

---

# COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS LINEAR E NÃO LINEAR PARA A AVALIAÇÃO DA INCERTEZA DE MEDIÇÃO

**Márcio A. F. Martins\***  
marciomartins@ufba.br

**Gesner A. Nery†**  
gsnrnr@hotmail.com

**Guilherme A. A. Gonçalves†**  
guilhermegoncalves1@gmail.com

**Ricardo A. Kalid\***  
kalid@ufba.br

**Lucas Aguiar Teixeira†**  
lucasteixeira88@yahoo.com

\*Universidade Federal da Bahia, Escola Politécnica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial, Salvador, Brasil

†Universidade Federal da Bahia, Escola Politécnica, Colegiado do Curso de Engenharia Química, Salvador, Brasil

---

## ABSTRACT

### Comparison of the linear and non linear methods for the evaluation of measurement uncertainty

The main method recognized by the metrologists for the evaluation of measurement uncertainty is *de facto* the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (ISO Guide). Due to some limitations of the proposed method by ISO Guide however, ISO has developed a supplementary method for evaluating the measurement uncertainty based on the propagation of probability density functions using the Monte Carlo method (ISO-S1). The present paper discusses these methods for the quantification of measurement uncertainty. We review the literature, in particular the main papers presenting these modern approaches. We also discuss the merits and the limitations of the ISO Guide and ISO-S1 approaches. Furthermore, a comparative study between these two methods was carried out in two case studies. The obtained results show that it is necessary to evaluate the influence of the degree of non linearity in order to estimate the measurement uncertainty before either method is chosen.

**KEYWORDS:** measurement uncertainty, propagation of un-

certainties, propagation of probability density functions, Monte Carlo method, non linear models.

## RESUMO

O principal método reconhecido pelos metrologistas para a avaliação da incerteza de medição é *de facto* o Guia para a Expressão da Incerteza de Medição (Guia ISO). Entretanto, devido a algumas limitações do método proposto pelo Guia ISO, a ISO desenvolveu um método suplementar para a avaliação da incerteza de medição baseado na propagação de funções de densidade de probabilidade através do método de Monte Carlo (ISO-S1). O presente artigo visa discutir esses métodos de quantificação da incerteza de medição. Os autores realizam uma revisão da literatura focando nos principais artigos que apresentam essas abordagens modernas, bem como discutem os méritos e as limitações de ambos os métodos. Além disso, um estudo comparativo entre os métodos foi realizado através de dois estudos de caso. Os resultados obtidos mostraram que é necessário avaliar a influência do grau de não linearidade na estimativa da incerteza antes de optar por quaisquer um dos métodos.

**PALAVRAS-CHAVE:** incerteza de medição, propagação de incertezas, propagação de funções de densidade de probabilidade, método de Monte Carlo, modelos não lineares.

---

Artigo submetido em 23/02/2010 (Id.: 01107)

Revisado em 05/04/2010, 29/10/2010

Aceito sob recomendação do Editor Associado Prof. Sebastian Yuri Cavalcanti Catunda

## 1 INTRODUÇÃO

Em qualquer procedimento de medição de uma grandeza física o resultado será uma estimativa do valor verdadeiro dessa grandeza, logo uma indicação quantitativa referente às parcelas de dúvidas embutidas nessa estimativa é necessária para avaliar a qualidade do resultado de medição. O conceito metrológico que aborda tal assunto é a incerteza de medição. Segundo o Vocabulário Internacional de Metrologia (VIM) (BIPM et al., 2008c), a incerteza de medição é “*um parâmetro não-negativo que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos a um mensurando, com base nas informações utilizadas*”. Em 1980, uma metodologia padrão para avaliar a incerteza de medição foi desenvolvida pelo *Bureau International des Poids et Mesures* (BIPM) a pedido do *Comité International des Poids et Mesures* (CIPM) (CIPM, 1980), a qual é reconhecida internacionalmente pela comunidade metrológica como Recomendação INC-1980 (Giacomo, 1981). Essa Recomendação INC-1980 foi aprovada em 1981 (Giacomo, 1982) e retificada em 1986 (Giacomo, 1987). Baseado nesta Recomendação INC-1980, um Guia mais detalhado foi desenvolvido pela *International Organization for Standardization* (ISO), juntamente com o apoio de mais sete organizações internacionais<sup>1</sup>. O documento resultante, conhecido como “*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*” (Guia ISO), foi publicado em 1993 e reimpresso com algumas correções em 1995. Esse Guia é periodicamente submetido a revisões, onde sua última edição foi publicada em 2008 (BIPM et al., 2008a).

A edição corrente do Guia ISO fornece regras gerais para avaliar e expressar a incerteza de medição. Este Guia é baseado em conceitos estatísticos da abordagem frequentista (incerteza do Tipo A) e da abordagem bayesiana (incerteza do Tipo B). O método proposto pelo Guia ISO consiste em propagar as estimativas das grandezas de entrada e suas incertezas padrão através de uma aproximação linear da função de medição de modo a avaliar a incerteza padrão e a incerteza expandida da grandeza de saída (mensurando).

Após a publicação do Guia ISO, o BIPM criou o *Joint Committee for Guides in Metrology* (JCGM) que, por sua vez, assumiu duas responsabilidades: promover o uso do Guia ISO e elaborar documentos padrão para uma ampla aplicabilidade do Guia ISO em ciências de medição (Grupo de Trabalho 1 do JCGM); revisar e promover o uso do VIM (Grupo de trabalho 2 do JCGM). Os documentos padrão de responsabilidade do Grupo de Trabalho 1 do JCGM são: um documento

<sup>1</sup>Bureau International des Poids et Mesures (BIPM), International Electrotechnical Commission (IEC), International Federation of Clinical Chemistry and Laboratory Medicine (IFCC), International Laboratory Accreditation Cooperation (ILAC), International Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC), International Union of Pure and Applied Physics (IUPAP) and International Organization of Legal Metrology (OIML).

introdutório que descreve brevemente a função de cada documento do JCGM, um documento focado nos conceitos e nos princípios básicos utilizados pelo Guia ISO, três suplementos do Guia ISO e dois documentos focados nas questões do uso da incerteza de medição no contexto da conformidade com requisitos especificados e a aplicação do método dos mínimos quadrados. Cox and Harris (2003) mostram a função específica dos três Suplementos do Guia ISO; porém, maiores detalhes sobre todos os documentos do JCGM são discutidos por Bich, Cox and Harris (2006).

O Suplemento 1 do Guia ISO (ISO-S1), desenvolvido pelo BIPM et al. (2008b), apresenta um método numérico para a avaliação da incerteza de medição. Esse método é baseado na propagação das funções de densidade de probabilidade atribuídas às grandezas de entrada através de uma simulação numérica da função de medição de modo a determinar a função de densidade de probabilidade do mensurando. O Suplemento 2 do Guia ISO, ainda no prelo, irá tratar de ferramentas para a avaliação da incerteza em modelos de medição que possuem múltiplas grandezas de saída, ou seja, modelos multivariáveis de medição (Bich, Cox and Harris, 2006). Por fim, o Suplemento 3 do Guia ISO, também no prelo, focará no desenvolvimento e validação dos modelos de medição (Bich, Cox and Harris, 2006).

O presente trabalho está organizado no seguinte formato: na primeira parte é descrita cada estágio do Guia ISO, isto é, a avaliação da incerteza padrão que é proveniente da combinação das incertezas padrão do Tipo A e do Tipo B, a avaliação da incerteza padrão combinada e a incerteza expandida. Na segunda parte é esboçada a propagação de funções de densidade de probabilidade, o método de Monte Carlo e as etapas para avaliação da incerteza de medição de um mensurando com base no método ISO-S1. Na terceira parte são apresentados os resultados e as discussões sobre os métodos propostos pelo Guia ISO e ISO-S1 através de dois estudos de casos. Por último, observações conclusivas são explanadas com um enfoque de demonstrar os méritos e os deméritos de cada um dos métodos.

## 2 GUIA ISO

Antes da publicação do Guia ISO, os conceitos da análise de erros eram utilizados para quantificar a incerteza de medição. Entretanto, as limitações da análise de erros eram responsáveis por conflitos de comunicação gerados entre as áreas científicas e técnicas de medição (Kacker et al., 2007).

Com intuito de superar as limitações e os conflitos de comunicação da análise de erros, como também criar uma linguagem universal para expressar e avaliar a incerteza de medição, as organizações internacionais em metrologia desenvolveram o Guia ISO, que foi construído sob a ótica de alguns

conceitos oriundos da análise de erros.

Os princípios estatísticos envolvidos na análise de erros, tais como: erro de medição, valor verdadeiro, propagação de erros e entre outros, são discutidos nos livros de Bevington and Robison (1992); Taylor (1997); Kirkup and Frenkel (2006) e na monografia de Frenkel (2006); uma revisão da literatura sobre a análise de erros pode ser consultada no trabalho de Kacker et al. (2007).

O Guia ISO apresenta os conceitos e os princípios estatísticos e metroológicos, bem como define um procedimento que deve ser adotado pelos metrologistas, para expressar o resultado de medição e sua respectiva incerteza. De acordo com o Guia ISO, as incertezas de medição podem ser expressas como incertezas padrão (em termos de desvios padrão) ou incertezas expandidas. As definições requeridas para a correta aplicação do método proposto pelo Guia ISO são explanadas em Bentley (2005); Willink (2006b); além disso, os principais artigos encontrados na literatura que apresentam em suas seções uma breve revisão a respeito desse método são: Cox et al. (2003); Kacker et al. (2007); Kacker and Jones (2003); Kacker et al. (2006); Kacker (2006); Lira (2006); Willink (2005); White and Saunders (2007).

## 2.1 Avaliando a incerteza padrão

Para avaliar a incerteza de medição pelo Guia ISO, é necessário estabelecer uma função de medição<sup>2</sup>:

$$Y = f(X_1, \dots, X_N) \quad (1)$$

A função de medição, expressada pela Eq.(1), representa a relação matemática entre a grandeza de saída ou mensurando ( $Y$ ) com as várias grandezas de entrada ( $X_i$ ). Esta relação funcional é necessária, pois o mensurando  $Y$  não é medido diretamente, mas determinado por  $N$  outras grandezas (de entrada)  $X_i$ . As grandezas de entrada  $X_i$  podem ser classificadas também como mensurandos, uma vez que essas dependem de outras grandezas que contribuem para a sua variabilidade experimental. A variabilidade (experimental) observada das grandezas de entrada é resultado da contribuição de várias fontes de incertezas que, por sua vez, devem ser modeladas também por um modelo matemático. Mais adiante esse modelo matemático será detalhado.

O estabelecimento adequado da função de medição é fundamental na determinação do resultado de uma medição e

<sup>2</sup>A avaliação da incerteza de medição proposta pelo Guia ISO, documento de referência da área metroológica, necessita de uma função de medição para sua devida aplicação. As contribuições do presente trabalho estão balizadas nesse conceito do Guia ISO. Portanto, apenas processos ou sistemas de medição que podem ser modelados por uma função (de medição) poderão ser tratadas pelos métodos abordados neste trabalho.

de sua incerteza associada, pois se o modelo não representar bem o processo de medição, resultados enganosos, tanto para o mensurando quanto para a sua incerteza, podem ser alcançados. Um estudo minucioso sobre a importância da escolha das grandezas de influência para o desenvolvimento adequado do modelo de medição é apresentado por Sommer and Siebert (2006).

