

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE
ESTRUTURAS



MESTRADO EM ENGENHARIA ESTRUTURAL

DANIEL BARBEDO VASCONCELOS SANTOS

MODELAGEM NUMÉRICA EM ELEMENTOS FINITOS DE PROBLEMAS DE
CONTATO COM ATRITO PARA MATERIAL HIPERELÁSTICO UTILIZANDO O
MÉTODO DA SUPERFÍCIE B-SPLINE PARA A SUAVIZAÇÃO DA
SUPERFÍCIE DE CONTATO.

SALVADOR

2017

Daniel Barbedo Vasconcelos Santos

MODELAGEM NUMÉRICA EM ELEMENTOS FINITOS DE PROBLEMAS DE CONTATO PARA MATERIAL HIPERELÁSTICO UTILIZANDO O MÉTODO DA SUPERFÍCIE B-SPLINE PARA A SUAVIZAÇÃO DA SUPERFÍCIE DE CONTATO.

Projeto de dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Estrutural, da Universidade Federal de Bahia. Área de concentração: Estudo de contato mecânico em elementos finitos.

**Orientador: Prof. Dr. Alex Alves
Bandeira**

SALVADOR

2017

CATALOGAÇÃO NA FONTE

FICHA CATALOGRAFICA
Esta ficha será elaborada pela biblioteca da Universidade na ocasião da entrega do trabalho

Modelagem Numérica em Elementos Finitos de Problemas de Contato para Material Hipereelástico Utilizando o Método da Superfície B-Spline para a Suavização de Contato.

Daniel Barbedo Vasconcelos Santos

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Estrutural, da Universidade Federal de Bahia. Área de concentração: Interação Estrutural. Linha de Pesquisa: Mecânica Computacional.

Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada

Prof. Dr. Alex Alves Bandeira, DSc – Orientador

Departamento de Construção e Estruturas – UFBA

Prof. Dr. Paulo de Mattos Pimenta

Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica,
Poli-USP

Prof. Dr. Marco Tulio Santana Alves

Departamento de Engenharia Mecânica - UFBA

Universidade Federal de Bahia

2017

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo apresentar um embasamento teórico sobre a formulação de problemas de contato mecânico com atrito para sólidos tridimensionais utilizando o método da superfície B-Spline para a suavização de superfície. Este é baseado na mecânica do contínuo.

Inicialmente é apresentada uma breve descrição dos tensores da mecânica do contínuo necessários à formulação, bem como as suas relações entre si. Parte-se então para a definição da formulação da mecânica dos sólidos utilizando a forma fraca, conhecida como o Princípio dos Trabalhos Virtuais, onde a equação de equilíbrio é obtida pela equação do balanço dos momentos, utilizando-se do modelo de equação de energia de um material Neo-Hookiano, com propriedades hiperelásticas. Descreve-se o processo de linearização das funções, necessário para a obtenção da matriz de rigidez em elementos finitos, e prossegue-se para a discretização em elementos finitos utilizando os elementos hexaédricos de oito nós.

Para a solução numérica do problema de contato (com e sem atrito) é apresentado o método do Lagrangiano Aumentado. Em seguida é apresentada a formulação para contato nó-superfície.

É importante mencionar que nas formulações padrões do contato mecânico, as superfícies de contato são discretizadas por elementos planos, o que resulta na descontinuidade do vetor normal entre as superfícies adjacentes. Neste tipo de abordagem, para que seja possível o deslizamento do nó escravo entre uma superfície mestre e outra adjacente, existe a necessidade de utilizar três tipos de formulações para o contato mecânico, i.e., contato nó-superfície, nó-seguimento e nó-nó. O objetivo desta dissertação é utilizar uma superfície curva e suave, criada a partir da superfície mestre original, que represente as superfícies de contato. Com isto, a direção da normal passa a ser contínua, sendo necessária apenas a formulação do contato com atrito nó-superfície. As superfícies de contato são suavizadas pela superfície B-Spline. Por este motivo, é apresentada a descrição do método da construção da superfície B-Spline para tornar a superfície de contato uma superfície única e suave, eliminando assim, a necessidade da formulação do contato nó-aresta e nó-nó.

Ao final do trabalho, são apresentados exemplos numéricos para evidenciar a eficiência e o desempenho da formulação proposta.

Palavras Chaves: Elementos Finitos, Contato, Lagrangiano Aumentado, Atrito, Sólido Tridimensional, Material Hiperelástico, B-Spline.

Abstract

This dissertation has as objective to show theoretical background about contact mechanical problems with friction for tridimensional solids, using the B-Spline surface algorithm for surface smoothing. This is based on continuum mechanics.

At first, a short description of continuum mechanics is presented, as it is the basis for the posterior solid element and contact B-Spline formulation. In a second moment, the virtual work principle in its weak form is shown, where the equilibrium equation is obtained through the balance of momentum, utilizing the energy density equation of a Neo-Hookean hyperelastic material. Afterwards, the linearization process is presented, which is necessary for obtaining the finite element stiffness matrix and, finally, the finite element discretization for the 8 node hexaedrical element is shown.

At first a short description of continuum mechanics tensors necessary to the formulation is shown, as well as their relations between themselves. Then the definition for the weak form of solid mechanics, the virtual work principle is shown, where the equilibrium equation is obtained through the balance of momentum, utilizing the energy equation of a Neo-hookean material, with hiperelastic properties. The linearization process is presented, which is necessary for obtaining the finite element stiffness matrix, and then the finite element discretization for the 8 node hexaedrical element is shown.

Regarding the numerical solution for the contact problem (with and without friction), the Augmented Lagrangean method is presented. Afterwards, the formulation for node-surface contact is shown.

In the standard mechanical contact formulations, the contact surfaces are discretized by adjacent planes, resulting in discontinuity of the normal vector between adjacent surfaces. In the classical approach, to allow the sliding of a slave node over multiple master surfaces, three different contact mechanical formulations are needed, i.e., node-surface, node-segment and node-node contact. This work's objective is to compose a curve and smooth surface to represent the master surface, utilizing the B-Spline surface algorithm. Achieving

that, the normal vector direction is continuous, with only the node-surface contact formulation being necessary. The contact surfaces are discretized with a B-Spline surface, and for that reason, the B-Spline curve construction method is shown.

At the end of the work, numerical examples are shown to evidence the efficiency and performance of the proposed solution.

Key-words: *Finite Element Method, Contact, Augmented Lagrangean, Friction, Tridimensional Solid, Hyperelastic Material, B-Spline*

Lista de Figuras

FIGURA 2-1: TRAJETÓRIA DE UM PONTO MATERIAL.....	19
FIGURA 2-2: PONTOS SEPARADOS POR UMA DISTÂNCIA NA CONFIGURAÇÃO DE REFERÊNCIA E CONFIGURAÇÃO CORRENTE	22
FIGURA 2-3: LINEARIZAÇÃO DA FUNÇÃO F.....	35
FIGURA 3-1: DESCRIÇÃO ISOPARAMÉTRICA DAS DEFORMAÇÕES E SUAS TRANSFORMAÇÕES	40
FIGURA 3-2: ELEMENTO HEXAÉDRICO DE 8 NÓS.....	43
FIGURA 4-1: NOTAÇÃO PARA O PROBLEMA DO CONTATO COM ATRITO EM DEFORMAÇÃO FINITA.....	52
FIGURA 4-2: PARAMETRIZAÇÃO DAS SUPERFÍCIES DE CONTATO γ_2 E Γ_2	53
FIGURA 4-3: ESQUEMATIZAÇÃO DOS VETORES DA BASE E DA FUNÇÃO FOLGA	55
FIGURA 5-1: PROJEÇÕES NÓ-ARESTA E NÓ-NÓ.....	75
FIGURA 5-2: ORIENTAÇÃO DA NORMAL EM CONTATO NÓ-ARESTA.....	76
FIGURA 5-3: CURVA B-SPLINE.....	78
FIGURA 5-4: FUNÇÕES BASE COM ORDEM 1, 2 E 3.....	80
FIGURA 6-1: EXEMPLO PARISCH	90
FIGURA 6-2: DIMENSÕES DO EXEMPLO PARISCH	90
FIGURA 6-3: EXEMPLO PARISCH APÓS DEFORMAÇÕES.....	91
FIGURA 6-4: EXEMPLO DUAS VIGAS	92
FIGURA 6-5: DIMENSÕES DO EXEMPLO DUAS VIGAS.....	92
FIGURA 6-6: EXEMPLO DUAS VIGAS APÓS DEFORMAÇÕES.....	93
FIGURA 6-7: EXEMPLO VIGAS PARALELAS DEFORMÁVEIS.....	94
FIGURA 6-8: DIMENSÕES DO EXEMPLO VIGAS PARALELAS DEFORMÁVEIS	95
FIGURA 6-9: VIGAS PARALELAS DEFORMÁVEIS APÓS DEFORMAÇÕES.....	96

Lista de Símbolos

Símbolo Descrição

A_0	Área da seção transversal na configuração de referência
A_t	Área da seção transversal na configuração atual
\mathbf{B}	Tensor esquerdo de Cauchy-Green
\mathbf{B}_i	Ponto de controle da função B-Spline
\mathbf{B}_0	Matriz das transformações lineares das deformações-deslocamentos na configuração corrente
\mathbf{C}	Tensor das deformações de Cauchy-Green
\mathbb{C}	Tensor constitutivo incremental na configuração de referência
\mathbf{c}	Tensor constitutivo incremental na configuração corrente
\mathbf{D}	Módulo de rigidez tangente elástica
\mathbf{e}	Tensor da deformação de Almansi
E	Módulo de Elasticidade
\mathbf{E}	Tensor das deformações de Green- Lagrange
ε	Penalidade
ε_N	Penalidade na direção normal
ε_T	Penalidade na direção tangencial
\mathbf{F}	Matriz dos gradientes das transformações
ψ	Função energia de deformação
g_N	Função folga normal
g_T	Função folga tangencial
j_e	Jacobiano do elemento finito, configuração corrente para

isoparamétrica

- J_e Jacobiano do elemento finito, configuração de referência para isoparamétrica
- J_0 Determinante do tensor das transformações na configuração de referência
- J_t Determinante do tensor das transformações na configuração atual
- \mathbf{K} Matriz de rigidez tangente da estrutura
- $\mathbf{K}_{\text{contato}}$ Matriz de rigidez da contribuição das forças de contato
- \mathbf{K}_N Matriz de rigidez da contribuição das forças de contato normais
- \mathbf{K}_T Matriz de rigidez da contribuição das forças de contato tangenciais
- λ Multiplicador de Lagrange para as restrições de igualdade
- λ_N Multiplicador de Lagrange para restrições de desigualdade normal
- λ_T Multiplicador de Lagrange para restrições de desigualdade tangencial
- μ Coeficiente de atrito
- N_i Função de interpolação do elemento finito
- $\boldsymbol{\eta}$ Deslocamento virtual
- \mathbf{P} Primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff
- $\mathbf{R}_{\text{contato}}$ Vetor da contribuição das forças de contato
- ρ_0 Densidade de massa do corpo na configuração de referência
- ρ_t Densidade de massa do corpo na configuração atual
- \mathbf{S} Segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff
- $\boldsymbol{\sigma}$ Tensor tensão de Cauchy
- t_N Pressão de contato normal

t_T	Pressão de contato tangencial de Coulomb
τ	Tensor de Kirchhoff-Trefftz
t, u	Cordenadas paramétricas da superfície B-Spline
\mathbf{u}	Vetor dos deslocamentos dos nós da estrutura
U	Energia potencial
\mathbf{v}	Velocidade do ponto
V_0	Volume na configuração de referência
V	Volume na configuração atual
\mathbf{x}	Vetor das coordenadas cartesianas dos nós da estrutura na configuração atual
\mathbf{X}	Vetor das coordenadas cartesianas dos nós da estrutura na configuração de referência
ξ, η, ζ	Coordenadas isoparamétricas do elemento finito
W_{ext}	Trabalho externo
w_{int}	Trabalho interno

Sumário

1	Introdução	15
1.1	<i>Objetivos</i>	16
1.1.1	Objetivo Geral.....	16
1.1.2	Objetivo Específico.....	16
1.2	<i>Justificativa e relevância</i>	17
1.3	<i>Estrutura do trabalho</i>	17
2	Mecânica do Contínuo	19
2.1	<i>Tensores de deformação</i>	21
2.2	<i>Tensores de tensão</i>	23
2.2.1	Tensor tensão de Cauchy	23
2.2.2	Primeiro tensor de Piola-Kirchhoff.....	24
2.2.3	Segundo tensor de Piola-Kirchhoff.....	25
2.3	<i>Princípio dos trabalhos virtuais</i>	26
2.4	<i>Equação constitutiva do material</i>	27
2.5	<i>Tensor constitutivo incremental</i>	30
2.6	<i>Linearização</i>	34
2.7	<i>Linearização da formulação variacional</i>	36
3	Método dos Elementos Finitos	40
3.1	<i>Funções de Interpolação</i>	42
3.2	<i>Discretização da forma fraca da mecânica do contínuo</i>	43
3.2.1	Formulação de elementos finitos para configuração corrente	43
3.3	<i>Linearização do trabalho virtual</i>	47
4	Contato	50
4.1	<i>Formulação do Lagrangiano aumentado</i>	50
4.2	<i>Tensões de contato utilizando o Lagrangiano Aumentado com atrito</i>	52
4.2.1	Restrições de contato.....	53
4.3	<i>Definição de base</i>	56
4.4	<i>Cinemática do atrito</i>	57
4.5	<i>Formulação da lei de atrito de Coulomb</i>	58
4.6	<i>Aplicação do Lagrangiano Aumentado com Atrito</i>	59

4.7	<i>Cinemática do contato</i>	62
4.8	<i>Formulação Variacional do Contato</i>	63
4.9	<i>Algoritmo geométrico e funções de interpolação</i>	66
4.10	<i>Discretização do princípio dos trabalhos virtuais</i>	67
4.11	<i>Linearização do princípio dos trabalhos virtuais</i>	68
4.12	<i>Matriz de rigidez da contribuição normal.</i>	72
4.13	<i>Matriz de rigidez da contribuição do atrito sem deslizamento</i>	72
4.14	<i>Matriz de rigidez da contribuição do atrito com deslizamento</i>	74
5	Contato com elemento finito B-Spline	75
5.1	<i>B-Spline</i>	78
5.2	<i>Determinação do ponto x_m para a superfície B-Spline</i>	83
5.3	<i>Discretização da formulação de contato com elemento finito B-SPLINE</i>	84
6	Exemplos Numéricos	89
6.1	<i>Modelo numérico proposto por Parisch</i>	89
6.2	<i>Duas vigas</i>	91
6.3	<i>Vigas Paralelas Deformáveis</i>	93
7	Conclusão	97
	Referências	99

1 Introdução

Os primeiros pesquisadores a estudar os problemas de contato mecânico foram (A. FRANCAVILLA, 1975) e (HUGHES, TAYLOR e KANOKNUKULCHAI, 1977), conforme afirmado em (V. PADMANABHAN). Os estudos iniciais mostraram que as análises em elementos finitos poderiam lidar com interações entre superfícies de diferentes corpos. Estes trabalhos iniciais focavam em pequenas deformações, no entanto os trabalhos seguintes de (K.J. BATHE), (WRIGGERS, VAN e STEIN, 1990), (D.J. BENSON, 1990) e (SIMO e LAURSEN, 1993), estendem a aplicação dos algoritmos para grandes deformações e movimentos dos corpos.

Para executar uma simulação em elementos finitos onde espera-se que haja o contato entre os corpos, necessita-se de uma formulação para descrever as forças de contato entre eles. Uma forma de discretizar a superfície de contato e, subsequentemente, determinar as forças oriundas deste, é apresentada por (WRIGGERS) e (BANDEIRA), consistindo da utilização de elementos de contato Lagrangianos, compostos de 4 nós para gerar uma superfície de contato mestre. Esta descrição do contato necessita de três formulações, i.e., contato nó-superfície, no-aresta e nó-nó. Isto se deve ao fato das superfícies serem lisas e não possuírem normais contínuas entre os lados adjacentes.

Os elementos Lagrangianos, por serem lineares, demonstram um problema caracterizado pela facetização da superfície de contato, ou seja, entre os elementos, a superfície de contato apresenta quinas e arestas, que geram descontinuidade entre os elementos. Estas descontinuidades exigem uma formulação adicional na implementação do contato, aumentando a complexidade da análise e dificultando a convergência numérica, devido à dificuldade na determinação da normal da superfície de contato. Além de necessitar de um algoritmo geométrico muito eficiente para determinar a distância do nó escravo à superfície mestre e a sua respectiva formulação a ser utilizada.

Existem trabalhos desenvolvidos visando a solução dos problemas citados anteriormente, utilizando-se de técnicas como: (1) o elemento finito Hermitiano (não linear), como apresentado em (ALAIN BATAILLY, 2013); (2) a geração de uma superfície suave utilizando um algoritmo geométrico como o NURBS, visto em (M.E.

MATZEN, 2012); (3) do algoritmo Mortar para associar malhas dissimilares (WRIGGERS, 2006); e (4) uma combinação do NURBS com o Mortar, apresentado em (I. TEMIZER, 2011), entre outros.

O presente trabalho tem por objetivo utilizar a superfície B-Spline (um caso especial da superfície NURBS) para a suavização da superfície de contato, resolvendo os problemas abordados anteriormente. É importante mencionar, que a maioria das referências bibliográficas fazem a suavização das duas superfícies, i.e, a mestre e a escrava. Este trabalho consiste em utilizar a superfície B-Spline para a suavização apenas da superfície mestre. Desta forma, entende-se que a superfície escrava se conforma sobre a superfície mestre, não sendo necessária a suavização da mesma. Portanto, este é o principal objetivo desta pesquisa, onde será investigada a eficiência e a performance da solução proposta.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Desenvolver e verificar a formulação de contato mecânico utilizando uma superfície B-Spline para gerar um elemento finito de contato que discretize as superfícies mestres.

1.1.2 Objetivo Específico

Pode-se citar como exemplos específicos:

- Revisar a formulação não linear de elementos finitos para sólidos tridimensionais, baseado na mecânica do contínuo; a formulação de contato mecânico utilizando o Lagrangiano aumentado como condição de restrição; e a formulação da superfície B-Spline e sua adaptação como elemento finito de contato.
- Desenvolver um programa em Linguagem C utilizando as formulações estudadas anteriormente para a implementação do elemento de contato B-Spline e sua posterior verificação com exemplos numéricos.

1.2 Justificativa e relevância

Conforme pormenorizado em (WRIGGERS, 2006) e (BANDEIRA, 2001), a formulação de contato utiliza-se uma superfície mestre constituída de elementos de contato Lagrangianos, com 4 nós para discretização das forças de contato. Este tipo de superfície de contato apresenta quinas e arestas, que geram dificuldades na detecção da direção da normal da superfície de contato na intersecção entre os elementos. Isto necessita de uma formulação diferenciada para quando a projeção do nó escravo recai sobre uma aresta entre dois elementos, ou sobre um nó, que é comum à varios elementos.

Em (M.E. MATZEN, 2012) e (DE LORENZIS, WRIGGERS e ZAVARISE, 2012) são apresentadas suavizações da superfície de contato onde ambas superfícies (mestre e escrava) são suavizadas e representadas por superfícies NURBS e/ou Mortar

No presente trabalho apresenta-se uma forma alternativa de suavização das superfícies de contato, onde apenas a superfície mestre é suavizada, e por conta das forças de contato, a superfície escrava conforma-se à ela, solucionando as questões apresentados precedentemente, com uma formulação mais simples.

1.3 Estrutura do trabalho

Esta dissertação é dividida em sete capítulos. O primeiro capítulo é a introdução, contextualizando o trabalho e mostrando-lhe a estrutura do trabalho.

O segundo capítulo estabelece as relações relevantes da mecânica do contínuo e a apresentação da formulação variacional para elementos finitos, assim como o processo de linearização.

No terceiro capítulo é apresentado o processo de discretização em elementos finitos, o elemento isoparamétrico utilizado e o processo de obtenção da matriz de rigidez.

No quarto capítulo é apresentada a cinemática do contato com atrito e a formulação do contato entre um nó em uma superfície (formulação de contato nó-superfície).

O quinto capítulo refere-se a definição da superfície B-Spline. Neste capítulo, a formulação de contato padrão, apresentada no capítulo quatro, é adaptada para uma discretização suave da superfície mestre pelo método da superfície B-Spline (Caso

específico do NURBS). São apresentadas os vetores das forças normal e tangencial a serem acrescentados na equação de equilíbrio e a contribuição na matriz de rigidez da estrutura.

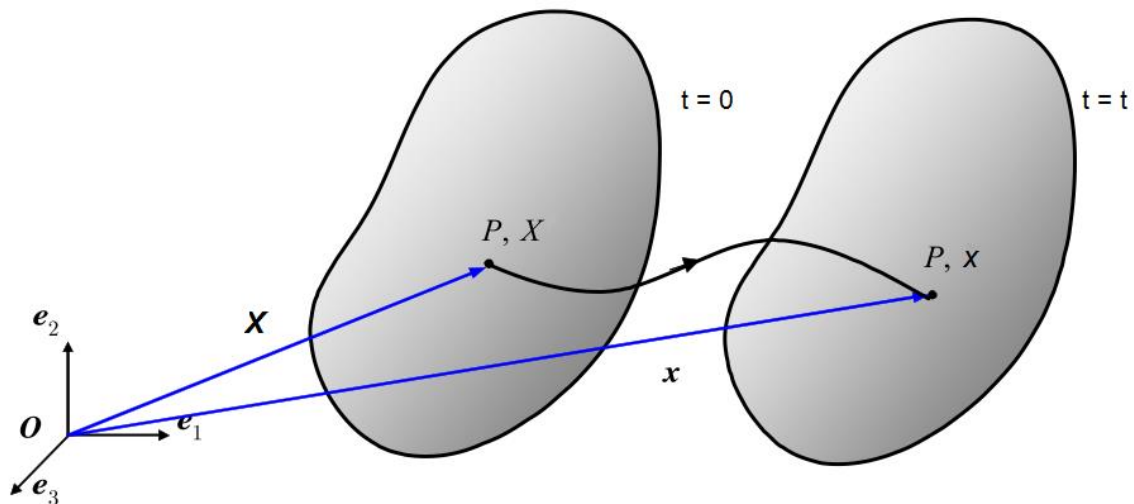
No sexto capítulo são apresentados os exemplos numéricos simulados no programa computacional de elementos finitos desenvolvido nesta pesquisa.

O sétimo e último capítulo, apresenta a conclusão, discutindo os resultados obtidos.

2 Mecânica do Contínuo

Segundo explicado por (REDDY, 2013), considera-se um corpo sólido, definido pelo contínuo B , vide Figura 2-1. Assume-se que todas as partículas do corpo B ocupam uma posição (x, y, z) em um espaço euclidiano E^3 . Imagina-se que B sofra ação de cargas, de forma que as posições de suas partículas mudem em razão dos deslocamentos e deformações causadas pelas cargas aplicadas. A região do espaço ocupada pelo corpo B a qualquer instante de tempo t é chamada de configuração. A configuração onde $t = 0$, nomeia-se de configuração inicial, ou de referência, e a configuração após um intervalo t qualquer é chamada configuração deformada, ou corrente.

Figura 2-1: Trajetória de um ponto material



Fonte: (PIMENTA, 2006)

Imagina-se em um ponto material do corpo B , um ponto qualquer chamado P . Este ocupa no espaço a posição $X_P(X_1, X_2, X_3)$ no espaço E^3 . Após passado um intervalo de tempo t , onde quaisquer cargas venham a atuar no corpo, P terá uma nova posição, graças ao deslocamento e/ou deformação do corpo. P agora ocupa a posição $x_p(x_1, x_2, x_3)$ no espaço euclidiano E^3 . Tem-se então uma função $\varphi(B)$, definida em $\varphi(B) = \{\varphi(X)|X \in B\}$. Esta função associa um ponto X do corpo B na configuração de referência à um ponto x do corpo B na configuração corrente, ou seja $x = \varphi(X, t)$.

O gradiente de transformações \mathbf{F} , que relaciona quaisquer vetor da configuração de referência para a configuração corrente, é dado por

$$dx = \mathbf{F}dX, \quad (2.1)$$

isolando o \mathbf{F} ,

$$\mathbf{F} = \frac{dx}{dX} = \text{grad } x, \quad (2.2)$$

e expondo em forma matricial,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

\mathbf{F} é uma função de X e de t , e pode envolver tanto estiramento como rotação. O tensor \mathbf{F} pode ser decomposto por decomposição polar em dois tensores, um representando estiramento, e o outro rotação,

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}. \quad (2.4)$$

O tensor \mathbf{R} representa rotação e o tensor \mathbf{U} representa estiramento.

Imagina-se que a função $\varphi(B)$ apresente um mesmo valor x , representado pelo vetor $x(1,2,7)$ para dois pontos $X(2,5,7)$ e $X(5,7,3)$. Isto representaria dois pontos materiais \mathbf{X} ocupando um mesmo ponto no espaço x , o que é impossível. Logo a função $\varphi(B)$ determina para todo ponto \mathbf{X} , um único e distinto ponto x , ou seja, ela é injetora. Logo a transformação F não pode ser singular (uma matriz singular é uma matriz que não permite sua inversa), então

$$J = \det \mathbf{F} \neq 0. \quad (2.5)$$

O determinante de \mathbf{F} é chamado de Jacobiano. Para excluir a auto-penetração, o jacobiano J tem que ser positivo.

Se \mathbf{F} permite uma inversa, então

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x}. \quad (2.6)$$

A equação (2.6) pode ser rescrita como

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{x}}, \quad (2.7)$$

e conseqüentemente,

$$\mathbf{F}^{-1} = \text{grad } \mathbf{X}. \quad (2.8)$$

A expressão (2.8) pode ser escrita na forma matricial por

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Pode-se também escrever \mathbf{F} em função do vetor dos deslocamentos \mathbf{u} , como

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \varphi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}. \quad (2.10)$$

Logo,

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{X}, \quad (2.11)$$

que resulta em

$$\mathbf{F} = \text{grad}(\mathbf{u} + \mathbf{X}) = \mathbf{1} + \text{grad } \mathbf{u}. \quad (2.12)$$

2.1 Tensores de deformação

Os tensores de deformação, de Green e Almansi, representam a tensão em um ponto material do corpo B , e seguem aqui descritos, vide (REDDY, 2013).

