\max}]$  com uma probabilidade de abrangência de  $PA$ .

Quanto maior a complexidade da função de medição, mais complicada se torna a resolução da Equação 3.33 ou da Equação 3.35. Para isso são usados métodos numéricos com destaque para a simulação de Monte Carlo recomendado pelo BIPM et al. (2008a).

### 3.1.2.1 Método Monte Carlo

A simulação de Monte Carlo, MCM (*Monte Carlo Method*), aplicada na avaliação da incerteza de um mesurando consiste na geração de amostra aleatórias ( $\xi_i^k$ ) para

a avaliação da função de medição (Equação 3.2) em cada ponto e a obtenção de  $M^5$  valores possíveis de  $Y$  (Equação 3.37) e a sua PDF empírica ( $\hat{g}_Y(\eta)$ )

$$\eta^k = f(\xi_1^k, \dots, \xi_N^k) \quad k = 1 \text{ a } M \quad (3.37)$$

Portanto a estimativa (Equação 3.38) e a incerteza padrão combinada (Equação 3.39) do mensurando podem ser avaliadas através da média aritmética e do desvio padrão dos  $M$  valores de  $\eta^k$ .

$$y = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \eta^k \quad (3.38)$$

$$u_c(y) = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^M (\eta^k - y)^2} \quad (3.39)$$

Como na LPU, após o cálculo da estimativa e da incerteza, o próximo passo é obter o intervalo de abrangência ( $I_{PA} = [\eta^{\min} \quad \eta^{\max}]$ ) em torno da estimativa, a partir de uma probabilidade de abrangência. O GUM-S1 recomenda encontrar o intervalo de menor largura possível entre o valor máximo e mínimo que satisfaça a Equação 3.36.

A Equação 3.36 pode ser reescrita através da distribuição acumulada (CDF - *Cumulative Distribution Function*) empírica do mensurando  $\hat{G}_Y(\eta^k)$  (Equação 3.40).

$$\hat{G}_Y(\eta^k) = \int_{-\infty}^{\eta^k} g_Y(\eta) d\eta \quad (3.40)$$

Reescrevendo a Equação 3.36 em função da CDF obtém-se:

$$\begin{aligned} p &= \int_{-\infty}^{\eta^{\max}} g_Y(\eta) d\eta - \int_{-\infty}^{\eta^{\min}} g_Y(\eta) d\eta \\ p &= \hat{G}_Y(\eta^{\max}) - \hat{G}_Y(\eta^{\min}) \end{aligned} \quad (3.41)$$

---

<sup>5</sup>É importante salientar que quanto maior o numero de amostra gerada, melhor é a aproximação da PDF empírica com a real o que implica em um melhor resultado na avaliação do mensurando.

## 3.2 Propagação via conjuntos *fuzzy*: Regime estacionário

A transformação de probabilidade/possibilidade está centralizada no conceito do intervalo de abrangência, sendo a possibilidade considerada como uma “família de probabilidades”(DUBOIS; PRADE; SANDRI, 1993; MAURIS; LASSERRE; FOULLOY, 2000; MAURIS; LASSERRE; FOULLOY, 2001; DUBOIS et al., 2004; MENCATTINI; SALMERI; LOJACONO, 2006; FERRERO; SALICONE, 2007).

Antes de discutir os métodos de propagação via conjuntos *fuzzy* e consequentemente os métodos usados para a transformação de uma função densidade de probabilidade para uma função distribuição de possibilidade, é necessário introduzir alguns conceitos básicos sobre a teoria de possibilidade.

### 3.2.1 Teoria básica da função de distribuição de possibilidade

Considere um conjunto *fuzzy*  $Fr$ , caracterizado por uma função de pertinência  $\phi_{Fr}$ , onde  $\phi_{Fr}(\xi_i^k)$  denota o grau de compatibilidade de  $\xi_i^k$  com conjunto  $Fr$ , que por sua vez atua como uma restrição *fuzzy* sobre a variável  $X$ , ou seja, “ $X$  é  $Fr$ ”. E  $X$  é uma variável que assume valores do universo de discurso  $\xi_i$  e a distribuição de possibilidade associada à  $X$ ,  $\Pi_X$ , é postulada como igual ao conjunto  $Fr$  (ZADEH, 1999).

$$\Pi_X = Fr, \quad (3.42)$$

Sendo assim, a PoDF (Função de Distribuição de Possibilidade) associada a  $X$  é definida como numericamente igual à função de pertinência de  $Fr$  (ZADEH, 1999).

$$\pi_X = \phi_{Fr} \quad (3.43)$$

Com isso uma distribuição de possibilidade assume características de conjuntos *fuzzy* e sua função se assemelha a função de pertinência, o que permite a aplicação da teoria dos conjuntos *fuzzy*. Possibilidade e probabilidade não traduzem a incerteza

sobre uma informação do mesmo modo. A possibilidade  $(\pi_X(\xi_i^k))$  descreve o que é conhecido sobre um valor de uma variável  $X_i$ , onde  $\pi_X(\xi_i^1) > \pi_X(\xi_i^2)$  significa que é mais plausível que a variável  $X$  assuma o valor  $\xi_i^1$  do que  $\xi_i^2$  (DUBOIS et al., 2004).

Para exemplificar, considere a seguinte afirmação: “ $X$  é água pura”, ou seja, água pura é uma restrição *fuzzy* ( $Fr \equiv$  água pura).  $X$  pode assumir qualquer valor dentre todos tipos de líquidos e  $Fr$  é um subconjunto desse universo ( $\xi$ ).

Agora considere que são expostas duas garrafas preenchidas com líquidos desconhecidos, mas nos rótulos vem escrita a seguinte informação:

**Garrafa 1:**  $\pi_{Fr}(X) = 0,9$  (possibilidade de a garrafa conter água pura é de 0,9)

**Garrafa 2:**  $p_{Fr}(X) = 0,9$  (probabilidade de a garrafa conter água pura é de 0,9)

De qual garrafa deve-se beber o líquido?

A informação da garrafa 2, indica que a probabilidade do líquido em seu interior ser *água pura* é de 90%, ou seja, existe 10% de probabilidade de que o líquido  $X$  seja qualquer outro líquido, veneno, ácidos e etc, menos *água pura*. O rótulo da primeira garrafa informa que o seu conteúdo, tem 0,9 de grau de possibilidade de pertencer ao conjunto *água pura*, ou seja, o líquido  $X$  dentro da garrafa 1 tem uma semelhança alta à *água pura* (RENTERÍA, 2006).

Considere a seguinte situação: “Um programador toma  $X$  xícaras de café em um dia”, onde  $X$  tem seu universo de discurso  $\xi = \mathbb{N}$ . Agora associe a PoDF com  $X$  de maneira que  $\pi_X(\xi_i^k)$  seja o grau de facilidade que um programador tem de tomar  $\xi_i^k$  xícaras de café em um dia. Em paralelo, associe uma distribuição de probabilidade, onde  $p_X(\xi_i^k)$  é a probabilidade de um programador tomar  $\xi_i^k$  xícaras de café em um dia.

Sendo assim, a observação e o conhecimento sobre o dia de trabalho de um programador, pode levar ao seguinte resultado de  $\pi_X(\xi_i^k)$  e  $p_X(\xi_i^k)$  (Tabela 3.2).

O que se pode inferir da Tabela 3.2, é que um programador consome facilmente 3, 4, 5 ou 6 xícaras de café em um dia de trabalho enquanto que há 35 % de chance, probabilidade, de ele tomar 5 xícaras de café. Verifica-se ainda que além de impossível é improvável que um programador não tome café em um dia de trabalho

Tabela 3.2: Valores das distribuição de possibilidade e probabilidade de um programador tomar  $\xi_i^k$  xícaras de café.

$\xi_i^k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\pi_X(\xi_i^k)$	0,00	0,10	0,50	1,00	1,00	1,00	1,00	0,50	0,30	0,20	0,10
$p_X(\xi_i^k)$	0,00	0,00	0,05	0,05	0,10	0,35	0,20	0,15	0,10	0,00	0,00

e que os valores improváveis 1, 9 e 10 possuem uma “certa facilidade”.

Dando continuidade à teoria da possibilidade, a medida da possibilidade de um conjunto *fuzzy*  $F$  é definida como (ZADEH, 1999):

$$\pi_X(F) \triangleq \sup [\phi_F(\xi_i^k) \wedge \pi_X(\xi_i^k)], \quad \forall \xi_i^k \in \xi, \quad (3.44)$$

onde  $\pi_X(F)$  é a medida de possibilidade que representa a proposição  $X$  é  $F$ . Caso  $F$  seja um conjunto caracterizado por uma função de pertinência *crisp* (Equação 2.5) a Equação 3.44 se reduz para (ZADEH, 1999):

$$\pi_X(F) \triangleq \sup \pi_X(\xi_i^k), \quad \forall \xi_i^k \in F \quad (3.45)$$

Essas definições são importantes, pois são usadas com base para a transformação das funções de densidade de probabilidades em funções de distribuição de possibilidade.

### 3.2.2 Transformação

A geração da PoDF ótima a partir de uma PDF (DUBOIS; PRADE; SANDRI, 1993) deve atender as seguintes condição (MAURIS; LASSERRE; FOULLOY, 2000):

**Princípio da consistência** (DUBOIS; PRADE; SANDRI, 1993):

$$P(F) \leq \pi_X(F), \quad \forall F \subset \xi, \quad (3.46)$$

onde  $P(F)$  significa a probabilidade do evento  $F$  ocorrer, sendo este um conjunto de valores podendo ser caracterizado por um conjunto *fuzzy*.

**Preservação da ordem** (DUBOIS et al., 2004):

$$\begin{cases} \pi_X(\xi^1) > \pi_X(\xi^2) & \text{se somente se} & p_X(\xi^1) > p_X(\xi^2) & \text{(preservação da ordem)} \\ p_X(\xi^1) > p_X(\xi^2) & \text{implica} & \pi_X(\xi^1) > \pi_X(\xi^2) & \text{(fraca preservação da ordem)} \end{cases} \quad (3.47)$$

**Princípio da máxima especificidade** (MAURIS, 2009):

$$\min \int \pi_X(\xi) d\xi \quad (3.48)$$

Assumindo um intervalo de abrangência  $I_{PA}$  como sendo um  $\alpha$ -cut (Equação 2.6), com  $\alpha = 1 - PA$ , da restrição *fuzzy*  $A_X$  (“ $X$  é  $A_X$ ”), sendo  $\phi_{A_X}(\xi_i^k)$  o grau de pertinência de um valor aleatório  $\xi_i^k$  à restrição *fuzzy*  $A_X$ , tem-se.

$$I_{PA} = \{\xi_i^k | \phi_{A_X}(\xi_i^k) \geq (1 - PA) \ \& \ \xi_i^k \in I_{PA}\} \quad (3.49)$$

Então combinando as Equações 2.16 e 3.49 conclui-se que a função de pertinência da variável  $X$  é dada por:

$$\phi_{A_X}(\xi_i^k) = \sup \{1 - P(I_{PA}) | \xi_i^k \in I_{PA}\}. \quad (3.50)$$

E pela definição equacionada por 3.43, obtêm-se (DUBOIS et al., 2004):

$$\pi_X(\xi_i^k) = \phi_{A_X}(\xi_i^k) = \sup \{1 - P(I_{PA}) | \xi_i^k \in I_{PA}\} \quad (3.51)$$

onde  $P(I_{PA})$  denota a probabilidade do intervalo de abrangência (Equação 3.41)  $I_{PA} = [\xi_i^{\min}; \xi_i^{\max}]$  ( $P(I_{PA}) = PA$ )

Sendo assim a expressão, encontrada por Dubois, Prade e Sandri (1993), para obter a PoDF ótima é dada por:

$$\pi_X(\xi_i^k) = \pi_X(f(\xi_i^k)) = \int_{-\infty}^{\xi_i^k} g_X(\xi) d\xi + \int_{f(\xi_i^k)}^{+\infty} g_X(\xi) d\xi \quad (3.52)$$

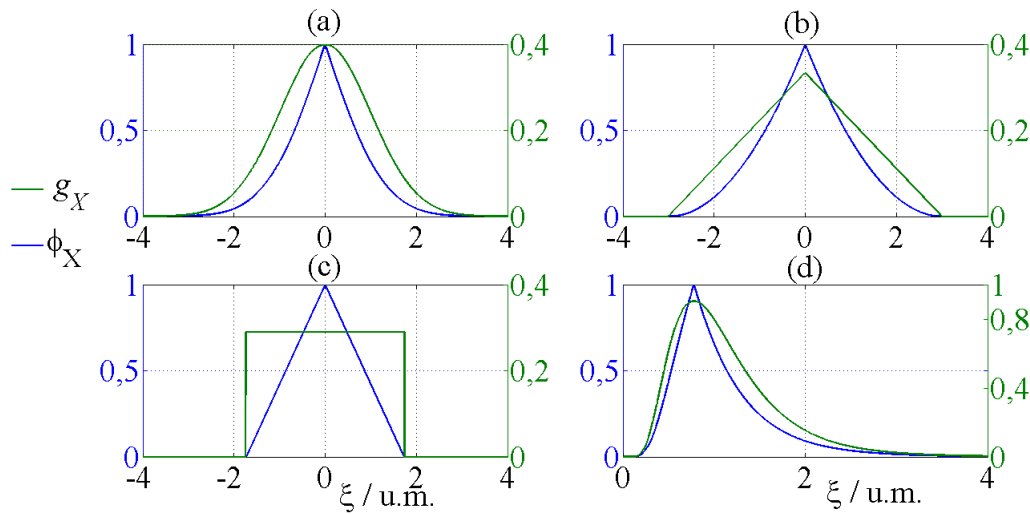
onde a função  $f$  é dada por  $\begin{cases} f : [-\infty, x^*] \rightarrow [x^*, +\infty] \\ f(\xi) = \max \{\eta | g_X(\eta) \geq g_X(\xi)\} \end{cases}$ , e  $x^*$  é o valor nominal cujo o intervalo de abrangência o contém.  $x^*$  pode ser escolhido como a moda da distribuição,  $x^m$ , ou a média  $x$  (DUBOIS et al., 2004).

Em resumo, a transformação entre as funções de distribuição é obtida através dos conceitos de intervalo de abrangência (Secção 3.1.1.4) e  $\alpha$ -cut (Secção 2.1.3).

Dado um intervalo de abrangência  $I_{PA} = [\xi^k, f(\xi^k)]$  construído em torno de  $x^*$  com a probabilidade de abrangência  $PA$ , a distribuição PoDF pode ser reescrita para:

$$\pi_X(\xi^k) = \pi_X(f(\xi^k)) = 1 - P([\xi^k, f(\xi^k)]) = 1 - PA \quad (3.53)$$

Figura 3.2: Transformações das PDF mais comuns para a PoDF ótima. (a) gaussiana, (b) triangular, (c) uniforme e (d) lognormal.



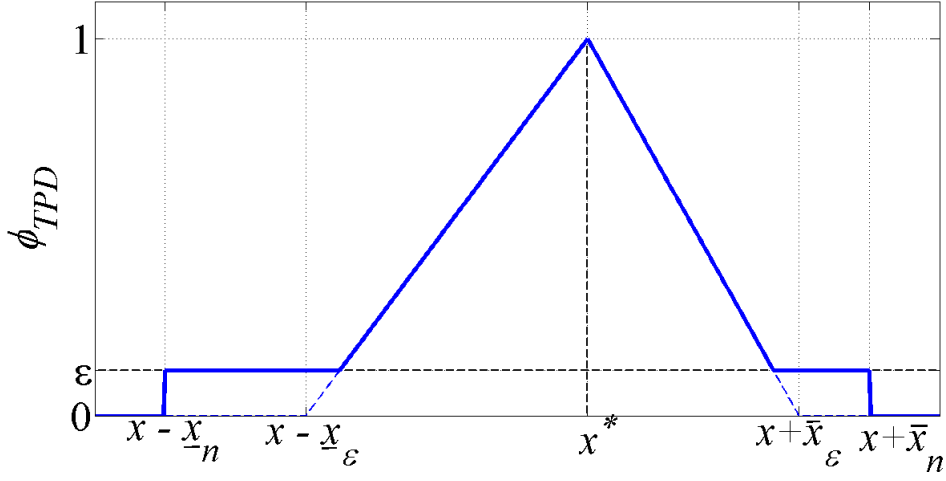
A Figura 3.2 mostra o resultado da transformação ótima aplicada às quatro PDF's mais comuns na metrologia: gaussiana (Figura 3.2a), triangular (Figura 3.2b), uniforme (Figura 3.2c) e lognormal (Figura 3.2d).

### 3.2.2.1 Distribuição de possibilidade triangular truncada

Frente a dificuldade de trabalhar com transformação ótima, Mauris, Lasserre e Foulloy (2000) propuseram uma transformação mais prática e de fácil manipulação denominada *Transformação Triangular Truncada* e o conjunto fuzzy obtido ganhou o nome de TPD TPD (*Truncated Triangular Possibility Distribution*) (Figura 3.3).

Para PDFs simétricas, o TPD obtido é descrito pela Equação 3.54, onde  $\underline{x}_\epsilon =$

Figura 3.3: Distribuição de possibilidade triangular truncada



$\bar{x}_\epsilon = x_\epsilon$  e  $\underline{x}_n = \bar{x}_n = x_n$  (MAURIS; LASSERRE; FOULLOY, 2000):

$$\pi_{\text{TPD}, X_i}(\xi_i^k) = \begin{cases} 1 - \frac{1 - \epsilon}{x_\epsilon - x^*} |\xi_i^k - x^*| & \text{se } |\xi_i^k - x^*| \leq (x_\epsilon - x^*) \\ \epsilon & \text{se } (x_\epsilon - x^*) \leq |\xi_i^k - x^*| \leq (x_n - x^*) \\ 0 & \text{se } |\xi_i^k - x^*| \leq (x_n - x^*) \end{cases} \quad (3.54)$$

onde  $\pi_{\text{TPD}, X_i}(\xi_i^k)$  é a função de pertinência do TPD obtido da transformação da PDF de  $X_i$ ,  $x_\epsilon$ ,  $x_n$ ,  $x^*$  e  $\epsilon$  são parâmetros que dependem do tipo da PDF de  $X_i$ .

Mauris, Lasserre e Foulloy (2000) propuseram equações para a determinação destes parâmetros em função da média e da variabilidade da variável  $X_i$ . A Tabela 3.3 mostra os parâmetros das TPDs obtidas a partir das PDFs gaussiana, uniforme e triangular. São também apresentados os parâmetros da TPD-G (TPD Generalizada) que representa a transformação de uma PDF simétrica e unimodal, porém desconhecida (MAURIS; LASSERRE; FOULLOY, 2000; MAURIS; LASSERRE; FOULLOY, 2001).

Para ilustrar a transformação, a Figura 3.4 apresenta a comparação da transformação ótima com os respectivos TPDs. As transformações mostradas na Figura 3.4 foram proveniente de uma estimativa igual a zero e desvio padrão (incerteza) igual a unidade, para todas as PDFs usadas.

A Figura 3.5 mostra a superposição das transformações ótimas para as PDFs

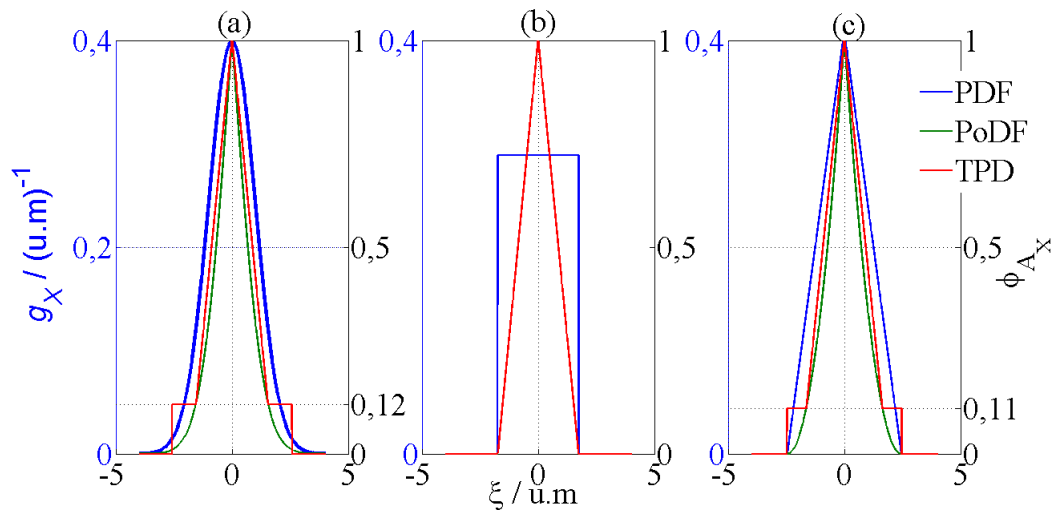


Tabela 3.3: Parâmetros para construção da TPD a partir das PDFs, gaussiana, triangular e uniforme, além da TPD generalizada (TPD-G), para representar a estimativa de  $X$ .

Parâmetros	Gaussiana	Triangular	Uniforme	Geral
$x^*$	$x$	$x$	$x$	$x$
$x_n$	$2,58 \cdot u(x)$	$2,45 \cdot u(x)$	$1,73 \cdot u(x)$	$3,20 \cdot u(x)$
$\epsilon$	0,120	0,110	0,000	0,086
$x_\epsilon$	$\frac{1,54 \cdot u(x)}{1-\epsilon}$	$\frac{1,63 \cdot u(x)}{1-\epsilon}$	$\frac{1,73 \cdot u(x)}{1-\epsilon}$	$\frac{1,73 \cdot u(x)}{1-\epsilon}$

Fonte: Adaptada de Mauris, Lasserre e Foulloy (2000) e Mauris, Lasserre e Foulloy (2001)

Figura 3.4: Comparação entre a transformação ótima das distribuições de probabilidade, (a) gaussiana, (b) uniforme e (c) triangular, com os TPD

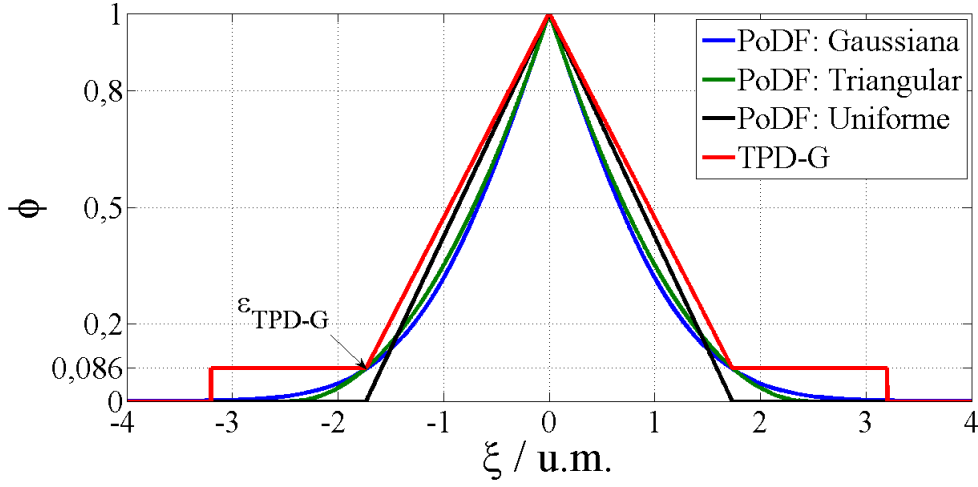


gaussiana, triangular e uniforme, junto com a TPD-G. Note que a TPD-G possui intervalos que englobam os resultados das três transformações ótimas tendo-se um ponto de intersecção que determina o parâmetro  $\epsilon_{TPD-G} = 0,086$  da TPD-G.

