Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

ANAGLIFOS:
Geometria Espacial Sob Outra Perspectiva

Emerson Ferreira de Oliveira

Salvador - Bahia
Fevereiro de 2016

ANAGLIFOS:
Geometria Espacial Sob Outra Perspectiva

Emerson Ferreira de Oliveira

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello.

Salvador - Bahia
Fevereiro de 2016

Ficha
Catalográfica

ANAGLIFOS:
Geometria Espacial Sob Outra Perspectiva

Emerson Ferreira de Oliveira

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Joilson Oliveira Ribeiro
UFBA

Prof. Dr. Paulo César Rodrigues Pinto Varandas
UFBA

A Deus,à minha família e aos amigos.

Agradecimentos

O passado o presente e o futuro somos nós.
Dedico este fascinante momento da minha vida aos meus pais e aos meus filhos.
Agradeço a Deus por me dar forças e me permitir chegar até aqui.
Agradeço aos meus pais, por estarem sempre presentes em minha vida. Ainda que distante, sinto seu amor, sua dedicação e seu apoio em todos os meus passos.
Agradeço a Joyce por me apoiar em tudo, caminhar do meu lado e fazer o meu mundo mais feliz.
Agradeço aos meus familiares e amigos que contribuiram com esta conquista e de alguma forma continuarão comigo nesta nova jornada que se inicia.
E por fim agradeço a Gabriel e Ariel que só por existirem fazem tudo fazer sentido na minha vida.
A vocês ofereço a minha vitória!

“Se eu vi longe, foi por estar sobre ombros de gigantes”.
Isaac Newton

Resumo

Este trabalho, que se inscreve no campo do ensino de matemática, apresenta a possibilidade da utilização da estereoscopia, para auxiliar no processo de ensino-aprendizagem de conteúdos ligados a geometria espacial. Mais especificamente pretende-se analisar a influência dos anaglifos na visualização de figuras tridimensionais e consequentemente na assimilação de conceitos que demandam visão tridimensional.

A noção de profundidade é uma sensação criada pelo cérebro humano para enxergarmos melhor o mundo a nossa volta. Os nossos olhos estão posicionados em pontos distintos e esta diferença determina a formação de imagens diferentes em cada olho. Quando observamos um objeto qualquer o nosso cérebro tem a capacidade de interpretar a disparidade das imagens criadas em cada olho e criar uma única figura plana ou tridimensional de acordo com o nível da disparidade observada.

A estereoscopia é uma forma de driblar o mecanismo cerebral responsável pela criação da sensação de profundidade. Para tanto são criadas cuidadosamente duas imagens planas diferentes que precisam ser observadas cada uma exclusivamente por cada olho. Desta forma teremos em cada olho uma imagem plana diferente. Esta disparidade entre as duas figuras será entendida pelo cérebro como uma única figura tridimensional ocasionando assim a sensação de profundidade.

A observação de sólidos geométricos e seus componentes através dos anaglifos facilita o entendimento de geometria espacial, pois alem dos aspectos didáticos a visão 3D é uma tecnologia que atrai os estudantes.

Palavras-chave: Estereoscopia - Anaglifos - Geometria Espacial.

Abstract

This work, which falls in the field of Mathematics Education, presents the possibility of use of Stereoscopy, to assist in the process of teaching-learning of contents linked to Spatial Geometry. More specifically we intend to analyze the influence of viewing three-dimensional figures anaglifos and consequently in the assimilation of concepts that require three-dimensional vision.

The depth perception is a feeling created by the human brain to see better the world around us. Our eyes are placed in different points and the difference determines the formation of different images in each eye. When we see an object any our brain has the ability to interpret the disparity of images created in each eye and create a single flat or three-dimensional figure according to the level of disparity observed.

Stereoscopy is a way to bypass the brain mechanism responsible for creating the sense of depth. For both are carefully created two different flat images that need to be observed each exclusively for each eye. In this way we will have in each eye a different flat image. This discrepancy between the two figures will be understood by the brain as a single three-dimensional figure causing thus the sense of depth.

The observation of geometric solids and its components through the anaglifos facilitates the understanding of Spatial Geometry, because besides the didactic aspects of the 3D view is a technology that attracts students.

Keywords: Stereoscopy-Anaglifos-Space Geometry.

Sumário

Introdução

Segundo estatísticas do Ministério da Educação (MEC) a quantidade de matrículas no nível médio caiu de 8,7 para 8,3 milhões entre os anos de 2002 e 2012. É fato que de forma geral os estudantes vêm demonstrando grande desinteresse pelas disciplinas escolares, e mais especificamente pela matemática, que encabeça a relação das disciplinas menos atraentes ao olhar dos estudantes.

Dentro deste contexto a matemática é discutida por especialistas, trazendo a tona tópicos específicos desta área do conhecimento como, por exemplo, o nível de rigor e formalização dos conceitos matemáticos, a relação da matemática com a realidade e a matemática a serviço da cidadania. A partir destas discussões a educação matemática sugere como caminhos alternativos para aperfeiçoar o ensino desta disciplina as seguintes tendências: Modelagem, situações problemas, investigação matemática, utilização de jogos e TIC (Tecnologias da Informação e Comunicação) entre outras.

A geometria espacial, como qualquer outro conteúdo, possui suas especificidades e desta forma demanda atenção por parte do professor em determinados pontos como, por exemplo, a visualização de figuras tridimensionais bem como a suas representações planas e as dificuldades dos estudantes em interpretá-las. Estas dificuldades podem ser verificadas através dos resultados do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM, 2006), que indicaram, em particular, deficiências significativas no aprendizado de Geometria Espacial, o que sinaliza a necessidade de mudanças na forma de ensinar.

Pretendemos mostrar com este trabalho que a estereoscopia e mais especificamente os anaglifos podem interferir positivamente em pelo menos dois aspectos relacionados às dificuldades de aprendizagem de geometria espacial; A dificuldade de visualização de figuras tridimensionais e o desinteresse pelos conteúdos por parte dos estudantes.

Nas séries iniciais as demonstrações matemáticas dão lugar as figuras e objetos concretos para visualização de conceitos matemáticos, mas em qualquer fase acadêmica é interessante que a validação de afirmações geométricas seja obtida inicialmente através da percepção do estudante, ou seja, possa ser tocada ou vista por ele. Este trabalho traz em seu bojo uma nova tecnologia que é o uso dos óculos anaglíficos em aulas de matemática com o objetivo de facilitar a visualização de figuras tridimensionais.

Capítulo 1

Referenciais Teóricos

Neste capítulo veremos alguns conceitos básicos, necessários ao desenvolvimento e aprofundamento das ideias deste trabalho.

1.1 Teoria da Transposição Didática

A Transposição Didática segundo Chevallard [1] (1985) é a transformação do savoir savant (saber sábio) em savoir à enseigner (saber a ser ensinado). Ou seja, são todas as modificações sofridas pelo saber desde que ele é formalizado por um acadêmico até que este saber esteja pronto para ser ensinado em uma sala de aula.

Este aspecto é bastante relevante neste trabalho, pois o professor precisa não apenas conhecer o conteúdo que será abordado, mas também observar quais mudanças serão necessárias para que este conteúdo seja apreendido, ou seja, o professor precisa se ater ao processo de transposição didática.

Segundo a Teoria da Transposição Didática as situações aplicadas em sala de aula precisam ser cuidadosamente preparadas, e esta preparação perpassa pela visão do professor tendo em vista que ele fará as escolhas que determinarão o curso da aula, ou seja, realizará a transposição didática. Neste contexto o papel do professor é produzir situações favoráveis, de modo que o aluno possa transformar a situação exposta em conhecimento. A proposta deste trabalho é apresentar ao professor a estereoscopia como mais uma possibilidade de transposição didática.

1.2 Visão Binocular

Visão binocular ou binocularidade é a capacidade de apreender estímulos visuais com dois olhos. A binocularidade tem funções diferentes em determinados grupos de espécies de seres vivos. Nas espécies classificadas como presas os olhos estão posicionados nas laterais da cabeça o que proporciona um campo visual de 360^o podendo assim visualizar predadores que por ventura venham a se aproximar deles vindo de qualquer direção, como a visão do coelho representada na figura1.1.

[1] Yves Chevallard, nascido 1 de Maio de 1946 em Marselha na França é considerado uma das figuras mais emblemáticas da Didática da matemática francesa ao lado de Guy Brousseau e Gerard Vergneau.

Figura 1.1: Visão 360^{o} do coelho
Fonte: http://mundoestranho.abril.com.br/materia/qual-animal-tem-a-melhor-visao

Os predadores de uma forma geral possuem os olhos posicionados na parte frontal da cabeça permitindo a superposição das imagens obtidas em cada olho,como pode ser observado na figura 1.2, esta superposição apesar de restringir o campo visual para 180 graus, proporciona uma visão mais apurada permitindo a percepção mais precisa de aspectos como as perspectivas, contornos, tamanho relativo das imagens, perspectiva cinemática, iluminação e profundidade, em especial a profundidade que constitui um dos focos deste trabalho.

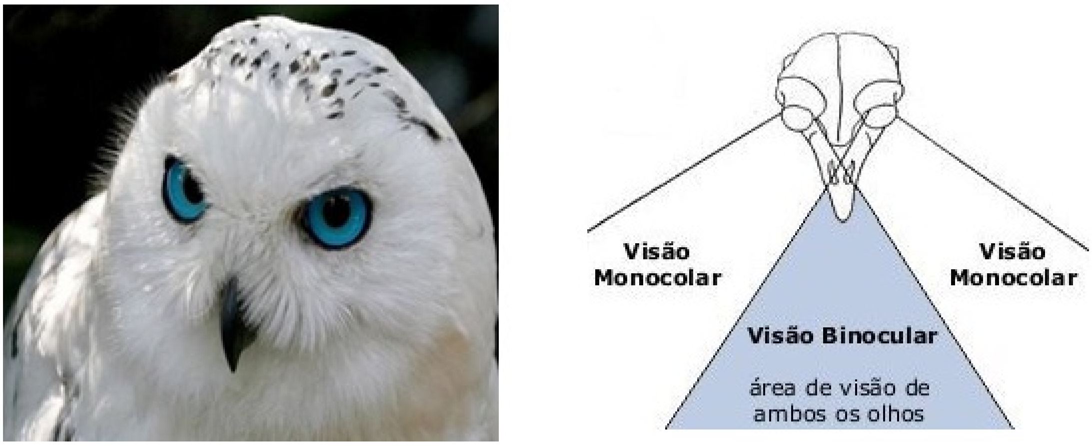


Figura 1.2: Visão Binocular de uma Coruja da Neve
Fonte: http://images.forwallpaper.com/files/thumbs

1.3 Profundidade e Perspectiva

Por que retas paralelas parecem se cruzar no infinito?

A visão humana tem campo de vista cônico conforme representado na figura 1.4, tendo como limites as retas r1 e r2. Nesta figura temos representação da observação de um objeto retangular. Para que possamos enxergar em profundidade o cérebro humano simula

Figura 1.3: Trilhos representando retas paralelas que parecem se cruzar
Fonte: http://www.frontiers-capital.com/wp-content/uploads/2013/01/Unknown

os limites do campo de visão representados pelas retas r1' e r2' em posições paralelas, criando um campo visual retangular. Para compensar esta simulação os objetos ficam deformados como pode ser observado ainda na figura 4, onde o objeto retangular é visto com suas dimensões alteradas, e aparentemente o lado mais próximo do observador é maior do que o lado mais distante. Analogamente temos a impressão que retas paralelas se cruzam no infinito.

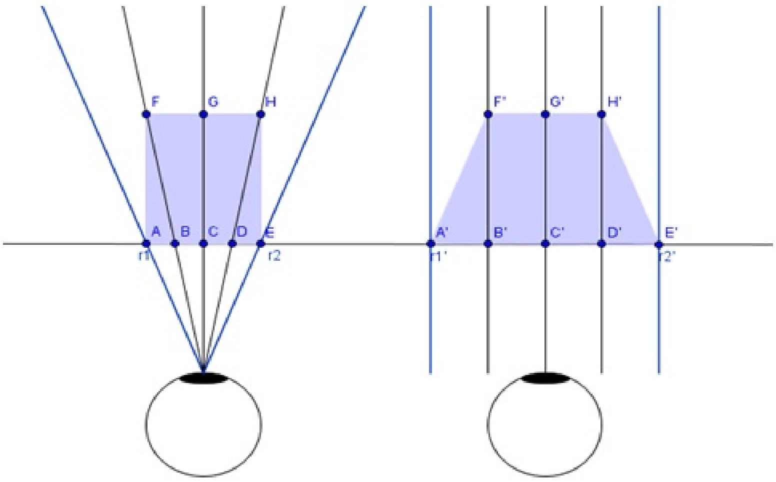


Figura 1.4: Simulação do campo visual com limites paralelos.
Fonte: Geogebra

Outro mecanismo da visão, interessante para este trabalho é a projeção em perspectiva. Em desenho técnico as projeções são desenhadas definindo um plano intermediário, chamado de quadro, como pode ser visto na figura 1.5, entre o ponto de observação e o objeto. No quadro os objetos são projetados em tamanhos diferentes de acordo com a sua distância do observador. O cérebro humano realiza um trabalho similar a este, projetando imagens de objetos situados em profundidades diferentes em um mesmo plano, mas neste caso o quadro onde são projetadas as imagens fica antes do observador e não entre o observador e o objeto como no desenho técnico.

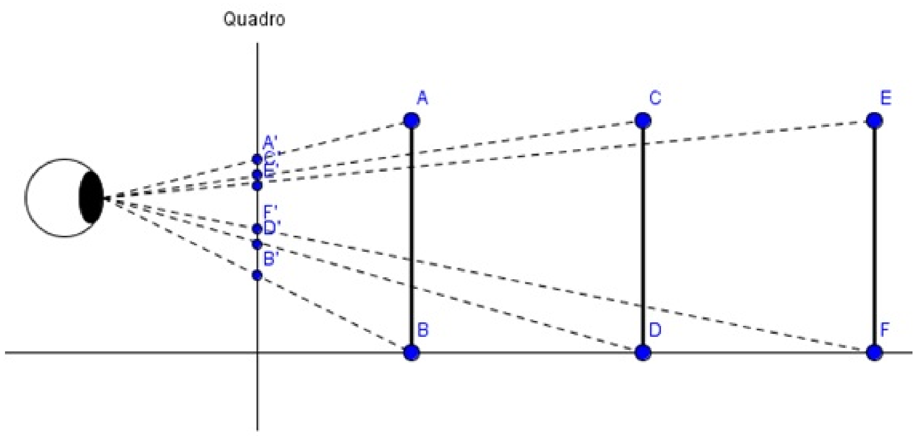


Figura 1.5: Ilustração da projeção em perspectiva.
Fonte: Geogebra

1.3.1 A câmara escura

Os primeiros relatos na história referentes à existência de uma câmara escura datam do século 4a.C. na Grécia. Trata-se de um compartimento fechado com todas as paredes internas pintadas de preto e um orifício em uma das paredes por onde passam raios de luz, como pode ser visto na figura 1.6. Estes raios projetam na parede interna da câmara oposta ao orifício uma imagem invertida da cena exterior a câmara.

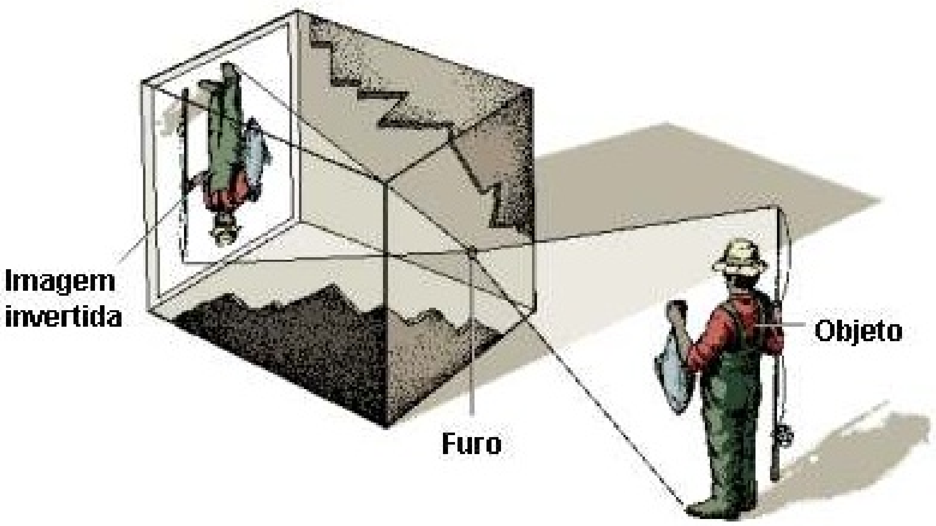


Figura 1.6: Câmara Escura
Fonte: http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/upload/conteudo/camara

Alguns artistas em momentos distintos da história se utilizaram da câmara escura e outros elementos, como espelhos e raios luminosos, ligados a ótica para construir suas obras de arte.

