



Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Matemática e Educação Previdenciária

João Elias Vieira Júnior

Salvador - Bahia
Fevereiro de 2017

Matemática e Educação Previdenciária

João Elias Vieira Júnior

Dissertação de Mestrado apresentada
à Comissão Acadêmica Institucional do
PROFMAT-UFBA como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello.

Salvador - Bahia

Fevereiro de 2017

Matemática e Educação Previdenciária

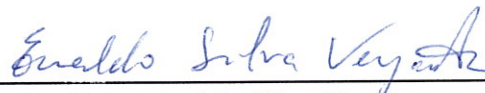
João Elias Vieira Júnior

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 20/02/2017.

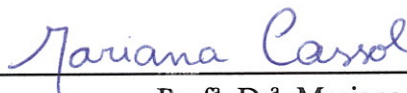
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello (orientador)
UFBA



Prof. Dr. Enaldo Silva Vergasta
UFBA



Prof.^a. Dr.^a. Mariana Cassol
UFBA

Aos meus pais e familiares. À minha esposa, Paula.

Agradecimentos

Não poderia deixar de iniciar agradecendo ao meu orientador, Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello, que me dispensou um inestimável auxílio na elaboração deste trabalho, desde a escolha do tema até a sua finalização.

Agradeço a todos os professores e colegas com quem convivi ao longo do mestrado. Foi um grande privilégio para mim ter convivido com pessoas tão brilhantes.

Mas quero registrar um agradecimento especial ao Prof. Dr. Enaldo Silva Vergasta e à Profa. Dra. Mariana Cassol, que gentilmente aceitaram o convite para participar da Banca Examinadora, e também aos seguintes professores que, ao lado do meu orientador, Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello, marcaram de forma mais acentuada minha trajetória na UFBA: Prof. Dr. André Luís G. Mandolesi, Prof. Dr. Evandro Carlos F. dos Santos, Prof. Dr. Marcelo Dias Passos, Prof. Dr. José Nelson B. Barbosa, Prof. Dr. Joseph Nee A. Yartey, Profa. Dra. Rita de Cássia de Jesus Silva e Profa. Dra. Simone Sousa Ribeiro.

Agradeço ainda aos seguintes colegas que, na graduação ou no mestrado, os quais cursei em paralelo, tornaram menos árdua minha caminhada até aqui: Américo Lago, Carlos A. Nonato, Claudionor Araújo, Etinevaldo Santos, Gilcimar Neves, Ives Vergne, Ivanilton Sales, Ivson Andrade, Leandro Solano, Luciano Coutinho, Marcelo Lopes, Márcio Queiroz, Nadjara Paixão, Neildes Alves, Osmando Barbosa, Paulo Andrade, Rodrigo Laranjeira e Victor Gozanga.

Quero também registrar um agradecimento especial ao amigo Marivaldo Bispo Pereira, cujo auxílio com o L^AT_EX foi fundamental, e à colega Lígia Taciana, que me auxiliou na elaboração do projeto desta dissertação. Também aos meus colegas de trabalho Laurindo Soares, Mônica Gesteira e Thaís d'Ávila, pela solidariedade e apoio constantes.

Um agradecimento muito especial à minha esposa, pelo companheirismo e incentivo de sempre, minorando o sentimento de culpa pelos momentos que com ela deixei de compartilhar durante a elaboração deste trabalho, e ao nosso "filho", Théo, cuja fiel companhia por diversas vezes me serviu de escudo contra a solidão das madrugadas em que adentrei no afã de concluir esta obra.

Agradeço imensa e eternamente aos meus pais, João Elias e Maria da Cruz, que mesmo diante dos poucos recursos financeiros de que dispunham, sempre me concederam

incondicional apoio e estímulo para estudar.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a consecução deste trabalho, meus sinceros agradecimentos.

Por fim, e acima de tudo, agradeço a Deus!

*Nasce o Sol, e não dura mais que um dia,
Depois da Luz, se segue a noite escura,
Em tristes sombras morre a formosura,
Em contínuas tristezas a alegria.*

*Porém, se acaba o Sol, por que nascia?
Se é tão formosa a Luz, por que não dura?
Como a beleza assim se transfigura?
Como o gosto da pena assim se fia?*

*Mas no Sol, e na Luz, falte a firmeza;
Na formosura não se dê constância,
E na alegria sinta-se tristeza.*

*Começa o mundo enfim pela ignorância,
E tem qualquer dos bens por natureza
A firmeza somente na inconstância.*

Gregório de Matos

Resumo

Este trabalho apresenta algumas conexões entre a matemática e a educação previdenciária, com o objetivo de propiciar aos alunos do ensino médio, por um lado, mais uma oportunidade de aplicação prática e cotidiana da matemática e, por outro, o contato com temas que têm ganhado cada vez maior relevo social, que são aqueles relacionados à previdência, especialmente no presente momento, em que se encontra em discussão mais uma proposta de reforma da Previdência Social, com previsão de restrição de acesso aos benefícios previdenciários, por meio do endurecimento das regras para a concessão destes. Para possibilitar a abordagem do tema mesmo diante de alunos que ainda não dominem completamente a matemática nele envolvida, elaboramos uma calculadora gráfica, utilizando o software GeoGebra, por meio da qual é possível a obtenção dos resultados de forma bastante simples. Foram apresentadas, ainda, importantes noções da Previdência Social brasileira, conteúdo que consideramos essencial para o alcance dos objetivos desta dissertação. Ao final, apresentamos algumas sugestões de atividades que os professores poderão desenvolver com os alunos, a fim de estimular a fixação dos assuntos abordados no presente trabalho.

PALAVRAS-CHAVE: Matemática, Educação Previdenciária, Previdência, Previdência Social, GeoGebra, Calculadora Gráfica.

Abstract

This dissertation presents some connections between Mathematics and social security education, with the objective of providing high school students, on the one hand, with an opportunity for practical and daily application of Mathematics and, on the other hand, the contact with themes that have gained increasing social relevance, which are those related to social security, especially in the present moment, which is under discussion another proposed social security reform, with possible restrictions on access to social security benefits, through the tightening of the rules for the granting of these. To make it possible to approach the subject even in the face of students who do not yet master completely the mathematics involved, we worked out a graphical calculator, using GeoGebra software, through which it is possible to obtain the results quite simply. It was also presented important notions of the Brazilian Social Security, content that we consider essential for the achievement of the purposes of this dissertation. At the end, we present some suggestions for activities that teachers can develop with students, in order to stimulate the fixation of the subjects addressed in the present work.

KEY WORDS: Mathematics, Social Security Education, Social Security, GeoGebra, Graphical Calculator.

Sumário

1	Garantindo uma Renda Futura	4
1.1	Cenário Inicial: inflação zero, juros zero.	4
1.2	Utilizando o Poder dos Juros Compostos	7
1.2.1	Rendas certas ou anuidades: breve revisão	7
1.2.2	Fazendo o capital se reproduzir	17
2	O GeoGebra como Calculadora Gráfica	37
3	Noções Básicas da Previdência Social Brasileira	55
3.1	Breve Histórico da Previdência Social no Brasil	55
3.2	A Previdência Social na Constituição Federal de 1988	58
3.3	O Regime Geral de Previdência Social - RGPS	60
3.4	Segurados do RGPS	62
3.5	Benefícios do RGPS	64
3.5.1	A Aposentadoria por Tempo de Contribuição	69
3.6	O Fator Previdenciário	73
3.7	Contribuição Previdenciária	78
3.7.1	Contribuição do Segurado	81
3.7.2	Contribuição da Empresa e do Empregador Doméstico	84
3.8	O (alegado) Déficit da Previdência Social	88
4	Atividades Propostas	93
4.1	Atividades 01 a 05 - Cálculo da Contribuição Previdenciária	93
4.2	Atividades 06 e 07 - Cálculo do Fator Previdenciário	97
4.3	Atividades 08 a 12 - Cálculo do Valor da Aposentadoria	100
4.4	Atividade 13 - Contribuição Previdenciária x Poupança	104
4.5	Atividade 14 - Pirâmide Etária	107
4.6	Atividades 15 e 16 - Pesquisa de Campo	109
5	Considerações Finais	110

Lista de Figuras

2.1	Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Cálculos relativos à acumulação de capital e ao usufruto da renda, e visualização da evolução do montante durante os períodos de acumulação e de usufruto.	39
2.2	Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 10: cálculo da contribuição, em percentual do salário ou renda mensal atual, para uma taxa de juros de 0,5% a.m., percentual do benefício de 100% do salário ou renda mensal, tempo de acumulação de 35 anos e tempo de usufruto da renda ou benefício de 20 anos.	40
2.3	Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 10: cálculo da contribuição, em percentual do salário ou renda mensal atual, para uma taxa de juros de 0,5% a.m., percentual do benefício de 100% do salário ou renda mensal, tempo de acumulação de 35 anos e tempo de usufruto da renda ou benefício de 20 anos.	40
2.4	Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 10: cálculo da contribuição, em percentual do salário ou renda mensal atual, para uma taxa de juros de 0,5% a.m., percentual do benefício de 100% do salário ou renda mensal, tempo de acumulação de 35 anos e tempo de usufruto da renda ou benefício de 20 anos.	41
2.5	Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 11: cálculo da contribuição, em percentual do salário ou renda mensal atual, para uma taxa de juros de 0,5% a.m., percentual do benefício de 100% do salário ou renda mensal, tempo de acumulação de 35 anos e tempo de usufruto do benefício de 9,9 anos.	42
2.6	Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 11: cálculo da contribuição, em percentual do salário ou renda mensal atual, para uma taxa de juros de 0,5% a.m., percentual do benefício de 100% do salário ou renda mensal, tempo de acumulação de 35 anos e tempo de usufruto do benefício de 9,9 anos.	43
2.7	Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 11: cálculo da contribuição, em percentual do salário ou renda mensal atual, para uma taxa de juros de 0,5% a.m., percentual do benefício de 100% do salário ou renda mensal, tempo de acumulação de 35 anos e tempo de usufruto do benefício de 9,9 anos.	43

2.8	Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 11: cálculo da contribuição, em percentual do salário ou renda mensal atual, para uma taxa de juros de 0,5% a.m., percentual do benefício de 100% do salário ou renda mensal, tempo de acumulação de 35 anos e tempo de usufruto do benefício de 9,9 anos.	44
2.9	Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 12: cálculo do benefício, em percentual do salário ou renda mensal atual, para uma taxa de juros de 0,25% a.m., percentual de contribuição de 10% do salário ou renda mensal, tempo de acumulação de 35 anos e tempo de usufruto de 20,5 anos.	45
2.10	Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 12: cálculo do benefício, em percentual do salário ou renda mensal atual, para uma taxa de juros de 0,25% a.m., percentual de contribuição de 10% do salário ou renda mensal, tempo de acumulação de 35 anos e tempo de usufruto de 20,5 anos.	45
2.11	Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 12: cálculo do benefício, em percentual do salário ou renda mensal atual, para uma taxa de juros de 0,25% a.m., percentual de contribuição de 10% do salário ou renda mensal, tempo de acumulação de 35 anos e tempo de usufruto de 20,5 anos.	46
2.12	Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 15, item "a": cálculo do montante acumulado, para uma taxa de juros de 0,8% a.m., percentual de contribuição de 10% do salário ou renda mensal e 25 anos de acumulação.	47
2.13	Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 15, item "a": cálculo do montante acumulado, para uma taxa de juros de 1,2% a.m., percentual de contribuição de 10% do salário ou renda mensal e 25 anos de acumulação.	48
2.14	Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 15, item "a": cálculo do montante acumulado, para uma taxa de juros de 1,03% a.m., percentual de contribuição de 10% do salário ou renda mensal e 25 anos de acumulação.	48
2.15	Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 15, item "b": cálculo do tempo de contribuição necessário para acumulação de 200 salários, com uma taxa de juros de 0,5% a.m. e percentual de contribuição de 10% do salário.	49
2.16	Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 15, item "b": cálculo do tempo de contribuição necessário para acumulação de 200 salários, com uma taxa de juros de 0,5% a.m. e percentual de contribuição de 10% do salário.	49
2.17	Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 19: cálculo do tempo de benefício, para uma taxa de juros de 1,0% a.m., percentual de contribuição de 20% do salário ou renda mensal, percentual de benefício de 100% do salário ou renda mensal e 20 anos de acumulação.	50

2.18	Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 19: cálculo do tempo de benefício, para uma taxa de juros de 1,0% a.m., percentual de contribuição de 20% do salário ou renda mensal, percentual de benefício de 100% do salário ou renda mensal e 15 anos de acumulação.	51
2.19	Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 19: cálculo do tempo de benefício, para uma taxa de juros de 1,0% a.m., percentual de contribuição de 20% do salário ou renda mensal, percentual de benefício de 100% do salário ou renda mensal e 14,9 anos de acumulação.	52
2.20	Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 19: cálculo do tempo de benefício, para uma taxa de juros de 1,0% a.m., percentual de contribuição de 20% do salário ou renda mensal, percentual de benefício de 100% do salário ou renda mensal e 15,1 anos de acumulação.	52
2.21	Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 20: cálculo do tempo de benefício, para uma taxa de juros de 0,6% a.m., percentual de contribuição de 10% do salário ou renda mensal, percentual de benefício de 100% do salário ou renda mensal e 35 anos de acumulação.	53
3.1	Fator Previdenciário - parte 1.	75
3.2	Fator Previdenciário - parte 2.	76
3.3	Cálculo do fator previdenciário com o uso do GeoGebra, calculado para um tempo de contribuição de 35 anos, idade de 60 anos e expectativa de vida correspondente de 22 anos.	78
4.1	Gráfico <i>Fator Previdenciário x Idade</i> . Determinação do valor do fator previdenciário para uma idade de 60 anos e tempo de contribuição de 35 anos.	99
4.2	Gráfico <i>Fator Previdenciário x Tempo de Contribuição</i> . Determinação do valor do fator previdenciário para um tempo de contribuição de 35 anos e 60 anos de idade.	99
4.3	Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução da atividade 13: cálculo do tempo de benefício, para uma taxa de 0,5% a.m., percentual de contribuição de 8% do salário ou renda mensal, percentual de benefício de 100% do salário ou renda mensal e 30 anos de acumulação.	105
4.4	Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução da atividade 13: cálculo do tempo de benefício, para uma taxa de 0,5% a.m., percentual de contribuição de 20% do salário ou renda mensal, percentual de benefício de 100% do salário ou renda mensal e 30 anos de acumulação.	106
4.5	Pirâmide Etária: modelo abstrato.	108

Lista de Tabelas

1.1	Brasil: Tábua de Mortalidade - 2014.	6
1.2	Brasil: Tábua de Mortalidade para 60 e 65 anos de idade - Projeção 2020-2060.	29
3.1	Regra 85/95 progressiva.	70
3.2	Tabela de contribuição do empregado, doméstico e avulso.	81
3.3	Tabela de contribuição do contribuinte individual e do facultativo.	84
3.4	Brasil: Evolução nominal do déficit da Previdência Social (RGPS) - 2012 a 2015, em bilhões de reais.	89

Introdução

Os constantes avanços sociais e tecnológicos experimentados ao longo das últimas décadas têm contribuído para um contínuo aumento da expectativa média de vida das pessoas, como temos visto ocorrer no Brasil. Conforme dados divulgados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE)¹, entre 1960 e 2010, a expectativa de vida dos brasileiros aumentou 25,4 anos, passando de 48 para 73,4, o que significa dizer que, nesse intervalo de 50 anos, a expectativa de vida dos brasileiros subiu, em média, 1 ano a cada biênio. E os dados mais recentes divulgados pelo IBGE², com base no censo de 2014, dão conta de que a expectativa de vida ao nascer no Brasil, para ambos os sexos, já subiu para 75,2 anos. No caso das mulheres, a expectativa de vida para as nascidas em 2014 foi ainda maior, de 78,8 anos (para os homens, essa expectativa foi de 71,6 anos).

Assim, de acordo com as estatísticas atuais, cada um de nós provavelmente alcançará 80 anos de vida ou mais. Se, por um lado, essa é uma boa notícia, por outro, nos impõe precauções, pois a velhice³ é uma fase da vida normalmente marcada por fatores adversos, tais como maior propensão a doenças e rejeição do mercado de trabalho.

Diante disso, ganha relevo a necessidade de elaboração precoce de um planejamento financeiro que nos possa garantir maior tranquilidade para enfrentar os desafios decorrentes dessa estendida longevidade. Mais especificamente, podemos dizer que estamos a discorrer sobre a necessidade de um *planejamento previdenciário*, de onde decorre a importância não apenas da educação financeira, que tem ganhado bastante ênfase nos últimos anos, mas também da *educação previdenciária*.

Obviamente, educação previdenciária pressupõe educação financeira, pois se alguém se propõe a economizar uma parte da sua renda ao longo de vários anos, para usufruir do montante acumulado quando já estiver idoso ou próximo dessa condição, o pressuposto básico é que essa pessoa consiga gastar menos do que ganha hoje, para ter

¹Fonte: Revista Veja. Disponível em: <http://veja.abril.com.br/politica/expectativa-de-vida-avanca-25-anos-em-meio-seculo/>. Acesso em: 30.11.2016.

²Fonte: Portal G1. Disponível em: <http://g1.globo.com/ciencia-e-saude/noticia/2015/12/expectativa-de-vida-dos-brasileiros-sobe-para-752-anos-diz-ibge.html>.

³No Brasil, na linha do que preconiza a Organização Mundial de Saúde (OMS), considera-se idosa a pessoa com idade igual ou superior a 60 anos, conforme a Lei nº 10.741, de 1º de outubro de 2003 (Estatuto do Idoso).

o que poupar. Nem sempre, porém, a poupança se destina a esse objetivo, sendo utilizada muitas vezes para financiar gastos com aquisição de bens de consumo, viagens etc., ficando relegada a segundo plano a preocupação com a questão previdenciária.

Assim, o presente trabalho tem por objetivo trazer à luz alguns dos aspectos matemáticos ordinariamente presentes quando se discute educação previdenciária, esperando, com isso, contribuir para fomentar o debate sobre o tema, ainda bastante incipiente no âmbito das escolas de ensino básico, e mesmo fora delas. A partir da abordagem de alguns tópicos da matemática de nível médio relacionados à previdência, esperamos estimular a discussão, em sala de aula, acerca da importância do planejamento previdenciário, da necessidade e importância da Previdência Social, além de outros temas relacionados à educação previdenciária.

Boa parte dos temas propostos no presente trabalho está fundamentada na matemática financeira, envolvendo algumas vezes cálculos relativamente complexos para alunos do ensino médio, que, em última análise, são o público-alvo deste trabalho. Felizmente, temos hoje à disposição diversas ferramentas tecnológicas educacionais que facilitam sobremaneira a tarefa de tornar mais acessível aos alunos a abordagem de temas ainda complexos para eles. No caso deste trabalho, a escolha da ferramenta para consecução desse intento recaiu no software *GeoGebra*, um dos mais reconhecidos e utilizados no mundo acadêmico, na área da Matemática.

Utilizando o GeoGebra, construímos uma calculadora gráfica, ferramenta por meio da qual o estudo de diversos temas aqui abordados tornou-se bastante facilitado, dispensando a realização de cálculos na maioria dos casos onde a calculadora foi utilizada. Ao facilitar a realização dos cálculos, o uso da calculadora gráfica permite que os temas abordados no presente trabalho alcancem maior público.

No Capítulo 1 deste trabalho, buscando introduzir o assunto de forma mais simples, é apresentado um cenário inicial sem a consideração dos juros e, somente após o estudo desse cenário inicial, são introduzidos os juros compostos.

A calculadora gráfica a que nos referimos acima, desenvolvida no GeoGebra, é apresentada no Capítulo 2. A estratégia utilizada para a verificação da eficiência da calculadora foi a de resolver novamente alguns exemplos já resolvidos no Capítulo 1, comparando os resultados obtidos.

O Capítulo 3 trata de noções básicas da Previdência Social brasileira, conteúdo fundamental para a compreensão dos principais termos, conceitos e institutos relacionados à Previdência Social, muitos dos quais utilizados nas atividades propostas no Capítulo 4. Estando a maior parte da população brasileira vinculada, direta ou indiretamente, à Previdência Social, um estudo sobre educação previdenciária não poderia deixar de apresentar, ainda que de forma breve, noções básicas relativas a esse sistema. Aqui

também não poderíamos fugir do debate acerca do propalado *déficit previdenciário*, de que o governo brasileiro tem-se utilizado para justificar a necessidade de mais uma reforma da Previdência, um tema sempre muito polêmico e um dos assuntos mais discutidos no país atualmente.

Finalmente, no Capítulo 4, como já apontado acima, são sugeridas algumas atividades de que o professor poderá lançar mão após a apresentação dos temas aos alunos, a fim de ajudá-los na compreensão e fixação dos conteúdos. Procuramos apresentar atividades que abrangessem os diferentes tópicos constantes do trabalho, esperando que muitas outras atividades sejam desenvolvidas pelos professores para enriquecer a abordagem dos temas aqui tratados.

Capítulo 1

Garantindo uma Renda Futura

Atualmente, temos à disposição diversas formas de obter uma renda¹ futura que nos garanta um amparo financeiro na velhice, como a constituição, por conta própria, de uma poupança² capaz de nos assegurar esse objetivo, ou a adesão a um plano de previdência que nos ofereça tal garantia.

Partindo da primeira hipótese, ou seja, a acumulação individual de um montante capaz de garantir uma renda durante a velhice, é de se perguntar: quanto uma pessoa deve poupar mensalmente para assegurar uma renda mensal R , após atingir a idade I ? Analisaremos a seguir alguns cenários que nos ajudarão a entender melhor o assunto e, a partir daí, chegaremos a algumas possíveis respostas.

1.1 Cenário Inicial: inflação zero, juros zero.

Preliminarmente, vamos estabelecer que o período de constituição da poupança, em que serão realizados depósitos mensais, será denominado de *período de acumulação* e ao período em que a renda será auferida, quando serão efetuadas as retiradas mensais, chamaremos de *período de usufruto*. Vamos estabelecer também que eventuais efeitos da inflação serão desconsiderados ao longo deste trabalho.

Numa primeira análise, a fim de iniciar por um cenário mais simples, vamos considerar um contexto sem rendimento sobre o valor poupado, a exemplo de alguém que mantenha suas economias numa conta bancária que não ofereça qualquer rendimento sobre o valor depositado ou que mantenha o dinheiro guardado em casa.

Sem muita dificuldade, é possível perceber que a pergunta acima (quanto uma

¹Em algumas passagens do presente trabalho utilizaremos também o termo *benefício*, bastante usual na área previdenciária, como sinônimo de renda.

²Termo utilizado no presente trabalho em sentido genérico, referindo-se a um capital acumulado ou ao ato de investir, acumular capital, diferentemente do termo "caderneta de poupança", esse sim utilizado quando quisermos nos referir à aplicação financeira mais popular do Brasil.

pessoa deve poupar mensalmente para assegurar uma renda R , após atingir a idade I) suscita mais duas outras: com que idade a pessoa pretende iniciar a poupança? Por quanto tempo ela pretende usufruir da renda mensal? Ou seja, é necessário introduzir mais duas variáveis à nossa equação: o termo inicial do período de acumulação do capital e o termo final do período de usufruto do montante acumulado.

Portanto, num contexto sem rendimento sobre o valor poupado, uma pergunta mais completa seria: quanto uma pessoa deve poupar mensalmente, a partir da idade I_1 , para garantir uma renda mensal R , a partir da idade I_2 , até atingir a idade I_3 ?

Ou seja, um valor mensal p deve ser poupado por um período de tempo igual a $(I_2 - I_1)$, que é o período de acumulação, para que seja possível usufruir-se, no futuro, de uma renda mensal R , durante um período de tempo igual a $(I_3 - I_2)$, que é o período de usufruto da renda.

Assim, desconsiderando a obtenção de qualquer rendimento sobre o montante acumulado, teríamos, simplesmente, que $p \times (I_2 - I_1)$ deve ser, no mínimo, igual a $R \times (I_3 - I_2)$. Logo, para se chegar ao valor mínimo mensal a ser poupado, temos que:

$$p \times (I_2 - I_1) = R \times (I_3 - I_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{p = R \frac{(I_3 - I_2)}{(I_2 - I_1)}}$$

Portanto, para determinar o valor mensal a ser poupado, basta multiplicar o valor da renda desejada pela razão entre o período de usufruto e o período de acumulação, como se vê no exemplo a seguir.

Exemplo 1. *José pretende poupar um valor mensal dos 25 até os 60 anos de idade, a fim de assegurar, a partir daí, uma renda mensal de R\$ 1.000,00. Supondo que José viverá até os 80 anos, calcule o valor que ele deverá poupar mensalmente para que, a partir dos 60 anos, assegure a renda mensal desejada até o final da sua vida. Desconsidere eventual rendimento sobre os valores acumulados.*

R.: Nesse exemplo, temos um período de acumulação de 35 anos (60 - 25) e um período de usufruto de 20 anos (80 - 60). Daí, temos que $(I_2 - I_1) = 35$ e $(I_3 - I_2) = 20$, com $R = R\$ 1.000,00$. Logo,

$$p = R \frac{(I_3 - I_2)}{(I_2 - I_1)}$$

$$\Rightarrow p = 1000 \times \frac{20}{35}$$

$$\Rightarrow \boxed{p \cong 571,43}$$

Portanto, José deve poupar, mensalmente, R\$ 571,43, dos 25 aos 60 anos, para, a partir daí até os 80 anos, poder usufruir de uma renda mensal de R\$ 1.000,00.

Ordinariamente, deseja-se que o recebimento da renda durante o período de usufruto se prolongue até o fim da vida do beneficiário, tal como ocorre com os rendimentos decorrentes de uma aposentadoria. No exemplo acima, foi estabelecido que a renda seria auferida por José até este completar 80 anos, idade que definimos de forma arbitrária. Para estimar o tempo de vida de uma pessoa de maneira mais plausível, podemos utilizar a tabela de expectativa de sobrevida do IBGE, parcialmente reproduzida abaixo. Assim, é possível estabelecer, de modo menos aleatório, a idade final de usufruto da renda (I_3), conforme veremos no exemplo 2, a seguir.

Idade Exata	Expectativa de Sobrevida		
	Homem	Mulher	Ambos
0	71,6	78,8	75,2
5	67,9	75,0	71,5
10	63,0	70,1	66,6
15	58,2	65,2	61,7
20	53,6	60,4	57,0
25	49,3	55,5	52,4
30	44,9	50,7	47,8
35	40,5	46,0	43,3
40	36,1	41,2	38,7
45	31,8	36,6	34,3
50	27,7	32,1	30,0
55	23,8	27,8	25,9
60	20,1	23,6	22,0
65	16,6	19,7	18,3
70	13,4	16,0	14,9
75	10,6	12,8	11,8

Tabela 1.1: Brasil: Tábua de Mortalidade - 2014.

(Fonte: IBGE. Disponível em:

<http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/tabuadevida/2014/defaulttab_xls.shtm>)

Exemplo 2. *Ao completar 30 anos de idade, Antônio resolveu iniciar uma poupança que lhe assegure uma renda de R\$ 2.000,00 a partir dos 65 anos, até o final da sua vida. Para determinar o valor que deveria poupar mensalmente, Antônio precisou estimar a idade até a qual ele viveria, utilizando-se, para tanto, dos dados mais recentes divulgados pelo IBGE para a expectativa de sobrevida das pessoas do sexo masculino no Brasil (tabela 1.1). Com o valor encontrado para a expectativa de sobrevida de um homem da sua idade (exatos 30*

anos), Antônio conseguiu calcular o valor mensal que deveria poupar para alcançar seu objetivo. Qual o valor encontrado por Antônio?

R.: Vamos novamente utilizar a fórmula $p = R \frac{(I_3 - I_2)}{(I_2 - I_1)}$. O valor de I_3 , entretanto, será agora determinado a partir dos dados da tabela 1.1, na qual verifica-se que, aos 30 anos, espera-se que um homem sobreviva por mais 44,9 anos (expectativa de sobrevivência). Logo, de acordo com a referida tabela, espera-se que Antônio viva até os 74,9 anos de idade, que será o valor de I_3 . Daí, temos:

$$p = R \frac{(I_3 - I_2)}{(I_2 - I_1)}$$

$$p = 2000 \times \frac{(74,9 - 65)}{(65 - 30)}$$

$$p = 2000 \times \frac{9,9}{35}$$

$$p \cong \boxed{565,72}$$

Portanto, R\$ 565,72 é o valor que Antônio deverá poupar mensalmente para atingir o seu objetivo.

1.2 Utilizando o Poder dos Juros Compostos

Até aqui vimos situações em que, a fim de simplificar a abordagem inicial do assunto, deixou-se de considerar a ocorrência de rendimento sobre os valores poupados. A partir de agora, entretanto, vamos considerar que a poupança seja realizada utilizando-se de uma aplicação financeira sujeita a uma taxa de rendimento mensal i , a juros compostos, expresso em valor percentual ou unitário. Tal aplicação financeira pode ser, por exemplo, uma caderneta de poupança, um fundo de renda fixa, títulos do Tesouro etc.

Antes, porém, faremos uma breve revisão de matemática financeira, no que tange às rendas certas ou anuidades.

1.2.1 Rendas certas ou anuidades: breve revisão

Nas aplicações financeiras o capital pode ser pago ou recebido de uma só vez ou por meio de uma sucessão de pagamentos ou de recebimentos. Quando o objetivo é constituir-se um capital em uma data futura, tem-se um processo de *capitalização*. Já quando se quer pagar uma dívida, tem-se um processo de amortização. Pode ocorrer também o pagamento pelo uso, sem que se configure uma amortização, como é o caso dos aluguéis.

Estes exemplos caracterizam as *rendas* ou *anuidades*, que podem ser basicamente de dois tipos:

a) *Rendas certas ou determinísticas*: são aquelas cuja duração e pagamentos são predeterminados, não dependendo de condições externas. Os diversos parâmetros, como o valor dos termos, o prazo de duração, a taxa de juros etc. são fixos e imutáveis. Tais são os tipos de renda estudados pela Matemática Financeira.

b) *Rendas aleatórias ou probabilísticas*: Os valores e/ou as datas de pagamentos ou de recebimentos podem ser variáveis aleatórias. É o que ocorre, por exemplo, com os seguros de vida: os valores de pagamento (mensalidades) são certos, porém a data de recebimento do valor é um dado aleatório. Renda com essas características são estudadas pela Matemática Atuarial.

Abordaremos, a seguir, as rendas certas ou anuidades, sob o regime de juros compostos.

Definições

Podemos definir *renda* (ou *anuidade*) como uma sucessão de pagamentos ou recebimentos destinados à formação de um capital ou ao pagamento de uma dívida. As rendas são um dos principais conceitos em que se baseiam os empréstimos e financiamentos. Nessas rendas é realizada uma série de pagamentos (parcelas ou termos) para arrecadar um fundo de poupança, pagar dívidas, financiar imóveis, etc. No caso da poupança, por exemplo, para acumularmos determinado valor, realizamos vários pagamentos que geram um montante ao final, chamado de *montante equivalente da renda*³.

Os pagamentos (prestações ou depósitos) são os *termos* da renda. O intervalo de tempo entre dois termos chama-se *período* e a soma dos períodos define a *duração* da anuidade.