### 3.2.3 Propagação

O princípio da extensão (Secção 2.1.6) viabiliza a realização de operações matemáticas sobre conjuntos *fuzzy*. Como as leis de propagação da incerteza são definidas para um função de medição bem conhecida, a propagação da incerteza via conjuntos *fuzzy*, ou PoDFs, está suportada pelo princípio da extensão (DUBOIS; PRADE; SANDRI, 1993; MAURIS; LASSERRE; FOULLOY, 2000; MAURIS; LASSERRE;

Figura 3.5: Comparação entre a transformação ótimas das distribuições de probabilidade simétricas mais comuns, com a TPD Generalizada



FOULLOY, 2001; DUBOIS et al., 2004; MENCATTINI; SALMERI; LOJACONO, 2006; FERRERO; SALICONE, 2007). Portanto, dada uma função de medição, Equação 3.2, a PoDF do mesurando  $\pi_Y(\eta)$  é obtida de:

$$\pi_Y(\eta) = \begin{cases} \sup \text{star} [\pi_{A_{X_1}}, \dots, \pi_{A_{X_N}}] \\ 0 \text{ se } f^{-1}(\eta) \end{cases} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} A_Y = f(A_{X_1}, \dots, A_{X_N}) &= \int_{\eta \in A_Y} \pi_Y(\eta) / f(\xi_1, \dots, \xi_N) \\ &= \int_{\eta \in A_Y} \pi_Y(\eta) / \eta \end{aligned} \quad (3.56)$$

### 3.2.3.1 Propagação TPD

Em se tratando de conjuntos TPD, a propagação através de uma função de medição (Equação 3.2 proposta por Mauris, Lasserre e Foulloy (2001), consiste em:

1. Separar a  $TPD_{X_i}$  em duas partes, na parte triangular,  $TPD_{X_i,t}$  e na parte uniforme de altura igual à  $\epsilon$ ,  $TPD_{X_i,r}$ ;
2. Fazer a propagação para parte triangular obtendo a  $TPD_{Y,t}$  e  $\pi_{TPD_{t,Y}}(\eta)$  e para parte uniforme obtendo a  $TPD_{Y,r}$  e  $\pi_{TPD_{r,Y}}(\eta)$ , através das Equações 3.55 e 3.56 usando a combinação max-min.
3. Obter a  $TPD_Y$  através da união das partes  $TPD_{Y,t}$  e  $TPD_{Y,r}$ , ou seja,  $\pi_{TPD_Y}(\eta) = \bigvee_{i=1}^N \pi_{TPD_{X_i}}(\xi_i)$

Para as quatro operações básicas, a propagação via TPD consiste de equações algébricas muito simples conforme o Quadro 3.4 e Quadro 3.5.

Quadro 3.4: Cálculo dos parâmetros da parte triangular da TPD do mensurando com base na função de medição  $Y = f(X_1, X_2)$ .

$Y = f(X_1, X_2)$	$y^*$	$\underline{y}_\epsilon$	$\bar{y}_\epsilon$
Soma	$x_1^* + x_2^*$	$\underline{x}_{1,\epsilon} + \underline{x}_{2,\epsilon}$	$\bar{x}_{1,\epsilon} + \bar{x}_{2,\epsilon}$
Subtração	$x_1^* - x_2^*$	$\underline{x}_{1,\epsilon} + \bar{x}_{2,\epsilon}$	$\bar{x}_{1,\epsilon} + \underline{x}_{2,\epsilon}$
Divisão	$\frac{x_1^*}{x_2^*}$	$\frac{x_1^*}{x_2^*} - \frac{x_1^* - \underline{x}_{1,\epsilon}}{x_2^* + \bar{x}_{2,\epsilon}}$	$\frac{x_1^* + \bar{x}_{1,\epsilon}}{x_2^* - \underline{x}_{2,\epsilon}} - \frac{x_1^*}{x_2^*}$
Produto	$x_1^* \cdot x_2^*$	$x_1^* \cdot \underline{x}_{2,\epsilon} + x_2^* \cdot \underline{x}_{1,\epsilon} - \underline{x}_{1,\epsilon} \cdot \underline{x}_{2,\epsilon}$	$x_1^* \cdot \bar{x}_{2,\epsilon} + x_2^* \cdot \bar{x}_{1,\epsilon} - \bar{x}_{1,\epsilon} \cdot \bar{x}_{2,\epsilon}$

Fonte: Adaptada de (MAURIS; LASSERRE; FOULLOY, 2001)

Quadro 3.5: Cálculo dos parâmetros da parte uniforme da TPD do mensurando com base na função de medição  $Y = f(X_1, X_2)$ .

$Y = f(X_1, X_2)$	$\underline{y}_n$	$\bar{y}_n$	$\epsilon_Y$
Soma	$\underline{x}_{1,n} + \underline{x}_{2,n}$	$\bar{x}_{1,n} + \bar{x}_{2,n}$	$\min(\epsilon_{X_1}, \epsilon_{X_2})$
Subtração	$\underline{x}_{1,n} + \bar{x}_{2,n}$	$\bar{x}_{1,n} + \underline{x}_{2,n}$	
Divisão	$\frac{x_1^*}{x_2^*} - \frac{x_1^* - \underline{x}_{1,n}}{x_2^* + \bar{x}_{2,n}}$	$\frac{x_1^* + \bar{x}_{1,n}}{x_2^* - \underline{x}_{2,n}} - \frac{x_1^*}{x_2^*}$	
Produto	$x_1^* \cdot \underline{x}_{2,n} + x_2^* \cdot \underline{x}_{1,n} - \underline{x}_{1,n} \cdot \underline{x}_{2,n}$	$x_1^* \cdot \bar{x}_{2,n} + x_2^* \cdot \bar{x}_{1,n} - \bar{x}_{1,n} \cdot \bar{x}_{2,n}$	

Fonte: Adaptada de (MAURIS; LASSERRE; FOULLOY, 2001)

Para exemplificar e mostrar os efeitos da transformação da informação contida na distribuição de densidade de probabilidade em conjuntos *fuzzy* e de sua propagação, considere duas variáveis de entrada cujas incertezas relevantes sejam o efeito das medições, tipo A, e a resolução do equipamento (tipo B) (BIPM et al., 2008a). A Tabela 3.4 mostra os valores assumidos.

Tabela 3.4: Informações sobre as grandezas de entrada usadas para comparação da metodologia *fuzzy* com o GUM e GUM-S1

Variável	Estimativa /u.m.	$u_A$ /u.m. (Normal)	$\nu_A$	$u_B$ /u.m. (Uniforme)	$\nu_B$	$u_c$ /u.m.	$\nu_{\text{eff}}$
$X_1$	2,00	1,00	100	$0,5/\sqrt{3}$	10	1,04	110
$X_1$	3,00	2,00	100	$0,5/\sqrt{3}$	10	2,02	104

Foi visto que as metodologias de representação da incerteza em conjuntos *fuzzy* estão baseadas nos intervalos de abrangência (Secção 3.2.2). As Tabelas 3.5 e 3.6 mostram os intervalos e as estimativas obtidas para as grandezas de entrada  $X_i$  em cada metodologia e a Figura 3.6 mostram graficamente os resultados encontrados.

Figura 3.6: Representação das incertezas das grandezas de entrada  $X_i$  na forma de PDF empíricas ((a) e (b)) e os respectivos conjuntos *fuzzy* ((c) e (d)) resultantes das diferentes transformações

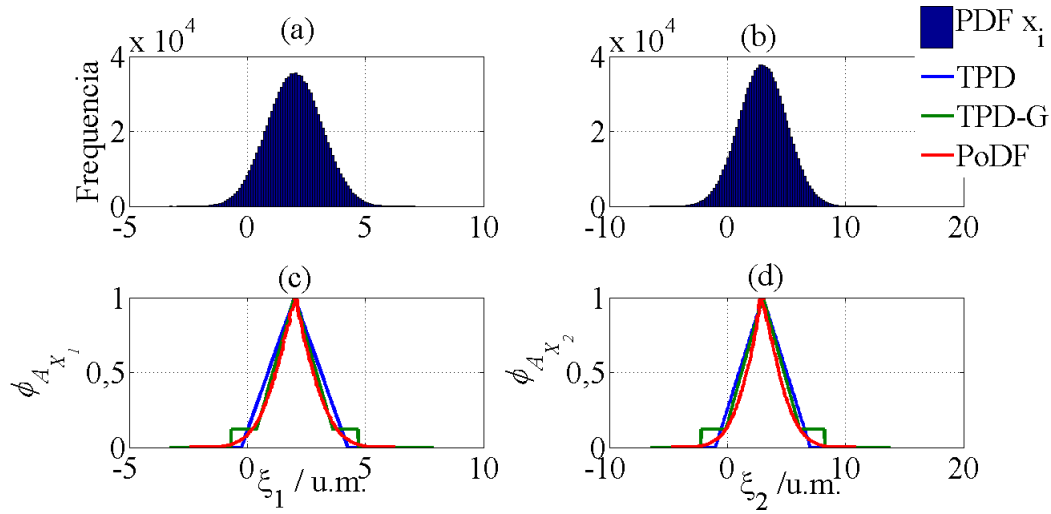


Tabela 3.5: Comparação dos diferentes métodos apresentados para avaliação dos intervalos da grandeza de entrada  $X_1$

Metodo	Estimativa / u.m	Intervalo de abrangência / u.m			
		90%	95%	99%	99,99%
GUM	2,00	[0, 28; 3, 73]	[-0, 06; 4, 06]	[-0, 73; 4, 73]	[-2, 20; 6, 20]
GUM-S1	2,00	[0, 10; 3, 90]	[-0, 27; 4, 24]	[-0, 96; 4, 90]	[-2, 32; 6, 40]
TPD	2,00	[-0, 03; 4, 03]	[-0, 14; 4, 14]	[-0, 23; 4, 23]	[-0, 26; 4, 26]
TPD-G	2,00	[0, 23; 3, 77]	[-1, 33; 5, 33]	[-1, 33; 5, 33]	[-1, 33; 5, 33]
PoDF	2,00	[0, 10; 3, 90]	[-0, 25; 4, 26]	[-0, 93; 4, 95]	[-2, 27; 6, 35]

Os resultados apresentados são efeitos de uma propagação através de uma função de medição linear (Equação 3.3) das parcelas do tipo A (referente a uma distribuição normal) e a parcela do tipo B (proveniente de um distribuição uniforme). Ambas as distribuições são simétricas o que não gera diferença na avaliação da estimativa, visto que as PoDFs são construídas com base na moda, com exceção da uniforme na qual é usada a média.

Tabela 3.6: Comparação dos diferentes métodos apresentados para avaliação dos intervalos da grandeza de entrada  $X_2$

Metodo	Estimativa / u.m	Intervalo de abrangência / u.m			
		90%	95%	99%	99,99%
GUM	3,00	[-0,35; 6,35]	[-1,01; 7,01]	[-2,30; 8,30]	[-5,18; 11,18]
GUM-S1	3,00	[-0,32; 6,32]	[-0,97; 6,96]	[-2,26; 8,17]	[-4,76; 10,90]
TPD	3,00	[-0,60; 6,60]	[-0,80; 6,80]	[-0,96; 6,96]	[-1,01; 7,01]
TPD-G	3,00	[-0,44; 6,44]	[-3,47; 9,47]	[-3,47; 9,47]	[-3,47; 9,47]
PoDF	3,00	[-0,35; 6,30]	[-0,95; 6,97]	[-2,20; 8,18]	[-4,91; 10,82]

Os resultados da TPD e da PoDF são obtidos transformando as parcelas em conjuntos *fuzzy* para então aplicar o princípio da extensão sobre os mesmos, diferentemente da TPD-G que é gerada a partir da informação da estimativa e sua incerteza padrão Tabela 3.4

Em relação aos intervalos construídos para as probabilidades de abrangência, 90%, 95%, 99%, 99,99%, nota-se que apesar de diferentes eles se sobrepõem indicando que representam informações semelhantes. A representação da PoDF gera, em sistemas SISO lineares, intervalos semelhantes aos intervalos obtidos pelo GUM e GUM-S1.

As representações da TPD e TPD-G geram, na maioria dos casos, intervalos maiores, o que era esperado pela própria construção dos conjuntos, uma vez que eles são uma parametrização da PoDF ótima (Figuras 3.4 e 3.6) e menos específicos. A partir de 99% nota-se que a TPD resulta em um intervalo menor do que as outras metodologias, pois a propagação gera um conjunto triangular, onde o intervalo é reduzido (Equação 3.57). Porém a representação pela TPD-G consegue captar esse intervalo já que a própria transformação considera os limites máximos equivalentes à área igual a 99% da PDF truncando-as nesses limites.

$$\epsilon_{X_i} = \min(\epsilon_{A_i}, \epsilon_{B_i}) = \min(0,12; 0,00) = 0,00 \quad (3.57)$$

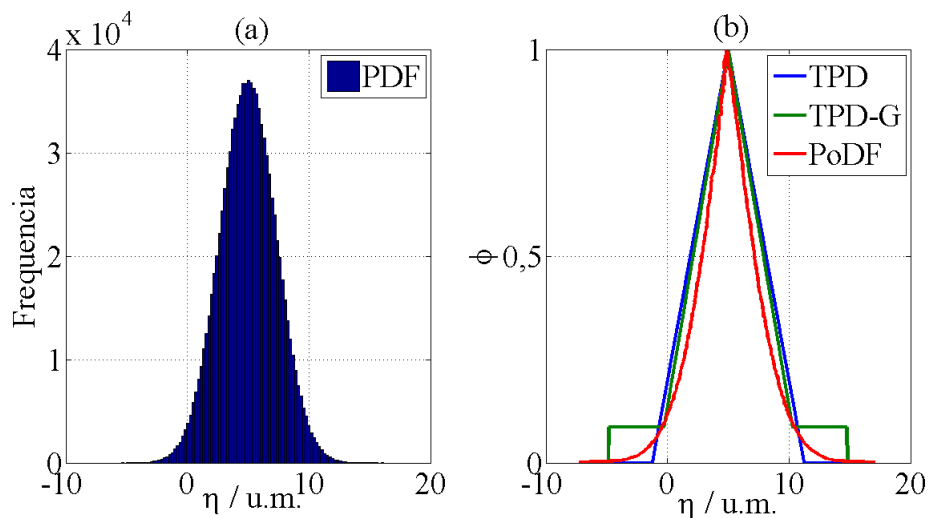
No caso das TPD-G, acima de uma probabilidade de abrangência de 91,4% os intervalos encontrados são iguais, pois essa representação possui o parâmetro  $\epsilon_Y = 0,086$  aproximando, avaliações acima, para o intervalo “máximo”.

Considere um mensurando definido por uma função de medição  $Y = X_1 + X_2$ . Os resultados da propagação das informações de  $X_i$  para  $Y$  são representados na Tabela 3.7 e Figura 3.7.

Tabela 3.7: Comparação dos diferentes métodos apresentados para avaliação dos intervalos de abrangências aplicados a uma função de medição do tipo  $Y = X_1 + X_2$

Metodo	Estimativa / u.m	Intervalo de abrangência / u.m				Tempo / s
		90%	95%	99%	99,99%	
GUM	5,00	[1,24 ; 8,76 ]	[ 0,51; 9,49 ]	[ -0,93 ; 10,93]	[-4,08 14,08]	0,024
LPP	5,01	[1,24 ; 8,89 ]	[0,47 ; 9,58 ]	[-0,95 ; 11,02]	[-4,13 ; 14,03]	2,402
TPD	5,00	[ -0,62 ; 10,62]	[-0,94 10,94]	[-1,19 ; 11,19 ]	[-1,25 ; 11,24]	0,073
TPD-G	5,00	[ -0,22 ; 10,22]	[-4,80 ; 14,80]	[-4,80 ; 14,80]	[-4,80 ; 14,80]	0,030
PoDF	5,01	[-0,18 ; 10,26 ]	[-1,22 ; 11,20]	[-3,08 ; 13,15]	[-7,08 ; 17,17]	67,680

Figura 3.7: Representação das incertezas na forma de PDF empíricas (a) e em conjuntos *fuzzy* (b) resultantes da propagação da incerteza através da função linear  $Y = X_1 + X_2$



Mais uma vez os intervalos avaliados pelas metodologias *fuzzy* são maiores quando comparados com os intervalos obtidos pelo GUM e GUM-S1, com exceção da TPD para uma probabilidade de abrangência de 99%. Como visto, a parametrização da PoDF para uma TPD triangular, resultante de uma PDF uniforme (Parcela Tipo B), gera menores intervalos para probabilidade de abrangências maiores que 90%, ocorrendo o contrário com o uso da TPD-G.

Note que a utilização da PoDF ótima não gerou intervalos muito semelhantes como os obtidos pelo GUM-S1. Isto se deve à aplicação do princípio da extensão

Equação 2.13. A utilização do princípio da extensão tende à construção de um conjunto *fuzzy* menos específico, ou seja, maior área e consequentemente maiores intervalos em cada  $\alpha$ -cut (ZADEH, 1965). Esse efeito é observado sobre as propagações dos TPDs, sendo mais evidente na utilização do TPD-G que resultou na estimação do intervalo máximo (99%) maior que o intervalo máximo obtido pelo GUM-S1 (99%). O efeito é potencializado em funções de medições não lineares (Tabela 3.8 e Figura 3.8) (MAURIS; LASSERRE; FOULLOY, 2001).

Figura 3.8: Representação das incertezas na forma de PDF empíricas (a) e em conjuntos *fuzzy* (b) resultantes da propagação em uma função não linear  $Y = X_1 \cdot X_2$

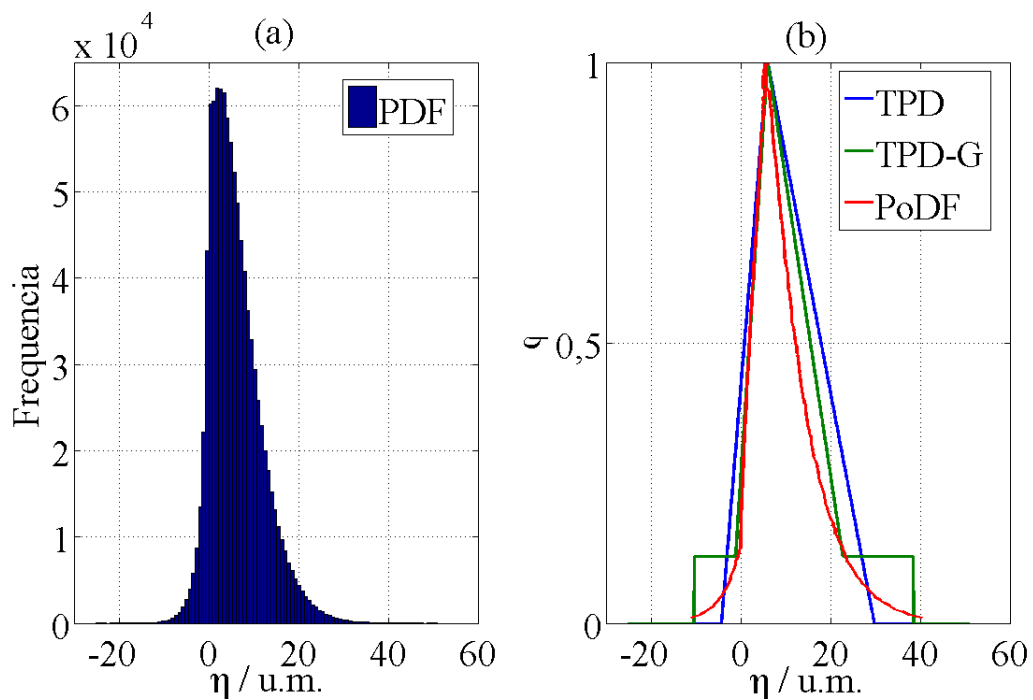


Tabela 3.8: Comparação dos diferentes métodos apresentados para avaliação dos intervalos de abrangências aplicados a uma função de medição do tipo  $Y = X_1 \cdot X_2$

Metodo	Estimativa / u.m	Intervalo de abrangência / u.m				Tempo / s
		90%	95%	99%	99,99%	
GUM	6,00	[-2,40 ; 14,40]	[-4,02 ; 16,02]	[-7,17 ; 19,17]	[-13,91 ; 25,91]	0,042
GUM-S1	5,98	[-2,15 ; 15,40]	[-3,41 ; 18,61]	[-6,37 ; 25,55]	[-15,78 ; 43,06]	2,503
TPD	6,00	[-3,22 ; 27,37]	[-3,73 ; 28,56]	[-4,14 ; 29,51]	[-4,30 ; 29,74]	0,136
TPD-G	6,00	[-2,35 ; 24,99]	[-18,48 ; 50,46]	[-18,48 ; 50,46]	[-18,48 ; 50,46]	0,030
PoDF	6,24	[-1,24 ; 24,69]	[-4,12 ; 29,54]	[-10,96 ; 40,48]	[-14,08 ; 50,24]	68,515

Na avaliação do mensurando, tanto no caso linear quanto no não linear, o esforço computacional exigido na avaliação usando os conjuntos ótimos é muito maior do que as outras metodologias. Isto se deve ao emprego do princípio da extensão que envolve combinações entre os universos de discursos de cada conjunto considerado na função de medição e a avaliação dessa função para todas as combinações. A própria construção do conjunto envolve algoritmos de integração e interpolação, que para melhores resultados necessitam de uma boa discretização. Assim como o GUM-S1, o princípio da extensão torna seu esforço maior, quanto maior for a complexidade da função de medição.

A avaliação pela TPD-G é a mais rápida e resulta em uma boa avaliação da estimativa e do intervalo máximo. Essas informações são úteis, pois permitem a avaliação da incerteza, uma vez que a transformação inversa, possibilidade/probabilidade (DUBOIS; PRADE; SANDRI, 1993; DUBOIS et al., 2004)[15]), não é comumente aplicada.

Sendo o conjunto TPD gerado por uma função linear, esse será simétrico, portanto sua incerteza pode ser avaliada usando uma das equações da Tabela 8. Entretanto, para funções não lineares a incerteza poderá ser avaliada com base no princípio da entropia máxima. Neste caso, as informações presentes são os limites e a estimativa o que resulta numa PDF triangular Equação 3.14.

Tabela 3.9: Comparação dos diferentes métodos apresentados para avaliação das incertezas combinadas

Método	Linear		Não linear	
	Estimativa /u.m.	$u_c$ / u.m	Estimativa /u.m.	$u_c$ / u.m
GUM	5,0	2.3	6,0	5.1
GUM-S1	5,0	2.3	6,0	5.8
TPD	5,0	2.6	6,0	7.12
TPD-G	5,0	3.1	6,0	14.3

A Tabela 3.9 mostra os resultados encontrados para incerteza padrão combinada do mesurando  $Y$ . Devido à implementação do princípio da extensão, as incertezas



encontradas pela metodologia *fuzzy* resultaram em valores maiores quando comparadas com o GUM e GUM-S1, sendo muito maiores para propagação em função não lineares.