Considere dois pontos materiais P e Q do corpo B separados por uma distância dX , vide Figura 2-2. Considere ainda que após um instante t , o corpo B sofre ação de cargas e, conseqüentemente, os pontos P e Q se desloquem para as novas posições \bar{P} e \bar{Q} , de forma que estes estejam distanciados por uma distância dx . Sendo dS a

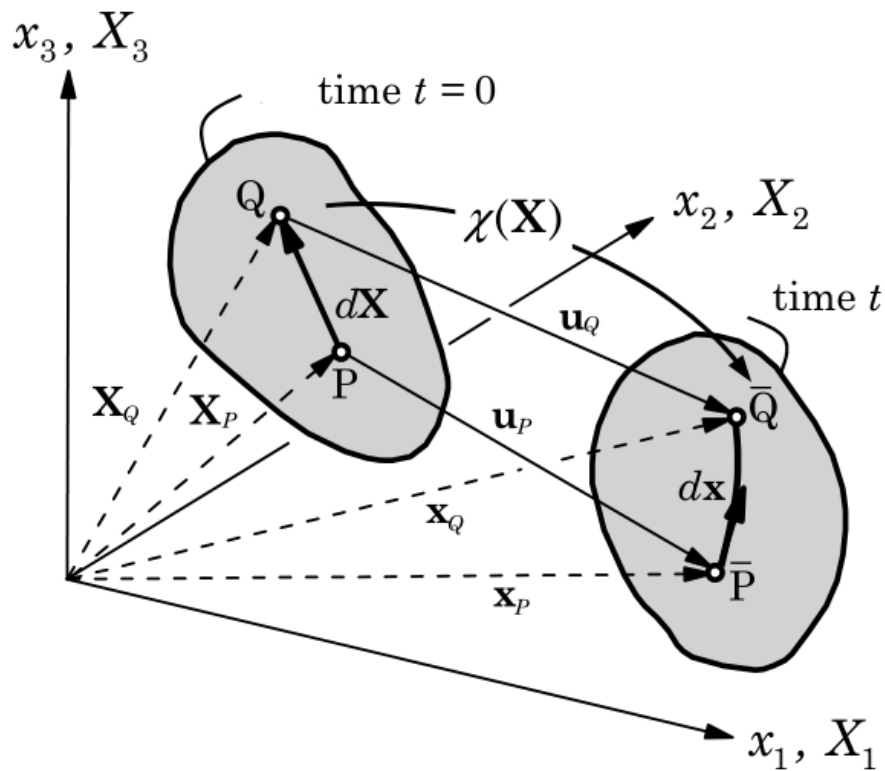
distância na configuração de referência, e ds a distância na configuração corrente, pode-se escrever a seguinte expressão

$$dS^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}, \quad (2.13)$$

e na configuração corrente,

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{X}(\mathbf{F}^T\mathbf{F})d\mathbf{X} = d\mathbf{X}\mathbf{C}d\mathbf{X}. \quad (2.14)$$

Figura 2-2: Pontos separados por uma distância na configuração de referência e configuração corrente



Fonte: (REDDY, 2013)

\mathbf{C} é chamado o tensor direito de deformações de Cauchy-Green. \mathbf{C} é um tensor simétrico de segunda ordem. O tensor esquerdo de Cauchy-Green é definido por

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^t. \quad (2.15)$$

O tensor de deformação \mathbf{E} descreve a mudança do quadrado da distância entre dois pontos (P e Q) no corpo B. O tensor \mathbf{E} está referido na configuração de referência como

$$d\mathbf{s}^2 - d\mathbf{S}^2 = 2d\mathbf{X}\mathbf{E}d\mathbf{X}, \quad (2.16)$$

e conseqüentemente,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}). \quad (2.17)$$

Na configuração corrente, o tensor de Almansi \mathbf{e} representa a deformação e é definido por

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{b}^{-1}). \quad (2.18)$$

Os tensores \mathbf{E} e \mathbf{e} se relacionam por

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T\mathbf{e}\mathbf{F}. \quad (2.19)$$

2.2 Tensores de tensão

Os tensores de tensão representam a tensão em um ponto material do corpo B, tendo cada um deles um papel na formulação de elementos finitos baseada na mecânica do contínuo, vide (REDDY, 2013).

2.2.1 Tensor tensão de Cauchy

Parte-se da fórmula de Cauchy descrita em (REDDY, 2013) a definição do vetor tensão é descrita por

$$\mathbf{t} = (\mathbf{t}_1\hat{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{t}_2\hat{\mathbf{e}}_2 + \mathbf{t}_3\hat{\mathbf{e}}_3), \quad (2.20)$$

em seguida,

$$\mathbf{t} = (\mathbf{t}_1\hat{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{t}_2\hat{\mathbf{e}}_2 + \mathbf{t}_3\hat{\mathbf{e}}_3) \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (2.21)$$

Sendo \mathbf{t} o vetor tensão, $\hat{\mathbf{n}}$ o vetor normal ao plano onde \mathbf{t} atua e o termo entre parênteses um produto díadico, o tensor tensão de Cauchy pode ser rescrito como

$$\boldsymbol{\sigma} = t_j \hat{e}_j. \quad (2.22)$$

O tensor tensão de Cauchy é definido pela força atual por unidade de área na configuração deformada.

2.2.2 Primeiro tensor de Piola-Kirchhoff

Considere um vetor força $d\mathbf{f}$, atuando em um corpo B contínuo, sujeito a uma transformação que resulte em uma mudança entre a configuração de referência e a configuração corrente. Esta força $d\mathbf{f}$ é expressa como

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}^{(n)} da = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{a}. \quad (2.23)$$

Sendo a a área deformada, \mathbf{t} a tensão e $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor tensão de Cauchy. Imagina-se uma área A não deformada, e um vetor tensão \mathbf{T} , de forma que

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}^{(n)} da = \mathbf{T}^{(N)} dA. \quad (2.24)$$

Análogo à forma como o tensor tensão de Cauchy é demonstrado, pode-se traçar um paralelo e introduzir um novo tensor, que fornece a força atual pela área não deformada. Este é definido como o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff e é escrito da seguinte forma

$$\mathbf{t}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}; \quad \mathbf{T}^{(n)} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{N}}. \quad (2.25)$$

O primeiro tensor de Piola-Kirchhoff pode ser também escrito como

$$\mathbf{P} = P_{iI} \hat{e}_i \hat{E}_I. \quad (2.26)$$

O primeiro tensor de Piola-Kirchhoff não possui simetria. Pode-se expressá-lo a partir do tensor tensão de Cauchy. Partindo de

$$d\mathbf{f} = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{a}. \quad (2.27)$$

A fórmula de Nanson descrita em (WRIGGERS, 2008), é:

$$da = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\mathbf{A} = Jd\mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{-1}. \quad (2.28)$$

Ao substituir a fórmula de Nanson na expressão (2.27), resulta-se em:

$$\mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} = \boldsymbol{\sigma} \cdot da = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot d\mathbf{A}, \quad (2.29)$$

em seguida,

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}. \quad (2.30)$$

Em geral, o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff não é simétrico, mesmo que o tensor tensão de Cauchy seja.

2.2.3 Segundo tensor de Piola-Kirchhoff

Analogamente à relação $d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x}$, pode-se estabelecer uma relação entre a força f aplicada na área deformada da e uma força F aplicada em uma área não deformada dA , resultando em:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{f}. \quad (2.31)$$

Pode-se imaginar a partir da equação do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff um outro tensor, \mathbf{S} , o segundo tensor de Piola-Kirchhoff, definido por:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}. \quad (2.32)$$

O segundo tensor de Piola-Kirchhoff define a força atual transformada por unidade de área não deformada. O segundo tensor de Piola-Kirchhoff pode ser definido a partir do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff por:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P}. \quad (2.33)$$

Consequentemente,

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}. \quad (2.34)$$

O segundo tensor de Piola-Kirchhoff apresenta a vantagem de ser simétrico.

2.3 Princípio dos trabalhos virtuais

Uma das formas pela qual as formulações do método dos elementos finitos podem ser desenvolvidas, é a partir da discretização do princípio dos trabalhos virtuais. Neste trabalho, apresenta-se as equações relevantes para o princípio dos trabalhos virtuais, desenvolvidas em (BANDEIRA, 2001) e (WRIGGERS, 2008).

A equação de equilíbrio, advinda do balanço da quantidade de movimento é dada por:

$$\text{Div } \mathbf{P}_{(uh)} + \rho_0 \bar{\mathbf{b}} - \rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0. \quad (2.35)$$

Aplicando os deslocamentos virtuais $\boldsymbol{\eta} = \{\boldsymbol{\eta} \mid \boldsymbol{\eta} = 0 \text{ em } \partial B_u\}$ e integrando sobre volume do corpo B considerado, tem-se:

$$\int_B \text{Div } \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\eta} dV_0 + \int_B \rho_0 \left(\bar{\mathbf{b}} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \cdot \boldsymbol{\eta} dV_0 = 0, \quad (2.36)$$

onde $\bar{\mathbf{b}}$ refere-se à uma força por unidade de volume, por exemplo, força gravitacional.

Utilizando-se de integração parcial do primeiro termo, da aplicação do teorema do divergente e adicionando cargas externas como condições de contorno, a equação (2.36) pode ser rescrita como

$$\int_B \mathbf{P} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\eta} dV_0 - \int_B \rho_0 \left(\bar{\mathbf{b}} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \cdot \boldsymbol{\eta} dV_0 - \int_{\partial B_\sigma} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\eta} dA_0 = 0. \quad (2.37)$$

Esta equação refere-se à configuração de referência. O objetivo desta dissertação é trabalhar com a formulação para o material Neo-Hookiano, que será representado na configuração corrente. Para utilizar a equação (2.37), é preferível modificá-la para a configuração corrente, transformando o primeiro tensor de Piola-Kirchoff no tensor de Cauchy. Logo

$$\mathbf{P} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\eta} = \mathbf{J} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\eta} = \mathbf{J} \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\eta} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{J} \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{grad } \boldsymbol{\eta}. \quad (2.38)$$

Sabe-se que as seguintes relações são válidas:

$$dv = JdV \quad e \quad \rho = J\rho_0. \quad (2.39)$$

Ao substituir as equações (2.38) e (2.39) na equação (2.37), resulta-se em:

$$\begin{aligned} w(\varphi, \boldsymbol{\eta}) = & \int_{\varphi(B)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{grad } \boldsymbol{\eta} \, dV_t \quad (2.40) \\ & - \int_{\varphi(B)} \rho_t \left(\mathbf{b} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dV_t - \int_{\varphi(\partial B\sigma)} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dA_t = 0. \end{aligned}$$

Sendo o tensor de Cauchy simétrico, ele permite que $\text{grad } \boldsymbol{\eta}$ na configuração corrente seja substituído por sua parte simétrica, portanto,

$$\boldsymbol{\nabla}^S \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2} (\text{grad } \boldsymbol{\eta} + \text{grad}^T \boldsymbol{\eta}), \quad (2.41)$$

desta forma, a equação (2.40) resulta em

$$w(\varphi, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\varphi(B)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}^S \boldsymbol{\eta} \, dV_t - \int_{\varphi(B)} \rho_t \left(\mathbf{b} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dV_t - \int_{\varphi(\partial B\sigma)} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dA_t = 0. \quad (2.42)$$

A equação (2.42) representa um equilíbrio dos trabalhos internos e externos com termos definidos na configuração corrente. O trabalho das forças internas do corpo, subtraídas do trabalho das forças de campo e das forças externas, precisa ser nula.

2.4 Equação constitutiva do material

Na equação (2.42), o primeiro termo, que representa o trabalho interno, é expresso em função do tensor de Cauchy integrado no volume. Faz-se necessário então definir o tensor de Cauchy em relação ao comportamento tensão-deformação do material modelado.

Foi adotado o modelo de material Neo-Hookiano, adequado para modelar relações não lineares de tensão deformação para grandes deformações. O sólido Neo-Hookiano é um material hiperelástico, ou seja sua relação tensão deformação é obtida através da sua função de energia de deformação. É importante notar que o modelo de material utilizado não inclui plasticidade, e que a formulação abrange apenas comportamento não-linear elástico.

A demonstração define a relação tensão deformação para o segundo tensor de Piola-Kirchhoff, e então a traz para o tensor de Cauchy por uma transformação para a configuração corrente.

Como declarado em (BANDEIRA, 2001), o segundo tensor de Piola-Kirchhoff, definido para materiais hiperelásticos, é dado pela derivada da função Ψ , que relata a energia de deformação contida no meio contínuo.

$$\mathbf{S} = 2\rho_0 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}. \quad (2.43)$$

A função de energia de deformação pode ser escrita em função dos invariantes do tensor direito de Cauchy-Green. Quando representada em função dos invariantes, a função passa a representar um material isotrópico,

$$\psi(\mathbf{C}) = \psi(\mathbf{I}_C, \mathbf{II}_C, \mathbf{III}_C) = \psi(\mathbf{I}_b, \mathbf{II}_b, \mathbf{III}_b) = \psi(\mathbf{b}). \quad (2.44)$$

Tem-se que os invariantes são dados por:

$$\mathbf{I}_C = \text{tr} \mathbf{C}, \quad \mathbf{II}_C = \frac{1}{2} (\mathbf{I}_C^2 - \mathbf{C} : \mathbf{C}), \quad \mathbf{III}_C = \det \mathbf{C} = J^2. \quad (2.45)$$

E suas derivadas por:

$$\frac{\partial \mathbf{I}_C}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial \mathbf{II}_C}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I}_C \mathbf{I} - \mathbf{C}, \quad \frac{\partial \mathbf{III}_C}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{III}_C \mathbf{C}^{-1}, \quad (2.46)$$

sendo \mathbf{I} a matriz identidade.

Ao expandir-se a equação em (2.43) pela regra da cadeia tem-se

$$\mathbf{S} = 2 \left(\frac{\partial W_d}{\partial \mathbf{I}_C} \frac{\partial \mathbf{I}_C}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W_d}{\partial \mathbf{II}_C} \frac{\partial \mathbf{II}_C}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W_d}{\partial \mathbf{III}_C} \frac{\partial \mathbf{III}_C}{\partial \mathbf{C}} \right), \quad (2.47)$$

e substituindo as derivadas dos invariantes dadas em (2.46),

$$\mathbf{S} = 2 \left[\left(\frac{\partial W_d}{\partial \mathbf{I}_C} + \mathbf{I}_C \frac{\partial W_d}{\partial \mathbf{II}_C} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial W_d}{\partial \mathbf{II}_C} \mathbf{C} + \mathbf{III}_C \frac{\partial W_d}{\partial \mathbf{III}_C} \mathbf{C}^{-1} \right]. \quad (2.48)$$

A partir de agora, seleciona-se uma equação da energia de deformação W adequada ao modelo do material estudado. Foi selecionado o modelo de material compressível de Neo-Hooke, cuja energia de deformação é dada por

$$W_d(\mathbf{I}_C, J) = g(J) + \frac{1}{2} \mu_d (\mathbf{I}_C - 3). \quad (2.49)$$

A função $g(J)$ precisa ser convexa (uma função convexa é uma função contínua, cujo valor no ponto médio de qualquer intervalo de seu domínio não exceda o valor da média aritmética do valor nos extremos do intervalo), e a função W precisa tender à $-\infty$ quando J tende a zero e $+\infty$ quando J tende ao infinito, ou seja:

$$\lim_{J \rightarrow +\infty} W_d \rightarrow +\infty \quad e \quad \lim_{J \rightarrow 0} W_d \rightarrow -\infty. \quad (2.50)$$

O Jacobiano J pode ser utilizado como uma razão entre os volumes de referência e correntes. Com J tendendo a 0, tem-se o volume do corpo tendendo a 0, enquanto que com J tendendo ao infinito, o volume do corpo tende ao infinito.

$g(J)$ é dado por:

$$g(J) = c(J^2 - 1) - d \ln J - \mu_d \ln J, \quad \text{com } c > 0 \text{ e } d > 0, \quad (2.51)$$

e as constantes c e d , definidas por

$$c = \frac{\Lambda}{4} \quad \text{e} \quad d = \frac{\Lambda}{2}. \quad (2.52)$$

Λ e μ são chamadas constantes de Lamé e são funções do módulo de elasticidade e do coeficiente de poisson do material modelado.

Reescreve-se a energia de deformação com as equações apresentadas acima, resultando em

$$W_d(\mathbf{I}_C, \mathbf{III}_C) = \frac{\Lambda}{4}(\mathbf{III}_C - 1) - \frac{\Lambda}{4} \ln \mathbf{III}_C - \frac{1}{2} \mu_d \ln \mathbf{III}_C + \frac{1}{2} \mu_d (\mathbf{I}_C - 3). \quad (2.53)$$

Substitui-se a equação (2.53) em (2.48) e simplifica-se, obtendo

$$\mathbf{S} = \frac{\Lambda}{2} (J^2 - 1) \mathbf{C}^{-1} + \mu_d (\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}). \quad (2.54)$$

Para trabalhar na configuração corrente, é necessário reescrever a equação acima para a mesma, através da relação

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T. \quad (2.55)$$

Ao substituir a (2.54) na equação acima e simplificar, obtém-se

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\Lambda}{2J} (J^2 - 1) \mathbf{I} + \frac{\mu_d}{J} (\mathbf{b} - \mathbf{I}). \quad (2.56)$$

2.5 Tensor constitutivo incremental

O tensor constitutivo incremental relaciona a derivada no tempo do segundo tensor de Piola Kirchhoff e a derivada no tempo do tensor de Cauchy. O tensor constitutivo incremental é utilizado na derivação da equação (2.42) à frente. Sua formulação é descrita em (BANDEIRA, 2001).

A formulação do tensor constitutivo incremental parte da relação constitutiva descrita em (2.43). Derivando ao longo do tempo:

$$\dot{\mathbf{S}} = 2 \frac{\partial W_d^2}{\partial \mathbf{C}} \frac{\partial W_d^2}{\partial t} = 2 \frac{\partial W_d^2}{\partial \mathbf{C}} \frac{\partial W_d^2}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{C}} \right] = 2 \frac{\partial W_d^2}{\partial \mathbf{C}} \frac{\partial W_d^2}{\partial \mathbf{C}} \left[\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} \right] = 2 \frac{\partial W_d^2}{\partial \mathbf{C}} \frac{\partial W_d^2}{\partial \mathbf{C}} \dot{\mathbf{C}}, \quad (2.57)$$

tem-se uma relação do segundo tensor de Piola-Kirchhoff e o tensor de Cauchy. Definindo o tensor constitutivo de incremental de quarta ordem por

$$\mathbb{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = 4 \frac{\partial W_d^2}{\partial \mathbf{C}} \frac{\partial W_d^2}{\partial \mathbf{C}}, \quad \mathbb{C}_{ABCD} = 4 \frac{\partial W_d^2}{\partial C_{AB}} \frac{\partial W_d^2}{\partial C_{CD}}, \quad (2.58)$$

a equação (2.57) torna-se

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbb{C} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} \right] \quad \dot{S}_{AB} = \mathbb{C}_{ABCD} \left[\frac{1}{2} \dot{C}_{CD} \right]. \quad (2.59)$$

A derivada de Lie, para um tensor $g(x, t)$ em uma base covariante, é definida segundo (WRIGGERS, 2008) por

$$\mathcal{L}_v \mathbf{g} := \mathbf{F} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{F}^{-1} \mathbf{g} \mathbf{F}^T] \right\} \mathbf{F}^T \quad (2.60)$$

e para um tensor com base contravariante por

$$\mathcal{L}_v \hat{\mathbf{g}} := \mathbf{F}^{-T} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{F}^T \hat{\mathbf{g}} \mathbf{F}] \right\} \mathbf{F}^{-1}. \quad (2.61)$$

É necessário agora reescrever a equação (2.59) para a configuração corrente. Para tanto, pode-se utilizar a derivada de Lie do tensor das tensões de Kirchhoff e a derivada no tempo do tensor direito de Cauchy-Green. Logo,

$$\mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{F} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T, \quad (2.62)$$

que é representada em notação indicial por

$$(\mathcal{L}\boldsymbol{\tau})_{ik} = F_{iA} \dot{S}_{AB} F_{kB}, \quad (2.63)$$

portanto,

$$\dot{\mathbf{C}}_{CD} = 2F_{IC}d_{Im}F_{mD}, \quad (2.64)$$

e \mathbf{d} é dado por

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{I}^T + \mathbf{I})\mathbf{F}. \quad (2.65)$$

Então a equação (2.65) pode ser reescrita na forma

$$(\mathcal{L}\tau)_{ik} = F_{iA}F_{IC}F_{mD}F_{kB}\mathbb{C}_{ABCD}d_{Im}. \quad (2.66)$$

Cada base do tensor constitutivo incremental de quarta ordem é transformada para a configuração corrente pela multiplicação do tensor \mathbb{C} ,

$$c_{iklm} = F_{iA}F_{IC}F_{mD}F_{kB}\mathbb{C}_{ABCD}. \quad (2.67)$$

Substituindo em (2.66):

$$(\mathcal{L}\tau)_{ik} = c_{iklm}d_{Im} \quad \mathcal{L}\tau = \mathbf{c}[\mathbf{d}]. \quad (2.68)$$

Em seguida, faz-se necessário achar o tensor \mathbb{C} . Partindo de (2.58), primeiro determina-se a derivada do segundo tensor de Piola-Kirchhoff em relação ao tensor de Cauchy-Green, o que resulta em

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\mathbf{C}} = \frac{\Lambda}{2} \left(J^2 \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + J^2 \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} - \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \right) + \mu_d \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}}. \quad (2.69)$$

Tem-se que:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2}J\mathbf{C}^{-1} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{C}_{AB}^{-1}}{\partial \mathbf{C}_{CD}} = -\mathbf{C}_{AC}^{-1}\mathbf{C}_{BD}^{-1}. \quad (2.70)$$

Introduz-se aqui o termo:

$$\Pi_{\mathbf{C}^{-1}ABCD} = \frac{1}{2}(\mathbf{C}_{AC}^{-1}\mathbf{C}_{BD}^{-1} + \mathbf{C}_{AD}^{-1}\mathbf{C}_{BC}^{-1}). \quad (2.71)$$

Substituindo as equações (2.70) e (2.71) em (2.69) e aplicando (2.69) em (2.58):

$$\mathbb{C} = \Lambda J^2 \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + [2\mu_d - \Lambda(J^2 - 1)]\Pi_{\mathbf{C}^{-1}}. \quad (2.72)$$

Este é o tensor constitutivo incremental para a configuração de referência. Para trabalhar na configuração corrente, é necessário trazer o tensor constitutivo incremental para a configuração corrente. Partindo de (2.72), e utilizando-se de:

$$\mathbf{C}_{AC}^{-1} \mathbf{C}_{BD}^{-1} = \mathbf{F}_{pA}^{-1} \mathbf{F}_{pC}^{-1} \mathbf{F}_{qB}^{-1} \mathbf{F}_{qD}^{-1} \mathbf{F}_{iA} \mathbf{F}_{lC} \mathbf{F}_{mD} \mathbf{F}_{kB}, \quad (2.73)$$

simplificada em (2.73),

$$\mathbf{C}_{AC}^{-1} \mathbf{C}_{BD}^{-1} = \delta_{pi} \delta_{pl} \delta_{qk} \delta_{qm} = \delta_{il} \delta_{km}, \quad (2.74)$$

resulta em:

$$\mathbf{c} = \Lambda J^2 \delta_{ik} \delta_{lm} + [2\mu_d - \Lambda(J^2 - 1)]\Pi_{iklm}. \quad (2.75)$$

Escrevendo (2.75) em notação tensorial, obtém-se:

$$\mathbf{c} = \Lambda J^2 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + [2\mu_d - \Lambda(J^2 - 1)]\Pi, \quad (2.76)$$

sendo \mathbf{I} e Π os tensores unitários de segunda ordem e de quarta ordem, respectivamente. A notação indicial do tensor Π é dada por:

$$\Pi_{iklm} = \frac{1}{2} (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}). \quad (2.77)$$

Para a resolução numérica via o método dos elementos finitos, é ideal que se escreva a equação (2.76) em notação matricial. Aproveitando-se da simetria do tensor de Kirchhoff, pode-se representá-lo como um vetor, e o tensor \mathbf{c} como uma matriz 6x6:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_v \tau_{11} \\ \mathcal{L}_v \tau_{22} \\ \mathcal{L}_v \tau_{33} \\ \mathcal{L}_v \tau_{12} \\ \mathcal{L}_v \tau_{23} \\ \mathcal{L}_v \tau_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu + \Lambda & \Lambda J^2 & \Lambda J^2 & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda J^2 & 2\mu + \Lambda & \Lambda J^2 & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda J^2 & \Lambda J^2 & 2\mu + \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{22} \\ d_{33} \\ 2d_{12} \\ 2d_{23} \\ 2d_{31} \end{bmatrix}, \quad (2.78)$$

sendo α definido por:

$$\alpha = \mu_d - \frac{\Lambda}{2}(J^2 - 1). \quad (2.79)$$

2.6 Linearização

Para a resolução da equação (2.42) numericamente, é necessário um método iterativo de resolução de equações. Foi escolhido o método de Newton-Raphson que exige a derivada das equações envolvidas.

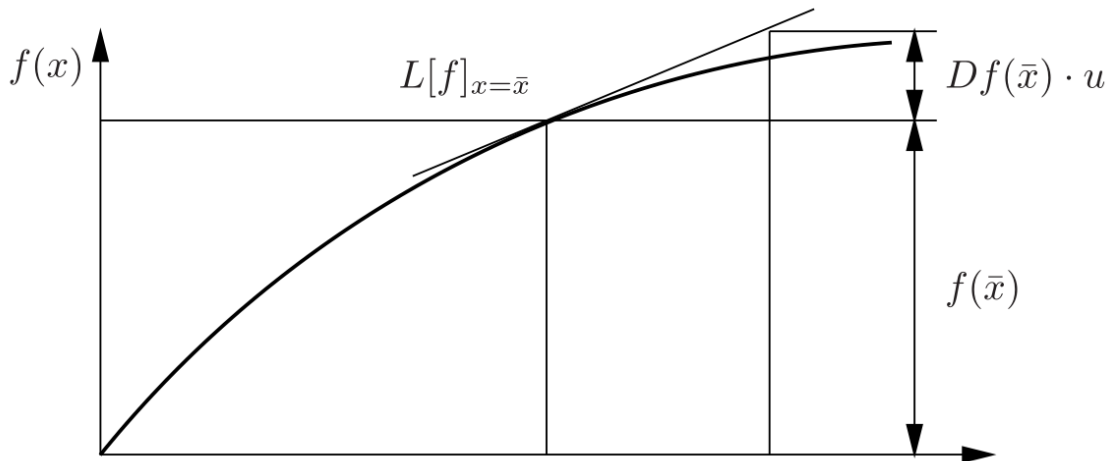
O processo de Linearização fornece a derivada direcional da função linearizada, que no caso dos elementos finitos resolvidos com o método de Newton-Raphson, compõe a matriz de rigidez K .

Assumindo uma função f qualquer, definida em R , com sua primeira derivada contínua, pode-se fazer uma expansão de f em série de Taylor no ponto \bar{x} ,

$$f(\bar{x} + u) = \bar{f} + \bar{D}f \cdot u + R, \quad (2.80)$$

sendo $\bar{f} = f(\bar{x})$ e $\bar{D}f = Df(\bar{x})$. D denota a derivada de f em relação à x , e o operador \cdot por enquanto sinaliza apenas uma multiplicação. u é o incremento, e R é o resíduo, que tende a zero se u for pequeno o suficiente.

