

## ANÁLISE ESTATÍSTICA DO USO DE UM FILTRO DE KALMAN A UM SISTEMA DE MEDIÇÃO COM RUÍDOS

Márcio A. F. Martins<sup>1</sup>, Robson W. S. Pessoa<sup>2</sup>, Ricardo A. Kalid<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial / UFBA, Salvador, Brasil, [marciomartins@ufba.br](mailto:marciomartins@ufba.br)

<sup>2</sup> Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial / UFBA, Salvador, Brasil, [robsonpessoa@ufba.br](mailto:robsonpessoa@ufba.br)

<sup>3</sup> Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial / UFBA, Salvador, Brasil, [kalid@ufba.br](mailto:kalid@ufba.br)

**Sumário:** O Filtro de Kalman é uma ferramenta matemática robusta capaz de realizar a reconciliação de dados em regime transiente. Foi aplicado este filtro em um sistema de medição ruidoso e validado estatisticamente seu uso como ferramenta para reconciliação de dados dinâmicos.

**Palavras-chave:** Filtro de Kalman, Incerteza, Ruído de Medição.

### 1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Sistemas de medição de uma indústria são freqüentemente afetados por ruídos, proveniente de diversas fontes, tais como: não idealidades intrínsecas aos instrumentos de medição, interferência eletromagnética, turbulência nos fluidos de processo e etc. Estes ruídos de medição influenciam diretamente o desempenho dos sistemas de controle de processos. Uma ferramenta útil para redução de tais distúrbios é o uso de filtros digitais para atenuação do sinal de medição de variáveis de processo [1]. Estes filtros têm bom desempenho para os processos que estão sob o regime estacionário. Contudo, para um sistema dinâmico ferramentas mais sofisticadas devem ser implementadas.

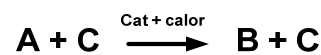
Uma ferramenta matemática com capacidade de filtrar sinais de medição sob o regime dinâmico é o filtro de Kalman (FK) [2-3]. Este tipo de filtro é usado na estimação e reconciliação dinâmica de variáveis de processos. Outro filtro usado para sistemas dinâmicos é o *Dynamic Data Reconciliation* (DDR) que possui o mesmo princípio matemático do FK que é baseado no uso da informação de medição e um modelo estocástico do processo, uma aplicação do uso destes filtros dinâmicos são discutidos em [4].

Este trabalho mostra a aplicação do FK em um sistema de medição de temperatura de um reator contínuo perfeitamente agitado (CSTR) simulado que está sujeito a ruídos. É mostrado que o sinal dinâmico filtrado possui uma variabilidade menor do que o sinal de medição com ruído. Além disso, pode ser mostrado que a incerteza do resíduo obtido entre o sinal de medição e o valor ideal da temperatura é menor do que a incerteza do resíduo do sinal de medição filtrado e o mesmo valor ideal de temperatura.

As técnicas estatísticas usadas neste trabalho são baseadas em [5-7], acrescentado a hipótese de que a auto-correlação das variáveis são pequenas quando comparado com a magnitude do ruído.

### 2. MATERIAIS E MÉTODOS

O estudo de caso utilizado neste trabalho foi um reator CSTR simulado [8]. Neste reator ocorre uma reação endotérmica, no qual o reagente A forma o produto B através de uma catálise homogênea, além disso, existe um componente inerte C no meio reacional.



Na Fig. 1 é mostrado o fluxograma do reator CSTR. Pode-se observar no fluxograma que o reator possui uma corrente de alimentação, uma corrente de catalisador e uma corrente de fluido de aquecimento com objetivo de fornecer calor ao sistema químico. Existe uma bomba centrífuga responsável pelo descarregamento do reator.