A utilização dos conjuntos *fuzzy* para representar uma grandeza de entrada é viável, embora existam limitações do seu uso na propagação da incerteza da variável considerada. como, por exemplo, o decréscimo da especificidade do conjunto *fuzzy* gerado pela característica inerente ao princípio da extensão. Uma vez que a utilização da PDF pode resultar em integrais sem solução analítica e de alto esforço computacional para soluções numéricas (LIRA, 2011a), os conjuntos *fuzzy* podem ser aproveitados em métodos de identificação de modelos com intuito de avaliar os intervalos de abrangências.

### **3.3 Propagação da incerteza em regime dinâmico pelo método Monte Carlo**

Nas secções anteriores, foram apresentados e discutidos métodos de avaliação da incerteza em regime estacionário. Quando se trata de processos industriais, mesmo em operação normal, o regime dinâmico é a regra e não exceção, o que estabelece a necessidade de desenvolver modelos e avaliar a incerteza de medição e a sua propagação nestas condições.

Nesta secção será apresentado o método apresentado por Martins e Kalid (2010) para a avaliação da incerteza em regime transiente. Por considerar a influência das incertezas dos parâmetros da função de medição, das entradas e a correlação temporal do mensurando em regime transitório, essa metodologia se apresenta como uma avaliação robusta da incerteza em regime dinâmico e será tida como referencia para comparação do método proposto nesse trabalho (Capítulo 4).

Foi mostrado (Secção 3.1.2) que a lei de propagação de PDFs é usada para ultrapassar os limites/restrições da lei de propagação de incertezas.

Martins e Kalid (2010) apresenta a extensão do GUM-S1, que até então estava definido para regime estacionário, para aplicações em caso dinâmico.

No estado transitório tanto o mesurando como as grandezas de entradas variam com tempo, por isso a função de medição (Equação 3.2) pode ser genericamente descrita por:

$$\mathbf{y} = f(t, \mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)) \quad (3.58)$$

onde  $\mathbf{y} = (Y(t_1), \dots, Y(t_m))^T$  e  $\mathbf{x}_i = (X_i(t_1), \dots, X_i(t_m))^T$  são vetores contendo os valores das grandezas nos instantes de tempo  $(t_1, \dots, t_m)^T$ .

Analogamente ao mesurando do estado estacionário, no regime dinâmico o conhecimento sobre o mesmo é representado por uma PDF. Porém no regime transitório se estabelece inevitavelmente a autocorrelação entre o mesurando no tempo atual em relação a instantes passados. Por tanto a PDF do mesurando passa a ser uma PDF conjunta para os instantes.

$$g_{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\eta}) = g_{\mathbf{y}}(\eta_1, \dots, \eta_m) \quad (3.59)$$

onde  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_m)^T$ , vetor de possíveis valores do mesurando em regime transitório nos instantes de tempo discreto. Por consequência, a PDF conjunta do mesurando é obtida por:

$$g_{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\eta}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\boldsymbol{\eta} - f(\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_N)) \cdot g_{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_N}(\xi_{1,1}, \dots, \xi_{i,j}, \dots, \xi_{N,m}) d\xi_{1,1}, \dots, d\xi_{i,j}, \dots, d\xi_{N,m} \quad (3.60)$$

Da mesma forma que foi usada a simulação Monte Carlo (MCM) para a resolução da Equação 3.33, Martins e Kalid (2010) utiliza o mesmo recurso técnico para obter a PDF conjunta do mesurando em regime dinâmico.

### 3.3.0.2 Método Monte Carlo: Dinâmico

Quando o Método de Monte Carlo é aplicado para a resolução da LPP no regime estacionário são necessárias  $M$  amostras aleatórias selecionadas a partir das PDFs conjuntas das grandezas de entrada.

Para o regime dinâmico é necessário gerar essas amostras em cada instante de tempo para as entradas. Dessa forma a cada intervalo de tempo é feito uma LPP.

Então para construir a PDF empírica (Equação 3.61) do mensurando, são realizadas  $M$  simulações da função de medição (Equação 3.2) a partir das amostras geradas da PDFs conjunta das grandezas de entrada a cada instante de tempo.

$$\begin{cases} \eta_1^k = f(\xi_{1,1}^k, \dots, \xi_{N,1}^k) \\ \vdots = \vdots \\ \eta_j^k = f(\xi_{1,j}^k, \dots, \xi_{N,j}^k) \\ \vdots = \vdots \\ \eta_m^k = f(\xi_{1,m}^k, \dots, \xi_{N,m}^k) \end{cases}, \quad k = 1, \dots, M. \quad (3.61)$$

Obtida a PDF empírica do mensurando, é feita a mesma análise realizada no MCM em estado estacionário para obter-se a estimativa (Equação 3.62), variância (Equação 3.63) e intervalo de abrangência (Equação 3.65) em cada instante de tempo.

$$y(t_j) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \eta_j^k \quad (3.62)$$

$$u_c(y(t_j)) = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^M (\eta_j^k - y(t_j))^2} \quad (3.63)$$

$$p = \hat{G}_{Y(t_j)}(\eta_j^{\max}) - \hat{G}_{Y(t_j)}(\eta_j^{\min}) \quad (3.64)$$

$$I_j = [\eta_j^{\min}, \eta_j^{\max}] \quad (3.65)$$

Como comentado, no regime dinâmico existe a covariância entre os instantes de tempo de tal forma que a PDF conjunta é obtida pelo MCM. Por tanto, desta PDF pode ser extraída mais uma informação, a autocovariância associada a estimativa (Equação 3.62), dada pela Equação 3.66.

$$u(y(t_j), y(t_l)) = \frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^M (\eta_j^k - y(t_j)) \cdot (\eta_l^k - y(t_l)), \quad j \neq l = 1, \dots, m \quad (3.66)$$

Novamente, fazendo referência ao estado estacionário (Secção 3.1.1), cada  $X_i$  pode ser escrito por uma função de medição (Equação 3.3), pois são dependentes de outras grandezas que afetam a sua variabilidade. No caso dinâmico essas funções de medições são, geralmente, representadas por um SEDO (Sistema de Equações

Diferencias Ordinárias) (MARTINS; KALID, 2010).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_1(t)}{dt} = f_1(W_1(t), \dots, W_E(t)) \\ \vdots = \vdots \\ \frac{dX_i(t)}{dt} = f_i(W_1(t), \dots, W_E(t)) \\ \vdots = \vdots \\ \frac{dX_N(t)}{dt} = f_N(W_1(t), \dots, W_E(t)) \end{array} \right. , \quad (3.67)$$

onde  $W_E(t)$  é a  $e$ -ésima variável exógena que são rigorosamente função do tempo e parâmetros (Equação 3.68) (HISKENS; PAI; NGUYEN, 2000).

$$W_E(t) = f_E(t; \text{parâmetros}). \quad (3.68)$$

Portanto a construção da PDF empírica de  $X_i(t)$  é obtida através de  $M$  simulações MCM, do SEDO (Equação 3.67), a partir das amostras retiradas da PDF conjunta dos parâmetros (principal fonte de incertezas) que são atualizadas a cada instante  $t_j$ , garantindo melhor representatividade do sistema (MARTINS; KALID, 2010).

---

# Capítulo 4

## Materiais e métodos

---

*“Planejar: preocupar-se por encontrar o melhor método para conseguir um resultado acidental”*

Ambrose Bierce

Buscando entender os fenômenos naturais, o homem tem procurado descrevê-los matematicamente através de técnicas de modelagem (AGUIRRE, 2000). Esses modelos geralmente são obtidos por duas vias: A tradicional modelagem fenomenológica, geralmente descrita através de equações de conservação, e a modelagem empírica que contempla essencialmente a proposta de uma estrutura de modelo e a estimação de parâmetros através da medição de dados do processo analisado (AGUIRRE; RODRIGUES; JÁCOME, 1998; AGUIRRE, 2000). Em ambas as abordagens, o conhecimento *a priori* sobre o sistema em estudo é sempre importante para o sucesso da modelagem (PAIVA, 1999).

O avanço dos computadores, favorecendo a aquisição o processamento de dados coletados e a compreensão sobre a dinâmica dos processos (AGUIRRE, 2000), e complexidades de processo que precisavam ser conhecidos, são apontados como as possíveis causas para o crescimento das técnicas empregadas para a modelagem empírica (AGUIRRE, 2000).

No escopo da modelagem empírica, uma estrutura de modelo bem conhecida para a representação de sistemas dinâmicos é a (N)ARX – ((Nonlinear) Auto-Regressive with eXogenous inputs) onde o sinal da grandeza de saída do sistema, em um determinado instante, é uma função da própria saída em instantes passados e também dos valores passados das variáveis de entrada. Aguirre, Rodrigues e Jácome (1998) apresentam uma série de vantagens e desvantagem sobre esta técnica, além de mostrar uma revisão sobre o tema de identificação de modelos.

Com o propósito de representar melhor o sistema, técnicas que permitam a inclusão de informação sobre o mesmo durante a sua identificação tem sido de interesse na comunidade científica (AGUIRRE; RODRIGUES; JáCOME, 1998). Elas são diferentes, pois são baseadas em métodos que emulam um sistemas biológicos e inteligência humana, fazendo o uso de linguagem natural, regras, redes semânticas ou modelos qualitativos, com destaque para redes neurais e lógica *fuzzy*. As redes neurais funcionam com base no funcionamento do cérebro humano e, de acordo com a topologia empregada, possuem um potencial intrínseco de predição. Alguns autores (BABUSKA; VERBRUGGEN, 1996) destacam a pouca “transparência” presente nos modelos neurais permitindo pouca (ou nenhuma) inclusão de conhecimento prévio do processo.

Como alternativa a mesclar o conhecimento subjetivo e objetivo, a lógica *fuzzy* se destaca (BABUSKA; VERBRUGGEN, 1996), pois é baseada no conhecimento heurístico como complemento ao conhecimento empírico, representando as características de um determinado sistema por meio de regras e variáveis linguísticas (MAMDANI, 1977; TAKAGI; SUGENO, 1985; MENDEL, 2000).

Na medida em que as observações do mundo externo, materializadas através de medições das variáveis de processo, representam a “matéria-prima” em processos de identificação (modelagem empírica), é lógico considerar que a incerteza inerente à medição tenha influência direta na qualidade do modelo obtido. Algumas técnicas capazes de inserir a incerteza de medição no processo de identificação são propostas na literatura. Mouzouris e Mendel (1997a) e Mouzouris e Mendel (1997b) equacionam um NSFIS usando apenas conjuntos *fuzzy* na forma gaussiana ou triangular para a modelagem de sistemas imprecisos; Serra e Bottura (2007) mostra uma abordagem matemática para a inclusão de ruído no consequente de um FIS do tipo TSK usando o conceito de número *fuzzy* e variáveis instrumentais. Lira (2011a) e Lira (2011b) fazem uso da inferência bayesiana para estimar os parâmetros de uma curva de calibração através dos Mínimos Quadrados.

Técnicas de identificação em sistemas dinâmicos que incluem incertezas de medição apresentam bons resultados, a exemplo de Kalman (1960) que apresentou a construção de um filtro baseado no conceito de reconciliação dinâmica. Por outro

lado, metodologias de avaliação de um mensurando dinâmico necessitam de uma função de medição definida. Neste sentido, novas abordagens que possam englobar as duas vertentes, identificação e propagação da incerteza dinâmica, são recentes. Em seu livro, Mendel (2000) aponta o NSFIS como uma alternativa para a solução deste problema. Ferrero, Salicone e Todeschini (2007) e Ferrero, Federici e Salicone (2010) apresentam a construção de um NSFIS, do tipo Mamdani, baseado na transformação da incerteza em conjuntos *fuzzy* proposta por Ferrero e Salicone (2004). Fontes et al. (2011b) apresenta uma alternativa de NSFIS do tipo TSK com regras montadas heurísticamente, utilizando a transformação de probabilidade/ possibilidade proposta por Mauris, Lasserre e Foulloy (2000) e Mauris, Lasserre e Foulloy (2001) e um consequente do tipo NARX para considerar a influência da incerteza em instantes passados.

## 4.1 Definição do FIS

Como visto na Secção 2.2.2, as entradas de um sistema FIS devem assumir a forma de um conjunto *fuzzy* caracterizado por uma função de pertinência. Essas funções são obtidas pelos fuzzificadores e podem ser do tipo *singleton*, quando não há incerteza sobre o valor observado (medido), ou caso contrário *non-singleton*.

No entanto, sabe-se que a todo resultado proveniente de um sistema de medição existe uma dúvida (ALBERTAZZI; SOUSA, 2008), ou seja, uma incerteza associada que pode ser traduzida em uma função de distribuição de probabilidade (PDF) (BIPM et al., 2008a). Dessa forma, pode-se dizer que existe uma função de distribuição de possibilidade (PoDF) equivalente obtida através da transformação probabilidade/possibilidade (Secção 3.2.2).

Portanto, neste trabalho, cada observação, em um dado instante de tempo, possui uma PDF associada e deverá ser fuzzificada através da transformação proposta por (MAURIS; LASSERRE; FOULLOY, 2000), obtendo um conjunto *fuzzy* na forma TPD (Secção 3.2.2.1).

Por se tratar de regime dinâmico, as PDFs das grandezas envolvidas no processo de identificação são construídas com base na informação de dados históricos e do

conhecimento do processo, o que permite inferir uma variância relativa da medida.

Também foi visto (Secção 2.2.3) que a escolha dos operadores *t-norma* e *t-conorma* influenciam no valor encontrado, tanto para a fuzzificação como na determinação do *nível de ativação* (Equação 2.21). Neste trabalho os melhores resultados foram encontrados usando as *t-norma* e a *t-conorma* de Zadeh, ou seja, mínimo e máximo, respectivamente.

O modelo proposto compreende um sistema de inferência *fuzzy* com entrada na forma *non-singleton* (NSFIS) e com o consequente formado por um modelo de estrutura NARX (*Nonlinear Autoregressive model with exogenous variables*).

O modelo NARX é um modelo discreto cuja estimativa da saída,  $\hat{y}$  é obtida em função de predições anteriores e valores passados das entradas (BABUSKA; VERBRUGGEN, 1996). Esses modelos conseguem explicar o comportamento dinâmico, ou seja, traduzem as correlações dos dados da grandeza de saída,  $Y$  (AGUIRRE, 2000).

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+1) = f & [\hat{y}(k), \dots, \hat{y}(k-n_Y+1) \\ & x_1(k-\tau_{d,1}), \dots, x_1(k-\tau_{d,1}-n_{X_1}+1), \dots \\ & x_N(k-\tau_{d,N}), \dots, x_N(k-\tau_{d,N}-n_{X_N}+1)] \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde,  $\hat{y}(k+1)$  é a estimativa do mesurando no instante  $k+1$  a partir de um modelo identificado,  $n_Y$ ,  $n_{X_i}$  são o número de valores passados da saída e da entrada e  $\tau_{d,N}$  é o tempo da saída  $Y$  em relação à entrada  $X_i$

Combinando a Equação 4.1 com a Equação 2.18 tem-se a seguinte regra genérica de um sistema de inferência *fuzzy*, na abordagem TSK com entrada *singleton* (BABUSKA; VERBRUGGEN, 1996; AGUIRRE; RODRIGUES; JÁCOME, 1998):

$$\begin{aligned} R^l : & \text{SE } \hat{y}(k) \text{ é } G^{1,l} \text{ E } \dots \text{ E } \hat{y}(k-n_Y+1) \text{ é } G^{n_Y,l} \\ & \text{E } x_1(k-\tau_{d,1}) \text{ é } F^{1,l} \text{ E } \dots \text{ E } x_1(k-\tau_{d,1}-n_{X_1}+1) \text{ é } F^{n_{X_1},l} \\ & \text{E } x_N(k-\tau_{d,N}) \text{ é } F^{n,l} \text{ E } \dots \text{ E } x_N(k-\tau_{d,N}-n_{X_N}+1) \text{ é } F^{n+n_{X_N},l} \quad (4.2) \\ \text{ENTÃO } & \hat{y}^l(k+1) = c_0^l + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_{X_i}} b_{i,j}^l \cdot x_i(k-\tau_{d,i}-j+1) \\ & + \sum_{o=1}^{n_Y} a_o^l \cdot \hat{y}(k-o+1), \end{aligned}$$

onde  $n = 1 + \sum_{i=1}^{N-1} n_{X_i}$ .



E pela Equação 2.24, chega-se a seguinte expressão:

$$\hat{y}(k+1) = \frac{\sum_{l=1}^L \omega^l \cdot \hat{y}^l(k+1)}{\sum_{l=1}^L \omega^l} \quad (4.3)$$

Para o caso de entradas na forma *non-singleton*, a regra genérica para um NSFIS fica:

$$\begin{aligned} R^l : & \text{SE } \hat{Y}(k) \text{ é } G^{1,l} \text{ E } \dots \text{ E } \hat{Y}(k - n_Y + 1) \text{ é } G^{n_Y,l} \\ & \text{E } X_1(k - \tau_{d,1}) \text{ é } F^{1,l} \text{ E } \dots \text{ E } X_1(k - \tau_{d,1} - n_{X_1} + 1) \text{ é } F^{n_{X_1},l} \\ & \text{E } X_N(k - \tau_{d,N}) \text{ é } F^{n,l} \text{ E } \dots \text{ E } X_N(k - \tau_{d,N} - n_{X_N} + 1) \text{ é } F^{n+n_{X_N},l} \\ \text{ENTÃO } & \hat{Y}^l(k+1) = c_0^l + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_{X_i}} b_{i,j}^l \cdot X_i(k - \tau_{d,i} - j + 1) \\ & + \sum_{o=1}^{n_Y} a_o^l \cdot \hat{Y}(k - o + 1), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\hat{Y}(k+1) = \frac{\sum_{l=1}^L \omega^l \cdot \hat{Y}^l(k+1)}{\sum_{l=1}^L \omega^l}, \quad (4.5)$$

onde,  $\hat{Y}(k+1)$  é o conjunto *fuzzy* estimado pelo modelo para o instante  $k+1$ .

Por questão de simplificação de simbologia, os conjunto *fuzzy* provenientes da transformação das medições das entradas ( $A_{X_i}$ ) e os os inferidos para a saída ( $A_{\hat{Y}}$ ) estão representados apenas por  $X_i$  e  $\hat{Y}$ .

Note que as Equações 4.4 e 4.5 são avaliações de funções sobre conjuntos *fuzzy*. Sendo assim, ambas as equações são resolvidas pelo princípio da extensão (Equações 3.55 e 3.56). No entanto simplificações de cálculo, devido o uso dos conjuntos TPD, permitem reduzir o elevado esforço computacional inerente à aplicação do princípio da extensão (MAURIS; LASSERRE; FOULLOY, 2001).

#### 4.1.1 NSFIS do tipo TPD

Como visto na Secção 3.2.3.1 as operações entre os conjuntos TPDs são realizadas paralelamente sobre as suas partes, uniforme e triangular, e em seguida as partes resultantes dessas operações são combinadas para formar o TPD final. Para a utilização deste conjunto (TPD) diretamente em um NSFIS do tipo TSK, foi desenvolvido neste trabalho um procedimento análogo que compreendeu a fuzzificação também

em duas etapas tendo-se, portanto, a geração de dois níveis de ativação (partes triangular e uniforme) que foram em seguida processados através de um operador de união.

Considere uma amostra contendo o resultado das  $M$  medições para as  $N$  variáveis de entrada, ou seja, valores para estimativas e incertezas. A propagação dos TPDs das grandezas para o mensurando, através de um NSFIS-TSK, segue os seguintes passos:

**Passo 1:** Obter os  $M$  TPDs para cada grandeza de entrada;

**Passo 2:** Separar cada conjunto nas partes uniforme e triangular;

**Passo 3:** Obter a parte uniforme de saída através do NSFIS-TSK utilizando as partes uniformes dos TPDs de entrada;

**Passo 4:** Realizar o Passo 3 usando a parte triangular dos TPDs de entrada para a geração da parte triangular do TPD do mensurando;

**Passo 5:** Fazer a união das partes triangular e uniforme através do operador máximo;

Considerando um NSFIS com consequentes NARX (Equação 4.4), esses passos são realizados para cada instante  $k$ , considerando o número de valores passados de cada variável de entrada do modelo e os respectivos tempos mortos.

A grande vantagem do TPD é a utilização de equações algébricas para a propagação reduzindo o esforço computacional exigido para avaliação das funções de distribuição de possibilidades através do princípio da extensão (Secção 3.2.3.1).

Portanto, analogamente às expressões obtidas por Mauris, Lasserre e Foulloy (2001), aplicando-se as equações das Tabelas 4 e 5 juntamente com a Equação B.8 (combinação linear de conjuntos *fuzzy* intervalares) em um NSFIS-NARX, chega-se às seguintes expressões algébricas (Equação 4.6) para cálculo da variável de saída,

predita pelo modelo Equação 4.4 na forma de um conjunto TPD.

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{y}^* (k+1) = c_0^l + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_{X_i}} b_{i,j}^l \cdot x_i^* (k - \tau_{d,i} - j + 1) + \sum_{o=1}^{n_Y} a_o^l \cdot \widehat{y}^* (k - o + 1) \\ \epsilon_{\widehat{Y}^l(k+1)} = \min \left[ \bigwedge_{i=1}^N \bigwedge_{j=1}^{n_{X_i}} \epsilon_{X_i(k-\tau_{d,i}-j+1)}, \bigwedge_{o=1}^{n_Y} \epsilon_{\widehat{Y}^l(k-o+1)} \right] \\ \widehat{\underline{y}}_\epsilon^l (k+1) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_{X_i}} |b_{i,j}^l| \cdot \overline{x}_{i_\epsilon} (k - \tau_{d,i} - j + 1) + \sum_{o=1}^{n_Y} |a_o^l| \cdot \widehat{\underline{y}}_\epsilon (k - o + 1) \\ \widehat{\underline{y}}_\epsilon^l (k+1) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_{X_i}} |b_{i,j}^l| \cdot \underline{x}_{i_\epsilon} (k - \tau_{d,i} - j + 1) + \sum_{o=1}^{n_Y} |a_o^l| \cdot \widehat{\underline{y}}_\epsilon (k - o + 1) \\ \widehat{\underline{y}}_n^l (k+1) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_{X_i}} |b_{i,j}^l| \cdot \overline{x}_{i_n} (k - \tau_{d,i} - j + 1) + \sum_{o=1}^{n_Y} |a_o^l| \cdot \widehat{\underline{y}}_n (k - o + 1) \\ \widehat{\underline{y}}_n^l (k+1) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_{X_i}} |b_{i,j}^l| \cdot \underline{x}_{i_n} (k - \tau_{d,i} - j + 1) + \sum_{o=1}^{n_Y} |a_o^l| \cdot \widehat{\underline{y}}_n (k - o + 1) \end{array} \right. \quad (4.6)$$

onde,  $\widehat{y}^* (k+1)$  é a estimativa do mensurando obtida pelo modelo em cada regra  $l$ ,  $\epsilon_{\widehat{Y}^l(k+1)}$ ,  $\widehat{\underline{y}}_\epsilon^l (k+1)$ ,  $\widehat{\underline{y}}_\epsilon (k+1)$  e  $\widehat{\underline{y}}_n^l (k+1)$  são parâmetros do TPD do mensurando no instante  $k+1$  obtida pelo modelo em cada regra  $l$ .