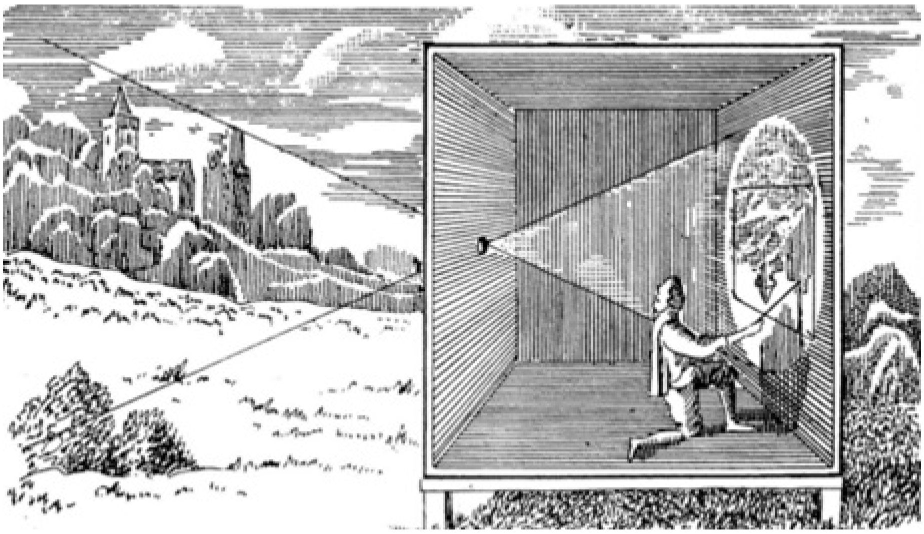


Figura 1.7: Pitor utilizando a câmara escura
Fonte: http://2.bp.blogspot.com

Dentre os artistas mais notáveis está o pintor italiano Caravaggio [2] que já no século XVI possuía em seu ateliê um compartimento escuro onde produzia obras a partir de imagens reais projetadas em telas utilizando a tecnologia da câmara escura, ele utilizava-se também de espelhos para que as imagens não fossem projetadas invertidas.

Figura 1.8: Obra do pintor Caravaggio tendo a escuridão como pano de fundo
Fonte: http://allart.biz/up/photos/album/B-C/Caravaggio

Este artista que foi classificado como tenebrista pela presença constante da escuridão como pano de fundo em suas telas. Segundo Caravaggio "Em arte, tudo o que não for tirado da vida é frivolidade", este grande mestre teve várias de suas pinturas recusadas por

[2]Michelangelo Merisi da Caravaggio , conhecido como Caravaggio, foi um dos mais notados pintores italianos, atuante em Roma, Nápoles, Malta e Sicília, entre 1593 e 1610. Seu trabalho exerceu influência importante no estilo barroco, estilo do qual foi o primeiro grande representante.

ser "muito realista", o que de uma forma geral não era comum nem bem aceito entre os artistas contemporâneos a ele, tampouco a outros indivíduos da sociedade de sua época. O fundo escuro da obra São Francisco de Assis em Êxtase vista na figura 1.8 leva a crer que a mesma foi construída com a utilização de uma câmara escura.

Ao longo da história filósofos, físicos e matemáticos entre outros deram suas contribuições para o desenvolvimento da câmara escura até que no Século XVIII o francês Joseph Niépce [3] conseguiu obter a primeira fotografia permanente, vista na figura 1.9, utilizando uma caixa escura, e um papel sensibilizado a luz através de um tipo de betume. Neste processo, chamado de Heliografia, a cena demorava em torno de oito horas exposta a luz do sol para ser capturada e fixada ao papel. A primeira fotografia chamada de "Vista da janela do Le Gras" foi a paisagem vista da janela da residência de Joseph Niépce e projetada através de uma câmara escura.

Figura 1.9: Primeira fotografia permanente da historia
Fonte: http://s2.glbimg.com

Com a utilização de outras substâncias químicas como o cloreto de prata, iodo e bromo, o papel sensibilizado evoluiu para os negativos, a partir dos quais poderiam ser impressas várias imagens positivas. As fotografias além de poderem ser reproduzidas várias vezes, após algum tempo passaram a ser coloridas e depois digitais. A idéia da projeção para a obtenção das imagens continua sendo a mesma, mas a tecnologia para a captura da imagem projetada mudou muito.

Hoje as câmeras fotográficas popularizaram-se e são, dentre várias, apenas mais uma ferramenta disponível nos, tão comuns, aparelhos celulares. As atuais câmeras digitais possuem como componente básico o CCD (Charge Coupled Device) ou dispositivo de carga aplicada, que são dispositivos munidos de células digitais sensíveis a luz, capazes de medir a intensidade de luz e determinar com precisão a cor de cada ponto da imagem. Estas unidades fotossensíveis são chamadas de pixels a quantidade delas determina a resolução da imagem obtida.

[3]Joseph Nicéphore Niépce (Chalon-sur-Saône, 7 de março de 1765 — Saint-Loup-de-Varennes, 5 de julho de 1833) foi um inventor francês responsável pela primeira fotografia permanente.

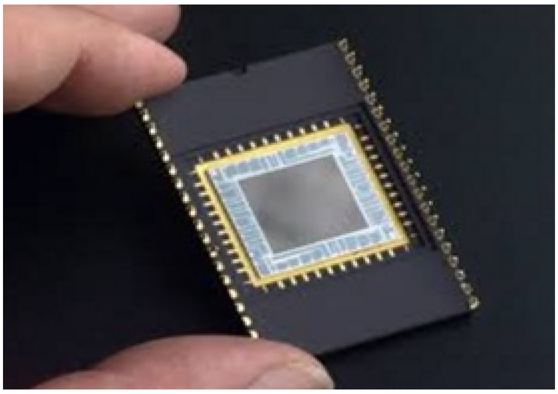


Figura 1.10: CCD - Dispositivo de Carga Aplicada
Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons

Capítulo 2

Estereoscopia

Neste capítulo serão apresentados conceitos mais aprofundados ligados ao tema principal deste trabalho que é a Estereoscopia.

2.1 A visão tridimensional

A Estereoscopia é o estudo da visão tridimensional. Em grego *stereo* significa sólido e *copia* significa visão, assim Estereoscopia pode ser traduzida como visão de sólidos, ou seja, a visão tridimensional. A percepção de profundidade se dá através da observação de uma mesma figura a partir de diferentes pontos de vista. Normalmente os seres humanos dispõem de dois pontos de vista para observar um sólido qualquer, que são os seus olhos. Como pode ser notado na figura 2.1 o lado AB do objeto é projetado de forma diferente no olho direito, representado por A'B', e no olho esquerdo representado por A"B". O cérebro humano consegue interpretar as diferentes imagens produzidas por cada um dos olhos e concluir se um objeto é tri ou bidimensional.

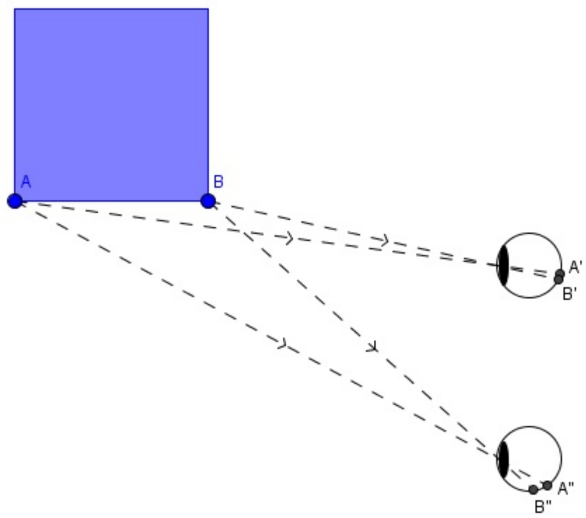


Figura 2.1: Discrepância entre as imagens projetadas em cada olho
Fonte: Geogebra

O artista baiano Jamison Pedra [1] consegue simular a sensação de profundidade em suas telas, que são figuras planas, utilizando técnicas de perspectiva e sombreamento. Em uma de suas telas intitulada BAHIA, RUSSIA, CUBA, FRANÇA, PARAGUAI, ESLOVÊNIA, USA vista na figura 2.2, o artista consegue simular uma bandeira tremulando ao vento que é um objeto tridimensional em uma tela plana de um quadro.

Figura 2.2: Pintura que simula no plano a sensação de profundidade
Fonte: http://www.jamisonpedra.arq.br/

É possível também driblar os mecanismos da visão humana utilizando imagens planas diferentes de um mesmo objeto espacial e as observando simultaneamente uma com o olho direito e outra com o olho esquerdo. Isso pode ser feito de algumas formas, mas neste trabalho iremos nos ater a duas delas: O estereoscópio que utiliza espelhos e os Anaglifos que utiliza imagens sobrepostas com cores diferentes para cada uma das figuras.

2.2 O estereoscópio de Wheatstone

Em 1838 Charles Wheatstone criou o primeiro estereoscópio. A ideia dele foi utilizar espelhos para observar uma imagem diferente com cada olho, como pode ser visto na figura 2.3.

Figura 2.3: Estereoscópio de Wheatstone
Fonte: http://www.ifi.unicamp.br/ lunazzi/

[1]Jamison Pedra além de Arquiteto, fotógrafo, cineasta, cenógrafo, professor é um renomado pintor baiano que se destaca por combinar arte com ciência, utilizando a perspectiva para criar a ilusão do volume em suas telas.

Os espelhos formam um ângulo de 90^o entre si e são posicionados em frente ao observador de forma que ele possa observar uma imagem diferente com cada olho. As imagens posicionadas em frente aos espelhos precisam formar o que chamamos de par estéreo.

Um par estéreo são duas figuras muito parecidas que simulam a visão humana observando um objeto tridimensional, é como se tirássemos uma foto com a câmara posicionada no olho direito e outra posicionada no olho esquerdo como visto na figura 2.4.

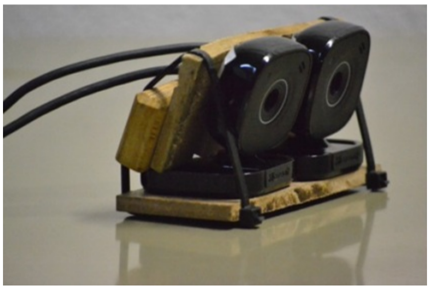


Figura 2.4: Dispositivo artesanal com duas câmeras fotográficas que simula a visão humana
Fonte: http://www.visaomonocular.org/

2.3 Anaglifos

Anaglifos são imagens criadas de forma particular com o objetivo de causar efeito tridimensional na visão do observador. O efeito é criado baseado na utilização de duas cores diferentes. Em uma mesma imagem duas figuras são desenhadas em duas cores diferentes, geralmente *ciano*, uma variação do azul, e *magenta*, uma variação do vermelho. As figuras em cores diferentes são sobrepostas com uma determinada discrepância de forma que simule a visão humana, ou seja, cada figura representa a imagem obtida pela observação situada em cada olho.

Figura 2.5: Imagem Anaglífica
Fonte: http://farm3.static.flickr.com

Para que ocorra o efeito tridimensional é necessário que as figuras com cores diferentes sejam vistas apenas por um olho. Por exemplo, o olho esquerdo deve enxergar apenas a figura em azul e o olho direito deve enxergar apenas a figura em vermelho. Esta separação visual é obtida através dos óculos anaglíficos que possuem lentes com cores diferentes e desta forma podem filtrar as figuras de uma determinada cor.

Figura 2.6: Óculos Anaglíficos
Fonte: http://www.tecmundo.com.br

2.4 A matemática dos Anaglifos

Para entendermos melhor a sensação de profundidade na visão humana observemos na figura 2.7 um ponto P sendo observado por um par de olhos humanos, representados por O_e e O_d , e suas respectivas imagens, I_e formada no olho esquerdo e I_d formada no olho direito. Seja f a distância focal e b a distância entre os olhos do observador. Considerando que o ponto P tem uma profundidade Y e um deslocamento lateral X em relação ao olho esquerdo, e considerando também X_e e X_d os deslocamentos laterais das imagens de P em relação aos respectivos eixos focais de cada olho, temos:

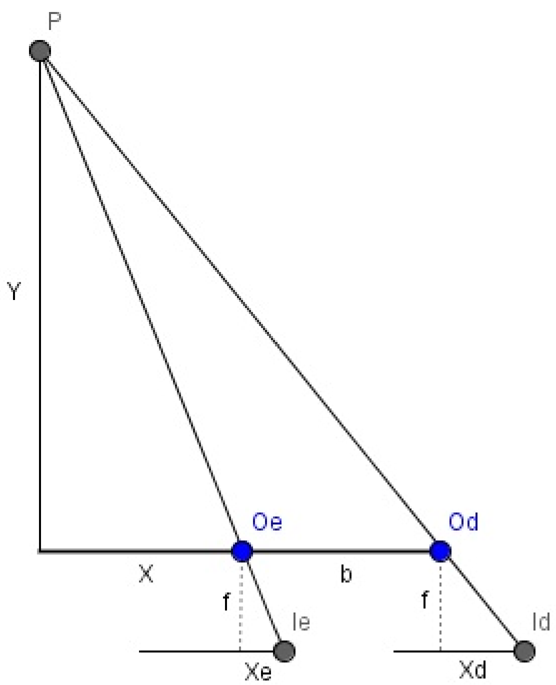


Figura 2.7: Diagrama representando a disparidade entre as imagens formadas em cada olho
Fonte: GeoGebra

Podemos concluir por semelhança de triângulos que:

$$\frac{X_E}{f} = \frac{X}{Y}$$

$$\frac{X_D}{f} = \frac{X + b}{Y}$$

Definindo a Disparidade d como a diferença entre os deslocamentos das imagens formadas temos:

$$d = X_D - X_E = \frac{f \cdot b}{Y} \tag{2.1}$$

Desta relação podemos inferir que a disparidade é inversamente proporcional a profundidade e diretamente proporcional a distância focal e a distância entre os olhos. Este fato pode ser verificado se observarmos com cada olho separadamente um objeto muito distante do observador e outro bem próximo ao observador.

Capítulo 3

Experimentos

Ao estudarmos geometria espacial precisamos observar objetos tridimensionais nas páginas dos livros didáticos. Neste capítulo veremos seqüências didáticas onde a utilização do software GeoGebra 5.0 e dos anaglifos ajudam na visualização dos sólidos e seus componentes e desta forma facilitam a aprendizagem.

Cada um dos experimentos propostos a seguir traz como objetivo o aprendizado de um conteúdo matemático específico, mas outros conceitos relacionados também serão trabalhados e desenvolvidos.

O rigor da linguagem e o nível de dificuldade das atividades propostas neste trabalho estão vinculadas ao ensino básico, mas são apenas sugestões e podem ser utilizas até o nível superior ajustando a linguagem e o nível de aprofundamento dos conteúnos envolvidos.

Experimento I - Projeções Anaglíficas

Neste experimento entenderemos melhor o processo geométrico para construção de uma projeção anaglífica de um objeto tridimensional.

Objetivo

Entender melhor as projeções

Conteúdo Programático

Projeções e outros conceitos ligados a geometria plana.

Subsídios Teóricos

Anaglifos são imagens criadas de forma particular com o objetivo de causar efeito tridimensional na visão do observador.