No Guia ISO cada grandeza possui uma função de densidade de probabilidade (PDF), e consequentemente os parâmetros estatísticos mais relevantes da PDF, do ponto de vista metroológico, são a esperança (ou valor esperado de uma variável aleatória) e a variância<sup>3</sup> (esperança do desvio quadrático de uma variável aleatória em torno de sua própria esperança). Por conveniência, o mesmo símbolo será usado tanto para a grandeza como para sua variável aleatória caracterizada por uma PDF. Para evitar possíveis conflitos, os símbolos das variáveis aleatórias serão acompanhados pelos operadores esperança ( $E[X]$ ) e variância ( $\text{Var}[X]$ ) que representam os parâmetros esperança e variância, respectivamente. Dessa maneira, o Guia ISO define que o resultado de uma medição é obtido pelo primeiro momento estatístico, isto é:

$$\mu_X = E[X] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \xi g_X(\xi) d\xi \quad (2)$$

Em que  $\xi$  representa os valores possíveis de uma grandeza  $X$ , a qual possui uma PDF  $g_X(\xi)$ . Enquanto que a incerteza padrão de medição ( $u(\mu_X)$ ) associada ao resultado de medição  $\mu_X$  é relacionada com o segundo momento estatístico centrado na esperança:

$$u^2(\mu_X) = \text{Var}[X] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - E[X])^2 g_X(\xi) d\xi \quad (3)$$

Como mostrado nas Eqs. (2–3), para expressar o resultado de medição ( $\mu_X$ ) e a incerteza padrão  $u(\mu_X)$  é necessário o conhecimento da PDF da grandeza. Para as grandezas de entrada ( $X_i$ ), o Guia ISO considera dois métodos para a obtenção dessas PDFs: o primeiro consiste em obter uma PDF a partir de uma série de observações independentes  $X_{i,k}$  de  $X_i$  (uma distribuição de frequência); e o segundo consiste na determinação de uma PDF *a priori* proveniente do levantamento de informações das grandezas. O Guia ISO classifica as incertezas obtidas a partir das distribuições de frequência como incertezas do Tipo A e as oriundas a partir de PDFs *a priori* como incertezas do Tipo B. Por consequência, as incertezas padrão das grandezas de entrada, segundo o Guia ISO, são estimadas pela combinação das incertezas padrão do Tipo A e do Tipo B.

<sup>3</sup>Na prática a incerteza de medição é proveniente do desvio padrão da PDF da variável aleatória; por definição, o desvio padrão é a raiz quadrada positiva da variância.

### 2.1.1 Avaliação do Tipo A da incerteza padrão

As Eqs. (2–3) representam a esperança e a variância de uma variável aleatória contínua, respectivamente. Contudo, em um processo de medição os valores possíveis da variável submetida a medição são amostrados, o que implica na formação de um conjunto de valores discretos dessa grandeza. Portanto, no processo de medição as amostras coletadas das variáveis medidas constituem uma PDF amostral ou uma distribuição de frequência. Como a distribuição de frequência é uma aproximação da PDF de uma variável aleatória, seus parâmetros média (resultado de medição) e desvio padrão (incerteza padrão) também serão uma estimativa dos respectivos parâmetros  $\mu_X$  e  $u(\mu_X)$  associados a PDF daquela variável aleatória  $X$ . A melhor estimativa para os parâmetros  $\mu_{X_i}$  e  $u(\mu_{X_i})$  de uma grandeza  $X_i$  são expressas pelas Eqs. (4–5), respectivamente:

$$x_i = \bar{X}_i = \sum_{k=1}^n \frac{X_{i,k}}{n} \quad (4)$$

$$s^2(X_i) = \sum_{k=1}^n \frac{(X_{i,k} - \bar{X}_i)^2}{n-1} \quad (5)$$

Em que  $x_i$  é a média aritmética ou média de  $n$  observações independentes  $X_{i,k}$  da grandeza  $X_i$  e a raiz quadrada positiva de  $s^2(X_i)$  é o desvio padrão experimental ( $s(X_i)$ ) dessas mesmas observações. Segundo o Guia ISO, a melhor estimativa  $x_i$  de uma grandeza de entrada  $X_i$  deve ser obtida da Eq.(4), enquanto que a incerteza padrão (do Tipo A) associada à estimativa  $x_i$  é determinada pelo desvio padrão experimental da média:

$$u'_A(x_i) = s(x_i) = \frac{s(X_i)}{\sqrt{n}} \quad (6)$$

A incerteza padrão do Tipo A, representada pela Eq.(6), é válida somente quando as observações  $X_{i,1}, \dots, X_{i,n}$  forem mutuamente independentes, ver demonstração em (Frenkel, 2006, pg.11); e quando o número de observações independentes  $X_{i,k}$  for maior ou igual a vinte e três amostras ( $n \geq 23$ ). Entretanto, quando o número de medições pertence ao intervalo ( $4 \leq n \leq 22$ ) é recomendado utilizar a incerteza padrão do Tipo A bayesiana (Kacker and Jones, 2003; Kacker et al., 2006; Kacker, 2006):

$$u_A(x_i) = u_{A_{Bayes}}(x_i) = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}} \cdot \frac{s(X_i)}{\sqrt{n}} \quad (7)$$

O comportamento da razão entre a Eq.(7) e a Eq.(6) versus o número de medições independentes ( $n$ ), apresentado

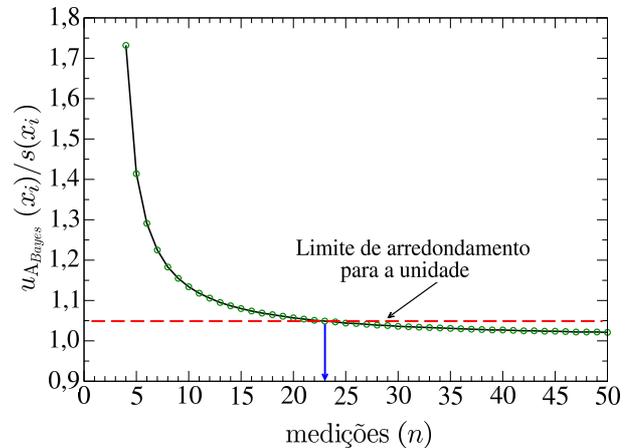


Figura 1: Comportamento da razão entre as incertezas padrão do Tipo A bayesiana e clássica versus o número de medições independentes.

na Figura 1, demonstra que a ordenada da curva tende a unidade a partir de  $n = 23$  medições, tomando como base a regra de arredondamento na numeração decimal da NBR 5891 (ABNT, 1977). Por isso, quando o número de medições estiver entre 4 e 22 recomenda-se utilizar a Eq.(7); a partir de  $n = 23$  medições, a Eq.(6) pode ser utilizada ou simplesmente utilizar a expressão da incerteza padrão do Tipo A conforme a Eq.(7), para  $n \geq 4$ .

Existem casos em que apenas poucas medições podem ser realizadas ( $n = 1, 2, 3$ ), devido a restrições operacionais, custo para realização do experimento, custo do instrumento e entre outros. Nesses casos, o desvio padrão experimental da média não pode ser avaliado por meio das Eqs. (6–7) e recomenda-se utilizar a seguinte expressão para atribuir a incerteza padrão do Tipo A:

$$u_A(x_i) = \frac{X_{max} - X_{min}}{2\sqrt{3}} \quad (8)$$

Em que  $X_{max}$  representa o máximo valor permitido da grandeza  $X_i$ , enquanto  $X_{min}$  o menor valor que  $X_i$  pode assumir.

A discussão apresentada até o momento refere-se à situação na qual a estimativa  $x_i$  de uma grandeza de entrada  $X_i$  é representada pela média aritmética das medidas. Contudo, quando essa estimativa for expressa por uma das observações  $X_{i,k}$ , a incerteza padrão do Tipo A deve ser avaliada pelo desvio padrão experimental da amostra (Eq.(5)).

### 2.1.2 Avaliação do Tipo B da incerteza padrão

Quando a estimativa  $x_i$  de uma grandeza de entrada  $X_i$  é avaliada a partir de um julgamento científico baseado em todas as informações disponíveis a respeito da variabilidade da grandeza  $X_i$ , o Guia ISO afirma que a incerteza padrão associada a essa estimativa refere-se à incerteza padrão do Tipo B ( $u_B(x_i)$ ). Segundo o Guia ISO, as informações para compor a incerteza do Tipo B podem incluir (BIPM et al., 2008a, cláusula 4.3.1): dados históricos de medições; experiência ou conhecimento geral a respeito do procedimento de medição; propriedades relevantes a respeito dos materiais ou dos instrumentos de medição; especificações do fabricante; dados da calibração e de outros certificados e incertezas de outros dados de referência presentes em manuais.

Nesse sentido é importante enfatizar que a avaliação do Tipo B da incerteza pode ser tão confiável quanto à avaliação do Tipo A, principalmente quando poucas medições são disponíveis. Como a avaliação do Tipo B da incerteza utiliza fontes de informações disponíveis a respeito do processo de medição, então a incerteza padrão decorrente da mesma é baseada em conceitos da estatística bayesiana (Lee, 1997; Lira and Kyriazis, 1999; Lira and Grientschnig, 2010). Deste modo, o método proposto pelo Guia ISO necessita de um auxílio externo para torná-lo mais consistente, uma vez que a estatística frequentista (incerteza do Tipo A) não o satisfaz completamente (Kacker and Jones, 2003).

Quando a PDF de alguma grandeza de entrada  $X_i$  é obtida a partir do conhecimento geral ou da experiência sobre o processo de medição, o Guia ISO classifica esta como uma PDF *a priori*. A PDF *a priori* pode ter várias formas, e.g., uniforme, triangular ou gaussiana. As formas dessas PDFs são obtidas com auxílio do princípio de entropia máxima<sup>4</sup> (PME) (Weise and Woger, 1993). Por exemplo, existem casos onde somente é conhecido o menor valor ( $a_-$ ) e o maior valor ( $a_+$ ) de uma grandeza de entrada  $X_i$ , então, de acordo com o PME, a PDF *a priori* atribuída a esta grandeza  $X_i$  deve ser uma distribuição retangular. Isto é, a probabilidade que os valores de  $X_i$  estejam dentro deste intervalo, para todos os propósitos práticos, é igual a unidade, e fora do intervalo é essencialmente zero. Uma PDF retangular é representada da seguinte forma:

$$g(X_i) = \begin{cases} \frac{1}{2(a_+ - a_-)}, & a_- < X_i < a_+ \\ 0, & \text{para outros valores de } X_i \end{cases} \quad (9)$$

Para este tipo de PDF, a esperança de  $X_i$  é calculada como o ponto médio do intervalo existente entre os limites inferior e superior de  $X_i$ , i.e.,  $x_i = (a_- + a_+)/2$ . Se a diferença entre os extremos do intervalo for denotada por  $2a$ , o desvio padrão associado ou a incerteza padrão do Tipo B da estimativa  $x_i$  é dada por:

$$u_B(x_i) = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad (10)$$

Alguns exemplos práticos da aplicação deste tipo de PDF são obtidos em limites de tolerância e resolução da escala de instrumentos de medição (Vuolo, 1997).

Em outra situação, além dos limites superiores e inferiores de uma grandeza  $X_i$ , é conhecido também um valor intermediário (valor mais provável) desses limites. Neste caso a melhor PDF que representa essa grandeza deve ser uma distribuição triangular. Neste tipo de distribuição é esperado que os valores próximos aos extremos sejam menos frequentes do que os valores próximos ao valor mais provável. Se a diferença entre os limites do intervalo  $a_-$  e  $a_+$  for denotada por  $2a$ , então a distribuição triangular pode ser representada matematicamente como:

$$g(X_i) = \begin{cases} (X_i - a_-)/a, & a_- < X_i < a \\ (a_+ - X_i)/a, & a < X_i < a_+ \\ 0, & \text{para outros valores de } X_i \end{cases} \quad (11)$$

Desta maneira, se a distribuição triangular for simétrica, a média será estimada por  $x_i = (a_+ + a_-)/2$  e o desvio padrão ou a incerteza padrão do Tipo B é dada por:

$$u_B(x_i) = \frac{a}{\sqrt{6}} \quad (12)$$

Uma PDF *a priori* muito comum em processos de medição que poderia ser assumida é a gaussiana<sup>5</sup>. Segundo o PME, quando apenas a média e o desvio padrão da grandeza de entrada  $X_i$  é conhecida, a PDF que possui a entropia máxima é a gaussiana (BIPM et al., 2008a, cláusula 4.3).

<sup>4</sup>Em linhas gerais o princípio de entropia máxima (PME) permite compreender características gerais de um processo ou um sistema baseado em informações parciais e incompletas dos mesmos; essa característica do PME permite denominá-lo de princípio de informação máxima. Sob a ótica da metrologia, o PME implica na inferência de uma PDF que represente apenas as informações disponíveis sobre o processo de medição.

<sup>5</sup>Em alguns exemplos práticos de processos de medição, a avaliação do Tipo B da incerteza padrão é confiada por um resultado de calibração do instrumento ou resultado de uma análise estatística expressado pela média e desvio padrão (incerteza padrão), na qual a maioria dos casos possuem distribuições gaussianas (Sommer et al., 2009).