O *valor atual* de uma anuidade é a soma dos valores atuais dos seus termos, soma esta feita para uma mesma data focal e à mesma taxa de juros. De modo análogo, o *montante* de uma anuidade é a soma dos montantes de seus termos considerada uma dada taxa de juros e uma data focal. Quando a renda é destinada à formação de um capital, este capital será denominado de *montante* da renda. Se o objetivo da renda for o pagamento de uma dívida, o valor da dívida será designada por *valor atual* da renda.

Classificação das anuidades

- Quanto ao prazo

³Que mais adiante chamaremos apenas de *montante*.

- a) Temporárias: quando a duração for limitada.
- b) Perpétuas: quando a duração for ilimitada.

- Quanto ao valor dos termos

- a) Constante: se todos os termos são iguais.
- b) Variável: se os termos não são iguais entre si

- Quanto à forma de pagamento ou de recebimento

a) Imediatas: quando os termos são exigíveis a partir do primeiro período.

a.1) Postecipadas ou vencidas: Se os termos são exigíveis no fim dos períodos.

a.2) Antecipadas: Se os termos são exigíveis no início dos períodos.

b) Diferidas: se os termos forem exigíveis a partir de uma data que não seja o primeiro período.

b.1) Postecipadas ou vencidas: Se os termos são exigíveis no fim dos períodos.

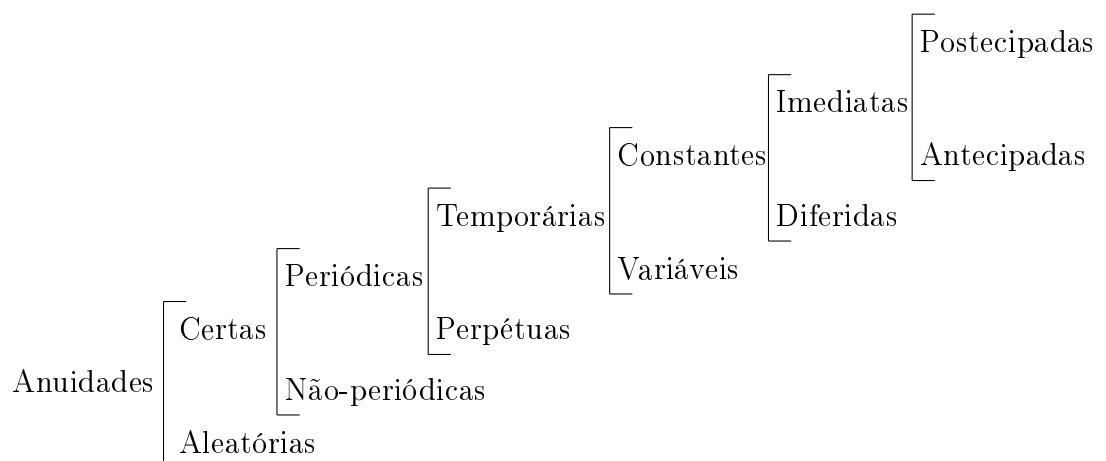
b.2) Antecipadas: Se os termos são exigíveis no início dos períodos.

- Quanto à periodicidade

a) Periódicas: se todos os períodos são iguais.

b) Não-periódicas: se os períodos não iguais entre si.

Quadro-resumo



Modelo Básico de Anuidade

O *modelo básico de anuidade* é aquele em que as anuidades são simultaneamente:

- temporárias;

- constantes;
- imediatas e postecipadas;
- periódicas.

E que a taxa de juros i seja referida ao mesmo período dos termos.

Para melhor compreensão do modelo básico de anuidade, vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 3. *Antônio compra uma motocicleta, que será paga em 4 prestações mensais de R\$ 2.626,24, sem entrada. As prestações serão pagas a partir do mês seguinte ao da compra e o vendedor afirmou estar sendo cobrada uma taxa de juros compostos de 2% a.m. Qual o preço da motocicleta à vista?*

Resolução:

O preço da motocicleta à vista corresponde à soma dos valores atuais das prestações na data focal zero, calculados à taxa de 2% a.m. A soma dos valores atuais P é dada por:

$$P = \frac{R}{(1,02)^1} + \frac{R}{(1,02)^2} + \frac{R}{(1,02)^3} + \frac{R}{(1,02)^4}$$

$$P = R \left[\frac{1}{(1,02)^1} + \frac{1}{(1,02)^2} + \frac{1}{(1,02)^3} + \frac{1}{(1,02)^4} \right]$$

$$P = R [0,980392 + 0,961169 + 0,942322 + 0,923845]$$

$$P = R[3,807728].$$

Como $R = 2.626,24$, tem-se que: $P = 2.626,24 \times 3,807728 \cong 10.000,00$.

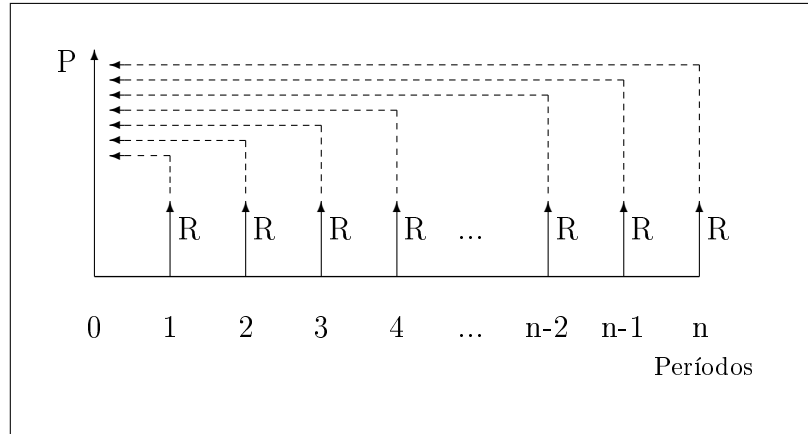
Concluimos, portanto, que o preço da moto à vista é de R\$ 10.000,00.

Observe-se que este valor à vista foi obtido multiplicando-se a prestação dada por uma constante numérica que depende do número de períodos e da taxa de juros adotada. De modo inverso, se tivéssemos o preço da moto à vista, calculando-se esta constante, poderemos obter o valor da prestação. Para tanto, bastará fazer a divisão do valor à vista pelo valor da constante.

Valor Atual no Modelo Básico

Consideremos P um principal a ser pago em n termos iguais a R , imediatos, postecipados e periódicos. Seja também i uma taxa de juros, referida ao mesmo período dos termos.

A representação gráfica do modelo é a seguinte:



A soma do valor atual dos termos na data zero é dada por:

$$P = \frac{R}{(1+i)} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^n}$$

Ou, colocando-se R em evidência:

$$P = R \left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n} \right]$$

Colocando-se a soma entre colchetes como sendo:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}$$

Temos:

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

onde $a_{\overline{n}|i}$ se lê "*a, n, cantoneira i*" ou, simplesmente, "*a, n, i*".

O valor de $a_{\overline{n}|i}$ é obtido pela soma dos termos de uma *progressão geométrica* com as seguintes características:

$$\text{Valor da soma: } S = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} \quad (\text{com } q \neq 1)$$

$$1^\circ \text{ termo: } a_1 = \frac{1}{1+i} = (1+i)^{-1}$$

$$n\text{-ésimo termo: } a_n = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}$$

$$\text{razão: } q = \frac{1}{1+i} = (1+i)^{-1}$$

Como na prática $i \geq 0$, tem-se que $q \leq 1$.

Substituindo os valores respectivos na fórmula da soma, tem-se:

$$S = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = a_{\overline{n}|i}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n}(1+i)^{-1}}{1 - (1+i)^{-1}}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^{-1}[1 - (1+i)^{-n}]}{1 - (1+i)^{-1}}$$

Multiplicando o numerador e o denominador por $(1+i)$, temos:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^0[1 - (1+i)^{-n}]}{(1+i) - (1+i)^0}$$

$$\boxed{a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}}$$

A fórmula mais usual para o $a_{\overline{n}|i}$ é obtida multiplicando-se o numerador e o denominador da expressão anterior por $(1+i)^n$, resultando na fórmula:

$$\boxed{a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}}$$

Esta fórmula encontra-se tabelada para diversos valores de i ou de n . É possível, porém, obter-se quaisquer valores desejados pelo cálculo direto da fórmula.

A dedução feita acima permite expressar o *valor atual* do modelo básico como sendo:

$$\boxed{P = R \cdot a_{\overline{n}|i}}$$

Por outro lado, sendo fornecido o principal P , a taxa de juros i e o número de períodos n , o valor da prestação ou termo constante da anuidade R é dado por:

$$\boxed{R = \frac{P}{a_{\overline{n}|i}}}$$

Estas duas expressões permitem, respectivamente, que se calcule o principal, dado o termo, e, dado o principal, calcular o termo.

No caso do exemplo visto anteriormente (exemplo 3), os cálculos seriam os seguintes:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}, \text{ onde: } n = 4 \text{ m. ; } i = 2\% \text{ a.m. Logo,}$$

$$a_{\overline{4}|2} = \frac{(1,02)^4 - 1}{0,02(1,02)^4} \therefore a_{\overline{4}|2} \cong 3,807729.$$

Como $R = 2.626,24$, temos que:

$$P = 2.626,24 \times 3,807729 \therefore P \cong 10.000,00.$$

Vejamos outros exemplos:

Exemplo 4. Um televisor custa R\$ 5.000,00 à vista, mas pode ser financiado sem entrada em 10 prestações mensais, à taxa de 3% a.m. Calcular o valor da prestação.

Resolução:

$$R = \frac{P}{a_{\overline{n}|i}}, \text{ onde } P=5.000,00 ; n=10 \text{ m. e } i = 3\% \text{ a.m.}$$

Procurando numa tabela ou calculando diretamente, tem-se:

$$a_{\overline{10}|3} = a_{\overline{10}|3} \cong 8,530203$$

$$\text{Logo, } R = \frac{5.000,00}{8,530203} = 586,15.$$

Portanto, o comprador deverá pagar uma prestação mensal de R\$ 586,15, durante 10 meses.

Exemplo 5. Uma máquina industrial está anunciada nas seguintes condições: R\$ 1.500,00 de entrada e 3 prestações mensais iguais de R\$ 1.225,48. Sabendo que a taxa de juros cobrada é de 2,5% a.m., calcular o preço à vista.

Resolução:

Chamando a entrada de E e as prestações de R , temos que o principal P , que é o valor das prestações na data zero somado à entrada E , pode ser expresso do seguinte modo:

$$P = E + R \cdot a_{\overline{3}|2,5}$$

$$\text{Onde: } E = 1.500,00, R=1.225,48 \text{ e } a_{\overline{3}|2,5} \cong 2,856024.$$

Logo:

$$P = 1.500,00 + 1.225,48 \times 2,856024$$

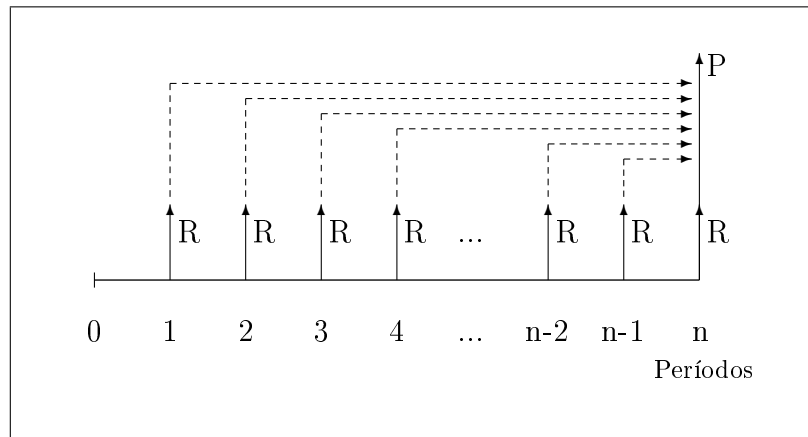
$$P = 1.500,00 + 3.500,00 \therefore P = 5.000,00$$

Portanto, o preço à vista nas condições dadas é de R\$ 5.000,00.

Montante no Modelo Básico

Seja um processo de capitalização em que são aplicadas parcelas iguais a R , periódicas e postecipadas, a uma taxa de juros i , referida ao mesmo período dos termos. O problema é determinar o montante S na data focal n , que resulta deste processo de capitalização.

A representação gráfica deste modelo é a seguinte:



O montante S é o resultado da soma dos montantes de cada um dos termos, à taxa de juros i , na data focal n . Vamos admitir que estejamos fazendo esta soma a partir do termo de n -ésima ordem (ou seja, o último termo) e até o termo de 1ª ordem (que é o primeiro termo):

$$S = R + R(1 + i)^1 + R(1 + i)^2 + \dots + R(1 + i)^{n-1}$$

Colocando o R em evidência:

$$S = R[1 + (1 + i)^1 + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^{n-1}]$$

Utilizemos a seguinte notação para o valor da soma entre colchetes:

$$S_{\overline{n}|i} = 1 + (1 + i)^1 + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^{n-1}$$

Logo, temos: $S = R \cdot S_{\overline{n}|i}$

Onde $S_{\overline{n}|i}$ lê-se: " S , n , cantoneira i " ou, simplesmente, " s , n , i ".

A fórmula do $S_{\overline{n}|i}$ é obtida pela soma dos termos de uma *progressão geométrica*:

$$\text{Valor da soma: } S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}$$

$$1^\circ \text{ termo: } a_1 = 1$$

$$n\text{-ésimo termo: } a_n = (1 + i)^{n-1}$$

$$\text{razão: } q = (1 + i)$$

Substituindo na fórmula da soma:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = S_{\overline{n}|i}$$

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1+i)^{n-1}(1+i)}{1 - (1+i)}$$

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1+i)^n}{-i}$$

Multiplicando o numerador e o denominador por (-1) :

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Esta fórmula também se encontra tabelada para diversos valores de i e de n . Com o uso da fórmula, é possível o cálculo direto de qualquer valor desejado.

Podemos agora expressar o montante S do modelo básico de anuidades como sendo:

$$S = R \cdot S_{\overline{n}|i}$$

Através desta relação pode-se calcular o montante que resulta quando são capitalizadas n parcelas de valor R à taxa de juros i .

Por outro lado, sabendo-se qual o montante S desejado, e sabendo-se qual a taxa de juros i de aplicação, pode-se calcular o valor dos termos que devem ser aplicados:

$$R = \frac{S}{S_{\overline{n}|i}}$$

Exemplo 6. *Uma pessoa deposita R\$ 1.000,00 mensalmente. Sabendo que ela está ganhando 2% a.m., quanto possuirá em 2 anos?*

Resolução:

$$S = R \cdot S_{\overline{n}|i}, \text{ sendo: } R = 1.000,00, \text{ e } S_{\overline{24}|2} = 30,421862.$$

Portanto,

$$S = 1.000,00 \times 30,421862$$

$$S = 30.421,86$$

Assim, após 2 anos, a pessoa terá acumulado R\$ 30.421,86.

Exemplo 7. *Uma pessoa deseja comprar um carro por R\$ 40.000,00 à vista, daqui a 12 meses. Admitindo-se que ela vá poupar uma certa quantia mensal que será aplicada em um investimento que rende 2,2% a.m. de juros compostos, determine quanto deve ser poupado mensalmente.*

Resolução:

Neste caso, o montante é dado por: $S = 40.000,00$.

Vamos efetuar o cálculo de $S_{\overline{12}|2,2}$, correspondente à taxa de juros de 2,2%, diretamente, conforme a seguir:

$$S_{\overline{12}|2,2} = \frac{(1,022)^{12} - 1}{0,022} = \frac{1,298407 - 1}{0,022} = \frac{0,298407}{0,022} = 13,563955.$$

Assim, temos:

$$R = \frac{S}{S_{\overline{12}|2,2}}$$

$$R = \frac{40.000,00}{13,563955} \cong 2.949,00$$

Portanto, se a pessoa poupar R\$ 2.949,00 por mês e fizer a aplicação a 2,2% a.m. por 12 meses, poderá comprar o carro pretendido ao final desse período.

Exemplo 8. O pai de um estudante efetua mensalmente, durante 36 meses, depósitos de R\$ 200,00 em um banco que paga 2% sobre o saldo credor. Este dinheiro se destina ao custeamento dos estudos superiores do filho. Qual será o montante acumulado após ser efetuado o último depósito?

Resolução:

Temos: $R = 200,00$; $i = 2\%$ a.m.; $n = 36$ meses.

Assim,

$$S = R \cdot S_{\overline{n}|i}$$

$$S = 200 \cdot S_{\overline{36}|2}$$

$$S = 200 \times 51,994367$$

$$S = 10.398,87$$

Logo, o montante acumulado será igual a R\$ 10.398,87.

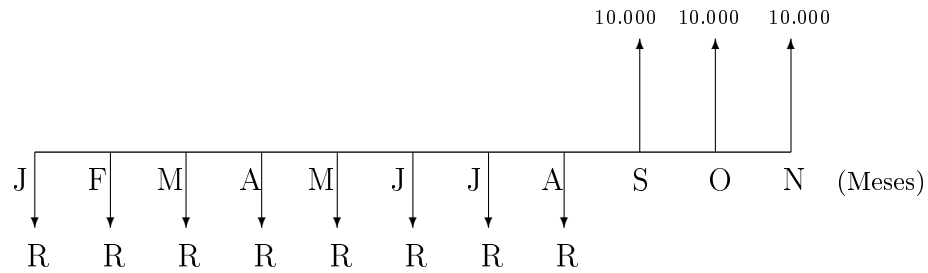
Exemplo 9. Uma pessoa, planejando a reforma de uma casa, prevê dispêndios de R\$ 10.000,00 nos meses de setembro, outubro e novembro. Quanto deve ser depositado mensalmente de janeiro a agosto, do mesmo ano, para que seja possível efetuar tais retiradas? Considerar uma remuneração de 3% a.m. sobre os depósitos.

Resolução:

Temos a seguinte representação gráfica do problema:

Assim, o montante dos 8 depósitos deve ser igual ao valor atual das 3 retiradas, à taxa de 3% a.m.

$$P = R' \cdot a_{\overline{n}|i}$$



$$S = R \cdot S_{\overline{n}|i}$$

Segue-se, por conseguinte, que:

$$R \cdot S_{\overline{8}|3} = R' \cdot a_{\overline{3}|3}$$

$$R \cdot S_{\overline{8}|3} = 10.000 \cdot a_{\overline{3}|3}$$

$$R \cdot (8,892336) = 10.000 \cdot (2,828611)$$

$$R \cdot (8,892336) = 28.286,11$$

$$R = \frac{28.286,11}{8,892336}$$

$$R = 3.180,95.$$

Portanto, deve ser depositado mensalmente, de janeiro a agosto, o valor de R\$ 3.180,95.

1.2.2 Fazendo o capital se reproduzir

Com base nos tópicos de Matemática Financeira brevemente vistos acima, podemos retomar a questão inicial de se determinar quanto uma pessoa deve poupar mensalmente, a partir da idade I_1 , a fim de garantir uma renda mensal R , quando completar a idade I_2 , até atingir a idade I_3 , agora considerando que o capital será formado utilizando uma aplicação financeira por meio da qual seja auferido um rendimento correspondente a uma taxa i sobre o saldo do investimento, durante todo o período de acumulação do capital e considerando ainda que o montante obtido ao final desse período será mantido na mesma aplicação (sujeito, portanto, ao mesmo rendimento), ao longo de todo período de usufruto da renda⁴.

A fim de se ter melhor noção do impacto, sobre a formação do capital, da utilização de um investimento que ofereça um rendimento sobre o valor poupado, vamos

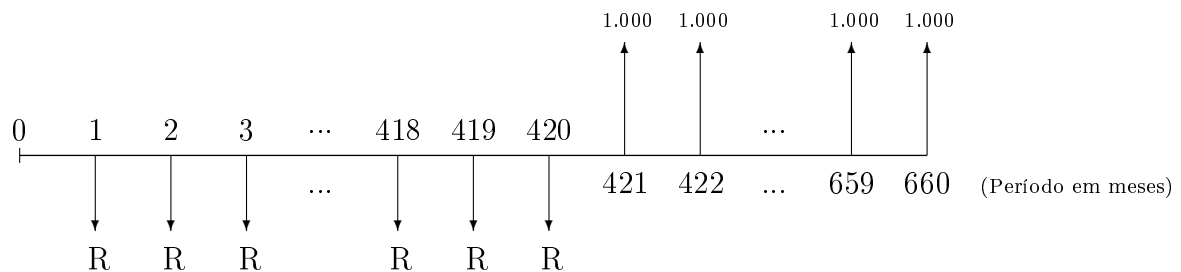
⁴Cumpramos lembrar mais uma vez que os efeitos da inflação não estão sendo considerados no presente trabalho, podendo admitir-se como nula a taxa de inflação, durante todo o período em análise. Entretanto, para mitigar eventuais efeitos da inflação, em alguns exemplos adiante será utilizado como padrão o *salário*, uma vez que, de alguma forma, o valor do salário sempre é reajustado, preservando razoavelmente seu poder de compra, mesmo na ocorrência de um processo inflacionário. Para atingir esse mesmo propósito, também poderíamos utilizar como padrão o *dólar americano*, o *ouro* etc.

retomar alguns exemplos já analisados anteriormente, acrescidos do dado relativo à taxa de rendimento da aplicação.

Exemplo 10. José pretende poupar, dos 25 até os 60 anos de idade, um valor mensal, a fim de assegurar, a partir daí, uma renda mensal no valor de R\$ 1.000,00. Supondo que José viverá até os 80 anos, calcule o valor que ele deverá poupar mensalmente para que, a partir dos 60 anos, assegure a renda mensal desejada, até o final da sua vida. Considere que a poupança será realizada utilizando um investimento que ofereça rendimento de 0,5% a.m. e que, durante o período de usufruto da renda, o valor acumulado permaneça investido, sujeito ao mesmo rendimento de 0,5% a.m.

Resolução:

Nesse exemplo, temos um período de acumulação de 35 anos (ou 420 meses), em que serão realizados depósitos mensais de valor R , e um período de usufruto de 20 anos (ou 240 meses), durante o qual José pretende realizar retiradas mensais de valor $R' = 1.000,00$. Assim, o problema pode ser ilustrado da seguinte forma:



Logo, o montante dos 420 depósitos mensais, à taxa de 0,5% a.m., realizados ao longo dos 35 anos do período de acumulação do capital, deve ser igual ao valor atual das 240 retiradas mensais, à mesma taxa de 0,5% a.m., que serão efetuadas durante os 20 anos de usufruto do capital acumulado. Assim, temos:

$$S = R \cdot S_{\overline{n}|i}$$

$$P = R' \cdot a_{\overline{n}|i}$$

Segue-se, por conseguinte, que:

$$R \cdot S_{\overline{420}|0,5} = R' \cdot a_{\overline{240}|0,5}$$

$$R \cdot S_{\overline{420}|0,5} = 1.000 \cdot a_{\overline{240}|0,5}$$

Para o caso de os valores de $S_{\overline{420}|0,5}$ e $a_{\overline{240}|0,5}$ não serem localizados em uma tabela, os mesmos podem ser diretamente calculados, conforme a seguir (tarefa que pode ser re-

alizada com a ajuda de uma calculadora ou de um aplicativo computacional):

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1,005)^{420} - 1}{0,005} = 1.424,710299$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = \frac{(1,005)^{240} - 1}{0,005 \cdot (1,005)^{240}} = 139,580772$$

Logo,

$$R \times 1.424,710299 = 1.000 \times 139,580772$$

$$R \times 1.424,710299 = 139.580,772$$

$$R = \frac{139.580,772}{1.424,710299}$$

$$R = 97,971336 \cong 98,00.$$

Portanto, utilizando-se de uma aplicação financeira que ofereça uma taxa de rendimento de 0,5% a.m., José deverá poupar, mensalmente, o valor de R\$ 98,00, ao longo de 35 anos, para obter uma renda de R\$ 1.000,00, durante 20 anos, ou seja, ele deverá poupar cerca de 10% da renda que pretende obter.

É interessante comparar os resultados obtidos nos Exemplos 1 e 10. Quando a acumulação do capital foi realizada sem a incidência de rendimento sobre os valores poupados ao longo do período de acumulação, o valor do depósito mensal necessário para que fosse possível efetuar retiradas mensais de R\$ 1.000,00 durante o período de usufruto foi de R\$ 571,43. Já quando considerada a incidência de uma taxa de rendimento de 0,5% a.m.⁵, o valor do depósito mensal necessário caiu para, aproximadamente, R\$ 98,00.

Retomemos, agora, a situação descrita no Exemplo 2, onde a fixação do termo final do período de usufruto da renda foi realizada com base na expectativa de sobrevivência do beneficiário, conforme dados do IBGE. Desta feita, contudo, passaremos a considerar a incidência de uma taxa de rendimento, desde o início do período de acumulação até o fim do período de usufruto.

Exemplo 11. Ao completar 30 anos de idade, Antônio resolveu iniciar uma poupança que lhe assegure uma renda de R\$ 2.000,00 após atingir os 65 anos, até o final da sua vida. Para determinar o valor que deveria poupar mensalmente, Antônio precisou estimar a idade até a qual ele viveria, utilizando-se, para tanto, dos dados mais recentes divulgados pelo IBGE para a expectativa de sobrevivência das pessoas do sexo masculino no Brasil (Tabela 1.1). Com o valor encontrado para a expectativa de sobrevivência de um homem de exatos 30

⁵Taxa de rendimento que pode ser considerada factível, se comparada com as taxas oferecidas nas diversas opções de investimento atualmente disponibilizadas pelas instituições financeiras.

anos, calcule o valor mensal que Antônio deverá poupar, considerando que essa poupança será realizada utilizando um investimento que ofereça rendimento de 0,5% a.m. e que, durante o período de usufruto da renda, o valor acumulado permaneça investido, sujeito ao mesmo rendimento de 0,5% a.m.

Resolução:

Como já visto na resolução do Exemplo 2, de acordo com a Tabela 1.1, espera-se que uma pessoa do sexo masculino de 30 anos sobreviva por mais 44,9 anos (expectativa de sobrevivência). Logo, de acordo com a referida tabela, espera-se que Antônio viva até os 74,9 anos de idade, quando deverá ocorrer o termo final do período de usufruto do rendimento. Portanto, temos:

- Período de acumulação do capital: 35 anos (ou 420 meses);
- Período de usufruto do capital acumulado: 9,9 anos (ou 119 meses, aproximadamente);

- Valor do rendimento mensal pretendido: $R' = 2.000,00$

- Valor do depósito mensal: R

Sabemos que a condição $R \cdot S_{\overline{n}|i} = R' \cdot a_{\overline{n}|i}$ deve ser verificada. Logo,

$$R \cdot S_{\overline{420}|0,5} = R' \cdot a_{\overline{119}|0,5}$$

$$R \cdot S_{\overline{420}|0,5} = 2.000 \cdot a_{\overline{119}|0,5}$$

Sendo,

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1,005)^{420} - 1}{0,005} = 1.424,710299 ; e$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = \frac{(1,005)^{119} - 1}{0,005 \cdot (1,005)^{119}} = 89,523821$$

Daí,

$$R \times 1.424,710299 = 2.000 \times 89,523821$$

$$R \times 1.424,710299 = 179.047,642$$

$$R = 125,6730 \cong 125,70.$$

Portanto, utilizando-se de uma aplicação financeira que ofereça uma taxa de rendimento de 0,5% a.m., Antônio deverá poupar, mensalmente, o valor de R\$ 125,70, ao longo de 35 anos, para obter um rendimento de R\$ 2.000,00, durante um período de 9,9 anos, a iniciar quando Antônio completar 65 anos e encerrar quando ele completar a idade de 74,9 anos (ou 74 anos e 11 meses).

Aqui também verificamos que um rendimento sobre o capital, ainda que módico, exerce grande impacto sobre o valor do desembolso mensal necessário ao poupador. De fato, no caso do Exemplo 2, em que não houve remuneração do capital acumulado, o

depósito mensal necessário foi calculado em R\$ 565,72, valor 4,5 vezes maior que os R\$ 125,70 calculados no último exemplo, em que o capital foi remunerado a uma taxa de 0,5% a.m., desde o início do período de acumulação do capital até o final do período de usufruto da renda.

Vejamos, a seguir, mais alguns exemplos, nos quais agora se conhece o valor do depósito mensal (ou prestação) e mais três dos quatro outros elementos, a saber: taxa de juros, tempo de acumulação do capital, tempo de usufruto do rendimento e valor das retiradas mensais durante o período de usufruto.

Exemplo 12. *Nadjara tem salário de R\$ 3.000,0 e pretende poupar, mensalmente, 10% desse valor, a fim de complementar, no futuro, o rendimento de sua almejada aposentadoria. Nadjara tem hoje 25 anos de idade e pretende aposentar-se aos 60 anos. Sabendo que o investimento escolhido por ela para a constituição da poupança oferece taxa de rendimento de 0,25% a.m e que o montante acumulado permanecerá investido a essa mesma taxa até o fim do período de usufruto, calcule o valor da renda mensal que Nadjara poderá auferir após iniciar o período de usufruto, considerando que a duração desse período deverá ser igual à expectativa de sobrevida de Nadjara após a sua aposentadoria, com base nos estudos do IBGE.*

Resolução:

Conforme os dados do enunciado, já sabemos:

- o valor do depósito mensal: R\$ 300,00 (10% de R\$ 3.000,00);
- a taxa de rendimento do investimento: 0,25% a.m = 0,0025 a.m.;
- o período de acumulação do capital: 35 anos (ou 420 meses).

Temos ainda que fixar o período de usufruto da renda, que, conforme o enunciado, deverá ser igual à expectativa de sobrevida de Nadjara após ela completar 60 anos de idade. Consultando a tabela 1.1, constatamos que a expectativa de sobrevida de uma mulher, aos 25 anos de idade, é de 55,5 anos. Ou seja, espera-se que uma mulher de exatos 25 anos de idade viva por mais 55,5 anos, devendo alcançar, portanto, os 80,5 anos de idade. Logo, podemos considerar que o período de usufruto será de 20,5 anos (ou 246 meses), que é a diferença entre 80,5 (expectativa de vida prevista) e 60 (idade com que Nadjara iniciará o período de usufruto da renda).

Agora já podemos calcular o valor da renda:

$$R \cdot S_{420|0,25} = R' \cdot a_{246|0,25}$$

$$300 \cdot S_{420|0,25} = R' \cdot a_{246|0,25}$$

Sendo,

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1,0025)^{420} - 1}{0,0025} = 741,563657 ; e$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = \frac{(1,0025)^{246} - 1}{0,0025 \cdot (1,0025)^{246}} = 183,577608$$

Logo,

$$R' \cdot 183,577608 = 300 \times 741,563657$$

$$R' = \frac{222.469,097101}{183,577608}$$

$$R' = 1.211,853123 \cong 1.211,85.$$

Portanto, aplicando R\$ 300,00 por mês, durante 35 anos, utilizando uma aplicação financeira que remunere o investimento a uma taxa de 0,025% a.m., Nadjara poderá usufruir de uma renda mensal de R\$ 1.211,85, dos 60 aos 80,5 anos (80 anos e seis meses) de idade.

Exemplo 13. No exemplo acima, a taxa de rendimento do investimento utilizado foi de 0,25% a.m⁶, sendo obtido, ao final do período de acumulação, um montante de R\$ 222.469,10, resultante do produto $300 \times S_{\overline{420}|0,25}$. Caso fosse utilizado um investimento com taxa de rendimento de 0,5% a.m⁷, mantidas as demais condições, qual seria o montante obtido ao final do período de acumulação?