Projeções são as representações de objetos bidimensionais ou tridimensionais em um determinado plano.

Em particular as projeções anaglíficas são projeções posicionadas de forma singular com o objetivo de obter anaglífos, ou seja, criar a sensação de profundidade a partir de figuras planas.

Neste experimento o estudante criará projeções anaglíficas. Neste processo ele poderá observar e verificar características e propriedades das projeções como, por exemplo, medidas de ângulos e de lados que se preservam ou se alteram na construção de uma projeção.

Metodologia

Aula expositiva, experimental e participativa

Material

Atividade impressa, computadores com o software GeoGebra 5.0 instalado para a realização do experimento pelos estudantes

Procedimento

Distribuição das atividades e discussão acerca da definição de projeção

Os estudantes devem ler, interpretar e realizar as tarefas propostas, enquanto o professor apenas tira dúvidas e conduz o desenvolvimento das atividades

Construção das conclusões por parte dos estudantes acerca das projeções

Discussão das conclusões obtidas pelos estudantes

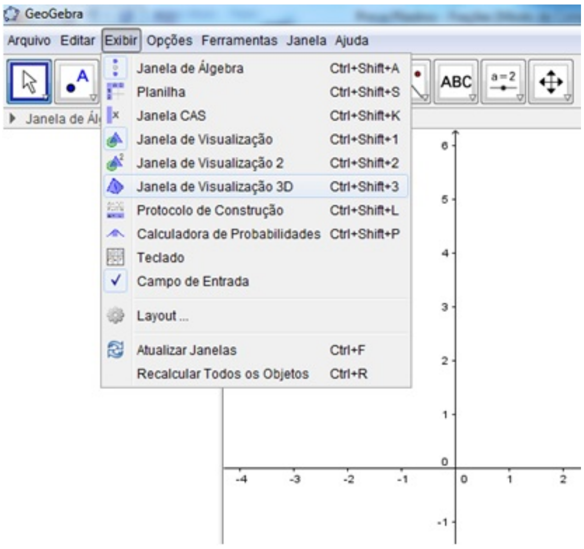
Explanação do professor em torno da realização da atividade e da conclusão esperada para confirmação ou correção das conclusões construídas pelos estudantes

Experimento no GeoGebra

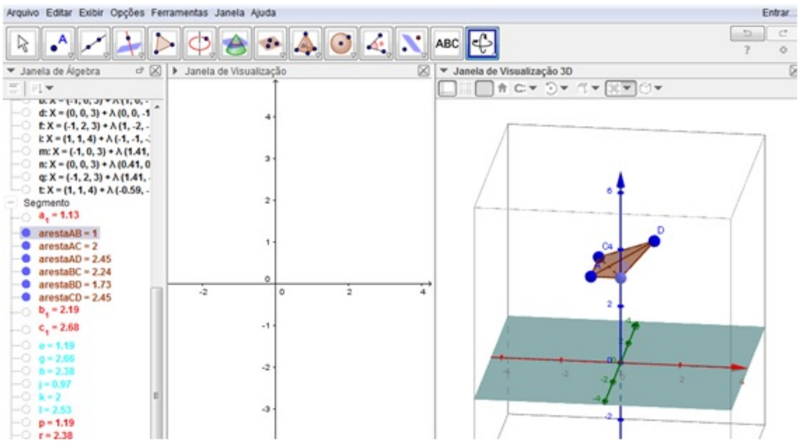
Passo a passo para criar uma pirâmide anaglífica no Geogebra 5.0

1 - Na janela inicial do programa clique em exibir e escolha a opção Janela de Visualização 3D

2- Na Janela de Visualização 3D clique no botão  Pirâmide



3- Para construir uma pirâmide de base triangular no Geogebra você deve usar o botão  para definir 4 pontos, os três primeiros (neste caso os pontos A(-1, 0, 3), B(0, 0, 3) e C(-1, 2, 3)) definirão a base e o quarto ponto D(1, 1, 4)) definirá o vértice que não está contido no plano da base.

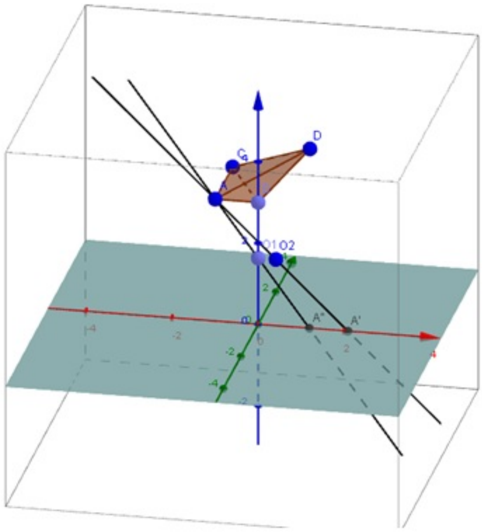


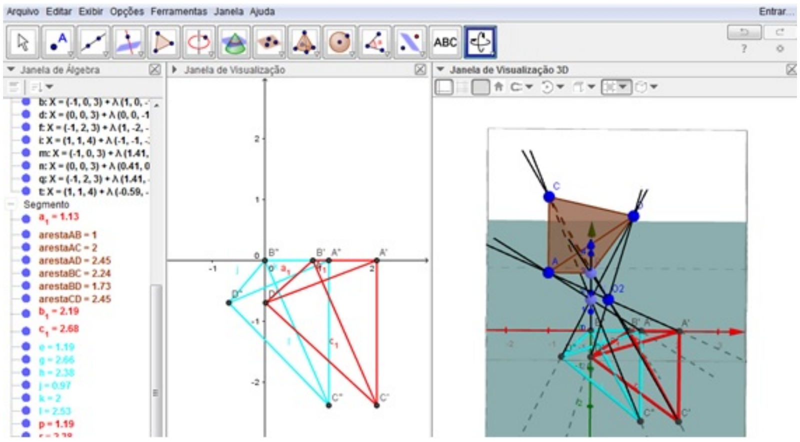
Para simular a posição dos olhos definiremos os pontos O_1 e O_2.

Partindo por exemplo do ponto A, podemos traçar retas que passam por A e pelos pontos O_1 e O_2 determinando no plano XOY os pontos A' e A'' respectivamente.

Realizando o mesmo processo nos pontos B, C e D teremos os vértices das respectivas projeções.

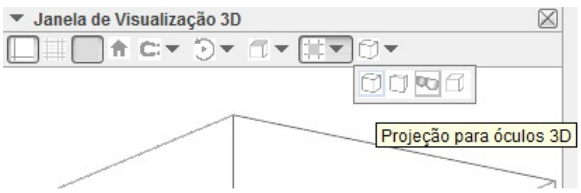
Cada aresta da pirâmide representa um lado da projeção, assim a aresta AB corresponde aos lados $A'B'$ e $A''B''$ das projeções.



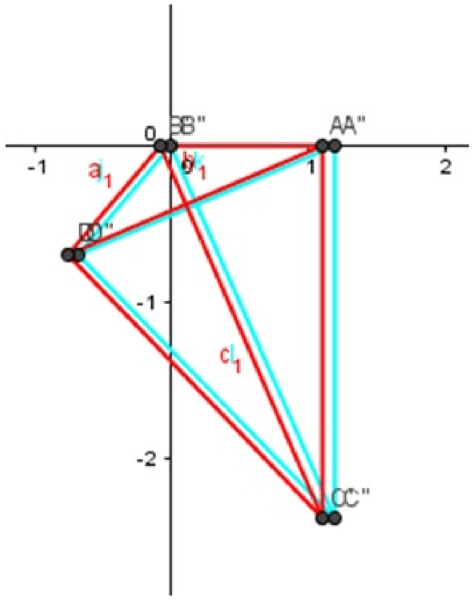


4- Clique no botão Alternar Barra de Estilo, que está representado por uma "seta" localizada antes do nome "Janela de Visualização 3D" Janela de Visualização 3D .

5- Clique no botão Escolha o Tipo de Projeção e escolha a opção Projeção para Óculos 3D.



6- Ponha os óculos anaglíficos e manipule a pirâmide usando, por exemplo, o botão "Girar Janela de Visualização 3D".



Para que estas projeções possam ser observadas com óculos anaglíficos e causarem o efeito de profundidade é necessário ajustar a posição entre elas, e para tanto o GeoGebra disponibiliza a ferramenta *controle deslizante* que pode fazer variar alguns componentes da estrutura com o objetivo de obter a melhor configuração.

Experimento II - Os Sólidos de Platão

Por volta de 400 a.C. Platão desenvolveu estudos a respeito de sólidos geométricos com características bastante singulares, que ficaram conhecidos como sólidos de Platão. Ele acreditava também que o universo era constituído por quatro elementos terra, fogo, água e ar e a partir daí estabeleceu uma relação mística entre os seus sólidos e estes quatro elementos. Neste experimento vamos compreender melhor estes sólidos e suas características.

Objetivo

Investigar a existência de outros sólidos platônicos

Conteúdo Programático

Volume de sólidos geométricos

Subsídios Teóricos

Os Sólidos de Platão são poliedros que atendem as seguintes condições:

- Todas as faces são formadas por um mesmo polígono regular
- O número de arestas que parte de cada vértice é o mesmo para todos os vértices

A proposta deste experimento é construir uma demonstração informal da existência de apenas 5 sólidos platônicos.

A demonstração é baseada na ideia de esgotamento de possibilidades. Utilizando triângulos equiláteros, podemos, construir um tetraedro, usando três triangulos por vértice, um octaedro, usando quatro triângulos por vértice, ou um icosaedro, usando no máximo cinco triângulos por vértice, e nenhuhm outro além destes.

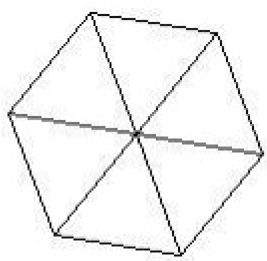


Figura 3.1: Seis triângulos equiláteros por vértice

De fato, pois para construirmos um outro sólido platônico utilizando triângulos equiláteros teríamos de utilizar pelo menos seis triângulos equiláteros em um vértice, mas seis triângulos equiláteros juntos em um vértice formariam um ângulo de 360^o tornando a figura plana.

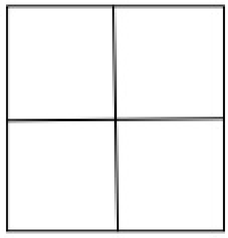


Figura 3.2: Quatro quadrados por vértice

Utilizando quadrados, podemos montar apenas o cubo encaixando três faces quadradas por vértice, mas, quatro quadrados juntos em um vértice formariam um ângulo de 360^o tornando a figura plana.

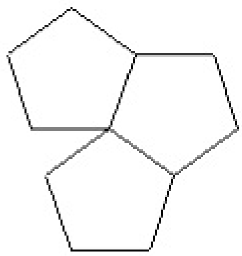


Figura 3.3: Quatro pentágonos por vértice

Utilizando pentágonos podemos construir apenas o dodecaedro encaixando três faces pentagonais em cada vértice. Quatro pentágonos juntos em um vértice formariam um ângulo de 432^o impossibilitando a construção de um poliedro.

Hexágonos, heptágonos e outros polígonos não podem ser utilizados para construir sólidos platônicos, pois cada ângulo interno desses polígonos possui medida igual ou superior a 120^o impossibilitando a formação de figuras espaciais, já que não poderiam ser encaixadas mais de duas faces por vértice.

Desta forma, podemos concluir que existem apenas cinco sólidos platônicos.

Metodologia

Aula expositiva, experimental e participativa

Material

Atividade impressa, computadores com o software GeoGebra 5.0 instalados para a realização do experimento pelos estudantes

Procedimento

Discussão da definição de sólidos de platão e distribuição das atividades

Os estudantes devem ler, interpretar e realizar as tarefas propostas, enquanto o professor apenas tira dúvidas e conduz o desenvolvimento das atividades

Preenchimento das tabelas e construção das conclusões, por parte dos estudantes, em torna da ideia de que não existem outros sólidos platônicos

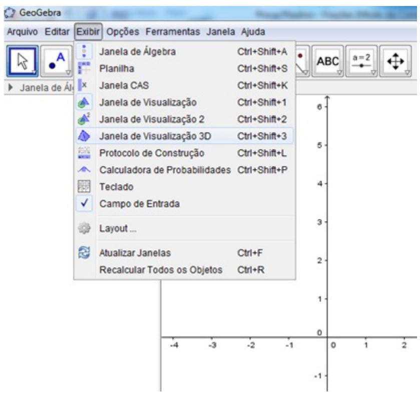
Discussão das conclusões obtidas pelos estudantes

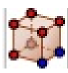
Explanação do professor em torno da realização da atividade e da conclusão esperada para confirmação ou correção das conclusões construídas pelos estudantes

Experimento no GeoGebra

Passo a passo para criar um cubo anaglífico no Geogebra 5.0

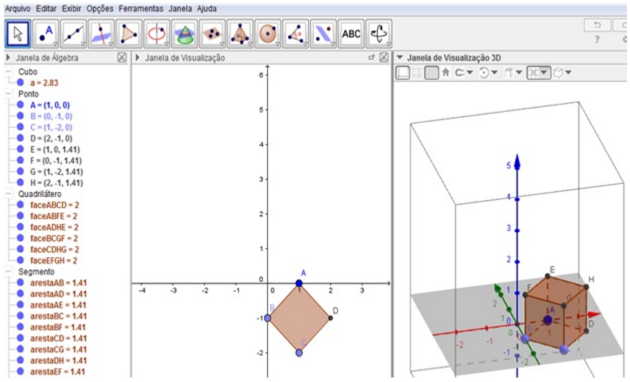
1 - Na janela inicial do programa clique em exibir e escolha a opção Janela de Visualização 3D



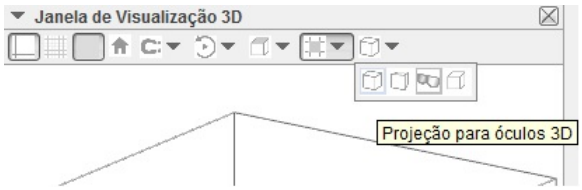
2- Na Janela de Visualização 3D clique no botão  Cubo. Para construir um cubo no Geogebra você precisa selecionar apenas 2 pontos.

3- Clique no botão  Alternar Barra de Estilo, que está representado por uma "seta" localizada antes do nome "Janela de Visualização 3D" 

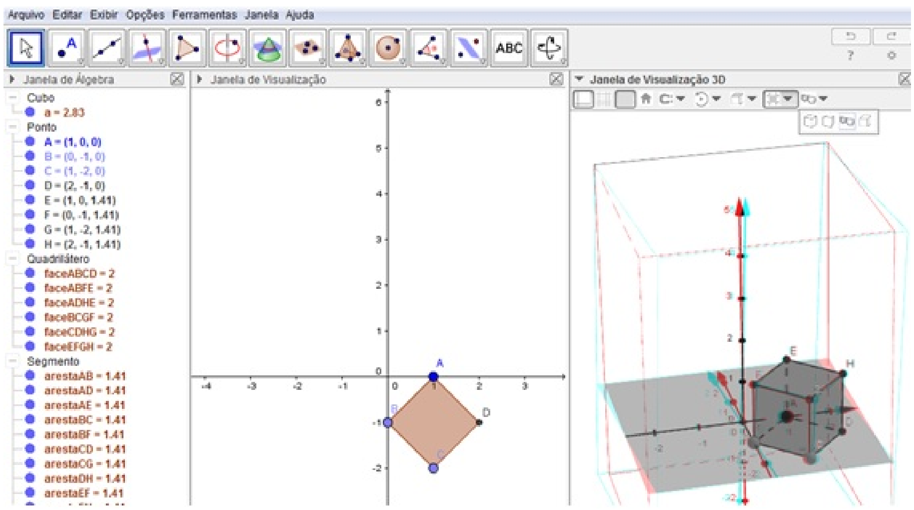
.



4- Clique no botão  Escolha o Tipo de Projeção e escolha a opção  Projeção para Óculos 3D.



5- Ponha os óculos anaglíficos e manipule a pirâmide usando, por exemplo, o botão  "Girar Janela de Visualização 3D".



6- Repita o processo com as devidas alterações para criar os outros Sólidos de Platão.