Figura 2-3: Linearização da função f



Fonte 1: (WRIGGERS, 2008)

$$f(u) = \bar{f} + \bar{D}f \cdot u. \quad (2.81)$$

$f(u)$ é uma reta tangente à curva no $f(\bar{x})$ no ponto $(\bar{x}, f(\bar{x}))$, sendo esta a definição da parte linear de $f(x)$ quando $x = \bar{x}$. Então,

$$L[f]_{x=\bar{x}} \equiv f(u). \quad (2.82)$$

Pode-se expandir esta definição para um espaço \mathbb{R}^3 . Para tanto, trazemos os termos descritos para seu equivalente espacial. \bar{x} continua sendo um ponto, entretanto definido no espaço \mathbb{R}^3 . u torna-se um vetor com sua origem em \bar{x} , e tem-se que

$$\bar{f} = f(\bar{\mathbf{x}}) \quad \bar{D}f = Df(\bar{\mathbf{x}}) = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}, \quad (2.83)$$

sendo $\bar{D}f$ a derivada de $f(x)$ em relação ao ponto x .

x é representado por três coordenadas pois está no espaço \mathbb{R}^3 , então $\bar{D}f$ torna-se o gradiente de \bar{f} . O operador \cdot simboliza um produto escalar entre dois vetores. Tem-se então

$$f(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{u}) = \bar{f} + \text{Grad } f(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{u} + R. \quad (2.84)$$

A derivada direcional de uma função f com múltiplas variáveis representa a taxa da mudança da função ao longo de um dado vetor \mathbf{u} , em um ponto no espaço \mathbf{x} , por exemplo, em \mathbb{R}^3 , \mathbf{x} é dado por (x_1, x_2, x_3) . A definição da derivada direcional da função f no ponto $\bar{\mathbf{x}}$, na direção do vetor \mathbf{u} é definida por

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} [f(\bar{\mathbf{x}} + \epsilon \mathbf{u})] \right|_{\epsilon=0}. \quad (2.85)$$

Pela regra da cadeia, expande-se (2.85) para:

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} [f(\bar{\mathbf{x}} + \epsilon \mathbf{u})] \right|_{\epsilon=0} = \left[\frac{\partial f(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial (\bar{\mathbf{x}} + \epsilon \mathbf{u})}{\partial \epsilon} \right]_{\epsilon=0} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}. \quad (2.86)$$

Comparando o resultado da eq. acima com (2.83), infere-se:

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} [f(\bar{\mathbf{x}} + \epsilon \mathbf{u})] \right|_{\epsilon=0} = \bar{D}f \cdot \mathbf{u}. \quad (2.87)$$

Verifica-se que a função f linearizada é dada pelo valor de f em $\bar{\mathbf{x}}$, mais a sua derivada direcional no mesmo ponto. Então:

$$\mathbf{L}[\mathbf{G}]_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{G}} + \Delta \bar{\mathbf{G}}. \quad (2.88)$$

Na forma generalizada, o operador \cdot é o produto interno associado com os elementos do espaço. $\Delta \bar{\mathbf{G}}$ é utilizado no lugar de $\bar{D}\mathbf{G} \cdot \mathbf{u}$ para encurtar a notação, e a barra sobre $\bar{\mathbf{G}}$ indica que toma-se o valor de \mathbf{G} no ponto $\bar{\mathbf{x}}$.

2.7 Linearização da formulação variacional

Como demonstrado em (BANDEIRA, 2001) e (WRIGGERS, 2008), segue-se com a linearização da equação (2.42) para sua utilização na construção da matriz de rigidez.

A princípio, faz-se a linearização da equação (2.37) escrita na configuração de referência, para depois trazê-la para a configuração corrente. A linearização é registrada para um estado de deformação do corpo que se encontra em equilíbrio, denotado por $\bar{\varphi}$.

$$L[G]_{\varphi=\bar{\varphi}} = G(\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{\eta}) + DG(\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{\eta}) \cdot \Delta \mathbf{u}. \quad (2.89)$$

Partindo de (2.37), que é a formulação variacional fraca referenciada na configuração de referência, desprezando os termos de inércia. Ao desprezar-se os termos de inércia, torna-se a análise válida apenas para carregamentos quase-estáticos, impossibilitando seu uso para análises dinâmicas. Tem-se então,

$$G(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\eta}) = \int_B \mathbf{P} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\eta} dV_0 - \int_{\partial B_\sigma} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\eta} dA_0. \quad (2.90)$$

A derivada direcional na direção de $\Delta \mathbf{u}$, considerando os carregamentos concentrados como conservativos é dada por:

$$DG(\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{\eta}) \cdot \Delta \mathbf{u} = \int_B [D\mathbf{P}(\bar{\boldsymbol{\varphi}}) \cdot \Delta \mathbf{u}] \text{Grad } \boldsymbol{\eta} dV. \quad (2.91)$$

Substituindo $\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}$, e derivando pela regra do produto obtém-se:

$$DG(\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{\eta}) \cdot \Delta \mathbf{u} = \int_B \{\text{Grad } \Delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{S}} + \mathbf{F}[D\mathbf{S}(\bar{\boldsymbol{\varphi}}) \cdot \Delta \mathbf{u}]\} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\eta} dV. \quad (2.92)$$

O termo $\Delta \bar{\mathbf{S}}$ é dada por (WRIGGERS, 2008):

$$\Delta \bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbb{C}}[\Delta \bar{\mathbf{E}}]. \quad (2.93)$$

Substituindo, obtém-se:

$$DG(\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{\eta}) \cdot \Delta \mathbf{u} = \int_B \{\text{Grad } \Delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbb{C}}[\Delta \bar{\mathbf{E}}]\} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\eta} dV, \quad (2.94)$$

e dada a simetria de $\bar{\mathbb{C}}$ e a operação do traço, a expressão acima resulta em

$$DG(\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{\eta}) \cdot \Delta \mathbf{u} = \int_B \{ \text{Grad } \Delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{S}} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\eta} + \delta \mathbf{E} \cdot \mathbb{C}[\Delta \mathbf{E}] \} dV. \quad (2.95)$$

A equação (2.95) é escrita na configuração de referência, e deseja-se reescrevê-la na configuração corrente. Para tanto, utiliza-se de relações que trazem os termos que compõem a equação (2.95) da configuração de referência para a configuração corrente e os substitui na equação (2.95). Em seguida, transforma-se o limite de integração.

Do segundo termo de (2.95):

$$\int_B \delta \mathbf{E} \cdot \mathbb{C}[\Delta \mathbf{E}] dV. \quad (2.96)$$

O termo $\Delta \bar{\mathbf{E}}$ está definido em (WRIGGERS, 2008) por

$$\Delta \bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{F}}^T \nabla_{\bar{\mathbf{x}}}^S \Delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{F}}. \quad (2.97)$$

Utilizando de (2.97), substitui-se em (2.96), obtendo

$$\int_B \delta \mathbf{E} \cdot \mathbb{C}[\Delta \mathbf{E}] dV = \int_B \bar{\mathbf{F}}^T \nabla^S \boldsymbol{\eta} \bar{\mathbf{F}} \cdot \mathbb{C}[\bar{\mathbf{F}}^T \bar{\nabla}^S \Delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{F}}] dV. \quad (2.98)$$

Substituindo o tensor constitutivo incremental na configuração corrente definido em (2.67) no lado direito da equação (2.98), tem-se

$$\int_B \delta \mathbf{E} \cdot \mathbb{C}[\Delta \mathbf{E}] dV = \int_B \nabla^S \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{c}[\bar{\nabla}^S \Delta \mathbf{u}] dV. \quad (2.99)$$

Para o primeiro termo da equação (2.95), necessita-se trazer o segundo tensor de Piola Kirchhoff para a configuração corrente, então,

$$\text{Grad } \Delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{S}} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\eta} = \text{Grad } \Delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{F}}^{-1} \bar{\boldsymbol{\tau}} \bar{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\eta} = \overline{\text{grad}} \Delta \mathbf{u} \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \overline{\text{grad}} \boldsymbol{\eta}. \quad (2.100)$$

Segue-se:

$$DG(\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{\eta}) \cdot \Delta \mathbf{u} = \int_B \{ \overline{\text{grad}} \Delta \mathbf{u} \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \overline{\text{grad}} \boldsymbol{\eta} + \nabla^S \boldsymbol{\eta} \cdot \bar{\mathbf{c}}[\bar{\nabla}^S \Delta \mathbf{u}] \} dV. \quad (2.101)$$

Finalmente, altera-se os limites de integração. A integração antes realizada no volume do corpo na configuração de referência é realizada na configuração corrente. Utiliza-se a relação entre o tensor de Kirchhoff-Trefftz e o tensor de Cauchy, e a relação entre a área e volume do sólido

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{FSF}^T = J\boldsymbol{\sigma} \quad dV_t = \frac{\rho_0}{\rho_t} dV_0 = JdV_0, \quad (2.102)$$

e a seguinte relação,

$$\hat{\mathbf{c}} = \frac{1}{J} \bar{\mathbf{c}}, \quad (2.103)$$

obtendo

$$DG(\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{\eta}) \cdot \Delta \mathbf{u} = \int_{\varphi(B)} \{ \overline{\text{grad}} \Delta \mathbf{u} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \overline{\text{grad}} \boldsymbol{\eta} + \nabla^S \boldsymbol{\eta} \cdot \hat{\mathbf{c}}[\bar{\nabla}^S \Delta \mathbf{u}] \} dV. \quad (2.104)$$

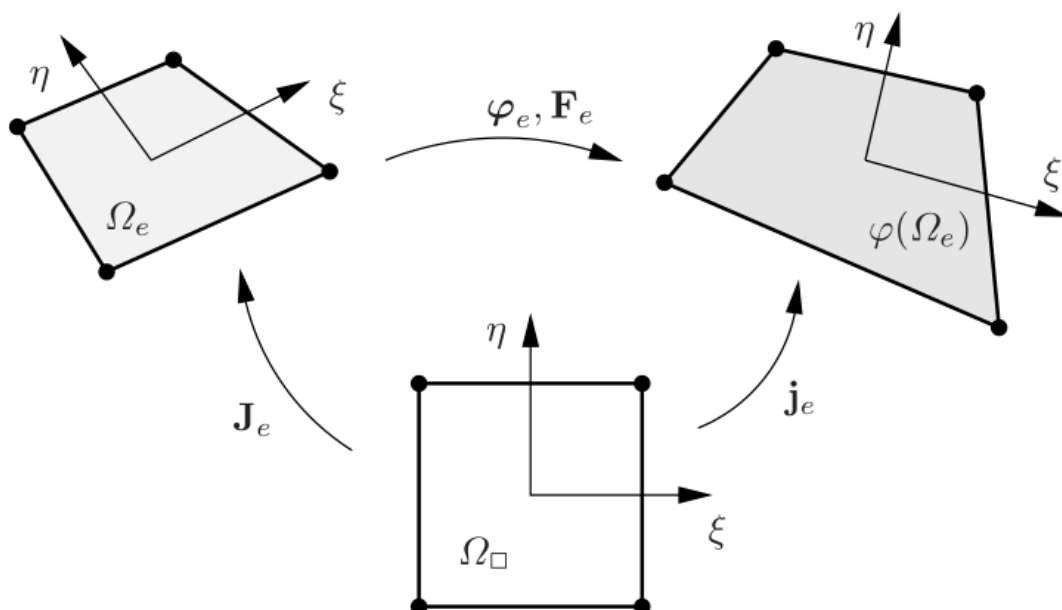
3 Método dos Elementos Finitos

Foram apresentados nos capítulos anteriores as formulações matemáticas para o comportamento de um sólido sujeito a grandes deformações em regime elástico não linear desenvolvidas em (BANDEIRA, 2001) e (WRIGGERS, 2006).

Neste capítulo, realiza-se a discretização em elementos finitos das formulações apresentadas anteriormente, utilizando-se da concepção isoparamétrica. O elemento utilizado é o hexaedro de oito nós, com 3 graus de liberdade de translação por nó, e funções de interpolação Lagrangeanas. Mais detalhes a respeito do método dos elementos finitos podem ser encontrados em (ZIENKIEWICZ, TAYLOR e ZHU, 2005) e (BATHE, 1996).

O elemento isoparamétrico tem uma forma de referência onde ele apresenta-se regular, sem deformação, simbolizada por Ω_r . Ao ser utilizado para mapear um corpo B, este elemento sofre modificações para melhor se adequar à geometria do corpo aproximado, antes de qualquer deformação acontecer. Este é o elemento Ω_e , na configuração de referência. Finalmente, após sofrer as deformações decorrentes das forças aplicadas, o elemento passa para a configuração corrente $\varphi(\Omega_e)$. Estas transformações podem ser observadas na Figura 3-1.

Figura 3-1: Descrição isoparamétrica das deformações e suas transformações



Fonte: (WRIGGERS, 2008)

A passagem da configuração de referência para a configuração corrente é feita a partir do gradiente de deformações \mathbf{F}_e ,

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{j}_e \mathbf{J}_e^{-1} \quad \text{e} \quad \mathbf{J}_e = \det \mathbf{F}_e = \frac{\det \mathbf{j}_e}{\det \mathbf{J}_e}. \quad (3.1)$$

Os gradientes \mathbf{j}_e e \mathbf{J}_e são definidos na formulação dos elementos isoparamétricos e são uma determinação da mudança das coordenadas isoparamétricas ξ, η, ζ , para as coordenadas globais x, y, z . Logo

$$\mathbf{j}_e = \sum_{I=1}^n \mathbf{x}_I \otimes N_{i,\xi}(\xi) \mathbf{E}_\xi = \sum_{I=1}^n \mathbf{x}_I \otimes \nabla_\xi N_I, \quad (3.2)$$

e

$$\mathbf{J}_e = \sum_{I=1}^n \mathbf{X}_I \otimes N_{i,\xi}(\xi) \mathbf{E}_\xi = \sum_{I=1}^n \mathbf{X}_I \otimes \nabla_\xi N_I. \quad (3.3)$$

Na forma matricial,

$$\mathbf{j}_e = \sum_{I=1}^n \mathbf{x}_I \otimes \nabla_\xi N_I = \sum_{I=1}^n \begin{bmatrix} x_{1,I} \\ x_{2,I} \\ x_{3,I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{I,\xi} \\ N_{I,\eta} \\ N_{I,\zeta} \end{bmatrix}^T = \sum_{I=1}^n \begin{bmatrix} x_{1,\xi} & x_{1,\eta} & x_{1,\zeta} \\ x_{2,\xi} & x_{2,\eta} & x_{2,\zeta} \\ x_{3,\xi} & x_{3,\eta} & x_{3,\zeta} \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

sendo $\nabla_\xi N_I$ o gradiente da função escalar N_I em relação à coordenada ξ .

Os gradientes do campo vetorial deslocamento podem ser dados por

$$\text{Grad } \mathbf{u}_e = \sum_{I=1}^n \mathbf{u}_I \otimes \nabla_X N_I, \quad (3.5)$$

e

$$\text{grad } \mathbf{u}_e = \sum_{I=1}^n \mathbf{u}_I \otimes \nabla_x N_I. \quad (3.6)$$

Considerando

$$\nabla_{\xi} N_I = \mathbf{J}_e^T \nabla_X N_I \quad \text{e} \quad \nabla_{\xi} N_I = \mathbf{j}_e^T \nabla_x N_I, \quad (3.7)$$

e também

$$\nabla_X N_I = \mathbf{J}_e^{-T} \nabla_{\xi} N_I \quad \text{e} \quad \nabla_x N_I = \mathbf{j}_e^{-T} \nabla_{\xi} N_I, \quad (3.8)$$

substituindo a relação direta, obtém-se:

$$\text{Grad } \mathbf{u}_e = \sum_{I=1}^n \mathbf{u}_I \otimes \mathbf{J}_e^{-T} \nabla_{\xi} N_I \quad \text{e} \quad \text{grad } \mathbf{u}_e = \sum_{I=1}^n \mathbf{u}_I \otimes \mathbf{j}_e^{-T} \nabla_{\xi} N_I. \quad (3.9)$$

Que definem os gradientes dos deslocamentos na configuração isoparamétrica.

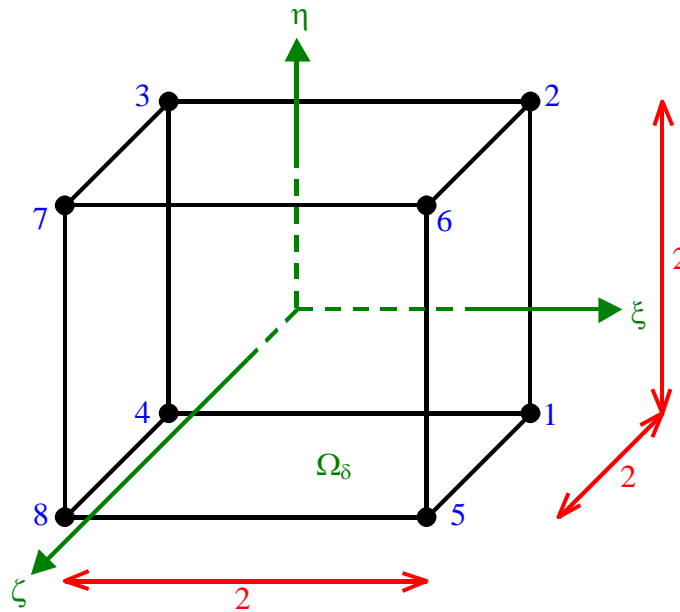
3.1 Funções de Interpolação

Para o elemento escolhido, o hexaedro isoparamétrico de 8 nós, as funções de interpolação são dadas por:

$$N_I = \frac{1}{8} (1 + \xi_I \xi) (1 + \eta_I \eta) (1 + \zeta_I \zeta). \quad (3.10)$$

As coordenadas ξ_I, η_I, ζ_I , são dadas de acordo com a posição do nó I , no elemento isoparamétrico exemplificado na Figura 3-3, seus valores correspondendo a -1 ou +1.

Figura 3-2: Elemento hexaédrico de 8 nós



Fonte: (BANDEIRA, 2001)

3.2 Discretização da forma fraca da mecânica do contínuo

Nesta seção, realiza-se a discretização da equação (2.42) e sua linearização dada em (2.104) para o elemento finito isoparamétrico hexaédrico de 8 nós previamente apresentado.

3.2.1 Formulação de elementos finitos para configuração corrente

A equação do princípio dos trabalhos virtuais escrita na configuração corrente é dada por (2.42). O segundo termo da equação refere-se às forças de inércia, que no caso de uma aplicação de forças de forma quase estática, é nulo. Portanto a equação se reduz à

$$w(\varphi, \eta) = \int_{\varphi(B)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla^S \boldsymbol{\eta} dV_t - \int_{\varphi(\partial B\sigma)} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\eta} dA_t = 0. \quad (3.11)$$

Para realizar a discretização da medida de deformação $\nabla^S \boldsymbol{\eta}$, aplica-se (2.41), (3.5) e (3.6), obtendo

$$\nabla^S \boldsymbol{\eta}_e = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^n [(\boldsymbol{\eta}_I \otimes \nabla_x N_I) + (\nabla_x \otimes N_I \boldsymbol{\eta}_I)]. \quad (3.12)$$

Usando a notação indicial, tem-se

$$(\nabla^S \boldsymbol{\eta}_e)_{im} = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^n [\eta_{iI} N_{I,m} + N_{i,I} \eta_{mI}]. \quad (3.13)$$

$N_{I,k} = \partial N_I / \partial x_k$ é a derivada parcial da função de interpolação referente a coordenada corrente x_k , que pode ser calculada a partir de (3.8), resultando em

$$N_{I,k} = \{j_e^{-1}\}_{1k} N_{I,\xi} + \{j_e^{-1}\}_{2k} N_{I,\eta} + \{j_e^{-1}\}_{3k} N_{I,\zeta}. \quad (3.14)$$

Sendo $\{j_e^{-1}\}_{Ik}$ os componentes da matriz inversa do jacobiano \mathbf{j}_e . Escrevendo (3.13) em forma de vetor, obtém-se

$$\nabla^S \boldsymbol{\eta}^h = \{\eta_{1,1}, \eta_{2,2}, \eta_{3,3}, (\eta_{1,2} + \eta_{2,1}), (\eta_{2,3} + \eta_{3,2}), (\eta_{1,3} + \eta_{3,1})\}, \quad (3.15)$$

e na forma matricial,

$$\nabla^S \boldsymbol{\eta}^h = \sum_{I=1}^n \begin{bmatrix} N_{I,1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{I,2} & 0 \\ 0 & 0 & N_{I,3} \\ N_{I,2} & N_{I,1} & 0 \\ 0 & N_{I,3} & N_{I,2} \\ N_{I,3} & 0 & N_{I,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^n \mathbf{B}_{0I} \boldsymbol{\eta}_I. \quad (3.16)$$

Nenhum dos termos na matriz acima depende do campo dos deslocamentos.

O tensor das tensões de Cauchy é simétrico, sendo representado por uma matriz 3x3. Sendo uma matriz 3x3 simétrica, o tensor possui os elementos σ_{12} , σ_{13} , σ_{23} com valor igual aos elementos σ_{21} , σ_{31} , σ_{32} . Assim sendo, ele pode ser representado por um vetor com 6 elementos:

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}\}^T. \quad (3.17)$$

Então, a partir dos deslocamentos virtuais e do tensor das tensões de Cauchy, pode-se escrever a seguinte relação

$$\int_{\varphi(B)} \nabla^S \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}^h dV_t = \bigcup_{e=1}^{n_e} \int_{\varphi(\Omega_e)} (\nabla^S \boldsymbol{\eta})^T \boldsymbol{\sigma}^h d\omega, \quad (3.18)$$

substituindo (3.16),

$$\bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^n \eta_I^T \int_{\varphi(\Omega_e)} \mathbf{B}_{0I}^T \boldsymbol{\sigma} d\omega, \quad (3.19)$$

e reescrevendo para a configuração do elemento de referência,

$$\bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^n \eta_I^T \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{0I}^T \boldsymbol{\sigma} \det \mathbf{j}_e d\omega. \quad (3.20)$$

O termo \mathbf{j}_e realiza a transformação da configuração corrente para a configuração do elemento de referência. Esta relação pode ser lembrada na figura 3-2. Fazendo

$$\mathbf{r}_I(\mathbf{u}_e) = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{0I}^T \boldsymbol{\sigma} d\omega, \quad (3.21)$$

Pode-se representar o trabalho interno por

$$\int_{\varphi(B)} \nabla^S \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma} dV_t = \bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^n \eta_I^T \mathbf{r}_I(\mathbf{u}_e) = \boldsymbol{\eta}_I^T \mathbf{r}_{int}(\mathbf{u}). \quad (3.22)$$

Para transformar a integral apresentada acima da configuração corrente para a configuração de referência, executa-se a transformação do elemento de volume $dV_t = J V_0$ e do tensor das tensões de cauchy $\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}$, ou seja,

$$\int_{\varphi(B)} \nabla^S \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma} dV_t = \int_B \nabla^S \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\tau} dV_0, \quad (3.23)$$

desenvolvendo o lado direito da equação acima para a forma discretizada,

$$\int_B \nabla^S \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\tau} dV_0 = \bigcup_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} (\nabla^S \boldsymbol{\eta})^T \boldsymbol{\tau} d\Omega, \quad (3.24)$$

substituindo (3.16) no lado direito da equação acima,

$$\bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^n \eta_I^T \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{0I}^T \boldsymbol{\tau} d\Omega, \quad (3.25)$$

e trazendo o limite de integração para o elemento isoparamétrico,

$$\bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^n \eta_I^T \int_{\Omega_\pi} \mathbf{B}_{0I}^T \boldsymbol{\tau} \det \mathbf{J}_e d\pi. \quad (3.26)$$

O vetor relacionado ao trabalho virtual interno se apresenta por

$$\mathbf{r}_I(\mathbf{u}_e) = \int_{\Omega_\pi} \mathbf{B}_{0I}^T \boldsymbol{\tau} \det \mathbf{J}_e d\pi. \quad (3.27)$$

Considerando uma análise quase estática, pode-se desprezar os termos de inércia, então

$$\boldsymbol{\eta}^T [\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{P}] = 0, \quad (3.28)$$

que torna-se

$$\boldsymbol{\eta}^T[\mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{P}] = 0, \quad (3.29)$$

que se reduz a

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{P} = 0. \quad (3.30)$$

Que é um sistema de equações não lineares com os deslocamentos nodais \mathbf{u} como incógnitas.

3.3 Linearização do trabalho virtual

A equação linearizada do princípio dos trabalhos virtuais precisa ser discretizada em elementos finitos. A equação mostrada em (BANDEIRA, 2001) é definida por:

$$DG(\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{\eta}) \cdot \Delta \mathbf{u} = \int_{\varphi(B)} \{ \overline{\text{grad}} \Delta \mathbf{u} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \overline{\text{grad}} \boldsymbol{\eta} + \nabla^S \boldsymbol{\eta} \cdot \hat{\mathbf{c}}[\bar{\nabla}^S \Delta \mathbf{u}] \} dV. \quad (3.31)$$

Separando em duas partes a expressão (3.31) e analisando inicialmente a primeira parte, define-se os seguintes gradientes

$$\overline{\text{grad}} \Delta \mathbf{u}^h = \sum_{K=1}^n \Delta \mathbf{u}_K \otimes \bar{\nabla}_x N_K \quad (3.32)$$

e

$$\overline{\text{grad}} \boldsymbol{\eta}^h = \sum_{I=1}^n \boldsymbol{\eta}_I \otimes \bar{\nabla}_x N_I. \quad (3.33)$$

Substituindo os gradientes definidos acima na primeira parte de (3.31), resulta em

$$\int_{\varphi(\mathbb{B})} \overline{\text{grad}} \Delta \mathbf{u} \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \overline{\text{grad}} \boldsymbol{\eta} \, dV_t \quad (3.34)$$

$$= \bigcup_{e=1}^{ne} \sum_{l=1}^n \sum_{K=1}^n \int_{\varphi(\Omega_e)} (\Delta \mathbf{u}_K \otimes \bar{\nabla}_K N_K) \overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\Delta \boldsymbol{\eta}_l \otimes \bar{\nabla}_x N_l) \, d\Omega.$$

Fazendo o produto escalar e simplificando a notação

$$\int_{\varphi(\mathbb{B})} \overline{\text{grad}} \Delta \mathbf{u} \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \overline{\text{grad}} \boldsymbol{\eta} \, dV_t = \bigcup_{e=1}^{ne} \sum_{l=1}^n \sum_{K=1}^n \eta_l^T \int_{\varphi(\Omega_e)} \bar{g}_{IK} \mathbf{I} \, d\Omega \Delta \mathbf{u}_K, \quad (3.35)$$

sendo \bar{g}_{IK} definido por:

$$\bar{g}_{IK} = (\bar{\nabla}_x N_l)^T \overline{\boldsymbol{\sigma}} \bar{\nabla}_x N_K. \quad (3.36)$$

Escrevendo a expressão acima na forma matricial, tem-se

$$\bar{g}_{IK} = [\bar{N}_{l,1} \quad \bar{N}_{l,2} \quad \bar{N}_{l,3}] \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11} & \bar{\sigma}_{12} & \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{21} & \bar{\sigma}_{22} & \bar{\sigma}_{23} \\ \bar{\sigma}_{31} & \bar{\sigma}_{32} & \bar{\sigma}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{N}_{K,1} \\ \bar{N}_{K,2} \\ \bar{N}_{K,3} \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Em seguida analisa-se a segunda parte da equação (3.31). Utilizando-se das relações (2.97) e (3.16), esta pode ser escrita como:

$$\int_{\varphi(\bar{\mathbb{B}})} \nabla^S \boldsymbol{\eta} \cdot \hat{\mathbf{c}}[\bar{\nabla}^S \Delta \mathbf{u}] \, dV = \bigcup_{e=1}^{ne} \sum_{l=1}^n \sum_{K=1}^n \eta_l^T \int_{\varphi(\Omega_e)} \bar{\mathbf{B}}_{0l}^T \bar{\mathbf{D}}^M \bar{\mathbf{B}}_{0K} \, d\Omega \Delta \mathbf{u}_K. \quad (3.38)$$

Substituindo de novo em (3.31):

$$\int_{\varphi(\bar{\mathbb{B}})} \{ \overline{\text{grad}} \Delta \mathbf{u} \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \overline{\text{grad}} \boldsymbol{\eta} + \nabla^S \boldsymbol{\eta} \cdot \hat{\mathbf{c}}[\bar{\nabla}^S \Delta \mathbf{u}] \} \, dV = \bigcup_{e=1}^{ne} \sum_{l=1}^n \sum_{K=1}^n \eta_l^T \bar{\mathbf{K}}_{TIK}^M \Delta \mathbf{u}_K, \quad (3.39)$$

onde K_{TIK}^M é a matriz tangente na configuração corrente

$$\bar{K}_{TIK}^M = \int_{\varphi(\Omega_e)} \{(\bar{\nabla}_x N_I)^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} \bar{\nabla}_x N_K \mathbf{I} + \bar{\mathbf{B}}_{0I}^T \bar{\mathbf{D}}^M \bar{\mathbf{B}}_{0K}\} d\omega. \quad (3.40)$$

Mudando os limites de integração da configuração corrente para o elemento isoparamétrico, obtém-se:

$$\int_B \{\overline{\text{grad}} \Delta \mathbf{u} \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \overline{\text{grad}} \boldsymbol{\eta} + \nabla^S \boldsymbol{\eta} \cdot \hat{\mathbf{c}}[\bar{\nabla}^S \Delta \mathbf{u}]\} dV = \bigcup_{e=1}^{ne} \sum_{I=1}^n \sum_{K=1}^n \eta_I^T \bar{K}_{TIK}^{MR} \Delta u_K \quad (3.41)$$

com \bar{K}_{TIK}^{MR} definido por

$$\bar{K}_{TIK}^{MR} = \int_{\Omega_e} \{(\bar{\nabla}_x N_I)^T \bar{\boldsymbol{\tau}} \bar{\nabla}_x N_K \mathbf{I} + \bar{\mathbf{B}}_{0I}^T \bar{\mathbf{D}}^{MR} \bar{\mathbf{B}}_{0K}\} d\Omega, \quad (3.42)$$

onde $\bar{\mathbf{D}}^{MR}$ é o tensor constitutivo incremental para o material Neo-Hookiano.