Resolução:

Nesse caso, teríamos:

$$S_{\overline{n}|i} = S_{\overline{420}|0,5} = \frac{(1,005)^{420} - 1}{0,005} = 1.424,710299.$$

Logo,

$$S = R \cdot S_{\overline{n}|i} = 300 \times S_{\overline{420}|0,5} = 300 \times 1.424,710299$$

$$\boxed{S \cong 427.413,09}$$

Portanto, verificamos que, a partir de depósitos mensais ininterruptos de R\$ 300,00, realizados durante um período de acumulação de 35 anos, utilizando um investimento com taxa de rendimento de 0,5% a.m, o montante obtido será de R\$ 427.413,09. Isso significa um montante 92% maior que o obtido no Exemplo 12, onde a taxa de rendimento

⁶Taxa mensal de rendimento próxima à taxa mensal de rendimento teórica atual do Fundo de Garantia do Tempo de Serviço (FGTS). Na prática, porém, o trabalhador tem perdido dinheiro no FGTS, pois a taxa de inflação tem superado a taxa de rendimento desse fundo.

⁷Que será considerada neste trabalho, para fins didáticos, a taxa mensal de rendimento oferecida pela caderneta de poupança, o investimento mais popular do Brasil. Essa é, aproximadamente, a taxa teórica de rendimento da caderneta de poupança. Todavia, o rendimento real (descontada a inflação) tem ficado bem abaixo desse valor, quando não negativo.

considerada foi de 0,25% a.m.

Exemplo 14. Ao completar 20 anos de idade, pensando em ter, no futuro, um rendimento complementar à aposentadoria, Lígia resolveu começar a poupar uma parte da sua renda mensal. Ela escolheu um investimento que oferece taxa de rentabilidade de 0,35% a.m. Sabendo que Lígia decidiu investir o valor mensal de R\$ 200,00, responda ao que se pede a seguir:

a) a partir dos 20 anos, até que idade Lígia deverá permanecer realizando depósitos mensais de R\$ 200,00 para que lhe seja possível obter uma renda mensal de R\$ 2.000,00, até que ela complete 80 anos de idade?

b) qual seria a resposta ao item (a) se Lígia tivesse utilizado uma aplicação financeira que apresentasse uma taxa de rentabilidade mensal superior em 0,001 (em termos unitários)?

Resolução:

a) Temos:

$$R=200 \text{ e } R' = 2.000;$$

$$i=0,35\% \text{ a.m.} = 0,0035 \text{ a.m.};$$

$$I_1 = 20; I_2 = ? \text{ e } I_3 = 80.$$

$$R \cdot S_{\overline{n}|0,35} = R' \cdot a_{\overline{m}|0,35}, \text{ com } n = 12(I_2 - I_1) \text{ e } m = 12(I_3 - I_2) \therefore n = 12(I_2 - 20) \text{ e } m = 12(80 - I_2).$$

Fazendo, $R \cdot S_{\overline{n}|i} = R' \cdot a_{\overline{m}|i}$, temos:

$$200 \cdot S_{\overline{n}|0,35} = 2.000 \cdot a_{\overline{m}|0,35}$$

$$\frac{(1,0035)^n - 1}{0,0035} = 10 \cdot \frac{(1,0035)^m - 1}{0,0035 \cdot (1,0035)^m}$$

$$(1,0035)^n - 1 = 10 \cdot \frac{(1,0035)^m - 1}{(1,0035)^m}$$

$$(1,0035)^n \cdot (1,0035)^m - (1,0035)^m = 10 \cdot (1,0035)^m - 10$$

$$(1,0035)^{n+m} = 10 \cdot (1,0035)^m + (1,0035)^m - 10$$

$$(1,0035)^{n+m} = 11 \cdot (1,0035)^m - 10$$

$$(1,0035)^{12(I_2-20+80-I_2)} = 11 \cdot (1,0035)^{12(80-I_2)} - 10$$

$$(1,0035)^{(12 \times 60)} = 11 \cdot (1,0035)^{12(80-I_2)} - 10$$

$$(1,0035)^{12(80-I_2)} = \frac{(1,0035)^{720} + 10}{11}$$

$$(1,0035)^{12(80-I_2)} = 2,034003$$

$$12(80 - I_2)\log 1,0035 = \log 2,034003$$

$$960 - 12I_2 = \frac{\log 2,034003}{\log 1,0035} = 203,213604$$

$$12I_2 = 960 - 203,213604 = 756,786396$$

$$I_2 = \frac{756,786396}{12} = 63,065533$$

$$\boxed{I_2 \cong 63 \text{ anos e } 1 \text{ mês}}$$

Portanto, Lígia terá que permanecer investindo R\$ 200,00, mensalmente, dos 20 aos 63 anos e 1 mês de idade, para, a partir daí, assegurar uma renda mensal de R\$ 2.000,00, até completar 80 anos de idade.

b) Caso Lígia tivesse investido em uma aplicação financeira com taxa de rendimento superior em 0,001 em relação à taxa de rendimento anteriormente considerada, essa taxa seria agora de 0,0045 a.m (ou 0,45% a.m), ante a taxa de 0,0035 a.m anterior. Assim, refazendo o cálculo realizado no item (a) com esse novo valor para a taxa de rentabilidade do investimento, temos:

$$200 \cdot S_{\overline{n}|0,45} = 2.000 \cdot a_{\overline{m}|0,45}$$

$$\frac{(1,0045)^n - 1}{0,0045} = 10 \cdot \frac{(1,0045)^m - 1}{0,0045 \cdot (1,0045)^m}$$

$$(1,0045)^n - 1 = 10 \cdot \frac{(1,0045)^m - 1}{(1,0045)^m}$$

$$(1,0045)^n \cdot (1,0045)^m - (1,0045)^m = 10 \cdot (1,0045)^m - 10$$

$$(1,0045)^{n+m} = 10 \cdot (1,0045)^m + (1,0045)^m - 10$$

$$(1,0045)^{n+m} = 11 \cdot (1,0045)^m - 10$$

$$(1,0045)^{12(I_2 - 20 + 80 - I_2)} = 11 \cdot (1,0045)^{12(80 - I_2)} - 10$$

$$(1,0045)^{12 \times 60} = 11 \cdot (1,0045)^{12(80 - I_2)} - 10$$

$$(1,0045)^{12(80 - I_2)} = \frac{(1,0045)^{720} + 10}{11}$$

$$(1,0045)^{12(80 - I_2)} = 3,213528$$

$$12(80 - I_2)\log 1,0035 = \log 3,213528$$

$$960 - 12I_2 = \frac{\log 3,213528}{\log 1,0045} = 259,998684$$

$$12I_2 = 960 - 259,998684 = 700,001316$$

$$I_2 = \frac{700,001316}{12} = 58.333443$$

$$I_2 \cong 58 \text{ anos e } 4 \text{ meses}$$

Assim, caso Lígia utilizasse um investimento com uma taxa de rentabilidade mensal de 0,45% a.m., ela poderia alcançar seu objetivo com a idade de 58 anos e 4 meses, reduzindo em 4 anos e 9 meses o tempo de acumulação necessário.

Exemplo 15. Augusto decidiu que, quando completasse 25 anos de idade, começaria a acumular um capital a fim de atingir, aos 50 anos, o montante de R\$ 1.000.000,00, valor que ele considera suficiente para lhe proporcionar uma tranquilidade financeira durante a velhice. O plano de Augusto é economizar R\$ 500,00 por mês, investindo essa quantia em uma das diversas aplicações financeiras oferecidas pelos bancos. Determine:

- a menor taxa mensal de rentabilidade que a aplicação financeira a ser escolhida por Augusto deverá oferecer para que ele alcance seu objetivo;
- com que idade Augusto acumularia o montante desejado, caso ele escolhesse investir suas economias em uma caderneta de poupança (considere que o rendimento da caderneta de poupança seja de 0,5% a.m.).

Resolução:

a) Conforme o enunciado, temos que:

$$S = 1.000.000 ; R = 500 ; n = 25 \text{ anos (ou 300 meses) e } i = ?$$

Daí, temos:

$$S = R \cdot S_{\overline{n}|i} = 500 \cdot S_{\overline{300}|i} = 1.000.000$$

$$S_{\overline{300}|i} = \frac{1.000.000}{500} = 2.000$$

$$\frac{(1+i)^{300} - 1}{i} = 2.000$$

Tendo em vista a dificuldade de cálculo direto da taxa i na equação acima, vamos atribuir alguns valores a i e verificar o resultado. Utilizando uma calculadora, vamos verificar o valor de $S_{\overline{300}|i}$ encontrado para alguns valores de i , conforme abaixo:

- $i = 0,5\% = 0,005 \Rightarrow S_{\overline{300}|i} = \frac{(1,005)^{300} - 1}{0,005} = 692,99;$
- $i = 1,0\% = 0,010 \Rightarrow S_{\overline{300}|i} = \frac{(1,01)^{300} - 1}{0,01} = 1.878,85;$

$$\bullet i = 1,5\% = 0,015 \Rightarrow S_{300i} = \frac{(1,015)^{300} - 1}{0,015} = 5.737,25$$

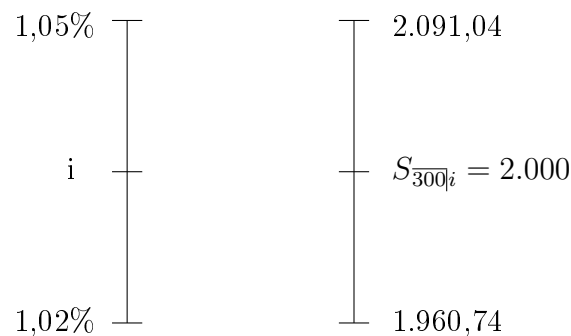
De acordo com os resultados acima obtidos, verificamos que o valor de i procurado encontra-se entre 1,0% e 1,5%. Vamos testar mais alguns valores i que nos aproxime do valor desejado para S_{300i} :

$$\bullet i = 1,1\% = 0,011 \Rightarrow S_{300i} = \frac{(1,011)^{300} - 1}{0,011} = 2.329,86;$$

$$\bullet i = 1,05\% = 0,0105 \Rightarrow S_{300i} = \frac{(1,0105)^{300} - 1}{0,0105} = 2.091,04;$$

$$\bullet i = 1,02\% = 0,0102 \Rightarrow S_{300i} = \frac{(1,0102)^{300} - 1}{0,0102} = 1.960,74$$

Agora verificamos que o valor procurado para i está entre 1,05% e 1,02%. Podemos continuar testando valores para i que aproxime cada vez mais o valor de S_{300i} de 2.000, que é o valor de S_{300i} desejado. Ou, ainda, podemos fazer uma interpolação linear, utilizando os resultados obtidos com $i = 1,05\%$ e $i = 1,02\%$, conforme a seguir:



Temos:

$$\frac{i - 0,0102}{0,0105 - 0,0102} = \frac{2.000 - 1.960,74}{2.091,04 - 1.960,74}$$

$$\frac{i - 0,0102}{0,0003} = \frac{39,26}{130,30}$$

$$i - 0,0102 = 0,0003 \times \frac{39,26}{130,30}$$

$$i - 0,0102 = 0,0000904$$

$$i = 0,0102904 \cong \boxed{1,03\%}$$

Portanto, para que Augusto alcance seu objetivo de acumular o montante de R\$ 1.000.000,00, a partir de um investimento mensal de R\$ 500,00, durante 25 anos, ele deverá escolher uma aplicação financeira que remunere o seu investimento a uma taxa de, aproximadamente, 1,03% a.m.

b) Caso tivesse escolhido a caderneta de poupança como opção de investimento, e considerando que a mesma apresente rentabilidade de 0,5% a.m., teríamos:

$$S=1.000.000; R=500; i = 0,5\% \text{ a.m.}; n = ?$$

$$S = R \cdot S_{\overline{n}|i} \therefore S_{\overline{n}|i} = \frac{S}{R}$$

$$S_{\overline{n}|0,5} = \frac{1.000.000}{500}$$

$$S_{\overline{n}|0,5} = 2.000$$

Daí, temos que:

$$S_{\overline{n}|0,5} = \frac{(1,005)^n - 1}{0,005} = 2.000$$

$$(1,005)^n - 1 = 10$$

$$(1,005)^n = 11$$

$$n \log(1,005) = \log 11$$

Logo,

$$n = \frac{\log 11}{\log(1,005)} = \frac{1,041393}{0,002166} = 480,790859 \Rightarrow n = 481 \text{ meses}^8.$$

Portanto, no caso de ser escolhida a caderneta de poupança como opção de investimento, e considerando que o rendimento desta seja igual a 0,5% a.m., Augusto somente alcançaria o montante de R\$ 1.000.000,00 após 481 meses, ou o equivalente a 40 anos e 1 mês, a partir do início do investimento. Como a pretensão de Augusto é iniciar o investimento aos 25 anos de idade, ele somente alcançaria o montante de 1 milhão de reais, nesse caso, aos 65 anos e 1 mês de idade.

Suponha que uma pessoa constitua uma poupança capaz de lhe proporcionar uma renda R por um tempo de usufruto n e seja m o tempo efetivo de sobrevivência da pessoa após o início de usufruto da renda. Quando $n < m$, temos que a poupança não foi suficiente para garantir o recebimento da renda R por todo o tempo de sobrevivência do

⁸Tendo em vista que os depósitos são realizados com periodicidade mensal, devemos, nesse caso, contabilizar a fração de mês como 1 mês inteiro.

beneficiário. Caso $n > m$, temos que a poupança foi constituída num montante superior ao que seria necessário para garantir a renda R durante todo o tempo de sobrevivência da pessoa. Vamos considerar que um planejamento previdenciário será tanto mais preciso, quanto mais próximos forem os resultados obtidos para o tempo de usufruto da renda (ou benefício) e o tempo de sobrevivência do rentista (ou beneficiário), a partir da data de início das retiradas, ou seja, quanto mais próximos forem os valores de n e de m .

Não é difícil perceber que uma das questões cruciais para a elaboração um planejamento previdenciário reside na definição do tempo de duração da renda ou benefício, haja vista que, em regra, as pessoas desejam receber o benefício de forma vitalícia, ou seja, até a sua morte, evento cuja data de ocorrência é incerta. Essa dificuldade aumenta à medida em que se queira elaborar um planejamento tanto mais preciso, que resulte num período de usufruto de duração o mais próximo possível do tempo de sobrevivência do beneficiário a partir do início desse período.

Conquanto a decisão acerca da fixação da duração do período de usufruto e, conseqüentemente, da idade que o beneficiário terá ao iniciar e ao finalizar o recebimento do benefício⁹, seja uma decisão eminentemente individual, conforme os objetivos de cada pessoa, interessa-nos aqui verificar de que forma o período de usufruto pode ser estabelecido, de modo a se obter um planejamento previdenciário mais preciso, que seja capaz de minimizar o valor do desembolso mensal necessário para obtenção do benefício desejado.

Já analisamos alguns exemplos em que a idade do beneficiário ao término do período de usufruto do benefício (I_3) ou foi estabelecida de forma arbitrária ou foi utilizada uma expectativa de sobrevivência, a partir da data de recebimento da renda ou benefício, com base em dados divulgados pelo IBGE. No segundo caso, para se chegar ao valor da expectativa de sobrevivência, foi utilizada como referência a idade da pessoa ao iniciar o período de acumulação (I_1). Todavia, nada obsta a que se tivesse adotado como referência a idade do beneficiário ao iniciar o período de usufruto (I_2).

Suponha a situação retratada no Exemplo 11, em que a expectativa de sobrevivência foi estabelecida usando como referência a idade de Antônio na data de início da poupança (30 anos). Poderíamos, igualmente, ter adotado como referência a idade com que Antônio planejou iniciar as retiradas mensais (I_2), ou seja, 65 anos. Observando na tabela 1.1 a expectativa de sobrevivência para um homem de 65 anos, encontramos o valor de 16,6. Portanto, teríamos que considerar a idade de 81,6 anos como a idade que Antônio teria ao término do período de usufruto, diferentemente do resultado encontrado no citado exemplo, que foi de 74,9 anos.

Reputamos que a escolha de I_2 como referência para a consideração da expectativa de sobrevivência não deve ser vista como uma escolha excêntrica, pois faz sentido que, para

⁹Idades que, neste trabalho, estamos denominando de I_2 e I_3 , respectivamente.

definição do tempo de usufruto da renda, uma pessoa queira levar em consideração não o seu tempo provável de sobrevida ao iniciar a acumulação da poupança, mas sim ao iniciar o usufruto da mesma.

Entretanto, podemos ir mais além: se considerarmos que a expectativa de vida no Brasil vem crescendo de forma contínua ao longo dos últimos anos e a previsão é de que esse crescimento continue se mantendo nas próximas décadas, é possível ainda se vislumbrar a pertinência da utilização não da expectativa de vida já estimada pelo IBGE, mas sim da expectativa de vida *projetada*¹⁰ para os próximos anos pelo mesmo instituto. Na tabela a seguir, apresentamos tal projeção para alguns anos, relativamente à expectativa de sobrevida, aos 60 e 65 anos de idade, por sexo, elaborada a partir de dados divulgados pelo IBGE:

Ano	Expect. de sobrevida aos 60 anos			Expect. de sobrevida aos 65 anos		
	Homem	Mulher	Ambos	Homem	Mulher	Ambos
2020	20,8	24,5	22,8	17,3	20,5	19,0
2025	21,3	25,2	23,3	17,7	21,1	19,6
2030	21,8	25,7	23,8	18,1	21,6	20,0
2035	22,1	26,1	24,2	18,4	22,0	20,3
2040	22,4	26,5	24,5	18,7	22,3	20,6
2045	22,6	26,7	24,7	18,8	22,6	20,8
2050	22,8	26,9	24,9	19,0	22,8	21,0
2055	22,9	27,1	25,1	19,1	22,9	21,1
2060	23,0	27,2	25,2	19,2	23,0	21,2

Tabela 1.2: Brasil: Tábua de Mortalidade para 60 e 65 anos de idade - Projeção 2020-2060.

(Fonte: IBGE. Disponível em:

<http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/projecao_da_populacao/2013/default_tab.shtm>)

Vejamos, a seguir, alguns exemplos com a utilização da expectativa de sobrevida projetada para a definição da duração do período de usufruto da renda.

Exemplo 16. *Com o objetivo de obter, ao se aposentar, uma renda complementar à da sua aposentaria, Etinevaldo resolveu iniciar uma poupança, realizando depósitos mensais, no valor de 10% da sua renda bruta mensal, que é de R\$ 10.000,00, utilizando um investimento que oferece taxa de rendimento mensal de 0,5%. Etinevaldo pretende aposentar-se em 2050, quando estará com 65 anos de idade e terá poupado por um período ininterrupto de 35 anos. Após terminar o período de acumulação, o montante obtido permanecerá investido à mesma taxa de rendimento. Considerando o tempo de usufruto da renda igual à expectativa de sobrevida projetada pelo IBGE para um homem de 65 anos em 2050,*

¹⁰Como o seu nome indica, a expectativa de vida *projetada* é uma mera projeção (para anos vindouros, portanto) para expectativa de vida estimada, projeção essa que poderá ou não ser confirmada por pesquisas futuras. A expectativa de vida estimada, por sua vez, retrata um panorama já observado, estando fundamentada em pesquisas ou censos já realizados.

calcule o valor máximo das retiradas mensais que Etinevaldo poderá fazer.

Resolução:

Verificamos na tabela 1.2 que a projeção para a expectativa de sobrevida de um homem de 65 anos em 2050 é de 19,0 anos. Assim, temos:

$$R=10\% \text{ de } 10.000,00 = 1.000,00 \text{ e } R' = ?;$$

$$i=0,5\% \text{ a.m.} = 0,005 \text{ a.m.};$$

$$\text{Período de acumulação: } 35 \text{ anos} = 420 \text{ meses} = n.$$

$$\text{Período de usufruto: } 19 \text{ anos} = 228 \text{ meses} = m.$$

Fazendo, $R \cdot S_{\overline{n}|i} = R' \cdot a_{\overline{m}|i}$, temos:

$$1.000 \cdot S_{\overline{420}|0,5} = R' \cdot a_{\overline{228}|0,5}$$

$$1.000 \times \frac{(1,005)^{420} - 1}{0,005} = R' \cdot \frac{(1,005)^{228} - 1}{0,005 \cdot (1,005)^{228}}$$

$$1.000 \times \frac{8,123551 - 1}{0,005} = R' \cdot \frac{3,117899 - 1}{0,005 \cdot 3,117899}$$

$$1.000 \times \frac{7,123551}{0,005} = R' \cdot \frac{2,117899}{0,015589}$$

$$1.000 \times 1424,710299 = R' \cdot 135,854246$$

$$R' = \frac{1.000 \times 1424,710299}{135,854246}$$

$$R' \cong 10.487,05$$

Portanto, nas condições apresentadas acima, Etinevaldo poderá efetuar retiradas mensais de até R\$ 10.487,05, durante o período de 19 anos (ou 228 meses), a partir dos 65 anos de idade. Assim, Etinevaldo poderá usufruir de uma renda cujo valor será próximo ao valor da sua renda bruta atual (R\$ 10.000,00), podendo fazer as retiradas mensais até atingir a idade de 84 anos.

Exemplo 17. Em 2025, Maria completará 60 anos de idade e 30 anos ininterruptos realizando depósitos mensais em um investimento que oferece rendimento de 0,5% a.m. O salário bruto de Maria hoje é de R\$ 10.000,00 e ela pretende aposentar-se em 2025, quando passará a realizar retiradas mensais do seu investimento, que continuará aplicado à taxa de 0,5% a.m. Calcule o valor do depósito mensal que Maria deveria estar realizando a fim de que ela possa usufruir de uma renda igual ao seu salário bruto atual, por

um período igual à projeção para sua expectativa de sobrevida após a aposentadoria.

Resolução:

Verificamos na tabela 1.2 que a projeção para a expectativa de sobrevida de uma mulher de 60 anos em 2025 é de 25,2 anos. Assim, temos:

$$R=? \text{ e } R' = 10.000,00;$$

$$i=0,5\% \text{ a.m.} = 0,005 \text{ a.m.};$$

$$\text{Período de acumulação: } 30 \text{ anos} = 360 \text{ meses} = n.$$

Período de usufruto: 25,2 anos = 302,4 meses. Todavia, devemos contabilizar a fração de mês como um mês inteiro, uma vez que os depósitos e as retiradas são mensais, assim como os juros se referem a um período mensal. Assim, 302,4 meses resultará em 303 meses = m.

$$\text{Fazendo, } R \cdot S_{\overline{n}|i} = R' \cdot a_{\overline{m}|i}, \text{ temos:}$$

$$R \cdot S_{\overline{360}|0,5} = 10.000 \times a_{\overline{303}|0,5}$$

$$R \cdot \frac{(1,005)^{360} - 1}{0,005} = 10.000 \times \frac{(1,005)^{303} - 1}{0,005 \cdot (1,005)^{303}}$$

$$R \cdot \frac{6,022575 - 1}{0,005} = 10.000 \times \frac{4,53228 - 1}{0,005 \cdot 4,53228}$$

$$R \cdot \frac{5,022575}{0,005} = 10.000 \times \frac{3,53228}{0,022661}$$

$$R \cdot 1.004,515 = 10.000 \times 155,874851$$

$$R = \frac{10.000 \times 155,874851}{1.004,515}$$

$$R \cong 1.551,74.$$

Portanto, para que Maria alcance seu objetivo, ela deve ter investido, desde que iniciou a poupança, o valor mensal de R\$ 1.551,74 (equivalente a, aproximadamente, 15,5% de seu salário bruto atual) e continuar investindo esse valor até o ano de 2025, quando alcançará um período de acumulação de 30 anos e idade de 60 anos, podendo, a partir daí, realizar retiradas mensais em valor igual ao seu salário bruto atual, até por volta dos 85,2 anos de idade.

Fazendo um resumo dos métodos que escolhemos até aqui para fixar a duração do período de usufruto da renda, temos:

- a) fixação arbitrária (ou seja, fixação do período de usufruto de acordo com o livre arbítrio de quem o faz);
- b) utilizando a *expectativa de sobrevida estimada* pelo IBGE;
- c) utilizando a *expectativa de sobrevida projetada* pelo IBGE.

Obviamente, existem muitas outras formas de se fixar a duração do período de usufruto, e mesmo quando se opta por um dos métodos acima, há ainda várias escolhas a serem feitas. Por exemplo, caso uma pessoa opte por utilizar a expectativa de vida estimada pelo IBGE, essa pessoa deve ainda escolher se utilizará os dados correspondentes ao seu sexo (homem ou mulher) ou se optará por utilizar os dados relativos a ambos os sexos, que também são divulgados pelo IBGE, o mesmo ocorrendo se a escolha recair sobre a expectativa de vida *projetada* pelo referido instituto para os próximos anos. Alguns podem ainda optar por utilizar os dados do IBGE relativos à unidade da federação onde residem, em vez de utilizar os dados nacionais. Outros podem preferir utilizar dados de expectativa de vida divulgados por outros institutos ou organizações que não o IBGE, como a Organização Mundial da Saúde (OMS). Enfim, como se pode perceber, há vários métodos por meio dos quais se pode fixar o tempo de usufruto da renda ou benefício, sem que se possa dizer que qualquer deles não seja apropriado para tal finalidade, tendo sido apresentados os métodos acima, de forma exemplificativa, apenas para permitir a análise de algumas situações-problema.

Alguém poderá se perguntar, todavia, se não há uma forma mais segura de se garantir o recebimento da renda ou benefício por toda a vida do beneficiário, sem que se tenha que recorrer a estimativas ou projeções quanto ao tempo de vida deste. Sem dúvida, é possível garantir a obtenção de uma renda vitalícia, qualquer que seja o tempo de vida do beneficiário. Para isso, deve ser atingida a chamada *condição de perpetuidade*, que ocorrerá quando o valor da retirada for igual ou inferior ao valor auferido em decorrência dos juros sobre o montante obtido ao final do período de acumulação. Para exemplificar tal situação, suponha que uma pessoa tenha acumulado o montante de R\$ 1.000.000,00 e mantenha esse valor investido a uma taxa de rendimento de 0,5% a.m. Assim, o valor mensal auferido em decorrência dos juros incidentes sobre o referido montante será de R\$ 5.000,00 (= 0,5% de 1.000.000,00). Caso o beneficiário realize retiradas mensais em valor não superior a R\$ 5.000,00, o montante jamais decrescerá, garantindo, desse modo, a perpetuidade da renda. Vejamos abaixo algumas situações envolvendo *renda perpétua ou vitalícia*¹¹.

¹¹Embora tratados aqui como sinônimos, os termos *vitalício* e *perpétuo*, a rigor, não têm o mesmo significado, uma vez que o primeiro termo é relativo a algo que dura por toda a vida de alguém, enquanto o segundo diz respeito a algo que dura para sempre, eternamente.

Exemplo 18. *A partir de um montante de R\$ 400.000,00, aplicados a uma taxa de juros de 0,5% a.m., que valor mensal máximo poderá ser retirado, de modo a que se tenha essa renda perpetuamente?*

Resolução:

Para que seja obtida uma renda perpétua, o valor da retirada mensal (R) deverá ser, no máximo, igual ao valor dos juros mensalmente auferidos. Assim, para encontrar o valor máximo da retirada, fazemos:

$$R = 400.000 \times 0,005 = 2.000$$

Logo, com um montante de R\$ 400.000,00, é possível se obter uma renda perpétua com retiradas mensais de até R\$ 2.000,00, considerando que o referido montante seja aplicado a uma taxa de juros de 0,5% a.m.

Exemplo 19. *José vem realizando depósitos mensais no valor de R\$ 1.000,00, utilizando um investimento que oferece taxa de rendimento de 1,0% a.m. Determine o prazo mínimo de constituição da poupança, de modo que José obtenha um montante capaz de lhe garantir uma renda vitalícia, com retiradas mensais no valor de R\$ 5.000,00, supondo que o montante acumulado continuará mantido à taxa de rendimento de 1,0% a.m.*

Resolução:

Para obter uma renda vitalícia, com retiradas mensais de R\$ 5.000,00, esse valor deverá ser igual ou inferior ao valor dos juros auferidos mensalmente com o montante S acumulado. Assim, temos que:

$$R \leq i \cdot S, \text{ onde } R=5.000 \text{ e } i=0,01.$$

Daí, temos:

$$5000 \leq 0,01 \cdot S$$

$$S \geq \frac{5.000}{0,01} \Rightarrow \boxed{S \geq 500.000}$$

Portanto, José deverá acumular um montante de, no mínimo, R\$ 500.000,00. Para calcular o tempo mínimo necessário para se obter esse montante, a partir de depósitos mensais de R\$ 1.000,00, com uma taxa de rendimento de 1,0% a.m., fazemos:

$$S = R \cdot S_{\overline{n}|i}, \text{ com } S=500.000, R=1000, i=0,01 \text{ e } n=?$$

Logo, temos:

$$R \cdot S_{\overline{n}|i} = 500.000,$$

$$1000 \cdot \frac{(1,01)^n - 1}{0,01} = 500.000$$

$$\frac{(1,01)^n - 1}{0,01} = 500$$

$$(1,01)^n - 1 = 5$$

$$(1,01)^n = 6$$

$$n \cdot \log(1,01) = \log 6$$

$$n = \frac{\log 6}{\log(1,01)}$$

$n = \frac{0,778151}{0,004321} \cong 180,07 \Rightarrow \boxed{n = 181 \text{ meses}}$ (uma vez que os depósitos são mensais, devemos considerar a fração de mês como 1 mês inteiro).

Portanto, José deverá constituir a poupança durante um prazo mínimo de 181 meses (ou 15 anos e 1 mês). Assim, com 181 depósitos mensais de R\$ 1.000,00, aplicados a uma taxa de juros de 1% a.m, José alcançará um montante que, mantido a essa mesma taxa de rendimento, permitirá infinitas retiradas mensais de R\$ 5.000,00 cada uma, garantindo, assim, uma renda vitalícia.

Exemplo 20. Uma instituição financeira oferece um plano de previdência privada no qual, para que o adquirente obtenha uma renda mensal vitalícia de valor R , é exigida uma contribuição mensal de 10% de R , por um período de 35 anos ininterruptos. A referida instituição obtém uma taxa de renda líquida (ou seja, já descontados os custos de administração) de 0,6% a.m sobre os valores depositados. A partir de quantas retiradas mensais realizadas por um adquirente individualmente considerado a instituição financeira passa a ter prejuízo com o plano, relativamente a esse adquirente?

