V CONGRESSO BRASILEIRO DE METROLOGIA
Metrologia para a competitividade em áreas estratégicas
9 a 13 de novembro de 2009. Salvador, Bahia - Brasil

# ESTIMATIVA DA INCERTEZA PELO MÉTODO MONTE CARLO: COMPARAÇÃO ENTRE DIFERENTES PROCEDIMENTOS DE CÁLCULO

*Gesner Nery*[1], *Ricardo Kalid*[2]

[1] Universidade Federal da Bahia(UFBA), Salvador, Brasil, gsnrnr@hotmail.com
[2] Universidade Federal da Bahia(UFBA), Salvador, Brasil, kalid@ufba.br

**Sumário:** Foi realizada uma comparação do método sugerido pelo GUM para a avaliação da incerteza pelo método de Monte Carlo com um método proposto. No método proposto é utilizado a PDF dos dados e métodos numéricos, enquanto que pelo GUM usa-se a CDF. Os resultados mostram que as diferenças são pequenas, embora o método proposto tenha um custo computacional mais elevado.

**Palavras-chave:** Monte Carlo. Incerteza. Métodos numéricos.

## 1. INTRODUÇÃO

A estimativa da incerteza de uma medição é importante para se saber o quão confiável é o resultado de uma medição tendo aplicação na indústria, no comércio e em pesquisas científicas. O método clássico, no qual a incerteza é dada pelo produto da incerteza padrão combinada pelo fator de abrangência, precisa atender várias hipóteses (normalidade das variáveis e das incertezas, quase-linearidade). Por outro lado a estimativa da incerteza pela simulação de Monte Carlo não necessita dessas hipóteses, o que torna esse método mais geral. Ao usar a simulação de Monte Carlo, a incerteza é o menor intervalo que contém o valor base da medição e cuja área delimitada pela função densidade de probabilidade (PDF) dos dados da medição, dentro desse intervalo, é igual ao nível de confiança estabelecido a priori.

O primeiro suplemento do Guia para Expressão da Incerteza de Medição (GUM) [1] introduz recomendações para a implementação do método Monte Carlo na estimativa da incerteza em medições, que usa a função densidade cumulativa inversa (i-CDF) do mensurando.

O método heterodoxo proposto nesse artigo utiliza a PDF dos dados e métodos numéricos para a obtenção do intervalo de confiança, podendo ser utilizado quando PDF esteja disponível e a obtenção da i-CDF não seja confiável.

## 2. OBJETIVO

O objetivo desse artigo é comparar o método de obtenção do intervalo de confiança sugerido no primeiro suplemento do GUM, com o método heterodoxo proposto, que usa a função densidade de probabilidade (PDF), para o método de Monte Carlo.

## 3. MÉTODOS

O método desenvolvido na pesquisa utiliza a uma estimativa da PDF dos dados de uma medição para obter o menor intervalo. Para estimar a PDF seguiram-se as seguintes etapas:

(a) construiu-se um histograma com $\sqrt{n}$ barras, sendo n o número de dados; e utilizou-se o comando SPLINE existente no MATLAB®, os valores de x considerados para o comando foram os x centrais das barras do histograma e os valores de y foram os valores de correspondentes a cada barra.

(b) A partir da estimativa da PDF dos dados, doravante f(x), e de maneira a obter o menor intervalo, foram usados os multiplicadores de Lagrange sendo a função objetivo dada pela equação 1:

$$g(a,b) = b - a \tag{1}$$

Sendo "b" e "a" os limites superior e inferior, respectivamente, a função g representa o tamanho do intervalo e deve ser minimizada. A função restritiva é dada pela equação 2:

$$p = \int_a^b f(x)dx \tag{2}$$

Sendo p o nível de confiança, com o uso dos multiplicadores tem-se a equação 3.

$$\Lambda(a,b,\lambda) = g(a,b) - \lambda.\left(\int_a^b f(x)dx - p\right) \tag{3}$$

Fazendo as derivadas de $\Lambda$ se igualarem a zero chega-se ao sistema de equações 4.

$$\begin{cases} \frac{\partial\Lambda}{\partial a} = -1 - \lambda.\frac{\partial\left(\int_a^b f(x)dx - p\right)}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial\Lambda}{\partial b} = 1 - \lambda.\frac{\partial\left(\int_a^b f(x)dx - p\right)}{\partial b} = 0 \\ \frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda} = \int_a^b f(x)dx - p = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Tem-se pelo segundo teorema fundamental do cálculo mostrada na equação 5.