Outro tipo de PDF *a priori* que pode surgir em processos de medição é a trapezoidal. Esta PDF surge quando os valores possíveis de uma grandeza  $X_i$  estão dentro de um intervalo não exatamente prescrito. Um estudo detalhado da aplicação deste tipo de PDF pode ser consultado no trabalho de Lira (2008); outra aplicação da PDF trapezoidal em processos de medição também pode ser consultada em Kacker and Lawrence (2007), neste último trabalho os autores mostram que a distribuição trapezoidal pode ser útil na quantificação da incerteza padrão do Tipo B para correções sistemáticas. Outros trabalhos apresentam um estudo mais detalhado da avaliação do Tipo B da incerteza aplicada em problemas mais específicos de medição: potências sonoras (da Costa-Felix, 2006), processamento digital de sinais (Locci et al., 2002; Elster, 2000) e resolução da escala de instrumentos (Frenkel and Kirkup, 2005).

### 2.1.3 Avaliando a incerteza padrão de uma grandeza de entrada

As grandezas de entrada são medidas diretamente no processo de medição através de um sistema (ou um instrumento) de medição. A variabilidade experimentalmente observada da grandeza de entrada (medida)  $X_i$  pode ser atribuída a duas fontes de incerteza: a variabilidade intrínseca do mensurando e a variabilidade proveniente das imperfeições do sistema de medição. A primeira fonte de incerteza é avaliada pela incerteza padrão do Tipo A ( $u_A(x_i)$ ), enquanto que a segunda é comumente avaliada pela incerteza padrão do Tipo B ( $u_B(x_i)$ ).

A classificação em fonte sistemática ou aleatória da incerteza de medição é desnecessária e apenas causa confusão (BIPM et al., 2008a, cláusula E.1). Qualquer que seja a natureza da fonte de incerteza, esta pode ser quantificada por um procedimento estatístico frequencista (incerteza padrão do Tipo A) ou a partir de informações *a priori* (incerteza padrão do Tipo B) independente da natureza aleatória ou sistemática da fonte de incerteza.

Portanto, como uma grandeza de entrada depende de outras componentes no processo de medição, uma função de medição é necessária para expressar o resultado de medição e sua incerteza padrão. Esta função de medição direta, aqui denominada de função metrológica, pode ser representada pela seguinte equação<sup>6</sup>:

$$X_i = Q_i + \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} D_{i,j} \quad (13)$$

<sup>6</sup> A Eq.(13) representa uma função metrológica baseada em fatores aditivos, contudo existem modelos que utilizam fatores multiplicativos (BIPM et al., 2008a, cláusula B.2.24). Estas funções metrológicas não serão abordadas neste trabalho.

Em que  $Q_i$  representa as indicações do instrumento de medição (série de observações independentes da grandeza de entrada);  $D_i$  representa as variáveis associadas às correções provenientes das imperfeições do sistema de medição (por exemplo: correções da calibração do instrumento, resolução da escala dos instrumentos de medição, compensações de temperatura e pressão sobre a grandeza de entrada  $X_i$ ); enquanto que  $\alpha_i$  representa os fatores de conversão de modo a tornar as correções  $D_i$  com a mesma unidade da grandeza de entrada  $X_i$ .

Segundo Lira and Wöger (1998a) existem basicamente três fontes de incertezas associadas ao resultado de medição de uma grandeza de entrada  $X_i$ : a primeira surge da dispersão dos valores obtidos da indicação do instrumento de medição; a segunda surge da resolução limitada da escala do instrumento de medição; e finalmente a terceira surge da informação incompleta sobre a correção sistemática que deve ser aplicada através da calibração do instrumento de medição. Portanto, a função metrológica da grandeza de entrada  $X_i$  pode ser reescrita como:

$$X_i = Q_i + \alpha_1 R_i + \alpha_2 C_i \quad (14)$$

Aplicando o operador matemático esperança (Eq.(5)) em ambos os lados da Eq.(14), utilizando também a melhor estimativa das variáveis (e.g.  $E[X_i] = x_i$ ), e como a esperança da resolução da escala do instrumento de medição é igual a zero ( $E[R_i] = r_i = 0$ ), obtém-se:

$$x_i = q_i + \alpha_2 c_i \quad (15)$$

Se os experimentos são conduzidos de forma cuidadosa, os instrumentos utilizados são de qualidade razoável, os procedimentos são adequados e os operadores são treinados, é possível assumir que  $Q_i$ ,  $R_i$  e  $C_i$  são variáveis estatisticamente independentes, logo a incerteza padrão associada à estimativa  $x_i$ , obtida a partir da lei de propagação de incertezas (que será apresentada na seção 2.2), é expressa da seguinte forma:

$$u(x_i) = \sqrt{u^2(q_i) + \alpha_1^2 u^2(r_i) + \alpha_2^2 u^2(c_i)} \quad (16)$$

O primeiro termo da Eq.(16) é obtido por  $n$  valores independentes  $Q_i$  provenientes das indicações do instrumento de medição; este termo caracteriza a incerteza padrão do Tipo A (estimada pelas Eqs.(6-7)). Os outros termos são obtidos a partir de informações *a priori*, isto é, as incertezas são obtidas por outros meios que não seja da análise estatística clássica; estes termos, por sua vez, caracterizam a incerteza padrão do Tipo B.

Para o caso da resolução da escala do instrumento de medição ( $R_i$ ), a informação disponível sobre esta pode ser descrita por um parâmetro  $\delta^7$ , cujos os valores de  $Q_i$  poderiam ser indicados pelo intervalo  $(Q_i - \delta/m; Q_i + \delta/m)$ , em que  $m$  pode assumir os valores 1, 2, 4 ou 6. À atribuição dos valores de  $m$  está relacionada com a qualidade da resolução da escala do instrumento de medição; quando se atribui o valor de  $m$  igual a 6 trata-se de um instrumento com escala de alta qualidade e quando a resolução da escala do instrumento é baixa, o valor de  $m$  deve ser igual a unidade. Na maioria dos casos assume-se um valor de  $m$  igual a 2 visto que este valor abrange a maioria das aplicações práticas. O trabalho de Lira and Wöger (1997) descreve uma aplicação prática e justifica o uso do valor  $m = 2$  para a resolução da escala de instrumentos de medição.

Em casos que são conhecidos apenas os limites inferior e superior dos valores de uma grandeza, a melhor PDF que pode descrever tal situação é a distribuição uniforme ou retangular. Portanto, a incerteza padrão do Tipo B da resolução do instrumento de medição é estimada pela Eq.(12), isto é,  $u_B(r_i) = \delta/(m\sqrt{3})$ ; caso seja considerado  $m = 2$ , a incerteza padrão da resolução de um instrumento de medição é  $u_B(r_i) = \delta/\sqrt{12}$ .

Existem alguns processos de medição que é impraticável incluir o valor da correção sistemática da calibração do instrumento  $d_i$  ao resultado do mensurando  $x_i$ ; isto pode ocorrer por diversos motivos, tais como: documentação incompleta dos certificados de calibração dos instrumentos, treinamento limitado do operador, altos custos associados com medições de alta qualidade e etc. Logo, uma estimativa de ambos os valores de  $d_i$  e  $u_B(d_i)$  é necessária; Lira and Wöger (1998a); Lira and Wöger (1998b) apresentam algumas equações para a estimativa da correção sistemática e sua incerteza padrão do Tipo B associada. Entretanto, se o certificado de calibração do instrumento é conhecido e completo, isto proporciona uma condição suficiente para determinar ambos os valores da correção sistemática  $d_i$  e sua respectiva incerteza padrão  $u_B(d_i)$ .

Portanto, a incerteza padrão de uma grandeza de entrada  $X_i$  proveniente da função de medição (Eq.(1)) é obtida pela combinação das incertezas padrão do Tipo A e do Tipo B (Eq.(16)).

Doravante, a equação generalizada para a incerteza padrão da estimativa  $x_i$  da grandeza de entrada  $X_i$  é dada por:

$$u(x_i) = \sqrt{u_A^2 + \left(\sum_{j=1}^n c_j^2 u_{B_j}^2\right)} \quad (17)$$

<sup>7</sup>O parâmetro  $\delta$  representa a menor divisão existente (possível) do indicador de um instrumento de medição digital ou analógico.

Em que os valores de  $c_j$  representam um fator de conversão de cada correção do sistema de medição  $D_i$ . Estes fatores são conhecidos como coeficientes de sensibilidade e sua função será mostrada posteriormente neste trabalho.

## 2.2 A incerteza padrão combinada

O foco principal do Guia ISO é quantificar o resultado de uma medição (mensurando) e sua incerteza padrão combinada a partir das várias grandezas de entrada a partir de um modelo de medição previamente estabelecido. Este procedimento consiste em propagar as estimativas, as incertezas padrão e os coeficientes de correlação das grandezas de entrada a partir de uma aproximação linear pela série de Taylor da função de medição. Logo, a função de medição (Eq.(1)) pode ser reescrita como:

$$Y \approx Y_{\text{linear}} = f(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_N}) + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)(X_i - \mu_{X_i}) \quad (18)$$

O resultado da medição pode ser determinado a partir da esperança das variáveis aleatórias de PDF conhecida, portanto aplicando o operador esperança em ambos os lados da Eq.(18) encontra-se:

$$\mu_Y \approx f(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_N}) \quad (19)$$

Como não são conhecidos exatamente as esperanças das variáveis aleatórias no processo de medição (ver seção 2.1.1), utiliza-se suas respectivas estimativas, então a Eq.(19) torna-se:

$$y \approx y_{\text{linear}} = f(x_1, \dots, x_N) \quad (20)$$

Através da Eq.(20), fica evidente que a substituição das estimativas das grandezas de entrada ( $x_i$ ) na função de medição fornece como resultado uma aproximação da estimativa da grandeza de saída (mensurando). Este resultado de medição ( $y$ ) será exato caso a função de medição seja linear (caso pouco provável). Para superar esta dificuldade, o Guia ISO (cláusula 4.1.4) recomenda determinar a melhor estimativa  $y$  através da média aritmética dos  $n$  valores independentes  $Y_k$  calculados pela função de medição, ou seja:

$$y = \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_{i,k}, \dots, X_{N,k}) \quad (21)$$

Contudo, a escolha da Eq.(21) pode ser inadequada quando as grandezas de entrada  $X_i$  possuem ruídos significativos, logo nesses casos específicos é melhor utilizar a Eq.(20) uma vez que essa tem a função de filtrar tais ruídos. Um estudo minucioso da melhor escolha dessas equações (Eq.(20) ou Eq.(21)) é apresentado por Bich, Callegaro and Pennechi (2006).

Para determinar a incerteza padrão combinada ( $u_c(y)$ ) da melhor estimativa  $y$  do mensurando  $Y$ , utiliza-se o segundo momento estatístico central ou operador variância (Eq.(3)). Portanto, aplicando o operador esperança em ambos os lados da expressão proveniente do desvio quadrático entre a Eq.(18) e a Eq.(19), a incerteza padrão combinada é representada por:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial X_j}\right) u(x_i, x_j) \quad (22)$$

O termo  $u(x_i, x_j)$  representa a covariância associada às estimativas  $x_i$  e  $x_j$ , cuja estimativa é dada por (BIPM et al., 2008a, Anexo C):

$$u(x_i, x_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^N (X_{i,k} - x_i)(X_{j,k} - x_j) \quad (23)$$

O método de obter  $u_c(y)$ , expressado pela Eq.(23), é conhecido como lei de propagação de incertezas (LPU). As derivadas parciais  $\partial f / \partial X_i$  são chamadas de coeficientes de sensibilidade  $c_i$ ; esses coeficientes são estimados em torno da melhor estimativa de  $X_i$ , i.e.,  $X_i \rightarrow x_i$ , então a Eq.(23) é comumente expressa por:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j u(x_i, x_j)} \quad (24)$$

Em muitos casos práticos é comum expressar a covariância  $u(x_i, x_j)$  em termos do coeficiente de correlação  $r(x_i, x_j)$ , i.e.:

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \quad (25)$$

Quando as grandezas de entrada são consideradas não correlacionadas, isto é  $r(x_i, x_j) = 0$ , a Eq.(24) se reduz a:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i)} \quad (26)$$

Em muitas situações práticas surge a necessidade de quantificar quais os componentes que mais contribuem para incerteza padrão combinada; na literatura essa quantificação é denominada como análise de contribuição para a incerteza (*budget uncertainty*). A métrica utilizada para essa análise é baseada nos coeficientes de contribuição ( $h(y, x_i)$ ) conforme apresentado no trabalho de Kessel et al. (2006). Neste último trabalho são apresentados os coeficientes de contribuição tanto para grandezas de entrada correlacionadas como não correlacionadas:

$$h(y, x_i) = \left[ \frac{c_i u(x_i)}{u_c(y)} \right]^2 \quad (27)$$

$$h(y, x_i) = \left[ \frac{c_i u(x_i)}{u_c(y)} \right] r(x_i, x_j) \quad (28)$$

Esses coeficientes de contribuição, representados pelas Eqs. (27–28), são úteis para identificar as fontes de incertezas (grandezas de entrada) mais significativas para a incerteza padrão combinada ( $u_c(y)$ ). O conhecimento dessas fontes de incertezas é um passo fundamental para o entendimento, a gestão e a melhoria do processo de medição.