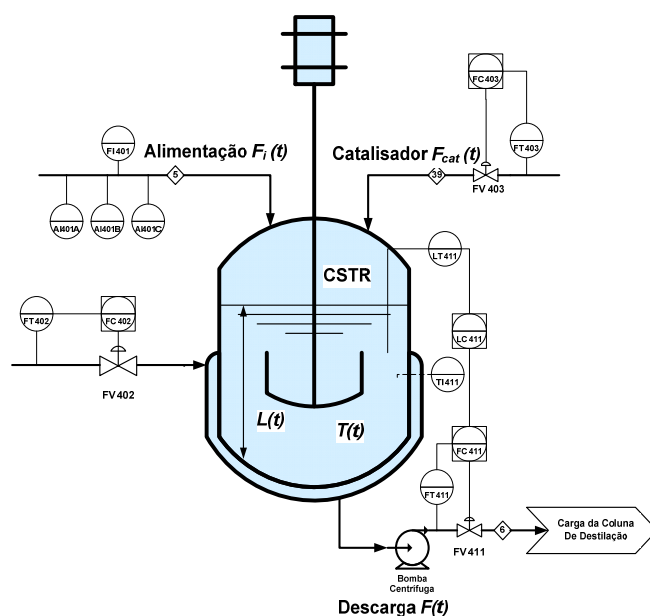


Fig. 1. Fluxograma simplificado do reator CSTR.

Para este sistema foi desenvolvido um modelo fenomenológico (balanços de massa, molar e energia) para descrever o comportamento dinâmico das principais variáveis: nível ( $L(t)$ ), concentrações molares de A ( $C_A(t)$ ), B ( $C_B(t)$ ) e C ( $C_C(t)$ ) e temperatura ( $T(t)$ ), a solução não linear destas equações diferenciais ordinárias (EDO's) representam os sinais ideais que vamos comparar com as medições. O resultado da modelagem pode ser observado na Eq.(1).

$$\begin{aligned} \frac{dL(t)}{dt} &= \frac{F_i}{\rho_m A_T} - \frac{F}{\rho_m A_T} \\ \frac{dC_A(t)}{dt} &= \frac{(C_{A,i} - C_A)F_i}{\rho_m A_T L} + k_o e^{\frac{E}{RT}} C_A \\ \frac{dC_B(t)}{dt} &= \frac{(C_{B,i} - C_B)F_i}{\rho_m A_T L} - k_o e^{\frac{E}{RT}} C_A \\ \frac{dC_C(t)}{dt} &= \frac{(C_{C,i} - C_C)F_i}{\rho_m A_T L} \\ \frac{dT(t)}{dt} &= \frac{F_i}{\rho_m A_T L} (T_i - T) - \frac{\Delta H_r k_o e^{\frac{E}{RT}} C_A}{\rho C_P} + \frac{U A_T (T - T_C)}{\rho A_T L C_P} \end{aligned} \quad (1)$$

As unidades de todas as variáveis do modelo estão no SI, ou seja, o nível tem unidade de metro ( $m$ ), as concentrações molares dos elementos possuem unidade de kilomol por metro cúbico ( $kmol/m^3$ ) e a temperatura em graus Celsius ( $^{\circ}C$ ).

O objetivo deste trabalho é aplicar um FK para realizar uma reconciliação dinâmica da temperatura interna do CSTR, pois o sinal dinâmico de medição possui ruídos consideráveis que influenciam o controle deste sistema. A Fig. 2 mostra este esquema.

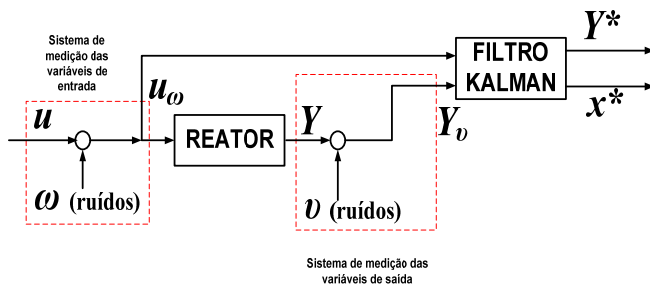


Fig. 2. Esquemático do reator CSTR com o filtro de Kalman.

Neste esquema  $Y$  representa o vetor das variáveis de saída medidas enquanto que o vetor  $u$  representa as variáveis de entrada do reator,  $\omega$  e  $v$  representam os ruídos de medição, logo os vetores  $u_{\omega}$  e  $Y_v$  representam os sinais ruidosos medidos, o vetor  $Y^*$  representa as variáveis de saída filtradas pelo FK, ou seja, as variáveis reconciliadas, por último o vetor  $x^*$  representa a inferência das variáveis de estados do reator.