Resolução:

A partir do enunciado, temos:

- período de contribuição (ou de acumulação): 35 anos = 420 meses = n
- período de benefício (ou de usufruto): m
- taxa de juros: 0,6% a.m
- valor da contribuição: 10% de $R = 0,1R$
- valor do benefício: R

Daí, fazemos:

$$0,1R \cdot S_{\overline{n}|i} = R \cdot a_{\overline{m}|i}, \text{ temos:}$$

$$0,1R \cdot S_{\overline{420}|0,6} = R \cdot a_{\overline{m}|0,6}$$

$$0,1 \times \frac{(1,006)^{420} - 1}{0,006} = \frac{(1,006)^m - 1}{0,006 \times (1,006)^m}$$

$$0,1 \times \frac{12,335362 - 1}{0,006} = \frac{(1,006)^m - 1}{0,006 \times (1,006)^m}$$

$$0,1 \times 11,335362 = \frac{(1,006)^m - 1}{(1,006)^m}$$

$$1,133536 = \frac{(1,006)^m - 1}{(1,006)^m}$$

$$1,133536 \times (1,006)^m = (1,006)^m - 1$$

$$0,133536 \times (1,006)^m = -1$$

$(1,006)^m = -7,488617$, impossível! (isto é, não existe valor de m que satisfaça a equação).

A interpretação do resultado acima é que o montante acumulado pela instituição financeira a partir dos depósitos mensais realizados pelo adquirente do plano de previdência é capaz de garantir um número infinito de retiradas mensais de valor R .

De fato, calculando o montante S acumulado, temos:

$$S = 0,1R \times \frac{(1,006)^{420} - 1}{0,006} = 188,922702R$$

Considerando uma taxa de rendimento de 0,6% a.m, temos que a instituição financeira obterá, a partir do montante S acima, um rendimento mensal (R') de:

$$R' = 0,006 \times 188,922702R = 1,133536R > R.$$

Logo, a renda mensal paga ao adquirente/beneficiário do plano de previdência é menor que o rendimento que a instituição financeira aufera mensalmente com o montante obtido ao longo do período de contribuição, a partir das mensalidades pagas pelo adquirente, o que nos leva a concluir que, mantidas as condições do exemplo, a instituição financeira jamais terá prejuízo em decorrência dos pagamentos efetuados especificamente a um beneficiário, qualquer que seja a duração do período de usufruto da renda.

Durante a resolução dos exemplos vistos até aqui, foi possível perceber que os cálculos envolvidos podem não estar ao alcance de alguns alunos do ensino médio, até porque muitos desses alunos certamente não têm acesso a uma calculadora financeira ou aplicativo computacional, instrumentos que algumas vezes são necessários para a resolução dos problemas. Ademais, a depender das circunstâncias (tipo de curso, nível de conhecimento dos alunos etc.), a explicitação desses cálculos pode não estar dentre os objetivos do professor, cujo interesse pode se restringir à exploração dos conceitos, dos princípios e das

ideias mais básicas relacionadas ao tema, de modo que os alunos consigam ter uma compreensão geral do assunto, sem que seja necessário adentrar nos cálculos propriamente ditos.

Assim, consideramos oportuna a apresentação de uma ferramenta que facilite a exposição, pelo professor, dos assuntos tratados no presente trabalho, dispensando o detalhamento dos cálculos matemáticos envolvidos. É o que pretendemos desenvolver no próximo capítulo.

Capítulo 2

O GeoGebra como Calculadora Gráfica

Como foi dito no final do capítulo anterior, o objetivo do presente capítulo é apresentar uma ferramenta que possibilite ao professor a abordagem dos assuntos vistos ao longo do presente trabalho, dispensando o detalhamento dos cálculos, mas permitindo a compreensão dos conceitos básicos envolvidos. Julgamos importante que o professor tenha essa possibilidade, uma vez que essa pode ser a abordagem mais indicada para um determinado grupo de alunos.

O *software* escolhido para o desenvolvimento da ferramenta foi o GeoGebra, que é um *software* gratuito, bastante acessível e cujos inúmeros recursos atendem plenamente aos objetivos que pretendemos aqui alcançar. Conforme ressalta o Prof. Mário Sérgio M. Almeida,

O estudo de instrumentos de aprendizagem interativos através do uso de computadores é um ganho no processo de ensino-aprendizagem, no momento em que o estudante deixa de ser um observador e passa a interagir com a máquina, fazendo-a de ferramenta em processos investigativos. Formar conjecturas, elaborar questionamentos, realizar trabalhos, apontam para a interatividade, tornando o processo de aquisição do conhecimento mais fácil e agradável. [...] O GeoGebra é um programa de caráter interativo para o estudo da matemática. Possui distribuição livre e documentação no site: <<http://www.geogebra.org>>. O nome advém da junção das palavras **Ge**ometria e ál**Gebra** e foi construído na plataforma Java, adaptando-se com facilidade aos sistemas operacionais e atende ao ambiente de álgebra, geometria, estatística e cálculo.¹

A ferramenta que escolhemos elaborar foi uma *calculadora gráfica*. A ideia é poder visualizar a evolução do montante ao longo dos períodos de acumulação e usufruto, de acordo com os parâmetros definidos, quais sejam: tempo de acumulação, tempo de usufruto, taxa de juros, valor da contribuição mensal e valor da retirada mensal². Decidimos

¹ALMEIDA, Mário Sérgio Mattos de. A matemática de alguns experimentos sonoros. 2014. 84 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT), Instituto de Matemática, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2014.

²Os termos *tempo de acumulação*, *tempo de usufruto*, *taxa de juros*, *valor da contribuição mensal* e

utilizar esses dois últimos parâmetros como percentual do salário (ou renda) da pessoa. Essa decisão teve por base duas razões: a primeira razão é que, assim, mitigam-se os eventuais efeitos da inflação, uma vez que, de algum modo, os salários são reajustados ao longo do tempo, mantendo razoavelmente seu poder de compra; a segunda razão é que, em muitos casos, estaremos mais interessados em estudar o comportamento (crescimento/decrescimento) do montante do que propriamente em conhecer o seu exato valor. Assim, o montante será expresso em termos de quantidade de salários mensais.

Para facilitar a percepção dos alunos acerca da influência de cada parâmetro na evolução do montante, foram utilizados *controles deslizantes*³, cujo resultado da manipulação é imediatamente visualizado no gráfico. Também foram escolhidas as cores verde e vermelho para representar os períodos de acumulação/contribuição e de usufruto/benefício, respectivamente, facilitando ainda mais a visualização do comportamento do montante ao longo desses dois períodos.

A despeito das virtudes da nossa calculadora gráfica, é preciso ter em conta que os resultados obtidos por meio dela são resultados aproximados, devendo ser tolerados pequenos desvios que possam ocorrer em relação aos valores exatos. Isso ocorre exatamente porque a calculadora não foi concebida com a preocupação de apresentar resultados absolutamente precisos, mas com o foco na facilitação dos cálculos e na apresentação visual dos resultados. Por fim, ressaltamos que se trata apenas de um modelo de calculadora gráfica, dentre muitos outros que podem ser elaborados por meio do GeoGebra (ou outro *software*), de acordo com as preferências e objetivos do professor.

Apresentamos a seguir a representação do modelo de calculadora gráfica que desenvolvemos⁴ (figura 2.1).

Para verificar a eficiência da calculadora, podemos utilizá-la na resolução de alguns dos exemplos já resolvidos ao longo do presente trabalho, comparando os resultados obtidos. A título de exemplo, vamos retomar a análise do **Exemplo 10**, onde temos:

- tempo de acumulação: 35 anos = 420 meses;
- tempo de usufruto: 20 anos = 240 meses;
- taxa de juros: 0,5% a.m;
- valor da retirada mensal: $R' = R\$ 1.000,00$ (que consideraremos representar 100%

valor da retirada mensal também são referidos ao longo deste trabalho como *tempo de contribuição*, *tempo de benefício*, *taxa de rendimento*, *valor do depósito ou prestação mensal* e *valor da renda ou benefício mensal*, respectivamente.

³A depender da situação em análise, apenas haverá necessidade de exibição de parte desses controles deslizantes, ficando ocultos aqueles que não se aplicarem ao problema. Nos exemplos apresentados no presente trabalho, os controles deslizantes foram exibidos de acordo com a sua pertinência a cada situação-problema analisada.

⁴Maiores detalhes sobre a construção da calculadora gráfica pode ser verificado em <<https://www.geogebra.org/m/B7Rwqpfr>>.

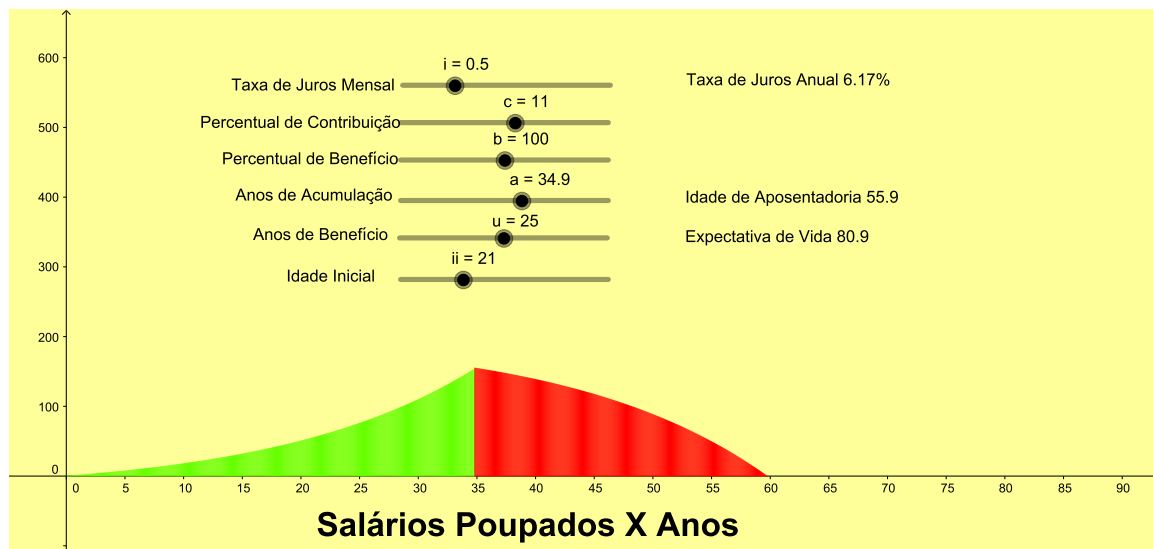


Figura 2.1: Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Cálculos relativos à acumulação de capital e ao usufruto da renda, e visualização da evolução do montante durante os períodos de acumulação e de usufruto.

(Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/B7Rwqpfr>>)

do salário ou renda atual da pessoa a que se refere o exemplo);

- valor da contribuição mensal: R

O objetivo do exemplo era o de calcular o valor de R que atende às condições apresentadas acima, tendo sido encontrado o valor de R\$ 98,00, aproximadamente, que representa 9,8% do valor do benefício pretendido. Esse resultado nos diz que, nas condições do exemplo, para que seja obtida uma renda mensal R' , seria necessário poupar mensalmente 9,8% desse valor.

Agora vejamos como podemos utilizar a calculadora gráfica para a resolução do mesmo problema. Utilizando os parâmetros acima, temos o resultado inicial indicado na figura 2.2, onde o percentual de contribuição (que é o dado procurado) foi arbitrariamente definido em 11%.

Verificamos que, com um percentual de contribuição de 11%, houve uma sobra de recursos, pois o montante termina (parte vermelha do gráfico) em algum ponto acima da abscissa, indicando que o valor acumulado não foi inteiramente utilizado durante o tempo de usufruto, de onde se conclui que podemos reduzir a taxa de contribuição (pois estamos interessados na situação de equilíbrio, em que não haja sobra nem falta de recursos). Assim, utilizando o controle deslizante correspondente, vamos reduzir o percentual de contribuição para, por exemplo, 9% e observar novamente o comportamento do gráfico. Obtemos o resultado indicado na figura 2.3.

Verificamos agora que, com uma contribuição de 9% do valor da renda futura pretendida, o montante acumulado não será suficiente para garantir o recebimento do benefício pretendido pelo tempo desejado. Essa conclusão decorre da observação de que

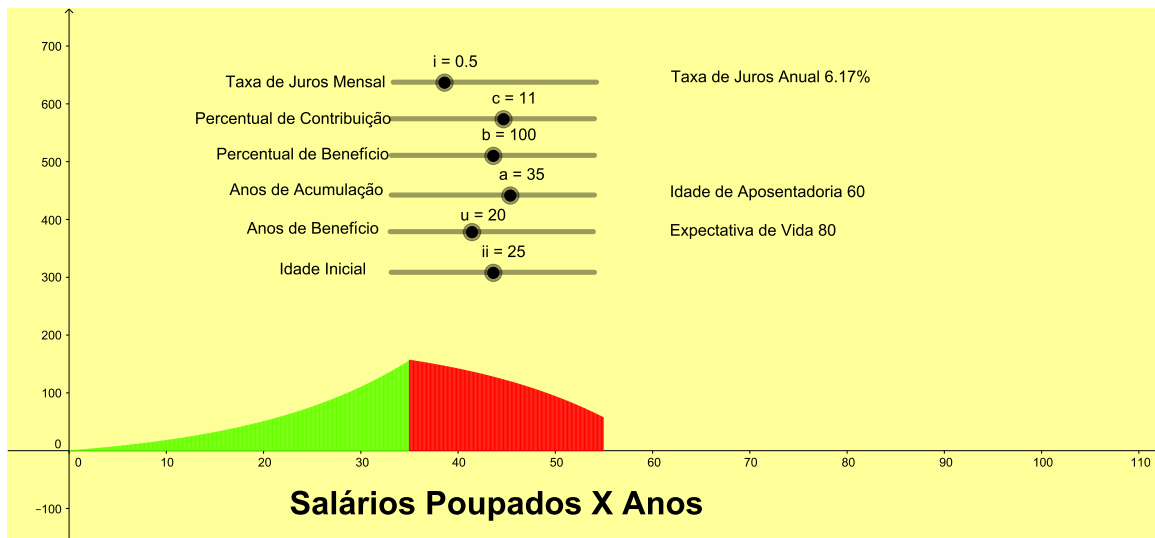


Figura 2.2: Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 10: cálculo da contribuição, em percentual do salário ou renda mensal atual, para uma taxa de juros de 0,5% a.m., percentual do benefício de 100% do salário ou renda mensal, tempo de acumulação de 35 anos e tempo de usufruto da renda ou benefício de 20 anos.

(Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/B7Rwqpfr>>)

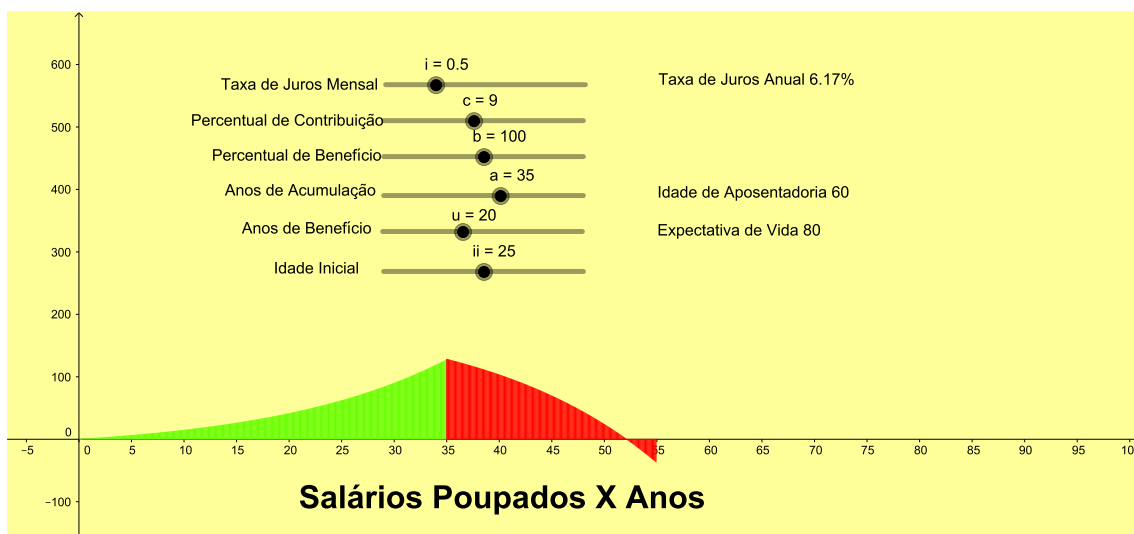


Figura 2.3: Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 10: cálculo da contribuição, em percentual do salário ou renda mensal atual, para uma taxa de juros de 0,5% a.m., percentual do benefício de 100% do salário ou renda mensal, tempo de acumulação de 35 anos e tempo de usufruto da renda ou benefício de 20 anos.

(Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/hquTGhBz>>)

o gráfico agora termina em um ponto abaixo da abscissa, o que corresponderia a um montante "negativo", ou seja, a um saldo negativo ou *déficit*. Assim, o montante acumulado seria totalmente consumido antes do término do período de usufruto desejado, estabelecido em 20 anos.

Portanto, devemos continuar procedendo a novos ajustes no percentual de contribuição até que o gráfico termine exatamente sobre a abscissa (ou o mais próximo possível

desta), o que garantirá que o montante acumulado será consumido exatamente no tempo fixado para o período de usufruto da renda ou benefício, tarefa que se torna bastante simples e intuitiva com a utilização do controle deslizante apropriado. Desse modo, após a realização de pequenos ajustes no valor do percentual de contribuição, chegamos ao gráfico desejado, conforme podemos verificar na figura 2.4.

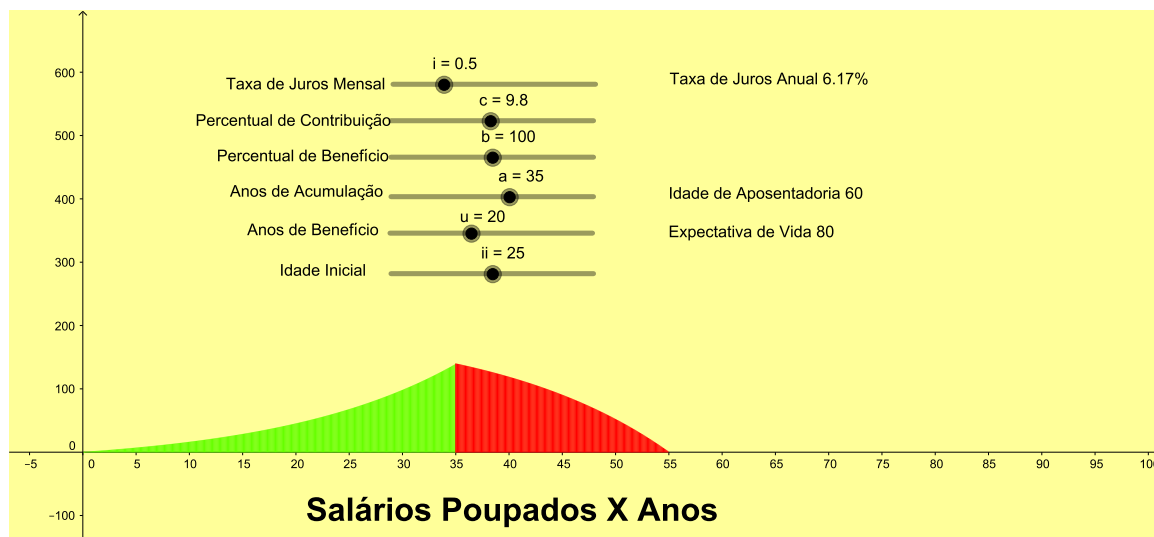


Figura 2.4: Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 10: cálculo da contribuição, em percentual do salário ou renda mensal atual, para uma taxa de juros de 0,5% a.m., percentual do benefício de 100% do salário ou renda mensal, tempo de acumulação de 35 anos e tempo de usufruto da renda ou benefício de 20 anos.

(Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/MYrGp6cP>>)

Observe-se que chegamos ao gráfico desejado quando utilizado o percentual de contribuição de 9,8%, que, portanto, é o valor de R que procurávamos, expresso como um percentual de R' , ou seja, concluímos que:

$$R = 9,8\% \text{ de } R' \Rightarrow R = 0,098 \times 1.000 = 98,00.$$

Assim, com o uso bastante simples e intuitivo da nossa calculadora gráfica, chegamos ao resultado $R = R\$ 98,00$, que é o mesmo resultado obtido ao final dos cálculos realizados no Exemplo 10.

Retomemos agora o **Exemplo 11**, que apresenta os seguintes dados:

- tempo de contribuição: 35 anos;
- tempo de usufruto: 9,9 anos \cong 119 meses;
- taxa de juros: 0,5% a.m
- Valor da contribuição: R
- valor da retirada pretendida : $R\$ 2.000,00 = R'$

O objetivo do exemplo era o de calcular o valor de R que atende às condições apresentadas acima, tendo sido encontrado o valor de $R\$ 125,70$, o que representa apro-

ximadamente 6,3% do valor do benefício pretendido. Esse resultado nos diz que, nas condições do exemplo, para que seja obtida uma renda mensal R' , seria necessário poupar mensalmente 6,3% desse valor.

Vejamos o resultado obtido com o uso da calculadora gráfica. Utilizando os parâmetros acima, obtemos o resultado inicial indicado na figura 2.5, onde o percentual de contribuição (que é o dado procurado) foi arbitrariamente definido em 11%:

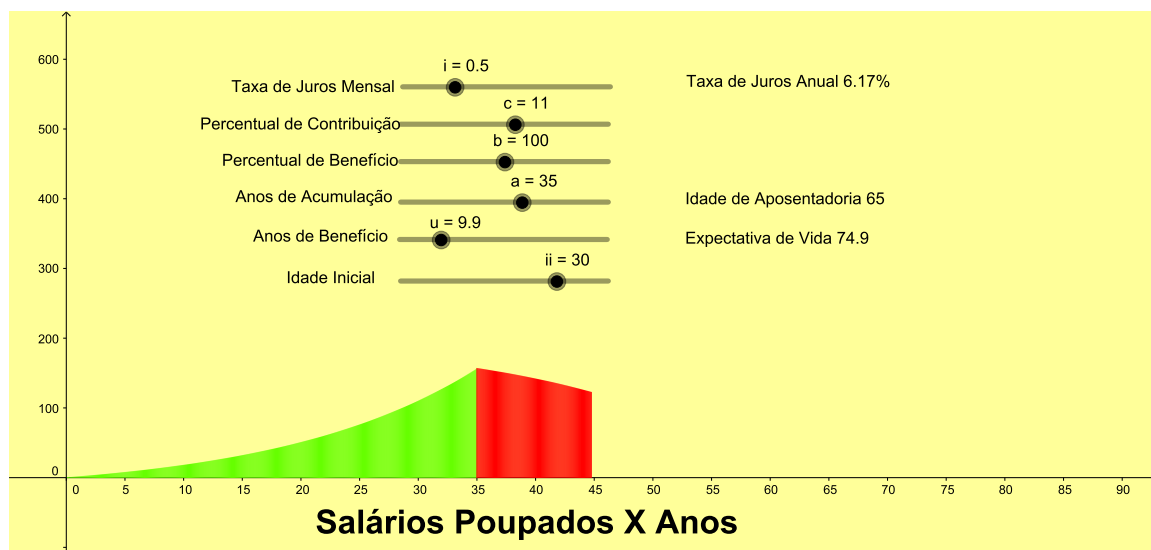


Figura 2.5: Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 11: cálculo da contribuição, em percentual do salário ou renda mensal atual, para uma taxa de juros de 0,5% a.m., percentual do benefício de 100% do salário ou renda mensal, tempo de acumulação de 35 anos e tempo de usufruto do benefício de 9,9 anos.

(Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/eXWxBxwE>>)

Verificamos no gráfico acima que, com um percentual de contribuição de 11%, é obtido um valor de montante acima do necessário para atender às condições do exemplo, uma vez que o gráfico termina num ponto bastante acima do eixo das abscissas. Assim, vamos reduzir o percentual da contribuição para 8% e verificar o comportamento do gráfico. É obtido o resultado observado no gráfico 2.6.

Constatamos que nos aproximamos do resultado pretendido, mas o percentual de contribuição está ainda acima do valor necessário. Reduzindo a taxa de contribuição para 5,0%, o gráfico obtido é o indicado na figura 2.7.

Dessa vez percebemos que a redução da taxa de contribuição foi exagerada, levando a um montante insuficiente para fazer frente à retirada do valor definido pelo tempo pretendido, haja vista que o gráfico termina num ponto abaixo da abscissa, significando que todo o montante seria gasto antes do término do prazo de usufruto e, portanto, a continuidade das retiradas, se possível, levaria a um saldo negativo.

Com o auxílio do controle deslizante correspondente da calculadora, vamos proce-

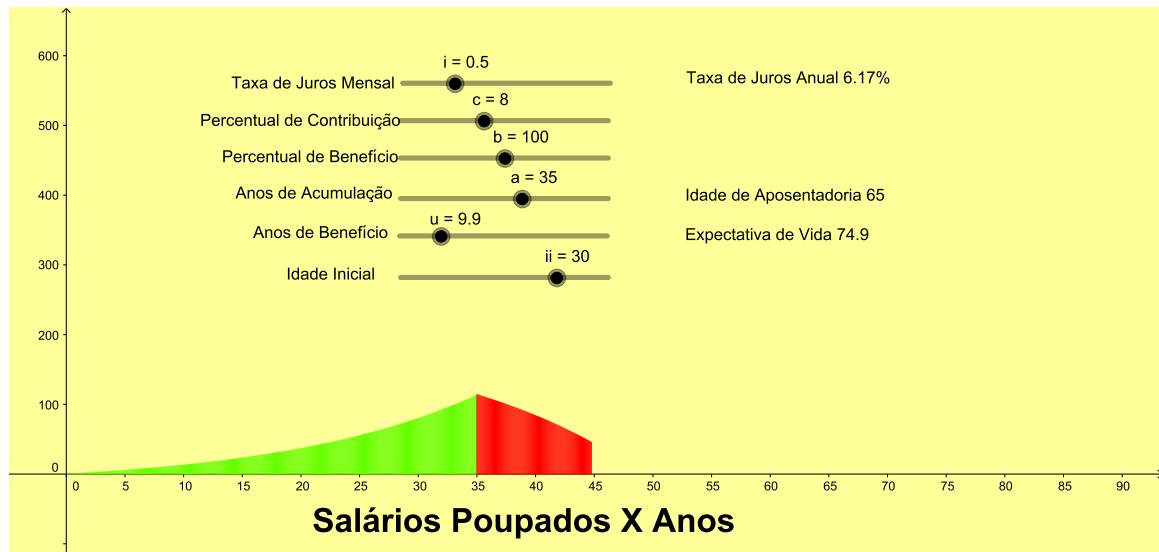


Figura 2.6: Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 11: cálculo da contribuição, em percentual do salário ou renda mensal atual, para uma taxa de juros de 0,5% a.m., percentual do benefício de 100% do salário ou renda mensal, tempo de acumulação de 35 anos e tempo de usufruto do benefício de 9,9 anos.

(Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/w8fCSTfC>>)

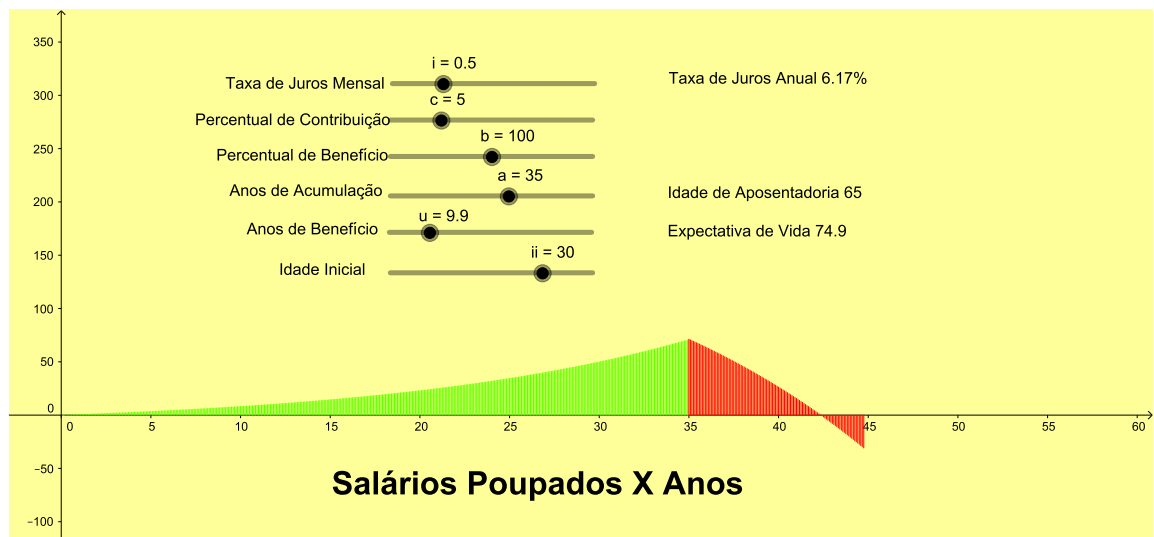


Figura 2.7: Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 11: cálculo da contribuição, em percentual do salário ou renda mensal atual, para uma taxa de juros de 0,5% a.m., percentual do benefício de 100% do salário ou renda mensal, tempo de acumulação de 35 anos e tempo de usufruto do benefício de 9,9 anos.

(Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/EkqEhrmt>>)

dendo a contínuos ajustes no percentual de contribuição, até que chegamos a um gráfico com configuração próxima da que desejamos, conforme figura 2.8, obtido com uma taxa de contribuição de 6,3%, resultado que está em conformidade com o encontrado na resolução anterior do exemplo 11.

Vejamos o **Exemplo 12**. Temos os seguintes dados:

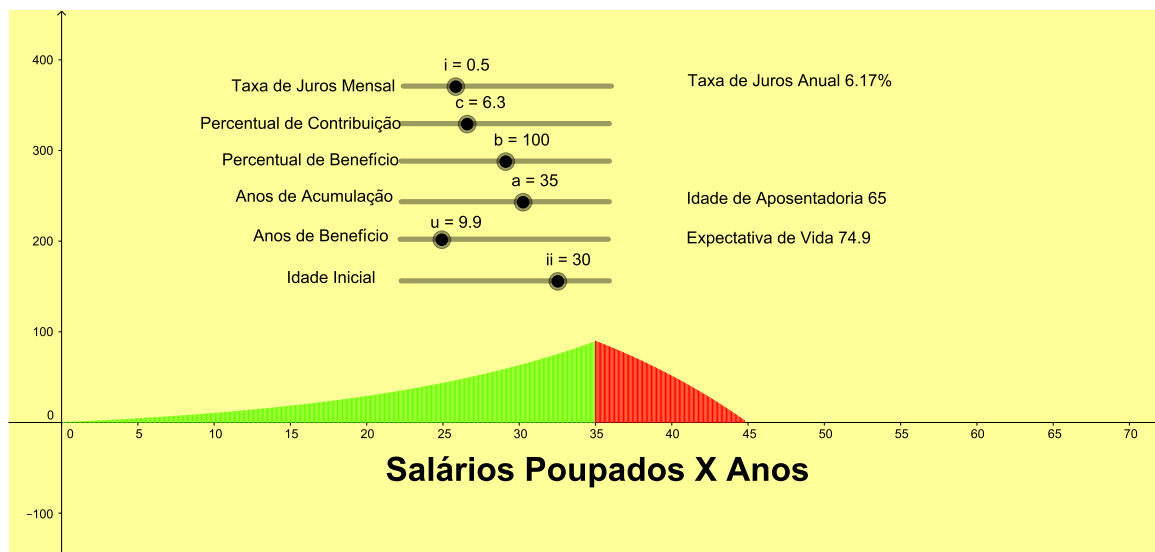


Figura 2.8: Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 11: cálculo da contribuição, em percentual do salário ou renda mensal atual, para uma taxa de juros de 0,5% a.m., percentual do benefício de 100% do salário ou renda mensal, tempo de acumulação de 35 anos e tempo de usufruto do benefício de 9,9 anos.

(Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/EU7tRaYj>>)

- tempo de acumulação: 35 anos;
- tempo de usufruto: 20,5 anos;
- valor da contribuição mensal: R\$ 300,00 (que representa 10% do salário considerado no exemplo em análise);
- taxa de juros: 0,25% a.m;
- Valor da retirada mensal: ?

Em nossa calculadora gráfica, o valor da retirada mensal é definido em percentual do salário (ou renda) mensal. Como esse valor de retirada é o dado que procuramos, vamos inicialmente atribuir-lhe um valor arbitrário e, em seguida, ajustar esse valor, até obter um gráfico que termine exatamente sobre o eixo das abscissas ou o mais próximo possível deste. Assim, inicialmente vamos considerar que o valor da retirada mensal seja igual a 100% do salário atual de Nadjara. Como resultado, obtemos o gráfico indicado na figura 2.9.

Observamos que o gráfico obtido não é o que desejamos. Como o gráfico termina abaixo do eixo das abscissas, devemos reduzir o valor da retirada. Passando para uma retirada equivalente a 50% do valor do salário, temos como resultado o gráfico observado na figura 2.10.

Embora a configuração acima ainda não seja a que desejamos, claramente estamos nos aproximando do resultado procurado. Finalmente, com um percentual de 40,5%, chegamos a um gráfico com uma configuração bastante próxima da que desejávamos, conforme figura 2.11.

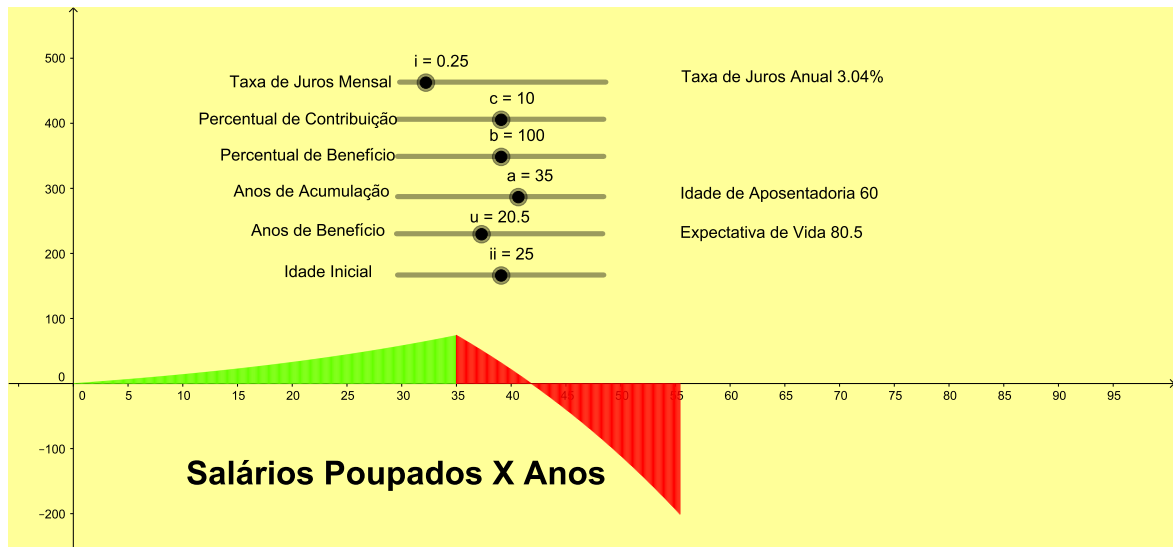


Figura 2.9: Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 12: cálculo do benefício, em percentual do salário ou renda mensal atual, para uma taxa de juros de 0,25% a.m., percentual de contribuição de 10% do salário ou renda mensal, tempo de acumulação de 35 anos e tempo de usufruto de 20,5 anos.

(Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/ceddbtGT>>)

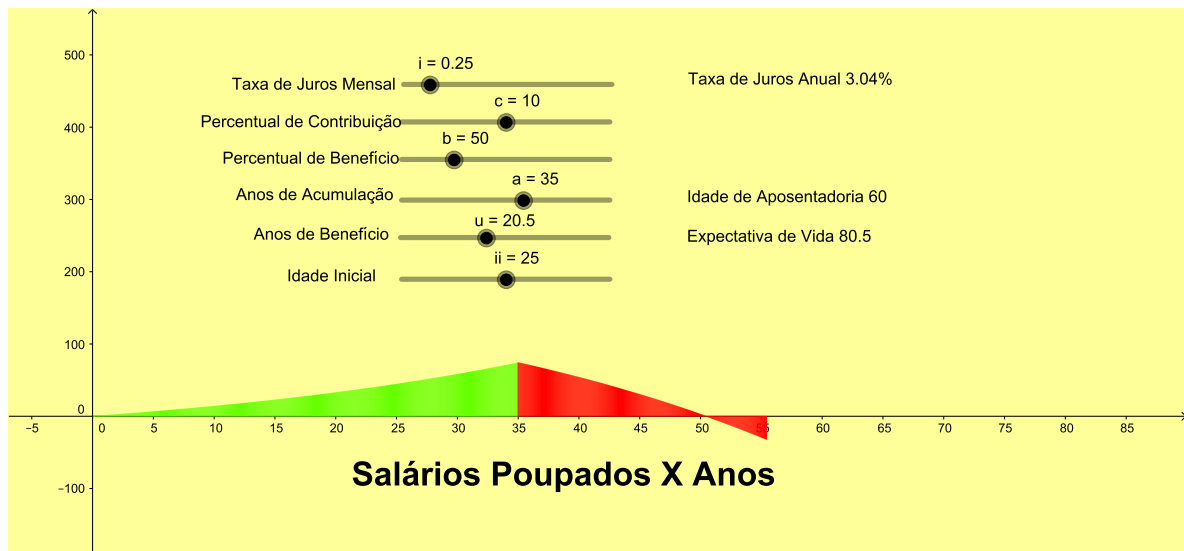


Figura 2.10: Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 12: cálculo do benefício, em percentual do salário ou renda mensal atual, para uma taxa de juros de 0,25% a.m., percentual de contribuição de 10% do salário ou renda mensal, tempo de acumulação de 35 anos e tempo de usufruto de 20,5 anos.

(Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/atwPU8PV>>)

Portanto, podemos considerar como resultado o percentual de 40,5%, que é um resultado próximo do obtido na resolução anterior do exemplo 12 (o valor então encontrado, R\$ 1.211,85, representa 40,4% do salário de Nadjara).

Retomemos agora o *Exemplo 15*, cuja resolução exigiu uma grande quantidade

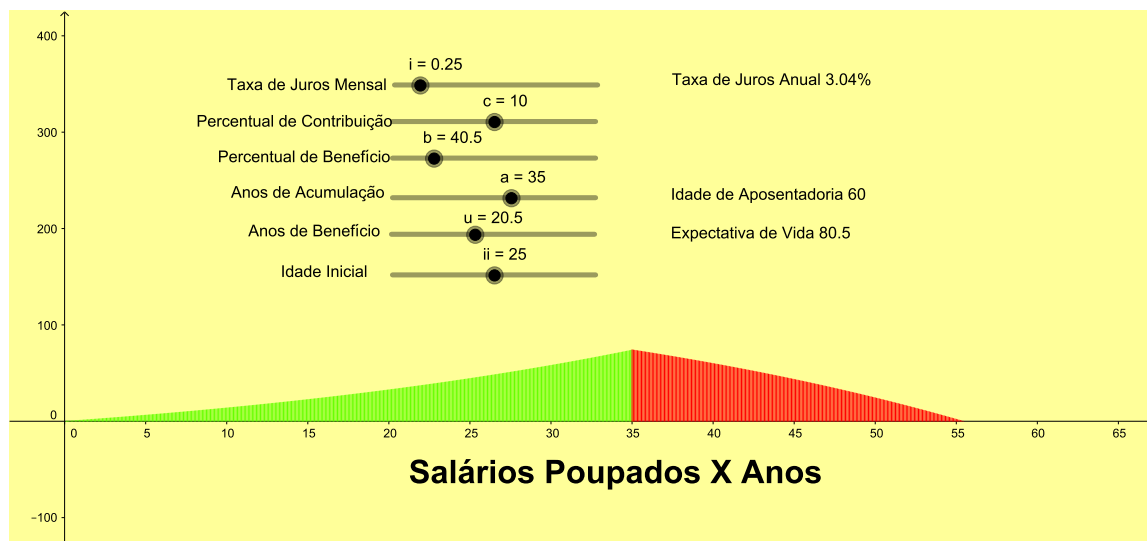


Figura 2.11: Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 12: cálculo do benefício, em percentual do salário ou renda mensal atual, para uma taxa de juros de 0,25% a.m., percentual de contribuição de 10% do salário ou renda mensal, tempo de acumulação de 35 anos e tempo de usufruto de 20,5 anos.

(Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/hvY3tRYB>>)

de cálculos. Nesse exemplo, temos os seguintes parâmetros relativos ao item "a":

- tempo de acumulação: 25 anos = 300 meses;
- tempo de usufruto: não se aplica (pois o exemplo trata apenas do período de acumulação);
- valor da retirada mensal: não se aplica (pelo mesmo motivo acima);
- taxa de juros: ? (dado procurado no exemplo);
- valor do depósito/contribuição: R\$ 500,00.

Como, em nossa calculadora, o valor do depósito/contribuição é dado em percentual do salário ou renda, podemos escolher livremente quanto R\$ 500,00 representam, em termos percentuais, do salário (ou renda) mensal de Augusto, uma vez que o valor do salário não foi informado no enunciado do problema. Se, por exemplo, definirmos esse percentual em 10%, estaremos considerando um salário (ou renda) mensal de R\$ 5.000,00. Como o objetivo de Augusto é acumular 1 milhão de reais, isso significará que ele pretende acumular o equivalente a duzentos salários (ou duzentas vezes o valor da sua renda mensal). Fixado esse parâmetro, o objetivo agora é, a partir do conjunto de parâmetros, encontrar a taxa de juros que resulte num gráfico correspondente a um montante acumulado de 200 salários.

O procedimento será o mesmo adotado anteriormente, qual seja, vamos utilizar o controle deslizante correspondente à taxa de juros e, à medida que alterarmos o valor dessa taxa, observaremos o comportamento do gráfico, até atingirmos o cenário desejado.

No GeoGebra esse procedimento é bastante rápido e dinâmico⁵.

Inicialmente, vamos definir, de forma aleatória, um primeiro valor para a taxa de juros. Escolhemos uma taxa de 0,8% a.m. O gráfico obtido é o representado na figura 2.12.

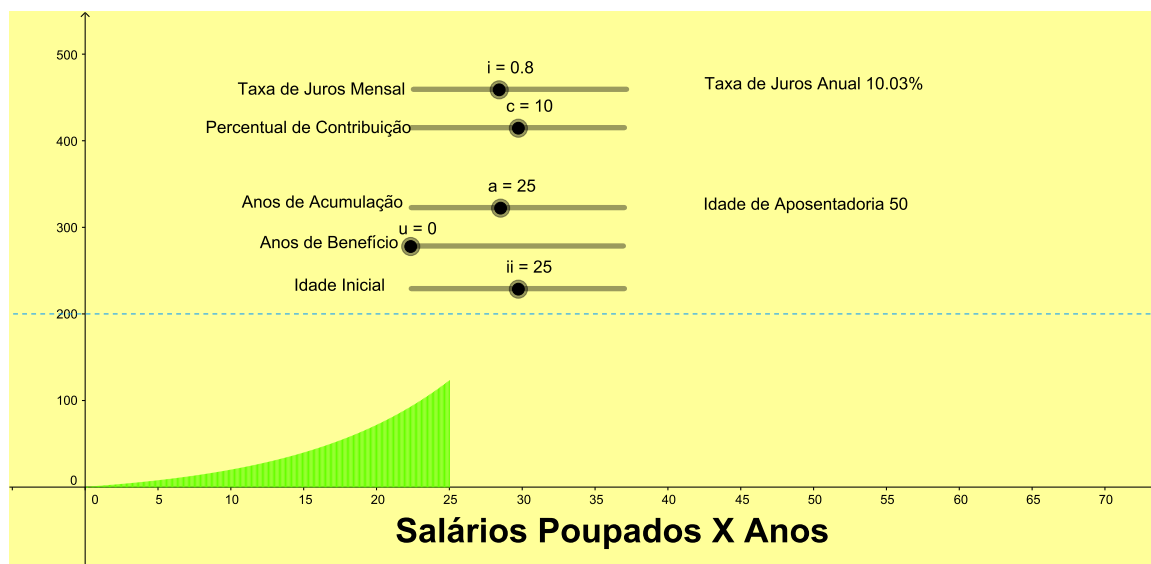


Figura 2.12: Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 15, item "a": cálculo do montante acumulado, para uma taxa de juros de 0,8% a.m., percentual de contribuição de 10% do salário ou renda mensal e 25 anos de acumulação.

(Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/Qhgdbgb2>>)

Verificamos que o ponto mais elevado do gráfico corresponde a um valor de ordenada abaixo de 200, o que significa que, fixados os demais parâmetros, com a taxa de juros utilizada não foi possível obter um montante equivalente a 200 salários. Portanto, será necessário elevar o valor da taxa. Assim, verifiquemos o comportamento do gráfico para uma taxa de 1,2% a.m. O gráfico obtido com essa nova taxa é o da figura 2.13.

Conforme podemos observar no gráfico representado na figura 2.13, com a taxa de 1,2% a.m., o montante acumulado claramente ultrapassou o valor de 200 salários.

Continuando a realizar ajustes no valor da taxa de juros, o montante equivalente a 200 salários é obtido quando a taxa é fixada em 1,03% a.m, conforme figura 2.14, que é o mesmo resultado obtido na resolução anterior do item "a" do exemplo 15.

No tocante ao item "b" do exemplo em análise, pede-se agora para calcular a idade que Augusto teria ao conseguir acumular R\$ 1.000.000,00, no caso de ser utilizada uma taxa de juros de 0,5%. Portanto, dado agora um valor de taxa de juros, queremos saber qual o tempo de acumulação necessário para que seja alcançado o monte de 1 milhão de reais, fixados os demais parâmetros. Utilizando a calculadora gráfica, novamente partire-

⁵Aqui, infelizmente, estamos limitados a uma apresentação estática, exibindo apenas alguns resultados obtidos a partir da manipulação dos controles deslizantes. Mas o leitor poderá realizar os procedimentos indicados, utilizando os projetos respectivos, disponíveis nas páginas eletrônicas referidas em cada figura.

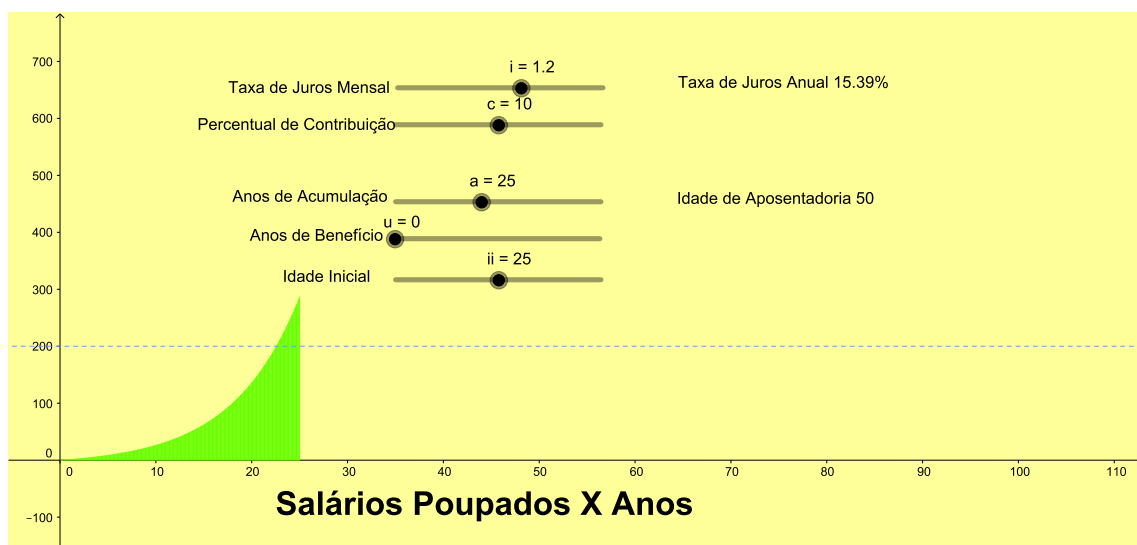


Figura 2.13: Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 15, item "a": cálculo do montante acumulado, para uma taxa de juros de 1,2% a.m., percentual de contribuição de 10% do salário ou renda mensal e 25 anos de acumulação.

(Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/V8gpnxQ7>>)

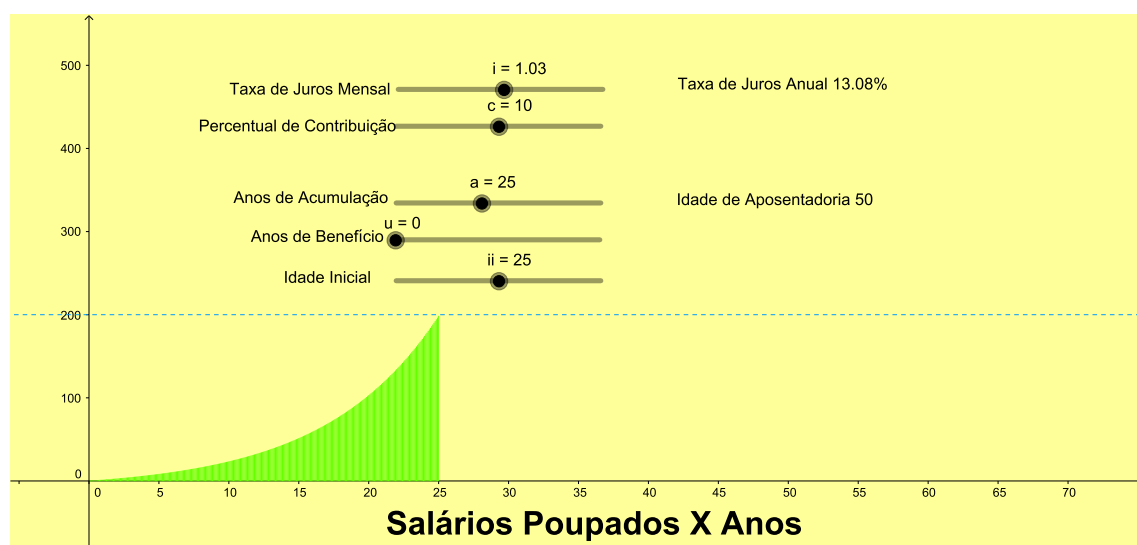


Figura 2.14: Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 15, item "a": cálculo do montante acumulado, para uma taxa de juros de 1,03% a.m., percentual de contribuição de 10% do salário ou renda mensal e 25 anos de acumulação.

(Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/JzbY45hz>>)

mos de um valor aleatório de tempo de acumulação, procedendo em seguida aos ajustes, até que seja obtido o gráfico desejado. A título de exemplo, vamos inicialmente considerar que o tempo de acumulação seja igual a 30 anos. O resultado gráfico é o apresentado na figura 2.15.

Claramente, o resultado obtido está longe do desejado (linha tracejada azul). Dessa forma, vamos elevar o tempo de acumulação, passando agora para 40 anos (ou 480 meses). O resultado gráfico obtido é o visualizado na figura 2.16.

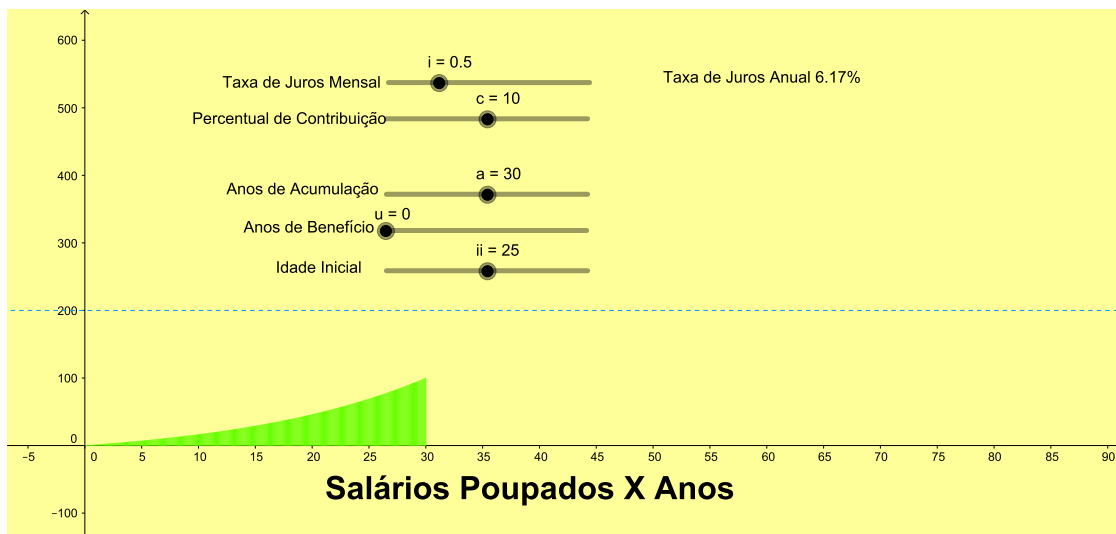


Figura 2.15: Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 15, item "b": cálculo do tempo de contribuição necessário para acumulação de 200 salários, com uma taxa de juros de 0,5% a.m. e percentual de contribuição de 10% do salário.

(Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/J2jrwfSP>>)

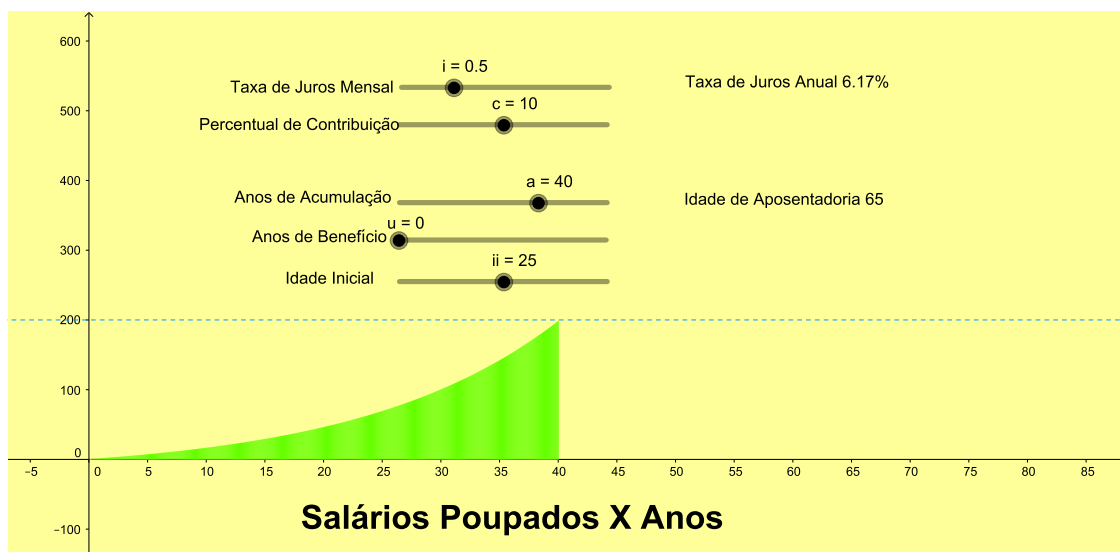


Figura 2.16: Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 15, item "b": cálculo do tempo de contribuição necessário para acumulação de 200 salários, com uma taxa de juros de 0,5% a.m. e percentual de contribuição de 10% do salário.

(Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/vAf5u7kX>>)

Visualmente, o resultado parece bastante próximo do desejado. Para nos certificarmos, podemos acompanhar o resultado exato na janela de álgebra do GeoGebra (ou até mesmo ampliar o *zoom* do gráfico a fim de visualizar melhor o ponto máximo deste). Consultando a janela de álgebra, verificamos que o resultado exato para o valor do montante é de 199,15 salários, ainda abaixo do resultado desejado (200 salários). Todavia, ao elevarmos o tempo de acumulação em 0,1 ano (para 40,1 anos, portanto), o montante obtido é de 200,24 salários, o que nos indica que o tempo exato de acumulação está entre

40 e 40,1 anos. Com efeito, o resultado anteriormente obtido para o item "b" do exemplo 15 foi de 40,07 anos (aproximadamente 481 meses). Como, em nossa calculadora, o tempo de acumulação foi definido com apenas 1 casa decimal, não chegaremos ao resultado de 40,07 anos, obtido na resolução anterior do exemplo, mas saberemos que este resultado encontra-se entre 40 e 40,1, que são valores bastante próximos do resultado exato e que, para os objetivos aqui pretendidos, poderiam ser considerados, qualquer deles, como resposta.

Para finalizar a análise, com a calculadora gráfica, dos exemplos já resolvidos anteriormente, veremos os exemplos 19 e 20, que tratam de renda perpétua.

Vejamoinicialmente o **Exemplo 19**, onde temos os seguintes dados:

- tempo de contribuição: ?
- tempo de usufruto: vitalício;
- taxa de juros: 1,0 %;
- valor da contribuição: R\$ 1.000,00;
- valor do benefício: R\$ 5.000,00.

Queremos saber qual o tempo de contribuição necessário para que seja obtida uma renda perpétua nas condições acima. Para que tenhamos um resultado preliminar em nossa calculadora gráfica, vamos atribuir um valor arbitrário ao tempo de contribuição. Iniciando com um tempo de contribuição de 20 anos, por exemplo, obtemos o resultado visualizado na figura 2.17.

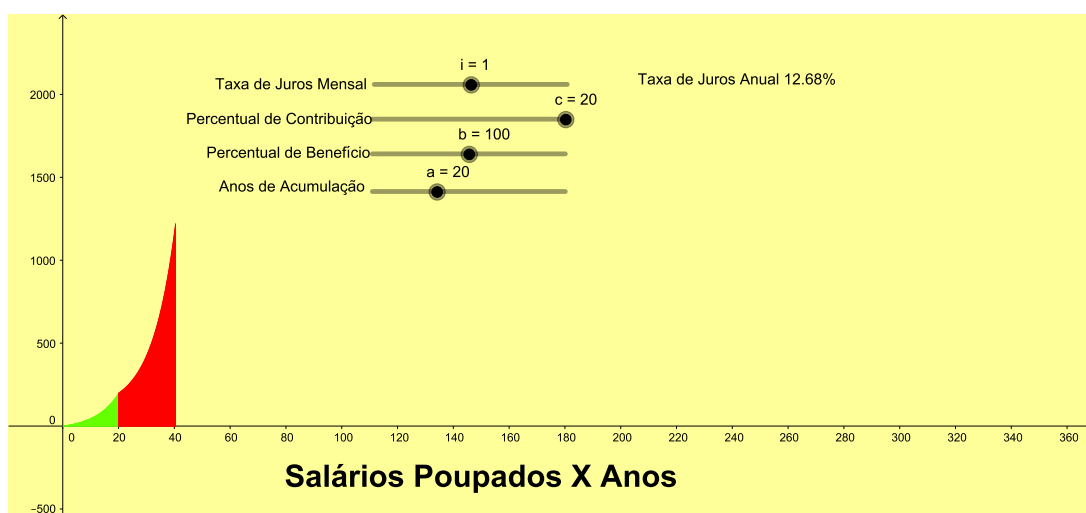


Figura 2.17: Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 19: cálculo do tempo de benefício, para uma taxa de juros de 1,0% a.m., percentual de contribuição de 20% do salário ou renda mensal, percentual de benefício de 100% do salário ou renda mensal e 20 anos de acumulação.

(Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/hcMpvHkX>>)

Observando o gráfico obtido, percebemos que, como os parâmetros acima, já foi possível a obtenção de uma renda perpétua, uma vez que o montante não decresce com o

passar do tempo, ocorrendo, ao invés disso, um expressivo crescimento do mesmo ao longo do período de usufruto. Porém, queremos saber qual o tempo *mínimo* de contribuição para obtenção da renda perpétua. Portanto, reduziremos esse tempo de 20 para 15 anos e vamos verificar o que acontece com o gráfico. O resultado obtido é visto na figura 2.18.

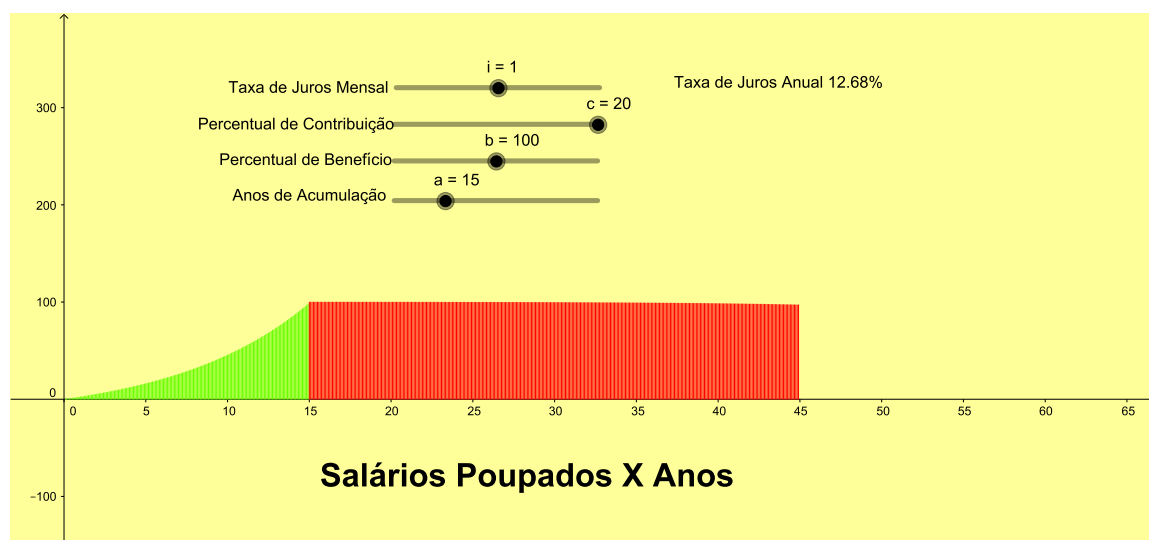


Figura 2.18: Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 19: cálculo do tempo de benefício, para uma taxa de juros de 1,0% a.m., percentual de contribuição de 20% do salário ou renda mensal, percentual de benefício de 100% do salário ou renda mensal e 15 anos de acumulação.

(Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/rj464Dug>>)

Verificamos que, aparentemente, o montante ainda não decresce com o passar dos anos, mas também não parece crescer, indicando que, nas condições do exemplo, o tempo de contribuição de 15 anos seja o menor tempo possível para obtenção da renda perpétua. Para melhor avaliação desse resultado, vamos verificar o que acontece se diminuirmos o tempo de contribuição em 0.1 ano (que é a menor variação permitida em nossa calculadora), ou seja, para 14.9 anos. Com esse tempo de contribuição, obtemos o gráfico representado na figura 2.19.