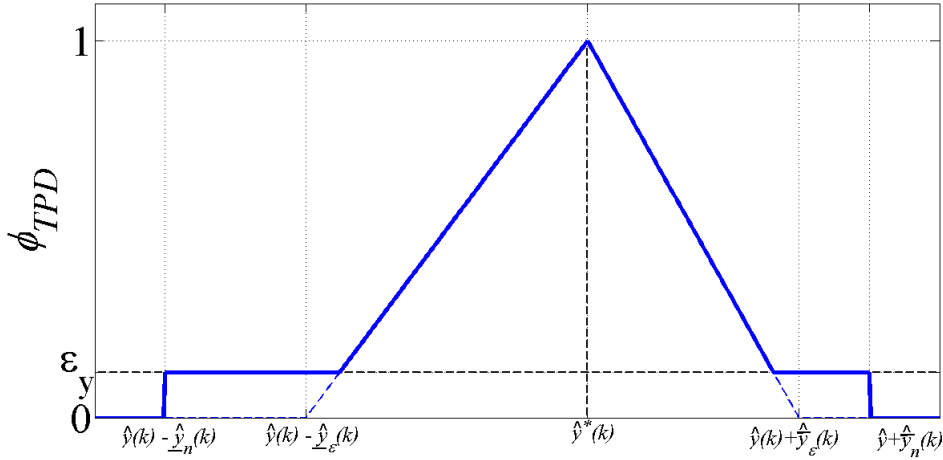
Por sua vez os parâmetros do TPD resultante no instante  $k+1$  são definidos por

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{y}^* (k+1) = \frac{\sum_{l=1}^L \omega_t^l \cdot \widehat{y}^* (k+1)}{\sum_{l=1}^L \omega_t^l} \\ \epsilon_{\widehat{Y}^l(k+1)} = \bigwedge_{l=1}^L \epsilon_{\widehat{Y}^l(k+1)} \\ \widehat{\underline{y}}_\epsilon (k+1) = \frac{\sum_{l=1}^L \omega_t^l \cdot \widehat{\underline{y}}_\epsilon^l (k+1)}{\sum_{l=1}^L \omega_t^l} \\ \widehat{\underline{y}}_\epsilon^l (k+1) = \frac{\sum_{l=1}^L \omega_t^l \cdot \widehat{\underline{y}}_\epsilon^l (k+1)}{\sum_{l=1}^L \omega_t^l} \\ \widehat{\underline{y}}_n (k+1) = \frac{\sum_{l=1}^L \omega_r^l \cdot \widehat{\underline{y}}_n^l (k+1)}{\sum_{l=1}^L \omega_r^l} \\ \widehat{\underline{y}}_n^l (k+1) = \frac{\sum_{l=1}^L \omega_r^l \cdot \widehat{\underline{y}}_n^l (k+1)}{\sum_{l=1}^L \omega_r^l} \end{array} \right. \quad (4.7)$$

onde,  $\widehat{y}^* (k+1)$  é a estimativa do mensurando obtida pelo modelo,  $\epsilon_{\widehat{Y}^l(k+1)}$ ,  $\widehat{\underline{y}}_\epsilon (k+1)$ ,  $\widehat{\underline{y}}_\epsilon^l (k+1)$  e  $\widehat{\underline{y}}_n (k+1)$  são parâmetros do TPD (Figura 4.1) do mensurando no instante  $k+1$  obtida pelo modelo,  $\omega_t^l$  e  $\omega_r^l$  são os *níveis de ativação* obtidos da fuzzificação da parte triangular e uniforme, respectivamente.

As equações 4.6 e 4.7 propõem, de forma inovadora, uma forma direta e viável de utilização dos conjuntos TPD, segundo Mauris, Lasserre e Foulloy (2001), em um NSFIS-NARX perfeitamente adequado para identificação de modelos dinâmicos.

Figura 4.1: Distribuição de possibilidade triangular truncada estimada pelo modelo



## 4.2 Identificação do modelo

O procedimento de identificação (estimação de parâmetros) da estrutura NSFIS-NARX compreende uma simulação recorrente de tal forma que para cada instante é feita uma fuzzificação *non-singleton* da variável de saída e estimado um novo conjunto para a variável de saída (em um instante de tempo a frente). Este valor estimado, por sua vez, é realimentado no modelo para estimação do conjunto de saída em um novo instante.

Embora os consequentes de cada regra (Equação 4.4) tenham uma estrutura linear, a combinação de todas as regras juntamente com a abordagem recorrente de identificação confere ao modelo uma característica essencialmente não linear e os parâmetros devem ser identificados por uma rotina de otimização. Por tanto será necessário determinar uma função objetivo e uma estimativa inicial para os parâmetros do NSFIS-NARX.

### 4.2.1 Estimativa inicial dos parâmetros

Se considerada a predição da variável de saída apenas um passo a frente e incertezas negligenciáveis, o NSFIS-NARX se torna um SFIS-ARX. Neste caso a estimação dos parâmetros através do método de mínimos quadrados possui solução analítica (Apêndice A).

Como apresentado na Secção 2.3, o algoritmo de SC (CHIU, 1994) viabilizou a definição das regras para o SFIS a partir de uma amostra de dados. A estimativa inicial dos parâmetros, então, foi obtida pelo método dos mínimos quadrados considerando predição da saída apenas um passo a frente com o sistema de regras determinado pelo algoritmo SC.

## 4.2.2 Função objetivo

Encontradas as estimativas iniciais para o problema de estimação de parâmetros do NSFIS-NARX proposto (Equações 4.4 e 4.5), o próximo passo consiste em definir uma função objetivo para a estimativa final de parâmetros do modelo considerando a situação recorrente (ou predição da saída múltiplos passos à frente).

Por considerar importante a inclusão da incerteza no processo de identificação, pode-se no primeiro momento assumir como função objetivo a equação proposta pelo MQP (Mínimos Quadrados Ponderado), com os termos ponderados por suas incertezas. Porém, uma das propostas da metodologia apresentada neste trabalho é que o modelo tenha a capacidade de fornecer a incerteza da variável de saída ao longo do tempo. Desta forma, foi adicionado um termo ao MQP conforme segue:

$$J = \sum_{k=1}^M \left( \frac{y^k - \hat{y}^k}{u_c(\hat{y}^k)} \right)^2 + \sum_{k=1}^M \left( \frac{u_c(y^k) - u_c(\hat{y}^k)}{u_c(\hat{y}^k)} \right)^2 \quad (4.8)$$

onde  $u_c(y^k)$  é a avaliação a priori da incerteza da variável de saída (mensurando dinâmico) obtida pelo conhecimento do processo no instante  $k$  e  $u_c(\hat{y}^k)$  é a incerteza predita pelo NSFIS no instante  $k$ .

À Equação 4.8 ainda pode ser adicionadas constantes de ponderação ou sintonia que atuem ponderando mais ou menos uma parcela ou uma dada janela de tempo importante para a identificação. Além disso, o RSME (*Roots Square Mean Erro*) é indicado para problemas de identificação de modelos *fuzzy* (MENDEL, 2000). Desta forma a função objetivo final adotada no problema de identificação ficou da seguinte forma:

$$J = \gamma_y \cdot \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \left( \frac{y^k - \hat{y}^k}{u_c(\hat{y}^k)} \right)^2} + \gamma_u \cdot \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \left( \frac{u_c(y^k) - u_c(\hat{y}^k)}{u_c(\hat{y}^k)} \right)^2} \quad (4.9)$$

onde  $\gamma_y$  e  $\gamma_u$  são as os pesos das parcelas da função objetivo (Equação 4.9)

É importante destacar que a ponderação dos Mínimos Quadrados é feita pelas variâncias avaliadas a cada instante que, por sua vez, são obtidas levando em consideração o conjunto *fuzzy* (na forma TPD) obtido no instante anterior, ou seja, a correlação temporal das grandezas de saída é considerada.

Como está sendo utilizada a propagação via conjuntos *fuzzy*, foi visto que essa abordagem é baseada na propagação dos intervalos de abrangência ao invés das variâncias. No entanto, a função objetivo considera explicitamente a incerteza do mensurando (variável de saída) estimado. Dessa forma, como será usado o método TPD de propagação, a cada instante é possível obter a estimativa e os limites simétricos do mensurando devido a característica linear da função (Secção 3.2.3.1) (considerando a propagação do instante  $k$  para  $k + 1$ ).

Buscando uma metodologia mais conservadora, os TPDs para as variáveis de entrada seguem a forma generalizada visando uma melhor avaliação da estimativa e dos limites máximos (Secção 3.2.3.1). Então, adaptando o cálculo dos limites do TPD-G mostrado na Tabela 3.3 para os parâmetros da TPD-G do mensurando resultante em um instante  $k$ , tem-se:

$$u_c(\hat{y}^k) = \frac{\hat{y}_{\max}^k - \hat{y}_{\min}^k}{6,4} \quad (4.10)$$

onde  $\hat{y}_{\min}^k = \hat{y}^{*k} - \hat{y}_n^k$  e  $\hat{y}_{\max}^k = \hat{y}^{*k} + \hat{y}_n^k$ .

Portanto, o problema de identificação compreende o seguinte problema de otimização:

$$\min_{\theta} J = \gamma_y \cdot \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{y^k - \hat{y}^k}{u_c(\hat{y}^k)}} + \gamma_u \cdot \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{u_c(y^k) - u_c(\hat{y}^k)}{u_c(\hat{y}^k)}} \quad (4.11)$$

Sujeito à:

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \mathbf{G} \cdot \theta \\ u_c(\hat{y}^k) &= \frac{\hat{y}_{\max}^k - \hat{y}_{\min}^k}{6,4} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Tendo-se a seguinte sequência de ações:

**Passo 1:** Determinação das ordens do modelo NARX, ou seja,  $n_Y$ ,  $n_{X_N}$ ;

- Passo 2:** Aplicação do algoritmo de agrupamento subtrativo para obter o número de regras e os conjunto *fuzzy* que compõe os antecedentes das regras;
- Passo 3:** Obtenção das estimativas iniciais do parâmetros através do SFIS-ARX equivalente à NSFIS-NARX (Apêndice A)
- Passo 4:** Obtenção dos TPDs para cada resultado de medição das  $N$  grandezas de entradas  $X_i$ ;
- Passo 5:** Resolução do problema de otimização proposto pela Equação 4.11 para obter  $\theta$  e  $u_c(\hat{y}^k)$ ;

---

# Capítulo 5

## Resultados e discussões

---

*“Penso noventa e nove vezes e nada descubro; deixo de pensar, mergulho em profundo silêncio e eis que a verdade se me revela”*

Albert Einstein

Estabelecidos os passos necessários para identificação do NSFIS proposto, serão mostradas aplicações da abordagem de identificação proposta em sistemas SISO (*Single Input Single Output*) e MISO (*Multiple Input Single Output*).

As incertezas das variáveis foram obtidas através do histórico de dados em estado regime estacionário e de informações sobre o sistema de medição. Estas incertezas são representadas na forma de incerteza relativa que, por sua vez, podem ser considerada como constante ao longo do tempo.

Os tempos de processamentos dos algoritmos referem-se a um computador configurado com duas unidades centrais de processamento CPU (*Central Processing Unit*) Intel® Xeon® E5620 2.4 GHz com 8 GB de RAM (*Random-Access Memory*) e sistema operacional Microsoft Windows® 64bits.

### 5.1 SISO: Estudo de Caso 1

No primeiro caso é apresentado um Tanque autorregulado (Figura 5.1) cujos parâmetros de projeto e respectivas incertezas estão apresentados na Tabela 5.1. Neste exemplo são realizadas as medições de altura de líquido no interior do Tanque (variável de saída,  $H$ ) e da vazão de alimentação (variável de entrada,  $Q_{in}$ ).

Ambas as incertezas mostradas na Tabela 5.1 foram avaliadas com base na hipótese de que os parâmetros do modelo fenomenológico (Equação ??) seguem uma



Figura 5.1: Ilustração do Tanque autorregulado

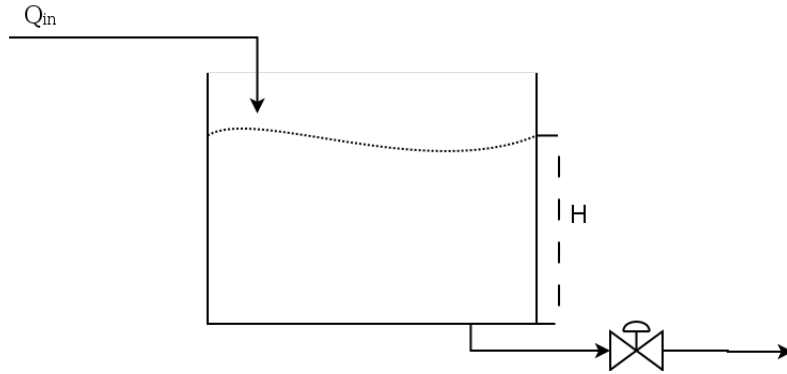


Tabela 5.1: Estimativas dos parâmetros de caracterização do Tanque e sua respectivas incertezas calculadas a partir de um distribuição uniforme

Parâmetros	Estimativa	Incerteza
Área da secção ( $a_s$ ) / $m^2$	0,93	0,03
Constante da válvula ( $c_v$ ) / ( $m^{2.5} \cdot s^{-1}$ )	0,80	0,09

distribuição uniforme com uma amplitude de 5% e 20% da respectiva estimativa.

Considerando o princípio da entropia máxima, o conhecimento da estimativa mais os limites de uma variável indica que esta pode ser caracterizada por uma distribuição triangular; contudo, visando majorar a incerteza sobre essas constantes (geralmente desprezadas frente às incertezas das variáveis), foi assumida uma distribuição uniforme.

O comportamento dinâmico da altura de líquido no interior do Tanque em relação à vazão de alimentação é modelado fenomenologicamente pela Equação 5.1.

$$\frac{dH}{dt} = \frac{Q_{in} - c_v \cdot \sqrt{H}}{a_s}. \quad (5.1)$$

Tanto a Equação 5.1 como as informações da Tabela 5.1 serão utilizadas para a propagação da incerteza dinâmica via Método de Monte Carlo (Secção 3.3.0.2).

Conhecido o processo, a próxima etapa consiste em estabelecer as ordens do modelo NARX e o tempo morto das grandezas envolvidas no modelo. Para este exemplo esses parâmetros foram assumidos iguais a unidades  $n_{X_i} = n_Y = \tau_{d,i} = 1$  o

que resulta em um modelo NARX do tipo (Equação 5.2):

$$\widehat{H}^l(k+1) = c_0^l + b_{1,1}^l \cdot Q_{\text{in}}(k-1) + a_1^l \cdot \widehat{H}(k) \quad (5.2)$$

A definição do modelo presente no consequente estabelece o número de antecedentes nas regras. Por sua vez, esta informação é útil para a aplicação do algoritmo de agrupamento subtrativo uma vez que será necessário fornecer os dados conforme a composição da equação do consequente.

Com base na Equação 5.2, o arranjo de exemplos para identificação do FIS a partir da matriz de dados históricos das medições (nesse caso as estimativas) da vazão de alimentação ( $q_{\text{in}}$ ) e altura no interior do tanque ( $h$ ), deve seguir a seguinte disposição:

$$\begin{bmatrix} q_{\text{in}}(0) & h(0) \\ \vdots & \vdots \\ q_{\text{in}}(t) & h(t) \\ \vdots & \vdots \\ q_{\text{in}}(M) & h(M) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} q_{\text{in}}(0) & h(1) & h(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{\text{in}}(t-2) & h(t-1) & h(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{\text{in}}(M-2) & h(M-1) & h(M) \end{bmatrix}$$

Só então é aplicado o algoritmo de SC (Secção 2.3.1) para a geração das regras, que resultou no seguinte SFIS-ARX com apenas duas regras:

$$\begin{aligned} R^1 : & \text{SE } q_{\text{in}}(k-1) \text{ é } C_{X_1}^1 \text{ E } h(k) \text{ é } C_{X_2}^1 \text{ ENTÃO } \widehat{h}^1(k+1) \\ R^2 : & \text{SE } q_{\text{in}}(k-1) \text{ é } C_{X_1}^2 \text{ E } h(k) \text{ é } C_{X_2}^2 \text{ ENTÃO } \widehat{h}^2(k+1) \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde:

$$\widehat{h}(k+1) = \frac{\sum_{l=1}^2 \omega^l \cdot \widehat{h}^l(k+1)}{\sum_{l=1}^2 \omega^l}, \quad (5.4)$$

A Figura 5.2 apresenta os conjuntos *fuzzy* encontrados através do agrupamento dos dados representados na Figura 5.3.

O NSFIS-NARX é gerado substituindo as estimavas ( $q_{\text{in}}$ ,  $h$ ) pelos conjuntos *fuzzy* resultantes ( $Q_{\text{in}}$ ,  $H$ ) da transformação das PDFs e realimentando o conjunto do mensurando gerado. Assim obtém-se:

$$\begin{aligned} R^1 : & \text{SE } Q_{\text{in}}(k-1) \text{ é } C_{X_1}^1 \text{ E } \widehat{H}(k) \text{ é } C_{X_2}^1 \text{ ENTÃO } \widehat{H}^1(k+1) \\ R^2 : & \text{SE } Q_{\text{in}}(k-1) \text{ é } C_{X_1}^2 \text{ E } \widehat{H}(k) \text{ é } C_{X_2}^2 \text{ ENTÃO } \widehat{H}^2(k+1) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Figura 5.2: Representação dos grupos e seus centros que compõe os antecedentes do NSFIS

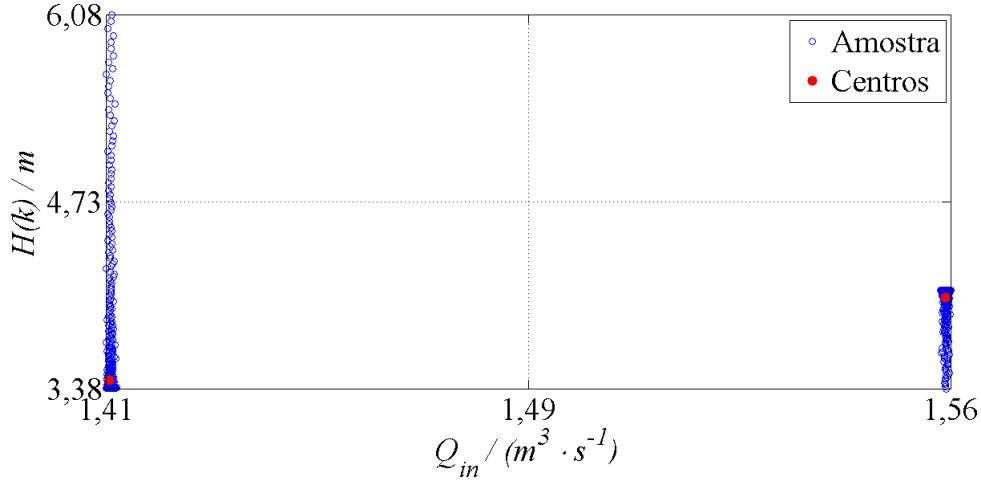
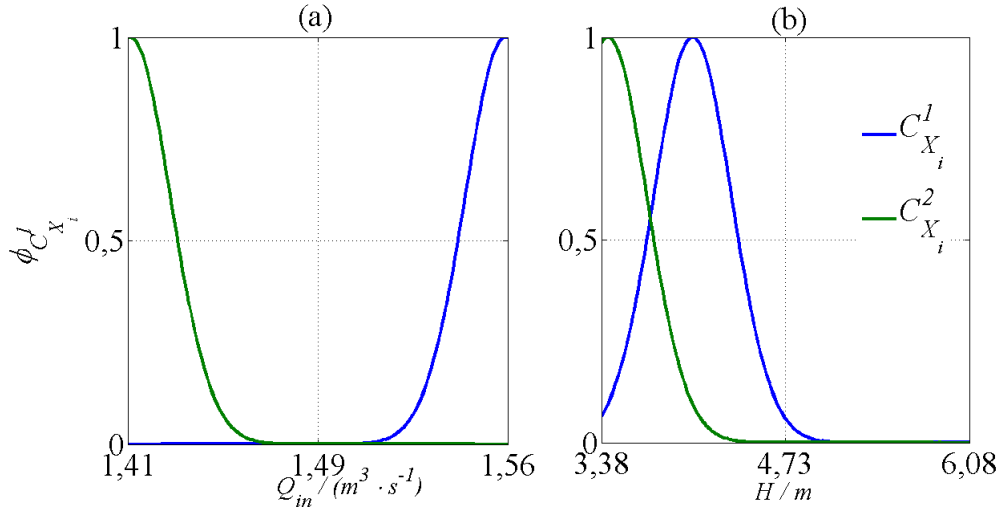


Figura 5.3: Representação dos conjuntos que compõe os antecedentes do NSFIS representado na Equação 5.5 : (a) Função de pertinência geradas a partir dos grupos encontrados para a vazão de alimentação  $X_1 \equiv Q_{in}$ ; (b) Função de pertinência dos grupos encontrados para o sinal de altura realimentada  $X_2 \equiv H(k)$



onde:

$$\hat{H}(k+1) = \frac{\sum_{l=1}^2 \omega^l \cdot \hat{H}^l(k+1)}{\sum_{l=1}^2 \omega^l}, \quad (5.6)$$

Definido o sistema de inferência *fuzzy*, a próxima etapa compreende a estimação de seus parâmetros ( $c_0^1$ ,  $c_0^2$ ,  $b_{1,1}^1$ ,  $b_{1,1}^2$ ,  $a_1^1$ ,  $a_1^2$ ).

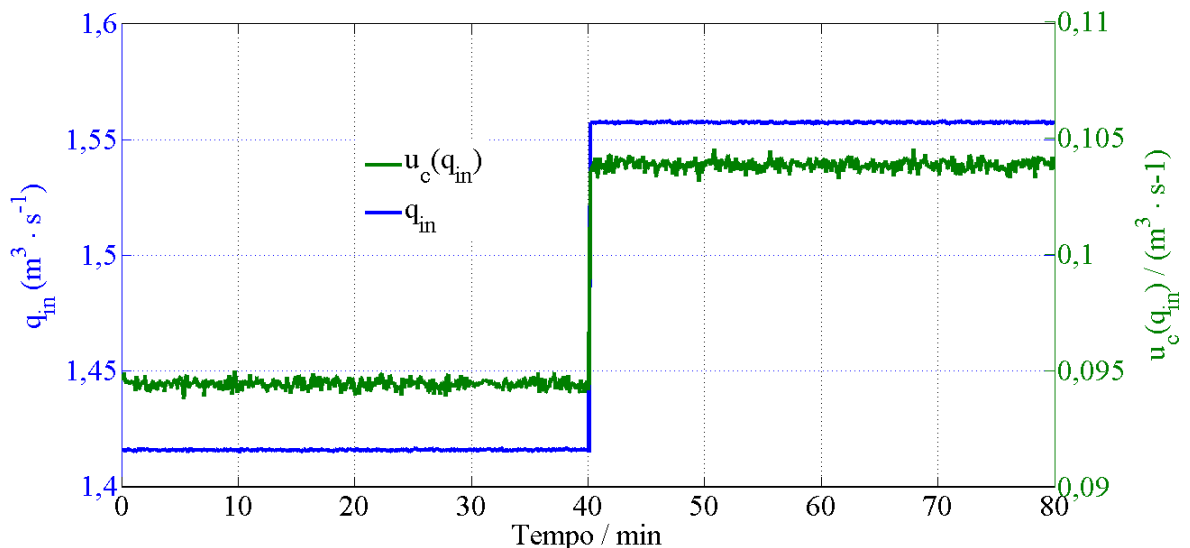
É necessário, entretanto, avaliar as incertezas das grandezas envolvidas que serão de suma importância para a construção dos TPDs. Para este trabalho as incertezas das grandezas envolvidas no procedimento de identificação ( $q_{in}$ ,  $h$ ) são avaliadas

através do comportamento em regime estacionário e de informações sobre o sistema de medição.