As simulações foram realizadas no ambiente de simulação do Matlab (*Simulink*). Os dados de temperatura foram coletados antes e depois do sinal ser filtrado pelo FK.

## 2.1 MODELO DO FILTRO DE KALMAN

O FK utiliza um modelo dinâmico linear (ou linearizado) estocástico do processo na forma de modelo em espaço de estados. Como o modelo do CSTR (Eq.(1)) é um modelo não-linear, este foi linearizado em torno de um ponto operacional (foi escolhido o estado estacionário do reator,  $f^r$  e  $h^r$ ). Então, o modelo linearizado em espaço de estado para o CSTR é mostrado na Eq.(2).

$$\begin{aligned} x &\cong f^r + \underline{\underline{A}}(x - x^r) + \underline{\underline{B}}(u - u^r) \\ Y &\cong h^r + \underline{\underline{C}}(x - x^r) + \underline{\underline{D}}(u - u^r) \end{aligned} \quad (2)$$

Onde  $\underline{\underline{A}}$  é a matriz Jacobiana do sistema em relação aos estados ( $x$ ),  $\underline{\underline{B}}$  a matriz Jacobiana do sistema em relação as entradas ( $u$ ),  $\underline{\underline{C}}$  é a matriz Jacobiana das variáveis de saída sistema ( $Y$ ) em relação aos estados ( $x$ ) e  $\underline{\underline{D}}$  a matriz Jacobiana das variáveis de saída sistema ( $Y$ ) em relação as entradas ( $u$ ).

O FK utiliza o modelo em espaço de estados estocástico do sistema, este modelo FK pode ser observado na Eq.(3).

$$\begin{aligned} x_k &= \underline{\underline{A}}x_{k-1} + \underline{\underline{B}}u_{k-1} + \omega_k \\ Y_k &= \underline{\underline{C}}x_k + \underline{\underline{D}}u_k + v_k \end{aligned} \quad (3)$$

Na modelagem do FK assume-se que os ruídos de medição  $\omega$  e  $v$  são gaussianos, ou seja:

- Ruído nas variáveis de estado  $\omega_k \sim N(0, Q_k)$
- Ruído nas variáveis de saída  $v_k \sim N(0, R_k)$

Os valores de  $Q_k$  e  $R_k$  são parâmetros de sintonia do FK, estes valores são importantes na construção do filtro de Kalman, pois o FK é muito sensível as condições iniciais fornecidas.

Basicamente o FK estima as variáveis de estados baseado no erro calculado entre as variáveis de saídas: as medidas ( $Y$ ) com as reconciliadas ( $Y^*$ ) em cada instante de tempo  $k$ . Este erro calculado é multiplicado por uma constante  $K_k$ , esta constante  $K_k$  é o chamado ganho de Kalman. O ganho de Kalman é calculado a cada instante de tempo  $k$ . A função objetivo deste problema de otimização é minimizar o traço da matriz de covariância entre o erro gerado entre as próprias variáveis de estados estimadas em instantes diferentes  $k$  e  $k-1$ , maior detalhamento do algoritmo do FK pode ser encontrado em [2-3].

## 2.2 DESCRIÇÃO DA METODOLOGIA

Para que todo trabalho alcance o sucesso desejado uma série de etapas previamente estabelecidas conforme uma seqüência apropriada deve ser seguida.

As etapas de trabalho utilizadas para a aplicação da metodologia são explicitadas na Fig. 3.