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a) \quad (5)$$

Sendo F(x) a função antiderivada de f(x), fazendo a substituição o sistema fica demonstrado pelo sistema de equações 6.

$$\begin{cases} -1 - \lambda.\frac{\partial(F(b)-F(a)-p)}{\partial a} = 0 \\ 1 - \lambda.\frac{\partial(F(b)-F(a)-p)}{\partial b} = 0 \\ \int_a^b f(x)dx - p = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Fazendo as derivações, o sistema fica representado pelo sistema de equações 7.

$$\begin{cases} -1 - \lambda.\frac{\partial-F(a)}{\partial a} = 0 \\ 1 - \lambda.\frac{\partial F(b)}{\partial b} = 0 \\ \int_a^b f(x)dx - p = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Como F(a) e F(b) são funções antiderivadas de f(a) e f(b) o sistema fica representado pelo sistema de equações 8.

$$\begin{cases} -1 + \lambda.f(a) = 0 \\ 1 - \lambda.f(b) = 0 \\ \int_a^b f(x)dx - p = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Fazendo a soma das duas primeiras equações o sistema é representado pelo sistema de equações 9.

$$\begin{cases} \lambda.(f(a) - f(b)) = 0 \\ \int_a^b f(x)dx - p = 0 \end{cases} \quad (9)$$

A solução para a primeira equação quando $\lambda = 0$ não interessa. Então fazendo a divisão da primeira equação por $\lambda$ chega-se ao sistema de equações 10.

$$\begin{cases} \int_a^b f(x)\,dx - p = 0 \\ f(b) - f(a) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

(c) Resolvendo esse sistema (3) consegue-se o menor intervalo com o nível de confiança desejado. Para resolver o sistema utilizou-se o comando FSOLVE, sendo a estimativa inicial para o intervalo aquela obtida pelo método do GUM. Para o cálculo da integral foi utilizado o método da quadratura gaussiana, no intervalo de (-1 1)] utilizando 10 pontos. Para avaliar f(x) em um ponto usou-se o comando PPVAL.

Para desenvolver o método do GUM é necessária uma estimativa da CDF inversa dos dados da medição. No suplemento do GUM há recomendações de como fazer essa estimativa e elas foram seguidas. Com a estimativa da CDF inversa dos dados da medição e deve ser feita a construção da função h(α) representado na equação 11.

$$h(\alpha) = G^{-1}(p + \alpha) - G^{-1}(\alpha) \quad (11)$$

Em que p é o nível de confiança e a $\alpha$ é um valor entre 0 e 1-p. Obtendo o $\alpha$ que minimiza a função h($\alpha$) tem-se que G-1(p+$\alpha$) e G-1($\alpha$) são, respectivamente, os limites superior e inferior do intervalo.

## 4. RESULTADOS

Inicialmente foi testado o procedimento para estimativa do intervalo de confiança de uma PDF conhecida, para uma variável com PDF lognormal, com média 0 e variância 1. Obteve-se neste teste um resultado praticamente igual por ambos os métodos para um nível de confiança de 95%. O menor intervalo obtido pelo método proposto foi (0,026092 5,186948) e pelo Método GUM foi (0,026091 5,186948). A figura 1 mostra onde estão situados os extremos do intervalo de confiança obtido.

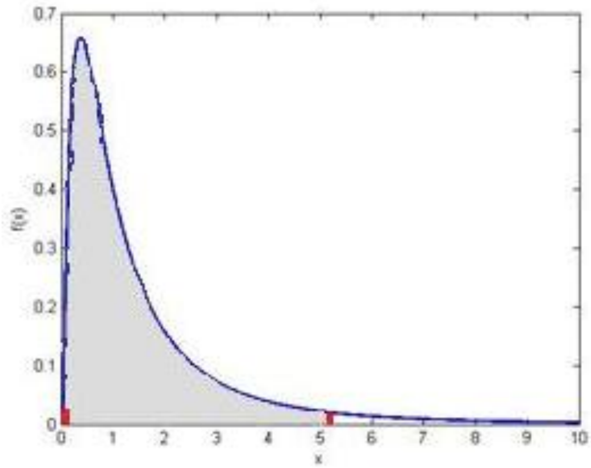


**Fig. 1. PDF lognormal com intervalo de confiança assinalado.**

Após verificar a aplicação do método de Monte Carlo para estimar a incerteza expandida foram utilizados dados aleatórios gerados pelo comando UNIFRND, que gera dados aleatórios uniformemente distribuídos. Foram usados $10^5$ dados gerados aleatoriamente.

Dois exemplos foram desenvolvidos, no primeiro uma variável dependente x dada pela relação hipotética apresentada na equação 12. Neste exemplo as variáveis independentes A, B, C são uniformemente distribuídos nos intervalos de (0 a 3), (-18 a 4) e (16 a 30), respectivamente. Veja a PDF de x na figura 2 e a i-CDF dessa variável é mostrada na figura 3.

$$x = \frac{A.B}{C^2} \quad (12)$$

O segundo exemplo é uma outra variável y dependente das variáveis A, B, C uniformemente distribuídos no intervalo de 1 a 2 e a relação de y é dada pela equação 13. Veja a PDF de y na figura 4 e a i-CDF dessa variável é mostrada na figura 5.

$$y = \frac{A.B}{C} \quad (13)$$

Utilizando o método Monte Carlo obteve-se os gráficos para a estimativa da PDF e a para a CDF inversa, nas figuras 2, 3, 4 e 5.