Por se tratar de uma simulação, foi assumido que as medições de altura e vazão possuíam variabilidades de 8% de amplitude para altura e 18% para a vazão, em relação aos valores medidos. Diferentemente dos parâmetros do modelo fenomenológico (Equação 5.1),  $a_s$  e  $c_v$ , para as variáveis de processo,  $Q_{in}$  e  $H$ , a hipótese adotada foi de que estas seguem uma distribuição gaussiana.

Assumindo o intervalo máximo correspondente a um probabilidade de abrangência de 99% e um grau de liberdade igual a 100 (Tabela 3), através da definição de incerteza expandida (Equação 3.30), as incertezas padrão combinadas relativas para a altura e vazão são de 3% e 7%, respectivamente.

De forma a ser mais conservador, optou-se pela TPD Generalizada usando a estimativa e a incerteza padrão para a sua construção. A Figura 5.4 mostra o comportamento da vazão de alimentação  $q_{in}$ , e sua incerteza ( $u_c(q_{in})$ ) ao longo do tempo

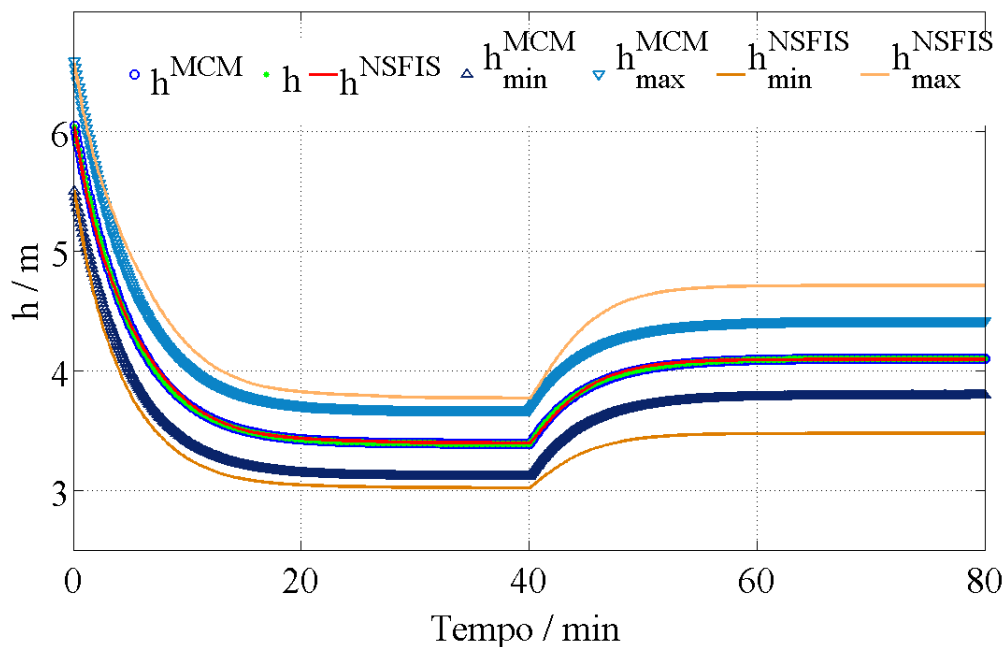


Concluídas as etapas anteriores, na medida em que existem dúvidas sobre o valor assumido para a incerteza, optou-se por priorizar o ajuste dos parâmetros do NSFIS pela estimativa do mensurando. Por tanto, foi assumido um valor  $\gamma_y = 1$  e (fator de

ponderação da primeira parcela da função objetivo, Equação 4.9) e  $\gamma_u = 0,5$  (fator de ponderação da segunda parcela da função objetivo, Equação 4.9)

Os resultados encontrados, para um valor da função objetivo  $J = 0,0072$ , foram então comparados com a propagação via MCM da Equação 5.1, como mostra a Figura 5.5. A Figura 5.6 mostra as PDFs empíricas e os conjuntos TPD gerais usados e gerados pelo NSFIS.

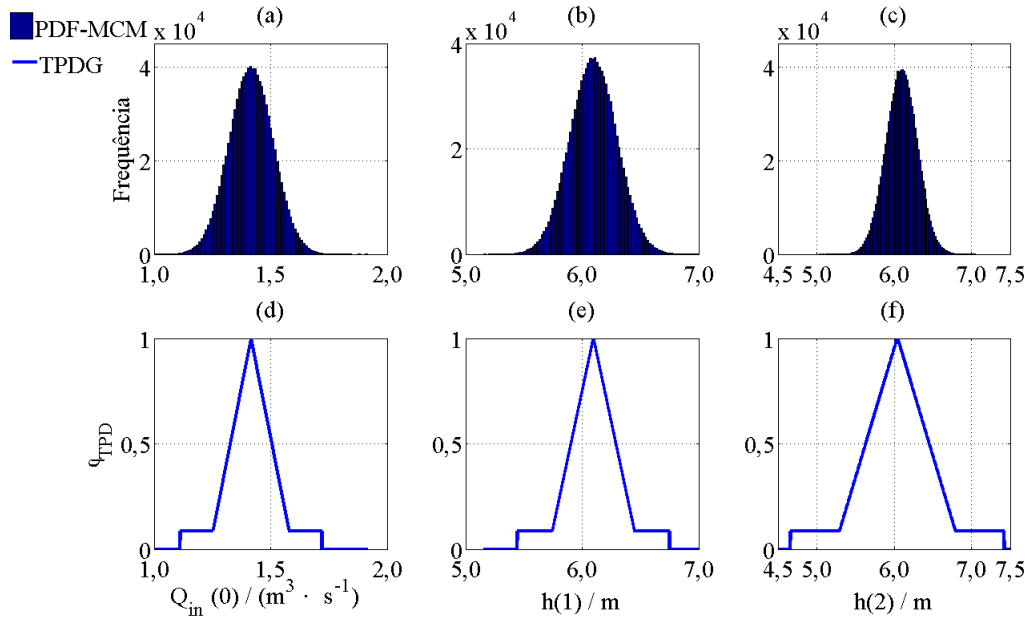
Figura 5.5: Comparação da metodologia desenvolvida (Sobreíndice NSFIS) com a propagação dinâmica via a simulação de Monte Carlo (Sobreíndice MCM) e a simulação da EDO (Equação 5.1) (Sem Sobreíndice)



É possível verificar que o NSFIS apresenta um bom desempenho quando comparado com a metodologia estocástica de propagação da incerteza dinâmica (MCM). Assumido como verdadeiro o resultado da simulação da equação diferencial fenomenológica sem incertezas, as simulações MCM e NSFIS conseguem acompanhar o comportamento do nível.

No âmbito dos limites, o NSFIS avalia um intervalo de abrangência maior (curvas alaranjadas da Figura 5.5) do que o obtido pelo MCM ( pontos azuis da Figura 5.5) para a mesma probabilidade de abrangência de 99%. Esse resultado era esperado

Figura 5.6: Representação das PDFs empíricas, na forma de histograma (a - vazão de alimentação inicial; b - altura no instante 1 e c - altura no instante 2), obtidas pelo MCM e os TPDs gerais (TPD-G) usados (d - vazão de alimentação inicial; e - altura no instante 1 e f - altura no instante 2).



devido às simplificações adotadas para o uso da metodologia proposta, sendo a principal delas o uso do conjunto TPD-G.

O conjunto TPD-G é uma simplificação da distribuição de possibilidade ótima (Secção 3.2.2.1), possuindo maiores intervalos para o mesmo nível de confiança Tabela 3.7. Somado a esse fator, o uso do princípio da extensão na operação de conjuntos *fuzzy* sempre resulta em um conjunto com menor especificidade. Isso impacta no resultado do intervalo de abrangência, pois quanto menos específico for o conjunto *fuzzy* maior a área e consequentemente maior o intervalo de abrangência.

Além disso, no modelo NSFIS-NARX a autocorrelação temporal da grandeza de saída é considerada realimentando os conjuntos estimados. Com isso, o efeito resultante do princípio da extensão, menor especificidade, tende a acumular, gerando maiores intervalos de abrangências. Contudo, no exemplo apresentado, a técnica proposta conseguiu identificar o comportamento dos intervalos a cada instante, mostrando que hipótese inicial, assumir uma incerteza relativa constante, é válida para os casos onde não se tem o valor da incerteza dinâmica.

A amostra utilizada é composta por 800 pontos com intervalos de tempo 0,1 min. Para a propagação via MCM, foram considerado amostras de  $1 \times 10^5$  pontos a cada instante para cada variável (2) e parâmetro (2) da equação diferencial (Equação 4.9), ou seja, ao final da simulação MCM foram processados  $800 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 2 = 3,2 \times 10^8$  pontos o que resultou em um tempo de processamento igual a  $2,59 \times 10^5$  segundos.

Para o modelo NSFIS-NARX, usando a mesma amostra, a cada instante de tempo são obtidos seis parâmetros que caracterizam a TPD da variável de saída (Tabela 3.3)e, portanto, a sua incerteza. Isto resulta em um número de pontos, a cada iteração, igual a  $800 \cdot 6 \cdot 2 = 9600$ . Dessa forma o tempo necessário para a identificação e simulação do modelo NSFIS-NARX foi de  $2,38 \times 10^2$  s.

O tempo de processamento para identificar e simular o NSFIS-NARX foi 1000 vezes menor do que o tempo para a simulação MCM, dada a equação diferencial. Os resultados avaliados pela metodologia apresentaram um bom rendimento acompanhando as tendências do fenômeno, fornecendo a estimativa da altura e um intervalo de abrangência coerente.

## 5.2 SISO: Estudo de Caso 2

O segundo estudo de caso compreendeu um reator CSTR de isomerização,  $A \rightarrow B$ , (Figura 5.7) cujo modelo fenomenológico (considerado como o processo real) foi extraído de Martins (2010) (Apêndice D).

Apesar de ser um sistema essencialmente MIMO, o NSFIS proposto para o caso visou identificar a dinâmica do efeito da vazão de catalisador na alimentação  $Q_{cat_{in}}$  do reator (variável de entrada do processo) sobre a concentração de reagente na descarga do reator  $C_B$ , o que resulta em um caso SISO.

A diferença mais importante entre este caso e os outros estudados está no comportamento da incerteza. Neste exemplo foram utilizadas as informações de incerteza proveniente de Martins (2010), não sendo mais admitida incerteza relativa constante ao longo do tempo. A Figura 5.8 mostra o comportamento da incerteza e das medições para  $Q_{cat_{in}}$ .

Figura 5.7: Representação esquemática do Reator de isomerização  $A \rightarrow B$

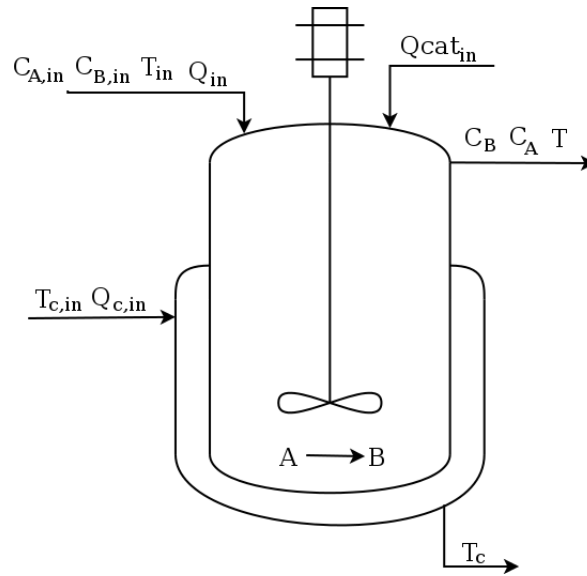
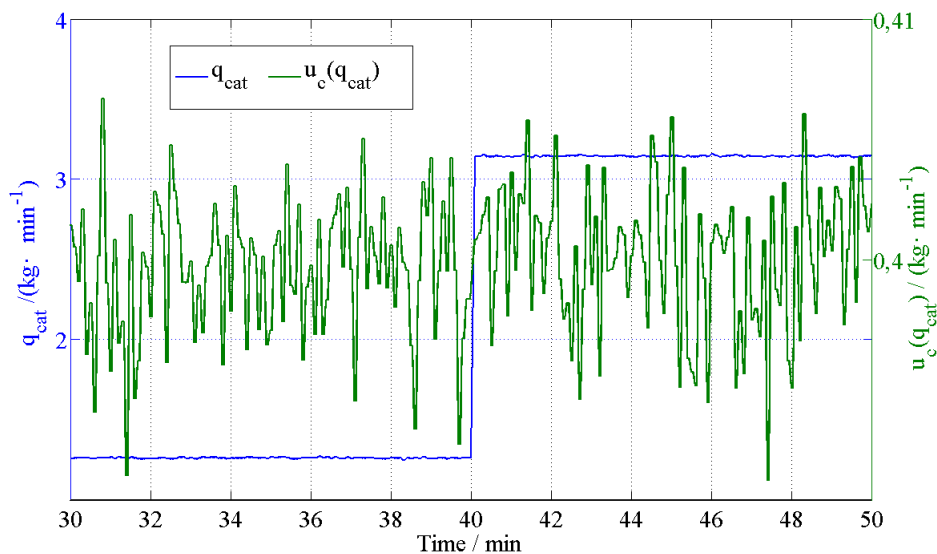


Figura 5.8: Comportamento da estimativa da vazão de catalisador da alimentação e sua incerteza ao longo do tempo



É possível verificar (Figura 5.8) que a incerteza de  $Q_{cat,in}$  tem um comportamento aleatório em torno do valor  $0,4 \text{ kg} \cdot \text{min}^{-1}$ , com comportamento de série estacionária. Nota-se ainda, que no instante igual a 40 min é feita uma perturbação degrau na estimativa da vazão e a incerteza não é alterada.

Nesta aplicação as regras foram definidas com base no conhecimento do processo, ou seja, a base de regras não foi gerada a partir de técnicas de agrupamento de dados. As variáveis linguísticas foram divididas em dois conjuntos cada (Figura 5.9)



e as regras foram obtidas através das combinações entre estas. Foi adotado um modelo NARX de primeira ordem (Equação 5.9) para os consequente de cada regra, compreendendo o seguinte NSFIS

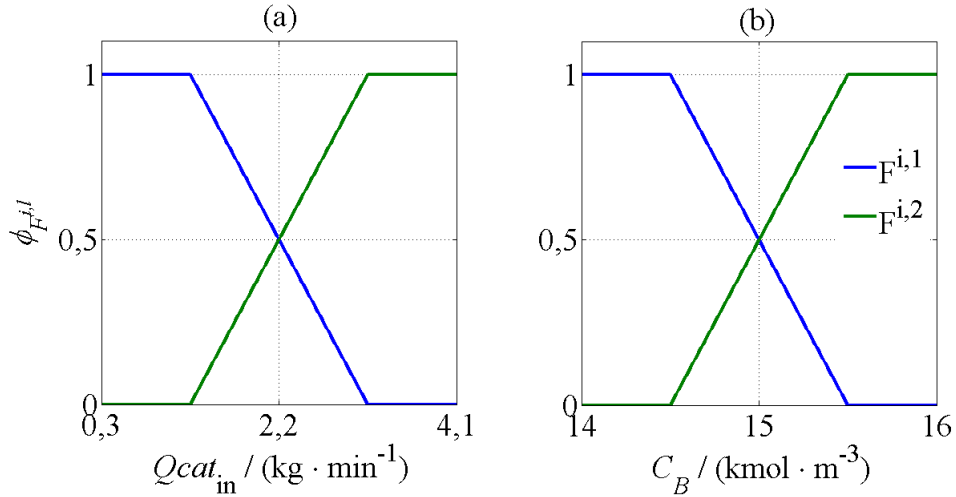
$$\begin{aligned}
 R^1 &: \text{ SE } Qcat_{in}(k-1) \text{ é } F^{1,1} \text{ E } \widehat{C}_B(k) \text{ é } F^{2,1} \text{ ENTÃO } \widehat{C}_B^1(k+1) \\
 R^2 &: \text{ SE } Qcat_{in}(k-1) \text{ é } F^{1,1} \text{ E } \widehat{C}_B(k) \text{ é } F^{2,2} \text{ ENTÃO } \widehat{C}_B^2(k+1) \\
 R^3 &: \text{ SE } Qcat_{in}(k-1) \text{ é } F^{1,2} \text{ E } \widehat{C}_B(k) \text{ é } F^{2,1} \text{ ENTÃO } \widehat{C}_B^3(k+1) \\
 R^4 &: \text{ SE } Qcat_{in}(k-1) \text{ é } F^{1,2} \text{ E } \widehat{C}_B(k) \text{ é } F^{2,2} \text{ ENTÃO } \widehat{C}_B^4(k+1),
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

onde:

$$\widehat{C}_B(k+1) = \frac{\sum_{l=1}^4 \omega^l \cdot \widehat{C}_B^l(k+1)}{\sum_{l=1}^4 \omega^l} \tag{5.8}$$

$$\widehat{C}_B^l(k+1) = c_0^l + b_{1,1}^l \cdot Qcat_{in}(k-1) + a_1^l \cdot \widehat{C}_B(k). \tag{5.9}$$

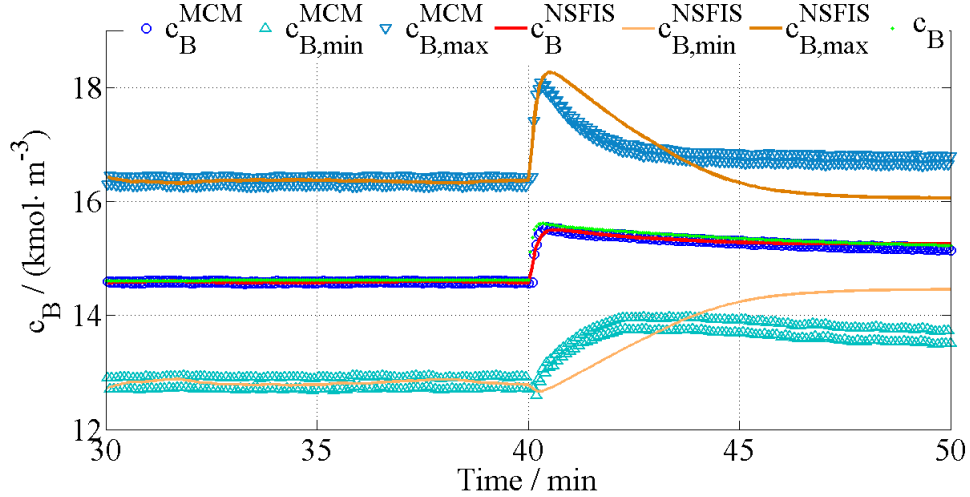
Figura 5.9: Representação dos conjuntos que compõe os antecedentes do NSFIS representado na Equação 5.7: (a) Função de pertinência geradas a partir do grupos assumidos para a vazão de catalisador na alimentação. (b) Função de pertinência dos grupos assumidos para o sinal de concentração do produto B realimentada



O NSFIS identificado após a otimização dos parâmetros ( $c_0^1, c_0^2, c_0^3, c_0^4, b_{1,1}^1, b_{1,1}^2, b_{1,1}^3, b_{1,1}^4, a_1^1, a_1^2, a_1^3, a_1^4$ ) (pesos  $\gamma_y = \gamma_u = 1$ ) tem seu comportamento mostrado na Figura 5.10.

O NSFIS tem uma excelente previsão, no primeiro estado estacionário ([30, 40[ min), tanto para a média como para os limites. No entanto, há uma diferença entre

Figura 5.10: Comparação da metodologia desenvolvida (Sobreíndice NSFIS) com a propagação dinâmica via a simulação de Monte Carlo (Sobreíndice MCM) e a simulação da sistema de equações diferenciais ordinárias que modela o CSTR (Sem Sobreíndice)



os NSFIS e os resultados do MCM a partir do período transitório ([40 50] min) no que diz respeito aos limites previstos. Durante o transiente, tanto o NSFIS como MCM sugerem um aumento da incerteza e conseqüentemente do intervalo de abrangência. Passado a secção de transição, a incerteza diminui causando redução desse intervalo de abrangência para ambas as metodologias, porém o NSFIS prevê um intervalo menor do que o avaliado pelo MCM.

Como a incerteza da vazão de catalisador é mantida constante, o aumento na incerteza do mensurando no período de transição era esperado, pois a autocorrelação nesse intervalo de tempo aumenta devido à própria dinâmica do fenômeno. Passado a transição a autocorrelação tende a diminuir e conseqüentemente a incerteza padrão. Como no modelo NSFIS não foram consideradas outras variáveis do processo (como por exemplo, a concentração inicial do reagente, as temperaturas do meio reacional, da alimentação e da camisa), a predição da incerteza ficou prejudicada, tendo em vista que o fenômeno é notoriamente MIMO.

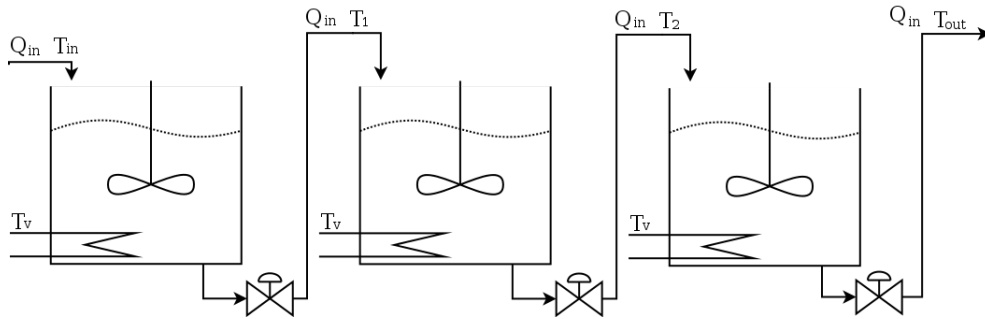
Para a propagação via MCM, foram consideradas uma amostra de  $1 \times 10^4$  pontos a cada instante, sendo necessário um tempo de  $1,09 \times 10^4$  s enquanto que no NSFIS, foram necessários  $0,31 \times 10^4$  s (3,5 vezes menor) para a identificação e simulação da faixa de tempo mostrada.

Este exemplo mostra que um sistema MIMO ao ser tratado como SISO pode ser mal representado do ponto de vista da incerteza, por não considerar todas as fontes, mesmo quando os mensurando são bem estimados.