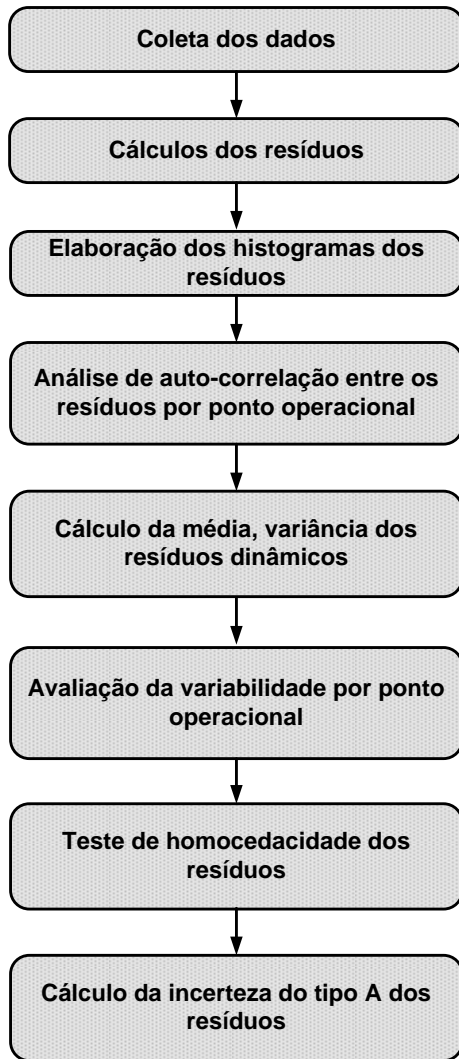


Fig. 3. Fluxograma das etapas da metodologia usada.

A avaliação estatística do uso FK para a melhoria dos sinais de medição com ruídos foi realizada pela abordagem frequencista, com os seguintes estimadores: média, variância e estimativa da incerteza tipo A dos resíduos gerados. Também foi admitida que a incerteza tipo B é a mesma com e sem o FK, então apenas a comparação da incerteza tipo A será necessária. A estimativa da média, da variância e da incerteza tipo A são representadas pelas Eq. (4), Eq. (5) e Eq. (6) respectivamente.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (4)$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (5)$$

$$u_T = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (6)$$

Na avaliação de variabilidade entre os sinais de medição antes e depois do FK por ponto operacional utilizou-se o seguinte teste de hipótese:

$$\begin{aligned} H_0 : s_A^2 &> s_B^2 \\ H_1 : s_A^2 &= s_B^2 \end{aligned} \quad (7)$$

Onde símbolo  $A$  representa o sinal de medição com ruído, enquanto que símbolo  $B$  representa o sinal de medição filtrado pelo FK. É importante lembrar que a função utilizada para o teste de hipótese foi  $F$ -distribuição.

Para a avaliação de homocedasticidade dos resíduos, o teste de hipótese aplicado foi:

$$\begin{aligned} H_0 : s_i^2 &= s_j^2 \\ H_1 : s_i^2 &\neq s_j^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Onde símbolo  $i$  e  $j$  representam pontos operacionais diferentes em um mesmo grupo (sinal com ruído ou sinal filtrado). De forma análoga ao teste de hipótese utilizado para a avaliação da variabilidade a função utilizada foi  $F$ -distribuição.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

O principal objetivo deste trabalho é mostrar o efeito do FK no sinal de medição ruidoso de temperatura. Então, uma análise qualitativa primeiramente pode ser mostrada através de uma comparação entre os sinais de medição: com ruído e filtrado; com o sinal ideal ou de referência que conhecemos previamente.

Esta comparação de sinais pode ser observada na Fig. 4. Ao observarmos o comportamento dinâmico dos sinais de temperatura verificamos que existe uma maior concentração de pontos do sinal de temperatura filtrado pelo FK em torno do valor do sinal ideal de temperatura em relação ao sinal original (sinal ruidoso). Este comportamento mostra que o sinal filtrado sofreu atenuações significativas em relação ao sinal de origem, ou seja, a variabilidade foi reduzida.

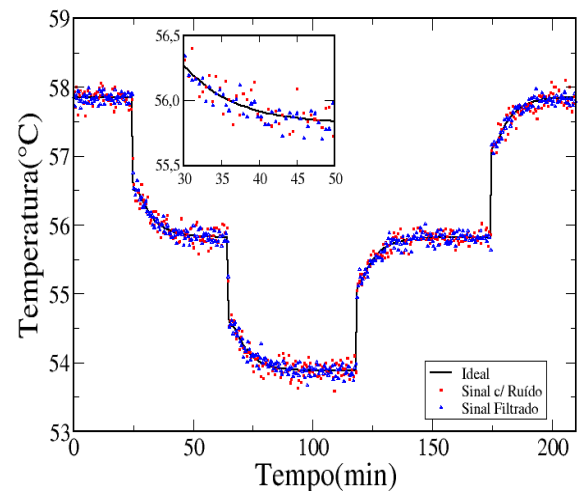


Fig. 4. Comportamento dinâmico das temperaturas sem ruído, com ruído e filtrado pelo FK.