Experimento III - A Fórmula de Euler

Neste experimento estudaremos a Fórmula de Euler para poliedros, que relaciona os números de vértices, faces e arestas de um poliedro qualquer. Surpreendentemente esta relação, bastante simples, passou desapercebida por brilhantes matemáticos ao longo da história e só foi descoberta no século XVII pelo grande matemático suíço Leonhard Euler.

Objetivo

Investigar a existência de uma relação matemática entre o número de Vértices, Faces e Arestas de um poliedro qualquer.

Conteúdo Programático

Poliedros

Subsídios Teóricos

Um poliedro é um sólido geométrico composto por vértices, faces e arestas onde cada face é um polígono.

As arestas são segmentos de reta determinados pelas intersecções de duas faces adjacentes.

Os vértices são os extremos das arestas.

Espera-se que ao realizar esse experimento o estudante deduza a fórmula de Euler para poliedros que relaciona os elementos destes sólidos da seguinte maneira; V + F = A + 2. Onde V, F e A são os números de vértices, faces e arestas respectivamente.

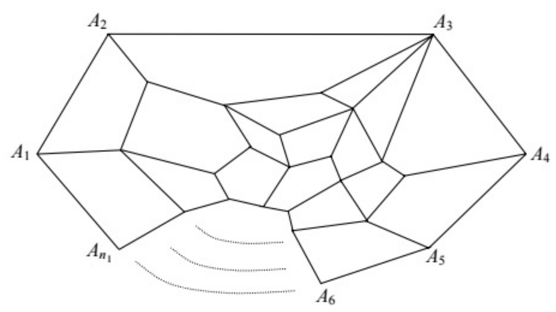


Figura 3.4: Planificação de um poliedro em função de uma das faces

Considerando $P_1, P_2 ... P_f$ as faces do poliedro e $n_1, n_2 ... n_f$ o número de arestas destas faces respectivamente. Sejam $A_1, A_2 ... A_{n1}$ os vértices de P_1 na representação plana do poliedro segundo esta face.

Temos $n_1 + n_2 + ... + n_f = 2A$, pois cada aresta foi contada duas vezes.

Podemos calcular a somatório de todos os ângulos internos de todos os polígonos da representação plana da seguinte maneira; Na decomposição plana temos F-1 polígonos, pois a decomposição é feita a partir de uma das faces. Os números de lados destes polígonos são $n_2, n_3...n_f$ e as respectivas somas dos seus ângulos são $180^o(n_2 - 2)$, $180^o(n_3 - 2)$, ..., $180^o(n_f - 2)$. Logo a soma total é $180^o[n_2 + n_3 + ... + n_f - 2(F - 1)]$. Podemos calcular o somatório dos ângulos internos também da seguinte maneira; A quantidade de vértices da representação $V - n_1$, logo o somatório dos ângulos internos neste caso é igual a $180^o(n_1 - 2) + 360^o(V - n_1)$. Igualando as duas expressões e substituindo $n_1 + n_2 + ... + n_f$ por $2A – n_1$ obtemos:

$180^o[2A – n_1 – 2(F - 1)] = 180^o(n_1 – 2) + 360^o(V - n_1)$ e desenvolvendo obtemos:

$$\text{V – A + F = 2}$$

Metodologia

Aula expositiva, experimental e participativa

Material

Atividade impressa, computadores com o software GeoGebra 5.0 instalados para a realização do experimento pelos estudantes

Procedimento

Discussão inicial sobre os poliedros e seus elementos e distribuição das atividades

Os estudantes devem ler, interpretar e realizar as tarefas propostas, enquanto o professor apenas tira dúvidas e conduz o desenvolvimento das atividades

Preenchimento das tabelas e construção das conclusões por parte dos estudantes

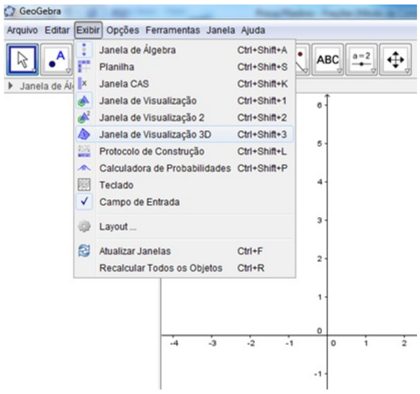
Discussão das conclusões obtidas pelos estudantes

Explanação do professor em torno da realização da atividade e da conclusão esperada para confirmação ou correção das conclusões construídas pelos estudantes

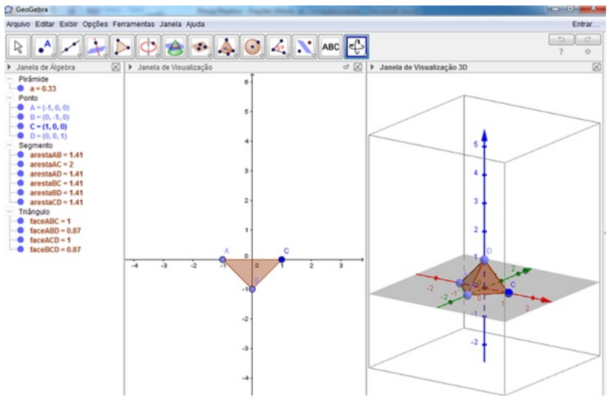
Experimento no GeoGebra

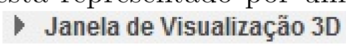
Passo a passo para criar um cubo anaglífico no Geogebra 5.0

1 - Na janela inicial do programa clique em exibir e escolha a opção Janela de Visualização 3D



2- Na Janela de Visualização 3D clique no botão  Pirâmide. Para construir uma pirâmide de base triangular no GeoGebra você precisa selecionar 4 pontos, os três primeiros definirão a base e o quarto ponto definirá o vértice que não está contido no plano da base.

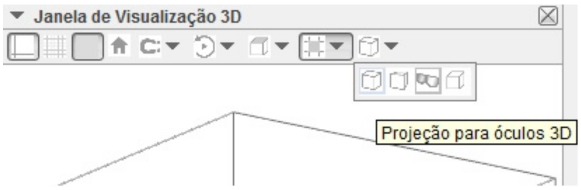


3- Clique no botão  Alternar Barra de Estilo, que está representado por uma "seta" localizada antes do nome "Janela de Visualização 3D" 

.

4- Clique no botão  Escolha o Tipo de Projeção e escolha a opção  Projeção para Óculos 3D.

5- Ponha os óculos anaglíficos e manipule a pirâmide usando, por exemplo, o botão  "Girar Janela de Visualização 3D".



6- Repita o processo com as devidas alterações para criar outra pirâmide, agora de base pentagonal.

7- Utilizando um processo parecido crie um prisma de base triangular.

Experimento IV - O Volume da Anti-Clepsidra

A Clepsidra também conhecida como relógio de água é um objeto antigo em forma de cone de duas folhas, onde os cones se comunicam através de um pequeno orifício entre os seus ápices. Neste experimento utilizaremos o Princípio de Cavalieri para encontrar relações entre os sólidos envolvidos.

Objetivo

Investigar a existência de uma relação matemática entre o volume de uma Anti-Clepsidra e uma Esfera de mesma altura e mesmo raio.

Conteúdo Programático

Volumes dos sólidos geométricos e Princípio de Cavallieri

Subsídios Teóricos

O Princípio de Cavalieri diz que se qualquer plano que corta dois sólidos determina secções transversais com áreas iguais então os volumes destes sólidos serão numericamente iguais.

Neste experimento o estudante irá construir no GeoGebra um cilindro, um cone de duas folhas, uma esfera e um plano. Ao observar as áreas de secção transversal do plano com estes sólidos ele poderá entender melhor o Princípio de Cavalieri, bem como outros conceitos de geometria espacial ligados a cálculo de área e de volume. Mais específicamente ele irá perceber que as áreas das secções transversais do plano com a esfera e a anti-clepsidra são iguais, e concluir que o volume da anti-clepsidra é igual ao volume da esfera, obtendo um importante resultado da geometria espacial descrito no seguinte teorema:

O volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$

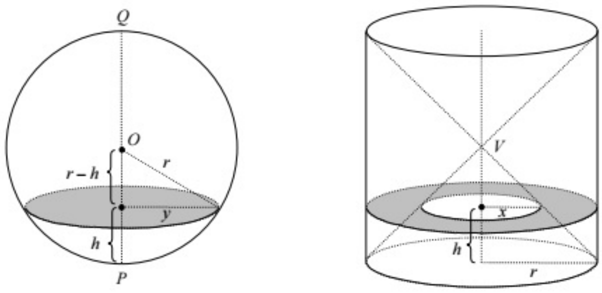


Figura 3.5: Esfera, cone, cilindro e plano transversal

A demonstração deste fato pode ser construída a através do princípio de Cavalieri que também pode ser visualizado no experimento.

Conforme descrito no experimento e mostrado na figura 3.5 temos uma esfera de raio r, um cilindro de raio da base r e altura 2r, um cone de duas folhas inscrito no cilindro e um plano transversal cortando a esfera e o cilindro.

Considerando y o raio do disco resultante da interseção do plano com a esfera e aplicando o teorema de Pitágoras podemos obter a seguinte relação $y^2 = 2rh - h^2$. Desta forma a área do disco é igual $\pi(2rh - h^2)$.

Por outro lado para chegarmos ao volume da anti-clepsidra, podemos observar que o plano intersecta o cone e o cilindro formando uma coroa circular de pontos interiores ao cilindro e exteriores ao cone. Por semelhança de triângulos podemos obter a seguinte relação $\frac{x}{r} = r - \frac{h}{r}$, desenvolvendo obtemos x = r - h. Assim, a área da coroa circular é igual a $\pi r^2 – \pi x^2 = \pi r^2 – \pi(r - h)_2 = \pi(2rh - h_2)$. Pelo princípio de Cavalieri o volume da esfera é igual ao volume da anti-clepsidra, que por sua vez pode ser calculado da seguinte forma $\pi r^2 – 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{4}{3}\pi r^3$, assim podemos concluir que o volume da esfera é igual a $4/3\pi r^3$.

Metodologia

Aula expositiva, experimental e participativa

Material

Atividade impressa, computadores com o software GeoGebra 5.0 instalados para a realização do experimento pelos estudantes

Procedimento

Discussão inicial abordando os pre-requisitos para este experimento: O cálculo de volume de sólidos geométricos e o princípio de Cavalireri

Distribuição das atividades

Os estudantes devem ler, interpretar e realizar as tarefas propostas, enquanto o professor apenas tira dúvidas e conduz o desenvolvimento das atividades

Preenchimento das tabelas e construção das conclusões por parte dos estudantes

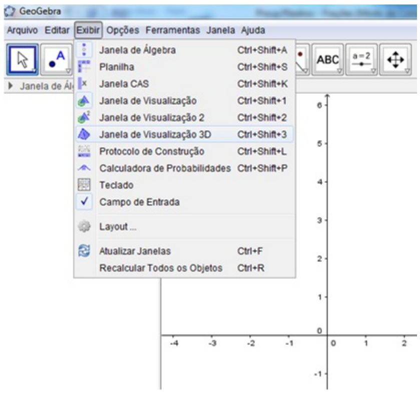
Discussão das conclusões obtidas pelos estudantes

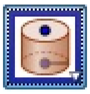
Explanação do professor em torno da realização da atividade e da conclusão esperada para confirmação ou correção das conclusões construídas pelos estudantes

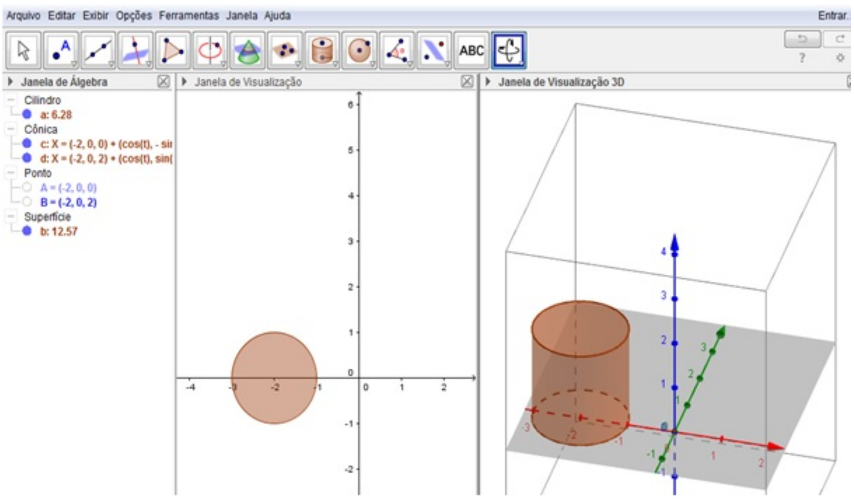
Experimento no GeoGebra

Passo a passo para criar Cones, Cilindros e Esferas anaglíficos no Geogebra 5.0

1 - Na janela inicial do programa clique em exibir e escolha a opção Janela de Visualização 3D

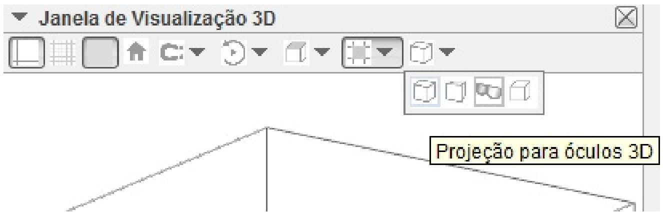


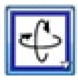
2- Na Janela de Visualização 3D clique no botão  cilindro. Para construir um cilindro no GeoGebra você precisa selecionar 2 pontos, que definem as bases do cilindro, e o raio da base.

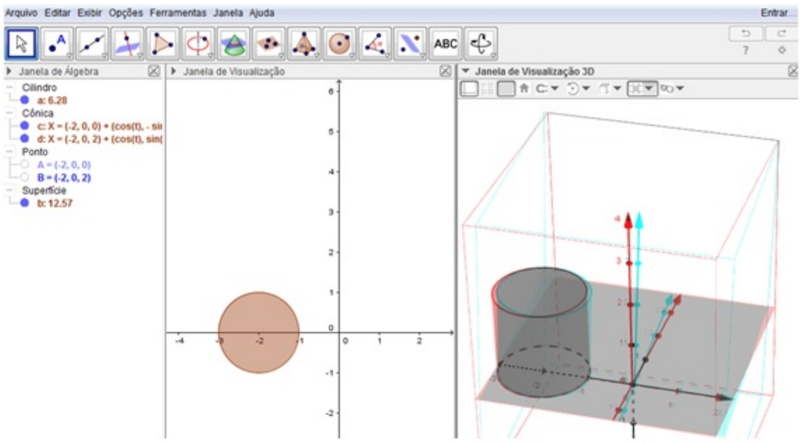


3- Clique no botão  Alternar Barra de Estilo, que está representado por uma "seta" localizada antes do nome "Janela de Visualização 3D"  .

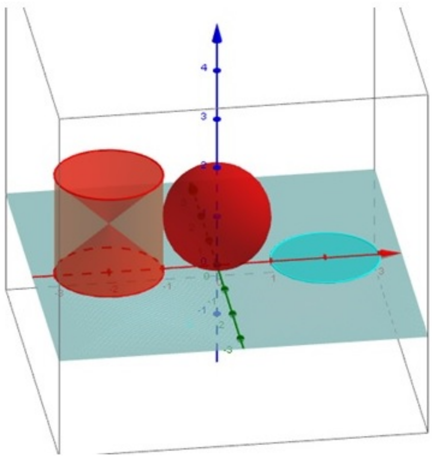
4- Clique no botão  Escolha o Tipo de Projeção e escolha a opção  Projeção para Óculos 3D.



5- Ponha os óculos anaglíficos e manipule o cilindro usando, por exemplo, o botão  “Girar Janela de Visualização 3D”.



6- Utilizando um processo parecido crie um cone de duas folhas inscrito no cilindro e uma esfera conforme a imagem mostrada abaixo..



Experimento V - A Matemática dos Astros

O astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) descobriu que os planetas se movimentam em torno do sol descrevendo em suas trajetórias curvas que os matemáticos chamam de Elipses.