## 2.3 A incerteza expandida

O Guia ISO (cláusula 6.1.1) “defende o uso da incerteza padrão combinada  $u_c(y)$  como parâmetro para expressar quantitativamente a incerteza do resultado de uma medição”. Goddec (1997) também apresenta argumentos quantitativos para o uso da incerteza padrão combinada como parâmetro associado ao resultado de uma medição. Entretanto, algumas vezes (por exemplo: aplicações comerciais e industriais) é necessário expressar a incerteza como um intervalo em torno do resultado da medição no qual espera-se abranger uma extensa fração dos valores que podem razoavelmente ser atribuídos ao mensurando (BIPM et al., 2008a, cláusula 6.1.2). Esta métrica atribuída ao resultado de uma medição é chamada de incerteza expandida e é denotada por  $U(y)$ ; de acordo com o método proposto pelo Guia ISO (cláusula 6.2.2), a incerteza expandida é obtida pela multiplicação de  $u_c(y)$  por um fator de abrangência ( $k$ ), i.e.:

$$U(y) = ku_c(y) \quad (29)$$

Um dos parâmetros necessários para expressar a incerteza expandida é a escolha da probabilidade de abrangência ( $p$ ) da distribuição de probabilidade do mensurando  $Y$ ; os valores de  $p$  são usualmente escolhidos como 68,27 %, 90,00 %, 95,45 % ou 99,73 %. A escolha da probabilidade de abrangência depende da aplicação que será destinada à incerteza expandida. Por exemplo, recomenda-se uma probabilidade de abrangência de 90,00 % para aplicações que utilizem medições de campo, uma vez que tais medições têm variabilidades elevadas e uma probabilidade maior conduz a incertezas expandidas muito grandes. As probabilidades de 95,45 % ou 99,73 % são recomendadas em medições obtidas sob condições bem controladas, como por exemplo, em laboratórios. Por outro lado, existem aplicações que é mais conveniente ter pequenas incertezas expandidas, logo uma probabilidade de abrangência de 68,27 % é usualmente recomendado. Todavia, a escolha da probabilidade de abrangência mais adequada é polêmica e, portanto, o importante é explicitar qual valor foi utilizado para a estimativa da incerteza expandida (BIPM et al., 2008a, cláusula 7.2.4).

O conhecimento da incerteza expandida força expressar o resultado de uma medição como um intervalo (de abrangência) simétrico da seguinte maneira:  $Y = [y \pm U(y)] \equiv [y \pm ku_c(y)]$ . Isto significa que o mensurando  $Y$  possui limites como  $y - U$  e  $y + U$  para uma dada probabilidade de abrangência  $p$ . Para determinar  $k$ , é necessário o cálculo dos graus de liberdade efetivos ( $\nu_{\text{eff}}$ ) da incerteza padrão combinada; os  $\nu_{\text{eff}}$  são uma medida da incerteza de  $u_c(y)$  e é um fator chave na determinação do fator de abrangência  $k$  (Frenkel, 2006).

O Guia ISO recomenda o uso da fórmula de Welch-Satterthwaite (W-S) (Welch, 1936; Welch, 1938; Fairfield-Smith, 1936; Satterthwaite, 1941; Satterthwaite, 1946) para o cálculo dos graus de liberdade efetivos. Segundo Hall and Willink (2001), a fórmula W-S é uma boa aproximação para estimar os graus de liberdade efetivos e consequentemente o intervalo de abrangência do mensurando, principalmente quando as funções de medição são lineares, como será mostrado a seguir. A fórmula W-S é representada pela seguinte expressão:

$$\frac{u_c^4(y)}{\nu_{\text{eff}}} = \sum_{i=1}^N \frac{(c_i u(x_i))^4}{\nu_i} \quad (30)$$

A aplicação da Eq.(30) deve ser usada com muita atenção, visto que essa fórmula possui limitações quanto ao seu uso na estimativa dos  $\nu_{\text{eff}}$  (Ballico, 2000; Liu, 2005); além disso,

em algumas funções de medição específicas, o uso da mesma pode ser inconsistente, conforme visto em Willink (2008).

Algumas hipóteses devem ser satisfeitas para a devida aplicação da Eq.(30), a saber: todas as grandezas de entrada e suas incertezas padrão devem ser mutuamente independentes, além disso, essas grandezas de entrada, assim como a grandeza de saída (mensurando), devem possuir comportamento gaussiano. Como consequência do Teorema Central do Limite (CLT) (BIPM et al., 2008a, Anexo G cláusula G.2.1) a última suposição pode ser válida se cada estimativa  $x_i$  for uma média de diversos valores amostrados e, quanto maior o número de amostras, melhor será essa aproximação (Kirkup and Frenkel, 2006). Contudo, a aplicação do CLT nem sempre pode ser satisfeita em um processo de medição, por exemplo, quando as funções de medição possuem não linearidades significativas, e quando o número de amostras  $n$  for pequeno ( $1 < n < 5$ ). Além disso, a fórmula W-S foi desenvolvida numa abordagem frequencista (avaliação do Tipo A da incerteza padrão) e o Guia ISO, além de usar essa abordagem, também utiliza a estatística bayesiana para a avaliação do Tipo B da incerteza padrão.

Através da abordagem frequencista, cada grandeza de entrada  $X_i$  da função de medição é avaliada de uma série de  $n_i$  medições independentes  $X_{i,k}$ , então cada estimativa  $x_i$  e sua incerteza padrão do Tipo A  $u_A(x_i)$  possui  $\nu_i = n_i - 1$  graus de liberdade.

Por outro lado, a avaliação do Tipo B da incerteza padrão determina uma PDF (*a priori*); o que intuitivamente, conduz assumir que os graus de liberdade tendem a infinito ( $\nu_i \rightarrow \infty$ ) uma vez que o valor da incerteza padrão  $u(x_i)$ , resultante desse tipo de avaliação, é supostamente conhecido (BIPM et al., 2008a, cláusula G.4.3). Porém, a depender da qualidade de informação utilizada para a estimativa da PDF *a priori*, os graus de liberdade  $\nu_i$  não pode ser considerado como um valor demasiadamente grande (tendendo ao infinito). Ou seja, condições para obter informações sobre o processo de medição ou comportamento da variabilidade da grandeza analisada podem apresentar dificuldades na estimativa da PDF *a priori*, o que inviabiliza assumir  $\nu_i = \infty$ .

Uma alternativa para superar as dificuldades expostas anteriormente é apresentada no Guia ISO (cláusula G.4.2), o qual propôs uma equação para estimar os graus de liberdade  $\nu_i$  da incerteza padrão  $u(x_i)$  de uma grandeza de entrada  $X_i$ :

$$\nu_i \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)} \right]^2 \quad (31)$$

Através da Eq.(31) os graus de liberdade  $\nu_i$ , provenientes de fontes de incerteza do Tipo B, são determinados com

base na incerteza relativa de  $u(x_i)$ , i.e.,  $\Delta u(x_i)/u(x_i)$ , cujos valores (0 % a 100 %) devem ser obtidos por um julgamento subjetivo das informações disponíveis sobre o processo de medição; e.g., se o conhecimento disponível sobre o processo de medição, usado na estimativa da grandeza de entrada  $x_i$  e sua incerteza padrão  $u(x_i)$ , garantem uma fonte confiável cerca de 50 %, então a incerteza relativa deve ser igual  $\Delta u(x_i)/u(x_i) = 0,5$  e, assim, pela Eq.(31),  $\nu_i = (0,5)^{-2}/2 = 2$ .

Outra forma similar à apresentada anteriormente foi apresentada por Bentley (2005), que propôs valores de graus de liberdade  $\nu_i$  baseado na qualidade de informação disponível sobre o processo de medição; estes valores de  $\nu_i$  encontram-se na Tabela 1.

Tabela 1: Valores de graus de liberdade  $\nu_i$  para incerteza padrão do Tipo B de uma grandeza de entrada  $X_i$ .

Qualidade da fonte de informação	$\nu_i$
Pouco confiável	3
Razoável	10
Boa	30
Excelente	100

Apesar da fórmula W-S possuir limitações como descritas anteriormente, essa expressão é a maneira usual para estimar os graus de liberdade efetivos de  $u_c(y)$ . Um artigo escrito por Lepek (2003) apresenta o uso da fórmula W-S incluindo termos de correlação entre as grandezas de entrada. Esta equação proposta por Lepek é representada da seguinte forma:

$$\frac{u_c^4(y)}{\nu_{\text{eff}}} = \sum_{i=1}^N \frac{(c_i u(x_i))^4}{\nu_i} + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{c_i^2 c_j^2 u^2(x_i, x_j)}{\sqrt{\nu_i \nu_j}} \quad (32)$$

Outro trabalho, proposto por Willink (2007), apresenta um estudo detalhado sobre o uso adequado da fórmula W-S, assim como apresenta a evolução e o estado da arte da mesma em processos de medição.

Portanto, caso as premissas da fórmula W-S sejam atendidas, o fator de abrangência ( $k$ ) pode ser estimado por valores tabelados de uma distribuição *t-Student* com os graus de liberdade efetivos ( $\nu_{\text{eff}}$ ) e probabilidade de abrangência  $p$ .

Entretanto, caso não seja possível o uso da fórmula W-S, devido às limitações impostas pela mesma, pode-se determinar o intervalo mínimo da incerteza expandida com base na probabilidade mínima de abrangência. Por exemplo, o uso da inequação de Bienaymé-Chebyshev, ver Kacker and Jones (2003), confirma que a probabilidade de abrangência  $p$  do

intervalo do mensurando  $[y \pm k u_c(y)]$  é  $1 - 1/k^2$  para qualquer distribuição, se somente se a esperança da distribuição coincide com a estimativa do mensurando  $y$  e o desvio padrão da distribuição seja a incerteza padrão do mensurando  $u_c(y)$ . Então, nesse caso a probabilidade mínima de abrangência para um intervalo  $[y \pm 2 u_c(y)]$  será 75 %.

Por outro lado, se qualquer distribuição simétrica e unimodal tem média e moda igual a  $y$  e desvio padrão igual a  $u_c(y)$ , então de acordo com a inequação de Gauss, ver Kacker and Jones (2003), a probabilidade de abrangência para um intervalo do mensurando  $[y \pm k u_c(y)]$  é estimada por  $1 - 4/(9k^2)$ . Assim, para o caso de intervalo mínimo de abrangência  $[y \pm 2 u_c(y)]$ , a probabilidade mínima de abrangência será 89 %.

Portanto, o intervalo mínimo de abrangência  $[y \pm 2 u_c(u)]$  pode ser usado de maneira extensa para distribuições que possuem média igual a  $y$  e desvio padrão igual a  $u_c(y)$ . Esse procedimento pode ser incorporado ao método proposto pelo Guia ISO sem maiores problemas e/ou conflitos, quando não for possível utilizar a fórmula W-S.

### 3 SUPLEMENTO 1 DO GUIA ISO

Muitos méritos são creditados ao Guia ISO devido à sua aplicabilidade quase universal para expressar e avaliar a incerteza de medição. Porém, o procedimento abordado pelo Guia ISO contém limitações que deveriam ser levadas em consideração em certos modelos de medição. O próprio ‘Working Group 1’ do JCGM desenvolveu o Suplemento 1 do Guia ISO (ISO-S1) para evitar essas limitações, além de garantir uma maior aplicabilidade ao Guia ISO. O método abordado pelo ISO-S1 fornece melhores resultados do que aqueles provenientes do Guia ISO, especialmente quando as seguintes situações são apresentadas: função de medição fortemente não linear; PDFs das grandezas de entrada são assimétricas e não gaussianas; PDF do mensurando é simétrica e não gaussiana ou assimétrica.