O FK assume que os ruídos de medição possuem uma distribuição normal (Eq.(3)), contudo ele pode ser aplicado a variáveis com diferentes distribuições com uma pequena perda de desempenho, este resultado será mostrado nos próximos trabalhos. Neste trabalho o sinal de entrada tem distribuição normal assim como o sinal a ser reconciliado (Fig. 5).

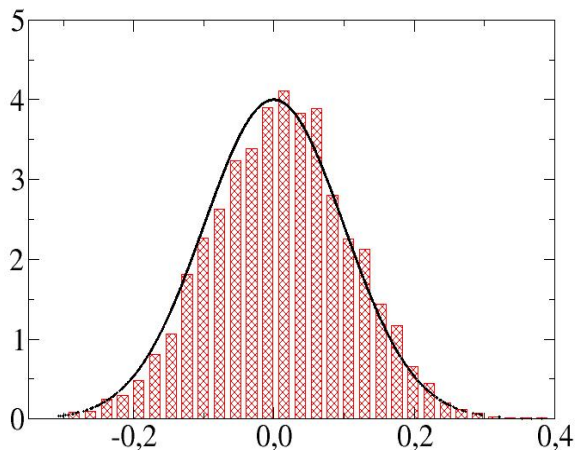


Fig. 5. Histograma do resíduo do sinal de temperatura não filtrado.

A implementação do FK não alterou a característica da distribuição do resíduo, ou seja, o comportamento gaussiano do resíduo existia antes do filtro permaneceu depois do sinal ser filtrado pelo FK. Este comportamento é mostrado pelo histograma do resíduo sinal de temperatura filtrado em relação ao sinal ideal (Fig. 6).

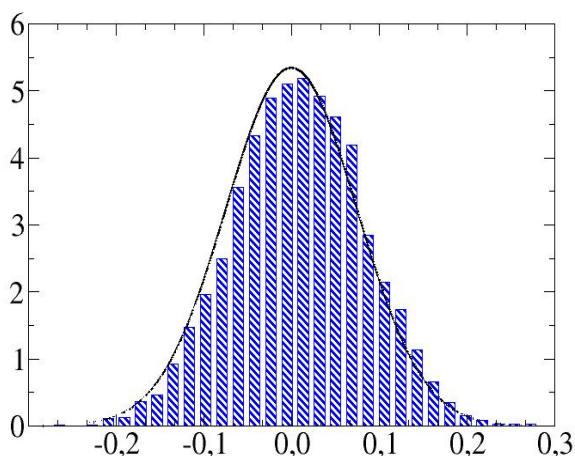


Fig. 6. Histograma do resíduo do sinal de temperatura filtrado.

Um gráfico utilizado em estatística para avaliar fenômenos dos modelos com valores de referência é o gráfico de resíduos. Neste tipo gráfico plota-se o resíduo em um instante  $k$  em relação ao resíduo no instante de  $k-1$ . Este tipo de gráfico pode mostrar se existe qualitativamente uma

auto-correlação entre os pontos e verifica o grau de dispersão dos dados. A Fig.7 apresenta os resíduos gerados entre os sinais de medição de temperatura do nosso estudo de caso. Ao observarmos este gráfico podemos constatar que praticamente não existe uma auto-correlação entre os sinais de temperatura tanto antes como depois do FK.