4 Contato

Em elementos finitos, o contato entre dois ou mais corpos é configurado quando há a penetração de um corpo em outro, ou seja, quando têm-se dois (ou mais) pontos pertencentes à diferentes corpos ocupando a mesma posição espacial.

A formulação de contato envolve a adição de restrições nas regiões dos corpos onde se espera contato, de forma a impedir a penetração dos corpos. Estas restrições podem ser determinadas na simulação em elementos finitos a partir do método do Lagrangiano, da penalidade e do Lagrangiano Aumentado. Um detalhamento destes métodos pode ser observado em (BERTSEKAS, 1995), (FLETCHER, 1980) e (LUENBERGER, 1984).

Estas restrições são ativadas apenas se o contato ocorrer, então existe a necessidade de um algoritmo para a detecção do contato, para que ativem-se as restrições, como visto em (WRIGGERS, 2006).

4.1 Formulação do Lagrangiano aumentado

Entre os métodos mencionados, o método escolhido para ser utilizado é o método do Lagrangiano aumentado. Este método será apresentado, após uma breve revisão do método do Lagrangiano e da penalidade, que baseiam o Lagrangiano aumentado.

O método do Lagrangiano consiste na adição de um parâmetro λ desconhecido equivalente à reação na restrição, que necessita ser calculado junto com os deslocamentos do sistema.

O método da penalidade consiste em estabelecer uma restrição, e medir qualquer violação desta restrição que venha a ocorrer. Na existência de uma violação de restrição, multiplica-se a mesma por um termo constante ϵ , chamado penalidade. Este produto então pode ser considerado a força de contato.

Ambos os métodos apresentam desvantagens. O método do Lagrangiano adiciona variáveis desconhecidas ao sistema (um multiplicador de Lagrange para cada nó restrito), e com isto, pode tornar a matriz de rigidez não simétrica e/ou singular, o que torna inviável o uso deste método para sua resolução.

O método da penalidade requer do usuário uma estimativa inicial do termo da penalidade, pois diferentes casos podem requerer valores diferentes, e para valores usualmente altos do termo penalidade, pode-se causar instabilidade numérica. (WRIGGERS, SIMO e TAYLOR, 1985)

O método do Lagrangiano aumentado consiste na combinação de ambos os métodos de forma a mitigar estas desvantagens, ao custo do aumento da complexidade de implementação numérica. Outra desvantagem, é que processo externo de atualização dos multiplicadores de Lagrange característico do Lagrangiano aumentado oferece apenas convergência linear.

No Lagrangiano aumentado, como no Lagrangiano, existe um parâmetro λ , equivalente à reação na restrição, entretanto este parâmetro λ , não é calculado como uma incógnita junto aos deslocamentos. É dado um palpite inicial para λ , de forma a tratá-lo como uma constante durante as iterações para cálculo dos deslocamentos.

Após o cálculo dos deslocamentos, verifica-se se as restrições foram respeitadas. Caso as restrições não tenham sido respeitadas, atualiza-se o valor de λ , fazendo $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \epsilon g(x)$, onde ϵ é o parâmetro da penalidade, e $g(x)$ uma função de valor igual à violação da restrição. Após a atualização, repete-se o cálculo dos deslocamentos com os novos valores de λ .

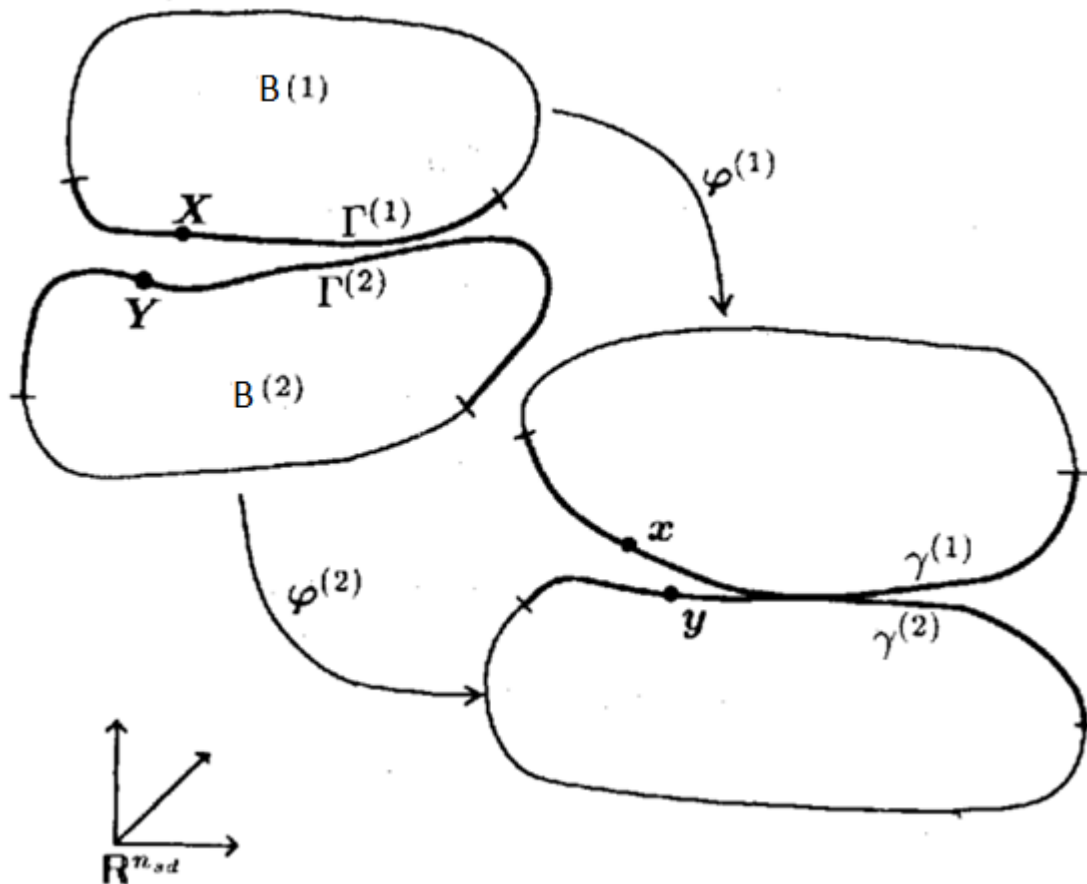
Ao aproximar-se da convergência (caso haja convergência), a violação da restrição dada por $g(x)$ tenderá a 0, portanto $\epsilon_N g(x) \rightarrow 0$, e o valor de λ tenderá ao valor real da reação na restrição. (BANDEIRA, GUIMARÃES, *et al.*, 2010)

Para o termo da penalidade utilizado no Lagrangiano aumentado, deve ser escolhido o valor máximo que não cause instabilidade numérica. Assim como no método da penalidade, quanto maior o valor do termo penalidade, maior a convergência de λ_N . Entretanto o método permite uma maior flexibilidade quanto ao valor do termo penalidade utilizado, pois a atualização do termo λ_N gera uma compensação para um termo penalidade insuficiente.

4.2 Tensões de contato utilizando o Lagrangiano Aumentado com atrito

Passando ao problema de dois corpos deformáveis, demonstrado em (SIMO e LAURSEN, 1993), definem-se por B_1 e B_2 como o conjunto de pontos X , na configuração de referência, dos corpos 1 e 2, em um espaço R^3 . Os corpos B_1 e B_2 não se tocam no tempo $t=0$, ou se tocam de forma que nenhuma força de contato é produzida. Outras configurações são produzidas pelas transformações $\varphi^1: B^1 \times I \rightarrow R^3$ e $\varphi^2: B^2 \times I \rightarrow R^3$ ao longo do intervalo $I = [0, T]$. Γ^1 e Γ^2 são as superfícies de B_1 e B_2 onde espera-se que haverá contato, como pode ser observado na figura 4-2. Considera-se Γ^1 como a superfície escrava e Γ^2 como a superfície mestre. Denota-se também $\gamma^i = \varphi^i(\Gamma^i)$, $i = 1, 2$. Pontos de Γ^1 são denotados por x_s , e pontos de Γ^2 são denotados por x_m . Os pontos na configuração corrente são dados por $x = \varphi^1(X)$ e $y = \varphi^2(Y)$.

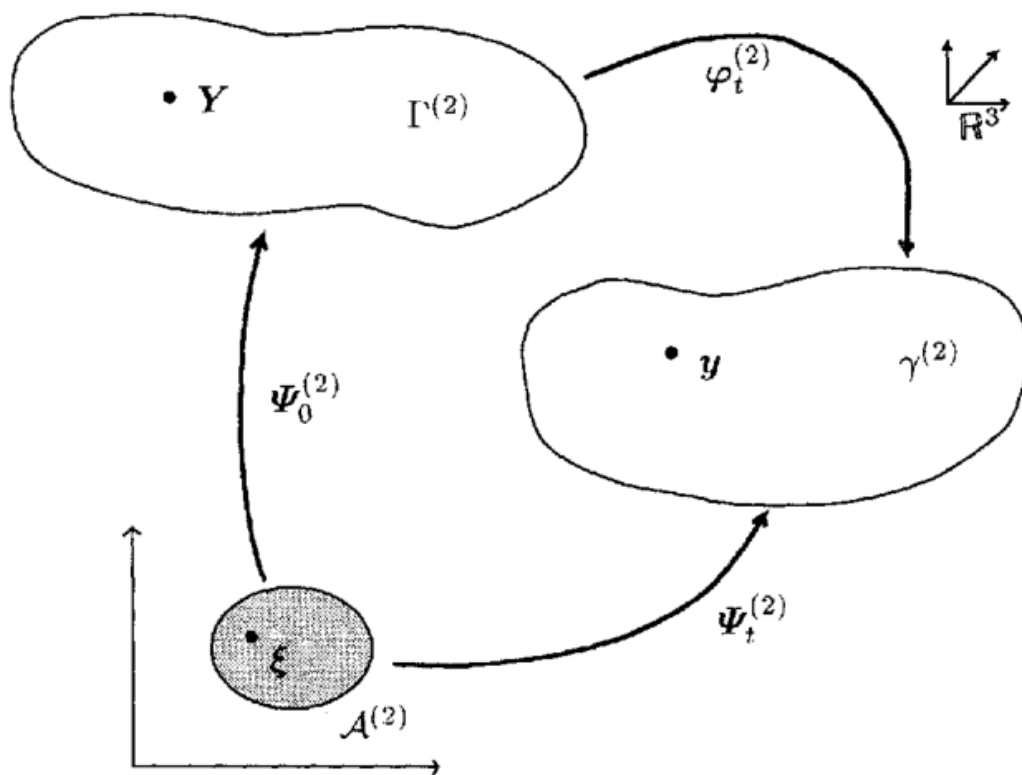
Figura 4-1: Notação para o problema do contato com atrito em deformação finita



Fonte : (SIMO e LAURSEN, 1993)

Determina-se a parametrização das superfícies Γ^i e γ^i , Definindo dois planos $A^i \in \mathbb{R}^2$, e dois mapeamentos $\Psi^i: A^i \rightarrow \mathbb{R}^2, i = 1,2$. Os mapeamentos Ψ^i são definidos de forma que $\Gamma^i = \Psi_0^i(A^i)$ e $\gamma^i = \Psi_t^i(A^i)$. Nota-se também que $\Psi^i = \varphi^i \Psi_0^i$. Verifica-se que qualquer ponto $Y \in \Gamma^2$ por exemplo, pode ser obtido a partir da relação $Y = \Psi_0^2(\xi)$, assim como $y = \Psi_t^2(\xi)$, para qualquer ponto $\xi \in A^2$. É assumido também que estas parametrizações são suaves o suficiente para que suas derivadas possam ser computadas.

Figura 4-2: Parametrização das superfícies de contato γ^2 e Γ^2



Fonte: (SIMO e LAURSEN, 1993)

4.2.1 Restrições de contato

Dada uma configuração qualquer, $\gamma^2 = \varphi^2(\Gamma^2)$ representa uma superfície onde não pode haver penetração de nenhum ponto da superfície $X \in \Gamma^1$. A grosso modo, determina-se que nenhum ponto da superfície de contato do corpo 1 pode penetrar o corpo 2, sendo a fronteira representada pela superfície γ^2 .

4.2.1.1 Restrição de impenetrabilidade

A restrição de impenetrabilidade é representada pela função folga g , que quantifica a menor distância entre um ponto específico da superfície escrava, e qualquer ponto da superfície mestre. A função folga é definida para as duas transformações φ^1 e φ^2 e para qualquer $X \in \Gamma^1$ por

$$g(\mathbf{X}, t) = \text{sinal} |g(\mathbf{X}, t)|,$$

onde

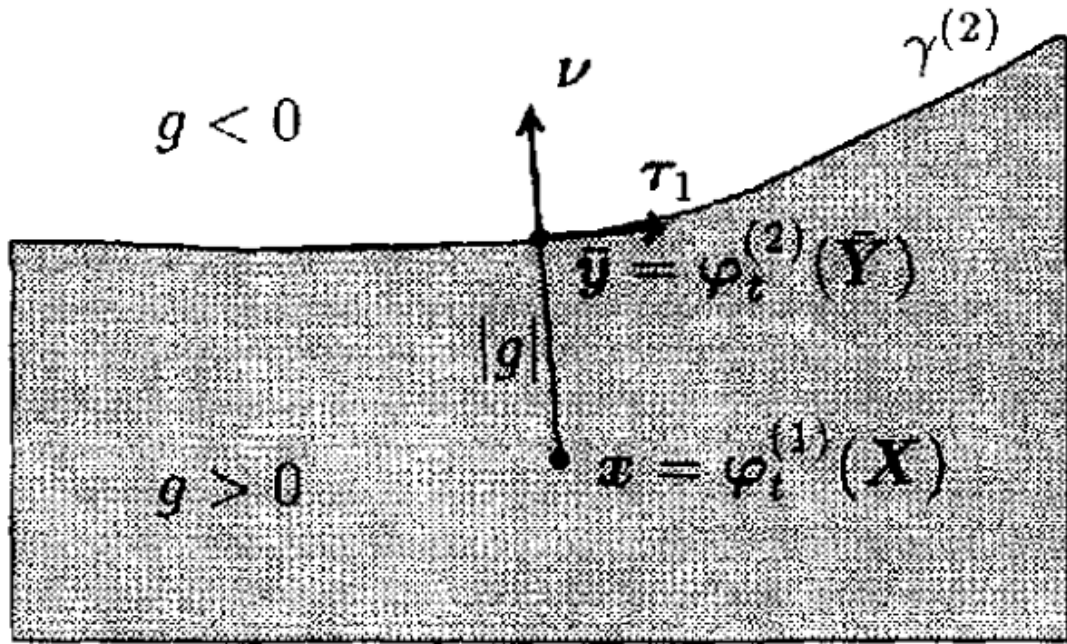
$$|g(\mathbf{X}, t)| = \min_{\mathbf{Y} \in \Gamma^2} \|\varphi^1(\mathbf{X}, t) - \varphi^2(\bar{\mathbf{Y}}, t)\|$$

e

$$\text{sinal} = \begin{cases} -1 & \text{se } \varphi^1 \text{ for admissível} \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

O termo “admissível” significa estar dentro da zona admissível, ou seja, sem violação da restrição de contrato, neste caso a superfície γ^2 . $\varphi^2(\bar{\mathbf{Y}})$, ou $\bar{\mathbf{y}}$ é o ponto da superfície γ^2 mais próximo do ponto $\varphi^1(\mathbf{X})$, ou x , determinado entre todos os pontos da superfície γ^2 .

Figura 4-3: Esquemática dos vetores da base e da função folga



Fonte: (SIMO e LAURSEN, 1993)

Matematicamente, pode-se representar a condição de impenetrabilidade por $g(\mathbf{X}, t) \leq 0$. Precisa-se da definição da tração de contato $\mathbf{t}^1(\mathbf{X}, t)$ para definir as outras restrições. Define-se a tração de contato por $\mathbf{t}^1(\mathbf{X}, t) = \mathbf{P}^1(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{n}_0^1(\mathbf{X})$, sendo $\mathbf{P}^1(\mathbf{X}, t)$ o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff em \mathbf{X} , e \mathbf{n}_0^1 é vetor normal à \mathbf{X} (configuração de referência). A tração é decomposta em:

$$\mathbf{t}^1(\mathbf{X}, t) = \mathbf{t}_N(\mathbf{X}, t)(-\mathbf{n}) + \mathbf{t}_T(\mathbf{X}, t), \quad (4.1)$$

sendo $-\mathbf{n}$ a negativa da normal em $\mathbf{x} = \varphi^1(\mathbf{X})$ e \mathbf{t}_T a projeção de \mathbf{t}^1 no plano tangente associado. O termo $\mathbf{t}_N(\mathbf{X}, t)$ representa a força de contato em \mathbf{X} , e precisa ser positivo para um contato sem tensão. Definem-se então as condições de Kuhn-Tucker para contato normal:

$$g(\mathbf{X}, t) \leq 0, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{t}_N(\mathbf{X}, t) \geq 0, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{t}_N(\mathbf{X}, t)g(\mathbf{X}, t) = 0, \quad (4.4)$$

$$t_N(\mathbf{X}, t)\dot{g}(\mathbf{X}, t) = 0. \quad (4.5)$$

A primeira equação representa a condição de impenetrabilidade, a segunda define que as forças de contato podem ser apenas de compressão (utilizando um modelo onde não existe adesão), a terceira afirma que pode haver uma pressão de contato apenas quando houver contato, ou seja, a função folga for nula (neste contexto considera-se valores negativos como nulos). Quando a função folga for positiva, as tensões de contato serão nulas. A última condição é utilizada no caso de atrito, chamada condição de persistência. Esta indica que para que haja pressão de contato, a variação no tempo da função g deve ser nula, ou seja, enquanto houver contato, a função folga que é nula ao início do contato deve manter-se nula para que hajam tensões de contato e forças de atrito.

4.3 Definição de base

Está demonstrado em (SIMO e LAURSEN, 1993), que a partir da definição da função folga, pode-se construir uma base associada para definir as restrições de atrito. Considerando um ponto $\xi \in A^2$, $\xi = (\xi^1, \xi^2)$. Definindo bases para Γ^2 e γ^2 através das derivadas parciais:

$$E_\alpha(\xi) := \Psi_{0,\alpha}^2(\xi), \quad (4.6)$$

e

$$e_\alpha(\xi) := \Psi_{t,\alpha}^2(\xi) = F_t^2(\Psi_0^2(\xi))E_\alpha(\xi) \quad \alpha = 1,2. \quad (4.7)$$

A partir do problema de minimização da distância entre um ponto $\mathbf{X} \in \Gamma^1$ e os pontos $\mathbf{Y} \in \Gamma^2$, determina-se um ponto $\bar{\mathbf{Y}}$, dado por $\bar{\mathbf{y}}$ na configuração corrente. Pode-se utilizar as relações:

$$\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t) = \Psi_0^2(\bar{\xi}(\mathbf{X}, t)), \quad (4.8)$$

e

$$\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{X}, t) = \Psi_t^2(\bar{\xi}(\mathbf{X}, t)). \quad (4.9)$$

Os pontos da superfície mestre Γ^2 também estão sujeitos a uma transformação φ^2 , de forma que o problema de minimização da distância, e por consequência a descoberta do ponto $\bar{\xi}$, depende do movimento e deformação dos dois corpos B_α , $\alpha = 1, 2$. Definem-se os vetores que formam a base:

$$\mathbf{T}_\alpha := E_\alpha(\bar{\xi}), \quad (4.10)$$

e

$$\boldsymbol{\tau}_\alpha := e_\alpha(\bar{\xi}), \quad (4.11)$$

onde $\alpha = 1, 2$. Os vetores tangentes \mathbf{T}_α e $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ são associados ao ponto X , conforme ele move-se em relação à Γ^2 . Na referência espacial obtém-se

$$-\mathbf{n} := \frac{\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2}{\|\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2\|}. \quad (4.12)$$

Este vetor definido em (4.12) é o vetor normal utilizado em (4.1). Assume-se que as parametrizações Ψ_0^2 e Ψ^2 são de tal forma que o vetor definido em (4.12) tem orientação para fora do corpo B_2

4.4 Cinemática do atrito

Pela condição de persistência, dada em (4.5), tem-se que $\dot{g}(X, t) = 0$, logo

$$0 = \frac{d}{dt} [\varphi^1(\mathbf{X}, t) - \varphi^2(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t), t)]. \quad (4.13)$$

Aplicando a regra da cadeia e desenvolvendo:

$$\mathbf{V}^1(\mathbf{X}, t) - \mathbf{V}^2(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t), t) = F_t^2 \left(\Psi_0^2(\bar{\xi}) \right) \frac{d}{dt} [\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t)]. \quad (4.14)$$

O lado esquerdo representa a diferença de velocidade entre os pontos X e \bar{Y} e representa a taxa de deslizamento do ponto X sobre a superfície $\gamma^2 = \varphi^2(\Gamma^2)$. Do lado direito, existe um termo útil na definição da evolução das leis de atrito.

$$\mathbf{v}_T(\mathbf{X}, t) := \frac{d}{dt} [\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t)] = \dot{\xi}^\alpha(\mathbf{X}, t) \mathbf{T}_\alpha. \quad (4.15)$$

$\mathbf{v}_T(\mathbf{X}, t)$ representa a velocidade descrita dentro da base encontrada no tangenciamento do ponto $\bar{\xi}$. Naturalmente, se a variação da função folga é nula, a velocidade não tem componente normal.

4.5 Formulação da lei de atrito de Coulomb

É conveniente expressar $\mathbf{v}_T(\mathbf{X}, t)$ em uma base dual à considerada anteriormente, define-se então a base dual \mathbf{T}^β :

$$\mathbf{T}^\beta \cdot \mathbf{T}_\alpha = \delta_{\alpha\beta}^\beta \quad (4.16)$$

que também é válida para configuração corrente. Pode-se definir

$$\mathbf{M}_{\alpha\beta} = \mathbf{T}_\alpha \cdot \mathbf{T}_\beta, \quad (4.17)$$

com uma equação equivalente definindo $m_{\alpha\beta}$. As definições de $\mathbf{M}^{\alpha\beta}$ e $\mathbf{m}^{\alpha\beta}$ são análogas à definição acima. Assim, considerando \mathbf{v}_T na base dual, e trazendo para a configuração de referência, define-se

$$\mathbf{v}_T^b(\mathbf{X}, t) = \mathbf{M}_{\alpha\beta} \dot{\bar{\xi}}^\beta(\mathbf{X}, t) \boldsymbol{\tau}^\alpha. \quad (4.18)$$

A força de atrito $\mathbf{t}_T(\mathbf{X}, t)$ também é expressa nesta base dual com uma mudança de sinal,

$$\mathbf{t}_T^b(\mathbf{X}, t) := -\mathbf{t}_T := \mathbf{t}_{T\alpha}(\mathbf{X}, t) \boldsymbol{\tau}^\alpha. \quad (4.19)$$

Com estas definições de velocidade de escorregamento e atrito, determinam-se as condições para o modelo de atrito de Coulomb:

$$\phi := \|\mathbf{t}_T^b\| - \mu t_N \leq 0, \quad (4.20)$$

$$\mathbf{v}_T^b - \zeta \frac{\mathbf{t}_T^b}{\|\mathbf{t}_T^b\|} = 0, \quad (4.21)$$

$$\zeta \geq 0, \quad (4.22)$$

$$\phi \zeta = 0. \quad (4.23)$$

Aqui não é realizada diferenciação entre os coeficientes de atrito estático e dinâmico, e assume-se que o coeficiente de atrito é uma constante, insensível à ações de amolecimento ou endurecimento. Esta lei é completamente local, mas

pode ser facilmente alterada para variantes não locais. Outras leis de atrito podem ser utilizadas dentro do mesmo modelo cinemático proposto.