### 5.3 MISO: Estudo de caso 3

Para o terceiro caso, o processo a ser identificado é um conjunto de Tanques aquecidos (Figura 5.11) descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

Figura 5.11: Representação do sistema de Tanques aquecido



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT_{in}}{dt} = \frac{Q_{in} \cdot C_{p1} \cdot (T_1 - T_{in}) + UA \cdot (T_v - T_1)}{W \cdot C_{p1}} \\ \frac{dT_2}{dt} = \frac{Q_{in} \cdot C_{p2} \cdot (T_2 - T_1) + UA \cdot (T_v - T_2)}{W \cdot C_{p2}} \\ \frac{dT_{out}}{dt} = \frac{Q_{in} \cdot C_{p3} \cdot (T_{out} - T_2) + UA \cdot (T_v - T_{out})}{W \cdot C_{p3}} \\ C_{p_i} = \alpha_1 \cdot T_i^2 + \alpha_2 \cdot T_i + \alpha_3 \end{array} \right. \quad (5.10)$$

O Quadro 5.6 mostra as estimativas e as incertezas dos parâmetros do SEDO (Equação 5.10) que caracteriza o fenômeno em estudo.

Quadro 5.6: Estimativas dos parâmetros de caracterização do conjunto de Tanque aquecidos e sua respectivas incertezas calculadas a partir de um distribuição assumida

Parâmetros	Estimativa	Amplitude	Incerteza	PDF
$\alpha_1 / (\text{kJ} \cdot \text{kg} \cdot ^\circ\text{C}^3)$	0,200	$\pm 0,010$	0,006	Uniforme
$\alpha_2 / (\text{kJ} \cdot \text{kg} \cdot ^\circ\text{C}^2)$	0,160	$\pm 0,008$	0,005	Uniforme
$\alpha_3 / (\text{kJ} \cdot \text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$	2000	$\pm 40$	23,1	Uniforme
$W / \text{kg}$	1000	$\pm 500$	288,68	Uniforme
$UA / (\text{kJ} \cdot \text{min} \cdot ^\circ\text{C})$	10	$\pm 5$	2,89	Uniforme
$T_v / ^\circ\text{C}$	250	N/A	12,5	Normal

N/A = Não se Aplica

Com exceção da temperatura do vapor ( $T_v$ ), foi assumida uma distribuição uniforme para caracterizar cada parâmetro do SEDO (Equação 5.10), pelo mesmo motivo apresentado no estudo de caso 1: majorar a influência desta variável, uma vez que são, geralmente, negligenciadas.

A escolha de uma PDF normal para a temperatura de vapor, foi devido ao fato de ser uma variável de processo geralmente medida, com isso foi assumido que seu comportamento tende a uma distribuição gaussiana. Estas premissas foram usadas para a realização das simulações de Monte Carlo na metodologia de propagação dinâmica da equação fenomenológica.

Neste exemplo o NSFIS é proposto para identificar o efeito da vazão de alimentação do sistema  $Q_{in}$  e sua respectiva temperatura  $T_{in}$  sobre a temperatura na vazão de descarga do sistema  $T_{out}$ , resultando em um caso MISO.

É importante salientar que as grandezas de entradas foram assumidas independentes, caso contrário seria necessário o uso de PDF conjunta. Neste trabalho não é tratado a transformação das mesmas em conjuntos *fuzzy*.

A estrutura NARX em cada consequente foi construída adotando ordens e tem-

pos mortos iguais a unidade:

$$\widehat{T}_{\text{out}}^l(k+1) = c_0^l + b_{1,1}^l \cdot T_{\text{in}}(k-1) + b_{2,1}^l \cdot Q_{\text{in}}(k-1) + a_1^l \cdot \widehat{T}_{\text{out}}(k). \quad (5.11)$$

O algoritmo de agrupamento subtrativo foi aplicado sobre o conjunto de dados organizados para a definição das regras do NSFIS Equação 5.12.

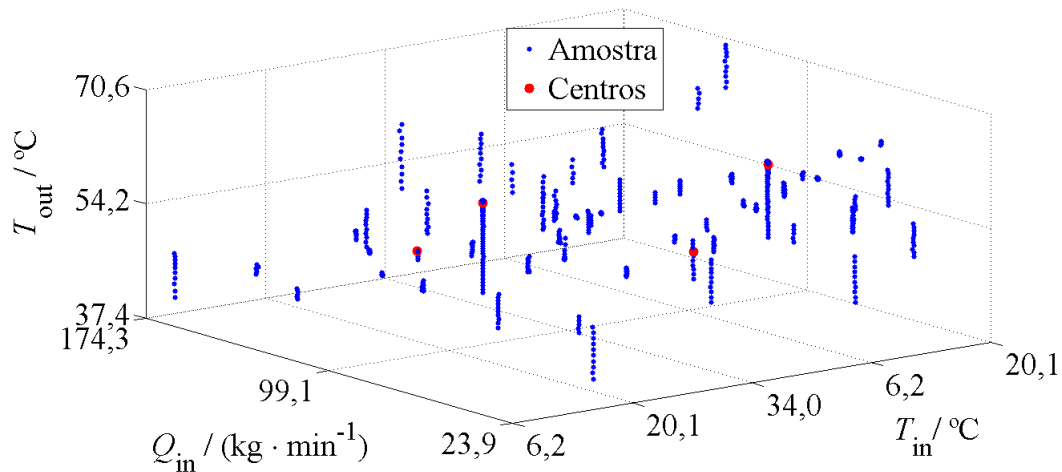
$$\begin{aligned} R^1 : & \text{ SE } T_{\text{in}}(k-1) \text{ é } C_{X_1}^1 \text{ E } Q_{\text{in}}(k-1) \text{ é } C_{X_2}^1 \text{ E } \widehat{T}_{\text{out}}(k) \text{ é } C_{X_3}^1 \text{ ENTÃO } \widehat{T}_{\text{out}}^1(k+1) \\ R^2 : & \text{ SE } T_{\text{in}}(k-1) \text{ é } C_{X_1}^2 \text{ E } Q_{\text{in}}(k-1) \text{ é } C_{X_2}^2 \text{ E } \widehat{T}_{\text{out}}(k) \text{ é } C_{X_3}^2 \text{ ENTÃO } \widehat{T}_{\text{out}}^2(k+1) \\ R^3 : & \text{ SE } T_{\text{in}}(k-1) \text{ é } C_{X_1}^3 \text{ E } Q_{\text{in}}(k-1) \text{ é } C_{X_2}^3 \text{ E } \widehat{T}_{\text{out}}(k) \text{ é } C_{X_3}^3 \text{ ENTÃO } \widehat{T}_{\text{out}}^3(k+1) \\ R^4 : & \text{ SE } T_{\text{in}}(k-1) \text{ é } C_{X_1}^4 \text{ E } Q_{\text{in}}(k-1) \text{ é } C_{X_2}^4 \text{ E } \widehat{T}_{\text{out}}(k) \text{ é } C_{X_3}^4 \text{ ENTÃO } \widehat{T}_{\text{out}}^4(k+1) \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde:

$$\widehat{T}_{\text{out}}(k+1) = \frac{\sum_{l=1}^4 \omega^l \cdot \widehat{T}_{\text{out}}^l(k+1)}{\sum_{l=1}^4 \omega^l} \quad (5.13)$$

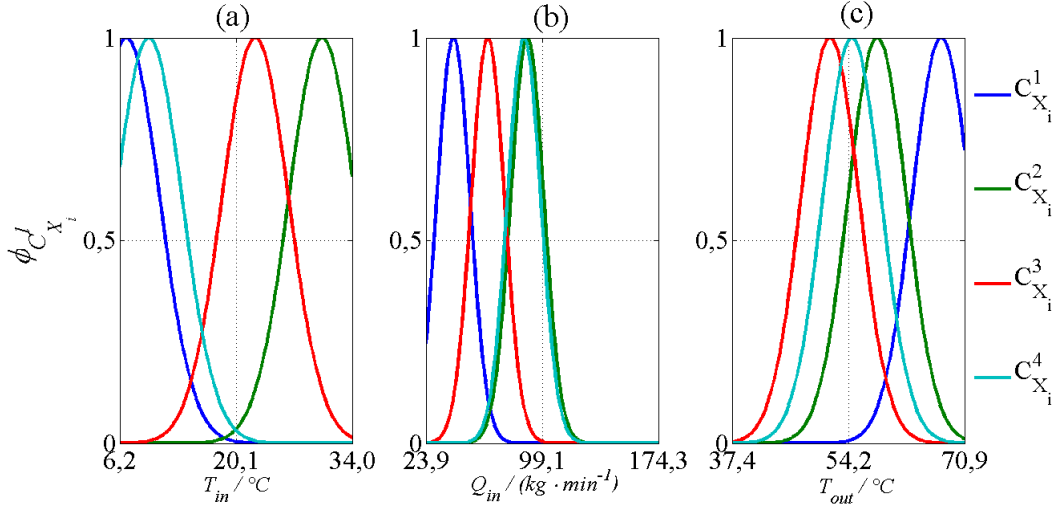
A Figura 5.12 apresenta os conjuntos *fuzzy* encontrados através do agrupamento dos dados e suas respectivas funções de pertinência são apresentadas na Figura 5.13.

Figura 5.12: Representação dos grupos e seus centros que compõe os antecedentes do NSFIS representado pela Equação 5.12



Mais uma vez foi assumida uma incerteza relativa constante obtida através de informações em estado estacionário. Para as temperaturas foram assumidas uma amplitude máxima, relativa à estimativa, de 15% e para vazão 45% o que gera uma

Figura 5.13: Representação dos conjuntos *fuzzy* que compõe os antecedentes do NSFIS representado na Equação 5.12 : (a) Função de pertinência dos grupos encontrados para a temperatura da alimentação  $X_1 \equiv T_{in}$ ; (b) Função de pertinência dos grupos encontrados para a vazão de alimentação  $X_2 \equiv Q_{in}$ ; (c) Função de pertinência dos grupos encontrados para o sinal de temperatura da descarga realimentada  $X_3 \equiv T_{out}(k)$



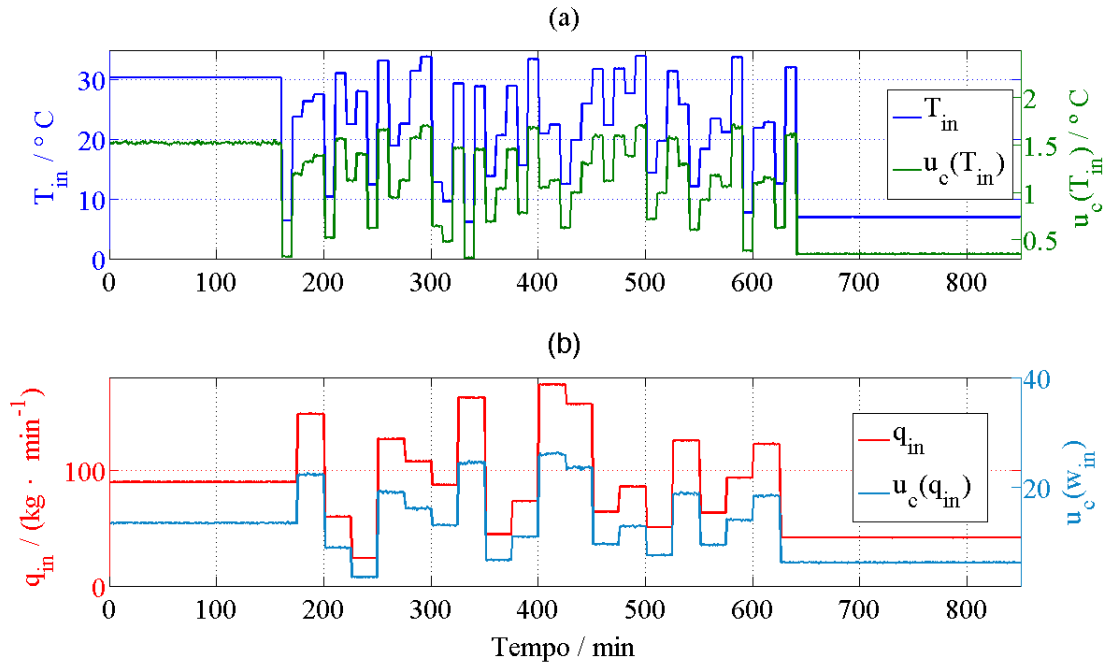
incerteza relativa combinada de 5% e 15%, para as temperaturas e a vazão (Figura 5.14) respectivamente, a partir de uma probabilidade de abrangência de 99% e grau de liberdade igual a 100. Foi usada a forma da TPD generalizada com objetivo de manter mais conservadora a avaliação da incerteza.

Com a ajuda de uma rotina de otimização e  $\gamma_y = 1$  e  $\gamma_u = 0,5$ , foi possível estimar os parâmetros do modelo NSFIS-NARX ( $c_0^1, c_0^2, c_0^3, c_0^4, b_{1,1}^1, b_{1,1}^2, b_{1,1}^3, b_{1,1}^4, b_{2,1}^1, b_{2,1}^2, b_{2,1}^3, b_{2,1}^4, a_1^1, a_1^2, a_1^3, a_1^4$ ) com o valor de função objetivo encontrado de  $J = 0,0135$ .

A Figura 5.15 mostra que mais uma vez o NSFIS-NARX (representadas pelas curvas com tonalidade vermelha) obtido foi capaz de prever a estimativa e suas incertezas juntamente com a simulação da SEDO e das simulações MCM (representada pelos círculos e triângulos de tonalidade azul), mesmo sujeitas, ambas metodologias, à uma simulação com perturbações acentuadas nas variáveis de entrada Equação 5.14.

Novamente é verificado que o limite máximo avaliado pelo NSFIS-NARX é maior do que o limite avaliado pelo MCM. Esse resultado, novamente, era esperado, devido à característica do conjunto TPD-G e do efeito do uso do princípio da extensão como

Figura 5.14: (a) Comportamento da estimava da temperatura na carga ( $T_{in}$ ) e sua incerteza combinada ( $u_c(T_{in})$ ) ao longo do tempo; (b) Comportamento da estimava da vazão de carga ( $q_{in}$ ) e sua incerteza combinada ( $u_c(q_{in})$ ) ao longo do tempo.

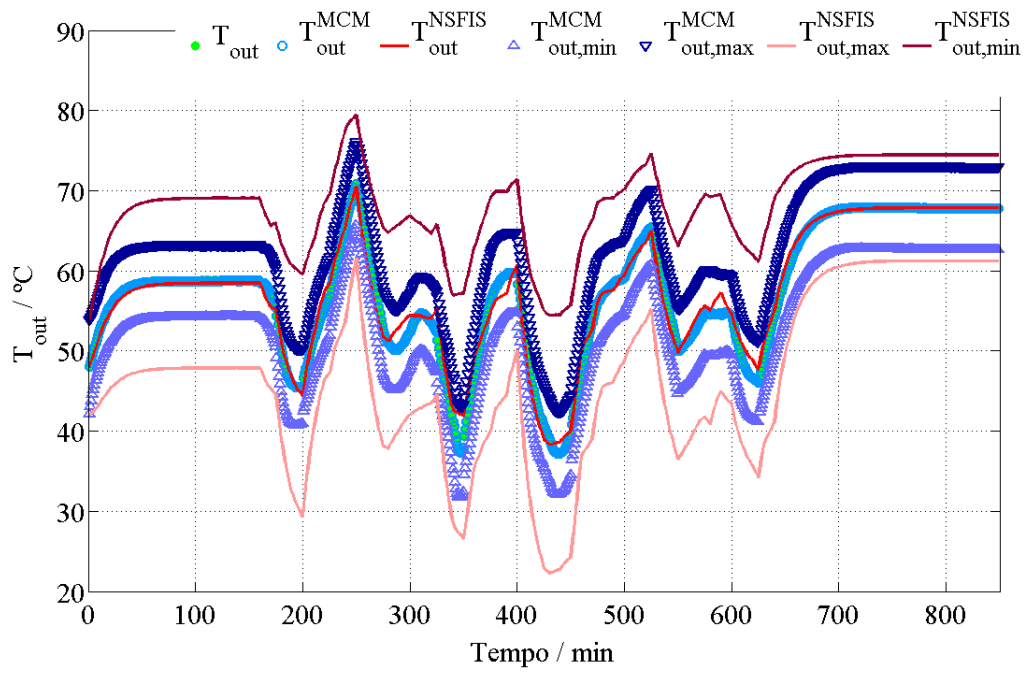


meio de propagá-los Secção 3.2.3.1 além da realimentação dos valores estimados.

Neste exemplo a amostra utilizada continha 850 pontos com intervalos de tempo de 1 min. Contudo, novamente devido a limitações de processamento, o numero utilizado para gerar as amostras de Monte Carlo foi de  $1 \times 10^4$  a cada instante, para cada variável e parâmetro da equação diferencial. Ao final da simulação MCM foram processados  $850 \cdot 10^4 \cdot 7 \cdot 6 = 3,57 \times 10^8$  resultando em tempo de processamento igual a  $4,9 \times 10^4$  s. Para o NSFIS-NARX, usando mesmo conjunto de pontos, o tempo de processamento reduziu para  $9,81 \times 10^3$  s, 5 vezes menor do que o tempo da simulação MCM.

A metodologia foi capaz de prever a estimativa do mesurando e uma boa avaliação do intervalo máximo, dada a probabilidade de abrangência de 99%.

Figura 5.15: Comparação da metodologia desenvolvida (Sobreíndice NSFIS) com a propagação dinâmica via a simulação de Monte Carlo (Sobreíndice MCM) e a simulação da SEDO (Equação 5.10) (Sem Sobreíndice)





---

## Capítulo 6

# Conclusões, sugestões e contribuições

---

*“As palavras são eternas mais a conclusão sobre elas é mutante ”*

Fabiane Gomes

Neste trabalho foi desenvolvida uma metodologia de identificação empírica de modelos dinâmicos de sistemas MISO, a partir da lógica *fuzzy*, que estima a grandeza de saída e avalia o seu intervalo de abrangência. Para tanto, um estudo comparativo entre dois procedimentos de transformação de função de distribuição de densidade de probabilidade para uma função de possibilidade foi realizado. As incertezas foram, então, avaliadas através dos conjuntos *fuzzy* gerados (transformações probabilidade/possibilidade) e comparadas com os métodos GUM e GUM-S1.

Com isso, foi detectado que os conjuntos TPD (MAURIS; LASSERRE; FOULLOY, 2001) são uma alternativa viável para o uso da informação completa da variável (estimativa e incerteza) em problema de identificação de modelos. O método de Mauris, Lasserre e Foulloy (2000), Mauris, Lasserre e Foulloy (2001) consegue fornecer à estimativa e os intervalos de abrangências da variável na forma de um conjunto parametrizado (TPD).

A informação antes matematizada na forma probabilística, passa então a ser representada pela teoria possibilística, o que possibilita utilizar a lógica *fuzzy* para modelagem do sistema. Sendo assim, a metodologia proposta foi baseada no procedimento de transformação de probabilidade/possibilidade permitindo a inserção direta da função densidade de probabilidade no problema de identificação de modelo de inferência *fuzzy* dinâmico.

O FIS é composto por uma fuzzificação *non-singleton* usando conjuntos obtidos da transformação probabilidade/possibilidade, um sistema de regras heurísticas com consequentes na forma de modelos NARX sendo avaliados pelo princípio da extensão, tendo como saída também um conjunto *non-singleton*, resultado da propagação da incerteza das entradas na forma de conjunto *fuzzy*.

O tratamento da informação na forma de PDF muitas vezes exige um grande esforço computacional, quando utilizado métodos numéricos como o MCM, ou não é possível encontrar uma solução analítica. Somado a isso, as transformações da PDF em conjunto *fuzzy* ótimo e sua propagação através do princípio da extensão têm o alto esforço computacional. Por esses motivos, foi desenvolvido um NSFIS adaptado para a utilização dos conjuntos na forma de TPD, que engloba desde a determinação do nível de ativação até o desenvolvimento de equações algébricas para o cálculo dos parâmetros que caracterizam o conjunto de saída.

O NSFIS-NARX foi aplicado a três estudos de casos, sendo dois SISO e um MISO e seus resultados comparados a propagação de PDFs em regime dinâmico por simulações Monte Carlo (MCM).

Quanto à predição da estimativa do mensurando (grandeza de saída) o NSFIS se mostrou eficiente e em todos três casos conseguiu prever o comportamento dinâmico da grandeza de saída.

Quanto à predição do intervalo de abrangência, correspondente a uma probabilidade de abrangência igual 99% para os três casos, o NSFIS avaliou, na maioria das situações, um intervalo maior do que o previsto pelo MCM. O principal motivo está no uso do princípio da extensão usado para a avaliação de conjuntos *fuzzy* sob uma função matemática. Intrinsecamente o princípio tende a um conjunto *fuzzy* menos específico, ou seja, maior área e conseqüentemente maiores  $\alpha$ -cut's, que representam os intervalos de abrangências com probabilidade de abrangência  $PA = 1 - \alpha$ .

Contudo os resultados apresentaram coerência para o comportamento esperado da incerteza em regime dinâmico, prevendo o seu aumento quando há dinâmica, e sua estabilização no estado estacionário.

A avaliação da incerteza é importante por permitir uma completa compreensão da variável. Apresentar a qualidade da informação é fundamental para comparação de resultados, principalmente em transferência de custódia. Sendo assim, a metodologia apresentada é mais uma alternativa para avaliação em regime dinâmico, uma vez que essa ainda é uma área a ser estudada.

A metodologia proposta, foi capaz de unir dois ramos de estudos importantes na engenharia: identificação empírica e propagação da incerteza, ambos em regime dinâmico. Como os métodos de referência em propagação de incerteza, GUM (BIPM et al., 2008a) GUM-S1 (BIPM et al., 2008b), necessitam de uma função de medição em que as mesmas são geralmente equações fenomenológicas, a técnica proposta é mais uma alternativa, uma vez que quanto mais complexo for o processo mais complexo torna sua modelagem fenomenológica e conseqüentemente sua propagação.

Tabela 6.1: Comparação entre tempos de processamento das metodologias estudadas

Estudo de caso	Tempo de processamento /s	
	Monte Carlo	NSFIS-NARX
n <sup>o</sup> 1	$2,59 \times 10^5$	$2,38 \times 10^2$
n <sup>o</sup> 2	$1,09 \times 10^4$	$0,31 \times 10^4$
n <sup>o</sup> 3	$4,90 \times 10^4$	$9,81 \times 10^3$

Os resultados obtidos para de aplicação do modelo à três estudos de caso (dois SISO e um MISO), quando comparados à metodologia de propagação da distribuição de probabilidade desenvolvida para sistemas dinâmicos através de simulações Monte Carlo (MARTINS; KALID, 2010), apontam o NSFIS como uma técnica promissora, com capacidade de predição da propagação dinâmica da incerteza de medição, associada a um esforço computacional significativamente inferior ao método de Monte Carlo, como se pode ver na Tabela 6.1.

## 6.1 Sugestões

A metodologia sugerida neste trabalho apresenta limitações ao seu uso, a exemplo, estar restrita a utilização de grandezas de entradas independentes. Uma forma de superar essa limitação é a implementação das covariâncias das grandezas de entrada que podem ser representadas por funções de pertinências multidimensionais. Para tanto seria necessário o desenvolvimento de um FIS multidimensional capaz de estimar conjuntos *fuzzy* com essas características e extensão dos métodos de transformação das PDFs conjuntas em funções de pertinências multidimensionais.