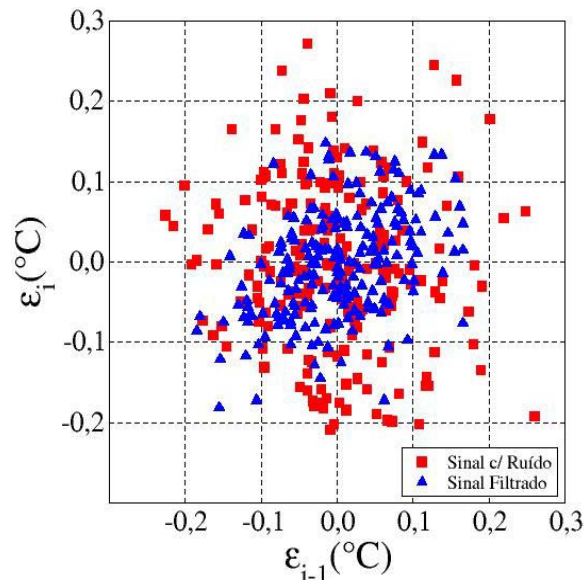


Fig. 7. Gráfico comparativo de resíduos entre o sinal com e sem FK.

Outra conclusão que se pode verificar na Fig. 7 é que o grau de dispersão do sinal de temperatura ruidoso é maior, isto é, como já demonstramos na Fig. 4, a inserção do FK promove um menor espalhamento entre os dados de temperatura, o que provoca menor variabilidade do sinal e conseqüentemente um controle mais estável da temperatura do reator pode ser alcançada.

Uma análise realizada neste trabalho foi à avaliação estatística dos pontos operacionais. Como observado na Fig. 4, existem 5 (cinco) estados estacionários nos testes realizados para verificar o comportamento dinâmico da temperatura sob o efeito do FK.

Foram coletados os dados de cada estado estacionário e estimadas as médias das temperaturas e as variâncias dos resíduos dos sinais de temperatura ( $n=120$ ). A Tabela 1 apresenta os resultados calculados. Ao observarmos a Tabela 1 verifica-se que para um mesmo ponto operacional a variância do resíduo do sinal de temperatura filtrado foi sempre menor do que a variância do resíduo do sinal de temperatura com ruído.

Quantitativamente a inserção do FK reduziu a variância do sinal de temperatura em pelo menos 40 % em relação ao sinal de temperatura com ruído. Esta menor variância reflete uma menor variabilidade da variável, este comportamento é sempre desejável para um sistema de medição.

Tabela 1. Resultados de média e variância em cada ponto operacional.

Média das temperaturas (°C)	Variância do resíduo do sinal de temperatura com ruído (°C <sup>2</sup> )	Variância do resíduo do sinal de temperatura filtrado (°C <sup>2</sup> )	Desvio percentual da variância do resíduo com FK em relação à variância do resíduo com ruído
57,85	1,01 x10 <sup>-2</sup>	4,84 x10 <sup>-3</sup>	52%
55,83	1,04 x10 <sup>-2</sup>	5,60 x10 <sup>-3</sup>	46%
53,89	1,05 x10 <sup>-2</sup>	5,76 x10 <sup>-3</sup>	45%
55,82	8,64 x10 <sup>-3</sup>	5,07 x10 <sup>-3</sup>	41%
57,84	9,81 x10 <sup>-3</sup>	5,52 x10 <sup>-3</sup>	44%

O teste de hipótese por *F*-distribuição para a variabilidade do resíduo com uma probabilidade de rejeição dos dados de 10% ( $\alpha=0,1$ ) confirma que a hipótese nula não pode ser rejeitada, ou seja, estatisticamente a variância do resíduo do sinal de temperatura com ruído ( $s_A^2$ ) é maior do que a variância do resíduo do sinal de temperatura filtrado ( $s_B^2$ ). Os resultados deste teste de hipótese podem ser observados da Tabela 2. Neste teste de hipótese foi realizada com base na Eq.(9).

$$H_0 : s_A^2 > s_B^2 \quad \frac{s_A^2}{s_B^2} > F_{1-\frac{\alpha}{2}[(v_A, v_B)]} \quad (9)$$

Isso demonstra que a utilização de um FK pode melhorar o desempenho de qualquer sistema de medição e até o controle de processos do qual este sistema de medição está inserido.

Tabela 2. Resultado do teste de hipótese para as variâncias dos sinais.