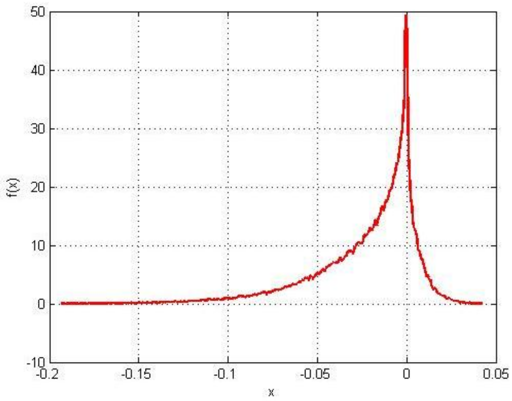


**Fig. 2. PDF associada aos dados de saída x.**

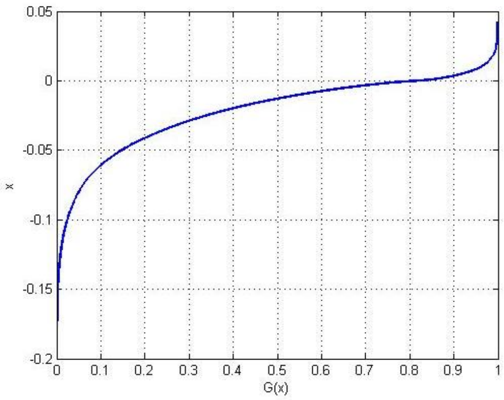


**Fig. 3. CDF inversa associada aos dados de saída x.**

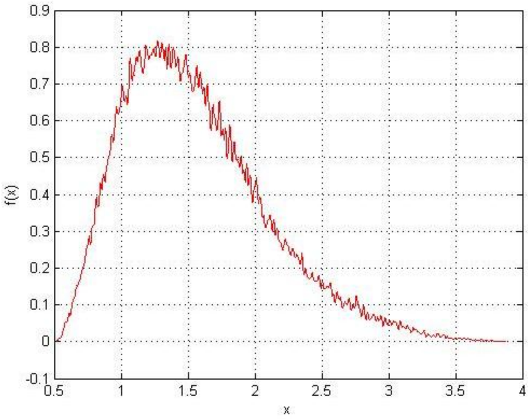


**Fig. 4. PDF associada aos dados de saída y.**

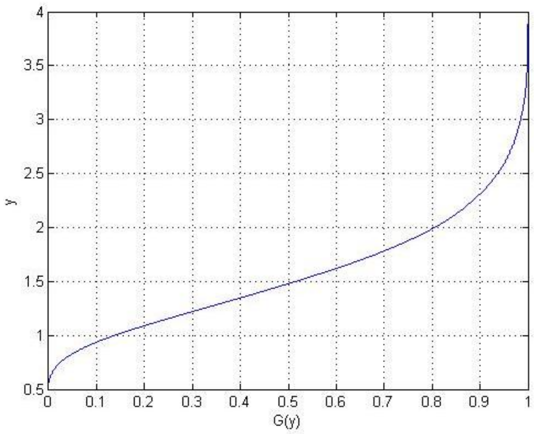


**Fig. 5. CDF inversa associada aos dados de saída y.**

## 5. DISCUSSÃO

A tabela 1 mostra a diferença entre os resultados nos diferentes métodos. Os erros absolutos e relativos foram calculados tendo como referência os resultados do método GUM. Os desvios relativos foram calculados tendo como referência os resultados do método GUM.

Tabela 1. Comparação dos resultados entre o método GUM e do método proposto para estimativa do intervalo de confiança pelo Método de Monte Carlo

| Característica | Método GUM | Método proposto | Desvio relativo |
|---|---|---|---|
| Limite Superior x | 0.008417 | 0.009845 | 16,96% |
| Limite Inferior x | -0.199038 | -0.205445 | 3,22% |
| Esforço computacional x (s) | 0.16 | 3.29 | Não se aplica |
| Limite Superior y | 2.592552 | 2.588734 | 0,15% |
| Limite Inferior y | 0.513217 | 0.493862 | 3,77% |
| Esforço computacional y (s) | 0.14 | 3.59 | Não se aplica |

O método proposto mostrou-se bastante sensível a estimativa inicial. A vantagem do método está no fato de se utilizar a PDF do mensurando, que pode ser útil quando a i-CDF do mensurando não pode ser estimada com a confiança desejada.

## 6. CONCLUSÃO

O método para estimativa do intervalo de confiança a partir de Monte Carlo proposto fica restrito ao uso da PDF do mensurando. Os resultados apontam que o método utilizado na pesquisa pode ser usado na estimativa do menor intervalo para a incerteza utilizando a simulação Monte Carlo, nos casos em que há uma boa estimativa da PDF, caso contrário, os resultados podem diferir bastante. Para tornar o método mais eficiente é necessário pesquisar maneiras de fazer uma estimativa mais real da PDF, tornando o método mais exato e mais rápido.

## REFERÊNCIAS


[1] BIPM. Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM) - Supplement 1: Numerical methods for the propagation of distributions -Temporary ISO Guide 9998. BIPM/JCGM-WG1-SC1-N10. 2004.