Outro ponto limitante do método proposto está na correlação temporal das grandezas de entradas. Uma vez que assumida uma incerteza relativa constante para as entradas do modelo, as incertezas no próximo instante não são computadas pela avaliação do instante anterior, diferente da grandeza de saída onde é feita a realimentação da estimativa com suas incertezas previstas pelo próprio modelo. Isso pode ser superado com a implementação de NSFIS-NARX em “cascatas”, sendo um para modelar cada entrada, alimentando o NSFIS-NARX montado para modelar a grandeza de saída. Uma outra alternativa, está na utilização da variância de Allan (ALLAN, 1987) para alimentar o NSFIS tanto na etapa de identificação, como na implementação de um sistemas on-line.

## 6.2 Contribuições

A realização deste trabalho contribui com seguintes tópicos:

**Contribuição 1:** Desenvolvimento de equações algébricas para o NSFIS-NARX com entradas na forma de conjuntos *fuzzy* obtidos da transformação de probabilidade/possibilidade TPD (*pseudo Triangular Possibility Distribution*).

**Contribuição 2:** Desenvolvimento de uma metodologia para avaliação da incerteza expandida em regime dinâmico em sistemas onde o modelo fenomenológico é de difícil obtenção.

**Contribuição 3:** Desenvolvimento de subrotinas para implementação da metodo-

logia proposta em MATLAB<sup>®</sup>.

**Contribuição 4:** Disseminação da importância do uso da incerteza na identificação de modelos empíricos.

**Contribuição 5:** Publicação de 5 artigos relacionados ao tema de pesquisa listadas no Apêndice E, sendo 4 em congressos e 1 em periódico indexado.

---

# Apêndice A

## Estimação de parâmetros

---

Considere uma amostra de  $M$  medições contendo as estimativas para as grandezas de saída e entradas a cada instante e um SFIS do tipo TSK descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} R^l : & \text{SE } y(k) \text{ é } G^{1,l} \text{ E ... E } y(k - n_Y + 1) \text{ é } G^{n_Y,l} \\ & \text{E } x_1(k - \tau_{d,1}) \text{ é } F^{1,l} \text{ E ... E } x_1(k - \tau_{d,1} - n_{X_1} + 1) \text{ é } F^{n_{X_1},l} \\ & \text{E } x_N(k - \tau_{d,N}) \text{ é } F^{n,l} \text{ E ... E } x_N(k - \tau_{d,N} - n_{X_N} + 1) \text{ é } F^{n+n_{X_N},l} \quad (\text{A.1}) \\ \text{ENTÃO } \hat{y}^l(k+1) &= c_0^l + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_{X_i}} b_{i,j}^l \cdot x_i(k - \tau_{d,i} - j + 1) \\ &+ \sum_{o=1}^{n_Y} a_o^l \cdot y(k - o + 1), \end{aligned}$$

onde  $n = \sum_{i=1}^{N-1} n_{X_i}$

Note que o valor estimado pelo modelo não é realimentado. São usados apenas os dados amostrados. Substituindo o conseqüente da Equação A.1 na Equação 4.3, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+1) &= \frac{\sum_{i=1}^L \omega^i \cdot \hat{y}^i(k+1)}{\sum_{i=1}^L \omega^i} \\ \hat{y}(k+1) &= \frac{\sum_{l=1}^L \omega^l \cdot \left( c_0^l + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_{X_i}} b_{i,j}^l \cdot x_i(k - \tau_{d,i} - j + 1) + \sum_{o=1}^{n_Y} a_o^l \cdot y(k - o + 1) \right)}{\sum_{l=1}^L \omega^l} \quad (\text{A.2}) \\ &= \frac{\sum_{l=1}^L \left[ \omega^l \cdot c_0^l + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_{X_i}} \omega^l \cdot b_{i,j}^l \cdot x_i(k - \tau_{d,i} - j + 1) + \sum_{o=1}^{n_Y} \omega^l \cdot a_o^l \cdot y(k - o + 1) \right]}{\sum_{l=1}^L \omega^l}, \end{aligned}$$

Incluindo  $x_0 \equiv 1$ , temos:

$$\hat{y}(k+1) = \frac{\sum_{l=1}^L \omega^l \cdot c_0^l \cdot x_0}{\sum_{l=1}^L \omega^l} + \frac{\sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_{X_i}} \omega^l \cdot b_{i,j}^l \cdot x_i(k - \tau_{d,i} - j + 1)}{\sum_{l=1}^L \omega^l}$$

$$+ \frac{\sum_{l=1}^L \sum_{o=1}^{n_Y} \omega^l \cdot a_o^l \cdot y(k-o+1)}{\sum_{l=1}^L \omega^l}$$

Considerando os seguintes vetores, com  $\Omega = \sum_{l=1}^L \omega^l$ :

$$\boldsymbol{\theta} = \left[ c_0^1, \dots, c_0^L, b_{1,1}^1, \dots, b_{1,n_{X_1}}^1, \dots, b_{N,1}^1, \dots, b_{N,n_{X_N}}^1, \dots, \right. \\ \left. b_{1,1}^L, \dots, b_{1,n_{X_1}}^L, \dots, b_{N,1}^L, \dots, b_{N,n_{X_N}}^L, a_1^1, \dots, a_{n_Y}^1, \dots, a_1^L, \dots, a_{n_Y}^L \right]^\top$$

$$\mathbf{g}(k) = \frac{1}{\Omega} \cdot \left[ \omega^1 \cdot x_0, \dots, \omega^L \cdot x_0, \omega^1 \cdot x_1(k - \tau_{d,1}), \dots, \omega^1 \cdot x_1(k - \tau_{d,1} - n_{X_1} + 1), \dots, \right. \\ \omega^1 \cdot x_N(k - \tau_{d,N}), \dots, \omega^1 \cdot x_N(k - \tau_{d,N} - n_{X_N} + 1), \dots, \\ \omega^L \cdot x_1(k - \tau_{d,1}), \dots, \omega^L \cdot x_1(k - \tau_{d,1} - n_{X_1} + 1), \\ \omega^L \cdot x_N(k - \tau_{d,N}), \dots, \omega^L \cdot x_N(k - \tau_{d,N} - n_{X_N} + 1), \dots, \\ \left. \omega^1 \cdot y(k), \dots, \omega^1 \cdot y(k - n_Y + 1), \dots, \omega^L \cdot y(k), \dots, \omega^L \cdot y(k - n_Y + 1) \right]^\top$$

Por tanto:

$$\hat{y}(k+1) = \mathbf{g}^\top(k) \cdot \boldsymbol{\theta}, \quad (\text{A.3})$$

onde as dimensões de  $\boldsymbol{\theta}$  e  $\mathbf{g}$  são:  $L \cdot \left( 1 + n_Y + \sum_{i=1}^N n_{X_N} \right) \times 1 = LN \times 1$

Para todos os valores de uma amostra de  $M$  observações, obtêm-se o seguinte sistema:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(t) \\ \vdots \\ y(M) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}_{M \times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{g}^\top(0) \\ \vdots \\ \mathbf{g}^\top(t-1) \\ \vdots \\ \mathbf{g}^\top(M-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_{M \times LN}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_{1,1} \\ \vdots \\ \theta_{i,1} \\ \vdots \\ \theta_{LN,1} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}_{LN \times 1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \zeta(1) \\ \vdots \\ \zeta(t) \\ \vdots \\ \zeta(M) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\zeta}_{M \times 1}} \quad (\text{A.4})$$

onde cada linha da matriz  $\mathbf{G}$  é formada pelo vetor  $\mathbf{g}^\top(k)$  em cada ponto da amostra, o vetor  $\mathbf{y}$  composto por valores medidos do mesurando a cada instante  $\boldsymbol{\zeta}$  o vetor de ruídos da aproximação dos dados pelo modelo.

Considerando cada sinal medido de  $Y$  passado como mais uma entrada do sistema, os parâmetros podem ser estimado Equação A.4 para o problema de mínimo

quadrado (AGUIRRE, 2000):

$$\begin{aligned} J_{\text{MQ}} &= (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^\top \cdot (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \\ &= \mathbf{y}^\top \cdot \mathbf{y} - \mathbf{y}^\top \cdot \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^\top \cdot \mathbf{G}^\top \cdot \mathbf{y} + \boldsymbol{\theta}^\top \cdot \mathbf{G}^\top \cdot \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\theta}_{\text{MQ}} &= \arg_{\boldsymbol{\theta}} \min J_{\text{MQ}} \\ \frac{\partial J_{\text{MQ}}}{\partial \boldsymbol{\theta}} &= -2 \cdot \mathbf{G}^\top \cdot \mathbf{y} + 2 \cdot \mathbf{G}^\top \cdot \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\theta} = 0 \\ \boldsymbol{\theta}_{\text{MQ}} &= [\mathbf{G}^\top \cdot \mathbf{G}]^{-1} \cdot \mathbf{G}^\top \cdot \mathbf{y} \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}, \end{aligned} \tag{A.5}$$

onde  $\mathbf{A} = [\mathbf{G}^\top \cdot \mathbf{G}]^{-1} \cdot \mathbf{G}^\top$ .



---

# Apêndice B

## Princípio da extensão

---

Considere um conjunto  $G^i = \theta_i \cdot F^i$ . Sendo  $F^i$  um conjunto que pode ser representado por um intervalo,  $F^i = [x_{i,\min}; x_{i,\max}]$ , onde  $x_{i,\min} = x_i^* - a_i$  e  $x_{i,\max} = x_i^* + b_i$  e os parâmetros do modelo são um conjunto *crisp*  $(1/\theta_i)$  (KARNIK; MENDEL, 2001).

Então resolvendo a parcela  $\theta_i \cdot F^i$ :

$$\theta_i \cdot F^i = \int_{\xi_i} \sup \min [1; \phi_{F^i}(\xi_i)] / (\theta_i \cdot \xi_i), \quad \xi_i \in [x_i^* - a_i; x_i^* + b_i]. \quad (\text{B.1})$$

Fazendo  $\eta_i = \theta_i \cdot \xi_i + \theta_0$  e substituindo em Equação B.1, têm se:

$$y_{i,\max} = \theta_i \cdot x_{i,\max} = \theta_i \cdot (x_i^* + b_i) = \theta_i \cdot x_i^* + \theta_i \cdot b_i \quad (\text{B.2})$$

$$y_{i,\min} = \theta_i \cdot x_{i,\min} = \theta_i \cdot (x_i^* - a_i) = \theta_i \cdot x_i^* - \theta_i \cdot a_i \quad (\text{B.3})$$

Como os parâmetros  $a_i$  e  $b_i$  representam distância entre o valor central,  $x_i^*$ , e os limites, para o conjunto resultante  $G_i$  tem-se:  $c_i = |\theta_i| \cdot a_i$  e  $d_i = |\theta_i| \cdot b_i$ . Então fazendo  $y_i^* = \theta_i \cdot x_i^*$ , obtêm-se:

$$G^i = \int_{\eta_i} \phi_{G^i}(\eta_i) / \eta_i, \quad \eta_i \in [y_i^* - c_i; y_i^* + d_i]. \quad (\text{B.4})$$

onde  $\phi_{G^i}(\eta_i) = \phi_{F^i}(\xi_i)$ .

Considere agora um novo conjunto  $G = G^1 + G^2$ . Sabe-se que cada  $\alpha$ -cut é determinado por um intervalo fechado. Portanto para cada  $\alpha$ -cut (WANG; RUAN; KERRE, 2009) o princípio é escrito por:

$$G_\alpha = G_\alpha^1 + G_\alpha^2 = \int_{\eta_\alpha} \sup \min [\phi_{G_\alpha^1}(\eta_1); \phi_{G_\alpha^2}(\eta_2)] / \eta_\alpha = \int_{\eta_\alpha} \alpha / \eta_\alpha, \\ \eta_\alpha \in [y_1^* + y_2^* - (c_{1,\alpha} + c_{2,\alpha}); y_1^* + y_2^* + (d_{1,\alpha} + d_{2,\alpha})]. \quad (\text{B.5})$$

Então se  $G = \sum_{i=1}^N G^i$ , têm-se:

$$G_\alpha = \int_{\eta_\alpha} \alpha / \eta_\alpha, \quad \eta_\alpha \in \left[ \sum_{i=1}^N y_i^* - \sum_{i=1}^N c_{i,\alpha}; \sum_{i=1}^N y_i^* + \sum_{i=1}^N d_{i,\alpha} \right]. \quad (\text{B.6})$$

Somando o parâmetro *crisp* ( $1/\theta_0$ ) obtém-se:

$$G_\alpha = \int_{\eta_\alpha} \alpha / \eta_\alpha, \quad \eta_\alpha \in \left[ \sum_{i=1}^N y_i^* - \sum_{i=1}^N c_{i,\alpha} + \theta_0; \sum_{i=1}^N y_i^* + \sum_{i=1}^N d_{i,\alpha} + \theta_0 \right]. \quad (\text{B.7})$$

Portanto os limites de cada  $\alpha$ -cut do conjunto resultante  $G = \sum_{i=1}^N G^i + \theta_0 = \sum_{i=1}^N \theta_i \cdot F^i + \theta_0$ , substituindo as Equações B.2 e B.3 na Equação B.7, é dado por:

$$G_\alpha = \left[ \sum_{i=1}^N \theta_i \cdot x_i^* + \theta_0 - \sum_{i=1}^N |\theta_i| \cdot a_{i,\alpha}; \sum_{i=1}^N \theta_i \cdot x_i^* + \theta_0 + \sum_{i=1}^N |\theta_i| \cdot b_{i,\alpha} \right]. \quad (\text{B.8})$$

---

# Apêndice C

## Inferência *fuzzy*

---

Considere uma regra genérica  $R^l$  com  $N$  grandezas de entradas e uma saída:

$$R^l : \text{SE } \xi_1^k \text{ é } F^{1,l} \text{ E } \dots \text{ E } \xi_N^k \text{ é } F^{N,l} \text{ ENTÃO } Y \text{ é } G^l \quad (\text{C.1})$$

que pode ser reescrita para:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Premissas:} \quad X_1 \text{ é } A_{X_1} \dots X_N \text{ é } A_{X_N} \\ \text{Implicação:} \quad \text{SE } X_1 \text{ é } F^{1,l} \text{ E } \dots \text{ E } X_N \text{ é } F^{N,l} \text{ ENTÃO } Y \text{ é } G^l \\ \text{Consequência:} \quad Y \text{ é } A_Y^l \end{array} \right. \quad (\text{C.2})$$

A função de pertinência dos conjuntos, em cada regra, da grandeza de saída é obtido através da função de pertinência das grandezas de entrada  $(\phi_{A_{X_i}}(\xi^k))$  e da regra  $(\phi_{R^l}(\xi^k, \eta^k))$

$$\phi_{A_Y^l}(\eta^k) = \sup_{\xi^k \in \xi} [\phi_{A_{\mathbf{X}}}(\xi^k) \star \phi_{R^l}(\xi^k, \eta^k)], \quad \eta^k \in \eta \quad (\text{C.3})$$

onde  $\xi$  é o espaço multidimensional das entradas  $(\xi_1 \times \dots \times \xi_N)$ ,  $A_{\mathbf{X}}$  é a função de pertinência multidimensional das entradas definida em  $\xi$ ,  $\xi^k \equiv (\xi_1^k, \dots, \xi_N^k)$  amostra do espaço multidimensional.

Então para determinar a função de pertinência do conjunto de saída, é necessário conhecer a função de pertinência da regra. Esta é determinada pela operação de implicação entre o conjunto multidimensional dos antecedentes  $(\phi_{\mathbf{F}^l}(\xi^k))$ , e o conjunto definido no conseqüente da regra  $G^l$ .

$$\phi_{R^l}(\xi^k, \eta^k) = \phi_{\mathbf{F}^l \rightarrow G^l}(\xi^k, \eta^k) = \phi_{\mathbf{F}^l}(\xi^k) \star \phi_{G^l}(\eta^k), \quad (\text{C.4})$$

onde  $\mathbf{F}^l$  é o conjunto multidimensional,  $F^{1,l} \times \dots \times F^{N,l}$  definido em  $\xi$

No entanto, para os conjuntos do antecedentes separáveis (MENDEL, 2000), a função de pertinência multidimensional é determinada através do operador t-norma entre as funções de pertinência dos conjuntos que a compõe, portanto:

$$\phi_{\mathbf{F}^l}(\xi^k) = \phi_{F^{1,l}}(\xi_1^k) \star \dots \star \phi_{F^{N,l}}(\xi_N^k) = \mathbb{T}_{i=1}^N \phi_{F^{i,l}}(\xi_i^k) \quad (\text{C.5})$$

Então substituindo a Equação C.5 em Equação C.4, obtém-se

$$\phi_{R^l}(\xi^k, \eta^k) = \phi_{\mathbf{F}^l}(\xi^k) \star \phi_{G^l}(\eta^k) = [\mathbb{T}_{i=1}^N \phi_{F^{i,l}}(\xi_i^k)] \star \phi_{G^l}(\eta^k) \quad (\text{C.6})$$

Por tanto a Equação C.3 é redefinida para:

$$\phi_{A_Y^l}(\eta^k) = \sup_{\xi^k \in \xi} [\phi_{A_X}(\xi^k) \star [\mathbb{T}_{i=1}^N \phi_{F^{i,l}}(\xi_i^k)] \star \phi_{G^l}(\eta^k)] \quad (\text{C.7})$$

Por outro lado se as grandezas de entradas, são independentes, têm-se:

$$\phi_{A_X}(\xi^k) = \phi_{A_{X_1}}(\xi_1^k) \star \dots \star \phi_{A_{X_N}}(\xi_N^k) = \mathbb{T}_{i=1}^N \phi_{A_{X_i}}(\xi_i^k) \quad (\text{C.8})$$

$$\phi_{A_Y^l}(\eta^k) = \sup_{\xi^k \in \xi} \left[ \mathbb{T}_{i=1}^N \phi_{A_{X_i}}(\xi_i^k) \star [\mathbb{T}_{i=1}^N \phi_{F^{i,l}}(\xi_i^k)] \star \phi_{G^l}(\eta^k) \right], \quad (\text{C.9})$$

que graças as propriedades de associatividade e comutatividade a Equação C.9 é rearrumada para:

$$\phi_{A_Y^l}(\eta^k) = \sup_{\xi^k \in \xi} \left[ \left[ \mathbb{T}_{i=1}^N \phi_{A_{X_i}}(\xi_i^k) \star \phi_{F^{i,l}}(\xi_i^k) \right] \star \phi_{G^l}(\eta^k) \right] \quad (\text{C.10})$$

Como o operador supremo, ou t-conorma, está sendo aplicado no universo de discurso das entradas,  $\xi$ , a função de pertinência do conjunto do conseqüente pode ser retirado do operador:

$$\phi_{A_Y^l}(\eta^k) = \sup_{\xi^k \in \xi} \left[ \left[ \mathbb{T}_{i=1}^N \phi_{A_{X_i}}(\xi_i^k) \star \phi_{F^{i,l}}(\xi_i^k) \right] \right] \star \phi_{G^l}(\eta^k) \quad (\text{C.11})$$

Aplicando, mais uma vez as propriedades associativas e comutativa, chega-se a equação final para a função de pertinência:

$$\begin{aligned} \phi_{A_Y^l}(\eta^k) = \phi_{G^l}(\eta^k) \star \left\{ \left[ \sup_{\xi_1^k \in \xi_1} \phi_{A_{X_1}}(\xi_1^k) \star \phi_{F^{1,l}}(\xi_1^k) \right] \star \right. \\ \left. \dots \star \left[ \sup_{\xi_N^k \in \xi_N} \phi_{A_{X_N}}(\xi_N^k) \star \phi_{F^{N,l}}(\xi_N^k) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

onde o termo entre chaves é denominado *nível de ativação*, que determina o grau de pertinência ao conjunto verdade.

A equação Equação C.12 determina de forma geral a função de pertinência para o conjunto resultante a cada regra  $R^l$ . Nela fica clara que a utilização de um conjunto *singleton* ou *non-singleton*, modifica o resultado do *nível de ativação*, o que resulta em um conjunto diferente para grandeza de saída em cada regra.

Se  $\phi_{A_{X_1}}(\xi_1^k)$  é representada por uma função *crisp* (Equação C.13) (resultante de uma fuzzificação *singleton*) o conjunto resultante  $\phi_{A_Y}^l(\eta^k)$  é determinado pela Equação C.14.

$$\phi_{A_{X_{i,k}}}(\xi_i^k) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi_i^k = X_{i,k} \\ 0 & \text{se } \xi_i^k \neq X_{i,k} \end{cases}, \quad \xi_i^k \in \xi, \quad (\text{C.13})$$

$$\begin{aligned} \phi_{A_Y}^l(Y^k) &= \phi_{G^l}(Y^k) \star \left\{ \left[ \sup_{X_{1,k} \in \xi_1} \phi_{A_{X_1}}(X_{1,k}) \star \phi_{F^{1,l}}(X_{i,k}) \right] \star \right. \\ &\quad \left. \dots \star \left[ \sup_{X_{N,k} \in \xi_N} \phi_{A_{X_N}}(X_{N,k}) \star \phi_{F^{N,l}}(X_{N,k}) \right] \right\} \\ &= \phi_{G^l}(\eta^k) \star \left\{ \left[ \sup_{X_{1,k} \in \xi_1} 1 \star \phi_{F^{1,l}}(X_{i,k}) \right] \star \right. \\ &\quad \left. \dots \star \left[ \sup_{X_{N,k} \in \xi_N} 1 \star \phi_{F^{N,l}}(X_{N,k}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Portanto, pela condição de contorno do operador t-norma ( $1 \star \phi = \phi$ ), chega-se a:

$$\phi_{A_Y}^l(Y^k) = \left[ \prod_{i=1}^N \phi_{F^{i,l}}(X_{i,k}) \right] \star \phi_{G^l}(Y^k) \quad (\text{C.15})$$

onde  $\mathbf{X}_{i,k}$  é o vetor de observações das grandezas de entradas e  $Y^k$  é o valor da grandeza de saída estimado para o vetor de entrada  $\mathbf{X}_{i,k}$ . Note que o nível de ativação, no caso de entradas *singleton*, é função apenas da pertinência do valor observado sobre os conjuntos de seu respectivo antecedente.

No caso *non-singleton*, a representação da dúvida sobre o resultado de medição, implica na consideração da incerteza no cálculo do valor do *nível de ativação*. Portanto para caso *non-singleton* a função de pertinência dos conjuntos em cada regras é dada pela Equação C.12.