Neste experimento, para entendermos melhor as elipses, vamos construir um mini sistema solar e observar suas características.

Objetivo

Estudar as características e os principais elementos de uma Elipse.

Conteúdo Programático

Cônicas

Subsídios Teóricos

Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias deste ponto a dois pontos fixos é constante.

1^a Lei de Kepler - Lei das Órbitas

Os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, que ocupa um dos focos da elipse.

Ao preencher a tabela proposta neste experimento o estudante será induzido a perceber que a soma das distâncias de um ponto da elipse até os focos é constante, ou seja, ele será estimulado a construir a definição de elipse.

Metodologia

Aula expositiva, experimental e participativa

Material

Atividade impressa, computadores com o software GeoGebra 5.0 instalados para a realização do experimento pelos estudantes

Procedimento

Tempestade de ideias acerca das órbitas dos planetas

Distribuição, leitura, interpretação das tarefas propostas.

Preenchimento das tabelas e construção da ideia da definição de uma elipse

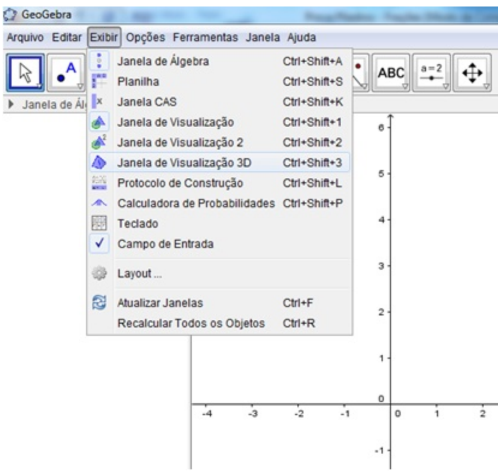
Discussão das conclusões obtidas pelos estudantes

Explanação do professor em torno da realização da atividade e da conclusão esperada para confirmação ou correção das conclusões construídas pelos estudantes

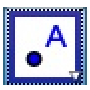
Experimento no GeoGebra

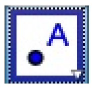
Passo a passo para criar uma Elipse anaglífica no Geogebra 5.0

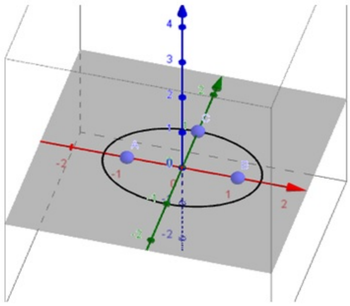
1 - Na janela inicial do programa clique em exibir e escolha a opção Janela de Visualização 3D

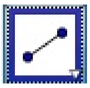


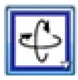
2- Na Janela de Visualização 3D clique no botão  Elipse. Para construir uma Elipse no GeoGebra você precisa selecionar apenas 3 pontos.

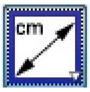
3- Clique no botão  para criar os pontos A, B e C.

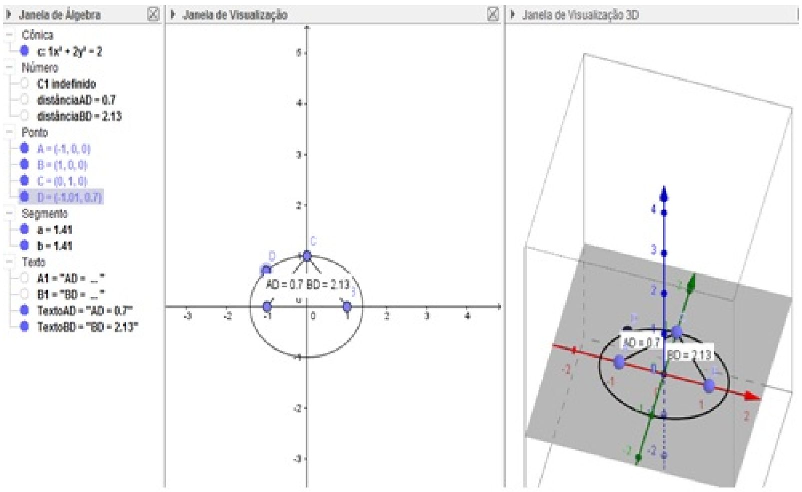
4- Para representarmos um planeta criaremos o ponto clicando no botão  e passando o cursor sobre a Elipse para selecioná-la..



5- Clique no botão  Segmento e clique nos pares de pontos AD e BD para criar dois segmentos de reta.

5- Ponha os óculos anaglíficos e manipule o cilindro usando, por exemplo, o botão  “Girar Janela de Visualização 3D”.

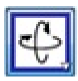
6- Selecione o botão  Distancias e clique nos segmentos AD e BD.

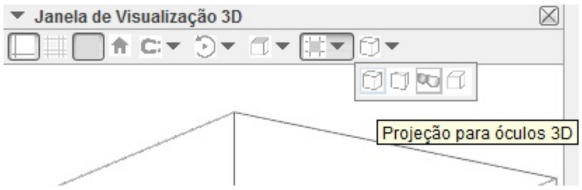


7- Clique no botão direito do mouse sobre o ponto D e escolha a opção Animar.

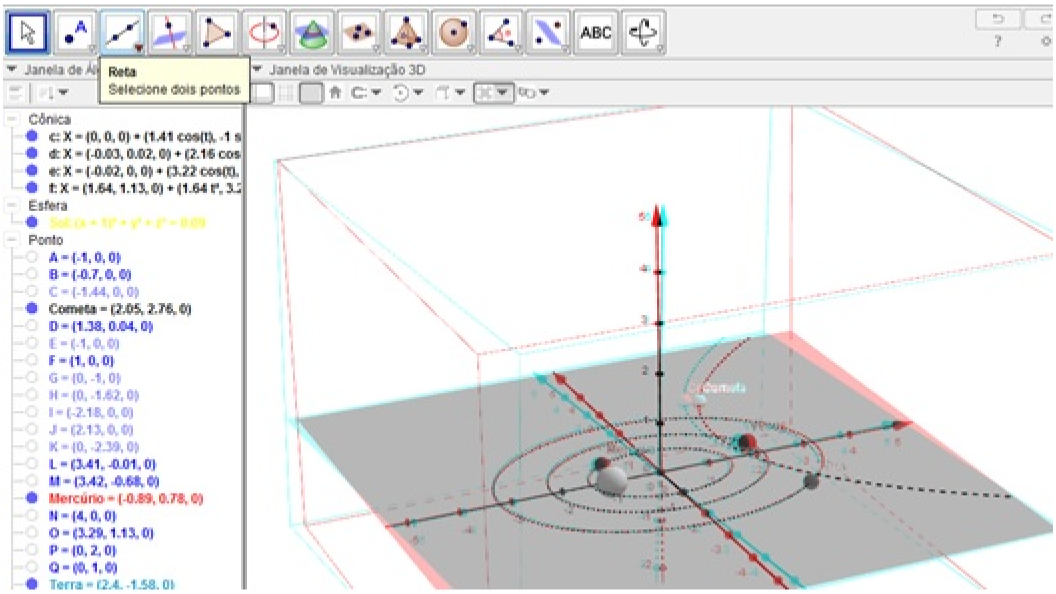
8- Clique no botão  Alternar Barra de Estilo, que está representado por uma “seta” localizada antes do nome “Janela de Visualização 3D” Janela de Visualização 3D .

9- Clique no botão  Escolha o Tipo de Projeção e escolha a opção  Projeção para Óculos 3D.

10- Ponha os óculos anaglíficos e manipule o cilindro usando, por exemplo, o botão 



“Girar Janela de Visualização 3D”.



Experimento VI - O Volume da Pirâmide

As famosas pirâmides, consideradas uma das sete maravilhas do mundo antigo, foram construídas para servir de túmulo a grandes faraós do Egito. A primeira delas foi pirâmide de Djoser construída pelo arquiteto Imotep. Na necrópole de Gizé estão localizadas as pirâmides de Quéops, Quéfren e Miquerinos, sendo a de Queóps a maior pirâmide egípcia, cuja altura original chegava a mais de 140 metros de altura.

Objetivo

Investigar uma relação entre o volume de uma pirâmide e de um prisma de mesma base e mesma altura.

Conteúdo Programático

Volume dos sólidos geométricos

Subsídios Teóricos

O volume de um prisma é calculado multiplicando-se a área da base (A_b) pela altura (h) do sólido.

$$V = A_b \cdot h$$

Pretende-se com esse experimento que o estudante, a partir da observação dos sólidos construidos e preenchimento da tabela proposta, chegue ao resultado exposto no seguinte teorema:

O volume da pirâmide é igual ao produto de um terço da área da base pela altura.

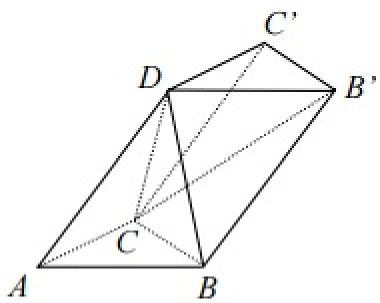


Figura 3.6: Prisma decomposto em tetraedros

A ideia da demonstração desse teorema se resume em mostrar que o prisma ABCDB'C' pode ser decomposto em três tetraedros: T descrito pelos vértices ABCD, T' descrito pelos vértices DB'C'C e T" descrito pelos vértices BB'DC.

Observando inicialmente T e T' percebemos que a base ABC do tetraedro T, e a base DB'C' do tetraedro T' são congruentes, pois são as bases do prisma, e os vértices opostos às bases, D e C de T e T' respectivamente pertencem às bases opostas do prisma determinando que as alturas de T e T' são congruentes. Logo T e T' possuem o mesmo volume.

Por outro lado, podemos observar que as bases ABD de T e BB'D de T" são congruentes e considerando C o vértice comum oposto a estas bases, podemos concluir que as alturas são congruentes e T e T" também possuem o mesmo volume.

Desta forma podemos concluir que T,T' e T" possuem volumes iguais e o volume de cada um deles é um terço do volume do prisma, ou seja um terço do produto da área da base pela altura.

A ideia da demonstração é análoga para outras pirâmides que não sejam tetraedros.

Metodologia

Aula expositiva, experimental e participativa

Material

Atividade impressa, computadores com o software GeoGebra 5.0 instalados para a realização do experimento pelos estudantes

Procedimento

Discussão inicial em torno do cálculo de volume de prismas e pirâmides e distribuição das atividades

Os estudantes devem ler, interpretar e realizar as tarefas propostas, enquanto o professor apenas tira dúvidas e conduz o desenvolvimento das atividades

Preenchimento das tabelas e construção das conclusões em torna da relação entre os volumes dos sólidos envolvidos na atividade, por parte dos estudantes

Discussão das conclusões obtidas pelos estudantes

Explanação do professor em torno da realização da atividade e da conclusão esperada para confirmação ou correção das conclusões construídas pelos estudantes

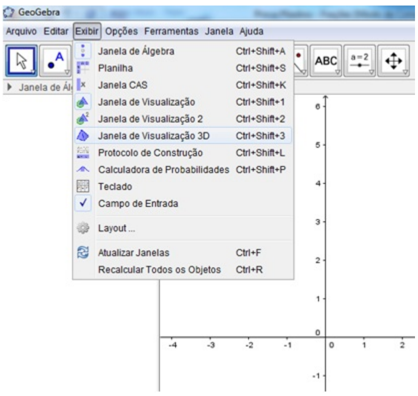
Experimento no GeoGebra

Passo a passo para criarmos as três pirâmides e o prisma anaglíficos, necessários a este experimento no Geogebra 5.0

1- Clique no botão para criar os pontos A, B, C, D, E e F com as seguintes coordenadas:

$$A(0;0;0)$$
$$D(0;0;3)$$
$$B(1;0;0)$$
$$E(1;0;3)$$
$$C(0;1;0)$$
$$F(0;1;3)$$

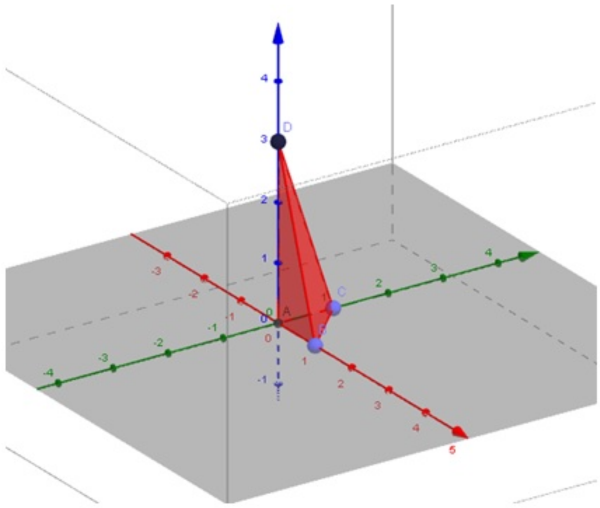
2 - Na janela inicial do programa clique em exibir e escolha a opção Janela de Visualização 3D

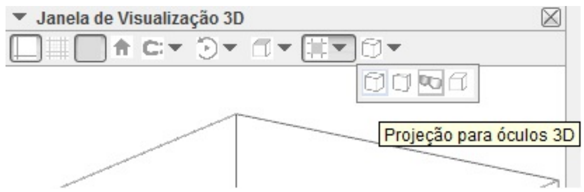


3- Na Janela de Visualização 3D clique no botão  Pirâmide. Para construir uma pirâmide de base triangular no Geogebra você precisa selecionar 4 pontos, os três primeiros (neste caso os pontos A, B e C) definirão a base e o quarto ponto (D) definirá o vértice que não está contido no plano da base.

4- Clique no botão  Alternar Barra de Estilo, que está representado por uma "seta" localizada antes do nome "Janela de Visualização 3D"  .

5- Clique no botão  Escolha o Tipo de Projeção e escolha a opção  Projeção para Óculos 3D.





6- Ponha os óculos anaglíficos e manipule o cilindro usando, por exemplo, o botão  "Girar Janela de Visualização 3D".

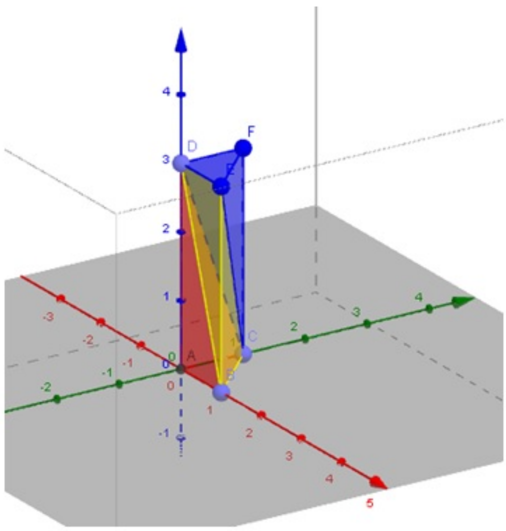
7- Repita o processo com as devidas alterações para criar uma pirâmide definida pelos pontos C, D, E e F.

8- Repita o processo com as devidas alterações para criar uma pirâmide definida pelos pontos B, C, D e E.

9- Repita o processo com as devidas alterações para criar um prisma de base triangular definido pelos pontos A, B, C e D.

10- Clique no botão 

para calcular o volume dos sólidos criados.


D
F
E
C
A
B

Capítulo 4

Considerações Finais

A utilização de novas tecnologias, mais especificamente a utilização de anaglifos aliada ao uso do software Geogebra para o ensino de matemática pode, se bem conduzida, levar o aluno a fazer matemática, descobrir através de suas experiências e simulações, relações e conceitos matemáticos importantes para o seu crescimento.

A visualização de figuras tridimensionais que poderia ser um obstáculo passa a ser motivador da aprendizagem, pois o uso dos anaglifos além de eficaz, seduz o estudante trazendo um atrativo já conhecido por eles nos jogos eletrônicos e nos cinemas que é a visão 3D.

É natural em toda mudança que surjam algumas dificuldades relacionadas à adaptação ao novo. A introdução destas tecnologias em sala não foge a esta regra e traz problemas desde a logística até os problemas relacionados ao tipo de ferramentas a se utilizar e de atividades a serem propostas, levando em conta que é necessário pensar e agir com esta tecnologia.