A abordagem proposta pelo ISO-S1 é baseada na lei de propagação de PDFs; esta lei considera uma base probabilística generalizada para a avaliação da incerteza de medição por meio do uso direto de PDFs atribuídas às grandezas de entrada  $X_i$  ao invés do uso de suas estimativas  $x_i$  e suas respectivas incertezas padrão  $u(x_i)$ . Dessa forma, o método ISO-S1 é uma generalização do Guia ISO visto que a lei de propagação de incertezas, abordada pelo Guia ISO, pode ser derivada da lei de propagação de PDFs (BIPM et al., 2008b, Introdução). Os artigos encontrados na literatura que descreve o método ISO-S1 são: Cox and Harris (2005); Herrador et al. (2005); Cox and Siebert (2006); os artigos: Cox et al. (2003); Kacker et al. (2006); Kacker and Lawrence (2007); Herrador and Gonzalez (2004); Wübbeler et al. (2008) apresentam um

resumo do mesmo em suas seções.

### 3.1 A propagação de funções de densidade de probabilidade

O princípio básico da propagação de PDFs é obter uma PDF que engloba todas as informações possíveis sobre o mensurando  $Y$  baseada na PDF conjunta das grandezas de entrada  $X_i$ . As PDFs das grandezas de entrada  $X_i$  englobam o conhecimento obtido sobre os valores possíveis dessas grandezas. Aqui, os valores possíveis das grandezas de entrada  $X_i$  são simbolizadas por  $\xi_i$ , logo a PDF para a grandeza de entrada  $X_i$  é simbolizada por  $g_{X_i}(\xi_i)$ . Enquanto que os valores possíveis para  $Y$  e sua PDF são simbolizados por  $\eta$  e  $g_Y(\eta)$ , respectivamente.

A esperança de  $Y$  poderia ser obtida pela PDF conjunta das grandezas de entrada, através da função de medição Eq.(1), segundo a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[f(X_1, \dots, X_N)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \dots, \xi_N) \\ &\quad \times g_{X_1, \dots, X_N}(\xi_1, \dots, \xi_N) d\xi_1 \dots d\xi_N \quad (33) \end{aligned}$$

A Eq.(33) possui um termo  $g_{X_1, \dots, X_N}(\xi_1, \dots, \xi_N)$  que representa a PDF conjunta das grandezas de entrada. Caso as grandezas de entrada sejam mutuamente independentes, a PDF conjunta será o produto das PDFs individuais dessas grandezas. Uma vez a PDF das grandezas de entrada tenha sido atribuída, essa é propagada através da função de medição para gerar a PDF do mensurando  $Y$  ( $g_Y(\eta)$ ).

O formalismo analítico para a determinação da PDF  $g_Y(\eta)$  será demonstrado subsequentemente neste trabalho. Inicialmente, considere a função delta de Dirac (Arfken and Weber, 2005) definida por:

$$\delta(z - a) \triangleq \begin{cases} \infty, & z = a \\ 0, & z \neq a \end{cases} \quad (34)$$

Algumas propriedades úteis da função delta de Dirac devem ser apresentadas, tais como:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z - a) dz = 1 \quad (35)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \delta(z - a) dz = f(a) \quad (36)$$

A última propriedade (Eq.(36)) pode ser reescrita, considerando  $f(z) = z$  por conveniência, como:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z \delta(z - a) dz = a \quad (37)$$

Então, caso as variáveis  $z$  e  $a$  forem substituídas pelas variáveis  $\eta$  e  $f(\xi_1, \dots, \xi_N)$ , respectivamente, a Eq.(37) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta \delta(\eta - f(\xi_1, \dots, \xi_N)) d\eta = f(\xi_1, \dots, \xi_N) \quad (38)$$

A substituição do termo  $f(\xi_1, \dots, \xi_N)$ , dado pela Eq.(38), na Eq.(33) resultará em:

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta \delta(\eta - f(\xi_1, \dots, \xi_N)) \\ &\quad \times g_{X_1, \dots, X_N}(\xi_1, \dots, \xi_N) d\xi_1 \dots d\xi_N d\eta \quad (39) \end{aligned}$$

Por outro lado, como a esperança de  $Y$  é definida por:

$$E[Y] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \eta g_Y(\eta) d\eta \quad (40)$$

Então, igualando a Eq.(39) com a Eq.(40), isso resulta na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta g_Y(\eta) d\eta &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta \delta(\eta - f(\xi_1, \dots, \xi_N)) \\ &\quad \times g_{X_1, \dots, X_N}(\xi_1, \dots, \xi_N) d\xi_1 \dots d\xi_N d\eta \quad (41) \end{aligned}$$

Portanto, comparando ambos os lados da Eq.(41), conclui-se que a PDF para a grandeza de saída  $Y$  pode ser obtida por:

$$\begin{aligned} g_Y(\eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\eta - f(\xi_1, \dots, \xi_N)) \\ &\quad \times g_{X_1, \dots, X_N}(\xi_1, \dots, \xi_N) d\xi_1 \dots d\xi_N \quad (42) \end{aligned}$$

A Eq.(42) é conhecida como fórmula de Markov e uma generalização dessa fórmula pode ser obtida para mais de uma grandeza de saída (múltiplos mensurandos). Porém,

o ISO-S1 considera uma única grandeza de saída (BIPM et al., 2008b, Introdução) para a função de medição. Se as grandezas de entrada forem mutuamente independentes, então a PDF conjunta é expressa por  $g_{X_1}(\xi_1) \dots g_{X_N}(\xi_N)$ . Dessa forma, a Eq.(42) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$g_Y(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\eta - f(\xi_1, \dots, \xi_N)) \times g_{X_1}(\xi_1) \dots g_{X_N}(\xi_N) d\xi_1 \dots d\xi_N \quad (43)$$

Uma vez a PDF da grandeza de saída está disponível, o resultado de medição será igual a esperança dessa PDF, enquanto que o desvio padrão da mesma será a incerteza padrão associada ao resultado de medição. O conhecimento da PDF do mensurando também pode fornecer um intervalo de abrangência associado a esse resultado de medição, para uma dada probabilidade de abrangência  $p$  conforme será mostrado mais adiante neste trabalho. Na Figura 2 é ilustrado o princípio da propagação de PDFs numa situação em que  $N$  grandezas de entrada  $X_i$  mutuamente independentes compõem a função de medição.

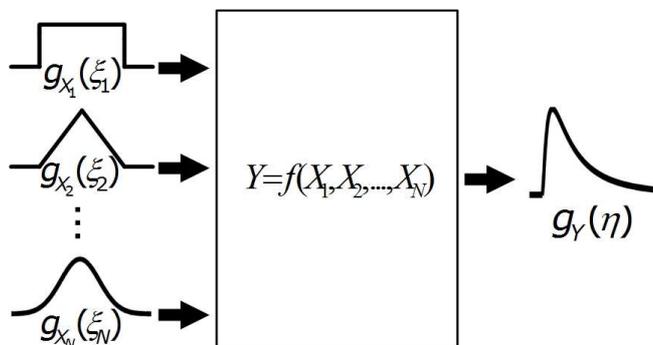


Figura 2: Ilustração do princípio da lei de propagação de PDFs aplicado em uma função de medição.

Como pode ser observado na Figura 2, o conhecimento dos valores possíveis  $\xi_i$  das grandezas de entrada  $X_i$ , expressados por suas PDFs, origina uma PDF  $g_Y(\eta)$  para o mensurando  $Y$  por meio da fórmula de Markov. Entretanto, a PDF do mensurando  $Y$  proveniente da solução analítica das Eq.(42) ou Eq.(43) é viável apenas para funções de medição simples. O artigo escrito por Cox and Siebert (2006) apresenta exemplos de soluções analíticas da fórmula de Markov para um modelo composto por apenas uma grandeza de entrada; o trabalho proposto por Elster (2007) apresenta também uma solução analítica para um modelo linear submetido a uma PDF gaussiana conjunta; outros exemplos de PDF obtidas analiticamente em processos de medição podem ser consultados em Lira (2002); Lira (2009). Devido à impossi-

bilidade de solução analítica da fórmula de Markov na maioria das funções de medição, um procedimento numérico deve ser usado para solucionar as expressões Eq.(42) ou Eq.(43). O método numérico adotado pelo ISO-S1 será descrito na próxima seção deste trabalho.

### 3.2 Cálculos numéricos pelo método de Monte Carlo

A implementação geral mais eficiente do método numérico para propagação de PDFs é método de Monte Carlo (MCM) (Lepek, 2003; Cox et al., 2001a; Cox et al., 2001b). O método de Monte Carlo é um procedimento numérico para resolver problemas matemáticos através de simulações de variáveis aleatórias (Herrador and Gonzalez, 2004). Alguns livros descrevem aplicações desse método: Rubinstein (1981); Siepmann et al. (1999); Landau and Binder (2000); Martinez and Martinez (2002).

A idéia básica do MCM, para a avaliação da incerteza de medição, é retirar  $M$  amostras da PDF conjunta  $g_{X_1, \dots, X_N}(\xi_1, \dots, \xi_N)$  das grandezas de entrada  $X_1, \dots, X_N$  e propagar esses valores, através da função de medição, para produzir  $M$  amostras da grandeza de saída ( $Y$ ). Dessa forma, é construída uma PDF empírica ou amostral para  $Y$ , a qual representa uma estimativa da PDF do mensurando  $g_Y(\eta)$ . Portanto, o resultado de medição ( $y$ ) é obtido pela média dessa PDF amostral e a incerteza padrão ( $u(y)$ ) associada ao resultado de medição é igual ao desvio padrão da mesma PDF amostral. Além disso, o intervalo de abrangência dessa PDF amostral é determinado com base na probabilidade de abrangência escolhida.

O MCM produz resultados tão bons, para a construção da PDF amostral do mensurando, quanto maior for o número de amostras de Monte Carlo ( $M$ ), visto que para um número  $M$  finito de resultados existe um erro aleatório  $e$ , portanto, o valor de  $M$  deve ser escolhido suficientemente grande para assegurar que esse erro seja suficientemente pequeno (BIPM et al., 2008b; Cox and Siebert, 2006). Desta maneira, quando  $M$  tende a infinito, esses resultados convergem para valores correspondentes aos obtidos da PDF  $g_Y(\eta)$  (Elster, 2007).

Um requisito fundamental para devida aplicação do MCM é o gerador de números aleatórios. Os valores de qualquer variável aleatória podem ser simulados baseando-se na transformação de uma variável aleatória retangular, uniformemente distribuída dentro do intervalo  $(0, 1)$ . A melhor maneira de gerar números aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo  $(0, 1)$  é por meio de um processo determinístico baseado no método de congruência (Herrador et al., 2005). Como a técnica usada é determinística, os números aleatórios são chamados de números pseudo-aleatórios ( $\zeta_k$ ). No entanto, esses números pseudo-aleatórios têm um com-

portamento de números aleatórios (Scheid, 1968). Logo, com o conhecimento desses  $\zeta_k$ , pode-se determinar valores  $\xi_i^k$ , cuja variável aleatória é  $Z_i$  e sua respectiva PDF é  $g(Z_i)$ , dentro do intervalo  $(a, b)$  através da solução da equação integral (Herrador and Gonzalez, 2004):

$$\int_a^{\xi_i^k} g(Z_i) dZ_i = \zeta_i^k \quad (44)$$

Os cálculos dos valores  $\xi_i^k$ , de acordo com Eq.(44), são rapidamente executados com a ajuda de computadores de alta velocidade através de uma rotina implementada para diferentes linguagens de programação como: FORTRAN, C, C++, entre outras; e para softwares comerciais como: MATLAB, Maple, Mathematica ou até tomar os códigos disponíveis em FORTRAN e C (Press et al., 1992a; Press et al., 1992b); outros pacotes de softwares comerciais também podem ser usados no MCM, como mostrado em Herrador and Gonzalez (2004); Herrador et al. (2005). No artigo de Esward et al. (2007) são apresentadas diversas referências sobre geradores de números aleatórios, como também testes de robustez, publicamente disponíveis, sobre os mesmos.