$s_A^2$ (°C <sup>2</sup> )	$s_B^2$ (°C <sup>2</sup> )	$F_{1-\frac{\alpha}{2}[(v_j, v_i)]}$	Razão das variâncias ( $s_A^2/s_B^2$ )	Resultado do teste de hipótese
1,01 x10 <sup>-2</sup>	4,84 x10 <sup>-3</sup>	1,26	2,09	$H_0$ aceita
1,04 x10 <sup>-2</sup>	5,60 x10 <sup>-3</sup>	1,26	1,86	$H_0$ aceita
1,05 x10 <sup>-2</sup>	5,76 x10 <sup>-3</sup>	1,26	1,82	$H_0$ aceita
8,64 x10 <sup>-3</sup>	5,07 x10 <sup>-3</sup>	1,26	1,70	$H_0$ aceita
9,81 x10 <sup>-3</sup>	5,52 x10 <sup>-3</sup>	1,26	1,78	$H_0$ aceita

Quanto à homocedasticidade, foi realizado o teste de hipótese da Eq. (8). A avaliação da variância dos resíduos com ruído e filtrado para cada ponto operacional foi realizada separadamente. As variâncias são avaliadas ponto a ponto dentro de cada grupo (resíduo com ruído e resíduo filtrado). O resultado do teste para os dois tipos de sinais confirma que as variâncias são estatisticamente iguais com uma probabilidade de 10% de rejeição ( $\alpha=0,1$ ) dos dados. No teste de hipótese usado a hipótese nula ( $H_0$ ) foi aceita com base na Eq. (10):

$$H_0 : s_i^2 = s_j^2$$

$$\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}[(v_j, v_i)]}} < \frac{s_i^2}{s_j^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2}[(v_i, v_j)]} \quad (10)$$

As Tabelas 3 e 4 apresentam os resultados do teste de hipótese dos resíduos com ruído e filtrado respectivamente para a variância ( $s_i^2$ ) do ponto operacional (T=53,89 °C) em relação à variância ( $s_j^2$ ) dos demais pontos operacionais.

Tabela 3. Resultado do teste de hipótese do resíduo com ruído.

$\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}[(v_j, v_i)]}}$	$\frac{s_i^2}{s_j^2}$	$F_{1-\frac{\alpha}{2}[(v_j, v_i)]}$	Resultado do teste de hipótese
0,79	1,04	1,26	$H_0$ aceita
0,79	1,01	1,26	$H_0$ aceita
0,79	1,22	1,26	$H_0$ aceita
0,79	1,07	1,26	$H_0$ aceita

Tabela 4. Resultado do teste de hipótese do resíduo filtrado pelo FK.

$\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}[(v_j, v_i)]}}$	$\frac{s_i^2}{s_j^2}$	$F_{1-\frac{\alpha}{2}[(v_j, v_i)]}$	Resultado do teste de hipótese
0,79	1,19	1,26	$H_0$ aceita
0,79	1,03	1,26	$H_0$ aceita
0,79	1,14	1,26	$H_0$ aceita
0,79	1,04	1,26	$H_0$ aceita

Tanto na Tabela 3 como na Tabela 4 os valores das razões entre as variâncias experimentais estão dentro da faixa de aceitação da hipótese nula. Então, podemos afirmar com uma significância de 10% dos dados, que a hipótese nula não pode ser rejeitada, isto é, as variâncias dos resíduos para os diferentes pontos operacionais são estatisticamente iguais.

A inserção do FK não alterou a homocedasticidade dos dados, visto que antes e depois do FK o sistema é homocedástico, conforme os resultados obtidos. Um comportamento homocedástico é sempre desejado para uma melhor previsibilidade de um modelo, portanto o FK também tem um bom desempenho em relação a essa característica.

Por último foi analisado quantitativamente os resíduos obtidos através das Eq.s (4), (5) e (6). Na Tabela 5 são mostrados os valores dos estimadores utilizados para cada resíduo.

Como visto nos resultados apresentados nesta Tabela 5, o sinal filtrado fornece uma maior confiabilidade nos dados de medição haja vista que este sinal apresenta uma menor variabilidade (média mais próxima de zero) em relação ao sinal de temperatura sem o filtro. Além disso, a incerteza do resíduo do sinal filtrado é aproximadamente 25% menor do que o sinal não filtrado para a estimativa da incerteza do tipo A.