Para que esta novidade seja incorporada ao processo de ensino já existente de forma positiva, é necessário que o professor prepare um bom material e esteja aberto para as prováveis mudanças que surgirão.

Referências Bibliográficas

[1] LIMA, Elon L. A Matemática do Ensino Médio-volume 2. Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[2] FRENCH, T. E., VIERCK, C.J. Desenho Tecnico e Tecnologia Gráfica. São Paulo, Editora Globo, 2005.

[3] MUNIZ, Antonio C. Geometria, Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro, SBM, 2008.

[4] CARVALHO, Paulo Cesar. Coleção Profmat - Introdução a Geometria Espacial. Rio de Janeiro, 2010.

[5] FONSECA, Eugenio P. Cartografia Escolar. São Paulo: Editora Livros do Brasil. 2002.

[6] AZEVEDO, Manoel F. Geometria Euclidiana Espacial. Fortaleza, Editora Número de Ouro, 1999.

[7] BROUSSEAU, Guy. A Teoria da Situações Didáticas e A Formação do Professor. Palestra. São Paulo: PUC. 2006.

[8] http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/prof_lunazzi/Estereoscopia/estere.htm, acesso em 21 de janeiro de 2016.

[9] http://www.jf.ifsudestemg.edu.br/dario/3d/anaglifos.htm, acesso em 12 de dezembro de 2015.

[10] http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html, acesso em 25 de novembro de 2015.

[11] http://www.somatematica.com.br/artigos/a1/p3.php, acesso em 11 de novembro de 2015.

[12] http://mundoestranho.abril.com.br/materia/qual-animal-tem-a-melhor-visao, acesso em 21 de janeiro de 2016.

[13] http://propi.ifto.edu.br/ocs/index.php/connepi/vii/paper/viewFile/1667/2517, acesso em 15 de janeiro de 2016.

[14] //www.visgraf.impa.br/Data/RefBib/PS_PDF/h3d-10/h3d-77686.pdf, acesso em 10 de janeiro de 2016.

[15] http://base.repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/127634/000845672.pdf?sequence=1&isAllowed=y, acesso em 18 de janeiro de 2016.

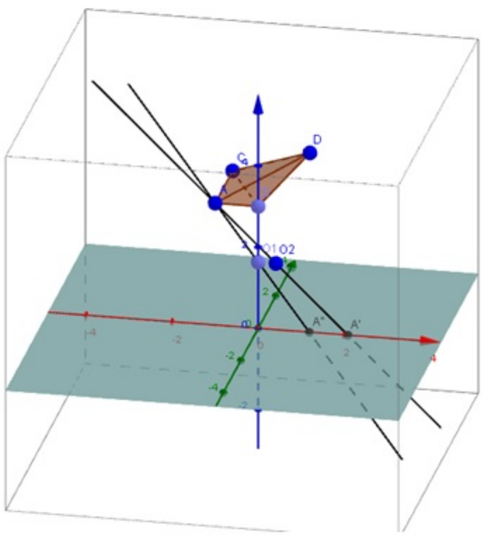
Anexos

PROFMAT	**PROFMAT**		**Semestre :** 2016.1
	Orientador: Vinícius Mello	**Disciplina:** TCC	
	Aluno: Emerson Oliveira		**Data:**

Atividade I – A Projeção Anaglífica

Parte 01 - Introdução

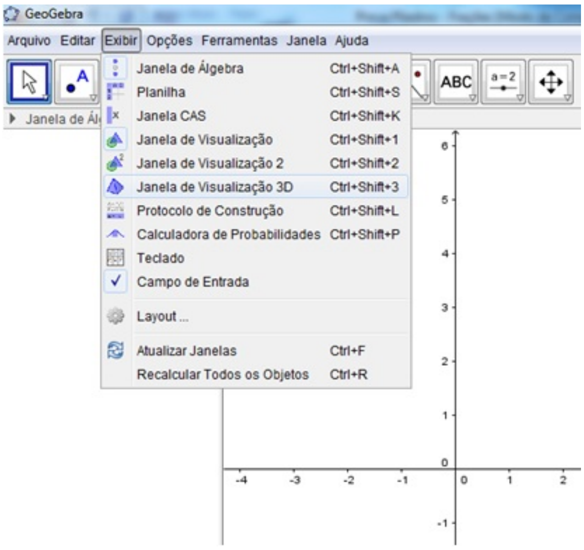
O processo geométrico para construção de uma projeção anaglífica de um objeto tridimensional pode ser realizado definindo dois pontos que simulam um par de olhos e um plano onde o sólido será projetado através destes pontos.



Parte 02 – Construção

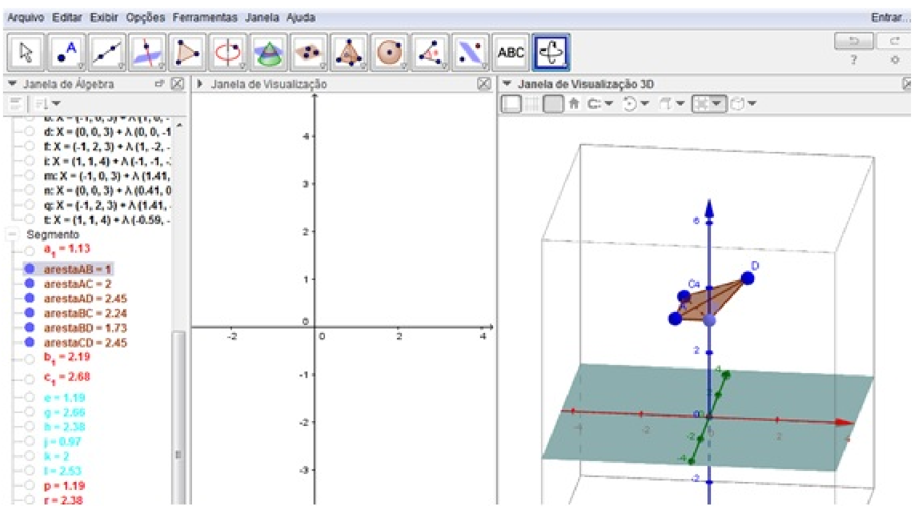
Passo a passo para criar uma pirâmide anaglífica no Geogebra 5.0

1 - Na janela inicial do programa clique em exibir e escolha a opção Janela de Visualização 3D



2- Na Janela de Visualização 3D clique no botão  Pirâmide

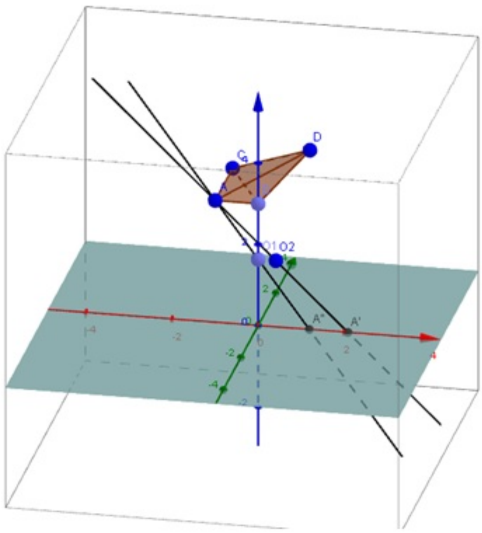
3- Para construir uma pirâmide de base triangular no Geogebra você deve usar o botão  para definir 4 pontos, os três primeiros (neste caso os pontos A(-1, 0, 3), B(0, 0, 3) e C(-1, 2, 3)) definirão a base e o quarto ponto D(1, 1, 4)) definirá o vértice que não está contido no plano da base.



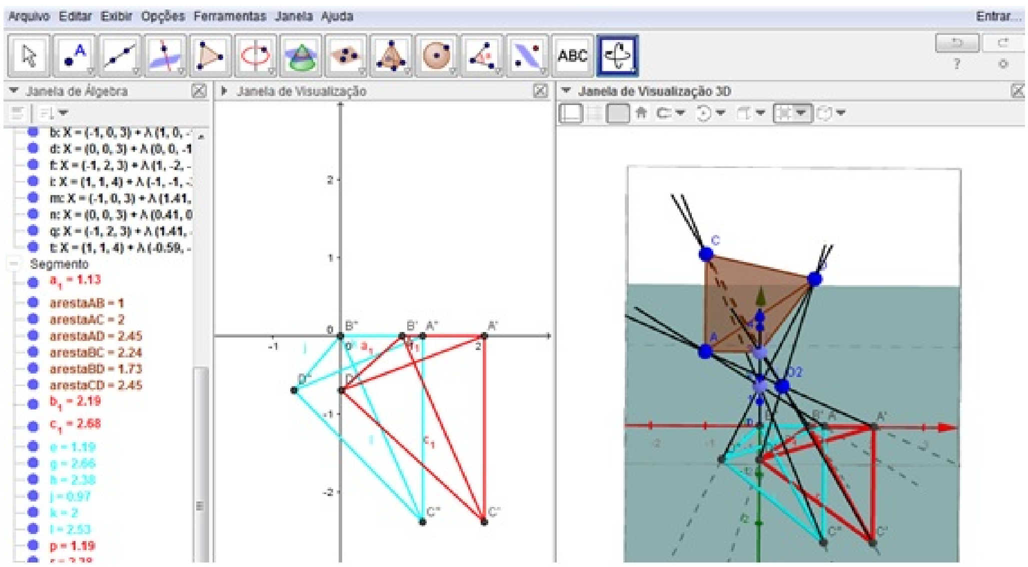
Para simular a posição dos olhos definiremos os pontos O_1 e O_2.

Partindo por exemplo do ponto A, podemos traçar retas que passam por A e pelos pontos O_1 e O_2 determinando no plano XOY os pontos A' e A'' respectivamente.

Realizando o mesmo processo nos pontos B, C e D teremos os vértices das respectivas projeções.

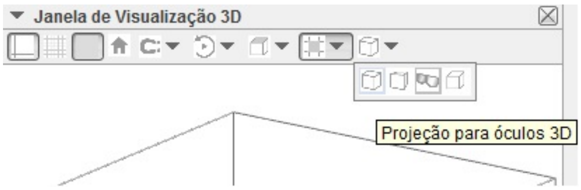


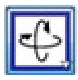
Cada aresta da pirâmide representa um lado da projeção, assim a aresta AB corresponde aos lados $A'B'$ e $A''B''$ das projeções.

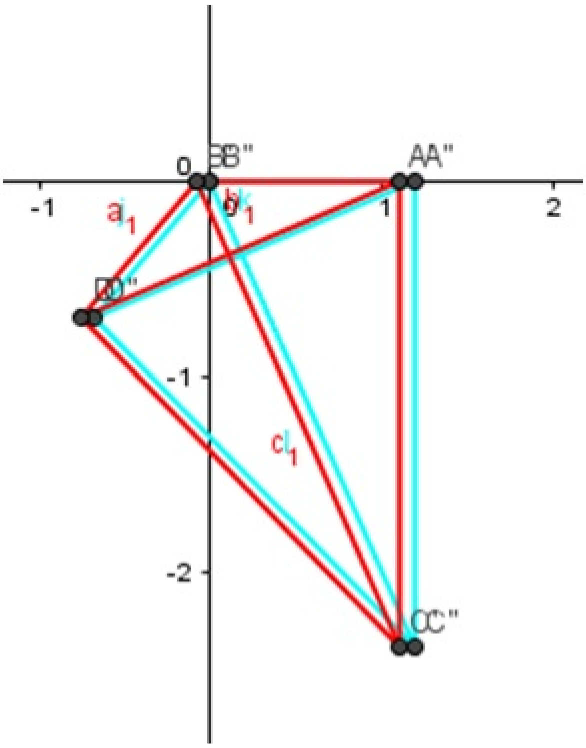


4- Clique no botão  Alternar Barra de Estilo, que está representado por uma "seta" localizada antes do nome "Janela de Visualização 3D" .

5- Clique no botão  Escolha o Tipo de Projeção e escolha a opção  Projeção para Óculos 3D.



6- Ponha os óculos anaglíficos e manipule a pirâmide usando, por exemplo, o botão  "Girar Janela de Visualização 3D".

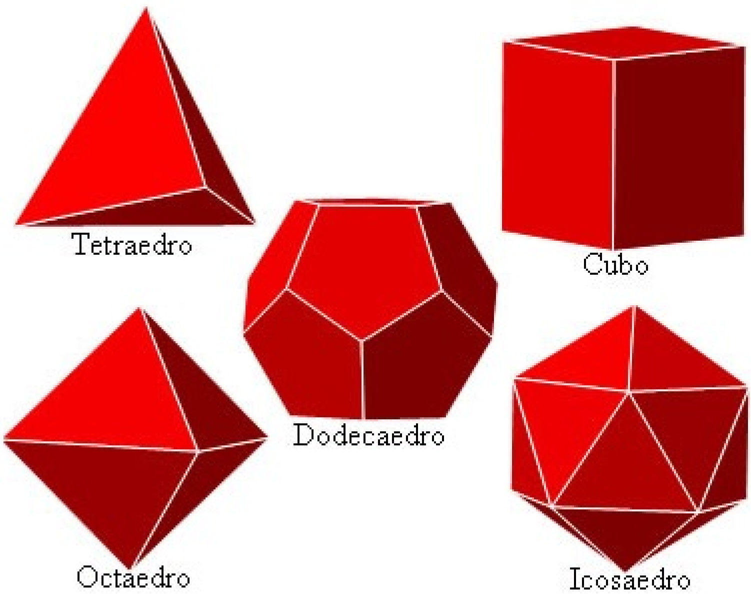


Para que estas projeções possam ser observadas com óculos anaglíficos e causarem o efeito de profundidade é necessário ajustar a posição entre elas, e para tanto o GeoGebra disponibiliza a ferramenta Controle Deslizante que pode fazer variar alguns componentes da estrutura com o objetivo de obter a melhor configuração.

PROFMAT	PROFMAT	Semestre: 2016.1
	Orientador: Vinícius Mello	Disciplina: TCC
	Aluno: Emerson Oliveira	Data:

Atividade II – Sólidos de Platão

Parte 01 - Introdução



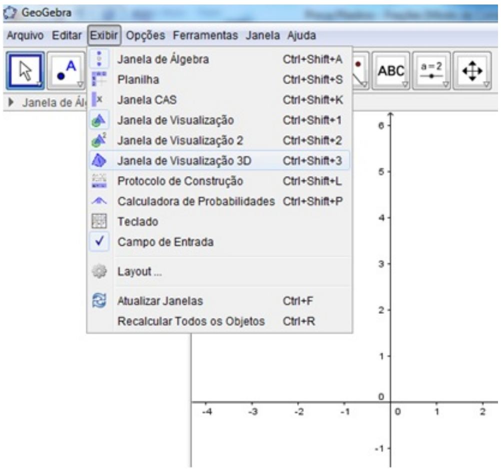
Os Sólidos de Platão são poliedros que atendem as seguintes condições:

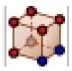
- Todas as faces são formadas por um mesmo polígono regular
- O número de arestas que parte de cada vértice é o mesmo para todos os vértices

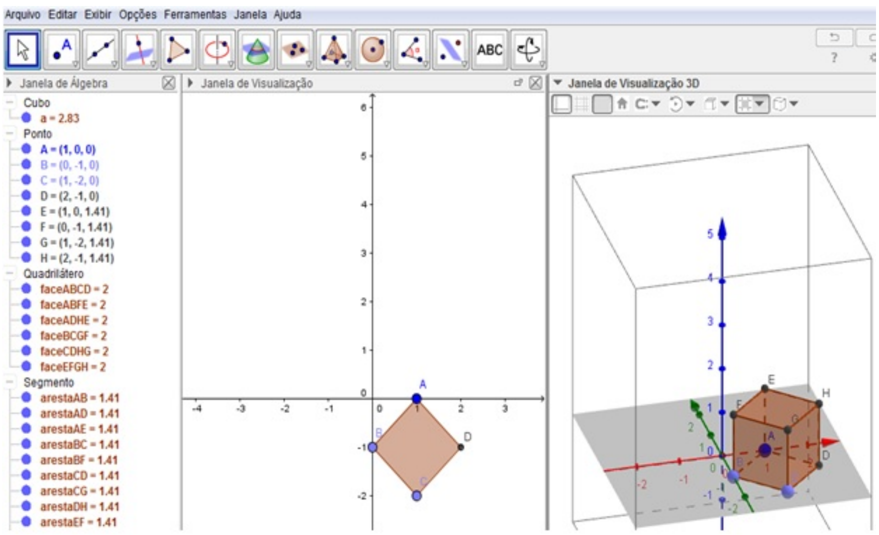
Parte 02 – Construção

Passo a passo para criar um cubo anaglífico no Geogebra 5.0

1 - Na janela inicial do programa clique em exibir e escolha a opção Janela de Visualização 3D



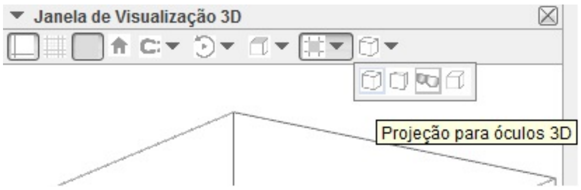
2- Na Janela de Visualização 3D clique no botão  Cubo. Para construir um cubo no Geogebra você precisa selecionar apenas 2 pontos.