4.6 Aplicação do Lagrangiano Aumentado com Atrito

Define-se a força normal de contato, t_N por

$$t_N = \langle \lambda_N + \xi_N g \rangle, \quad (4.24)$$

e as condições de Coulomb por:

$$\Phi = \left\| \mathbf{t}_T^\beta \right\| - \mu t_N \leq 0, \quad (4.25)$$

$$\mathbf{v}_T^\beta - \zeta \frac{\mathbf{t}_T^\beta}{\left\| \mathbf{t}_T^\beta \right\|} = \frac{1}{\xi_T} L_v t_T^\beta, \quad (4.26)$$

$$\zeta \geq 0, \quad (4.27)$$

$$\Phi \zeta = 0. \quad (4.28)$$

Onde

$$L_v \mathbf{t}_T^\beta = \dot{t}_{T\alpha} \boldsymbol{\tau}^\alpha - \dot{\lambda}_{T\alpha} \boldsymbol{\tau}^\alpha. \quad (4.29)$$

Substituindo (4.18) na configuração corrente, (4.19) e (4.29) nas equações (4.25)-(4.28), obtém-se:

$$\Phi = \left[t_{T\alpha} \mathbf{m}_{\alpha\beta}^t t_T^\beta \right]^{\frac{1}{2}} - \mu t_N \leq 0, \quad (4.30)$$

$$\mathbf{v}_T^\beta - \zeta \frac{t_{T\alpha}}{\left[t_{T\alpha} \mathbf{m}_{\alpha\beta}^t t_T^\beta \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\xi_T} \{ \dot{t}_{T\alpha} - \dot{\lambda}_{T\alpha} \}, \quad (4.31)$$

$$\zeta \geq 0, \quad (4.32)$$

$$\Phi \zeta = 0. \quad (4.33)$$

Isolando $\dot{t}_{T\alpha}$,

$$\dot{t}_{T\alpha} = \dot{\lambda}_{T\alpha} + \xi_T \left\{ \mathbf{v}_T^\beta - \zeta \frac{t_{T\alpha}}{\left[t_{T\alpha} \mathbf{m}_{\alpha\beta}^t t_T^\beta \right]^{\frac{1}{2}}} \right\}. \quad (4.34)$$

Aqui faz-se a integração no tempo entre t_n e t_{n+1} , aplicando o método de Euler implícito. Primeiro define-se

$$\lambda_{T\alpha} = \Delta\lambda_{T\alpha} \quad \text{sendo} \quad \Delta\lambda_{T\alpha} = \lambda_{T\alpha_{n+1}} - \lambda_{T\alpha_n}, \quad (4.35)$$

e segundo (BANDEIRA, 2001), aplicando o método de Euler:

$$\dot{\lambda}_{T\alpha} = \Delta\lambda_{T\alpha} \quad \text{sendo} \quad \Delta\lambda_{T\alpha} = \lambda_{T\alpha_{n+1}} - \lambda_{T\alpha_n} \quad (4.36)$$

$$\dot{t}_{T\alpha} = t_{T\alpha_{n+1}} - t_{T\alpha_n}, \quad (4.37)$$

$$\dot{\xi}^\beta = \bar{\xi}_{n+1}^\beta - \bar{\xi}_n^\beta. \quad (4.38)$$

A partir de

$$\mathbf{u}_{T\alpha} = \mathbf{m}_{\alpha\beta}^t \bar{\xi}^\beta \quad (4.39)$$

obtem-se

$$\mathbf{u}_{T\alpha_{n+1}} = \mathbf{m}_{\alpha\beta}^t \bar{\xi}_{n+1}^\beta \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_{T\alpha_n} = \mathbf{m}_{\alpha\beta}^t \bar{\xi}_n^\beta, \quad (4.40)$$

$$\Delta\mathbf{u}_{T\alpha} = \mathbf{u}_{T\alpha_{n+1}} - \mathbf{u}_{T\alpha_n}. \quad (4.41)$$

Substituindo as equações definidas acima em (4.18) na configuração corrente obtém-se

$$\mathbf{v}_{T\alpha}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}_{T\alpha_{n+1}} - \mathbf{u}_{T\alpha_n}. \quad (4.42)$$

A partir de (4.34), substituindo as equações (4.37), (4.41), (4.36) e (4.42):

$$t_{T\alpha_{n+1}} = t_{T\alpha_n} + \Delta\lambda_{T\alpha} + \xi_T \left\{ \Delta\mathbf{u}_{T\alpha} - \zeta \frac{t_{T\alpha}}{\left[t_{T\alpha} \mathbf{m}_{\alpha\beta}^t t_T^\beta \right]^{\frac{1}{2}}} \right\}. \quad (4.43)$$

Define-se por conveniência

$$t_{T\alpha_{n+1}}^{\text{trial}} = t_{T\alpha_n} + \Delta\lambda_{T\alpha} + \xi_T \Delta\mathbf{u}_{T\alpha}. \quad (4.44)$$

E reescreve-se (4.43) por:

$$t_{T\alpha_{n+1}} = t_{T\alpha_{n+1}}^{\text{trial}} - \epsilon_T \zeta \frac{t_{T\alpha_{n+1}}}{\left[t_{T\alpha_{n+1}} \mathbf{m}_{\alpha\beta}^t t_{T_{n+1}}^\beta \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.45)$$

Com estas considerações, aplicando o método de Euler, pode-se reescrever a lei de atrito de Coulomb por:

$$\Phi_{n+1}^{\text{trial}} = \left[t_{T\alpha_{n+1}} \mathbf{m}_{\alpha\beta}^t \mathbf{t}_{Tn+1}^{\beta \text{ trial}} \right]^{\frac{1}{2}} - \mu t_{N_{n+1}} \leq 0, \quad (4.46)$$

$$t_{T\alpha_{n+1}} = t_{T\alpha_{n+1}}^{\text{trial}} - \epsilon_T \zeta \frac{t_{T\alpha_{n+1}}}{\left[t_{T\alpha_{n+1}} \mathbf{m}_{\alpha\beta}^t \mathbf{t}_{Tn+1}^{\beta} \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.47)$$

$$\zeta \geq 0, \quad (4.48)$$

$$\Phi_{n+1}^{\text{trial}} \zeta = 0, \quad (4.49)$$

onde

$$t_{N_{n+1}} = \langle \lambda_{N_{n+1}} + \epsilon_N \mathbf{g}(\mathbf{u}_{n+1}) \rangle. \quad (4.50)$$

Definido por Simo e Laursen, apud (BANDEIRA, 2001), é demonstrado que

$$\zeta = \begin{cases} 0 & \text{se } \Phi_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0 \\ \frac{\Phi_{n+1}^{\text{trial}}}{\epsilon_T} & \text{se } \Phi_{n+1}^{\text{trial}} > 0 \end{cases}. \quad (4.51)$$

Para as duas situações definidas em (4.51), e com a definição em (4.50)

$$t_{T\alpha_{n+1}} = \begin{cases} t_{T\alpha_{n+1}}^{\text{trial}} & \text{se } \Phi_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0 \\ \mu t_{N_{n+1}} \frac{t_{T\alpha_{n+1}}^{\text{trial}}}{\|t_{T\alpha_{n+1}}^{\text{trial}}\|} & \text{se } \Phi_{n+1}^{\text{trial}} > 0 \end{cases}. \quad (4.52)$$

A resolução do problema do contato com atrito consiste na determinação de $t_{T\alpha_{n+1}}$ e $t_{N_{n+1}}$, sujeito às restrições determinadas em (4.2)-(4.5) e (4.20)-(4.23).

A atualização do parâmetro λ_N é dada da mesma forma que no contato sem atrito,

$$\lambda_N^{k+1} = \langle \lambda_N^k + \epsilon_{NG} \rangle. \quad (4.53)$$

Para a determinação da atualização do parâmetro $\Delta\lambda_{T\alpha}$, observa-se que caso os multiplicadores de Lagrange sejam os da solução, tem-se que $\lambda_{T\alpha_n} = t_{T\alpha_n}$ e $\lambda_{T\alpha_{n+1}} = t_{T\alpha_{n+1}}$, então $t_{T\alpha_{n+1}} = t_{T\alpha_n} + \Delta\lambda_{T\alpha}$. Logo $\Delta\lambda_{T\alpha}$ é a exata mudança entre t_n e t_{n+1} .

Comparando com (4.43), tem-se

$$\Delta\lambda_{T\alpha}^{k+1} = \Delta\lambda_{T\alpha}^k + \epsilon_T \left\{ \Delta u_{T\alpha}^k - \zeta^k \frac{t_{T\alpha_{n+1}}^{\text{trial } k}}{\|t_{T\alpha_{n+1}}^{\text{trial } k}\|} \right\} \quad (4.54)$$

4.7 Cinemática do contato

Antes da apresentação da contribuição de contato, é necessário definir alguns valores básicos da cinemática do contato, a função penetração g_N e o deslocamento tangencial g_T . A função penetração é dada por:

$$g_N = \begin{cases} (\mathbf{x}^s - \bar{\mathbf{x}}^m) \cdot \bar{\mathbf{n}}_c & \text{se } (\mathbf{x}^s - \bar{\mathbf{x}}^m) \leq 0 \\ 0 & \text{se } (\mathbf{x}^s - \bar{\mathbf{x}}^m) > 0 \end{cases} \quad (4.55)$$

A equação (4.55) já obedece a condição de contato. Caso seja positiva ou nulo, admite-se contato, do contrário, o valor nulo sinaliza sua inexistência. $\bar{\mathbf{x}}^m$ é definido pela parametrização da superfície mestre, no caso o elemento de contato, e é dado por

$$\bar{\mathbf{x}}^m = \bar{\mathbf{x}}^m(\xi^1, \xi^2). \quad (4.56)$$

Tem-se também vetores unitários definidos paralelos aos eixos ξ^α ,

$$\bar{\mathbf{a}}_\alpha = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}^m(\xi^\alpha, t)}{\partial \xi^\alpha} = \mathbf{x}_{,\alpha}^m(\xi^\alpha, t) \quad \text{sendo } \alpha = 1, 2. \quad (4.57)$$

A função folga tangencial, utilizada no estudo do atrito é dada por

$$g_T = \int_{t_0}^t \dot{\xi}^\alpha \|\bar{\mathbf{a}}_\alpha\| dt \quad \text{sendo } \alpha = 1, 2. \quad (4.58)$$

Obtém-se a derivada no tempo de $\bar{\xi}^\alpha$ através da condição de ortogonalidade entre o vetor normal e os vetores $\bar{\mathbf{a}}_\alpha$

$$\frac{d}{dt} \{[\mathbf{x}^s - \bar{\mathbf{x}}^m] \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha\} = 0. \quad (4.59)$$

Determina-se seguintes derivadas em relação ao tempo:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}^s = \frac{d\bar{\mathbf{x}}^s}{dt} = \bar{\mathbf{v}}^s, \quad (4.60)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}^m(\xi^\alpha, t) = \frac{d\hat{\mathbf{x}}^m(\xi^\alpha, t)}{dt} = \mathbf{v}^m + \bar{\mathbf{a}}_\beta \dot{\xi}^\beta, \quad (4.61)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{a}}}_\alpha = \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{,\alpha}^m(\xi^\alpha, t) = \bar{\mathbf{v}}_{,\alpha}^m + \hat{\mathbf{x}}_{,\alpha\beta}^m \dot{\xi}^\beta. \quad (4.62)$$

Substituindo (4.60) em (4.59),

$$\frac{d}{dt} \{[\mathbf{x}^s - \bar{\mathbf{x}}^m] \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha\} = [\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m - \bar{\mathbf{a}}_\beta \dot{\xi}^\alpha] \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha + [\mathbf{x}^s - \bar{\mathbf{x}}^m] \cdot \dot{\bar{\mathbf{a}}}_\alpha. \quad (4.63)$$

Substituindo (4.62) em (4.63),

$$[\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m - \bar{\mathbf{a}}_\beta \dot{\xi}^\alpha] \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha + [\mathbf{x}^s - \bar{\mathbf{x}}^m] \cdot [\mathbf{v}_{,\alpha}^m + \hat{\mathbf{x}}_{,\alpha\beta}^m \dot{\xi}^\beta] = 0. \quad (4.64)$$

Pondo $\dot{\xi}^\beta$ em evidência e simplificando,

$$[\bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha - g_N \hat{\mathbf{x}}_{,\alpha\beta}^m \cdot \bar{\mathbf{n}}_c] \dot{\xi}^\beta = [\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m] \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha + g_N \bar{\mathbf{n}}_c \bar{\mathbf{v}}_{,\alpha}^m. \quad (4.65)$$

Definindo

$$\bar{\mathbf{a}}_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_{,\xi}^m(\bar{\xi}) \cdot \mathbf{x}_{,\xi}^m(\bar{\xi}) = \bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha \quad (4.66)$$

e

$$\bar{\mathbf{b}}_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_{,\xi\xi}^m(\bar{\xi}) \cdot \bar{\mathbf{n}}_c = \hat{\mathbf{x}}_{,\alpha\beta}^m \cdot \bar{\mathbf{n}}_c, \quad (4.67)$$

escreve-se (4.65) por

$$\dot{\xi}^\beta = \frac{1}{\bar{\mathbf{a}}_{\alpha\beta} - g_N \bar{\mathbf{b}}_{\alpha\beta}} \{[\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m] \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha + g_N \bar{\mathbf{n}}_c \bar{\mathbf{v}}_{,\alpha}^m\}. \quad (4.68)$$

Na situação onde existe contato com atrito, quando o problema é resolvido de forma exata, tem-se que a função g_N precisa ser nula, logo (4.68) se reduz a

$$\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m = \dot{\xi}^\alpha \bar{\mathbf{a}}_\alpha, \quad (4.69)$$

sendo a variação no tempo do deslocamento tangencial dada por

$$\dot{\mathbf{g}}_T = \mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m = \dot{\xi}^\alpha \bar{\mathbf{a}}_\alpha. \quad (4.70)$$

4.8 Formulação Variacional do Contato

Segundo as definições em (WRIGGERS, 2006), (LAURSEN, 2002) e (BANDEIRA, 2001), a formulação do contato parte do mesmo ponto que a formulação para o

método dos elementos finitos, a partir da equação de equilíbrio dos momentos, desprezando o termo de inércia

$$\text{DIV } \mathbf{P}^Y + \bar{\mathbf{f}}^Y = \mathbf{0}. \quad (4.71)$$

A partir da equação do balanço dos momentos apresenta-se a equação dos trabalhos virtuais, que no caso de contato está sujeita às condições de Kuhn–Tucker–Karush para contato:

$$g_N \geq 0, \quad t_N \leq 0, \quad g_N t_N = 0 \quad \text{em } \Gamma_C, \quad (4.72)$$

o que resulta em uma desigualdade variacional

$$\begin{aligned} \sum_{Y=1}^2 \int_{B^Y} \boldsymbol{\tau}^Y \cdot \text{grad}(\boldsymbol{\eta}^Y - \varphi^Y) dV \\ \geq \sum_{Y=1}^2 \int_{B^Y} \bar{\mathbf{f}}^Y \cdot (\boldsymbol{\eta}^Y - \varphi^Y) dV - \int_{\Gamma_C^Y} \bar{\mathbf{t}}^Y \cdot (\boldsymbol{\eta}^Y - \varphi^Y) dA, \end{aligned} \quad (4.73)$$

onde o primeiro tensor de Piola Kirchhoff foi substituído pelo tensor das tensões de Kirchhoff, pela relação $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{P}\mathbf{F}^T$.

É preciso encontrar a deformação $(\varphi^1, \varphi^2) \in K$ de forma que a equação (4.73) é respeitada para qualquer $(\eta^1, \eta^2) \in K$, com K definido por

$$K = \{(\eta^1, \eta^2) \in V \mid [\eta^2 - \hat{\eta}^1(\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2)] \cdot \bar{\mathbf{n}}_1 \geq 0\}. \quad (4.74)$$

Caso a forma utilizada para resolver o problema de contato permita que se conheça a superfície de contato, segundo (WRIGGERS, 2006) a inequação em (4.73) pode ser reescrita como

$$\sum_{Y=1}^2 \left\{ \int_{B^Y} \boldsymbol{\tau}^Y \cdot \text{grad } \boldsymbol{\eta}^Y dV - \int_{B^Y} \bar{\mathbf{f}}^Y \cdot \boldsymbol{\eta}^Y dV - \int_{\Gamma_C^Y} \bar{\mathbf{t}}^Y \cdot \boldsymbol{\eta}^Y dA \right\} + C_C = 0, \quad (4.75)$$

onde C_c é a contribuição das forças de contato, onde há contato, $\boldsymbol{\eta}^Y$ são os deslocamentos virtuais, que tem valor nulo nas cordenadas prescritas.

A contribuição de contato C_c na equação do princípio dos trabalhos virtuais, segundo (BANDEIRA, 2001), é dada por

$$\int_{dB_{OC}^S} t_N \bar{\mathbf{n}}_c \cdot (\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m) dA + \int_{dB_{OC}^S} \mathbf{t}_T \cdot (\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m) dA. \quad (4.76)$$

Faz-se a variação de δg_N ,

$$\delta g_N = \delta(\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m) \cdot \bar{\mathbf{n}}_c + (\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m) \cdot \delta \bar{\mathbf{n}}_c. \quad (4.77)$$

O vetor $\bar{\mathbf{n}}_c$ tem norma unitária, $\bar{\mathbf{n}}_c \cdot \bar{\mathbf{n}}_c = 1 \rightarrow \delta \bar{\mathbf{n}}_c \cdot \bar{\mathbf{n}}_c = 0$, por conta disto pode-se simplificar (4.77) para

$$\delta g_N = \delta(\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m) \cdot \bar{\mathbf{n}}_c = (\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m - \bar{\mathbf{a}}_\beta \bar{\xi}^\alpha) \cdot \bar{\mathbf{n}}_c. \quad (4.78)$$

Graças à condição de ortogonalidade $\bar{\mathbf{n}}_c \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha = 0$, e

$$\delta g_N = (\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m) \cdot \bar{\mathbf{n}}_c, \quad (4.79)$$

logo

$$\Delta g_N = (\Delta \mathbf{u}^s - \Delta \bar{\mathbf{u}}^m) \cdot \bar{\mathbf{n}}_c. \quad (4.80)$$

Isolando $\bar{\mathbf{n}}_c$ em (4.79), e substituindo junto com (4.70) em (4.76) obtem-se

$$\int_{dB_{OC}^S} t_N \delta g_N dA + \int_{dB_{OC}^S} \mathbf{t}_T \delta \mathbf{g}_T dA, \quad (4.81)$$

então:

$$\int_{dB_{OC}^S} t_N \delta g_N dA + \int_{dB_{OC}^S} t_{T_\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha dA, \quad (4.82)$$

sendo:

$$t_{T_\alpha} = \mathbf{t}_T \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha. \quad (4.83)$$

Os termos t_N e t_{T_α} são determinados e substituídos de acordo com o método escolhido para as forças de contato, a exemplo do Lagrangiano aumentado. A linearização da equação (4.82), fornece a matriz de rigidez da contribuição de contato

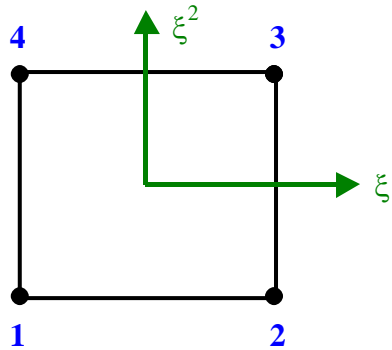
$$\frac{\partial W_C}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} = \int_{dB_{OC}^S} [\Delta t_N \delta g_N + t_N \Delta(\delta g_N)] dA + \int_{dB_{OC}^S} [\Delta t_{T_\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha + t_{T_\alpha} \Delta(\delta \bar{\xi}^\alpha)] dA. \quad (4.84)$$

A partir da equação (4.84), pode-se determinar a matriz de rigidez para os elementos de contato nó-superfície, nó-aresta e nó-nó. Apenas a formulação para contato nó-superfície é descrita, pois apenas esta é utilizada após a discretização para o elemento de contato B-Spline.

4.9 Algoritmo geométrico e funções de interpolação

O elemento de contato utilizado (Figura 4-4) trata-se da face do elemento isoparamétrico hexaédrico utilizado na solução de elementos finitos que faz parte da superfície do corpo B no qual a superfície mestre está localizada. A superfície de contato é o conjunto das faces destes elementos.

Figura 4-4: Elemento finito da superfície de contato



Fonte 2: (BANDEIRA, 2001)

As funções de interpolação dos elementos de contato são definidas em (BANDEIRA, 2001) por

$$N_1 = \frac{1}{4} (1 + \phi_1 \xi^1) (1 + \phi_2 \xi^2). \quad (4.85)$$

Sendo ϕ_1 e ϕ_2 valores entre -1 e 1, a depender das coordenadas nodais.

A coordenada x^m é dada por

$$x^m = \sum_{I=1}^4 N_I(\xi^1, \xi^2) x_I^m. \quad (4.86)$$

Uma das variáveis importantes ao processo da solução de contato é o valor da função folga. Para determinar o valor da função folga, é necessário determinar a projeção do ponto x^s na superfície mestre, e calcular a distância entre os pontos.

Um dado vetor $[\mathbf{x}^s - \bar{\mathbf{x}}^m(\xi^1, \xi^2)]$ será sempre ortogonal à superfície mestre, portanto seu produto vetorial com dois vetores tangentes à superfície mestre será nulo,

$$[\mathbf{x}^s - \bar{\mathbf{x}}^m(\xi^1, \xi^2)] \cdot \bar{\mathbf{x}}_{,\alpha}^m(\xi^1, \xi^2) = 0. \quad (4.87)$$

Substituindo (4.86) em (4.87):

$$[\mathbf{x}^s - \sum_{I=1}^4 N_I(\xi^1, \xi^2) \mathbf{x}_I^m] \cdot \sum_{I=1}^4 N_{I,\alpha}(\xi^1, \xi^2) \mathbf{x}_I^m = 0. \quad (4.88)$$

Fazendo a linearização e aplicando o método de Newton, tem-se o sistema de equações não lineares:

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^2 \left[\sum_{I=1}^4 \sum_{J=1}^4 N_{I,\alpha} N_{J,\beta} \mathbf{x}_I^m \cdot \mathbf{x}_J^m - \sum_{K=1}^4 N_{K,\alpha\beta} \mathbf{x}_K^m \cdot (\mathbf{x}^s \right. \\ \left. - \sum_{L=1}^4 N_L \mathbf{x}_L^m) \right] (\xi_{i+1}^\beta - \xi_i^\beta) = [\mathbf{x}^s - \sum_{M=1}^4 N_M \mathbf{x}_M^m] \cdot \sum_{N=1}^4 N_{N,\alpha} \mathbf{x}_N^m. \end{aligned} \quad (4.89)$$

O resultado dos valores de ξ^1 e ξ^2 necessita estar dentro do intervalo $[-1;1]$. Caso contrário, significa que a projeção do nó escravo está fora da superfície do elemento testado na superfície mestre.

4.10 Discretização do princípio dos trabalhos virtuais

Para obter a contribuição do contato discretizada, substitui-se os valores de δg_N e $\delta \bar{\xi}^\alpha$ na equação (4.82), como demonstrado em (BANDEIRA, 2001),

$$\begin{aligned} W_C(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{dB_{OC}^S} t_N(\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m) \cdot \bar{\mathbf{n}}_C dA \\ + \int_{dB_{OC}^S} t_{T\alpha} \frac{1}{\bar{a}_{\alpha\beta} - g_N \bar{b}_{\alpha\beta}} \{ [\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m] \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + g_N \bar{\mathbf{n}}_C \cdot \bar{\mathbf{v}}_\beta^m \} dA. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Os valores das variáveis dependentes do ponto \mathbf{x}^m , são obtidas através de uma interpolação de seus valores nos 4 nós que compõem o elemento de contato da

superfície no qual o ponto \mathbf{x}^m está contido. Dada esta interpolação, utiliza-se de vetores compostos de 5 elementos, um referente ao ponto escravo \mathbf{x}^s , e 4 referentes aos nós do elemento de contato analisado. Fazendo a integração de (4.90), obtém-se

$$W_C(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n_s} A_i \mathbf{R}_{\text{contato } i} \cdot \mathbf{V}_{\text{contato } i}, \quad (4.91)$$

sendo A_i a área de cada elemento finito de contato, n_s o número de nós escravos na configuração atual B_{0C}^s , V é a variação do deslocamento dos nós e R_c é o resíduo da contribuição de contato. Os vetores utilizados para a discretização da equação (4.90) são dados por:

$$\mathbf{V}_{\text{contato } i} = \begin{bmatrix} v_i^s \\ v_{i1}^m \\ v_{i2}^m \\ v_{i3}^m \\ v_{i4}^m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \bar{n}_c \\ -N_1(\bar{\xi})\bar{n}_c \\ -N_2(\bar{\xi})\bar{n}_c \\ -N_3(\bar{\xi})\bar{n}_c \\ -N_4(\bar{\xi})\bar{n}_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -N_{1,\alpha}(\bar{\xi})\bar{n}_c \\ -N_{2,\alpha}(\bar{\xi})\bar{n}_c \\ -N_{3,\alpha}(\bar{\xi})\bar{n}_c \\ -N_{4,\alpha}(\bar{\xi})\bar{n}_c \end{bmatrix}, \quad (4.92)$$

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} \bar{a}_\alpha \\ -N_1(\bar{\xi})\bar{a}_\alpha \\ -N_2(\bar{\xi})\bar{a}_\alpha \\ -N_3(\bar{\xi})\bar{a}_\alpha \\ -N_4(\bar{\xi})\bar{a}_\alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^\alpha = \frac{1}{\bar{a}_{\alpha\beta} - g_{\bar{N}}\bar{b}_{\alpha\beta}} [\mathbf{T}_\beta - g_{\bar{N}}\mathbf{N}_\beta] \text{ e}$$

$$\delta \bar{\xi}^\alpha = \mathbf{D}^\alpha \cdot \mathbf{V}_{\text{contato } i}.$$

Fazendo a substituição, pode-se definir:

$$\mathbf{R}_{\text{contato}} = t_N \mathbf{N} + t_{T_\alpha} \mathbf{D}^\alpha = t_N \mathbf{N} + t_{T_1} \mathbf{D}^1 + t_{T_2} \mathbf{D}^2 \quad (4.93)$$

Sendo o primeiro termo referente ao resíduo normal, e o segundo termo referente ao resíduo tangencial.

Os termos t_N e t_{T_α} são as forças de contato, definidas pelo método do Lagrangiano aumentado, apresentados em sua seção.

4.11 Linearização do princípio dos trabalhos virtuais

A seção acima revela como calcular o resíduo de contato aplicado a elementos finitos. Define-se agora a matriz de rigidez referente ao contato, que é dada pela

linearização da equação (4.90). Para isso, linearizam-se todos os seus termos e substituí-os diretamente na equação.