Constamos que, com um tempo de contribuição de 14.9 anos, o montante decresce ao longo do período de usufruto, o que denota não mais tratar-se uma renda perpétua. Por outro lado, se aumentarmos o tempo de contribuição de 15 para 15.1 anos, teremos o resultado obtido na figura 2.20.

Neste último gráfico, percebemos que o montante claramente cresce com o passar dos anos, indicando que, de fato, o resultado procurado está entre 14.9 e 15.1 anos, uma vez que, utilizando esses valores, foi possível obter, respectivamente, um gráfico visivelmente decrescente e um gráfico visivelmente crescente e, portanto, o gráfico que representa um montante de valor constante ao longo do período de usufruto deve ser obtido com um tempo de contribuição que, necessariamente, está entre esses valores. De fato, na resolução anterior do exemplo 19, o resultado obtido foi 180,07 meses (que aproximamos para 181

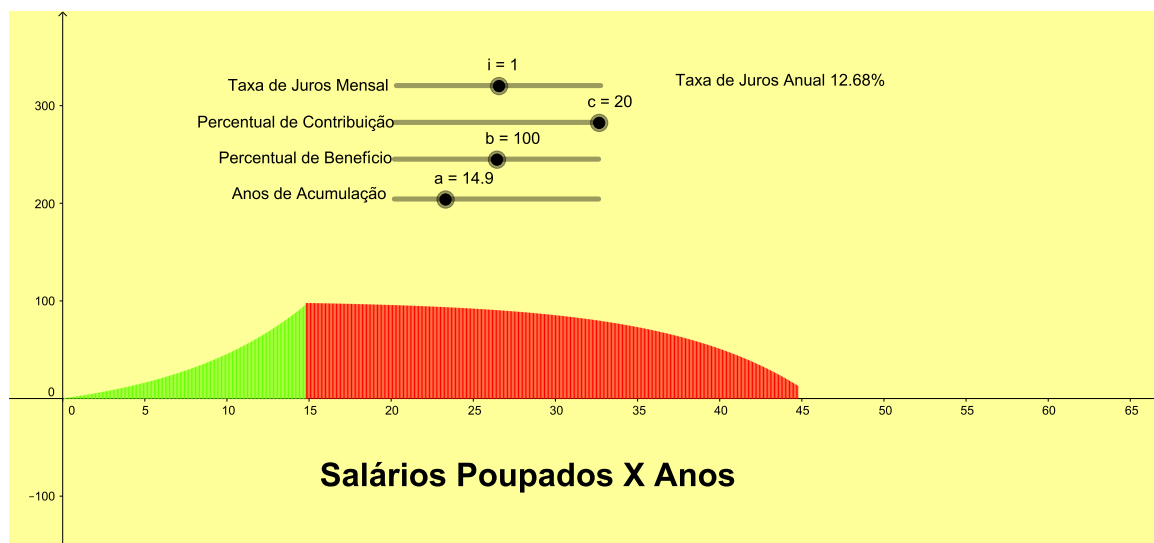


Figura 2.19: Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 19: cálculo do tempo de benefício, para uma taxa de juros de 1,0% a.m., percentual de contribuição de 20% do salário ou renda mensal, percentual de benefício de 100% do salário ou renda mensal e 14,9 anos de acumulação. (Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/EFn4Sej5>>)

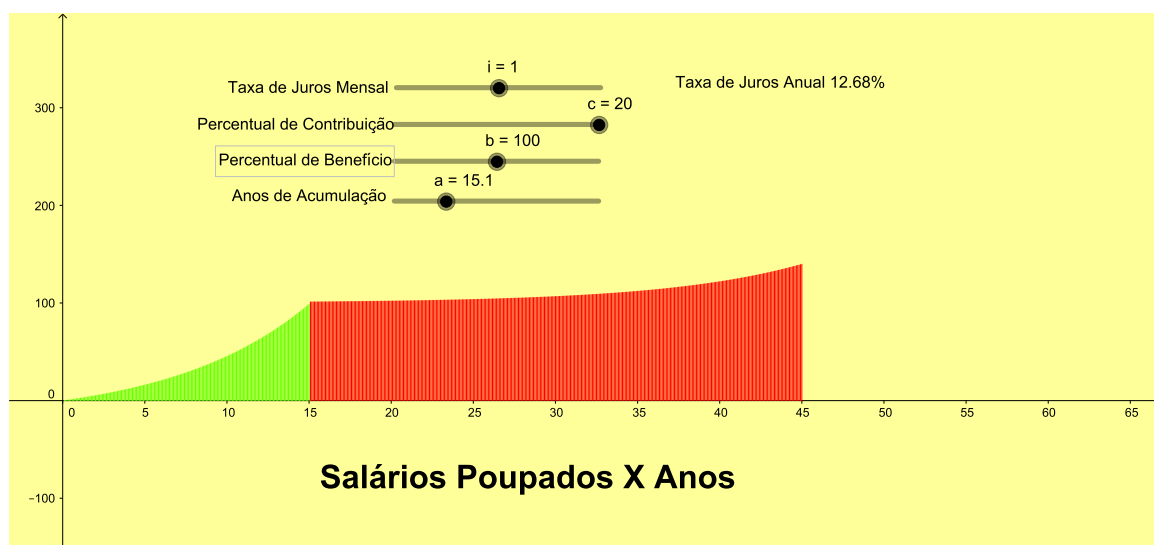


Figura 2.20: Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 19: cálculo do tempo de benefício, para uma taxa de juros de 1,0% a.m., percentual de contribuição de 20% do salário ou renda mensal, percentual de benefício de 100% do salário ou renda mensal e 15,1 anos de acumulação. (Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/ne96Dmm2>>)

meses), o que representa 15,01 anos, aproximadamente.

Como já dissemos, além da visualização gráfica, é possível verificar os resultados numéricos respectivos por meio da janela de álgebra do GeoGebra, na qual podemos constatar que, na verdade, o gráfico obtido utilizando um tempo de contribuição de 15 anos apresenta um decréscimo ao longo do período de usufruto. Todavia, esse decréscimo é bastante lento, de modo que o gráfico se aproxima de um gráfico constante. Tal análise é corroborada pelo resultado algébrico, haja vista que o valor obtido com a calculadora (15

anos) é bastante próximo do resultado exato (15,01 anos), obtido na resolução anterior do exemplo.

Finalmente, vejamos o *Exemplo 20*, onde temos os seguintes dados:

- tempo de contribuição: 35 anos;
- tempo de usufruto: ?
- taxa de juros: 0,6% a.m;
- valor da contribuição: 10% de R ;
- valor do benefício: R

Considerando R como o valor do salário ou renda mensal atual, utilizando os parâmetros acima na calculadora gráfica, obtemos o resultado indicado na figura 21.

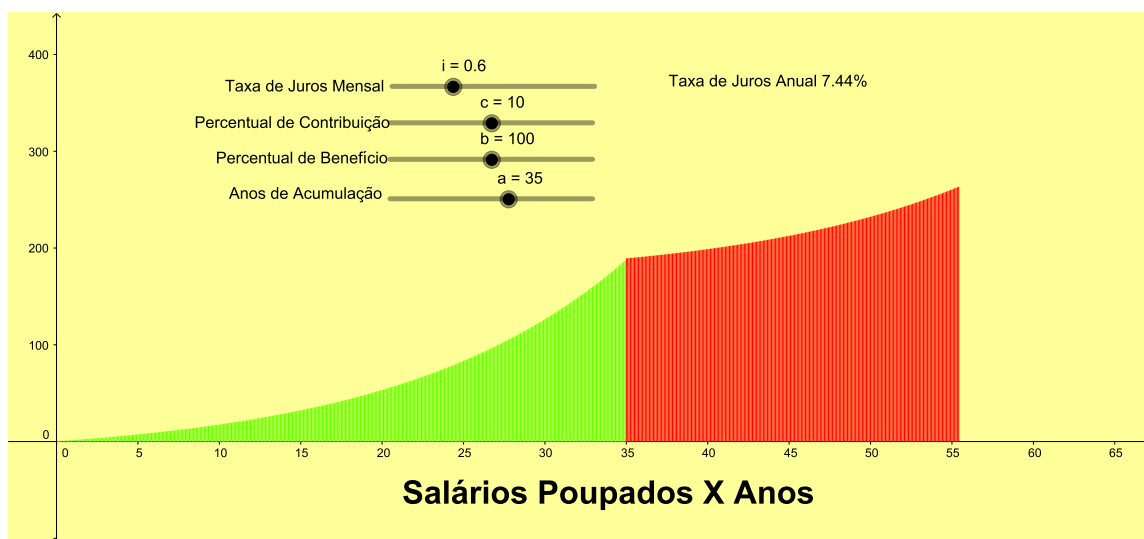


Figura 2.21: Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução do exemplo 20: cálculo do tempo de benefício, para uma taxa de juros de 0,6% a.m., percentual de contribuição de 10% do salário ou renda mensal, percentual de benefício de 100% do salário ou renda mensal e 35 anos de acumulação.

(Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/C2ahz4nV>>)

Observamos que o gráfico obtido não decresce, significando dizer que o valor do montante jamais diminui, permitindo, assim, que sejam realizadas infinitas retiradas de valor R . Ou seja, o montante obtido ao longo do período de acumulação (trecho do gráfico na cor verde) é suficiente para proporcionar uma renda mensal vitalícia de valor R . Desse modo, sendo mantidas as condições apresentadas no exemplo, por mais longo que seja o período de usufruto da renda, a instituição financeira referida no exemplo jamais teria prejuízo decorrente da situação em análise. Tal conclusão é mesma a que chegamos na resolução anterior deste exemplo.

Verificamos que os resultados obtidos por meio da calculadora gráfica estão em conformidade com aqueles encontrados na resolução dos mesmos exemplos realizada no Capítulo 1, o que demonstra a eficiência da calculadora. Embora seja possível ocorrer

pequenas divergências de resultados decorrentes das limitações da calculadora, consideramos que, para os propósitos a que nos referimos no início deste capítulo, a ferramenta em questão nos parece bastante útil, permitindo a análise dos problemas de forma rápida e eminentemente visual, possibilitando a abordagem do assunto mesmo para alunos (ou plateias) que ainda não sejam capazes de entender completamente os cálculos envolvidos nos problemas, auxiliando-os na aquisição dessa aprendizagem.

É importante destacar que a abordagem dos temas de que trata o presente trabalho jamais poderia ignorar o sistema público de previdência administrado pelo Instituto Nacional do Seguro Social (INSS), denominado oficialmente de *Previdência Social*, que é certamente o sistema previdenciário mais próximo da realidade dos alunos e da população em geral, por se tratar de um sistema cuja filiação é obrigatória para a maioria dos trabalhadores e ao qual, efetivamente, a maioria dos trabalhadores brasileiros está filiada. Considerando os trabalhadores e seus dependentes, é possível afirmar que a maior parte da população brasileira está, direta ou indiretamente, vinculada à Previdência Social.

Entretanto, antes de abordarmos matematicamente alguns tópicos relacionados à Previdência Social, faz-se necessário apresentar, ainda que de forma breve, algumas das principais características desse sistema, o que faremos no capítulo a seguir.

Capítulo 3

Noções Básicas da Previdência Social Brasileira

3.1 Breve Histórico da Previdência Social no Brasil

A preocupação com os infortúnios da vida sempre foi uma constante na história da humanidade. Desde os tempos mais remotos, o homem tem-se preocupado em tentar reduzir os efeitos das adversidades de sua existência, como acidentes, doenças, velhice etc.

Embora as primeiras iniciativas tenham advindo de particulares e instituições religiosas, com o passar do tempo, paulatinamente o Estado foi assumindo uma parcela de responsabilidade pela assistência aos desprovidos de renda até, finalmente, ser criado um sistema de seguro social coletivo e de caráter obrigatório.

A previdência social é hoje considerada uma ação eminentemente pública, destinada a amparar a população de riscos e contingências previstos em lei. Isto é, destina-se a substituir ou reforçar a remuneração nos casos em que esta deixa de ser recebida em decorrência de algum risco social.

A ação estatal na direção da proteção social teve início na Inglaterra e na Alemanha¹, o que ocorreu em virtude das alterações nas relações de trabalho causadas pela Revolução Industrial, período em que uma multidão de trabalhadores foi deslocada para as cidades e lá se submeteu a precárias condições de trabalho, com elevados riscos sociais, circunstância que comumente levava os trabalhadores à incapacidade, à falta de condições para manter o seu sustento ou amparar seus dependentes e, não raro, até mesmo à morte.

Um ponto chave no estudo da evolução histórica da previdência social é o chamado **Plano Beveridge**, instituído na Inglaterra, em 1942, por William Beveridge. Segundo Kertzman, *"este plano é o que marca a estrutura da seguridade social moderna, com a*

¹Cf. KERTZMAN, Ivan. Curso prático de direito previdenciário. 12. ed. Salvador: Editora Juspodivm, 2015, p. 43.

participação universal de todas as categorias de trabalhadores, nas três áreas da seguridade: saúde, previdência social e assistência social"². O modelo de proteção estatal inaugurado pelo Plano Beveridge influenciou modelos posteriormente adotados em diversos países, inclusive da América Latina, embora encontre-se atualmente em curso uma mudança nesse paradigma, com a adoção de políticas previdenciárias organizadas sem qualquer participação do Estado, o que, de acordo com Menezes³, já ocorreu no Chile e no Uruguai.

No Brasil, de acordo com Fábio Zambitte, temos "*como exemplos mais antigos da proteção social brasileira, as 'santas casas' (1543), atuantes no segmento assistencial, e o montepio*⁴ para a guarda pessoal de D. João VI (1808). Nesta mesma época, em 1795, também foi criado o Plano de Benefícios dos Órfãos e Viúvas dos Oficiais da Marinha."⁵

A primeira Constituição da República (1891), estabeleceu aposentadoria por invalidez para o servidor público. A norma previa a aposentadoria, custeada pela nação, para o servidor público, em caso de invalidez permanente.

Em 24 de janeiro de 1923, o presidente Artur Bernardes sancionou o projeto do deputado Eloy Chaves que criava em cada uma das empresas de estradas de ferro existentes no país uma caixa de aposentadoria e pensões (CAP) para os respectivos empregados. Mais tarde, essa lei (Decreto-Legislativo nº 4.682, de 24/01/1923), conhecida como **Lei Eloy Chaves**, foi considerada a primeira lei brasileira de previdência social, e o dia da sua criação, 24 de janeiro, foi adotado no Brasil como o *Dia da Previdência Social* e também como o *Dia Nacional do Aposentado*. A partir daí, começa a ser traçado o sistema previdenciário brasileiro.

No modelo das CAPs, havia contribuição dos trabalhadores e dos empregadores, com direito a aposentadoria para o segurado e pensão por morte para os seus dependentes.

Mais tarde, a Lei Eloy Chaves foi estendida a diversas outras categorias, como portuários, mineradores e funcionários públicos e muitas outras caixas de aposentadorias e pensões foram criadas.

Durante a década de 30, as CAPs foram substituídas pelos Institutos de Aposentadoria e Pensões (IAP), voltados para as seguintes categorias: marítimos (IAPM, 1933), comerciários (IAPC, 1934), bancários (IAPB, 1934), industriários (IAPI, 1936) e dos empregados em transportes e cargas (IAPETEC, 1938). O processo de unificação das CAPs perdurou até a década de 50, com a criação de diversos institutos de outras categorias.

Em 1977, foi instituído o SINPAS - Sistema Nacional de Previdência e Assistência

²KERTZMAN, Ivan. Op. cit., p. 44.

³MENEZES, Adriana de Almeida. Direito previdenciário. 4. ed. Salvador: Editora Juspodivm, 2014, p. 20.

⁴Os montepios eram instituições em que, mediante o pagamento de cotas, cada membro adquiria o direito de, em caso de morte, deixar uma pensão para alguém de sua escolha.

⁵IBRAHIM, Fábio Zambitte. Curso de direito previdenciário. 20 ed. Rio de Janeiro: Impetus, 2015, p. 54.

Social, responsável pela integração das áreas de assistência social, previdência social, assistência médica e gestão das entidades ligadas ao então Ministério da Previdência e Assistência Social. O SINPAS contava com os seguintes órgãos⁶:

- INPS - Instituto Nacional de Previdência Social - autarquia responsável pela administração dos benefícios;
- IAPAS - Instituto de Administração Financeira da Previdência e Assistência Social - autarquia responsável pela arrecadação, fiscalização e cobrança de contribuições e demais recursos;
- INAMPS - Instituto Nacional de Assistência Médica da Previdência Social - autarquia responsável pela saúde;
- LBA - Fundação Legião Brasileira de Assistência - fundação responsável pela assistência ao menor;
- FUNABEM - Fundação Nacional do Bem-Estar do Menor - fundação responsável pela promoção de política social em relação ao menor;
- CEME - Central de Medicamentos - órgão ministerial encarregado de realizar distribuição de medicamentos;
- DATAPREV - Empresa de Processamento de Dados da Previdência Social - empresa pública que gerencia os sistemas de informática utilizados no âmbito da Previdência Social.

Em 1990, foi criado o Instituto Nacional do Seguro Social - INSS (Lei 8.029/90), a partir da junção do INPS com o IAPAS.

Em 24 de julho de 1991, foram sancionadas as duas principais leis em vigor relativas à Previdência Social, a Lei 8.212, que dispõe sobre a organização da Seguridade Social e trata do custeio da Previdência Social, e a Lei 8.213, que trata dos benefícios da Previdência Social. Ambas as leis foram regulamentadas pelo Decreto nº 3.048/99, que aprovou o Regulamento da Previdência Social (RPS).

Em janeiro de 2005, o INSS passou por uma mudança estrutural em decorrência da Lei 11.098, que criou a Secretaria da Receita Previdenciária (SRP) com competência relativa à arrecadação, fiscalização, lançamento e normatização de receitas previdenciárias. Até então essas competências eram do INSS.

Em março de 2007, com a edição da Lei 11.457, foi criada a Secretaria da Receita Federal do Brasil (RFB), a partir da junção da Secretaria da Receita Federal (SRF) com

⁶Com exceção da DATAPREV, todos os órgãos citados já foram extintos.

a Secretaria da Receita Previdenciária (SRP). Portanto, a competência relativa à arrecadação, fiscalização, lançamento e normatização das receitas previdenciárias é atualmente da RFB, permanecendo com o INSS a competência relativa à concessão dos benefícios previdenciários, emissão de certidão relativa a tempo de contribuição, gestão do Fundo do Regime Geral de Previdência Social (RGPS) e cálculo do montante das contribuições previdenciárias e emissão do correspondente documento de arrecadação, com vistas ao atendimento conclusivo para concessão ou revisão de benefício requerido.

3.2 A Previdência Social na Constituição Federal de 1988

O art. 194 da Constituição Federal de 1988 (CF/88) assim dispõe:

Art. 194. A seguridade social compreende um conjunto integrado de ações de iniciativa dos Poderes Públicos e da sociedade, destinadas a assegurar os direitos relativos à saúde, à previdência e à assistência social.

Depreende-se daí que a previdência social é parte integrante de um sistema mais amplo, denominado seguridade social, o qual abrange ainda a saúde e a assistência social.

A CF/88 trata de cada uma dessas componentes da seguridade social, definindo que:

Art. 196. A saúde é direito de todos e dever do Estado, garantido mediante políticas sociais e econômicas que visem à redução do risco de doença e de outros agravos e ao acesso universal e igualitário às ações e serviços para sua promoção, proteção e recuperação.

(...)

Art. 201. A previdência social será organizada sob a forma de regime geral, de caráter contributivo e de filiação obrigatória, observados critérios que preservem o equilíbrio financeiro e atuarial, e atenderá, nos termos da lei, a:

I - cobertura dos eventos de doença, invalidez, morte e idade avançada;

II - proteção à maternidade, especialmente à gestante;

III - proteção ao trabalhador em situação de desemprego involuntário;

IV - salário-família e auxílio-reclusão para os dependentes dos segurados de baixa renda;

V - pensão por morte do segurado, homem ou mulher, ao cônjuge ou companheiro e dependentes, observado o disposto no § 2º.

(...)

Art. 203. A assistência social será prestada a quem dela necessitar, independentemente de contribuição à seguridade social, e tem por objetivos:

I - a proteção à família, à maternidade, à infância, à adolescência e à velhice;

II - o amparo às crianças e adolescentes carentes;

III - a promoção da integração ao mercado de trabalho;

IV - a habilitação e reabilitação das pessoas portadoras de deficiência e a promoção de sua integração à vida comunitária;

V - a garantia de um salário mínimo de benefício mensal à pessoa portadora de deficiência e ao idoso que comprovem não possuir meios de prover à própria manutenção ou de tê-la provida por sua família, conforme dispuser a lei.

Da análise dos dispositivos acima transcritos, pode-se concluir que, conforme a Constituição, um importante traço distintivo entre a previdência social e os demais sistemas integrantes da seguridade social – a saúde e a assistência social - é que o acesso aos direitos relativos à previdência social depende de contribuição. Ou seja, as pessoas devem contribuir para que elas e seus dependentes tenham acesso aos benefícios previdenciários, ao passo que o exercício dos direitos relativos à saúde e à assistência social não possui tal pressuposto.

Os sistemas previdenciários contributivos, como é o caso do sistema de previdência brasileiro, podem adotar um *regime de repartição* ou um *regime de capitalização*. O regime de repartição é aquele em que existe um fundo único, para onde se destinam todas as contribuições previdenciárias e de onde saem os recursos para o financiamento dos benefícios pagos aos segurados. Segundo CASTRO e LAZZARI,

Tal modelo se baseia no ideal de solidariedade, no pacto entre gerações, cabendo à atual geração de trabalhadores em atividade pagar as contribuições que garantem os benefícios dos atuais inativos, e assim, sucessivamente, ideia que norteia a maior parte dos sistemas previdenciários atuais o redor do mundo⁷.

O regime de capitalização, por sua vez, determina a criação de um fundo específico para um determinado segurado ou grupo de segurados, com lastro suficiente para cobrir as necessidades previdenciárias dos seus integrantes, afirmando os mesmos autores acima citados que *"esse modelo é mais adotado nos planos individuais de previdência privada e nos fundos de pensão, que são entidades fechadas de previdência"*⁸.

O sistema de previdência social público brasileiro adota o regime de *repartição*, baseando-se, portanto, na ideia de solidariedade entre as gerações. Ou seja, quando o

⁷CASTRO, Carlos Alberto Pereira de; LAZZARI, João Batista. Manual de Direito Previdenciário. 6. ed. São Paulo: LTR, 2005. p. 47.

⁸Id. Ibid.

trabalhador brasileiro contribui para a Previdência Social, sua contribuição não fica vinculada a uma conta individualizada, em seu nome, como ocorre com o Fundo de Garantia do Tempo de Serviço (FGTS), sendo carreada para um fundo único, do qual sairão os valores necessários para o pagamento dos benefícios.⁹

Além do caráter contributivo e do equilíbrio financeiro e atuarial, o art. 201 da CF/88 estabelece ainda a **filiação obrigatória** e a organização sob a forma de **regime geral** como características do sistema previdenciário brasileiro.

Ser organizado sob a forma de regime geral significa que, excetuadas as situações previstas na própria Constituição, os trabalhadores deverão integrar um mesmo regime de previdência. Não poderá haver, por exemplo, um regime previdenciário para os trabalhadores rurais e outro regime previdenciário para os trabalhadores urbanos; ou ainda um regime para os homens e outro para as mulheres.

Assim, foi estabelecido no Brasil o **Regime Geral de Previdência Social (RGPS)**, cujas políticas são elaboradas atualmente pelo Ministério do Trabalho e Previdência Social (MTPS) e executadas pelo Instituto Nacional do Seguro Social (INSS), que é uma autarquia federal, vinculada ao MTPS.

Com relação à obrigatoriedade de filiação, tal característica será comentada no tópico a seguir, dedicado a uma sucinta análise do RGPS.

3.3 O Regime Geral de Previdência Social - RGPS

O RGPS está disciplinado pelo art. 9º da Lei nº 8.213/91 e pelo art. 6º do Regulamento da Previdência Social (RPS), aprovado pelo Decreto nº 3.048/99.

Não obstante sua denominação de regime geral, o RGPS não é o único regime previdenciário existente no âmbito da previdência social brasileira, havendo, ainda, os regimes próprios de previdência social dos servidores públicos e militares¹⁰, e o regime de previdência complementar¹¹ (de caráter facultativo), cujo estudo foge ao escopo do presente trabalho.

⁹Caso a Previdência Social brasileira adotasse o regime de capitalização, cada trabalhador teria uma conta individualizada junto à Previdência, cujo saldo estaria sujeito a um rendimento, como ocorre com o FGTS. Entretanto, os benefícios a que o trabalhador ou seus dependentes viessem a fazer jus possivelmente ficariam limitados ao saldo dessa conta, o que, em muitos casos, poderia ser algo desfavorável ao segurado e seus dependentes. Além disso, é preciso ter em conta que, nesse caso, o rendimento oferecido não deveria ser muito diferente do rendimento atual do FGTS, que é de 3% ao ano mais a taxa referencial (TR), algo próximo à metade do rendimento oferecido pela caderneta de poupança e que sequer tem sido suficiente para repor as perdas com a inflação.

¹⁰Ver arts. 40, 42 e 142 da Constituição Federal, Lei nº 6.880/80 (Estatuto dos Militares das Forças Armadas), Lei nº 9.717/98 (dispõe sobre as regras para o funcionamento dos regimes próprios de previdência social dos servidores públicos da União, dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios, dos militares dos Estados e do Distrito Federal) e Lei nº 8.112/91 (dispõe sobre o regime jurídico dos servidores públicos civis da União, das autarquias e das fundações públicas federais).

¹¹Ver art. 40, §§ 14 a 16, e art. 202 da Constituição Federal e Lei Complementar nº 109/2001.

Como já comentado anteriormente, uma das principais características do RGPS é a filiação obrigatória. Assim, por exemplo, um trabalhador assalariado que estiver sujeito ao RGPS, não poderá optar por não se filiar a esse regime. No dia em que for contratado, esse trabalhador passa a ser filiado ao RGPS. Ou, em outras palavras, no momento em que assina um contrato de trabalho, o trabalhador passa a ter uma relação jurídica não apenas com seu empregador, mas também com a Previdência Social, passando a estar vinculado, obrigatória e automaticamente, ao RGPS.

A obrigatoriedade de filiação, entretanto, aplica-se apenas a quem exerce atividade mediante remuneração, não sendo obrigados à filiação, por exemplo, as donas de casa e os estudantes que não exerçam atividades remuneradas, sendo até mesmo vedada a filiação a quem tem menos de 16 anos de idade.

Portanto, todo trabalhador com carteira de trabalho assinada é automaticamente filiado à Previdência Social e sua inscrição junto ao INSS é realizada pela empresa contratante, a qual também é responsável por descontar do salário do trabalhador a contribuição previdenciária deste e recolhê-la mensalmente aos cofres da Previdência Social, junto com a contribuição da empresa (contribuição patronal).

Quem trabalha por conta própria também está filiado ao RGPS, pelo simples fato de exercer atividade remunerada. Entretanto, em regra, quando não presta serviços para empresas, o autônomo (hoje denominado de contribuinte individual) é o próprio responsável pela sua inscrição junto ao INSS e também por pagar sua contribuição mensal. Ele deve se inscrever e contribuir mensalmente para ter acesso aos benefícios previdenciários.

Mesmo aqueles que não têm renda própria, como as donas de casa e os estudantes, a partir dos 16 anos de idade, podem se inscrever na Previdência Social, como *segurado facultativo*, categoria de segurado que será vista com mais detalhe adiante.

Chama atenção acima a utilização dos termos *filiação* e *inscrição*, cuja distinção se faz necessária. Segundo a lição do professor Fábio Zambitte¹², *filiação* é o vínculo jurídico que se estabelece, automaticamente, entre o segurado e o RGPS, pelo mero exercício de atividade remunerada abrangida pelo referido regime previdenciário. Excepcionalmente, a filiação pode ser de natureza voluntária, o que ocorre para o segurado facultativo, quando este vem efetuar o seu primeiro recolhimento após a feitura de sua inscrição. Portanto, a filiação à Previdência Social decorre automaticamente do exercício de atividade remunerada para os segurados obrigatórios e da inscrição formalizada com o pagamento da primeira contribuição para o segurado facultativo. Já a *inscrição* é ato formal que identifica o segurado na Previdência Social. Ou seja, é o ato pelo qual o segurado é cadastrado no Regime Geral de Previdência Social, mediante comprovação dos dados pessoais e de outros elementos necessários e úteis à sua caracterização, conforme redação do art. 18

¹²IBRAHIM, Fábio Zambitte. Op. cit., p. 172.

do Regulamento da Previdência Social, aprovado pelo Decreto 3.048/99. A inscrição do segurado empregado e a do trabalhador avulso deve ser realizada pela empresa, sindicato ou órgão gestor de mão de obra. Para os demais segurados (empregado doméstico, contribuinte individual, segurado especial e segurado facultativo), a inscrição deve ser realizada diretamente por estes, podendo ser realizada no INSS, comparecendo a uma de suas agências, pela internet ou pela central de atendimento telefônico da Previdência Social, o Prevfone.

3.4 Segurados do RGPS

Pode-se, preliminarmente, dividir os segurados do RGPS em dois grupos: segurados *obrigatórios* e segurados *facultativos*.

A legislação previdenciária subdivide os segurados obrigatórios em cinco categorias:

- Empregado;
- Empregado doméstico;
- Contribuinte individual;
- Trabalhador avulso;
- Segurado especial.

São considerados pertencentes à categoria de empregado basicamente os trabalhadores que prestam serviço a empresas, em caráter não-eventual, com subordinação e mediante remuneração. Entretanto, o conceito de segurado empregado para a legislação previdenciária é bastante abrangente, incluindo, dentre outros, o servidor público ocupante de cargo em comissão, sem vínculo efetivo com a União, autarquias e fundações públicas federais e o exercente de mandato eletivo federal, estadual ou municipal, desde que não vinculado a regime próprio de previdência social, conforme art. 12, inciso I, da Lei 8.212/91.

Na categoria de empregado doméstico estão os trabalhadores que prestam serviço na casa de outra pessoa ou família, desde que essa atividade não tenha fins lucrativos para o empregador. São comumente enquadrados nesta categoria os seguintes trabalhadores: governanta, jardineiro, motorista particular, caseiro, doméstica, dentre outros.

Estão na categoria de contribuinte individual as pessoas que trabalham por conta própria (conhecidos como autônomos) e os trabalhadores que prestam serviços de natureza eventual a empresas, sem vínculo empregatício. Costumam figurar como contribuintes individuais, dentre outros, os seguintes profissionais: motoristas de táxi, vendedores

ambulantes, diaristas, pedreiros, marceneiros, síndicos de condomínio remunerados, além de advogados, médicos, dentistas, arquitetos e outros profissionais liberais.

Trabalhador avulso é aquele que, sindicalizado ou não, presta serviços de natureza urbana ou rural, sem vínculo empregatício, a diversas empresas, com a intermediação obrigatória do sindicato da categoria ou, quando se tratar de atividade portuária, do órgão gestor de mão de obra (OGMO). São trabalhadores que exercem atividades portuárias como capatazia, estiva, operação de guindastes, conferência de carga, vigilância de embarcação. Outras atividades frequentemente realizadas por trabalhadores avulsos são: ensacamento de café, cacau e similares e extração de sal.