---

# Apêndice D

## Informações do CSTR de isomerização

---

O reator CSTR (Figura 19) usado no segundo estudo de caso é descrita pelo SEDO descrito pela Equação D.1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dC_A}{dt} = \frac{(C_{A,in} - C_A) \cdot Q_{in}}{\rho_m \cdot A_T \cdot L} + \kappa_0 \cdot \exp \left[ \frac{-E}{R \cdot (T + 273,15)} \right] \cdot C_A \\ \frac{dC_B}{dt} = \frac{(C_{B,in} - C_B) \cdot Q_{in}}{\rho_m \cdot A_T \cdot L} - \kappa_0 \cdot \exp \left[ \frac{-E}{R \cdot (T + 273,15)} \right] \cdot C_A \\ \frac{dT}{dt} = \frac{(T_{in} - C_A) \cdot Q_{in}}{\rho_m \cdot A_T \cdot L} - \frac{\Delta H_r \cdot \kappa_0 \cdot \exp \left[ \frac{-E}{R \cdot (T + 273,15)} \right] \cdot C_A}{\rho_m \cdot C_p} + \frac{(T_{in} - T_c) \cdot UA}{\rho_m \cdot A_T \cdot L \cdot C_p} \\ \frac{dT_c}{dt} = \frac{(T_{c,in} - T_c) \cdot Q_{c,in}}{V_c} - \frac{(T_{c,in} - T_c) \cdot UA}{\rho_c \cdot V_c \cdot C_{p,c}} \\ \kappa_0 = \kappa \cdot Q_{cat,in} \end{array} \right. \quad (D.1)$$

Para os parâmetros foi assumido um comportamento aleatório descrito pela PDF uniforme. Os limites que caracterizam as mesmas estão descritas na Tabela D.1 As outras grandezas foram consideradas como uma variável aleatória descrita por PDF gaussiana. Suas estimativas e incertezas padrão combinadas estão na Tabela D.2

Tabela D.1: Limites assumidos na construção das PDF uniformes

Parâmetros	Limite inferior	Limite superior
$\kappa$ ( $kg^{-1}$ )	25,67	76,97
$E / (kJ \cdot mol^{-1}) / 10^4$	0,71	1,65
$U / (kJ \cdot m^{-2} \cdot min^{-1} \cdot K^{-1}) / 10^4$	0,51	2,04
$\Delta H_r / (kJ \cdot mol^{-1}) / 10^4$	9,80	29,40

Fonte: (MARTINS; KALID, 2010)

Tabela D.2: Valores de estimativas e incertezas para a construção das PDF gaussianas

Variaveis	Estimativa	Incerteza padrão combinada
$L / (m)$	1,00	0,10
$Q_{in} / (kg \cdot min^{-1}) / 10^3$	1,50	0,50
$Q_{cat_{in}} / (kg \cdot min^{-1})$	1,26	0,40
$Q_c / (m^3 \cdot min^{-1})$	0,40	0,30
$T_{in} / (^{\circ}C)$	383,90	3,50
$T_{c,in} / (^{\circ}C)$	931,80	5,50
$C_{A,in} / (kmol \cdot min^{-1})$	16,22	0,40
$C_{B,in} / (kmol \cdot min^{-1})$	0,65	0,20
$C_{A,in}(0) / (kmol \cdot min^{-1})$	7,61	1,10
$C_{B,in}(0) / (kmol \cdot min^{-1})$	14,26	1,50
$T_{in}(0) / (^{\circ}C)$	57,85	4,00
$T_{c,in}(0) / (^{\circ}C)$	107,80	26,00

Fonte: (MARTINS; KALID, 2010)

---

# Apêndice E

## Produção bibliográfica

---

As publicações geradas ao longo do período de elaboração desta pesquisa estão listadas a baixo:

- **Anais de congresso**

1. FONTES, R. M. et al. Avaliação da Incerteza de Medição para um Procedimento de Verificação Volumétrica de Vidrarias. *VII SNCA - Seminário Nacional de Controle e Automação*, 2011;
2. FONTES, R. M. et al. Obtenção de parâmetros ótimos para um modelo dinâmico *fuzzy* TSK considerando incerteza de medição nas entradas. *VI Congresso Brasileiro de Metrologia*, 2011;
3. ZANINI, A. E. et al. Bentonitas brasileiras: Propostas de seleção, purificação e industrialização com qualidade para aplicações em nanotecnologia. *XXIV Encontro Nacional de Tratamento de Minérios e Metalurgia Extrativa*, 2011;
4. JESUS, L. F. F. et al. Aplicação do filtro de Kalman estendido em malhas de controle de qualidade de processo. *XIX Congresso Brasileiro de Engenharia Química*, 2012;

- **Periódico indexado**

1. FONTES, R. M.; FONTES, C. H.; KALID, R. A. Dynamic Model Identification with Uncertain Process Variables using Fuzzy Inference System. KARIMI, I. A.; SRINIVASAN, R. (Eds.). *Computer-aided chemical engineering*. 1. ed. Amsterdam: Elsevier, 2012. v. 31p. 955-959.



---

# Referências Bibliográficas

---

AGUIRRE, L. A. *Introdução à identificação de sistemas: técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. Belo Horizonte: UFMG, 2000. 554 p. ISBN 85-7041-220-1.

AGUIRRE, L. A.; RODRIGUES, G. G.; JÁCOME, C. R. F. Identificação de sistemas não-lineares utilizando modelos narmax polinomiais — uma revisão e novos resultados. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, v. 9, n. 2, p. 90–106, 1998.

AHN, K. K.; PHAM, H.; ANH, H. Inverse Double NARX Fuzzy Modeling for System Identification. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, v. 15, n. 1, p. 136–148, fev. 2010. ISSN 1083-4435.

ALBERTAZZI, A.; SOUSA, A. *Fundamentos de metrologia científica e industrial*. 1. ed. Barueri-SP: Editora Barueri, 2008. ISBN 9788520421161.

ALLAN, D. W. Time and frequency (time-domain) characterization, estimation, and prediction of precision clocks and oscillators. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, v. 34, n. 6, p. 647–54, jan. 1987. ISSN 0885-3010.

ALMEIDA, C. R. et al. Influência dos graus de liberdade na avaliação da incerteza expandida. In: *VI Congresso Brasileiro de Metrologia*. Natal - Rio Grande do Norte: INMETRO, em publicação, 2011. p. 1–5.

ANDRADE, V. E. *Sistemas de detecção e diagnóstico de falhas em sensores de um compressor de gás natural utilizando lógica fuzzy tipo-2*. 115 p. Tese (Mestrado) — Universidade Federal da Bahia, 2012.

BABUSKA, R.; VERBRUGGEN, H. B. An overview of fuzzy modeling for control. *Control Eng. Practice*, v. 4, n. 11, p. 1593–1606, 1996.

- BENTLEY, R. E. *Uncertainty in Measurement: the ISO Guide*. 11. ed. Sidney: National Measurement Institute of Australia, 2005. 108 p. ISBN 0975074407.
- BEZDEK, J. C. et al. *Fuzzy models and algorithms for pattern recognition and image processing*. [S.l.: s.n.], 1999. ISBN 0-7923-8521-7.
- BIPM et al. *Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement*. [S.l.], 2008. 132 p.
- BIPM et al. *Evaluation of measurement data — Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” — Propagation of distributions using a Monte Carlo method*. 1. ed. [S.l.]: Joint Committee for Guides in Metrology - JCGM 101:2008, 2008.
- BIPM et al. *Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement”– Models with any number of output quantities*. [S.l.], 2011. 80 p.
- BIPM et al. *Vocabulário Internacional de Metrologia – Conceitos fundamentais e gerais e termos associados*. [S.l.], 2012.
- CAMPELLO, R. J. G. B.; OLIVEIRA, G. H. C.; AMARAL, W. C. Identificacao e controle de processos via desenvolvimentos em séries ortonormais. Parte A: identificacao. *Sba: Controle e Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, v. 18, n. 3, set. 2007. ISSN 0103-1759.
- CHIU, S. L. Fuzzy model identification based on cluster estimation. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, v. 2, p. 267–278, 1994.
- DOKAS, I.; KARRAS, D.; PANAGIOTAKOPOULOS, D. Fault tree analysis and fuzzy expert systems: Early warning and emergency response of landfill operations. *Environmental Modelling & Software*, v. 24, n. 1, p. 8–25, jan. 2009. ISSN 13648152.
- DUBOIS, D. et al. Probability-Possibility Transformations, Triangular Fuzzy Sets, and Probabilistic Inequalities. *Reliable Computing*, v. 10, p. 273–297, 2004.
- DUBOIS, D.; PRADE, H. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. [S.l.: s.n.], 1937.

DUBOIS, D.; PRADE, H.; SANDRI, S. On possibility/probability transformations. In: *Proceedings of Fourth IFSA Conference*. [S.l.]: Kluwer Academic Publ, 1993. p. 103–112.

DUNN, J. A. Fuzzy Relative of the ISODATA Process and its Use in Detecting Compact Well- Separated ClustersNo Title. *Journal of Cybernetics*, v. 3, p. 32–57, 1973.

ELSTER, C.; LINK, A. Uncertainty evaluation for dynamic measurements modelled by a linear time-invariant system. *Metrologia*, v. 45, n. 4, p. 464–473, ago. 2008. ISSN 0026-1394.

ELSTER, C.; LINK, A.; BRUNS, T. Analysis of dynamic measurements and determination of time-dependent measurement uncertainty using a second-order model. *Measurement Science and Technology*, v. 18, n. 12, p. 3682–3687, dez. 2007. ISSN 0957-0233.

FERRERO, A.; FEDERICI, A.; SALICONE, S. Instrumental Uncertainty and Model Uncertainty Unified in a Modified Fuzzy Inference System. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, v. 59, n. 5, p. 1149–1157, maio 2010.

FERRERO, A.; GAMBA, R.; SALICONE, S. A Method Based on Random-Fuzzy Variables for Online Estimation of the Measurement Uncertainty of DSP-Based Instruments. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, v. 53, n. 5, p. 1362–1369, out. 2004. ISSN 0018-9456.

FERRERO, A.; SALICONE, S. The Random-Fuzzy Variables: A New Approach to the Expression of Uncertainty in Measurement. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, v. 53, n. 5, p. 1370–1377, out. 2004. ISSN 0018-9456.

FERRERO, A.; SALICONE, S. Different possible approaches to RFV construction based on the available metrological information. *Advanced Methods for Uncertainty Estimation in Measurement 2007*, p. 35–40, 2007.

FERRERO, A.; SALICONE, S. The construction of random-fuzzy variables from the available relevant metrological information. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, v. 57, n. 12, p. 365–374, dez. 2009. ISSN 0018-9456.

FERRERO, A.; SALICONE, S.; TODESCHINI, G. Accounting Measurement Uncertainty in Fuzzy Inference. In: *Advanced Methods for Uncertainty Estimation in Measurement*. [S.l.: s.n.], 2007. p. 74 – 79. ISBN 1424409330.

FONTES, R. M. et al. Avaliação da Incerteza de Medição para um Procedimento de Verificação Volumétrica de Vidrarias. In: *VII SNCA - Seminário Nacional de Controle e Automação*. Salvador - Bahia: UFBA, em publicação, 2011. p. 14.

FONTES, R. M. et al. Obtenção de parâmetros ótimos para um modelo dinâmico fuzzy TSK considerando incerteza de medição nas entradas. In: *VI Congresso Brasileiro de Metrologia*. Salvador - Bahia: INMETRO, em publicação, 2011. p. 5.

GONCALVES, G. A. A.; REQUIAO, R.; KALID, R. d. A. Desenvolvimento de software para avaliação da incerteza de medição. In: *VI Congresso Brasileiro de Metrologia*. Natal - Rio Grande do Norte: INMETRO, em publicação, 2011. p. 1–6.

GONCALVES, G. A. A.; TEIXEIRA, L. A.; KALID, R. d. A. Análise da sensibilidade do método de monte carlo para a estimativa de incerteza de acordo com o número de dados aleatórios gerados. In: *V Congresso Brasileiro de Metrologia*. Salvador - BA: INMETRO, 2009. p. 5.

GUENOUNOU, O.; BELMEHDI, A.; DAHHOU, B. Multi-objective optimization of TSK fuzzy models. *Expert Systems With Applications*, Elsevier Ltd, v. 36, n. 4, p. 7416–7423, 2009. ISSN 0957-4174.

HESSLING, J. P. A novel method of dynamic correction in the time domain. *Measurement Science and Technology*, v. 19, n. 7, p. 075101, jul. 2008. ISSN 0957-0233.

HESSLING, J. P. Dynamic metrology—an approach to dynamic evaluation of linear time-invariant measurement systems. *Measurement Science and Technology*, v. 19, n. 8, p. 084008, ago. 2008. ISSN 0957-0233.

- HISKENS, I. A.; PAI, M. A.; NGUYEN, T. B. Bounding Uncertainty in Power System Dynamic Simulations. *IEEE*, 2000.
- HOPPNER, F. et al. *Fuzzy cluster analysis - Methods for classification, data analysis and image recognition*. New Y: Jhon Wiley & Sons, LTD, 1999. ISSN 1672-1977. ISBN 0-471-98864-2.
- KALMAN, R. E. No Title A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, v. 82D, p. 35–45, 1960.
- KARNIK, N.; MENDEL, J. M. Operations on type-2 fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, Amsterdam: North-Holland, c1978-, v. 122, n. 2, p. 327–348, 2001.
- KESSEL, R.; KACKER, R. N.; BERGLUND, M. Coefficient of contribution to the combined standard uncertainty. *Metrologia*, v. 43, n. 4, p. S189–S195, ago. 2006. ISSN 0026-1394.
- KYRIAZIS, G. A.; MARTINS, M. A. F.; KALID, R. d. A. Bayesian recursive estimation of linear dynamic system states from measurement information. *Measurement*, n. 45, p. 1558–1563, 2012.
- LIMA, M. P.; FONTES, C. H. d. O.; SCHNITMAN, L. A lógica fuzzy do tipo 2 e um estudo de caso aplicado ao controle de tráfego aéreo m. In: *Simpósio Brasileiro de Inteligência Computacional*. Florianópolis-SC: [s.n.], 2007.
- LIRA, I. Monte Carlo evaluation of the uncertainty associated with the construction and use of a fitted curve. *Measurement*, Elsevier Ltd, v. 44, n. 10, p. 2156–2164, dez. 2011. ISSN 02632241.
- LIRA, I. The evaluation of the uncertainty associated with the construction and use of a calibration function. In: SBM (Ed.). *Metrologia 2011*. Natal - Rio Grande do Norte: [s.n.], 2011.
- LIRA, I.; GRIENTSCHNIG, D. Assignment of a non-informative prior when using a calibration function. *Measurement Science and Technology*, v. 23, n. 1, p. 015001, jan. 2012. ISSN 0957-0233.

- LIRA, I. H. Bayesian evaluation of comparison data. *Metrologia*, v. 43, n. 4, p. S231–S234, ago. 2006. ISSN 0026-1394.
- LIRA, I. H.; GRIENTSCHNIG, D. Bayesian assessment of uncertainty in metrology: a tutorial. *Metrologia*, v. 47, n. 3, p. R1–R14, jun. 2010. ISSN 0026-1394.
- LIRA, I. H.; KYRIAZIS, G. A. Bayesian inference from measurement information. *Metrologia*, v. 36, n. 3, p. 163–169, jun. 1999. ISSN 0026-1394.
- LIRA, I. H.; WÖGER, W. Bayesian evaluation of the standard uncertainty and coverage probability in a simple measurement model. *Measurement Science and Technology*, v. 12, n. 8, p. 1172–1179, ago. 2001. ISSN 0957-0233.
- LIRA, I. H.; WÖGER, W. Comparison between the conventional and Bayesian approaches to evaluate measurement data. *Metrologia*, v. 43, n. 4, p. S249–S259, ago. 2006. ISSN 0026-1394.
- LIU, Z. Higher order corrections to the Welch–Satterthwaite formula. *Metrologia*, v. 42, n. 5, p. 449–457, out. 2005. ISSN 0026-1394.
- MAMDANI, E. H. Application of Fuzzy Logic to Approximate Reasoning Using Linguistic Synthesis. *IEEE Transactions on Computers*, C-26, n. 12, p. 1182–1191, dez. 1977. ISSN 0018-9340.
- MARTINS, M. A. F. *Contribuições para a avaliação da incerteza de medição no regime estacionário*. Escola Politécnica da Universidade Federal da Bahia, Salvador - Bahia, 2010. 102 p.
- MARTINS, M. A. F. et al. New objective function for data reconciliation in water balance from industrial processes. *Journal of Cleaner Production*, v. 18, n. 12, p. 1184–1189, ago. 2010. ISSN 09596526.
- MARTINS, M. A. F.; KALID, R. A. Metodologia para avaliação da incerteza de medição em regime dinâmico de sistemas contínuos. In: *XVIII Congresso Brasileiro de Engenharia Química*. Foz do Iguaçu - PR: UEM/UNICAMP, 2010. p. 10.
- MARTINS, M. A. F.; PESSOA, R. W. S.; KALID, R. d. A. Análise estatística do uso de um filtro de kalman a um sistema de medição com ruídos. In: *V Congresso Brasileiro de Metrologia*. Salvador - BA: INMETRO, 2009. p. 6.

- MARTINS, M. A. F. et al. Avaliação da incerteza em estimativas de medição de vazão: um caso implícito, não linear e multivariável. In: *VI Congresso Brasileiro de Metrologia*. Natal - Rio Grande do Norte: INMETRO, em publicação, 2011. p. 1–5.
- MARTINS, M. A. F.; REQUIAO, R.; KALID, R. A. Generalized expressions of second and third order for the evaluation of standard measurement uncertainty. *Measurement*, v. 44, n. 9, p. 1526–1530, jun. 2011. ISSN 02632241.
- MARTINS, M. A. F.; REQUIAO, R.; KALID, R. d. A. Correções de ordens superiores para a incerteza padrão combinada. In: *VI Congresso Brasileiro de Metrologia*. Natal - Rio Grande do Norte: INMETRO, em publicação, 2011. p. 1–4.
- MAURIS, G. Fuzzy handling of measurement errors in instrumentation. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, v. 1, n. 1, p. 28–93, 2000.
- MAURIS, G. The principle of possibility maximum specificity as a basis for measurement uncertainty expression. In: *AMUEM 2009 - International Workshop on Advanced Methods for Uncertainty Estimation in Measurement*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 6–7. ISBN 9781424435937.
- MAURIS, G.; LASSERRE, V.; FOULLOY, L. Fuzzy modeling of measurement data acquired from physical sensors. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, v. 49, n. 6, p. 1201–1205, 2000. ISSN 00189456.
- MAURIS, G.; LASSERRE, V.; FOULLOY, L. A fuzzy approach for the expression of uncertainty in measurement. *Measurement*, v. 29, p. 165–177, 2001.
- MELEIRO, L. A. d. C. *Projeto e aplicação de controladores baseados em modelo lineares, neurais e nebulosos*. Tese (Mestrado) — UFSCar, 2002.
- MENCATTINI, A.; SALICONE, S. A comparison between different methods for processing the random part of Random-Fuzzy Variables representing measurement results. In: *International Workshop on Advanced Methods for Uncertainty Estimation in Measurement*. [S.l.: s.n.], 2008.
- MENCATTINI, A.; SALMERI, M.; LOJACONO, R. Type-2 Fuzzy Sets for Modeling Uncertainty in Measurement. In: *AMUEM 2006 - International Workshop*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 8–13.

- MENDEL, J. M. *Uncertain rule-based fuzzy logic system: introduction and new directions*. 1. ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 2000. ISBN 0-13-040969-3.
- MENDES, C. E. P. *Avaliação da incerteza de indicadores de desempenho ambiental: estudo de caso*. 96 p. Tese (Dissertação;), Escola Politécnica da Universidade Federal da Bahia, Salvador - Bahia, 2011.
- MENDES, C. E. P.; KALID, R. d. A.; OLIVEIRA-ESQUERRE, K. Validação do método GUM usando o método GUM-S1 para avaliar a incerteza associada a indicadores de desempenho ambiental. In: *VI Congresso Brasileiro de Metrologia*. Natal - Rio Grande do Norte: INMETRO, em publicação, 2011. p. 4.
- MENDES, C. E. P. et al. Assessment of the uncertainty associated with the energy indicator. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Elsevier Ltd, v. 15, n. 6, p. 3156–3164, ago. 2011. ISSN 13640321.
- MOUZOURIS, G. C.; MENDEL, J. M. Dynamic non-Singleton fuzzy logic systems for nonlinear modeling. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 5, n. 2, p. 199–208, maio 1997. ISSN 10636706.
- MOUZOURIS, G. C.; MENDEL, J. M. Nonsingleton Fuzzy Logic Systems: Theory and Application. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 5, n. 1, p. 56–71, 1997.
- PAIVA, R. P. P. d. C. e. *Identificação Neuro-Difusa*. Tese (Mestrado) — Universidade de Coimbra, 1999.
- RENTERÍA, A. R. *ESTIMACIÓN DE PROBABILIDADE FUZZY A PARTIR DE DADOS IMPRECISOS*. Tese (Doutorado), 2006.
- REQUIAO, R. *Contribuições à avaliação da incerteza em modelos MIMO não lineares em estado estacionário*. 103 p. Tese (Dissertação) — Universidade Federal da Bahia, 2012.
- REQUIAO, R.; KALID, R. d. A.; SOARES, R. d. P. Software para avaliação da incerteza em sistema multivariável para processos industriais. In: *VI Congresso Brasileiro de Metrologia*. Natal - Rio Grande do Norte: INMETRO, em publicação, 2011. p. 1–6.



- SCHWAAB, M.; PINTO, J. C. *Análise de Dados Experimentais I. Fundamentos de Estatística e Estimação de Parâmetros*. [S.l.: s.n.], 2007. ISBN 9798576500888.
- SERRA, G. L. O.; BOTTURA, C. P. Métodos de variavel instrumental fuzzy para identificacao de sistemas. *Sba: Controle e Automacao Sociedade Brasileira de Automatica*, v. 18, n. 4, dez. 2007. ISSN 0103-1759.
- SOUZA, L. S. D. et al. Propagação de incertezas em reconciliação de dados sem redundância de medição . In: *VI Congresso Brasileiro de Metrologia*. Natal - Rio Grande do Norte: INMETRO, em publicação, 2011. p. 4.
- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy Identification of Systems ans Its Aplication to Modeling and Control. *IEEE Transactions On Systems Man And Cybernetics*, n. 1, p. 116 – 132, 1985.
- WAKABAYASHI, C. *Análise e controle fuzzy de processos estudo de caso em um reator de polimerização*. Tese (Mestrado) — UFBA, 2007.
- WANG, L.-X.; MENDEL, J. M. Generating Fuzzy Rules learning by Examples. *IEEE Transactions On Systems Man And Cybernetics*, v. 22, n. 6, p. 1414 – 1427, 1992.
- WANG, X.; RUAN, D.; KERRE, E. E. *Mathematics of Fuzziness – Basic Issues*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009. (Studies in Fuzziness and Soft Computing, v. 245). ISBN 978-3-540-78310-7.
- YAGER, R.; FILEV. Generation of fuzzy rules by mountain clustering. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, v. 2, n. 3, p. 209–219, 1994.
- ZADEH, L. A. Fuzzy sets. *Information and Control*, Prentice Hall PTR Upper Saddle River, NJ, USA, v. 8, n. 3, p. 338–353, 1965. ISSN 00199958.
- ZADEH, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-III. *Information Sciences*, v. 9, n. 1, p. 43–80, jan. 1975. ISSN 00200255.
- ZADEH, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I. *Information Sciences*, v. 8, n. 3, p. 199–249, jan. 1975. ISSN 00200255.

ZADEH, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—II. *Information Sciences*, v. 8, n. 4, p. 301–357, jan. 1975. ISSN 00200255.

ZADEH, L. A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 100, p. 9–34, 1999. ISSN 01650114.

**UFBA**  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA**  
**ESCOLA POLITÉCNICA**

**PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA INDUSTRIAL - PEI**

Rua Aristides Novis, 02, 6º andar, Federação, Salvador BA

CEP: 40.210-630

Telefone: (71) 3283-9800

E-mail: [pei@ufba.br](mailto:pei@ufba.br)

Home page: <http://www.pei.ufba.br>