A linearização da pressão normal apresenta-se por

$$\Delta t_N = \varepsilon_N \Delta g_N, \quad (4.94)$$

com

$$\Delta g_{\bar{N}} = \begin{cases} (\Delta u^s - \Delta \bar{u}^m) \cdot \bar{n}_c, & \text{se } g_N < 0 \\ 0, & \text{se } g_N > 0 \end{cases} \quad (4.95)$$

É necessário também definir a normal, que é perpendicular aos dois eixos auxiliares no ponto \bar{x}^m , logo é definida pelo produto vetorial entre eles

$$\bar{n}_c = \frac{\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2}{\|\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2\|} = \frac{\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2}{\sqrt{(\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2) \cdot (\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2)}} \quad (4.96)$$

Fazendo o cálculo de $\Delta(\delta g_N)$ tem-se,

$$\Delta(\delta g_N) = \Delta[(\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m) \cdot \bar{\mathbf{n}}_c] = \Delta(\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m) \cdot \bar{\mathbf{n}}_c + (\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m) \cdot \Delta \bar{\mathbf{n}}_c. \quad (4.97)$$

Para completar a equação (4.97) é necessário definir também a linearização da normal, que é dada, aplicando a regra da cadeia por

$$\Delta \bar{\mathbf{n}}_c = \frac{\Delta \bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2 + \bar{\mathbf{a}}_1 \times \Delta \bar{\mathbf{a}}_2}{\|\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2\|} - \frac{(\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2)(\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2) \cdot (\Delta \bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2 + \bar{\mathbf{a}}_1 \times \Delta \bar{\mathbf{a}}_2)}{\|\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2\|^3}, \quad (4.98)$$

em seguida,

$$\Delta \bar{\mathbf{n}}_c = [\mathbf{i} - (\bar{\mathbf{n}}_c \otimes \bar{\mathbf{n}}_c)] \frac{\Delta \bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2 + \bar{\mathbf{a}}_1 \times \Delta \bar{\mathbf{a}}_2}{\|\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2\|}, \quad (4.99)$$

resultando em,

$$\Delta \bar{\mathbf{n}}_c = \bar{\mathbf{a}}^{\alpha\beta} \bar{\mathbf{a}}_\alpha \left[\frac{\bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot (\Delta \bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2) + \bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot (\bar{\mathbf{a}}_1 \times \Delta \bar{\mathbf{a}}_2)}{\|\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2\|} \right]. \quad (4.100)$$

Tem-se que

$$\bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot (\Delta \bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2) = \begin{cases} -\Delta \bar{\mathbf{a}}_1 \cdot \bar{\mathbf{n}}_c \|\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2\| & \text{para } \beta = 1 \\ 0 & \text{para } \beta = 2 \end{cases} \quad (4.101)$$

e

$$\bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot (\bar{\mathbf{a}}_1 \times \Delta \bar{\mathbf{a}}_2) = \begin{cases} 0 & \text{para } \beta = 1 \\ -\Delta \bar{\mathbf{a}}_2 \cdot \bar{\mathbf{n}}_C |\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2| & \text{para } \beta = 2 \end{cases} \quad (4.102)$$

Então pode-se reescrever (4.100) por

$$\Delta \bar{\mathbf{n}}_C = -\bar{\mathbf{a}}_\alpha \bar{a}^{\alpha\beta} (\Delta \bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot \bar{\mathbf{n}}_C) = -\bar{\mathbf{a}}_\alpha \bar{a}^{\alpha\beta} \bar{\mathbf{n}}_C \cdot \Delta \bar{\mathbf{a}}_\beta. \quad (4.103)$$

Definindo $\Delta \bar{\mathbf{a}}_\alpha$ por

$$\Delta \bar{\mathbf{a}}_\alpha = \Delta \bar{\mathbf{u}}_{,\alpha}^m + \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \Delta \bar{\xi}^\beta, \quad (4.104)$$

substitui-se (4.104) em (4.103), resultando em

$$\Delta \bar{\mathbf{n}}_C = -\bar{\mathbf{a}}_\alpha \bar{a}^{\alpha\beta} \bar{\mathbf{n}}_C (\Delta \bar{\mathbf{u}}_{,\beta}^m + \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\gamma} \Delta \bar{\xi}^\gamma). \quad (4.105)$$

Define-se $\Delta(\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m)$ por

$$\Delta(\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m) = \Delta \mathbf{v}^s - \Delta \bar{\mathbf{v}}^m - \bar{\mathbf{v}}_{,\alpha}^m \Delta \bar{\xi}^\alpha = -\mathbf{v}_{,\alpha}^m \Delta \bar{\xi}^\alpha. \quad (4.106)$$

Voltando à (4.97), substituindo (4.105) e (4.106), obtém-se

$$\Delta(\delta g_N) = -\bar{\mathbf{v}}_{,\alpha}^m \Delta \bar{\xi}^\alpha \cdot \bar{\mathbf{n}}_C - (\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m) \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha \bar{a}^{\alpha\beta} \bar{\mathbf{n}}_C \cdot (\Delta \mathbf{u}_{,\beta}^m + \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\gamma} \Delta \bar{\xi}^\gamma). \quad (4.107)$$

Continuando, parte-se para a linearização de $\delta \bar{\xi}^\beta$. De,

$$\delta \bar{\xi}^\beta = \frac{1}{\bar{\mathbf{a}}_{\alpha\beta} - g_N \bar{\mathbf{b}}_{\alpha\beta}} \{[\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m] \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha + g_N \bar{\mathbf{n}}_C \cdot \bar{\mathbf{v}}_{,\alpha}^m\}, \quad (4.108)$$

obtém-se

$$\Delta \bar{\xi}^\beta = \frac{1}{\bar{\mathbf{a}}_{\alpha\beta} - g_N \bar{\mathbf{b}}_{\alpha\beta}} \{[\Delta \mathbf{u}^s - \Delta \bar{\mathbf{u}}^m] \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha + g_N \bar{\mathbf{n}}_C \cdot \bar{\mathbf{u}}_{,\alpha}^m\}. \quad (4.109)$$

Após manipulações algébricas demonstradas por Laursen e Simo apud (BANDEIRA, 2001), obtém-se,

$$\begin{aligned} \Delta(\delta \bar{\xi}^\beta) = & \frac{1}{\bar{\mathbf{a}}_{\alpha\beta} - g_N \bar{\mathbf{b}}_{\alpha\beta}} \{ -\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot (\bar{\mathbf{v}}_{,\beta}^m \Delta \bar{\xi}^\beta + \Delta \bar{\mathbf{u}}_{,\beta}^m \delta \bar{\xi}^\beta + \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\gamma} \delta \bar{\xi}^\beta \Delta \bar{\xi}^\gamma) \\ & + (\Delta \bar{\mathbf{u}}_{,\alpha}^m + \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \Delta \bar{\xi}^\beta) \cdot (\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m - \bar{\mathbf{a}}_\gamma \delta \bar{\xi}^\gamma) \\ & + (\bar{\mathbf{v}}_{,\alpha}^m + \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \delta \bar{\xi}^\beta) \cdot (\Delta \mathbf{u}^s - \Delta \bar{\mathbf{u}}^m - \bar{\mathbf{a}}_\gamma \Delta \bar{\xi}^\gamma) \\ & + g_N \bar{\mathbf{n}}_C \cdot (\bar{\mathbf{v}}_{,\alpha\beta}^m \Delta \bar{\xi}^\beta + \Delta \bar{\mathbf{u}}_{,\alpha\beta}^m \delta \bar{\xi}^\beta + \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta\gamma} \delta \bar{\xi}^\beta \Delta \bar{\xi}^\gamma) \}. \end{aligned} \quad (4.110)$$

A equação $t_{T\alpha}$ depende da existência de deslizamento entre as superfícies de contato, definido pela função $\phi_{n+1}^{\text{trial}}$. Para $\phi_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0$, existe um estado sem escorregamento, portanto a linearização $\Delta t_{T\alpha}$ é dada por

$$\Delta t_{T\alpha} = \Delta t_{T\alpha}^{\text{trial}} = \epsilon_T \Delta \bar{\xi}^\beta \bar{\mathbf{a}}_{\alpha\beta} + \epsilon_T (\bar{\xi}_{i+1}^\beta - \bar{\xi}_i^\beta) \Delta \bar{\mathbf{a}}_{\alpha\beta}, \quad (4.111)$$

com $\Delta \bar{\mathbf{a}}_{\alpha\beta}$ definido por

$$\Delta \bar{\mathbf{a}}_{\alpha\beta} = \Delta \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \Delta \bar{\mathbf{a}}_\beta. \quad (4.112)$$

Substituindo (4.104) e (4.112) em (4.111), obtém-se,

$$\begin{aligned} \Delta t_{T\alpha}^{\text{trial}} = \epsilon_T \bar{\mathbf{a}}_{\alpha\beta} \Delta \bar{\xi}^\beta + \epsilon_T (\bar{\xi}_{i+1}^\beta - \bar{\xi}_i^\beta) \{ (\Delta \mathbf{u}_{,\alpha} + \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\theta} \Delta \bar{\xi}^\theta) \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta \\ + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot (\Delta \mathbf{u}_{,\beta} + \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\theta} \Delta \bar{\xi}^\theta) \}. \end{aligned} \quad (4.113)$$

No caso de escorregamento, ou $\phi_{n+1}^{\text{trial}} > 0$, a linearização da força de atrito é dada por

$$\begin{aligned} \Delta t_{T\alpha} = \mu \epsilon_N \Delta g_N \frac{t_{T\alpha}^{\text{trial}}}{\|\mathbf{t}_T^{\text{trial}}\|} + \mu \frac{t_N}{\|\mathbf{t}_T^{\text{trial}}\|} \Delta t_{T\alpha}^{\text{trial}} \\ + \mu \frac{t_N}{\|\mathbf{t}_T^{\text{trial}}\|^3} t_{T\alpha}^{\text{trial}} t_T^{\text{trial}\beta} (\mathbf{t}_T^{\text{trial}} \Delta \mathbf{a}_\beta - \Delta t_{T\beta}^{\text{trial}}), \end{aligned} \quad (4.114)$$

sendo $\Delta t_{T\alpha}^{\text{trial}}$ definido em (4.113).

Com todas as linearizações apresentadas, realiza-se a substituição na equação (4.90), obtendo em forma vetorial,

$$\frac{\partial W_c}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{ns} A_i (\mathbf{v}_{\text{contato } i})^T \mathbf{K}_{\text{contato } i} \Delta \mathbf{U}_{\text{contato } i}, \quad (4.115)$$

sendo K_{contato} a contribuição do contato para a matriz de rigidez da estrutura. A seguir apresenta-se a matriz de rigidez de contato discretizada, primeiro sem atrito, e depois com atrito.

4.12 Matriz de rigidez da contribuição normal.

A equação (4.90) consiste de dois membros, seu primeiro membro refere-se a contribuição do contato na direção normal à matriz de rigidez

$$\mathbf{K}_N = \int_{\partial B_{OC}^S} [\Delta t_N \delta g_N + t_N \Delta(\delta g_N)] dA. \quad (4.116)$$

Fazendo as substituições das equações, (4.94), (4.95), (4.107) e utilizando-se dos vetores de (4.92), escreve-se (4.116) por

$$\mathbf{K}_N = \epsilon_N \mathbf{N} \mathbf{N}^T + t_N \left[\mathbf{N}_\alpha \mathbf{D}^{\alpha T} + a^{\beta\alpha} \mathbf{T}_\alpha \left(\mathbf{N}_B^T - \mathbf{D}^{\gamma T} (\bar{\mathbf{n}}_c \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\gamma}) \right) \right]. \quad (4.117)$$

4.13 Matriz de rigidez da contribuição do atrito sem deslizamento

Aqui define-se o outro termo da matriz de rigidez, que diz respeito às forças tangenciais. No presente caso, considera-se que não há deslizamento entre as superfícies mestre e escrava, ou seja, a situação de aderência (“stick”). Neste caso, como definido pelo método do Lagrangiano aumentado, a fórmula para a força de atrito t_{T_α} é diferente do caso em que há deslizamento entre as superfícies, o caso slip, resultando em matrizes de rigidez distintas. A contribuição da força de atrito para a matriz de rigidez é dada por

$$\mathbf{K}_T = \int_{\partial B_{OC}^S} [\Delta t_{T_\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha + t_{T_\alpha} \Delta(\delta \bar{\xi}^\alpha)] dA. \quad (4.118)$$

Para tornar as demonstrações mais simples, separa-se os termos da equação acima em

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_{T1} + \mathbf{K}_{T2}, \quad (4.119)$$

e define-se \mathbf{K}_{T1} por

$$\mathbf{K}_{T1} = \int_{\partial B_{OC}^S} t_{T_\alpha} \Delta(\delta \bar{\xi}^\alpha) dA \quad (4.120)$$

E \mathbf{K}_{T2} por

(4.121)

$$\mathbf{K}_{T2} = \int_{\partial B_{Oc}^S} \Delta t_{T\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha dA.$$

Se faz necessário definir outros vetores que estabelecem uma relação entre o nó escravo e os quatro nós que compõem a superfície mestre, sendo estes:

$$\Delta \mathbf{U}_{\text{contato } i} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_i^s \\ \Delta \mathbf{u}_{i1}^m \\ \Delta \mathbf{u}_{i2}^m \\ \Delta \mathbf{u}_{i3}^m \\ \Delta \mathbf{u}_{i4}^m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -N_{1,\alpha}(\bar{\xi}) \mathbf{t}_t^{\text{trial}} \\ -N_{2,\alpha}(\bar{\xi}) \mathbf{t}_t^{\text{trial}} \\ -N_{3,\alpha}(\bar{\xi}) \mathbf{t}_t^{\text{trial}} \\ -N_{4,\alpha}(\bar{\xi}) \mathbf{t}_t^{\text{trial}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -N_{1,\beta}(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -N_{2,\beta}(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -N_{3,\beta}(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -N_{4,\beta}(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{a}}_\alpha \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{T}}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \\ -N_1(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \\ -N_2(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \\ -N_3(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \\ -N_4(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -N_{1,\alpha\beta}(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{n}}_c \\ -N_{2,\alpha\beta}(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{n}}_c \\ -N_{3,\alpha\beta}(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{n}}_c \\ -N_{4,\alpha\beta}(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{n}}_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -N_1(\bar{\xi}) \mathbf{1} \\ -N_2(\bar{\xi}) \mathbf{1} \\ -N_3(\bar{\xi}) \mathbf{1} \\ -N_4(\bar{\xi}) \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_\alpha = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{0}} \\ -N_{1,\alpha}(\bar{\xi}) \mathbf{1} \\ -N_{2,\alpha}(\bar{\xi}) \mathbf{1} \\ -N_{3,\alpha}(\bar{\xi}) \mathbf{1} \\ -N_{4,\alpha}(\bar{\xi}) \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e \Delta \bar{\xi}^\alpha = \mathbf{D}^{\alpha T} \cdot \Delta \mathbf{U}_{\text{contato } i}. \quad (4.122)$$

Partindo de K_{T1} , definido em (4.120). Substitui-se (4.110) em (4.120), e utiliza-se dos vetores definidos em (4.92) e (4.122) para apresentá-la de forma vetorial

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{T1} = & t_{T\alpha} \bar{h}^{\alpha\eta} [(\mathbf{T}_{\eta\beta} + \mathbf{T}_{\beta\eta} + \hat{\mathbf{T}}_{\eta\beta}) \mathbf{D}^{\beta T} + \mathbf{D}^\beta (\mathbf{T}_{\eta\beta}^T + \mathbf{T}_{\beta\eta}^T + \hat{\mathbf{T}}_{\eta\beta}^T)] \\ & - (\bar{\mathbf{a}}_\eta \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\gamma} + \bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\eta,\gamma} + \bar{\mathbf{a}}_{\eta,\beta} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\gamma - g_N \bar{\mathbf{n}}_c \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\eta,\beta\gamma}) \mathbf{D}^\beta \mathbf{D}^{\gamma T} \\ & - \mathbf{E} \mathbf{E}_\eta^T - \mathbf{E}_\eta \mathbf{E}^T - g_N \mathbf{N}_{\eta\beta} \mathbf{D}^{\beta T} - g_N \mathbf{D}^\beta \mathbf{N}_{\eta\beta}^T. \end{aligned} \quad (4.123)$$

Os índices na equação acima variam de 1 a 2, e o termo $\bar{h}^{\alpha\eta}$ é definido por

$$\bar{h}_{\alpha\beta} \bar{h}^{\beta\eta} = \delta_\alpha^\eta \quad \bar{h}_{\alpha\beta} = \bar{\mathbf{a}}_{\alpha\beta} - g_N \bar{\mathbf{b}}_{\alpha\beta} \quad (4.124)$$

A matriz K_{T2} , em forma vetorial é obtida substituindo em sua equação as equações (4.108) e (4.113). A equação (4.113) relata a linearização força tangencial no caso onde não há deslizamento, ou stick

$$\mathbf{K}_{T_2} = \epsilon_T \mathbf{D}^\alpha \left\{ -(\xi_{i+1}^\beta - \xi_i^\beta) [\mathbf{T}_{\beta\alpha}^T + \mathbf{T}_{\alpha\beta}^T - (\bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\theta} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\theta}) \mathbf{D}^{\theta T}] + \mathbf{a}_{\beta\alpha} \mathbf{D}^{\beta T} \right\}. \quad (4.125)$$

A matriz \mathbf{K}_{T_2} é assimétrica.

4.14 Matriz de rigidez da contribuição do atrito com deslizamento

No cálculo da matriz \mathbf{K}_{T_2} na seção acima, considera-se a condição de “*stick*”, e utiliza-se a linearização da função t_{T_α} para o caso. Realiza-se o mesmo processo de substituição descrito anteriormente, porém utiliza-se da linearização da função da força tangencial Δt_{T_α} , quando esta for definida para o estado de escorregamento, ou *slip*.

Substitui-se as equações (4.108) e (4.114) em (4.121), e utilizando das expressões definidas em (4.92) e (4.122), resulta-se em

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{T_2} = \mu \mathbf{D}^\alpha \{ & \epsilon_N \frac{t_{T_\alpha}^{\text{trial}}}{\|t_T^{\text{trial}}\|} \mathbf{N}^T \\ & + \frac{|t_N|}{\|t_T^{\text{trial}}\|} \left(\epsilon_T \mathbf{a}_{\beta\alpha} \mathbf{D}^{\beta T} \right. \\ & - \epsilon_T (\xi_{i+1}^\beta - \xi_i^\beta) [\mathbf{T}_{\beta\alpha}^T + \mathbf{T}_{\alpha\beta}^T - (\bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\theta} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\theta}) \mathbf{D}^{\theta T}] \\ & + \frac{|t_N|}{\|t_T^{\text{trial}}\|^3} t_{T_\alpha}^{\text{trial}} t_T^{\text{trial}\beta} (-\mathbf{P}_\beta^T + \epsilon_T (\xi_{i+1}^Y - \xi_i^Y) [\mathbf{T}_{\beta\gamma}^T + \mathbf{T}_{\gamma\beta}^T] \\ & + \mathbf{D}^{\theta T} [t_T^{\text{trial}} \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\theta} - \epsilon_T \mathbf{a}_{\theta\beta} \\ & \left. - \epsilon_T (\xi_{i+1}^Y - \xi_i^Y) (\bar{\mathbf{a}}_{\gamma,\theta} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_\gamma \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\theta}) \right] \}. \end{aligned} \quad (4.126)$$

A matriz de rigidez de contato fica definida então por

$$\mathbf{K}_{\text{contato}} = \mathbf{K}_N + \mathbf{K}_T = \mathbf{K}_N + \mathbf{K}_{T_1} + \mathbf{K}_{T_2}, \quad (4.127)$$

sendo que a matriz \mathbf{K}_{T_2} tem duas versões, dependendo se há deslizamento entre as superfícies de contato ou não.

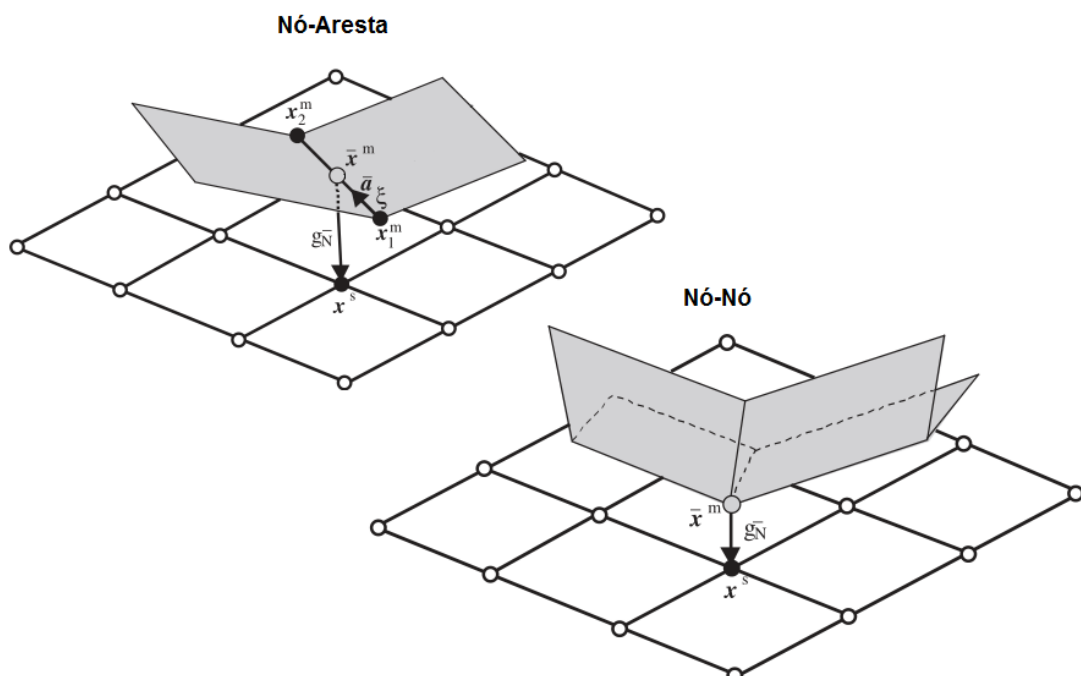
5 Contato com elemento finito B-Spline

Como observado na formulação descrita no capítulo anterior, a determinação das forças de contato depende da posição da projeção de um ponto da superfície escrava sobre a superfície mestre. Este ponto é chamado ponto x_m .

A superfície mestre formada por elementos de contato Lagrangianos, como descrita no capítulo quatro, apresenta quinas ou arestas, por conta da linearidade do elemento Lagrangiano. Por conta desta facetização da superfície mestra, é possível que a projeção de um ponto escravo qualquer recaia sobre uma quina ou aresta, ou seja, por um ponto dividido por dois ou mais elementos finitos, como mostra a Figura 5-1.

Caso um ponto x_m pertença ao domínio de dois ou mais elementos, faz-se necessário o uso de formulações adicionais para lidar com o contato nó-aresta ou nó-nó.

Figura 5-1: Projeções nó-aresta e nó-nó



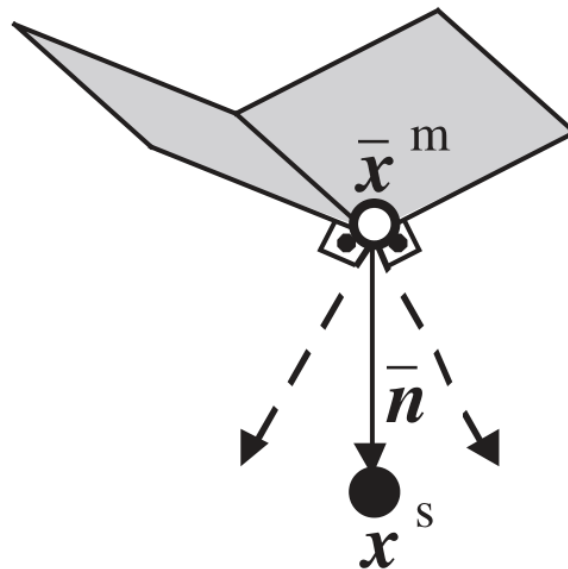
Fonte: (BANDEIRA, WRIGGERS e PIMENTA, 2004)

Além da formulação extra para os casos nó-aresta e nó-nó, tem-se ainda que a localização da normal pode ser de difícil determinação. A figura 5-2 ilustra esta questão. Nos limites entre os elementos, existem pontos que pertencem a dois (ou mais) elementos e possíveis mudanças bruscas na geometria. Estes pontos não geram uma normal unicamente definida, pois pertencem a mais de um elemento.

Ainda ilustrado pela Figura 5-2, pode-se observar que no caso de contato com deslizamento (“*slip*”) onde a projeção de um nó escrava qualquer x_m passa de um elemento a outro, tem-se uma mudança brusca na direção da normal, mudança gerada pela passagem do ponto x_m de um elemento à outro, o que pode criar dificuldades de convergência (WRIGGERS, 2006).

Como uma forma de eliminar os problemas descritos acima, ao invés de utilizar o elemento Lagrangiano tradicional para gerar uma superfície mestre de contato, pode-se utilizar de uma superfície B-Spline. Uma única superfície B-Spline é formada sobre a área de contato, ao invés de múltiplos elementos Lagrangianos.

Figura 5-2: Orientação da normal em contato nó-aresta.



Fonte: (BANDEIRA, WRIGGERS e PIMENTA, 2004)

A superfície B-Spline é gerada a partir de pontos definidos no espaço, chamados pontos de controle. A superfície gerada pode ser, a depender da ordem, suave, tendo continuidade em todos os seus pontos.

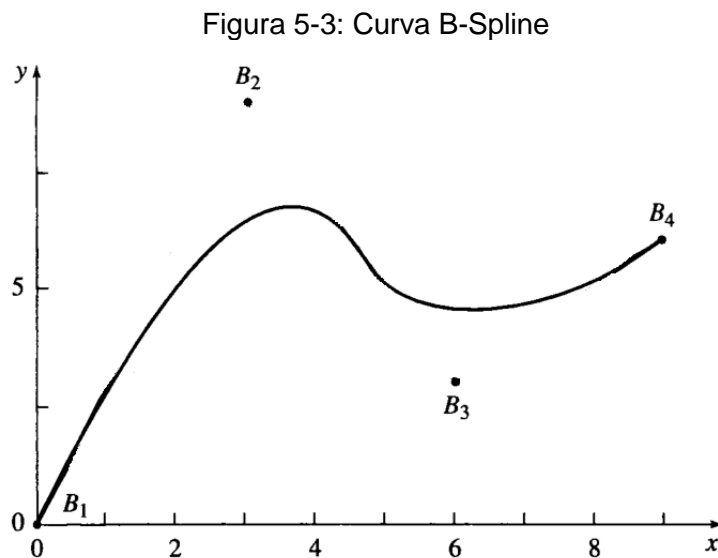
O uso de uma superfície B-Spline para representação da superfície de contato evita a necessidade de uma formulação de contato nó aresta ou nó nó, pois não há arestas ou nós sobre uma superfície B-Spline suave, uma vez que existe continuidade da normal ao longo da superfície. Para garantir que a superfície seja suave, ou seja, possua uma direção para a normal bem definida em todos os pontos, utiliza-se a superfície B-Spline com ordem igual ou superior a 3.

Definidas as vantagens de se utilizar uma superfície B-Spline como superfície de contato, resta adaptar a formulação de contato nó superfície à uma discretização baseada em uma superfície B-Spline, ao invés da utilização de elementos de contato com função de interpolação Lagrangiana.

5.1 B-Spline

Esta seção inicia-se demonstrando uma curva B-Spline, para introduzir o conceito e então à frente expandí-lo para uma superfície.

Conforme observado em (ROGERS, 2001), uma linha curva bidimensional B-Spline é uma linha formada a partir de pontos quaisquer no plano (ou espaço para superfícies B-Spline). Estes pontos são chamados pontos de controle, que na Figura 5-3, estão indicados por B1, B2, B3 e B4.



Fonte: (ROGERS, 2001)

A curva exibida na Figura 5-3 é denominada curva B-Spline. A construção desta curva é realizada através da utilização de funções base e da posição geométrica dos pontos de controle. As funções base são funções que definem ponderações à posição dos pontos de controle, baseando-se nestes para geração dos pontos pertencentes à curva B-Spline. Os pontos pertencentes à curva B-Spline são calculados a partir da seguinte expressão,

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{B}_i N_{i,k}(t) \quad t_{\min} \leq t < t_{\max} \quad 2 \leq k \leq n + 1. \quad (5.1)$$

Na expressão acima, B_i são os pontos de controle, $N_{i,k}(t)$ são as funções base, t é a variável paramétrica, k é a ordem da curva, $n + 1$ é o número de pontos de controle,

i é o índice, que vai de 1 até $n+1$, e $P(t)$ é o ponto contido na curva B-Spline. É importante notar que k apenas denota a ordem da função base e que a vírgula não denota derivada.