### 3.3 A avaliação da incerteza de medição

O ISO-S1 fornece uma PDF amostral  $\hat{g}_Y(\eta)$  para o mensurando  $Y$ . Os valores simulados  $\xi_i^k$  (Eq.(44)) de cada grandeza de entrada  $X_i$  são usados para calcular os valores  $\eta^k$  da grandeza de saída por meio da função de medição:

$$\eta^k = f(\xi_1^k, \dots, \xi_N^k), \quad k = 1 \text{ a } M \quad (45)$$

O conhecimento dos valores possíveis do mensurando  $\eta^1, \dots, \eta^M$  implica, necessariamente, na construção de  $\hat{g}_Y(\eta)$ . Como anteriormente apontado na seção anterior, quanto maior for o valor de  $M$ , essa PDF amostral representa uma boa estimativa da PDF  $g_Y(\eta)$  do mensurando  $Y$ . Logo, a melhor estimativa  $y$  do mensurando  $Y$  pode ser estimada pela média dessa PDF amostral e a incerteza padrão  $u(y)$  associada à estimativa  $y$  será o desvio padrão dessa mesma PDF. As equações de  $y$  e  $u(y)$  são representadas da seguinte forma:

$$y = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \eta^k \quad (46)$$

$$u(y) = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^M (\eta^k - y)^2} \quad (47)$$

Outra etapa do método ISO-S1 é determinar o intervalo de abrangência para a estimativa  $y$  do mensurando  $Y$ , aqui denotado por  $I_p = [\eta_p^{\text{inf}}, \eta_p^{\text{sup}}]$ . Uma vez que a probabilidade de abrangência  $p$  ( $0 < p < 1$ ) é escolhida, um intervalo de abrangência pode ser estimado através da função de distribuição acumulada (CDF)<sup>8</sup> empírica do mensurando  $Y$  ( $\hat{G}_Y(\eta)$ ).

O ISO-S1 discute duas formas para obter o  $I_p$ : na primeira forma, o intervalo de abrangência é suposto simétrico e pode ser estimado como  $I_p = [\eta_p^{\alpha/2}, \eta_p^{100-\alpha/2}]$ , em que  $\alpha = (1 - p)100$  %, e os valores  $\eta_p^{\alpha/2}$  e  $\eta_p^{100-\alpha/2}$  correspondem aos percentis de  $\alpha/2$  % e  $(100 - \alpha/2)$  % de  $\hat{G}_Y(\eta)$  para uma dada probabilidade de abrangência  $p$ , e.g., se a probabilidade de abrangência  $p$  for escolhida igual a 95 %, então o intervalo de abrangência é representado por  $I_{95\%} = [\eta_{95\%}^{2,5\%}, \eta_{95\%}^{97,5\%}]$ ; a segunda forma, e a mais recomendada, para obter o intervalo de abrangência é baseada no intervalo de menor largura possível entre os valores extremos do intervalo. Os valores extremos  $\eta_p^{\text{inf}}$  e  $\eta_p^{\text{sup}}$  são estimados pela solução da equação:

$$p = \hat{G}_Y(\eta_p^{\text{sup}}) - \hat{G}_Y(\eta_p^{\text{inf}}) \quad (48)$$

Trabalhos mais abrangentes e descritivos sobre estimativas de intervalos de abrangência usando MCM podem ser consultados em Nery and Kalid (2009); Willink (2006a). Uma particularidade envolvida na estimativa de intervalos de abrangência surge quando a PDF  $\hat{g}_Y(\eta)$  é simétrica, pois nesse caso o  $I_p$  é simétrico em relação à estimativa  $y$ , i.e.,  $y - \eta_p^{\text{inf}} = \eta_p^{\text{sup}} - y$ . Logo, a incerteza expandida  $U(y)$  pode ser estimada como  $U(y) = (\eta_p^{\text{inf}} + \eta_p^{\text{sup}})/2$ .

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para um melhor entendimento dos métodos propostos pelo Guia ISO e seu Suplemento 1, dois estudos de caso serão apresentados. Em ambos os casos uma comparação dos resultados provenientes dos métodos é realizada, enfatizando os méritos e as limitações dos mesmos.

### 4.1 Estudo de caso 1

O foco do presente estudo de caso é um capacitor de placas planas. O objetivo é avaliar a incerteza de medição da distância existente entre as placas planas que compõem o capacitor a partir dos valores medidos de capacitância. O modelo e os dados experimentais de capacitância estão presentes no artigo de Mekid and Vaja (2008). O modelo teórico que relaciona a distância ( $D$ ) das placas planas e a capacitância ( $C$ )

<sup>8</sup>A CDF de qualquer variável aleatória contínua  $Z$  é obtida pela integral de sua correspondente PDF, i.e.,  $G(Z) = \int_{-\infty}^Z g(z) dz$ .

é representado por:

$$D = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{C} \quad (49)$$

Em que  $\epsilon_0$  é permissividade no vácuo ( $\epsilon_0 = 8,854187 \text{ pF}\cdot\text{m}^{-1}$ ),  $\epsilon_r$  é a constante dielétrica do material enclausurado entre as placas em relação ao ar ( $\epsilon_r = 1,0005$ ) e  $A$  representa a área das placas planas ( $A = 28,274 \text{ mm}^2$ ). Além disso, os autores Mekid e Vaja consideram algumas hipóteses na avaliação da incerteza de medição, a saber: as incertezas dos parâmetros  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon_r$  e  $A$  são desprezíveis em relação a incerteza da capacitância; o instrumento de medição da capacitância é livre de correções sistemáticas.

Na avaliação da incerteza de medição pelo Guia ISO, primeiro deve-se estabelecer a função de medição do sistema (neste estudo de caso Eq.(49)), depois avalia-se a função metrológica das grandezas de entrada (que neste estudo de caso é a capacitância  $C$ ). A função metrológica da variável capacitância, baseada na Eq.(14), será:

$$C = Q + R + D_{\text{sist}} \quad (50)$$

Diferentemente dos autores Mekid e Vaja, aqui serão consideradas fontes de incerteza *a priori* (incerteza do Tipo B) como a correção sistemática proveniente da calibração do instrumento ( $D_{\text{sist}}$ ) e a correção associada às indicações do instrumento devido à resolução limitada da escala do instrumento de medição ( $R$ ). A estimativa da correção da calibração do instrumento é  $d_{\text{sist}} = 1,00 \text{ pF}$  e assume-se que essa estimativa possui uma distribuição gaussiana com desvio padrão igual a  $0,50 \text{ pF}$ , ou seja, a incerteza padrão do Tipo B é  $u_B(d_{\text{sist}}) = 0,50 \text{ pF}$ <sup>9</sup>; enquanto que a menor divisão do indicador do instrumento de medição é  $0,05 \text{ pF}$  e a resolução da escala do instrumento deve possuir uma distribuição uniforme. Portanto, a incerteza padrão do Tipo B associada à resolução da escala, estimada pela Eq.(10), é  $u_B(r) = 0,0014 \text{ pF}$  e como é sabido, a estimativa de  $R$  é zero ( $r = E[R] = 0$ ).

A fonte de incerteza do Tipo A (abordagem frequencista) é usada para avaliar as medições realizadas da capacitância ( $Q$ ) apresentadas na Tabela 2. Assim, a incerteza padrão do Tipo A proveniente da série de observações independentes  $Q_i$  de  $Q$  será  $u_A(q) = s(q) = 0,17 \text{ pF}$  cuja estimativa é  $\bar{Q} = q = 20,23 \text{ pF}$ .

O conhecimento das fontes de incerteza do Tipo A e do Tipo B desse sistema de medição possibilita avaliar a estimativa e a incerteza padrão da grandeza de entrada capacitância ( $C$ )

<sup>9</sup>Na prática estas informações são oriundas do certificado de calibração do instrumento de medição.

Tabela 2: Resultados das observações independentes da capacitância  $C$ .

Medições	Valores medidos em pF
1	19,20
2	20,30
3	20,90
4	20,30
5	21,20
6	20,25
7	19,30
8	21,20
9	19,30
10	20,50
11	21,25
12	19,40
13	20,50
14	20,70
15	19,25
16	20,25
17	21,40
18	19,80
19	19,25
20	20,40

por meio das Eqs.(15-16), respectivamente. Os valores obtidos são  $c = 21,23 \text{ pF}$  e  $u(c) = 0,53 \text{ pF}$ .

De posse das informações sobre a grandeza de entrada capacitância  $C$  (estimativa  $c$  e sua incerteza padrão  $u(c)$ ), pode-se avaliar o resultado de medição ( $d$ ) e as respectivas incerteza padrão combinada e expandida do mensurando ( $D$ ). Como trata-se de um modelo não linear, o resultado de medição deve ser obtido pela aplicação da Eq.(20), a incerteza padrão combinada ( $u_c(d)$ ) é calculado pela Eq.(24) e a incerteza expandida ( $U(d)$ ) é obtida pela Eq.(29) depois de aplicada a Eq.(30) para a estimativa dos graus de liberdade efetivos de  $u_c(d)$ .

Para estimativa do fator de abrangência  $k$  foi considerado uma probabilidade de abrangência de 95,45 %, os graus de liberdade associados à série de observações  $Q_i$  da capacitância é  $\nu_Q = 19$  (fonte de incerteza do Tipo A); enquanto que os graus de liberdade relacionados às correções sistemáticas (fonte de incerteza do Tipo B): correção da calibração e a resolução da escala do instrumento de medição são respectivamente iguais a  $\nu_{D_{\text{sist}}} = 30$  e  $\nu_R = 100$  de acordo com a Tabela 1. Os valores estimados para o mensurando  $D$ , segundo o Guia ISO, são apresentados na Tabela 3.

Pelo método ISO-S1, foi atribuída uma PDF gaussiana a grandeza de entrada capacitância ( $C$ ). Essa distribuição gaussiana tem média igual a estimativa  $c$  e desvio padrão

Tabela 3: Resultados obtidos para mensurando  $D$  através do Guia ISO.

Resultados	Valores
Estimativa $d$ ( $\mu\text{m}$ )	11,80
Incerteza padrão $u(d)$ ( $\mu\text{m}$ )	0,29
Graus de liberdade efetivos $\nu_{\text{eff}}$	36
Fator de abrangência $k$	2,03
Incerteza expandida $U(d)$ ( $\mu\text{m}$ )	0,59

igual a incerteza padrão  $u(c)$  estimados a partir do Guia ISO. Na aplicação MCM foi considerado  $M = 10^6$  amostras de Monte Carlo. O resultado da PDF amostral obtida através desse método é apresentado na Figura 3. Na Tabela 4 abaixo é apresentado também uma comparação dos resultados obtidos entre os dois métodos.

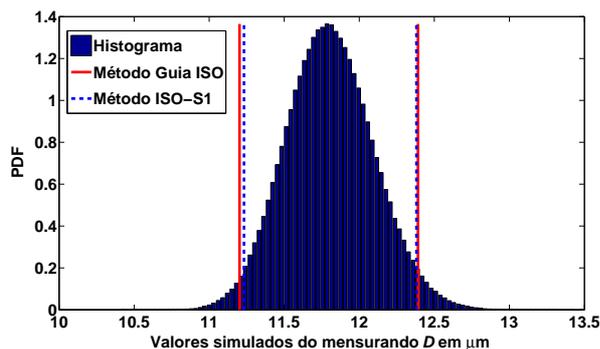


Figura 3: PDF amostral do mensurando  $D$  obtido pelo MCM: comparação dos intervalos de abrangência provenientes do Guia ISO e ISO-S1 para uma probabilidade de abrangência de 95,45 %.

Tabela 4: Resultados do mensurando  $D$  obtidos através do Guia ISO e seu Suplemento 1.

Resultados	ISO-S1	Guia ISO
Estimativa $d$ ( $\mu\text{m}$ )	11,81	11,80
Incerteza padrão $u_c(d)$ ( $\mu\text{m}$ )	0,30	0,29
Limite inferior ( $\mu\text{m}$ )	11,23	11,20
Limite superior ( $\mu\text{m}$ )	12,38	12,39

Os valores apresentados na Tabela 4 mostram que os resultados obtidos são praticamente iguais. Isto pode ser confirmado pelos desvios percentuais dos valores obtidos entre os resultados oriundos do Guia ISO em relação aos resultados do ISO-S1, apresentados na Tabela 5.

Portanto, neste estudo de caso, ambos os métodos poderiam ser escolhidos visto que a diferença entre os resultados é in-

Tabela 5: Desvios percentuais dos resultados obtidos pelo Guia ISO em relação aos resultados provenientes do ISO-S1 para o mensurando  $D$ .

Resultados	Desvio percentual (%)
Estimativa $d$ ( $\mu\text{m}$ )	0,08
Incerteza padrão $u_c(d)$ ( $\mu\text{m}$ )	3,33
Limite inferior ( $\mu\text{m}$ )	0,03
Limite superior ( $\mu\text{m}$ )	0,08

significante. Este estudo de caso foi, propositalmente mostrado, pois quando o modelo de medição é fracamente não linear e o comportamento gaussiano do mensurando é caracterizado, não é necessário aplicar o método numérico (ISO-S1) para avaliar o resultado de uma medição e sua respectiva incerteza associada.