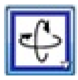


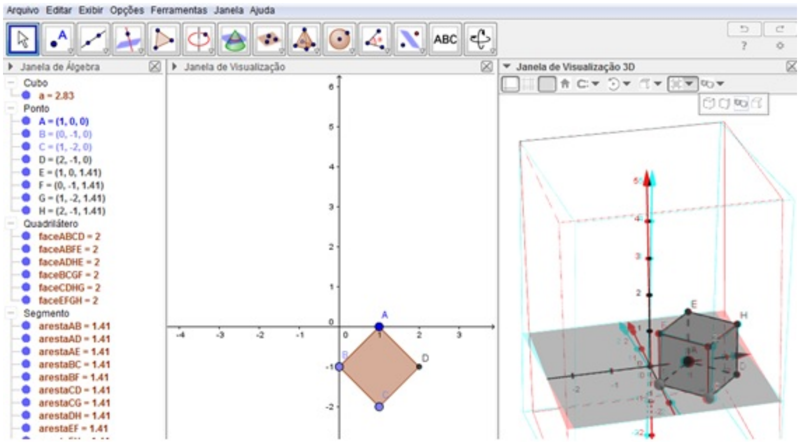
3- Clique no botão  Alternar Barra de Estilo, que está representado por uma “seta” localizada antes do nome “Janela de Visualização 3D” 

.

4- Clique no botão  Escolha o Tipo de Projeção e escolha a opção  Projeção para Óculos 3D.



5- Ponha os óculos anaglíficos e manipule a pirâmide usando, por exemplo, o botão  "Girar Janela de Visualização 3D".



6- Repita o processo com as devidas alterações para criar os outros Sólidos de Platão.

Parte 03 - Conclusão

A partir da visualização dos sólidos criados preencha a tabela a seguir:

Sólido	Polígono que compõe as faces	Nº de faces que se encontram em cada vértice
Tetraedro		
Cubo		
Octaedro		
Dodecaedro		
Icosaedro		

Será que existem outros Sólidos Platônicos além destes cinco citados?

Caso existam, suas faces serão polígonos regulares, e em cada vértice se encontram no mínimo 3 faces.

Outra observação importante é que a soma dos ângulos das faces que se encontram em cada vértice é necessariamente menor que 360^o.

Para investigarmos a existência de outros Sólidos Platônicos preencha as tabelas referentes a cada caso:

Faces triangulares

Número de triângulos por vértice	Soma dos ângulos
3	
4	
5	
6	

Faces quadradas

Número de quadrados por vértice	Soma dos ângulos
3	
4	

Faces pentagonais

Número de pentágonos por vértice	Soma dos ângulos
3	
4	

Faces hexagonais

Número de triângulos por vértice	Soma dos ângulos
3	

PROFMAT	**PROFMAT**	**Semestre :** 2016.1
	Orientador: Vinícius Mello	**Disciplina:** TCC
	Aluno: Emerson Oliveira	**Data:**

Atividade III – A Fórmula de Euler

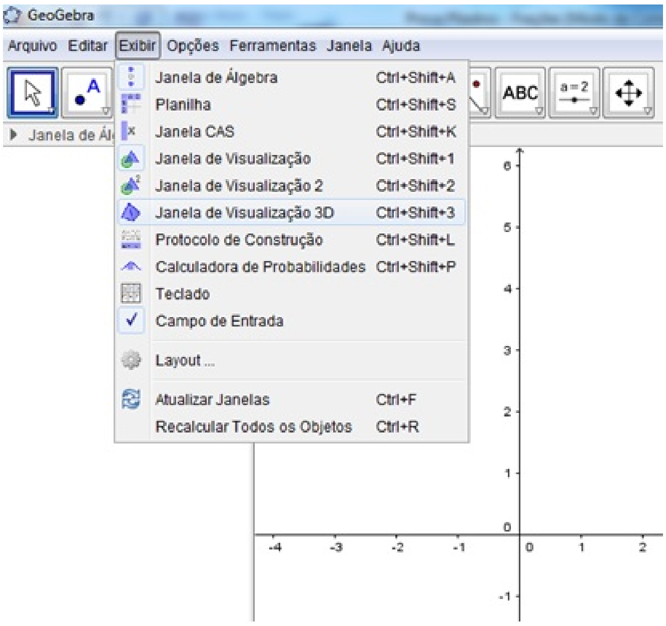
Parte 01 - Introdução

Neste experimento estudaremos a Fórmula de Euler para poliedros, que relaciona os números de vértices, faces e arestas de um poliedro qualquer. Surpreendentemente esta relação, bastante simples, passou desapercebida por brilhantes matemáticos ao longo da história e só foi descoberta no século XVII pelo grande matemático suíço Leonhard Euler.

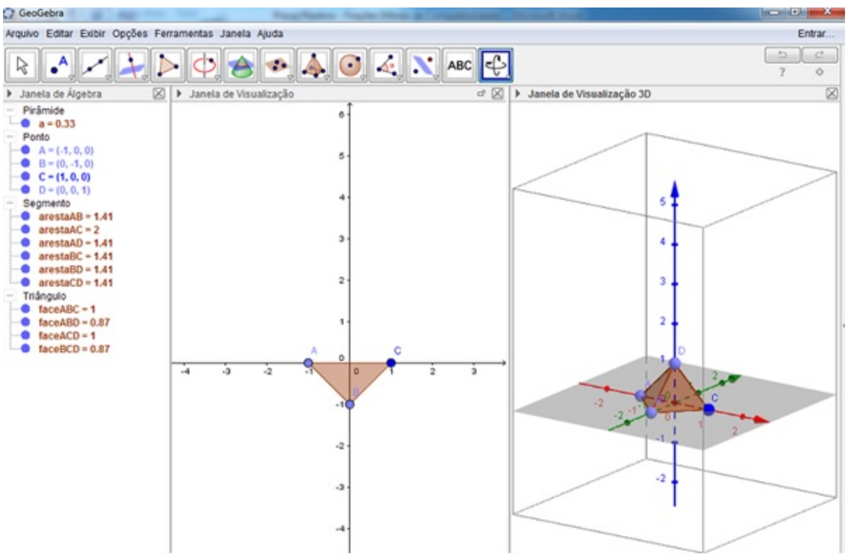
Parte 02 – Construção

Passo a passo para criar um cubo anaglífico no Geogebra 5.0

1 - Na janela inicial do programa clique em exibir e escolha a opção Janela de Visualização 3D



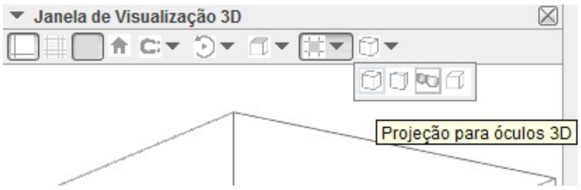
2- Na Janela de Visualização 3D clique no botão  Pirâmide. Para construir uma pirâmide de base triangular no GeoGebra você precisa selecionar 4 pontos, os três primeiros definirão a base e o quarto ponto definirá o vértice que não está contido no plano da base.

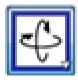


3- Clique no botão  Alternar Barra de Estilo, que está representado por uma "seta" localizada antes do nome "Janela de Visualização 3D" 

.

4- Clique no botão  Escolha o Tipo de Projeção e escolha a opção  Projeção para Óculos 3D.



5- Ponha os óculos anaglíficos e manipule a pirâmide usando, por exemplo, o botão  "Girar Janela de Visualização 3D".

6- Repita o processo com as devidas alterações para criar outra pirâmide, agora de base pentagonal.

7- Utilizando um processo parecido crie um prisma de base triangular.

Parte 03 - Conclusão

A partir da visualização dos sólidos criados preencha a tabela a seguir:

Sólido	Nº de vértices V	Nº de faces F	A	V + F

A partir dos dados obtidos na tabela investigue uma possível relação entre o número de faces vértices arestas dos sólidos observados.

PROFMAT	**PROFMAT**	**Semestre :** 2016.1
	Orientador: Vinícius Mello	**Disciplina:** TCC
	Aluno: Emerson Oliveira	**Data:**

Atividade IV – O Volume da Anti-Clepsidra

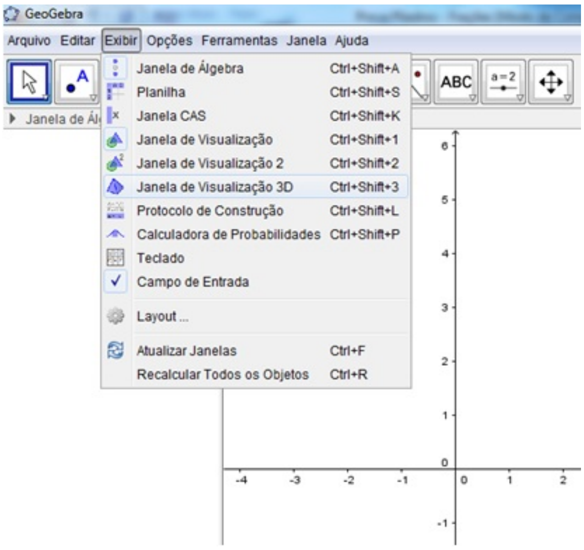
Parte 01 - Introdução

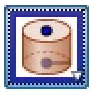
A Clepsidra também conhecida como relógio de água é um objeto antigo em forma de cone de duas folhas, onde os cones se comunicam através de um pequeno orifício entre os seus ápices.

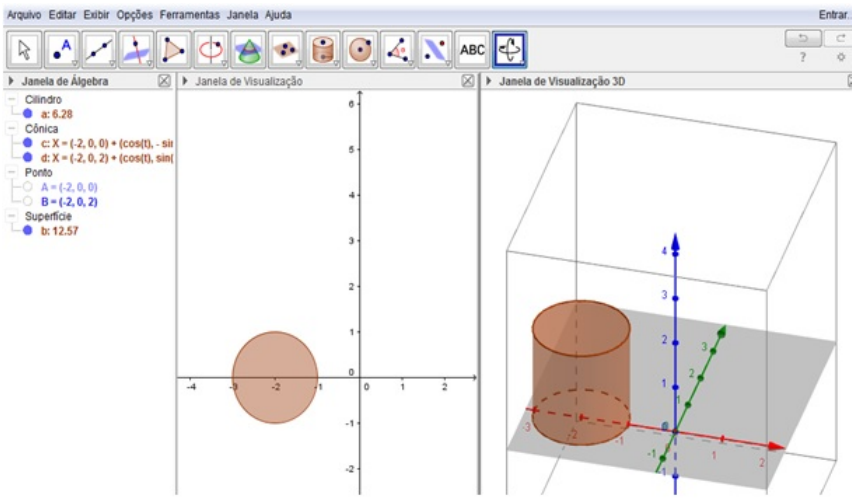
Parte 02 – Construção

Passo a passo para criar Cones, Cilindros e Esferas anaglíficos no Geogebra 5.0

1 - Na janela inicial do programa clique em exibir e escolha a opção Janela de Visualização 3D

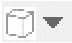


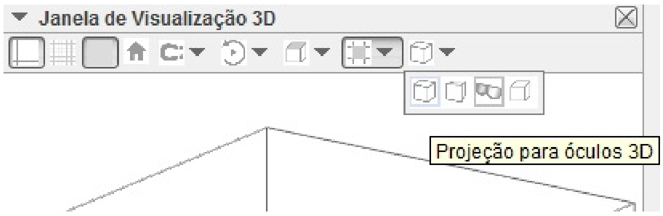
2- Na Janela de Visualização 3D clique no botão  cilindro. Para construir um cilindro no GeoGebra você precisa selecionar 2 pontos, que definem as bases do cilindro, e o raio da base.

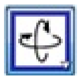


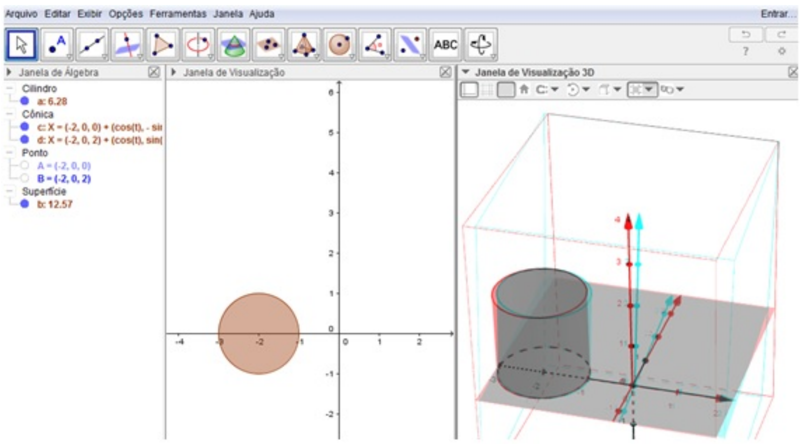
3- Clique no botão  Alternar Barra de Estilo, que está representado por uma "seta" localizada antes do nome "Janela de Visualização 3D" 

.

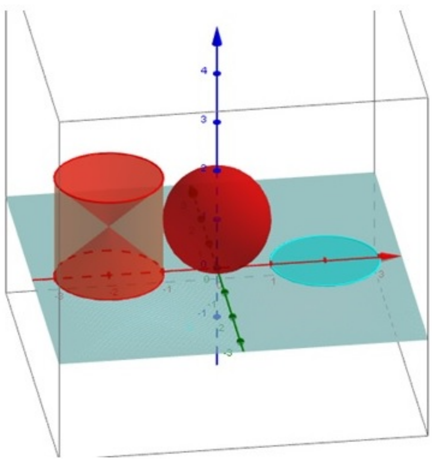
4- Clique no botão  Escolha o Tipo de Projeção e escolha a opção  Projeção para Óculos 3D.



5- Ponha os óculos anaglíficos e manipule o cilindro usando, por exemplo, o botão  "Girar Janela de Visualização 3D".



6- Utilizando um processo parecido crie um cone de duas folhas inscrito no cilindro e uma esfera conforme a imagem mostrada abaixo..