As funções base ($N_{i,k}(t)$) dependem de um valor paramétrico t . A variável t é compreendida entre os limites t_{\min} e t_{\max} , que são arbitrários. Desta forma, entende-se que a variável t representa um percentual da curva, entre 0% e 100%, ou seja, entre t_{\min} e t_{\max} .

A extensão da curva, entre t_{\min} e t_{\max} , é dividida em intervalos, delimitados por valores específicos de t (LES_PIEGL, 1997). Estes valores de t são denominados knots, e são ordenados em um vetor específico chamado vetor de knots. Os knots são definidos à conveniência do usuário, precisando respeitar apenas as condições de que seus valores sejam monotônicos, e seu número igual à soma do número de pontos de controle mais a ordem da curva B-Spline,

$$\dim \text{vetor de knots} = n + 1 + k. \quad (5.2)$$

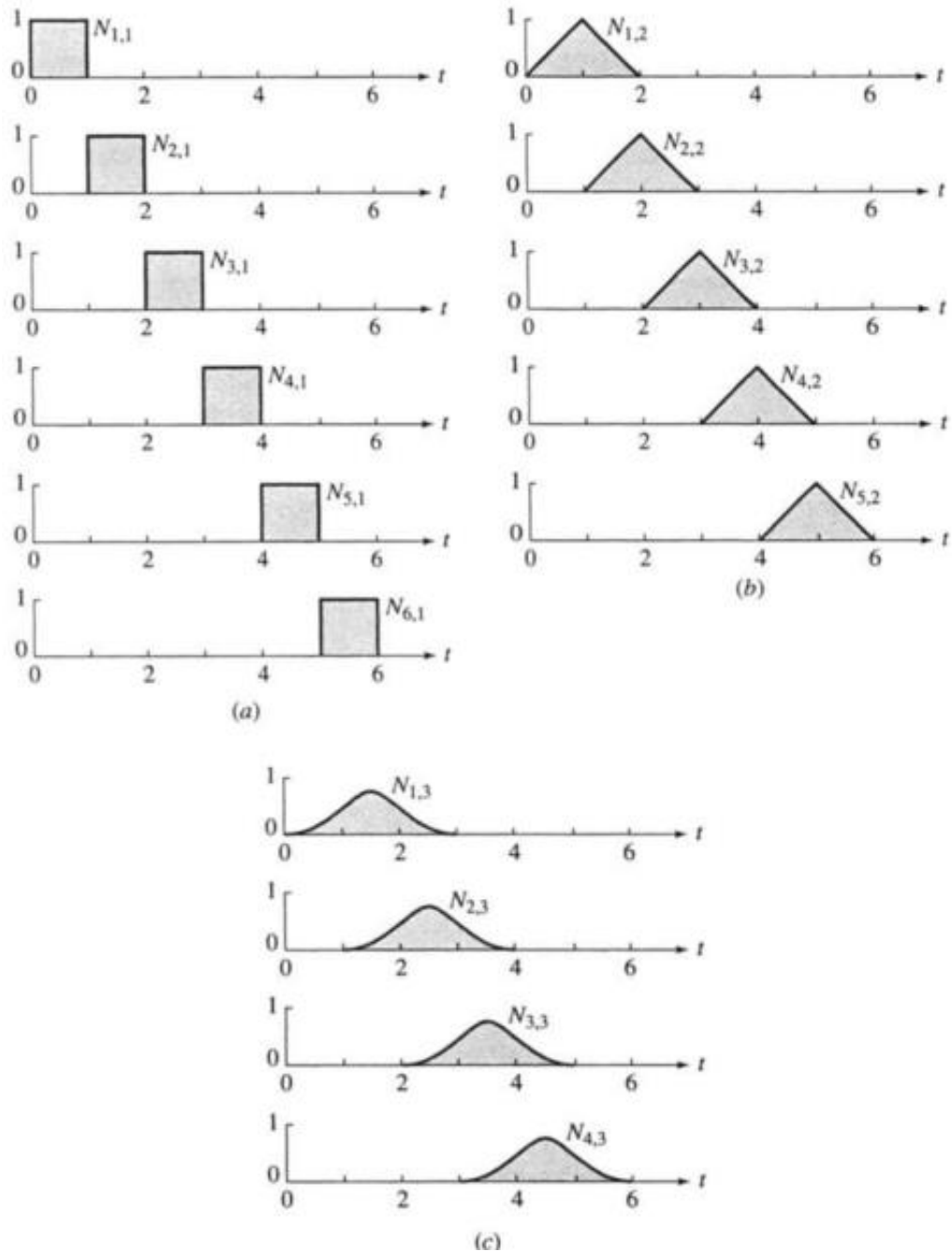
A função $N_{i,k}(t)$ é definida por

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i \leq t < x_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - x_i)N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t)N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}}, \quad (5.3)$$

onde os valores x_i são elementos do vetor de knots que satisfazem a relação $x_i < x_{i+1}$. A convenção $0/0 = 0$ é adotada. As funções base são normalizadas, i. e., seu valor varia entre 0 e 1 (ROGERS, 2001).

Figura 5-4: Funções base com ordem 1, 2 e 3



Fonte: (ROGERS, 2001)

A Figura 5-4 ilustra diferentes funções base $N_{i,k}(t)$, com diferentes ordens, variando de 1 a 3. As funções base ilustradas utilizam-se de um vetor de knots que varia entre 0 e 6 em incrementos de 1, definido por $\xi = [0,1,2,3,4,5,6]$.

Observa-se que quanto maior a ordem da função base, maior é o grau do polinômio gerado pela função. Conforme ilustra a figura, para a ordem 1, a função base tem

valor constante. Para a ordem 2, a função base é uma função do primeiro grau. Para a ordem 3, a função base é uma parábola. O grau do polinômio é dado por

$$\text{grau} = \text{ordem} - 1. \quad (5.4)$$

Observa-se ainda pela figura, que o subdomínio sob o qual a função base exhibe valor não nulo corresponde à um número de divisões do domínio t igual à ordem da curva B-Spline.

O valor dado pela função base apenas torna-se não nulo na região da curva próxima de seu respectivo ponto de controle. Por conta disto, um ponto de controle possui apenas influência local sobre a curva. A extensão desta influência é dada pela ordem da curva.

Para exemplificar, considere-se um vetor de knots dado por $\xi = [0,1,2,3,4,5,6]$. Observa-se que $t_{\min} = 0$ e $t_{\max} = 6$. Considere-se ainda, que a curva a ser gerada tem ordem 3 e possui 4 pontos de controle, portanto 4 funções base ($N_{1,3}(t)$, $N_{2,3}(t)$, $N_{3,3}(t)$ e $N_{4,3}(t)$).

Na curva construída com os parâmetros descritos acima, o domínio da função base $N_{1,3}(t)$ é o intervalo $[0,3]$, que corresponde à três intervalos entre knots. Para a função base $N_{2,3}(t)$, tem-se o intervalo $[1,4]$, para a função base $N_{3,3}(t)$ o intervalo $[2,5]$, e finalmente para a última função base $N_{4,3}(t)$, tem-se o intervalo $[3,6]$.

Extendendo a definição de curva B-Spline para superfícies, tem-se que a superfície $Q(t, u)$ é dada por

$$Q(t, u) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j} N_{i,k}(t) M_{j,l}(u), \quad (5.5)$$

onde $N_{i,k}(t)$ e $M_{j,l}(u)$ são as mesmas funções base definidas como em (5.3), mas definidas nas direções biparamétricas t e u . As funções $N_{i,k}(t)$ e $M_{j,l}(u)$ tem um vetor de knots individual próprio.

Para a utilização da superfície B-Spline como aproximação da malha de contato no método dos elementos finitos, necessita-se da definição da derivada da função $Q(t, u)$ nas direções t e u . Define-se então:

$$\frac{dQ(t, u)}{dt} = Q_t(t, u) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} \mathbf{B}_{i,j} N'_{i,k}(t) M_{j,l}(u), \quad (5.6)$$

$$\frac{dQ(t, u)}{du} = Q_u(t, u) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} \mathbf{B}_{i,j} N_{i,k}(t) M'_{j,l}(u), \quad (5.7)$$

$$\frac{dQ(t, u)}{dudt} = \frac{dQ(t, u)}{dtdu} = Q_{tu}(t, u) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} \mathbf{B}_{i,j} N'_{i,k}(t) M'_{j,l}(u), \quad (5.8)$$

$$\frac{dQ(t, u)}{dt^2} = Q_{tt}(t, u) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} \mathbf{B}_{i,j} N''_{i,k}(t) M_{j,l}(u) \quad (5.9)$$

e

$$\frac{dQ(t, u)}{du^2} = Q_{uu}(t, u) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} \mathbf{B}_{i,j} N_{i,k}(t) M''_{j,l}(u). \quad (5.10)$$

Necessita-se definir então a derivada da função base $N_{i,k}(t)$ e $M_{j,l}(u)$. Cabe salientar, que as duas tem a mesma definição dada em (5.3) e portanto será exibida apenas a demonstração para $N'_{i,k}$, uma vez a demonstração para $M'_{j,l}$ é análoga. $N'_{i,k}$ é dada por

$$N'_{i,k}(t) = \frac{N_{i,k-1}(t) + (t - x_i)N'_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t)N'_{i+1,k-1}(t) - N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}}, \quad (5.11)$$

sendo $N'_{i,1}(t) = 0$ para qualquer valor de t . A função $N''_{i,k}(t)$ é definida por

$$N''_{i,k}(t) = \frac{2N'_{i,k-1}(t) + (t - x_i)N''_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t)N''_{i+1,k-1}(t) - 2N'_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}}, \quad (5.12)$$

sendo que $N''_{i,1}(t) = 0$ e $N''_{i,2}(t) = 0$ para qualquer valor de t .

5.2 Determinação do ponto \mathbf{x}^m para a superfície B-Spline

Uma vez gerada a superfície B-Spline que representará a superfície mestre, parte-se para a resolução do problema de determinação dos pontos \mathbf{x}^m . É necessário determinar um ponto \mathbf{x}^m sobre a superfície mestre, referentes à projeção de cada ponto \mathbf{x}^s da superfície escrava. Os pontos da superfície escrava são os próprios nós da malha que a descreve. Um ponto da superfície mestre que tem a menor distância em relação a um ponto \mathbf{x}^s da superfície escrava analisado, é considerado o ponto \mathbf{x}^m .

Tem-se então um problema de determinação da menor distância entre um ponto específico (\mathbf{x}^s) e uma superfície (a superfície mestre). A solução nos dará um ponto na superfície mestre (\mathbf{x}^m) com a menor distância ao ponto \mathbf{x}^s .

Os pontos da superfície mestre são determinados pela superfície gerada pelo método das B-Splines. Um ponto qualquer \mathbf{P} da superfície mestre depende das coordenadas paramétricas t e u .

Então,

$$\mathbf{P}(t, u) = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Fica explicitado aqui que x_P , y_P e z_P são funções de t e u , e denotadas apenas por \mathbf{P} por conveniência.

Explicita-se então a função distância (d), em função das coordenadas do ponto \mathbf{P} no espaço \mathbb{R}^3 , e das coordenadas do ponto \mathbf{x}^s analisado. A função distância é dada por

$$d = \sqrt{(x_P - x_S)^2 + (y_P - y_S)^2 + (z_P - z_S)^2}. \quad (5.14)$$

O objetivo é calcular a menor distância entre o nó escravo e a superfície mestre. Para isto é necessário formular o seguinte problema de minimização:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } d(t, u) \\ &\text{onde } t, u \in \mathcal{R} \end{aligned}$$

Desta forma, para achar um ponto crítico da função, que pode ser um ponto de mínimo ou máximo, local ou global, deriva-se a função d em função das variáveis t e u e iguala-se a 0, ou seja,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial d}{\partial t} \\ \frac{\partial d}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(x_P - x_S)x_{P,t} + (y_P - y_S)y_{P,t} + (z_P - z_S)z_{P,t}}{\sqrt{(x_P - x_S)^2 + (y_P - y_S)^2 + (z_P - z_S)^2}} \\ \frac{(x_P - x_S)x_{P,u} + (y_P - y_S)y_{P,u} + (z_P - z_S)z_{P,u}}{\sqrt{(x_P - x_S)^2 + (y_P - y_S)^2 + (z_P - z_S)^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Este problema de minimização é resolvido pelo método de Newton.

5.3 Discretização da formulação de contato com elemento finito B-Spline

Em capítulos anteriores, definiu-se a formulação da força de contato escrita pela equação (4.90) e logo em seguida escrita na forma vetorial em (4.93).

Definiu-se também a linearização das forças de contato, que resulta na contribuição para a matriz de rigidez dentro do método dos elementos finitos em (4.116). A forma vetorial para a parcela normal é dada em (4.117).

Em (4.123), adicionada de (4.125), é definida a contribuição da força tangencial sem deslizamento (*stick*) para a matriz de rigidez.

Em (4.123), adicionada de (4.126), é definida a contribuição da força tangencial com deslizamento (*slip*) para a matriz de rigidez.

As equações acima serão utilizadas para a discretização da superfície mestre via uma superfície B-Spline, logo é conveniente que sejam rerepresentadas.

A equação abaixo representa a força de contato em sua forma vetorial,

$$\mathbf{R}_{\text{contato}} = t_N \mathbf{N} + t_{T_\alpha} \mathbf{D}^\alpha = t_N \mathbf{N} + t_{T_1} \mathbf{D}^1 + t_{T_2} \mathbf{D}^2. \quad (5.16)$$

Esta representa a contribuição à matriz de rigidez das forças de contato normais,

$$\mathbf{K}_N = \epsilon_N \mathbf{N} \mathbf{N}^T + t_N \left[\mathbf{N}_\alpha \mathbf{D}^{\alpha T} + \mathbf{a}^{\beta\alpha} \mathbf{T}_\alpha \left(\mathbf{N}_B^T - \mathbf{D}^{\gamma T} (\bar{\mathbf{n}}_c \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\gamma}) \right) \right], \quad (5.17)$$

e esta é a primeira parte para a contribuição das forças de contato tangenciais à matriz de rigidez,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{T1} = t_{T\alpha} \bar{h}^{\alpha\eta} [& (\mathbf{T}_{\eta\beta} + \mathbf{T}_{\beta\eta} + \hat{\mathbf{T}}_{\eta\beta}) \mathbf{D}^{\beta T} + \mathbf{D}^\beta (\mathbf{T}_{\eta\beta}^T + \mathbf{T}_{\beta\eta}^T + \hat{\mathbf{T}}_{\eta\beta}^T) \\ & - (\bar{\mathbf{a}}_\eta \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\gamma} + \bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\eta,\gamma} + \bar{\mathbf{a}}_{\eta,\beta} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\gamma - g_N \bar{\mathbf{n}}_c \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\eta,\beta\gamma}) \mathbf{D}^\beta \mathbf{D}^{\gamma T} \\ & - \mathbf{E} \mathbf{E}_\eta^T - \mathbf{E}_\eta \mathbf{E}^T - g_N \mathbf{N}_{\eta\beta} \mathbf{D}^{\beta T} - g_N \mathbf{D}^\beta \mathbf{N}_{\eta\beta}^T]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Para o caso onde não há deslizamento, soma-se a seguinte parcela à equação anterior,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{T2} = \epsilon_T \mathbf{D}^\alpha \left\{ - \left(\xi_{i+1}^\beta - \xi_i^\beta \right) [& \mathbf{T}_{\beta\alpha}^T + \mathbf{T}_{\alpha\beta}^T - (\bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\theta} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\theta}) \mathbf{D}^{\theta T} \right] \\ & + \mathbf{a}_{\beta\alpha} \mathbf{D}^{\beta T} \left. \right\}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Para o caso onde há deslizamento, a seguinte equação é somada,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{T2} = \mu \mathbf{D}^\alpha \left\{ \epsilon_N \frac{\mathbf{t}_{T\alpha}^{\text{trial}}}{\|\mathbf{t}_T^{\text{trial}}\|} \mathbf{N}^T \right. & \quad (5.20) \\ & + \frac{|t_N|}{\|\mathbf{t}_T^{\text{trial}}\|} \left(\epsilon_T \mathbf{a}_{\beta\alpha} \mathbf{D}^{\beta T} \right. \\ & - \epsilon_T \left(\xi_{i+1}^\beta - \xi_i^\beta \right) [\mathbf{T}_{\beta\alpha}^T + \mathbf{T}_{\alpha\beta}^T - (\bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\theta} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\theta}) \mathbf{D}^{\theta T}] \\ & + \frac{|t_N|}{\|\mathbf{t}_T^{\text{trial}}\|^3} \mathbf{t}_{T\alpha}^{\text{trial}} \mathbf{t}_T^{\text{trial}\beta} (-\mathbf{P}_\beta^T + \epsilon_T (\xi_{i+1}^\gamma - \xi_i^\gamma) [\mathbf{T}_{\beta\gamma}^T + \mathbf{T}_{\gamma\beta}^T] \\ & + \mathbf{D}^{\theta T} [\mathbf{t}_T^{\text{trial}} \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\theta} - \epsilon_T \mathbf{a}_{\theta\beta} \\ & \left. \left. - \epsilon_T (\xi_{i+1}^\gamma - \xi_i^\gamma) (\bar{\mathbf{a}}_{\gamma,\theta} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_\gamma \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\theta}) \right] \right) \left. \right\}. \end{aligned}$$

A formulação de contato é independente do tipo de elemento finito utilizado. Portanto, pode-se utilizar as mesmas equações apresentadas acima, associadas a

qualquer tipo de discretização do elemento de contato. Por exemplo, em (BANDEIRA, 2001) estas equações foram utilizadas para discretizar uma superfície de contato não suave formada por elementos isoparamétricos de contato. Nesta pesquisa, a superfície de contato será discretizada de forma suave, utilizando-se da superfície B-Spline.

Para tanto, é necessária uma nova discretização da formulação, utilizando-se das funções de interpolação do elemento B-Spline. Estas funções de interpolação serão as funções base definidas na equação (5.3).

De forma similar à discretização realizada para o elemento finito isoparamétrico, definem-se vetores onde a primeira posição do vetor refere-se ao nó escravo e as demais posições do vetor referem-se aos nós da superfície mestre.

Todos os pontos da superfície mestre serão incluídos nestes vetores, pois toda superfície mestre é composta de um único elemento finito B-Spline. Ademais, a função de interpolação utilizada será a função base da superfície B-Spline, e esta garante que as grandezas determinadas sejam devidamente interpoladas aos nós adequados na superfície mestre.

Para realização da adaptação da formulação para o elemento finito B-Spline, é necessário observar os vetores que constituem as equações acima em sua forma vetorial, e reformulá-los, em função do elemento B-Spline.

A princípio, observa-se que as coordenadas isoparamétricas ξ^1, ξ^2 do elemento Lagrangiano devem ser substituídas pelas coordenadas paramétricas t e u da função superfície B-Spline.

Os vetores \bar{a}_α tem a mesma definição dada em (4.57), mas é preciso atentar que x_m é redefinido, e depende agora da superfície B-Spline. Portanto, os parâmetros ξ^α referem-se às coordenadas paramétricas t e u . Então,

$$\bar{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}^m(\xi^\alpha, t)}{\partial \xi^\alpha} = \mathbf{x}_{,\alpha}^m(\xi^\alpha, t) \quad \text{sendo } \alpha = 1, 2, \quad (5.21)$$

é substituído por

$$\bar{a}_t = \frac{\partial \mathbf{x}^m(t, t)}{\partial t} = \mathbf{x}_{,t}^m(t, t) \quad (5.22)$$

e

$$\bar{\mathbf{a}}_u = \frac{\partial \mathbf{x}^m(u, t)}{\partial u} = \mathbf{x}_{,\alpha}^m(u, t). \quad (5.23)$$

Nas equações (5.24) e (5.25), a coordenada paramétrica é representada por t (não itálico) e a variável tempo é representada por t (itálico).

Tem-se que o termo $\bar{\mathbf{a}}_1$ é definido pela equação (5.6), $\bar{\mathbf{a}}_2$ é definido pela equação (5.7). Os termos $\bar{\mathbf{a}}_{1,2}$ e $\bar{\mathbf{a}}_{2,1}$ são iguais e definidos pela equação (5.8). O termo $\bar{\mathbf{a}}_{1,1}$ é definido pela equação (5.9) e o termo $\bar{\mathbf{a}}_{2,2}$ é definido pela equação (5.10).

Os termos $\bar{\mathbf{a}}_{\alpha\beta}$ e $\bar{\mathbf{b}}_{\alpha\beta}$ são os mesmos definidos nas equações (4.66) e (4.67), atentando-se à mudança na definição do termo $\bar{\mathbf{a}}_\alpha$.

Por uma questão de simplificação da notação, define-se

$$Q_{a/b} = N_{a,k}(t)M_{b,l}(u), \quad (5.26)$$

omitindo por brevidade a ordem k e l , e a dependência das variáveis paramétricas t e u .

Com a definição acima, tendo o número de pontos de controle na direção t chamado de “ a ”, e o número de pontos de controle na direção u chamado de “ b ”, redefine-se os vetores em:

$$\mathbf{V}_{\text{contato } i} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_s \\ \mathbf{v}_{1/1} \\ \mathbf{v}_{2/1} \\ \mathbf{v}_{3/1} \\ \dots \\ \mathbf{v}_{a-2/b} \\ \mathbf{v}_{a-1/b} \\ \mathbf{v}_{a/b} \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{1/1} \bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{2/1} \bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{3/1} \bar{\mathbf{n}}_c \\ \dots \\ -Q_{a-2/b} \bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{a-1/b} \bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{a/b} \bar{\mathbf{n}}_c \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -Q_{1/1,\alpha} \bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{2/1,\alpha} \bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{3/1,\alpha} \bar{\mathbf{n}}_c \\ \dots \\ -Q_{a-2/b,\alpha} \bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{a-1/b,\alpha} \bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{a/b,\alpha} \bar{\mathbf{n}}_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -Q_{1/1}\bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -Q_{2/1}\bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -Q_{3/1}\bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ \dots \\ -Q_{a-2/b}\bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -Q_{a-1/b}\bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -Q_{a/b}\bar{\mathbf{a}}_\alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}^\alpha = \frac{1}{\bar{\mathbf{a}}_{\alpha\beta} - g_{\bar{N}}\bar{\mathbf{b}}_{\alpha\beta}} [\mathbf{T}_\beta - g_{\bar{N}}\mathbf{N}_\beta] \quad \delta\bar{\xi}^\alpha = \mathbf{D}^\alpha \cdot \mathbf{V}_{\text{contato } i} \quad (5.27)$$

$$\Delta\mathbf{U}_{\text{contato } i} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u}_s \\ \Delta\mathbf{u}_{1/1} \\ \Delta\mathbf{u}_{2/1} \\ \Delta\mathbf{u}_{3/1} \\ \dots \\ \Delta\mathbf{u}_{a-2/b} \\ \Delta\mathbf{u}_{a-1/b} \\ \Delta\mathbf{u}_{a/b} \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -Q_{1/1,\alpha}\mathbf{t}_t^{\text{trial}} \\ -Q_{2/1,\alpha}\mathbf{t}_t^{\text{trial}} \\ -Q_{3/1,\alpha}\mathbf{t}_t^{\text{trial}} \\ \dots \\ -Q_{a-2/b,\alpha}\mathbf{t}_t^{\text{trial}} \\ -Q_{a-1/b,\alpha}\mathbf{t}_t^{\text{trial}} \\ -Q_{a/b,\alpha}\mathbf{t}_t^{\text{trial}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -Q_{1/1,\beta}\bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -Q_{2/1,\beta}\bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -Q_{3/1,\beta}\bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ \dots \\ -Q_{a-2/b,\beta}\bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -Q_{a-1/b,\beta}\bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -Q_{a/b,\beta}\bar{\mathbf{a}}_\alpha \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{T}}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \\ -Q_{1/1}\bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \\ -Q_{2/1}\bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \\ -Q_{3/1}\bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \\ \dots \\ -Q_{a-2/b}\bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \\ -Q_{a-1/b}\bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \\ -Q_{a/b}\bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -Q_{1/1,\alpha\beta}\bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{2/1,\alpha\beta}\bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{3/1,\alpha\beta}\bar{\mathbf{n}}_c \\ \dots \\ -Q_{a-2/b,\alpha\beta}\bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{a-1/b,\alpha\beta}\bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{a/b,\alpha\beta}\bar{\mathbf{n}}_c \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -Q_{1/1}\mathbf{1} \\ -Q_{2/1}\mathbf{1} \\ -Q_{3/1}\mathbf{1} \\ \dots \\ -Q_{a-2/b}\mathbf{1} \\ -Q_{a-1/b}\mathbf{1} \\ -Q_{a/b}\mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_\alpha = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{0}} \\ -Q_{1/1,\alpha}\mathbf{1} \\ -Q_{2/1,\alpha}\mathbf{1} \\ -Q_{3/1,\alpha}\mathbf{1} \\ \dots \\ -Q_{a-2/b,\alpha}\mathbf{1} \\ -Q_{a-1/b,\alpha}\mathbf{1} \\ -Q_{a/b,\alpha}\mathbf{1} \end{bmatrix}$$

6 Simulações Numéricas

A partir da formulação apresentada no trabalho, foi desenvolvido um programa na linguagem C para simulação em elementos finitos de problemas de contato mecânico. Neste programa, foram simulados exemplos numéricos, explicitados adiante.

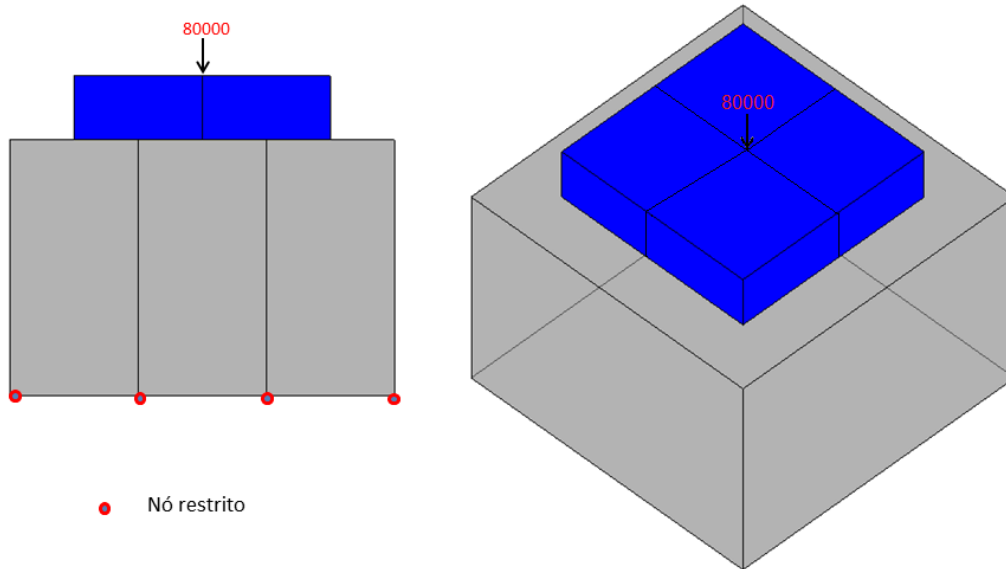
Todos os exemplos são problemas tridimensionais, envolvendo contato e grandes deformações. Todas as malhas de contato foram construídas utilizando-se do elemento de contato B-Spline. Em todos os exemplos, após ajustes no parâmetro da penalidade, foi obtido convergência quadrática.