Segurado especial é a categoria em que se enquadram os trabalhadores rurais que produzem em regime de economia familiar, sem utilização de mão de obra assalariada. Estão incluídos nesta categoria cônjuges, companheiros e filhos maiores de 16 anos que trabalham com a família em atividade rural. Também são considerados segurados especiais o pescador artesanal e o índio que exerce atividade rural e seus familiares.

A categoria do segurado facultativo, segundo Kertzman, *"foi criada para atender ao preceito constitucional da universalidade na cobertura e no atendimento, já que, em tese, ninguém poderia ser excluído do sistema de proteção previdenciária"*.¹³

Podem-se enquadrar como segurados facultativos, a partir dos 16 anos¹⁴, as pessoas que não exerçam atividade remunerada que lhes enquadre como segurados obrigatórios, mas decidam contribuir para a Previdência Social, como, por exemplo, donas de casa, estudantes, desempregados, síndicos de condomínio (desde que não-remunerados), presidiários não-remunerados, bolsistas e estagiários que prestem serviços de acordo com a Lei nº 11.788/2008. Também podem figurar nesta categoria os bolsistas que se dediquem em tempo integral à pesquisa, curso de especialização, pós-graduação, mestrado ou doutorado, no Brasil ou no exterior, desde que não esteja vinculado a qualquer regime de previdência social. Todavia, não é permitida a filiação ao RGPS, como segurado facultativo, de pessoa já filiada a regime próprio da previdência¹⁵, conforme preceitua o parágrafo 5º do art. 201 da Constituição Federal.

Importante destacar que, ao se denominar o trabalhador filiado ao RGPS de "segurado", fica evidenciado o caráter atuarial da previdência social brasileira. Assim, se alguém se torna segurado da Previdência Social, isso significa que essa pessoa adquiriu um seguro, para proteção sua e dos seus dependentes, contra alguns eventos que possam

¹³KERTZMAN, Ivan. Op. cit., p. 125.

¹⁴Embora as Leis 8.212/91 (art. 14) e 8.213/91 (art. 13) ainda se refiram à idade de 14 anos como idade mínima para o segurado facultativo, essa idade foi alterada pela nova redação do art. 7º, inciso XXXIII, da CF/88, que passou a proibir qualquer trabalho a menores de 16 anos, salvo na condição de aprendiz, a partir dos 14 anos.

¹⁵Um servidor federal efetivo, por exemplo, que já é vinculado ao regime próprio dos servidores públicos civis da União, das autarquias e das fundações públicas federais, de que trata a Lei 8.112/90.

incapacitá-la para o trabalho, tais como morte, doenças, senilidade, prisão etc., conforme esclarece o Ministério do Trabalho e Previdência Social (MTPS), a seguir ¹⁶:

- *O que é Previdência Social?*

A Previdência Social é um seguro que garante a renda do contribuinte e de sua família, em casos de doença, acidente, gravidez, prisão, morte e velhice. Oferece vários benefícios que juntos garantem tranquilidade quanto ao presente e em relação ao futuro, garantindo um rendimento seguro. Para ter essa proteção, é necessário se inscrever e contribuir todos os meses.

- *Para que serve a Previdência Social?*

Para substituir a renda do segurado-contribuinte, quando da perda de sua capacidade de trabalho.

- *Quando o trabalhador perde a sua capacidade de trabalho?*

Quando é atingido por um dos chamados riscos sociais: doença, invalidez, idade avançada, morte e desemprego involuntário. Além destes, há também a maternidade e a reclusão.

3.5 Benefícios do RGPS

Uma vez que são diversas as situações que possam incapacitar, momentânea ou permanentemente, uma pessoa para o exercício de suas atividades laborais, assim também são diversos os benefícios oferecidos pela Previdência Social, a fim de que existam coberturas específicas para cada situação, conforme o rol de benefícios a seguir:

- Aposentadoria por idade
- Aposentadoria por invalidez
- Aposentadoria por tempo de contribuição
- Aposentadoria especial
- Auxílio-doença
- Auxílio acidente
- Auxílio reclusão

¹⁶Disponível em: <http://www.mtps.gov.br/perguntas-frequentes?catid=20>. Acesso em: 10/12/2016.

- Pensão por morte
- Salário-maternidade
- Salário-família

Analisando o rol de benefícios acima, percebe-se que nem sempre o benefício atende a uma situação em que o segurado esteja de fato incapacitado para o trabalho, havendo apenas uma presunção de tal incapacidade, como no caso das aposentadorias por idade, por tempo de contribuição e especial. Do mesmo modo, o salário-família não atende a nenhuma situação em que o segurado esteja incapacitado para o trabalho, nem de forma presumida; trata-se apenas de um benefício destinado a auxiliar o segurado no sustento dos seus filhos, embora o valor atual desse benefício seja irrisório, conforme veremos adiante.

Vejam, resumidamente, de que se trata cada um dos benefícios oferecidos pela Previdência Social.

- Aposentadoria por idade

É o benefício concedido ao segurado da Previdência Social que atingir a idade considerada de risco social. Têm direito ao benefício os trabalhadores urbanos do sexo masculino a partir dos 65 anos e do sexo feminino a partir dos 60 anos de idade. Os trabalhadores rurais podem pedir aposentadoria por idade com cinco anos a menos: a partir dos 60 anos, homens, e a partir dos 55 anos, mulheres, sendo ainda necessário o cumprimento da chamada “carência”, que corresponde ao número mínimo de contribuições mensais indispensáveis para que o segurado faça jus ao benefício. Os trabalhadores urbanos precisam comprovar, no mínimo, 180 contribuições mensais e os trabalhadores rurais têm de provar, com documentos, pelo menos 180 meses de atividade rural.

- Aposentadoria por invalidez

Benefício concedido aos trabalhadores que, por doença ou acidente, forem considerados pela perícia médica da Previdência Social incapacitados para exercer suas atividades ou outro tipo de serviço que lhes garanta o sustento. Não tem direito à aposentadoria por invalidez quem, ao se filiar à Previdência Social, já tiver doença ou lesão que geraria o benefício, a não ser quando a incapacidade resultar no agravamento da enfermidade. Quem recebe aposentadoria por invalidez tem que passar por perícia médica de dois em dois anos, se não, o benefício é suspenso. A aposentadoria deixa de ser paga quando o segurado recupera a capacidade e volta ao trabalho. Para ter direito ao benefício, o trabalhador tem que contribuir para a

Previdência Social por no mínimo 12 meses, no caso de doença. Se for acidente, esse prazo de carência não é exigido, mas é preciso estar inscrito na Previdência Social.

- Aposentadoria por tempo de contribuição

A aposentadoria por tempo de contribuição pode ser integral ou proporcional. Para ter direito à aposentadoria integral, o trabalhador homem deve comprovar pelo menos 35 anos de contribuição e a trabalhadora, 30 anos. Para requerer a aposentadoria proporcional, o trabalhador tem que combinar dois requisitos: tempo de contribuição e idade mínima. Em regra, os homens podem requerer aposentadoria proporcional aos 53 anos de idade e 30 anos de contribuição e as mulheres têm direito à aposentadoria proporcional aos 48 anos de idade e 25 de contribuição. Para ter direito à aposentadoria integral ou proporcional, é necessário também o cumprimento do período de carência, que é de 180 contribuições mensais.

- Aposentadoria especial

Benefício concedido ao segurado que tenha trabalhado em condições prejudiciais à saúde ou à integridade física. Para ter direito à aposentadoria especial, o trabalhador deverá comprovar, além do tempo de trabalho, efetiva exposição aos agentes nocivos químicos, físicos, biológicos ou associação de agentes prejudiciais pelo período exigido para a concessão do benefício (15, 20 ou 25 anos). Além disso, a exposição aos agentes nocivos deverá ter ocorrido de modo habitual e permanente, não ocasional nem intermitente. Para ter direito à aposentadoria especial, é necessário também o cumprimento de carência, correspondente a 180 contribuições mensais.

- Auxílio-doença

É o benefício concedido ao segurado impedido de trabalhar por doença ou acidente por mais de 15 dias consecutivos. No caso dos trabalhadores com carteira assinada, os primeiros 15 dias são pagos pelo empregador, exceto o doméstico, e a Previdência Social paga a partir do 16º dia de afastamento do trabalho. Para os demais segurados inclusive o doméstico, a Previdência paga o auxílio desde o início da incapacidade e enquanto a mesma perdurar. Em ambos os casos, deverá ter ocorrido o requerimento do benefício. Para concessão de auxílio-doença é necessária a comprovação da incapacidade em exame realizado pela perícia médica da Previdência Social. Para ter direito ao benefício, o trabalhador tem de contribuir para a Previdência Social por, no mínimo, 12 meses (carência). Esse prazo não será exigido em

caso de acidente de qualquer natureza (por acidente de trabalho ou fora do trabalho) ou de doença profissional ou do trabalho.

- Auxílio-acidente

É o benefício pago ao trabalhador que sofre um acidente e fica com sequelas que reduzem sua capacidade de trabalho. É concedido para segurados que recebiam auxílio-doença. Têm direito ao auxílio-acidente o trabalhador empregado, o trabalhador avulso e o segurador especial. O empregado doméstico, o contribuinte individual e o facultativo não recebem o benefício. Para concessão do auxílio-acidente não é exigido tempo mínimo de contribuição, mas o trabalhador deve ter qualidade de segurado e comprovar a impossibilidade de continuar desempenhando suas atividades, por meio de exame da perícia médica da Previdência Social. O auxílio-acidente, por ter caráter de indenização, pode ser acumulado com outros benefícios pagos pela Previdência Social, exceto aposentadoria. O benefício deixa de ser pago quando o trabalhador se aposenta.

- Auxílio-reclusão

É um benefício devido aos dependentes do segurado recolhido à prisão, durante o período em que estiver preso sob regime fechado ou semiaberto. Não cabe concessão de auxílio-reclusão aos dependentes do segurado que estiver em livramento condicional ou cumprindo pena em regime aberto.

- Pensão por morte

Benefício pago à família do trabalhador quando ele morre. Para concessão de pensão por morte, não há tempo mínimo de contribuição (carência), mas é necessário que o óbito tenha ocorrido enquanto o trabalhador tinha qualidade de segurado. Se o óbito ocorrer após a perda da qualidade de segurado, os dependentes terão direito a pensão desde que o trabalhador tenha cumprido, até o dia da morte, os requisitos para obtenção de aposentadoria pela Previdência Social ou que fique reconhecido o direito à aposentadoria por invalidez, dentro do período de manutenção da qualidade do segurado, caso em que a incapacidade deverá ser verificada por meio de parecer da perícia médica do INSS com base em atestados ou relatórios médicos, exames complementares, prontuários ou documentos equivalentes.

- Salário-Família

Benefício pago aos segurados empregados, exceto os domésticos, e aos trabalhadores avulsos com salário mensal de até R\$ 1.212,64, para auxiliar no sustento dos filhos de até 14 anos de idade ou inválidos de qualquer idade. Para a concessão do salário-família, a Previdência Social não exige tempo mínimo de contribuição (carência). De acordo com a Portaria Interministerial MTPS-MF nº 01, de 08 de janeiro de 2016, o valor da cota do salário-família por filho de até 14 anos (incompletos), ou filho inválido de qualquer idade, a partir de 01/01/2016, é de:

- R\$ 41,37 para o segurado com remuneração mensal não superior a R\$ 806,80;
- R\$ 29,16 para o segurado com remuneração mensal superior a R\$ 806,80 e igual ou inferior a R\$ 1.212,64.

- Salário-maternidade

O salário-maternidade é devido às seguradas empregadas, trabalhadoras avulsas, empregadas domésticas, contribuintes individuais, facultativas e seguradas especiais, por ocasião do parto, inclusive de natimorto, aborto não criminoso, adoção ou guarda judicial para fins de adoção. Considera-se parto o nascimento ocorrido a partir da 23^a semana de gestação, inclusive em caso de natimorto.

Oportuno trazer esclarecimentos também acerca do Benefício de Prestação Continuada da Lei Orgânica da Assistência Social (BPC/LOAS), que garante um salário mínimo mensal ao idoso acima de 65 anos ou à pessoa com deficiência física, mental, intelectual ou sensorial de longo prazo, que o impossibilite de participar de forma plena e efetiva na sociedade, em igualdade de condições com as demais pessoas. É importante dizer que esse benefício não é um benefício previdenciário, como muitos acreditam, mas sim um benefício da Assistência Social, integrante do Sistema Único da Assistência Social – SUAS, pago pelo governo federal.

Geralmente a confusão ocorre porque o reconhecimento do direito é operacionalizado pelo INSS, que, como já dissemos, é uma autarquia federal vinculada ao Ministério do Trabalho e Previdência Social. Apesar disso, o BPC/LOAS não é um benefício previdenciário, mas assistencial, uma vez que não é necessário contribuir para se ter direito a esse benefício. Por outro lado, o BPC/LOAS não dá direito a 13^o salário nem dá origem a pensão por morte.

Para fazer jus ao BPC/LOAS, o idoso deve comprovar que possui 65 anos de idade ou mais, que não recebe nenhum benefício previdenciário, ou de outro regime de previdência e que a renda mensal familiar *per capita* seja inferior 1/4 do salário mínimo vigente. Já a pessoa com deficiência deverá comprovar que a renda mensal *per capita* do grupo familiar seja inferior a 1/4 do salário mínimo, devendo também ser avaliado se a

sua deficiência o incapacita para a vida independente e para o trabalho, e esta avaliação é realizada pelo Serviço Social e pela Perícia Médica do INSS.

Tendo vista não ser objetivo do presente trabalho o aprofundamento dos temas relativos à Previdência Social, faremos a seguir uma breve análise apenas das regras atuais para a concessão da aposentadoria por tempo de contribuição pelo INSS, por ser um dos benefícios de maior interesse dos segurados e mais alinhados aos objetivos do presente trabalho.

3.5.1 A Aposentadoria por Tempo de Contribuição

As regras atuais da Previdência Social relativas à aposentadoria por tempo de contribuição foram introduzidas pela Lei 13.183, de 04/11/2015, que alterou as Leis 8.212/91 e 8.213/91. Para obtenção desse benefício, o trabalhador precisa ter 30 anos de contribuição, se mulher, ou 35 anos de contribuição, se homem¹⁷. O valor do benefício é calculado a partir da média aritmética simples do 80% maiores salários-de-contribuição, a partir de julho de 1994, corrigidos pela inflação. O resultado dessa conta é o que seria o valor da aposentadoria *integral*. Sobre esse resultado, entretanto, é aplicado o *fator previdenciário*, do qual trataremos mais detalhadamente adiante.

Todavia, o trabalhador pode afastar a aplicação do fator previdenciário, caso a soma da sua idade com o tempo de contribuição atinja 85 pontos¹⁸ (o mesmo que 85 anos), se mulher, ou 95 pontos (95 anos), se homem, regra que é conhecida como *regra 85/95 progressiva*. Atingindo tal pontuação, o segurado poderá obter sua aposentadoria no valor integral¹⁹, conforme a média resultante do cálculo referido acima. Conforme informa o portal da Previdência Social, "*a regra 85/95 é uma nova forma de cálculo do valor da aposentadoria, permitindo que não seja aplicado o fator previdenciário para quem atingir os pontos previstos na legislação*".²⁰

A progressividade da regra 85/95 decorre do fato de que a pontuação 85/95 vigorará até 30 de dezembro 2018. A partir de 31 de dezembro de 2018, para afastar o uso do fator previdenciário, a soma da idade com o tempo de contribuição terá de ser, no mínimo, igual a 86 anos, se mulher, e 96 anos, se homem. A partir de 31 de dezembro de 2020, essa soma terá de resultar em, no mínimo, 87 anos, se mulher, e 97 anos, se homem, e assim sucessivamente, até 2026, quando a soma para as mulheres deverá ser de, no mínimo, 90 anos, e para os homens, 100 anos, conforme a tabela a seguir:

¹⁷No caso dos professores da educação infantil, do ensino fundamental ou do ensino médio, a exigência é de 25 anos para as mulheres e 30 anos para os homens.

¹⁸Cada ano equivale a 1 ponto; cada mês completo equivale a 1/12 ponto.

¹⁹Valor "integral" aqui significa valor igual ao da média aritmética simples do 80% maiores salários-de-contribuição, a partir de julho de 1994, corrigidos pela inflação.

²⁰Disponível em: <<http://www.previdencia.gov.br/2015/06/servico-novas-regras-para-aposentadoria-por-tempo-de-contribuicao-ja-estao-em-vigor>>. Acesso em: 26/12/2016.

Período	Pontuação Exigida	
	Homem	Mulher
Até 30/12/2018	85	95
De 31/12/2018 a 30/12/2020	86	96
De 31/12/2020 a 30/12/2022	87	97
De 31/12/2022 a 30/12/2024	88	98
De 31/12/2024 a 30/12/2026	89	99
De 31/12/2026 em diante	90	100

Tabela 3.1: Regra 85/95 progressiva.
(Fonte: Lei 8.213/91, art. 29-C)

Portanto, podemos resumir as regras para a aposentadoria por tempo de contribuição, no âmbito da Previdência Social, da seguinte forma:

Regra 85/95 progressiva:

- Não há exigência de idade mínima;
- Soma da idade com o tempo de contribuição:
 - 85 anos (mulher), com pelo menos 30 anos de contribuição;
 - 95 anos (homem), com pelo menos 35 anos de contribuição;
- Cálculo do valor do benefício sem incidência do fator previdenciário.

Regra dos 30/35 anos de contribuição:

- Não há exigência idade mínima;
- Tempo total de contribuição:
 - 35 anos de contribuição (homem)
 - 30 anos de contribuição (mulher)
- Cálculo do valor do benefício com incidência do fator previdenciário.

Para melhor entendermos a aplicação das regras 30/35 e 85/95, analisemos a seguir alguns casos hipotéticos:

- a) Segurada com 30 anos de contribuição e 50 anos de idade.

A soma da idade com o tempo de contribuição resulta em 80 pontos, abaixo dos 85 pontos exigidos das mulheres pela regra 85/95. Ainda assim, a segurada poderá aposentar-se por tempo de contribuição, uma vez que cumpriu o mínimo de 30 anos de contribuição

exigidos, mas só poderá fazê-lo pela regra dos 30/35 anos, com aplicação obrigatória do fator previdenciário.

b) Segurada com 26 anos de contribuição e 59 anos de idade.

Nesse caso, a soma da idade com o tempo de contribuição resulta em 85 pontos. Porém, como não foi cumprido o requisito mínimo de 30 anos de contribuição, a segurada ainda não tem direito à aposentadoria.

c) Segurada com 30 anos de contribuição e 55 anos de idade.

A soma do tempo de contribuição com a idade da segurada resulta em 85 pontos e a segurada cumpriu o mínimo de 30 anos de contribuição exigidos. Logo, ela poderá aposentar-se por tempo de contribuição, tanto pela regra dos 30/35 anos de contribuição, com a aplicação obrigatória do fator previdenciário, quanto pela regra 85/95, sem a aplicação do fator, neste último caso.

d) Segurado com 35 anos de contribuição e 55 anos de idade.

Nesse caso, a soma resulta em 90 pontos, estando abaixo dos 95 pontos exigidos dos homens para aplicação da regra 85/95. Assim, o referido segurado poderá aposentar-se por tempo de contribuição, haja vista que cumpriu o requisito mínimo de 35 anos de contribuição, mas só poderá fazê-lo pela regra dos 30/35 anos, com aplicação obrigatória do fator previdenciário.

e) Segurado com 32 anos de contribuição e 63 anos de idade.

A soma da idade com o tempo de contribuição resulta em 95 pontos, porém como não foi cumprido os 35 anos de contribuição exigidos no caso dos homens, o segurado ainda não tem direito à aposentadoria por tempo de contribuição.

f) Segurado com 35 anos e seis meses de contribuição e 59 anos e seis meses de idade.

A soma do tempo de contribuição com a idade do segurado resulta em 95 pontos (35,5 + 59,5). Assim, o segurado poderá aposentar-se por tempo de contribuição, uma vez que cumpriu a exigência dos 35 anos de contribuição e, nesse caso, tanto poderá ser utilizada a regra dos 30/35 anos, com incidência obrigatória do fator previdenciário, quanto a regra 85/95, afastando a aplicação do referido fator.

A regra 85/95 na aposentadoria do professor

Os professores têm regras diferenciadas para a aposentadoria, sendo exigido para as mulheres 25 anos de contribuição e, para os homens, 30 anos de contribuição. Assim, também a aplicação da regra 85/95 apresenta especificidades, no caso do professor.

Conforme a Lei nº 8.213/91, art. 29-C, §3º ²¹, o professor terá cinco pontos somados ao tempo mínimo de contribuição (que é de 30 anos para o homem professor, e de 25 anos para a professora), desde que comprovem exclusivamente tempo de efetivo exercício de magistério na educação infantil, no ensino fundamental ou no ensino médio.

Ou seja, para a mulher que comprove 25 anos de tempo de contribuição como professora da educação básica, serão acrescidos mais 5 pontos no total da soma da idade com o tempo de contribuição, buscando atingir os 85 pontos exigidos no caso das mulheres. Já para o homem que comprovar 30 anos de contribuição como professor da educação básica, também serão acrescidos mais 5 pontos à soma da idade com o tempo de contribuição, buscando atingir os 95 pontos exigidos no caso do homens.

Tal acréscimo serve para ajustar a redução do tempo de contribuição prevista para o professor às exigências da regra 85/95.

Vejam, aqui também, algumas situações hipotéticas com a aplicação das regras 30/35 e 85/95, no caso dos professores que atuem na educação infantil, no ensino fundamental e ou no ensino médio:

a) Professora com 25 anos de contribuição e 50 anos de idade.

Nesse caso, com o acréscimo dos 5 pontos previstos em lei, a soma resulta em 80 pontos, ainda abaixo do exigido para as mulheres para aplicação da regra 85/95. Sendo assim, a segurada poderá aposentar-se por tempo de contribuição, haja vista que cumpriu os 25 anos de contribuição exigidos, porém só poderá fazê-lo pela regra dos 30/35 anos de contribuição, com a aplicação obrigatória do fator previdenciário.

b) Professora com 21 anos de contribuição e 59 anos de idade.

²¹Art. 29-C. O segurado que preencher o requisito para a aposentadoria por tempo de contribuição poderá optar pela não incidência do fator previdenciário no cálculo de sua aposentadoria, quando o total resultante da soma de sua idade e de seu tempo de contribuição, incluídas as frações, na data de requerimento da aposentadoria, for:

I - igual ou superior a noventa e cinco pontos, se homem, observando o tempo mínimo de contribuição de trinta e cinco anos; ou

II - igual ou superior a oitenta e cinco pontos, se mulher, observado o tempo mínimo de contribuição de trinta anos.

§ 1º Para os fins do disposto no caput, serão somadas as frações em meses completos de tempo de contribuição e idade.

§ 2º As somas de idade e de tempo de contribuição previstas no caput serão majoradas em um ponto em:

I - 31 de dezembro de 2018;

II - 31 de dezembro de 2020;

III - 31 de dezembro de 2022;

IV - 31 de dezembro de 2024; e

V - 31 de dezembro de 2026.

§ 3º Para efeito de aplicação do disposto no caput e no § 2º, o tempo mínimo de contribuição do professor e da professora que comprovarem exclusivamente tempo de efetivo exercício de magistério na educação infantil e no ensino fundamental e médio será de, respectivamente, trinta e vinte e cinco anos, e serão acrescidos cinco pontos à soma da idade com o tempo de contribuição.

Com o acréscimo dos 5 pontos, a soma da idade com tempo de contribuição resulta em 85 pontos. Porém, como não foi cumprido o requisito mínimo de 30 anos de contribuição, a segurada ainda não tem direito à aposentadoria.

c) Professora com 25 anos de contribuição e 55 anos de idade.

A soma do tempo de contribuição com a idade da segurada, acrescidos os 5 pontos extras, resulta em 85 pontos, atingindo a pontuação mínima exigida para aplicação da regra 85/95, no caso das mulheres. Assim a segurada poderá aposentar-se por tempo de contribuição, haja vista que cumpriu o mínimo de 25 anos de contribuição previsto para as professoras, tanto pela regra dos 30/35 anos de contribuição, com aplicação obrigatória do fator previdenciário, quanto pela regra 85/95, afastando a aplicação do fator, neste último caso.

d) Professor com 30 anos de contribuição e 55 anos de idade.

Com o acréscimo dos 5 pontos extras, obtém-se 90 pontos, ainda abaixo dos 95 pontos exigidos dos homens para aplicação da regra 85/95. Ainda assim, o segurado poderá aposentar-se por tempo de contribuição, uma vez que cumpriu o mínimo de 30 anos de contribuição exigidos no seu caso, porém deverá ser aplicado o fator previdenciário.

e) Professor com 27 anos de contribuição e 63 anos de idade.

Nesse caso, a soma da idade com o tempo de contribuição, acrescida dos 5 pontos extras, resulta em 95 pontos. Porém, como não foi cumprido o requisito de ter pelo menos 30 anos de contribuição, o professor ainda não tem direito à aposentadoria por tempo de contribuição.

f) Professor com 30 anos e dois meses de contribuição e 60 anos e quatro meses de idade.

Com o acréscimo dos 5 pontos previstos pela legislação previdenciária, a soma do tempo de contribuição com a idade do segurado resulta em 95,5 pontos (equivalentes a 95 anos e seis meses). Assim, o segurado tanto poderá aposentar-se pela regra dos 30/35 anos de contribuição, com aplicação obrigatória do fator previdenciário, quanto pela regra 85/95, afastando a aplicação do fator, neste último caso.

3.6 O Fator Previdenciário

Criado em 1999, pela Lei nº 9.876, o fator previdenciário (FP) é um multiplicador, utilizado no cálculo das aposentadorias por tempo de contribuição, que resulta de uma fórmula que combina a idade do segurado, seu tempo de contribuição e sua expectativa de sobrevida (esta com base em dados divulgados pelo IBGE), conforme a seguir:

$$f = \frac{T_c \cdot a}{E_s} \cdot \left[1 + \frac{(I_d + T_c \cdot a)}{100} \right]$$

Sendo:

f = fator previdenciário;

E_s = expectativa de sobrevida no momento da aposentadoria²²;

T_c = tempo de contribuição até o momento da aposentadoria;

I_d = idade no momento da aposentadoria;

a = alíquota de contribuição, correspondente a 0,31.²³

No cálculo do fator previdenciário, para a determinação da expectativa de sobrevida (E_s), é utilizada a Tábua de Mortalidade do IBGE. O INSS utiliza os índices relativos a ambos os sexos para o cálculo. A expectativa de sobrevida é expressa com uma casa decimal, conforme metodologia adotada pelo INSS.

Outra observação importante a ser feita é que na aplicação do fator previdenciário serão somados ao tempo de contribuição do segurado²⁴:

- cinco anos, quando se tratar de mulher;
- cinco anos, quando se tratar de professor que comprove exclusivamente tempo de efetivo exercício das funções de magistério na educação infantil, no ensino fundamental ou no ensino médio;
- dez anos, quando se tratar de professora que comprove exclusivamente tempo de efetivo exercício das funções de magistério na educação infantil, no ensino fundamental ou no ensino médio.

Conforme informado no *site* da Previdência Social, *"o fator previdenciário é utilizado somente no cálculo do valor da aposentadoria por tempo de contribuição. Na aposentadoria por invalidez não há utilização do fator, e, na aposentadoria por idade, a fórmula é utilizada opcionalmente, apenas quando contribui para aumentar o valor do benefício"*²⁵.

O cálculo atual (2016) do fator previdenciário tem por resultado um número que, na maioria dos casos, ficará entre 0,191 e 2,140, inclusive, conforme tabela a seguir.

Toda vez que o valor encontrado para o FP é menor que 1,0, isso significa que o segurado terá uma redução no valor da aposentadoria que receberia caso não fosse aplicado

²²Utiliza-se, nesse caso, a tabela de expectativa de sobrevida para *ambos os sexos*, conforme divulgado pelo IBGE.

²³Essa alíquota resulta da soma da alíquota de 11% do segurado com a alíquota patronal de 20%.

²⁴Cf. Lei 8.313/91, art. 29, §9º.

²⁵Disponível em: <http://www.previdencia.gov.br/2015/12/aposentadoria-fator-previdenciario-e-alterado-pela-tabua-de-mortalidade-do-ibge/>. Acesso em: 26/12/2016

FATOR PREVIDENCIÁRIO 2016 (TABELA IBGE 2014)														
		IDADE NO MOMENTO DA APOSENTADORIA												
Expectativa de sobrevida	36,0	35,2	34,3	33,4	32,5	31,7	30,8	30,0	29,1	28,3	27,5	26,7	25,9	
	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	
TEMPO DE CONTRIBUIÇÃO	15	0,191	0,196	0,203	0,210	0,217	0,224	0,232	0,240	0,249	0,257	0,267	0,276	0,287
	16	0,204	0,210	0,217	0,224	0,232	0,239	0,248	0,256	0,266	0,275	0,285	0,295	0,306
	17	0,217	0,223	0,231	0,239	0,247	0,255	0,264	0,273	0,283	0,293	0,303	0,314	0,326
	18	0,230	0,237	0,245	0,253	0,262	0,270	0,280	0,289	0,300	0,311	0,322	0,334	0,346
	19	0,244	0,251	0,259	0,268	0,277	0,286	0,296	0,306	0,318	0,329	0,340	0,353	0,366
	20	0,257	0,265	0,273	0,283	0,292	0,302	0,312	0,323	0,335	0,347	0,359	0,372	0,386
	21	0,270	0,278	0,288	0,297	0,307	0,317	0,329	0,340	0,352	0,365	0,378	0,391	0,406
	22	0,284	0,292	0,302	0,312	0,323	0,333	0,345	0,357	0,370	0,383	0,396	0,411	0,426
	23	0,297	0,306	0,316	0,327	0,338	0,349	0,361	0,373	0,387	0,401	0,415	0,430	0,446
	24	0,311	0,320	0,331	0,342	0,354	0,365	0,378	0,390	0,405	0,419	0,434	0,450	0,467
	25	0,325	0,334	0,345	0,357	0,369	0,381	0,394	0,408	0,423	0,437	0,453	0,469	0,487
	26	0,338	0,348	0,360	0,372	0,385	0,397	0,411	0,425	0,441	0,456	0,472	0,489	0,507
	27	0,352	0,362	0,374	0,387	0,400	0,413	0,428	0,442	0,458	0,474	0,491	0,509	0,528
	28	0,366	0,376	0,389	0,402	0,416	0,429	0,444	0,459	0,476	0,493	0,510	0,529	0,549
	29	0,380	0,391	0,404	0,417	0,431	0,445	0,461	0,476	0,494	0,511	0,530	0,549	0,569
	30	0,393	0,405	0,418	0,432	0,447	0,461	0,478	0,494	0,512	0,530	0,549	0,569	0,590
	31	0,407	0,419	0,433	0,448	0,463	0,478	0,495	0,511	0,530	0,549	0,568	0,589	0,611
	32	0,421	0,434	0,448	0,463	0,479	0,494	0,512	0,529	0,549	0,568	0,588	0,609	0,632
	33	0,435	0,448	0,463	0,479	0,495	0,511	0,529	0,546	0,567	0,586	0,607	0,629	0,653
	34	0,450	0,463	0,478	0,494	0,511	0,527	0,546	0,564	0,585	0,605	0,627	0,650	0,674
	35	0,464	0,477	0,493	0,510	0,527	0,544	0,563	0,582	0,603	0,624	0,646	0,670	0,695
	36		0,492	0,508	0,525	0,543	0,560	0,580	0,600	0,622	0,643	0,666	0,690	0,716
	37			0,523	0,541	0,559	0,577	0,598	0,617	0,640	0,663	0,686	0,711	0,737
	38				0,556	0,576	0,594	0,615	0,635	0,659	0,682	0,706	0,731	0,759
	39					0,592	0,611	0,632	0,653	0,678	0,701	0,726	0,752	0,780
	40						0,627	0,650	0,671	0,696	0,720	0,746	0,773	0,801
	41							0,667	0,689	0,715	0,740	0,766	0,794	0,823
42								0,708	0,734	0,759	0,786	0,814	0,845	
43									0,753	0,779	0,806	0,835	0,866	
44										0,798	0,827	0,856	0,888	
45											0,847	0,877	0,910	
46												0,899	0,932	
47													0,954	
48														
49														
50														
51														
52														
53														
54														
55														

Figura 3.1: Fator Previdenciário - parte 1.