## 4.2 Estudo de caso 2

O segundo estudo de caso aborda um modelo fortemente não linear para a avaliação da incerteza de medição. Trata-se de um modelo genérico extraído do artigo de Wübbeler et al. (2008), representado pela seguinte relação funcional:

$$Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \quad (51)$$

Algumas adaptações foram realizadas nesse modelo, mas essencialmente os resultados mantiveram o mesmo comportamento, a saber: as correções sistemáticas da calibração ( $C_i$ ) e as correções devido à resolução das escalas dos instrumentos de medição ( $R_i$ ) em cada função metrológica das grandezas de entrada  $X_1$  e  $X_2$  foram consideradas. Os valores das correções de calibração e da menor divisão dos indicadores dos instrumentos de medição são  $c_1 = c_2 = 0,05$  e  $\delta_1 = \delta_2 = 0,10$ ; todos esses valores possuem as unidades de cada grandeza respectivamente, i.e.,  $u.X_1$  e  $u.X_2$ . A PDF de cada correção de calibração é considerada gaussiana com incertezas padrão (desvios padrão) iguais a  $u_B(c_1) = u_B(c_2) = 0,05$ , respectivamente nas unidades de cada grandeza. As PDFs das resoluções das escalas dos instrumentos são consideradas uniformes, assim as incertezas padrão, estimadas pela Eq.(10), são  $u_B(r_1) = u_B(r_2) = 0,03$  nas respectivas unidades de  $X_1$  e  $X_2$ . A função metrológica de ambas as grandezas de entrada são representadas por:

$$X_1 = Q_1 + C_1 + R_1 \quad (52)$$

$$X_2 = Q_2 + C_2 + R_2 \quad (53)$$

Em que os termos  $Q_1$  e  $Q_2$  representam as observações in-

dicadas pelos instrumentos de medição das grandezas de entrada, respectivamente. Para cada grandeza de entrada foram realizadas 25 observações independentes, cujas estimativas e incertezas padrão do Tipo A associadas às observações são  $q_1 = 1,00$  com  $u_A(q_1) = 1,00$  e  $q_2 = 1,00$  com  $u_A(q_2) = 1,00$ . O conhecimento das fontes de incerteza do Tipo A e do Tipo B desse sistema de medição rende os seguintes valores para as grandezas de entrada:  $x_1 = x_2 = 1,05$  e  $u(x_1) = u(x_2) = 1,01$ .

Para a aplicação da metodologia abordada pelo Guia ISO foi considerada uma probabilidade de abrangência de 95,45 % e grau de liberdade, tanto para as correções sistemáticas como para as resoluções das escalas dos instrumentos, iguais a 100. Os resultados obtidos através desse método para o mensurando  $Y$  são apresentados na Tabela 6.

Tabela 6: Resultados obtidos para mensurando  $D$  através do Guia ISO.

Resultados	Valores
Estimativa $y$ (u.Y)	1,48
Incerteza padrão $u_c(y)$ (u.Y)	1,01
Graus de liberdade efetivos $\nu_{\text{eff}}$	17
Fator de abrangência $k$	2,11
Incerteza expandida $U(y)$ (u.Y)	2,13

Para o método ISO-S1 foi assumida uma PDF gaussiana para ambas as grandezas de entrada, cujas médias e desvios padrão dessas PDFs são a estimativa  $x_1$  associada com sua incerteza padrão  $u(x_1)$  e a estimativa  $x_2$  associada com incerteza padrão  $u(x_2)$  provenientes do Guia ISO. Na aplicação do MCM foram consideradas  $M = 10^7$  amostras de Monte Carlo. Os resultados obtidos para ambos os métodos são apresentados na Tabela 7.

Tabela 7: Resultados do mensurando  $Y$  obtidos através do Guia ISO e seu Suplemento 1.

Resultados	ISO-S1	Guia ISO
Estimativa $y$ (u.Y)	1,87	1,48
Incerteza padrão $u_c(y)$ (u.Y)	0,86	1,01
Limite inferior (u.Y)	0,25	-0,65
Limite superior (u.Y)	3,49	3,62

Como observado na Tabela 7, os valores são bastantes diferentes para os dois métodos, principalmente o limite inferior. Em termos quantitativo essa diferença foi analisada com base nos desvios percentuais existentes entre os resultados obtidos pelo Guia ISO em relação aos resultados provenientes do ISO-S1, cujos valores estão apresentados na Tabela 8.

Os valores apresentados na Tabela 8 mostram que existem

Tabela 8: Desvios percentuais dos resultados obtidos pelo Guia ISO em relação aos resultados provenientes do ISO-S1 para o mensurando  $Y$ .

Resultados	Desvio percentual (%)
Estimativa $y$ (u.Y)	20,86
Incerteza padrão $u_c(y)$ (u.Y)	17,44
Limite inferior (u.Y)	360,00
Limite superior (u.Y)	3,73

uma discrepância significativa dos resultados provenientes do Guia ISO e seu Suplemento 1, em destaque está o limite inferior que apresenta um desvio percentual de 360 %. Uma outra abordagem de comparação dos resultados oriundos de ambos os métodos é através da PDF amostral do mensurando  $Y$  gerado pelo método ISO-S1, apresentado na Figura 4.

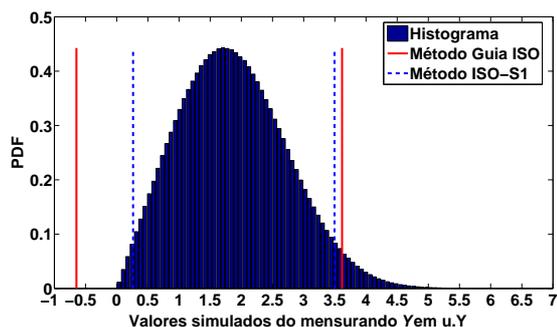


Figura 4: PDF amostral do mensurando  $Y$  obtido pelo MCM: comparação dos intervalos de abrangência provenientes do Guia ISO e ISO-S1 para uma probabilidade de abrangência de 95,45 %.

Como pode ser observado na Figura 4, a aplicação do Guia ISO estima um intervalo de abrangência fisicamente inexistente, isso porque esse método assume uma PDF gaussiana para o mensurando, fato inexistente nesse estudo de caso, pois a PDF (amostral) do mensurando  $Y$  é diferente de uma gaussiana. Além disso, essa larga discrepância entre os métodos é explanada pela forte não linearidade do modelo de medição em combinação com as largas incertezas padrão relativas das grandezas de entrada. Portanto, quando o modelo de medição for fortemente não linear é recomendado o uso do método ISO-S1 para avaliar a incerteza de medição.

## 5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada uma revisão sobre os dois métodos mais utilizados para a avaliação da incerteza de medição: o Guia ISO, baseado na lei de propagação de incertezas; e o Suplemento 1 do Guia ISO, baseado na lei de propagação

de PDFs através do MCM. Além disso, foram apresentados os principais artigos que apresentam as ferramentas matemáticas de cada método e suas aplicações para estimar adequadamente o resultado de medição e sua respectiva incerteza.

Cada um dos métodos tem sua relevância no que se refere à aplicabilidade da avaliação da incerteza de medição. Logo, é importante destacar os méritos e as limitações de cada um desses métodos. Os principais méritos do Guia ISO são: não necessidade do conhecimento completo da PDF das grandezas de entrada do modelo de medição; esse método requer apenas as estimativas, as incertezas padrão e os coeficientes de correlação da PDF das grandezas de entrada para determinar a melhor estimativa do mensurando e sua respectiva incerteza padrão. Além disso, esse método requer simples cálculos para a avaliação da incerteza de medição, que torna-o como o método mais aceito pelos metrologistas ou profissionais que necessitam expressar adequadamente o resultado de uma medição.

Por outro lado, depois de apresentar os méritos do método proposto pelo Guia ISO, é importante ressaltar que esse método possui restrições quanto ao seu uso: primeiro, se a função de medição é não-linear, a expansão em série de Taylor truncada no termo linear (1ª derivada) fornece resultados enganosos ou errôneos para a incerteza de padrão combinada e consequentemente a incerteza expandida do mensurando; segundo, o fato de não determinar uma PDF ao mensurando implica em uma indeterminação do intervalo de abrangência para expressar os valores possíveis do do mensurando; por último, a estimativa da incerteza expandida requer um comportamento gaussiano tanto do mensurando  $Y$  e sua incerteza padrão combinada  $u_c(y)$  quanto das grandezas de entrada  $X_i$  e suas respectivas incertezas padrão  $u(x_i)$ , além disso as grandezas de entrada  $X_i$  também devem ser mutuamente independentes.

A hipótese do comportamento gaussiano para as grandezas do modelo de medição é bastante usada e defendida com base na aplicação do CLT. Entretanto, o CLT não é válido sob os seguintes aspectos: quando a função de medição é não linear, quando as grandezas de entrada não são independentes, e quando o número de observações independentes (medições experimentais) das grandezas observáveis do modelo de medição é pequeno<sup>10</sup>.

O método proposto pelo Suplemento 1 Guia ISO requer menos hipóteses do que aquele método proposto pelo Guia ISO, logo sua aplicação é menos restritiva. As principais vantagens do método ISO-S1 são: geração de uma PDF para o mensurando, a qual permite a determinação do intervalo de abrangência, variância, desvio padrão, média, moda, assi-

metria, curtose e outros parâmetros estatísticos do mensurando; segundo, não existem limitações no que tange à natureza não linear da função de medição, diferente do Guia ISO que requer uma aproximação linear de função de medição pela série de Taylor; terceiro, não existem suposições referentes à distribuição do mensurando, i.e., a PDF do mensurando pode ser simétrica e não gaussiana ou assimétrica (no Guia ISO supõe-se que a distribuição do mensurando deve se aproximar de uma gaussiana, uma vez que esta hipótese é necessária para estimar o intervalo de abrangência baseado na distribuição *t-Student*); quarto, não requer o cálculo do número de graus liberdade efetivos (que incluiria uma hipótese de que o mensurando tem uma distribuição de frequência de *t-Student*) pela Eq.(30) ou Eq.(32); finalmente, não é necessário calcular derivadas parciais para a avaliação da incerteza de medição, embora, quando necessário, esse método apresente um procedimento numérico para determinar os coeficientes de sensibilidade (BIPM et al., 2008b, Anexo B).

Porém, o método ISO-S1 também possui limitações. Primeiramente, a seleção da PDF apropriada para as grandezas de entrada pode ser difícil por causa de dados imprecisos ou falta de conhecimento dos processos físicos e/ou químicos que influenciam diretamente um processo de medição (Willink, 2010). Outra dificuldade encontrada por esse método surge quando necessita-se da geração de números aleatórios de PDFs conjuntas não gaussianas, pois os sistemas computacionais (softwares) possuem geradores de números aleatórios somente para PDF gaussiana multivariada. Uma alternativa a essa problemática é uso de funções cópulas, as quais são usadas na estatística como um método geral para formular quaisquer distribuições multivariadas de maneira que diversos tipos gerais de dependência possam ser representados; uma aplicação prática das funções cópulas para a avaliação da incerteza de medição é apresentada por Possolo (2010). Por fim, em alguns casos o tempo de processamento (custo computacional) do método ISO-S1 pode ser muito longo, e.g., em modelos de medição complexos com muitas grandezas de entrada ou modelos de medição fortemente não lineares.

Baseado na explanação sobre os méritos e as limitações do Guia ISO e seu Suplemento 1, bem como nos resultados apresentados nos estudos de caso, pode-se concluir que o Guia ISO apresenta uma avaliação robusta para a incerteza de medição, principalmente quando as funções de medição são lineares ou fracamente não lineares. Por outro lado, o Suplemento 1 do Guia ISO pode ser considerado como uma ferramenta confiável e consistente na avaliação da incerteza de medição em situações onde as condições de aplicabilidade do Guia ISO não estão completamente atendidas. Portanto, o método ISO-S1 deve sempre ser usado quando a não linearidade das funções de medição forem significativas, quando a independência entre as grandezas de entrada não for as-

<sup>10</sup>O número mínimo de medições repetidas independentes deveria ser 30 para validar o CLT (Godec, 1997).

segurada, e quando as PDFs das grandezas tanto de entrada quanto de saída forem assimétricas.

## AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer o suporte financeiro dado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia (FAPESB).