6.1 Modelo numérico proposto por Parisch

Este exemplo, criado por (PARISCH, 1989) apud (BANDEIRA, 2001), consiste de dois corpos sólidos, prismas de base quadrada, como representado na Figura 6-1. O exemplo é composto de 50 nós e 13 elementos. O bloco inferior tem sua base fixada em todas as direções, enquanto o bloco superior não tem restrições de deslocamento. As dimensões dos blocos podem ser observadas na Figura 6-2. Uma carga de 80000 N é aplicada no centro da sua superfície superior.

Este exemplo foi simulado com contato normal apenas, e com a penalidade normal igual a $\epsilon_N = 10^5$, utilizando-se de um único incremento de carga. O bloco superior possui módulo de elasticidade de 10^3 Pa e o bloco inferior possui módulo de elasticidade de 10^4 Pa.

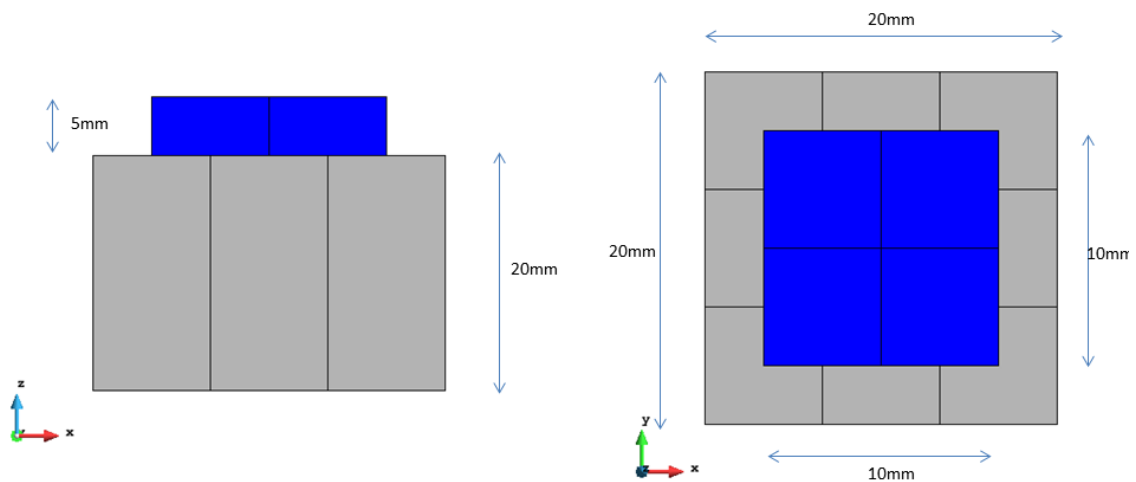
Figura 6-1: Exemplo Parisch



Fonte: Autor

A Figura 6-2 abaixo ilustra as dimensões do exemplo Parisch.

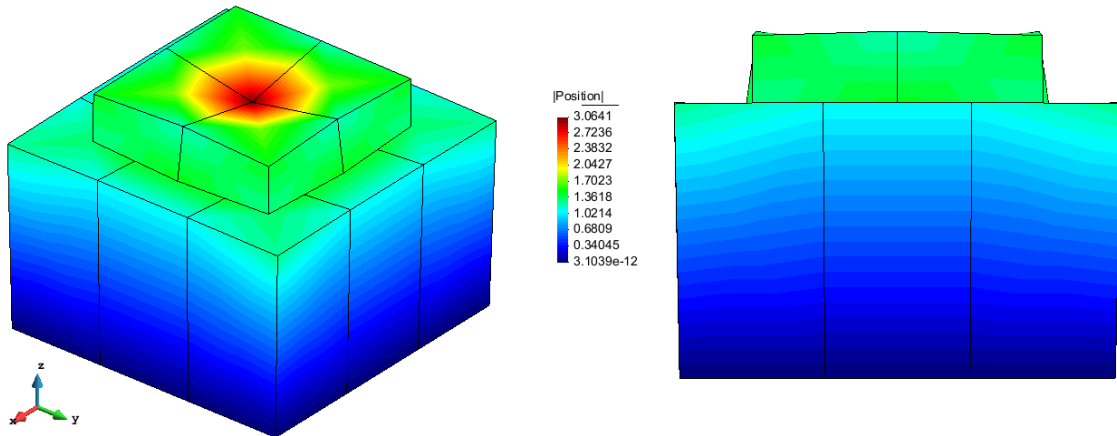
Figura 6-2: Dimensões do exemplo Parisch



Fonte: Autor

A deformação dos blocos e do ponto de aplicação de carga pode ser observada na Figura 6-3.

Figura 6-3: Exemplo Parisch após deformações



Fonte: Autor

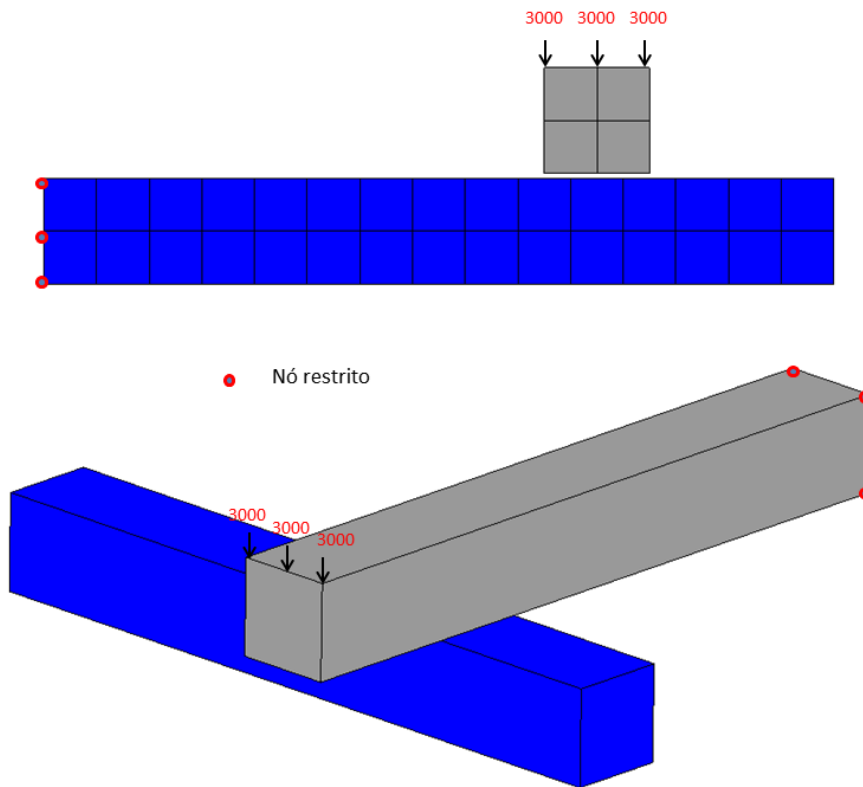
Após a deformação dos corpos, a cordenada na direção z (altura) do ponto de aplicação da carga é de 21,95 em (PARISCH, 1989), de 21,73 em (BANDEIRA, 2001) e de 21,94 nesta dissertação. Comparando o resultado detectou-se uma alta precisão.

6.2 Duas vigas

Este exemplo, ilustrado na Figura 6-4, consiste de duas vigas de dimensões iguais, sobrepostas e cruzadas, com um pequeno espaçamento entre os corpos. Este exemplo possui 288 nós e 120 elementos, e suas dimensões podem ser observadas na Figura 6-5. As duas vigas tem restrição em todos os nós de uma de suas extremidades. Na viga superior, na aresta superior da face livre, é aplicado um carregamento total de 9000 N.

O exemplo é executado com contato normal e tangencial, em 3 incrementos de carga. O valor da penalidade normal é igual a $\varepsilon_N = 10^5$ e o da penalidade tangencial é igual $\varepsilon_T = 10^3$. A viga superior apresenta módulo de elasticidade de $4 \cdot 10^{11}$ Pa, enquanto a viga inferior apresenta módulo de elasticidade de 10^{12} Pa. O coeficiente de atrito utilizado foi de $\mu = 0.2$.

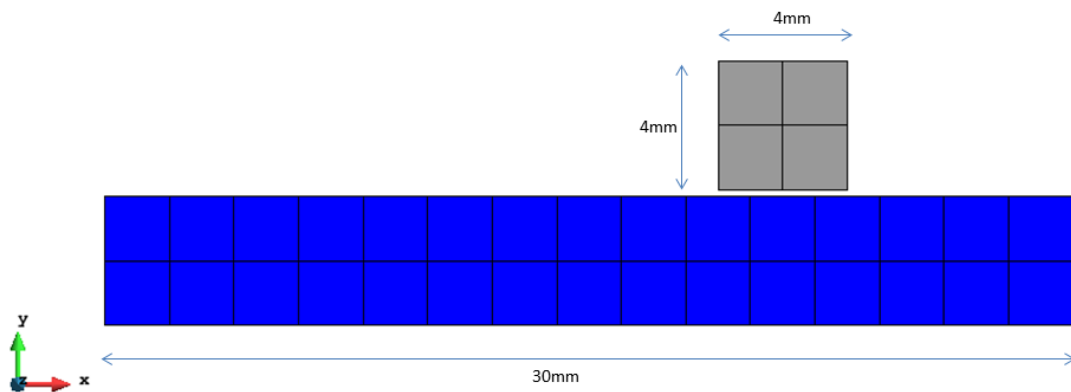
Figura 6-4: Exemplo Duas Vigas



Fonte: Autor

A Figura 6-5 abaixo ilustra as dimensões do exemplo.

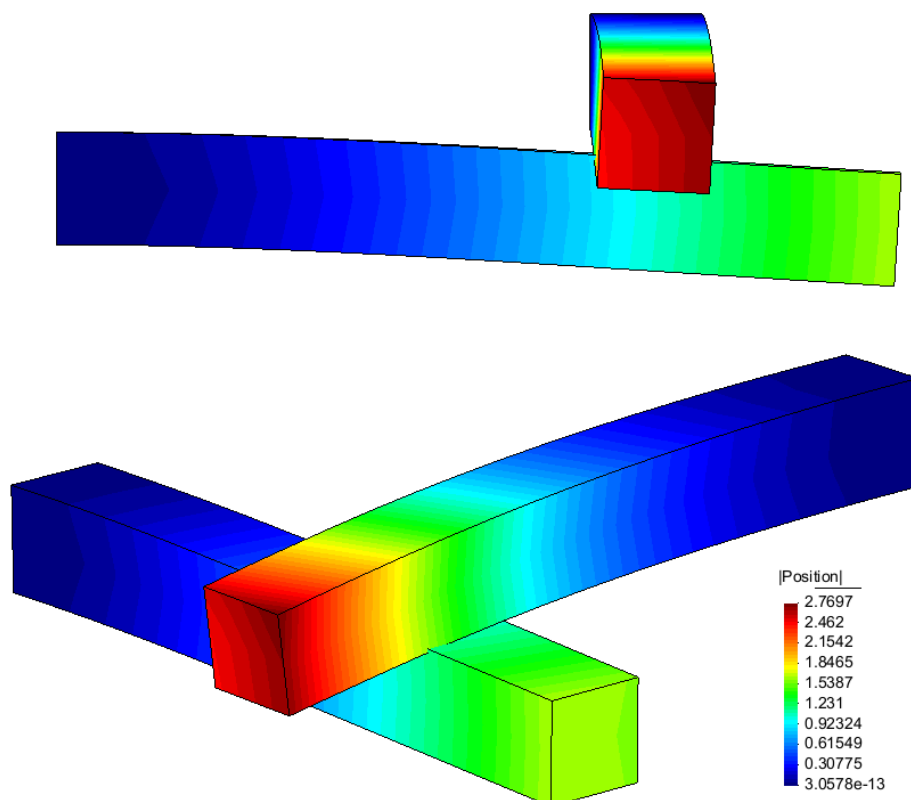
Figura 6-5: Dimensões do exemplo Duas Vigas



Fonte: Autor

Pode-se observar a deformação dos corpos e a interação na superfície de contato na Figura 6-6.

Figura 6-6: Exemplo Duas Vigas após deformações



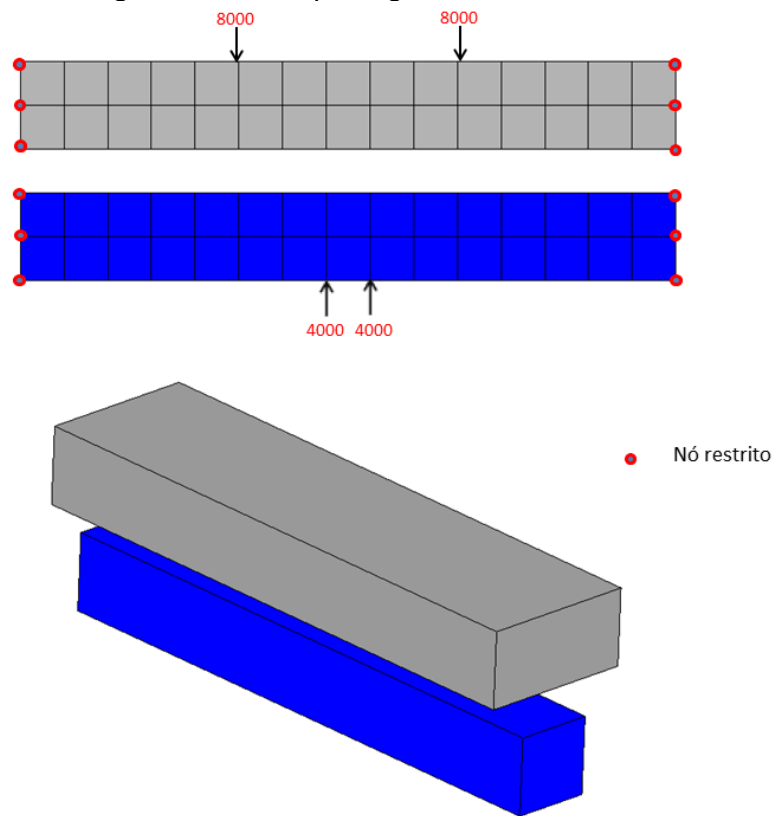
Fonte: Autor

6.3 Vigas Paralelas Deformáveis

Ilustrado na figura 6-7, o exemplo a seguir de 384 nós e 180 elementos consiste de duas vigas paralelas, de mesmo comprimento e altura, mas com a viga superior tendo o dobro da largura da inferior. Ambas vigas tem o mesmo módulo de elasticidade, 10^{11} Pa, e os carregamentos são distribuídos de forma a gerar um arco nas duas vigas. As extremidades de ambas as vigas tem restrições de deslocamento aplicadas, e suas dimensões podem ser observadas na Figura 6-8.

Este exemplo foi executado com contato normal e tangencial, em 30 incrementos de carga. Os parâmetros utilizados foram: penalidade normal igual a $\epsilon_N = 10^8$, penalidade tangencial igual a $\epsilon_T = 10^4$, e coeficiente de atrito igual a $\mu = 0.2$.

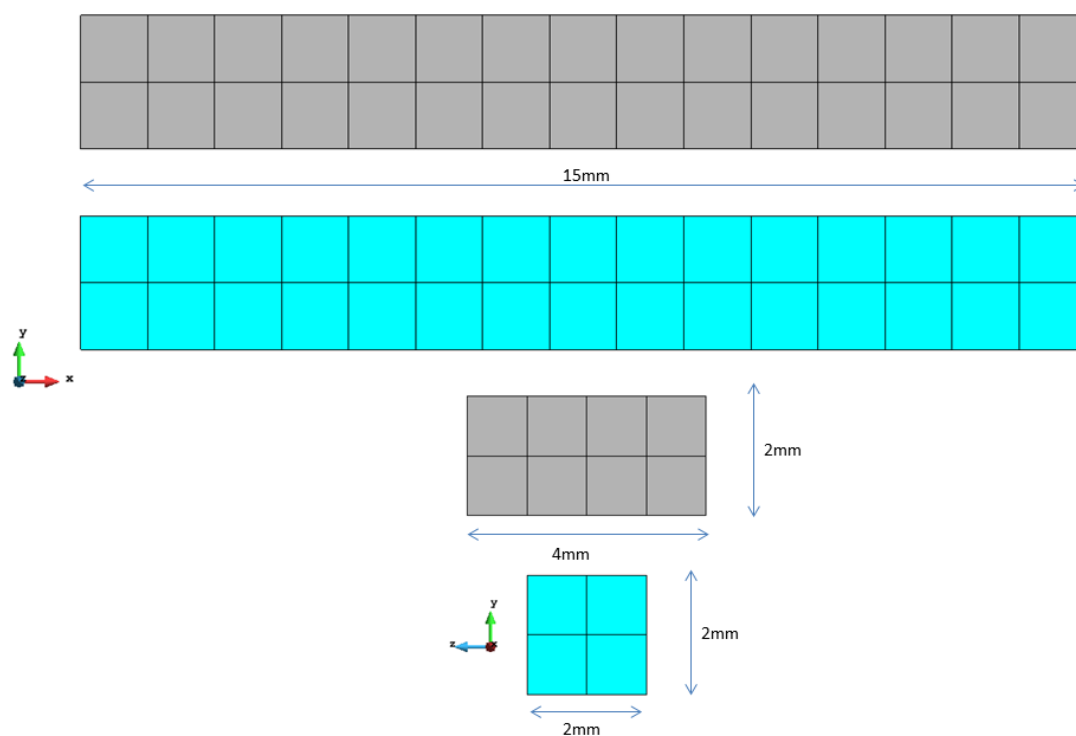
Figura 6-7: Exemplo Vigas Paralelas Deformáveis



Fonte: Autor

A Figura 6-8 abaixo exhibe as dimensões do exemplo.

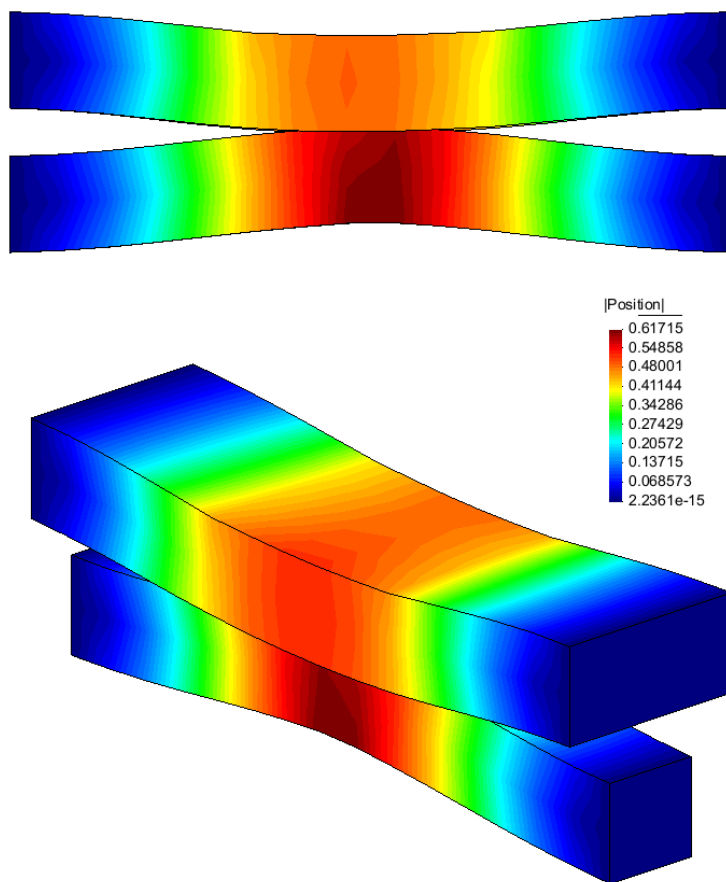
Figura 6-8: Dimensões do exemplo Vigas Paralelas Deformáveis



Fonte: Autor

Os resultados da análise numérica podem ser observados na Figura 6-9.

Figura 6-9: Vigas Paralelas Deformáveis após deformações



Fonte: Autor

7 Conclusão

O objetivo desta dissertação foi desenvolver uma formulação de contato com elementos B-Spline que suavizasse a superfície mestre de contato. Esta suavização tem a finalidade de eliminar o problema de facetização (descontinuidade entre os elementos de contato). Este problema é apresentado pelos elementos lagrangianos clássicos de contato, gerando dificuldades na determinação da normal da superfície de contato e dificultando a convergência da análise.

Foi desenvolvido o programa de elementos finitos, na linguagem C, com a formulação de contato demonstrada nesta dissertação. Neste programa foram simulados exemplos numéricos com um certo grau de complexidade para testar a performance e convergência dos algoritmos.

O primeiro exemplo foi sugerido por (PARISCH, 1989), modelado para formulação Lagrangiana de contato, antes do desenvolvimento das técnicas de suavização de malha. O exemplo apresentou interessantes resultados, comparados com os valores obtidos com a formulação Lagrangiana, e demonstrou convergência quadrática.

O segundo exemplo representou duas vigas cruzadas submetidas ao contato. Este exemplo apresentou grandes deformações e demonstrou uma convergência quadrática para a solução. A deformação obtida mostrou-se compatível com o comportamento físico esperado pelo fenômeno real.

O terceiro exemplo composto por duas vigas paralelas, apresentou deformações compatíveis com o que se espera do comportamento de corpos reais sob carregamentos similares, mesmo sujeito à deformações extremas da superfície de contato original. O exemplo apresentou convergência quadrática entre os incrementos de carga.

Observou-se que a superfície escrava acomoda-se sobre a superfície mestre, garantindo uma suavização de todo o sistema, assim como uma rápida convergência, em todos os exemplos realizados.

Dados os resultados obtidos com os exemplos, conclui-se que a proposta apresentada pela dissertação de desenvolver um tratamento simplificado à

suavização da malha de contato na superfície mestre, foi cumprida de forma satisfatória.

Graças à formulação desenvolvida, apenas a formulação de contato nó-superfície se faz necessária, eliminando a necessidade das formulações nó-aresta e nó-nó, simplificando a simulação.

Para futuros trabalhos, sugere-se uma comparação das diferentes técnicas de suavização existentes (Mortar, NURBS com discretização de ambas superfícies e elemento Hermitiano) com a desenvolvida neste trabalho, observando a convergência, custo computacional e precisão da análise.

Referências

- A. FRANCAVILLA, O. C. Z. A note on numerical computation of elastic contact problems. **Int. J. Numer. Methods Eng.** **9 (1975) 913-924**, 1975.
- ALAIN BATAILLY, B. M. N. C. A comparative study between two smoothing strategies for the simulation of contact with large sliding. **Comput Mech**, p. 581-601, 2013.
- BANDEIRA, A. A. Análise de problemas de contato com atrito em 3D. **Tese (Doutorado) - Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo**, São Paulo, 2001. 275.
- BANDEIRA, A. A. et al. Algoritmos de otimização aplicados à solução de sistemas estruturais não-lineares com restrições: uma abordagem utilizando os métodos da Penalidade e do Lagrangiano Aumentado. **Exacta (São Paulo. Impresso)**, 8, 2010. 345-361.
- BANDEIRA, A. A.; WRIGGERS, P.; PIMENTA, P. M. Numerical derivation of contact mechanics interface laws using a finite element approach for large 3D deformation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, England, 59, 2004. 173-195.
- BATHE, K.-J. **Finite Element Procedures**. First. ed. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1996.
- BERTSEKAS, D. P. **Nonlinear programming**. Belmont: Athena Scientific, 1995.
- COOK, M. P. W. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4th. ed. [S.I.]: John Wiley & Sons, INC., 2002.
- D.J. BENSON, J. O. H. A single surface contact algorithm for the post-buckling analysis of shell structures. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng** **78 (1990) 141-163**, 1990.
- DE LORENZIS, L.; WRIGGERS, P.; ZAVARISE, G. A mortar formulation for 3D large deformation contact using NURBS-based isogeometric analysis and the augmented Lagrangian method. **Comput Mech**, 49, 2012. 1-20.

FLETCHER, R. **Practical methods of optimization**. Chichester: John Wiley & Sons, v. 2, 1980.

HUGHES, T. R. J.; TAYLOR, R. L.; KANOKNUKULCHAI, W. A Finite Element Method for Large Displacement Contact and Impact Problems. **In Formulations and Computational Algorithms in FE Analysis**, ed. K. J. Bathe, MIT-Press, Boston, ?, 1977. 468-95.

I. TEMIZER, P. W. T. J. R. H. Contact treatment in isogeometric analysis with NURBS. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, p. 1100-1112, 2011.

J. AUSTIN_COTTRELL, T. J. R. H. Y. B. **Isogeometric Analysis**. 1st. ed. [S.l.]: Wiley, 2009.

K.J. BATHE, A. C. A solution method for planar and axissymmetric contact problems. **Int. J. Numer. Methods Eng 21 (1985) 65-88**.

L. DE LORENZIS, I. T. P. W. G. Z. A large deformation frictional contact formulation using NURBS-based isogeometric analysis. **INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING**, 2011.

LAURSEN, T. A. **Computational Contact and Impact Mechanics**. [S.l.]: Springer, 2002.

LES_PIEGL, W. T. **The NURBS Book**. 2nd. ed. [S.l.]: Springer, 1997.

LUENBERGER, D. G. **Linear and Nonlinear Programming**. 2. ed. Reading. ed. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1984.

M.E. MATZEN, T. C. M. B. A point to segment contact formulation for isogeometric, NURBS based finite elements. **Elselvier**, 2012.

PARISCH, H. A Consistent Tangent Stiffness Matrix for Three-Dimensional Non-Linear Contact Analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 28, 1989. 1803-12.

PIMENTA, P. M. **Fundamentos da Mecânica dos Sólidos e das Estruturas**. [S.l.]: [s.n.], 2006.

REDDY, J. N. **An Introduction to Continuum Mechanics**. 2nd. ed. New York: Cambridge University Press, 2013.

ROGERS, D. F. **An Introduction to NURBS**. [S.I.]: Morgan Kaufman Publishers, 2001.

SIMO, J. C.; LAURSEN, T. A. An augmented Lagrangian Treatment of Contact Problems Involving Friction. **Computers & Structures**, 42, 1992. 97-116.

SIMO, J. C.; LAURSEN, T. A. **A Continuum-Based Finite Element Formulation for the Implicit Solution of Multibody, Large Deformation Frictional Contact Problems**. [S.I.]: John Wiley & Sons, Ltd, 1993.

V. PADMANABHAN, T. A. L. A framework for development of surface smoothing procedures in large deformation frictional contact analysis. **Finite Element in Analysis and Design**.

WRIGGERS, P. Finite Element Algorithms for Contact Problems. **Archives of Computational Methods in Engineering**, 2, 1995. 1-49.

WRIGGERS, P. **Computational Contact Mechanics**. Second Edition. ed. Hannover, Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

WRIGGERS, P. **Nonlinear Finite Element Methods**. Hannover, Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.

WRIGGERS, P.; SIMO, J. C.; TAYLOR, R. L. **Penalty and Augmented Lagrangian Formulations for Contact Problems**. Proceedings of NUMETA 85 Conference. Balkema, Rotterdam: [s.n.]. 1985.

WRIGGERS, P.; VAN, T. V.; STEIN, E. Finite Element Formulation of Large Deformation Impact-Contact Problems with Friction. **Computers & Structures**, 37, 1990. 319-331.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. **The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics**. 6. ed. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.