Parte 03 - Conclusão

A partir da visualização dos sólidos criados preencha a tabela a seguir calculando a área da secção de cada plano com o respectivo sólido:

	Esfera	Cilindro	Clepsidra	Anti-Clepsidra
Z=0				
Z=1				
Z=1,5				
Z=2				

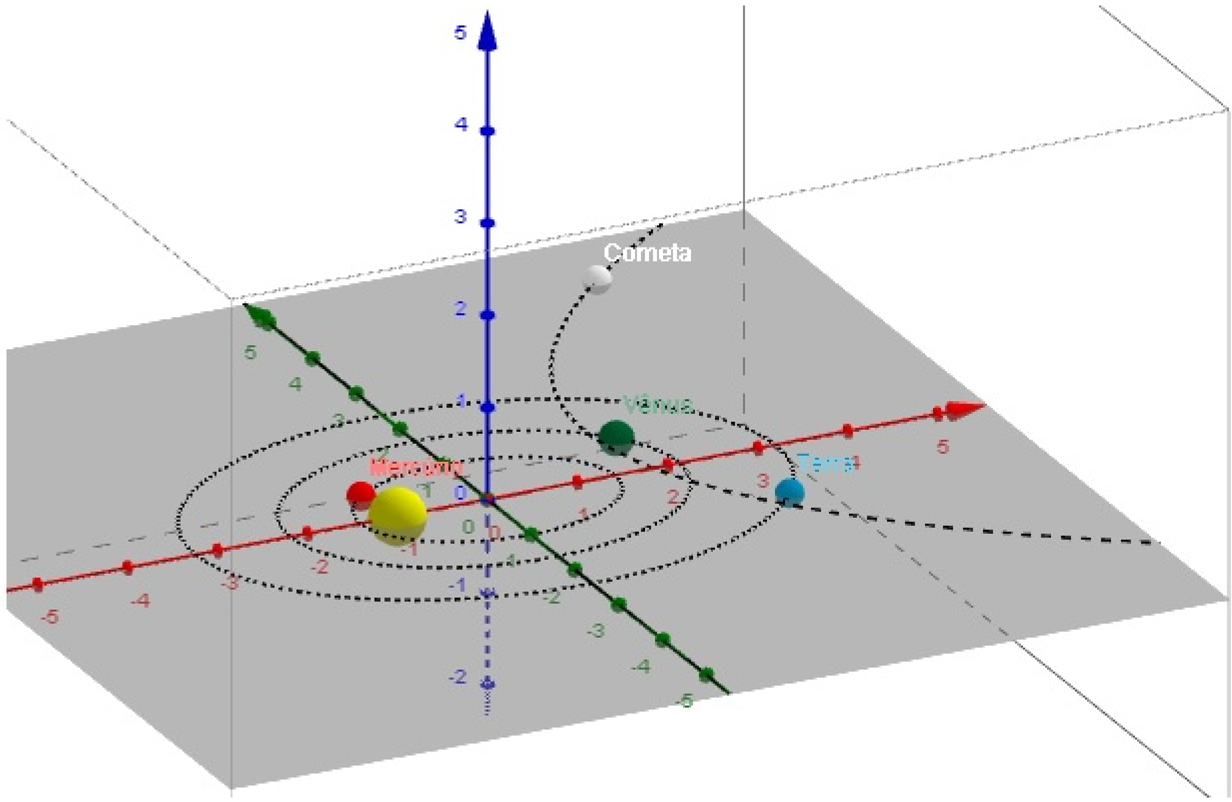
O Princípio de Cavalieri diz que se qualquer plano que corta dois sólidos determina secções transversais com áreas iguais então os volumes destes sólidos serão numericamente iguais.

Baseado no Princípio de Cavalieri, utilize a tabela para criar uma possível conjectura entre o volume da esfera e o volume da Anti-Clepsidra.

PROFMAT	PROFMAT	Semestre : 2016.1
	Orientador: Vinícius Mello	Disciplina: TCC
	Aluno: Emerson Oliveira	Data:

Atividade V – A matemática dos astros

Parte 01 - Introdução



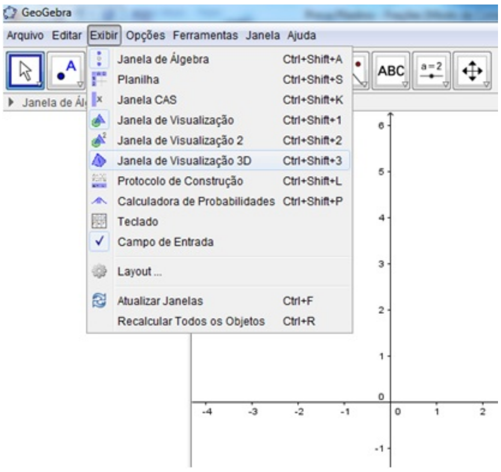
O astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) descobriu que os planetas se movimentam em torno do sol descrevendo em suas trajetórias curvas que os matemáticos chamam de Elipses.

Para entendermos melhor as elipses vamos construir um mini sistema solar e observar suas características.

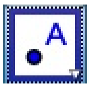
Parte 02 – Construção

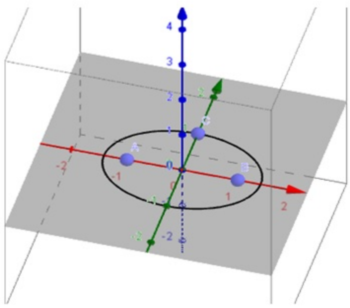
Passo a passo para criar uma Elipse anaglífica no Geogebra 5.0

1 - Na janela inicial do programa clique em exibir e escolha a opção Janela de Visualização 3D

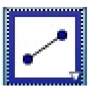


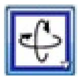
2- Na Janela de Visualização 3D clique no botão  Elipse. Para construir uma Elipse no GeoGebra você precisa selecionar apenas 3 pontos.

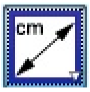
3- Clique no botão  para criar os pontos A, B e C.

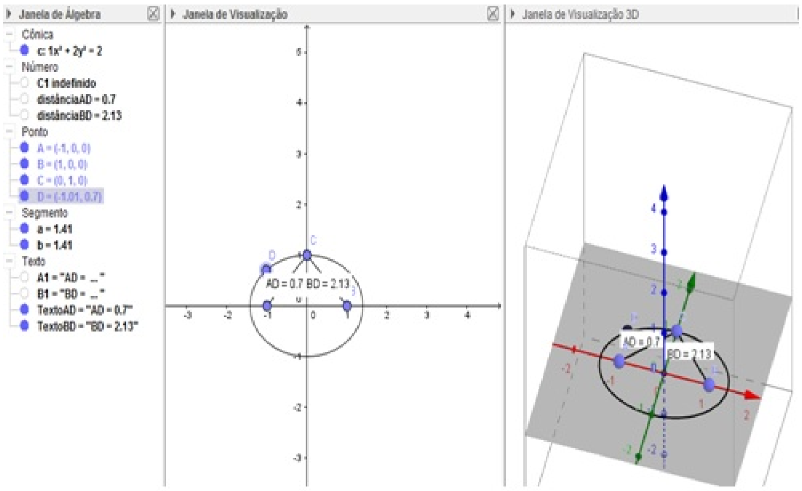


4- Para representarmos um planeta criaremos o ponto clicando no botão  e passando o cursor sobre a Elipse para selecioná-la..

5- Clique no botão  Segmento e clique nos pares de pontos AD e BD para criar dois segmentos de reta.

5- Ponha os óculos anaglíficos e manipule o cilindro usando, por exemplo, o botão  "Girar Janela de Visualização 3D".

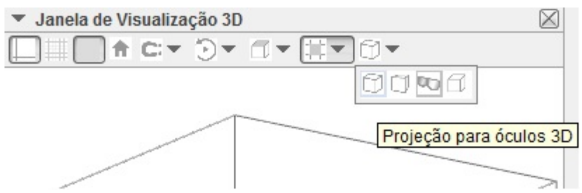
6- Selecione o botão  Distancias e clique nos segmentos AD e BD.

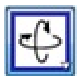


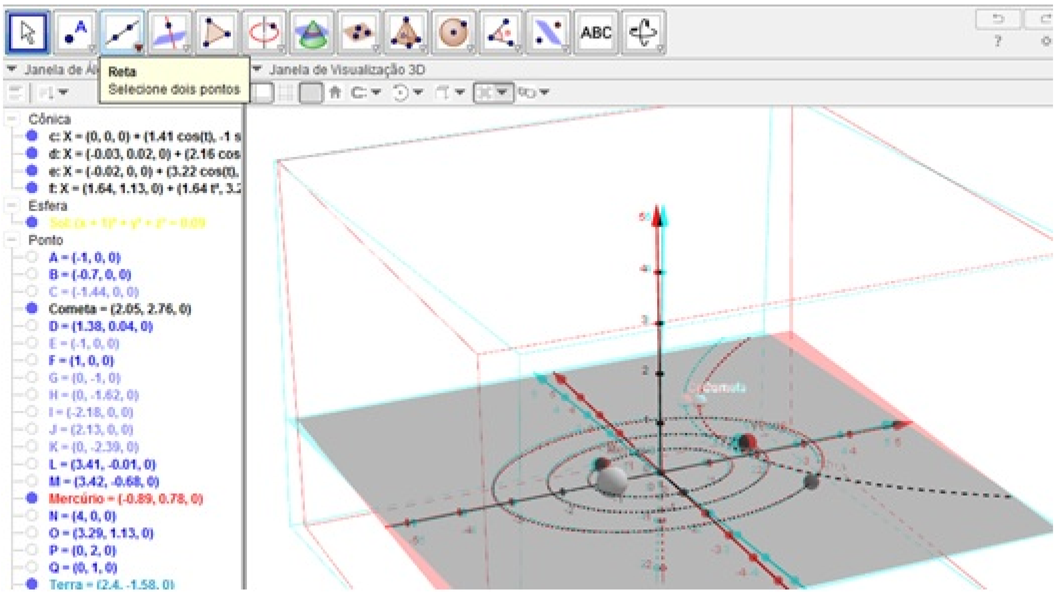
7- Clique no botão direito do mouse sobre o ponto D e escolha a opção Animar.

8- Clique no botão  Alternar Barra de Estilo, que está representado por uma "seta" localizada antes do nome "Janela de Visualização 3D" .

9- Clique no botão  Escolha o Tipo de Projeção e escolha a opção  Projeção para Óculos 3D.



10- Ponha os óculos anaglíficos e manipule o cilindro usando, por exemplo, o botão  "Girar Janela de Visualização 3D".


Reta
Selecione dois pontos
Janela de Visualização 3D
Cônica
c: X = (0, 0, 0) + (1.41 cos(t), -1 s
d: X = (-0.03, 0.02, 0) + (2.16 cos
e: X = (-0.02, 0, 0) + (3.22 cos(t),
f: X = (1.64, 1.13, 0) + (1.64 t², 3.2
Esfera
Ponto
A = (-1, 0, 0)
B = (-0.7, 0, 0)
C = (-1.44, 0, 0)
Cometa = (2.05, 2.76, 0)
D = (1.38, 0.04, 0)
E = (-1, 0, 0)
F = (1, 0, 0)
G = (0, -1, 0)
H = (0, -1.62, 0)
I = (-2.18, 0, 0)
J = (2.13, 0, 0)
K = (0, -2.39, 0)
L = (3.41, -0.01, 0)
M = (3.42, -0.68, 0)
Mercúrio = (-0.89, 0.78, 0)
N = (4, 0, 0)
O = (3.29, 1.13, 0)
P = (0, 2, 0)
Q = (0, 1, 0)
Terra = (2.4, -1.58, 0)

Parte 03 - Conclusão

Pare a animação em 5 pontos diferentes da Elipse e preencha a tabela abaixo:

	Distancia entre os pontos A e D	Distancias entre os pontos B e D	Soma das medidas de AD e BD
Ponto 1			
Ponto 2			
Ponto 3			
Ponto 4			
Ponto 5			

Definindo os pontos A e B como focos da Elipse, investigue uma possível relação entre as distâncias entre um ponto qualquer da Elipse e os seus focos.

PROFMAT	**PROFMAT**	**Semestre :** 2016.1
	Orientador: Vinícius Mello	**Disciplina:** TCC
	Aluno: Emerson Oliveira	**Data:**

Atividade VI – O volume da pirâmide

Parte 01 - Introdução

As famosas pirâmides, consideradas uma das sete maravilhas do mundo antigo, foram construídas para servir de túmulo a grandes faraós do Egito. A primeira delas foi pirâmide de Djoser construída pelo arquiteto Imotep. Na necrópole de Gizé estão localizadas as pirâmides de Quéops, Quéfren e Miquerinos, sendo a de Queóps a maior pirâmide egípcia, cuja altura original chegava a mais de 140 metros de altura.

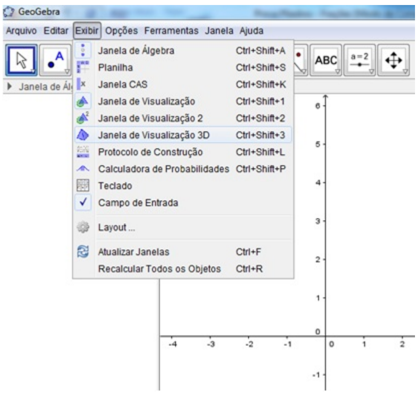
Parte 02 – Construção

Passo a passo para criarmos as três pirâmides e o prisma anaglíficos, necessários a este experimento no Geogebra 5.0

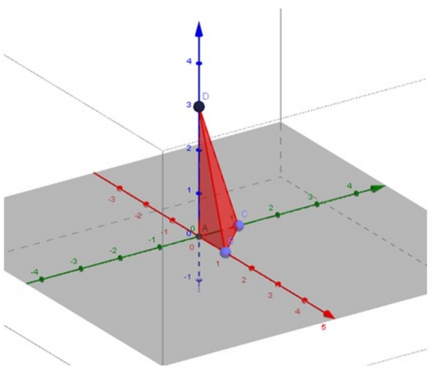
1- Clique no botão para criar os pontos A, B, C, D, E e F com as seguintes coordenadas:

$$A(0;0;0)$$
$$D(0;0;3)$$
$$B(1;0;0)$$
$$E(1;0;3)$$
$$C(0;1;0)$$
$$F(0;1;3)$$

2 - Na janela inicial do programa clique em exibir e escolha a opção Janela de Visualização 3D



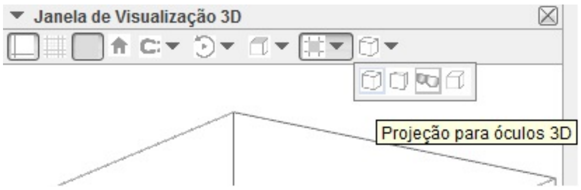
3- Na Janela de Visualização 3D clique no botão  Pirâmide. Para construir uma pirâmide de base triangular no Geogebra você precisa selecionar 4 pontos, os três primeiros (neste caso os pontos A, B e C) definirão a base e o quarto ponto (D) definirá o vértice que não está contido no plano da base.

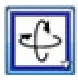


4- Clique no botão  Alternar Barra de Estilo, que está representado por uma “seta” localizada antes do nome “Janela de Visualização 3D” 

.

5- Clique no botão  Escolha o Tipo de Projeção e escolha a opção  Projeção para Óculos 3D.

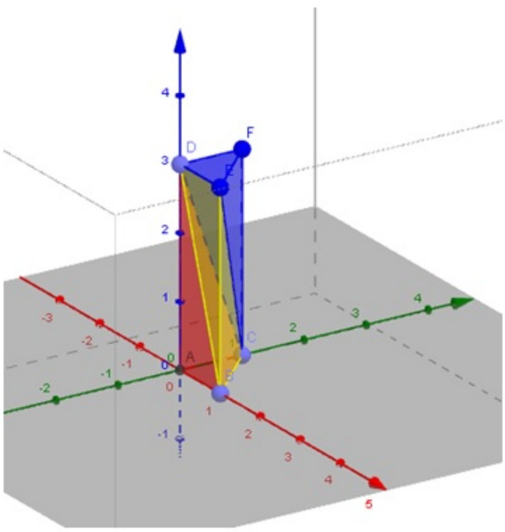


6- Ponha os óculos anaglíficos e manipule o cilindro usando, por exemplo, o botão  “Girar Janela de Visualização 3D”.

7- Repita o processo com as devidas alterações para criar uma pirâmide definida pelos pontos C, D, E e F.

8- Repita o processo com as devidas alterações para criar uma pirâmide definida pelos pontos B, C, D e E.

9- Repita o processo com as devidas alterações para criar um prisma de base triangular definido pelos pontos A, B, C e D.



10- Clique no botão  para calcular o volume dos sólidos criados.

Parte 03 - Conclusão

A partir da visualização dos sólidos criados preencha a tabela a seguir:

Sólido	Volume
Pirâmide 1	
Pirâmide 2	
Pirâmide 3	
Cilindro	

A partir dos dados obtidos na tabela investigue uma possível relação entre os volumes dos sólidos criados.