## REFERÊNCIAS

- ABNT (1977). *NBR 5891: Regras de arredondamento na numeração decimal*, ABNT, Rio de Janeiro.
- Arfken, G. and Weber, H. (2005). *Mathematical method for physicists*, 6 edn, New York: Elsevier.
- Ballico, M. (2000). Limitations of the Welch-Satterthwaite approximation for measurement uncertainty calculations, *Metrologia* **37**(1): 61–64.
- Bentley, R. E. (2005). *Uncertainty in measurement: The ISO guide*, Technology transfer series monograph n 1, National Measurement Institute of Australia.
- Bevington, P. and Robison, D. K. (1992). *Data Reduction and Errors Analysis for the Physical Science*, 2nd edn, New York: Mc Graw Hill.
- Bich, W., Callegaro, L. and Pennechi, F. (2006). Non-linear models and best estimates in the GUM, *Metrologia* **43**(4): S196–S199.
- Bich, W., Cox, M. G. and Harris, P. M. (2006). Evolution of the guide to the expression of uncertainty in measurement, *Metrologia* **43**: S161–S166.
- BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP and OIML (2008a). Evaluation of measurement data - guide to the expression of uncertainty in measurement. joint committee for guides in metrology, *Technical report*, Bureau International des Poids et Mesures, JCGM 100:2008. Primeira versão desse documento referente ao ano de 1995 foi traduzido pelo INMETRO e ABNT, terceira edição brasileira em 2003.
- BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP and OIML (2008b). Evaluation of measurement data-supplement 1 to the guide to the expression of uncertainty in measurement-propagation of distributions using a Monte Carlo method, *Technical report*, Joint Committee for Guides in Metrology, Bureau International des Poids et Mesures, JCGM 200:2008.
- BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP and OIML (2008c). International vocabulary of metrology : Basic and general concepts and associated terms (VIM). Joint Committee for Guides in Metrology, *Technical report*, Bureau International des Poids et Mesures, JCGM 200:2008. Documento traduzido pelo INMETRO, primeira edição brasileira em 2009.
- CIPM (1980). Rapport BIPM-80/3, report on the BIPM enquiry on error statements, *Technical report*, Bureau International des Poids et Mesures.
- Cox, M. G., Dainton, M. P. and Harris, P. M. (2001a). Software specifications for uncertainty evaluation and associated statistic analysis, *Technical report*, National Physical Laboratory, Teddington, UK.
- Cox, M. G., Dainton, M. P. and Harris, P. M. (2001b). Software support for metrology best practice guide, *Technical Report 06*, National Physical Laboratory, Teddington, UK.
- Cox, M. G., Desenfant, M., Harris, P. M. and Siebert, B. R. L. (2003). Model-based measurement uncertainty evaluation, with applications in testing, *Accred Qual Assur* **8**: 548–554.
- Cox, M. G. and Siebert, B. R. L. (2006). The use of a Monte Carlo method for evaluating uncertainty and expanded uncertainty, *Metrologia* **43**: S178 – S188.
- Cox, M. and Harris, P. (2003). The GUM and its planned supplemental guides, *Accred Qual Assur* **8**(4): 375–379.
- Cox, M. and Harris, P. (2005). An outline of supplement 1 to the guide to the expression of uncertainty in measurement on numerical methods for the propagation of distributions, *Measurement Techniques* **48**(4): 336–345.
- da Costa-Felix, R. P. B. (2006). Type B uncertainty in sound power measurements using comparison method, *Measurement* **39**: 169–175.
- Elster, C. (2000). Evaluation of measurement uncertainty in the presence of combined random and analogue-to-digital conversion errors, *Measurement Science and Technology* **11**(9): 1359–1363.
- Elster, C. (2007). Calculation of uncertainty in the presence of prior knowledge, *Metrologia* **44**(2): 111–116.
- Esward, T. J., de Ginestous, A., Harris, P. M., Hill, I. D., Salim, S. G. R., Smith, I. M., Wichmann, B. A., Winkler, R. and Woolliams, E. R. (2007). A Monte Carlo method for uncertainty evaluation implemented on a distributed computing system, *Metrologia* **44**(5): 319–326.
- Fairfield-Smith, H. (1936). , *J. Counc. Sci. Indust. Res* **9**: 211.

- Frenkel, R. B. (2006). *Statistical background to the ISO guide to the expression of uncertainty in measurement*, Technology transfer series monograph n 2, National Measurement Institute of Australia.
- Frenkel, R. B. and Kirkup, L. (2005). Monte Carlo-based estimation of uncertainty owing to limited resolution of digital instruments, *Metrologia* **42**: 27–30.
- Giacomo, P. (1981). News from BIPM, *Metrologia* **17**: 69–74.
- Giacomo, P. (1982). News from BIPM, *Metrologia* **18**: 43–44.
- Giacomo, P. (1987). News from BIPM, *Metrologia* **24**: 49–50.
- Godec, Z. (1997). Standard uncertainty in each measurement result explicit or implicit, *Measurement* **20**(2): 97 – 101.
- Hall, B. D. and Willink, R. (2001). Does "Welch-Satterthwaite" make a good uncertainty estimate?, *Metrologia* **38**(1): 9–15.
- Herrador, M. A., Asuero, A. G. and González, A. G. (2005). Estimation of the uncertainty of indirect measurements from the propagation of distributions by using the Monte-Carlo method: An overview, *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems* **79**(1-2): 115 – 122.
- Herrador, M. A. and Gonzalez, A. (2004). Evaluation of measurement uncertainty in analytical assays by means of Monte-Carlo simulation, *Talanta* **64**(2): 415 – 422.
- Kacker, R. and Jones, A. (2003). On use of Bayesian statistics to make the guide to the expression of uncertainty in measurement consistent, *Metrologia* **40**(5): 235–248.
- Kacker, R. N. (2006). Bayesian alternative to the ISO-GUM's use of the Welch-Satterthwaite formula, *Metrologia* **43**(1): 1–11.
- Kacker, R. N. and Lawrence, J. F. (2007). Trapezoidal and triangular distributions for Type B evaluation of standard uncertainty, *Metrologia* **44**(2): 117–127.
- Kacker, R., Sommer, K.-D. and Kessel, R. (2007). Evolution of modern approaches to express uncertainty in measurement, *Metrologia* **44**(6): 513–529.
- Kacker, R., Toman, B. and Huang, D. (2006). Comparison of ISO-GUM, draft GUM supplement 1 and Bayesian statistics using simple linear calibration, *Metrologia* **43**: S167–S177.
- Kessel, R., Kacker, R. and Berglund, M. (2006). Coefficient of contribution to the combined standard uncertainty, *Metrologia* **43**(4): S189–S195.
- Kirkup, L. and Frenkel, R. B. (2006). *An Introduction to uncertainty in Measurement*, New York: Cambridge University Press.
- Landau, D. P. and Binder, K. (2000). *A Guide to Monte Carlo Simulation in Statistical Physics*, Cambridge University Press.
- Lee, P. M. (1997). *Bayesian Statistics*, 2nd edn, Oxford University Press.
- Lepek, A. (2003). A computer program for a general case evaluation of the expanded uncertainty, *Accred Qual Assur* **8**: 296–299.
- Lira, I. (2002). *Evaluating the measurement uncertainty: fundamentals and practical guidance.*, Institute of Physics Publishing.
- Lira, I. (2006). Bayesian evaluation of comparison data, *Metrologia* **43**(4): S231–S234.
- Lira, I. (2008). The generalized maximum entropy trapezoidal probability density function, *Metrologia* **45**(4): L17–L20.
- Lira, I. (2009). On the meaning of coverage probabilities, *Metrologia* **46**(6): 616–618.
- Lira, I. and Grientschnig, D. (2010). Bayesian assessment of uncertainty in metrology: a tutorial, *Metrologia* **47**: R1–R14.
- Lira, I. H. and Wöger, W. (1997). The evaluation of standard uncertainty in the presence of limited resolution of indicating devices, *Measurement Science and Technology* **8**(4): 441–443.
- Lira, I. H. and Wöger, W. (1998a). Evaluation of the uncertainty associated with a measurement result not corrected for systematic effects, *Measurement Science and Technology* **9**(6): 1010–1011.
- Lira, I. H. and Wöger, W. (1998b). The evaluation of the uncertainty in knowing a directly measured quantity, *Measurement Science and Technology* **9**(8): 1167–1173.
- Lira, I. and Kyriazis, G. (1999). Bayesian inference from measurement information, *Metrologia* **36**(3): 163–169.
- Liu, Z. (2005). Higher order corrections to the Welch-Satterthwaite formula, *Metrologia* **42**(5): 449–457.
- Locci, N., Muscas, C. and Ghiani, E. (2002). Evaluation of uncertainty in measurements based on digitized data, *Measurement* **32**(4): 265 – 272.

- Martinez, W. L. and Martinez, A. R. (2002). *Computational Statistics Handbook with MATLAB*, New York: Chapman & Hall/CRC.
- Mekid, S. and Vaja, D. (2008). Propagation of uncertainty: Expressions of second and third order uncertainty with third and fourth moments, *Measurement* **41**(6): 600 – 609.
- Nery, G. and Kalid, R. (2009). Estimativa da incerteza pelo método Monte Carlo: comparação entre diferentes procedimentos de cálculo, *V Congresso Nacional de Metrologia*.
- Possolo, A. (2010). Copulas for uncertainty analysis, *Metrologia* **47**(3): 262–271.
- Press, W. H., Teulolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P. (1992a). *Numerical Recipes in C the Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press.
- Press, W. H., Teulolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P. (1992b). *Numerical Recipes in FORTRAN: the Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press.
- Rubinstein, R. Y. (1981). *Simulation and the Monte-Carlo Method*, New York: John Wiley and Sons.
- Satterthwaite, F. (1941). Synthesis of variance, *Psychometrika* **6**: 309–316.
- Satterthwaite, F. (1946). An approximate distribution of estimates of variance components, *Biometrics Bulletin* **2**(6): 110–114.
- Scheid, F. (1968). *Theory and Problem of Numerical Analysis*, *Schaum's Outline Serie*, New York: McGraw Hill.
- Siepmann, J. I., Ferguson, D. M. and Truhlar, D. G. (1999). *Monte-Carlo Method in Chemical Physics, Advanced In Chemical Physics*, New York: Wiley.
- Sommer, K.-D., Kühn, O., León, F. P. and Siebert, B. R. (2009). A Bayesian approach to information fusion for evaluating the measurement uncertainty, *Robotics and Autonomous Systems* **57**(3): 339 – 344. Selected papers from 2006 IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration (MFI 2006), 2006 IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration.
- Sommer, K. D. and Siebert, B. R. L. (2006). Systematic approach to the modelling of measurements for uncertainty evaluation, *Metrologia* **43**(4): S200–S210.
- Taylor, J. R. (1997). *An Introduction to Error Analysis*, 2nd edn, Sausalito, CA: University Science Book.
- Vuolo, J. H. (1997). *Fundamentos da Teoria de Erros*, 2 edn, São Paulo: Edgard Blucher.
- Weise, K. and Woger, W. (1993). A Bayesian theory of measurements uncertainty, *Metrologia* **3**: 1–11.
- Welch, B. (1936). The specification of rules for rejecting too variance a product, with particular reference to an electric lamp problem, *J. R. Stat. Soc. Suppl* **3**: 29–48.
- Welch, B. (1938). The significance of the difference between two means when the population variances are unequal, *Biometrika* **29**: 350–362.
- White, D. R. and Saunders, P. (2007). The propagation of uncertainty with calibration equations, *Measurement Science and Technology* **18**(7): 2157–2169.
- Willink, R. (2005). A procedure for the evaluation of measurement uncertainty based on moments, *Metrologia* **42**(5): 329–343.
- Willink, R. (2006a). On using the Monte Carlo method to calculate uncertainty intervals, *Metrologia* **43**(6): L39–L42.
- Willink, R. (2006b). Principles of probability and statistics for metrology, *Metrologia* **43**: S211–S219.
- Willink, R. (2007). A generalization of the Welch-Satterthwaite formula for use with correlated uncertainty components, *Metrologia* **44**(5): 340–349.
- Willink, R. (2008). An inconsistency in uncertainty analysis relating to effective degrees of freedom, *Metrologia* **45**(1): 63–67.
- Willink, R. (2010). Difficulties arising from the representation of the measurand by a probability distribution, *Measurement Science and Technology* **21**(1): 015110.
- Wübbeler, G., Krystek, M. and Elster, C. (2008). Evaluation of measurement uncertainty and its numerical calculation by a Monte Carlo method, *Measurement Science and Technology* **19**(8): 084009 (4pp).