Através dessa análise quantitativa fica evidente que o uso de um FK em um sistema de medição contribui significativamente para uma dispersão menor dos valores medidos de seus sinais, além disso, um grau de precisão (ou repetitividade) dos valores medidos são melhores e mais confiáveis uma vez que a incerteza de medição é menor em relação ao sinal de medição com ruído.

**Tabela 5. Comparação da média, variância e incerteza tipo A dos resíduos.**

	Resíduo do sinal antes do filtro FK (°C)	Resíduo do sinal depois do filtro FK (°C)	Desvio percentual do resíduo com FK em relação ao resíduo sem FK
$\bar{x}$	$-1,5 \times 10^{-3}$	$-1,2 \times 10^{-3}$	20%
$s^2$	$9,9 \times 10^{-3}$	$5,6 \times 10^{-3}$	43%
$u_r$	$3,2 \times 10^{-3}$	$2,4 \times 10^{-3}$	25%

#### 4. CONCLUSÃO

Mostrou-se que estatisticamente o FK apresenta desempenho adequado para filtrar dados típicos de processos contínuos.

O FK conserva as características dinâmicas do processo e a homocedasticidade dos dados dentro de valores típicos de incerteza de um processo industrial, além de diminuir a variabilidade do sinal filtrado. Esta conservação da dinâmica do sinal é assegurada pelo uso do modelo do processo no qual o sistema de medição está inserido.

A etapa de maior dificuldade na implementação do FK é a obtenção do modelo em espaço de estados do sistema no qual o FK será usado, muitas vezes a engenharia não conhece o modelo do sistema, sendo necessária a dedução via equações fenomenológicas (o que foi realizado neste trabalho) ou via identificação do modelo (equações empíricas).

Verificou-se que o filtro de Kalman trata dados com ruídos e gera um novo conjunto com menor variância que atende aos balanços de massa e energia do sistema, portanto o FK é uma ferramenta que pode ser utilizada para reconciliação de dados em regime transiente.

#### 5. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Os resultados obtidos neste trabalho mostraram que um FK reduz a variabilidade de um sinal de medição dinâmico submetido a ruídos (casos típicos de um sistema de medição industrial).

Logo, um trabalho futuro que pode ser realizado é analisar o desempenho de uma malha de controle do sinal

filtrado pelo FK no qual o sistema de medição está inserido. Isso porque um sinal com menos variabilidade torna o controle mais estável o que pode proporcionar diversos ganhos para o processo industrial tais como: produtividade, melhor especificação de produtos, um número de menor de paradas e redução de custos de manutenção da malha de controle.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer a Fundação de Apoio da Pesquisa no Estado da Bahia (FAPESB) pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não poderia ser realizado.

#### REFERÊNCIAS

- [1] HAYKIN, S. e VEEN, B. Van. Sinais e Sistemas. Editora Bookman, Porto Alegre, 2001.
- [2] KALMAN, R. E. "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," Transaction of the ASME – Journal of Basic Engineering, pp. 35-45, March 1960.
- [3] WELCH, G., BISHOP, G. "An Introduction to the Kalman Filter," University of North Carolina at Chapel Hill, April 2004.
- [4] BAI, S. et al., "Dynamic data reconciliation: Alternative to the Kalman filter," Journal of Process Control, Vol. 16, 2006.
- [5] ISO GUM *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, 101 pp., International Organization for Standardization, Suíça, 1995.
- [6] BARD, Y. Nonlinear Parameter Estimation. Orlando: Academic Press, Inc, p.341, 1974.
- [7] HIMMELBLAU, D. M. Process Analysis by Statistic Methods. Editora Jonh Wiley & Sons, Inc. New York, 1970.
- [8] KALID, R. Planta didática simulada do PROTEC-UFBA. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial da EPUFBA, Brasil, Salvador, 2005. Acesso em 15 de julho de 2009. Disponível em [www.TECLIM.ufba.br/ead](http://www.TECLIM.ufba.br/ead).