(Fonte: Previdência Social. Disponível em:

<<https://previdenciarista.com/wp-content/uploads/2016/05/FatorPrevidenciario2016.pdf>>. Acesso em: 28/12/2016)

FATOR PREVIDENCIÁRIO 2016 (TABELA IBGE 2014)																
IDADE NO MOMENTO DA APOSENTADORIA																
Expectativa de sobrevida	25,1	24,3	23,5	22,7	22,0	21,2	20,4	19,7	19,0	18,3	17,6	16,9	16,2	15,5	14,9	
	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
TEMPO DE CONTRIBUIÇÃO	15	0,298	0,309	0,322	0,335	0,348	0,363	0,380	0,396	0,413	0,431	0,451	0,472	0,496	0,521	0,545
	16	0,318	0,331	0,344	0,358	0,372	0,388	0,406	0,423	0,441	0,461	0,482	0,505	0,530	0,557	0,582
	17	0,339	0,352	0,366	0,381	0,396	0,413	0,432	0,450	0,470	0,490	0,513	0,537	0,564	0,593	0,620
	18	0,359	0,373	0,388	0,405	0,420	0,438	0,458	0,478	0,498	0,520	0,544	0,570	0,598	0,628	0,658
	19	0,380	0,395	0,411	0,428	0,444	0,464	0,485	0,505	0,527	0,550	0,575	0,603	0,632	0,665	0,695
	20	0,401	0,416	0,433	0,451	0,468	0,489	0,511	0,533	0,555	0,580	0,607	0,635	0,667	0,701	0,733
	21	0,421	0,438	0,456	0,475	0,493	0,514	0,538	0,560	0,584	0,610	0,638	0,668	0,701	0,737	0,771
	22	0,442	0,460	0,478	0,498	0,517	0,540	0,564	0,588	0,613	0,640	0,670	0,701	0,736	0,774	0,809
	23	0,463	0,482	0,501	0,522	0,542	0,565	0,591	0,616	0,642	0,671	0,701	0,735	0,771	0,810	0,848
	24	0,484	0,503	0,524	0,546	0,566	0,591	0,618	0,644	0,671	0,701	0,733	0,768	0,806	0,847	0,886
	25	0,506	0,525	0,547	0,569	0,591	0,617	0,645	0,672	0,701	0,732	0,765	0,801	0,841	0,884	0,925
	26	0,527	0,547	0,570	0,593	0,616	0,643	0,672	0,700	0,730	0,762	0,797	0,835	0,876	0,921	0,963
	27	0,548	0,570	0,593	0,617	0,641	0,669	0,699	0,728	0,759	0,793	0,829	0,869	0,911	0,958	1,002
	28	0,569	0,592	0,616	0,641	0,666	0,695	0,726	0,756	0,789	0,824	0,861	0,902	0,947	0,995	1,041
	29	0,591	0,614	0,639	0,665	0,691	0,721	0,754	0,785	0,819	0,855	0,894	0,936	0,982	1,032	1,080
	30	0,612	0,636	0,662	0,690	0,716	0,747	0,781	0,813	0,848	0,886	0,926	0,970	1,018	1,070	1,119
	31	0,634	0,659	0,685	0,714	0,741	0,773	0,808	0,842	0,878	0,917	0,959	1,004	1,054	1,107	1,158
	32	0,656	0,681	0,709	0,738	0,766	0,800	0,836	0,871	0,908	0,948	0,992	1,038	1,089	1,145	1,198
	33	0,678	0,704	0,732	0,763	0,792	0,826	0,864	0,900	0,938	0,980	1,024	1,073	1,125	1,183	1,237
	34	0,699	0,727	0,756	0,787	0,817	0,853	0,891	0,928	0,968	1,011	1,057	1,107	1,162	1,221	1,277
	35	0,721	0,749	0,780	0,812	0,843	0,880	0,919	0,957	0,998	1,043	1,090	1,142	1,198	1,259	1,317
	36	0,743	0,772	0,803	0,837	0,868	0,906	0,947	0,987	1,029	1,074	1,123	1,176	1,234	1,297	1,357
	37	0,765	0,795	0,827	0,861	0,894	0,933	0,975	1,016	1,059	1,106	1,157	1,211	1,271	1,335	1,397
	38	0,787	0,818	0,851	0,886	0,920	0,960	1,003	1,045	1,090	1,138	1,190	1,246	1,307	1,374	1,437
	39	0,810	0,841	0,875	0,911	0,946	0,987	1,032	1,075	1,120	1,170	1,223	1,281	1,344	1,413	1,477
	40	0,832	0,864	0,899	0,936	0,972	1,014	1,060	1,104	1,151	1,202	1,257	1,316	1,381	1,451	1,518
	41	0,854	0,888	0,923	0,961	0,998	1,041	1,089	1,134	1,182	1,234	1,291	1,352	1,418	1,490	1,559
	42	0,877	0,911	0,948	0,987	1,024	1,069	1,117	1,163	1,213	1,267	1,324	1,387	1,455	1,529	1,599
	43	0,899	0,934	0,972	1,012	1,050	1,096	1,146	1,193	1,244	1,299	1,358	1,422	1,492	1,568	1,640
	44	0,922	0,958	0,996	1,037	1,077	1,124	1,174	1,223	1,275	1,332	1,392	1,458	1,529	1,607	1,681
45	0,945	0,981	1,021	1,063	1,103	1,151	1,203	1,253	1,307	1,364	1,426	1,494	1,567	1,647	1,722	
46	0,967	1,005	1,045	1,088	1,130	1,179	1,232	1,283	1,338	1,397	1,461	1,529	1,604	1,686	1,763	
47	0,990	1,029	1,070	1,114	1,156	1,207	1,261	1,313	1,369	1,430	1,495	1,565	1,642	1,726	1,805	
48	1,013	1,052	1,095	1,140	1,183	1,234	1,290	1,344	1,401	1,463	1,529	1,601	1,680	1,765	1,846	
49		1,076	1,119	1,166	1,210	1,262	1,319	1,374	1,433	1,496	1,564	1,638	1,718	1,805	1,888	
50			1,144	1,192	1,236	1,290	1,349	1,404	1,464	1,529	1,598	1,674	1,756	1,845	1,930	
51				1,218	1,263	1,319	1,378	1,435	1,496	1,562	1,633	1,710	1,794	1,885	1,972	
52					1,290	1,347	1,407	1,466	1,528	1,595	1,668	1,747	1,832	1,925	2,014	
53						1,375	1,437	1,496	1,560	1,629	1,703	1,783	1,870	1,966	2,056	
54							1,467	1,527	1,592	1,662	1,738	1,820	1,909	2,006	2,098	
55								1,558	1,625	1,696	1,773	1,857	1,948	2,047	2,140	

Figura 3.2: Fator Previdenciário - parte 2.

(Fonte: Previdência Social. Disponível

em: <<https://previdenciaria.com/wp-content/uploads/2016/05/FatorPrevidenciario2016.pdf>>. Acesso em: 28/12/2016)

o fator. Entretanto, é possível também que o fator previdenciário seja benéfico para o segurado, aumentando o valor da sua aposentadoria, toda vez que esse fator for maior que 1,0 (embora, na prática, essa situação seja rara, uma vez que poucos segurados concordam em adiar por muito tempo seu pedido de aposentadoria, quando já em condições de fazê-lo).

A criação do fator previdenciário se deu claramente como uma tentativa do governo de persuadir os segurados a adiar a aposentadoria, desestimulando aposentadorias precoces, uma vez que quanto mais jovem o segurado se aposentar e quanto menor for seu tempo de contribuição, menor será o número obtido para o fator, impactando negativamente o valor final da aposentadoria. Contrariamente, quanto maior a idade do segurado no momento da aposentadoria e maior for seu tempo de contribuição, maior será o número obtido para o FP, sendo possível até mesmo resultar um número maior que 1,0, o que implicará um valor final de benefício até maior que aquele a que o segurado teria direito sem a aplicação do fator.

É importante frisar que, embora a aplicação do fator previdenciário resulte, no mais das vezes, numa redução do valor da aposentadoria a que o segurado teria direito se não fosse aplicado o fator, essa redução não pode resultar num valor de aposentadoria inferior ao salário mínimo nacional vigente, pois, por disposição expressa da Constituição Federal, *"nenhum benefício que substitua o salário-de-contribuição ou o rendimento do trabalho do segurado terá valor mensal inferior ao salário mínimo"*²⁶.

A fórmula do fator previdenciário nos parece bastante interessante do ponto de vista matemático, oferecendo ao professor uma excelente oportunidade de interrelacionar a matemática com a educação previdenciária. Sugerimos, aqui também, a utilização do GeoGebra para facilitar o estudo do fator previdenciário por professores e alunos, uma vez que, dependendo no nível de conhecimento da turma, a manipulação manual da fórmula do FP pode se mostrar uma tarefa complexa e cansativa. A ideia é simplesmente inserir a fórmula do FP no GeoGebra, criando controles deslizantes para cada variável. Por meio da manipulação dos controles deslizantes, os alunos podem facilmente verificar qual o impacto da mudança no valor de uma ou mais variáveis no resultado final obtido para o fator. Apresentamos a seguir um modelo bastante simples, elaborado no GeoGebra:

Podemos verificar no modelo acima que, com a simples manipulação dos controles deslizantes, o resultado para o fator previdenciário é obtido instantaneamente, a partir da fixação dos valores relativos ao tempo de contribuição (T_c), à idade (I_d) e à expectativa de sobrevida (E_s).

Com relação à expectativa de sobrevida, é importante destacar que, por óbvio, seu valor não varia livremente, uma vez que a mesma está relacionada à idade respectiva. Ou

²⁶Cf. Constituição Federal de 1998, art. 201, §2º.

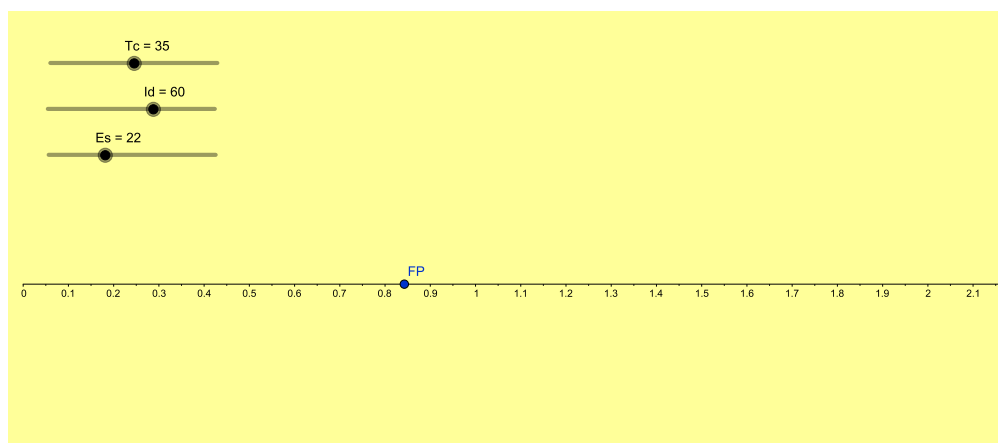


Figura 3.3: Cálculo do fator previdenciário com o uso do GeoGebra, calculado para um tempo de contribuição de 35 anos, idade de 60 anos e expectativa de vida correspondente de 22 anos.

(Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/fdN5gJ9S>>)

seja, para cada idade teremos um valor correspondente para a expectativa de sobrevida. No entanto, desde que os alunos sejam alertados quanto a isso, consideramos que, para fins didáticos, a expectativa de sobrevida pode ser estudada isoladamente, alterando livremente o seu valor, a fim de que os alunos possam perceber a influência desse componente no resultado do FP.

A correlação entre idade e expectativa de sobrevida, comentada acima, é um tema previdenciário que também pode ser explorado pelo professor de matemática. Pode-se, por exemplo, propor aos alunos encontrar uma função que possa exprimir essa correlação, podendo ser utilizando algum método de interpolação. Essa tarefa também pode ser realizada utilizando o GeoGebra para se obter a função desejada. No capítulo 4 é apresentada uma sugestão de atividade relacionada ao tema.

Tanto a fórmula do fator previdenciário, quanto a correlação entre idade e expectativa de vida podem ser temas utilizados pelo professor com o objetivo de chamar a atenção dos alunos para a importância e utilidade da matemática na modelagem de fenômenos, papel que os alunos do ensino médio costumam associar apenas à física.

3.7 Contribuição Previdenciária

Para finalizar nossa breve exposição sobre noções básicas da Previdência Social, trataremos da contribuição dos segurados.

Quando trata de contribuição, a legislação previdenciária é bastante fértil, havendo um sem-número de situações a analisar, caso se queira uma abordagem abrangente do tema, o que, por óbvio, não é o objetivo aqui pretendido. Assim, desse amplo assunto,

será visto a seguir apenas o que consideramos mais relevante para o propósito do presente trabalho²⁷.

A contribuição previdenciária das pessoas físicas (segurados) e das pessoas jurídicas²⁸ (empresas e equiparados a empresa) está prevista na Lei 8.212, de 24 de julho de 1991, da qual serão vistos, a seguir, apenas alguns dos seus dispositivos mais importantes para uma abordagem introdutória do assunto. Antes, porém, é necessário apresentar, desde logo, um conceito fundamental no que concerne ao tema da contribuição previdenciária, que é o conceito de *salário-de-contribuição*.

As contribuições dos trabalhadores e das empresas para o RGPS incidem sobre uma base denominada salário-de-contribuição, também utilizada para o cálculo de quase todos os benefícios previdenciários.

A definição legal de salário-de-contribuição encontra-se no art. 28 da Lei 8.212/91, parcialmente transcrito abaixo:

Art. 28. Entende-se por salário-de-contribuição:

I - para o empregado e trabalhador avulso: a remuneração auferida em uma ou mais empresas, assim entendida a totalidade dos rendimentos pagos, devidos ou creditados a qualquer título, durante o mês, destinados a retribuir o trabalho, qualquer que seja a sua forma, inclusive as gorjetas, os ganhos habituais sob a forma de utilidades e os adiantamentos decorrentes de reajuste salarial, quer pelos serviços efetivamente prestados, quer pelo tempo à disposição do empregador ou tomador de serviços nos termos da lei ou do contrato ou, ainda, de convenção ou acordo coletivo de trabalho ou sentença normativa;

II - para o empregado doméstico: a remuneração registrada na Carteira de Trabalho e Previdência Social, observadas as normas a serem estabelecidas em regulamento para comprovação do vínculo empregatício e do valor da remuneração;

III - para o contribuinte individual: a remuneração auferida em uma ou mais empresas ou pelo exercício de sua atividade por conta própria, durante o mês, observado o limite máximo a que se refere o § 5º;

IV - para o segurado facultativo: o valor por ele declarado, observado o limite máximo a que se refere o § 5º.

§ 1º (...)

§ 2º (...)

²⁷Para um estudo mais aprofundado do assunto, recomendamos a leitura das obras de direito previdenciário que constam das referências bibliográficas deste trabalho.

²⁸Por fugir ao escopo do presente trabalho, em razão da complexidade e amplitude do assunto, com exceção da contribuição do empregador doméstico, não trataremos com maiores detalhes da contribuição previdenciária patronal (empresas e equiparados a empresa), tecendo apenas alguns comentários pontuais.

§ 3º *O limite mínimo do salário-de-contribuição corresponde ao piso salarial, legal ou normativo, da categoria ou, inexistindo este, ao salário mínimo, tomado no seu valor mensal, diário ou horário, conforme o ajustado e o tempo de trabalho efetivo durante o mês.*

§ 4º (...)

§ 5º *O limite máximo do salário-de-contribuição é de Cr\$ 170.000,00 (cento e setenta mil cruzeiros), reajustado a partir da data da entrada em vigor desta Lei, na mesma época e com os mesmos índices que os do reajustamento dos benefícios de prestação continuada da Previdência Social.*²⁹

Faz-se mister o esclarecimento do significado do termo "remuneração", que, de acordo com Kertzman, pode ser definido como *"todo ganho decorrente do trabalho, englobando salário, gorjetas e complementos salariais"*³⁰, tais como adicionais, gratificações, etc. No caso do segurado empregado, por exemplo, poderíamos identificar sua remuneração com o seu salário bruto, que, por sua vez, seria a soma do salário-base (ou salário contratual) com os demais ganhos decorrentes do trabalho, como adicionais, gratificações etc.

O salário-de-contribuição possui limites, máximo e mínimo, para incidência das contribuições mensais dos trabalhadores. Tais limites, porém, valem apenas para o cálculo da contribuição mensal dos segurados, não havendo qualquer limite para a contribuição das empresas e das entidades equiparadas a empresa.

Assim, caso um segurado tenha rendimento superior ao limite máximo do salário-de-contribuição, sua contribuição previdenciária não incidirá sobre o valor que exceder a tal limite. Já as empresas, devem utilizar como base de cálculo da sua contribuição previdenciária o total dos valores pagos aos trabalhadores que lhes prestem serviço, mesmo no caso de haver remunerações individuais acima do limite máximo do salário-de-contribuição.

O limite mínimo do salário-de-contribuição corresponde, em geral, ao salário mínimo. Já o seu limite máximo, comumente denominado de "teto", é um valor estabelecido pelo governo federal. Esses valores são constantemente atualizados, normalmente na mesma época em que ocorre o reajuste do salário mínimo.

É importante frisar que existem alguns ganhos que não são considerados salário-de-contribuição pela legislação previdenciária brasileira. Não incide contribuição previdenciária, por exemplo, sobre: férias indenizadas, diárias de até 50% da remuneração, participação nos lucros ou resultados, distribuição de lucros e dividendos, vale-transporte,

²⁹O valor atual do limite máximo do salário-de-contribuição, válido a partir de 01/01/2016, é R\$ 5.189,82, conforme Portaria Interministerial MTPS-MF nº 01/2016.

³⁰KERTZMAN, Ivan. Op. cit., p. 135.

vale alimentação, bolsa de estágios, bolsa de estudos, abono do PIS etc.³¹

3.7.1 Contribuição do Segurado

Empregado, Empregado Doméstico e Trabalhador Avulso

Conforme redação do art. 20 da Lei 8.212/91, a contribuição do empregado, inclusive o doméstico, e a do trabalhador avulso é calculada mediante a aplicação da correspondente alíquota sobre o seu salário-de-contribuição mensal, de forma não cumulativa, de acordo com uma tabela atualizada periodicamente.

Conforme visto no § 5º do art. 28 da Lei 8.212/91, acima transcrito, os valores do salário-de-contribuição são reajustados na mesma época e com os mesmos índices que os do reajustamento dos benefícios da Previdência Social.

A Portaria Interministerial MTPS/MF Nº 1, de 08 de janeiro de 2016, apresenta as tabelas de contribuição mensal atualizadas, que poderão ser utilizadas para consulta sobre as faixas de salários-de-contribuição e respectivas alíquotas de incidência para o cálculo da contribuição a ser paga ao INSS, sendo que as categorias de empregado, empregado doméstico e trabalhador avulso possuem faixas e alíquotas distintas das de contribuinte individual e facultativo. Segue a tabela relativa às categorias de empregado, empregado doméstico e trabalhador avulso:

Tabela para Empregado, Empregado Doméstico e Trabalhador Avulso	
Salário de Contribuição (R\$)	Alíquota (%)
Até R\$ 1.556,94	8
De R\$ 1.556,95 a R\$ 2.594,92	9
De R\$ 2.594,93 até R\$ 5.189,82	11

Tabela 3.2: Tabela de contribuição do empregado, doméstico e avulso.
(Fonte: Portaria Interministerial MTPS/MF Nº 1, de 08 de janeiro de 2016)

Obs.: i) Sempre que o empregado, o empregado doméstico e o trabalhador avulso tiverem mais de um vínculo empregatício (vínculos concomitantes), as remunerações deverão ser somadas para o correto enquadramento na tabela acima, respeitando-se o limite máximo de contribuição. ii) Quando houver pagamento de remuneração relativa a décimo terceiro salário, este não deve ser somado à remuneração mensal para efeito de enquadramento na tabela de salários-de-contribuição, ou seja, será aplicada a alíquota sobre os valores em separado.

Cabe aqui um breve comentário acerca de duas características presentes na tabela de contribuição previdenciária apresentada acima: a progressividade e a não cumulatividade. A progressividade está relacionada ao fato de que à medida em que as faixas salariais

³¹A relação completa das parcelas que não integram o salário-de-contribuição pode ser consultada no art. 214, § 9º, do RPS, aprovado pelo Decreto 3.048/99.

se elevam, as alíquotas também aumentam. Assim, para a primeira faixa, a alíquota é de 8%; para a segunda faixa, 9% e, para a terceira, 11%. A não-cumulatividade, por sua vez, significa que incide um único percentual sobre o valor total do salário-de-contribuição, sendo uma forma de cálculo mais simples que a cumulativa, onde os percentuais são aplicados, gradualmente, à cada faixa de remuneração.

Conforme leciona Kertzman³², o método não-cumulativo, embora mais simples, pode acarretar uma situação em que, antes de sofrer o desconto da contribuição previdenciária, um segurado A tenha uma remuneração menor que a remuneração de um segurado B, mas, após o desconto da contribuição, a renda líquida de B fique menor que a renda líquida de A, como no exemplo a seguir:

Segurado	Salário-de-Contribuição	Alíquota	Contribuição	Valor líquido
Ana	R\$ 2.560,00	9%	R\$ 230,40	R\$ 2.329,60
Bruno	R\$ 2.600,00	11%	R\$ 286,00	R\$ 2.314,00

A distorção acima não ocorreria, caso houvesse aplicação cumulativa das alíquotas, que é o método utilizado, por exemplo, para o cálculo do imposto de renda. Nesse caso, teríamos o seguinte cálculo:

Ana				
	Base de cálculo	Alíquota	Contribuição	Valor líquido
	R\$ 1.556,94	8%	R\$ 124,56	R\$ 1.432,38
	R\$ 1.003,06	9%	R\$ 90,28	R\$ 912,78
Total	R\$ 2.560,00	-	R\$ 214,84	R\$ 2.345,16

Bruno				
	Base de cálculo	Alíquota	Contribuição	Valor líquido
	R\$ 1.556,94	8%	R\$ 124,56	R\$ 1.432,38
	R\$ 1.037,98	9%	R\$ 93,42	R\$ 944,56
	R\$ 5,08	11%	R\$ 0,56	R\$ 4,52
Total	R\$ 2.600,00	-	R\$ 218,54	R\$ 2.381,46

Em vez de aplicar uma única alíquota sobre o valor total da remuneração, como ocorre no método não-cumulativo (que é efetivamente o método utilizado e legalmente previsto no caso da contribuição previdenciária), caso se utilizasse o método cumulativo, seria inicialmente aplicada a menor alíquota, até o limite máximo da primeira faixa; a seguir, seria aplicada a alíquota da segunda faixa sobre o valor que excedesse o limite

³²KERTZMAN, Ivan. Op. cit., p. 165.

máximo da primeira faixa, até o limite máximo da segunda faixa e, assim, sucessivamente. Percebe-se que, utilizando o método cumulativo de cálculo, seria mantida a relação inicial, ou seja, quem tinha a renda maior, antes do desconto da contribuição previdenciária, permaneceria com a maior renda, após o desconto.

Contribuinte Individual e Segurado Facultativo

No caso dos segurados enquadrados na categoria de contribuinte individual e daqueles enquadrados na categoria de facultativo, a contribuição previdenciária é normatizada pelo art. 21 da Lei nº 8.212/91, parcialmente transcrito abaixo:

Art. 21. A alíquota de contribuição dos segurados contribuinte individual e facultativo será de vinte por cento sobre o respectivo salário-de-contribuição.

§ 1º Os valores do salário-de-contribuição serão reajustados, a partir da data de entrada em vigor desta Lei, na mesma época e com os mesmos índices que os do reajustamento dos benefícios de prestação continuada da Previdência Social.

§ 2º No caso de opção pela exclusão do direito ao benefício de aposentadoria por tempo de contribuição, a alíquota de contribuição incidente sobre o limite mínimo mensal do salário de contribuição será de:

I - 11% (onze por cento), no caso do segurado contribuinte individual, ressalvado o disposto no inciso II, que trabalhe por conta própria, sem relação de trabalho com empresa ou equiparado e do segurado facultativo, observado o disposto na alínea b do inciso II deste parágrafo;

II - 5% (cinco por cento):

a) no caso do microempreendedor individual, de que trata o art. 18-A da Lei Complementar no 123, de 14 de dezembro de 2006; e

b) do segurado facultativo sem renda própria que se dedique exclusivamente ao trabalho doméstico no âmbito de sua residência, desde que pertencente a família de baixa renda.

§ 3º (...)

§ 4º Considera-se de baixa renda, para os fins do disposto na alínea b do inciso II do § 2º deste artigo, a família inscrita no Cadastro Único para Programas Sociais do Governo Federal - CadÚnico cuja renda mensal seja de até 2 (dois) salários mínimos.

Segue abaixo a tabela de contribuição vigente para os contribuintes individuais e os facultativos, conforme estatuído pela Portaria Interministerial MTPS/MF Nº 1, de 08 de janeiro de 2016:

Tabela para Contribuinte Individual e Facultativo	
Salário de Contribuição (R\$)	Alíquota %
R\$ 880,00	5*
R\$ 880,00	11**
De R\$ 880,00 até R\$ 5.189,82	20

Tabela 3.3: Tabela de contribuição do contribuinte individual e do facultativo.
(Fonte: Portaria Interministerial MTPS/MF N° 1, de 08 de janeiro de 2016)

*Alíquota exclusiva do Microempreendedor Individual e do Facultativo de Baixa Renda;

**Alíquota exclusiva do Plano Simplificado de Previdência;

Os valores das tabelas acima têm aplicação sobre as remunerações a partir de 1º de janeiro de 2016.

3.7.2 Contribuição da Empresa e do Empregador Doméstico

Contribuição da Empresa

No caso das empresas, estas podem ser divididas em dois grupos principais: o grupo das microempresas e empresas de pequeno porte, optantes pelo Sistema Integrado de Pagamento de Impostos e Contribuições das Microempresas e Empresas de Pequeno Porte (SIMPLES) e o grupo formado pelas demais empresas. Tendo em vista as especificidades do SIMPLES, hoje denominado de "Simples Nacional" e normatizado pela Lei Complementar n° 123, de 14 de dezembro de 2006, apenas será objeto de referência neste trabalho a contribuição previdenciária das empresa em geral, de que dispõem os arts. 22 e 23 da Lei 8.212/91, parcialmente transcritos abaixo:

Art. 22. A contribuição a cargo da empresa, destinada à Seguridade Social, além do disposto no art. 23, é de:

I - vinte por cento sobre o total das remunerações pagas, devidas ou creditadas a qualquer título, durante o mês, aos segurados empregados e trabalhadores avulsos que lhe prestem serviços, destinadas a retribuir o trabalho, qualquer que seja a sua forma, inclusive as gorjetas, os ganhos habituais sob a forma de utilidades e os adiantamentos decorrentes de reajuste salarial, quer pelos serviços efetivamente prestados, quer pelo tempo à disposição do empregador ou tomador de serviços, nos termos da lei ou do contrato ou, ainda, de convenção ou acordo coletivo de trabalho ou sentença normativa.

II - para o financiamento do benefício previsto nos arts. 57 e 58 da Lei n° 8.213, de 24 de julho de 1991, e daqueles concedidos em razão do grau de incidência de incapacidade laborativa decorrente dos riscos ambientais do trabalho, sobre o total das remunerações pagas ou creditadas, no decorrer do mês, aos segurados empregados e trabalhadores avulsos:

a) 1% (um por cento) para as empresas em cuja atividade preponderante o risco de acidentes do trabalho seja considerado leve;

b) 2% (dois por cento) para as empresas em cuja atividade preponderante esse risco seja considerado médio;

c) 3% (três por cento) para as empresas em cuja atividade preponderante esse risco seja considerado grave.

III - vinte por cento sobre o total das remunerações pagas ou creditadas a qualquer título, no decorrer do mês, aos segurados contribuintes individuais que lhe prestem serviços; (Incluído pela Lei nº 9.876, de 1999).

(...)

O art. 23 da Lei 8.212/91, que é citado no *caput* do art. 22, acima transcrito, trata das contribuições a cargo da empresa, destinadas à Seguridade Social, que incidem sobre o faturamento e o lucro, as quais não serão objeto de análise neste tópico, limitado às contribuições que têm por base a folha de pagamento.

Contribuição do Empregador Doméstico

O empregador doméstico, isto é, a pessoa que contrata empregado doméstico, também deve contribuir para a Previdência Social. Tal contribuição está prevista no art. 24 da Lei 8.212/91, conforme a seguir:

Art. 24. A contribuição do empregador doméstico incidente sobre o salário-de-contribuição do empregado doméstico a seu serviço é de: (Redação dada pela Lei nº 13.202, de 08/12/2015)

I - 8% (oito por cento); e

II - 0,8% (oito décimos por cento) para o financiamento do seguro contra acidentes de trabalho.

É importante observar uma sutil, mas fundamental distinção entre a contribuição das empresas e a contribuição do empregador doméstico. No caso das empresas, a contribuição patronal incide sobre o *total das remunerações* pagas, devidas ou creditadas, conforme redação do art. 22, incisos I e II, acima transcrito. Já no caso do empregador doméstico, a contribuição patronal incide sobre o *salário-de-contribuição* do empregado doméstico a seu serviço, conforme art. 24, visto acima.

O leitor pode ainda não ter percebido qualquer diferença, mas veja que, como a contribuição previdenciária da empresa incide sobre o total das remunerações, cujo valor, em tese, não tem limite máximo, então também não há limite máximo para a contribuição da empresa (contribuição patronal). Diferentemente, a contribuição previdenciária do

empregador doméstico incide sobre o *salário-de-contribuição* do empregado doméstico a seu serviço, e *salário-de-contribuição* possui limite máximo. Logo, a contribuição patronal do empregador doméstico também restará limitada.

Vejam os a seguir um exemplo relativo à contribuição previdenciária do trabalhador e do empregador domésticos.

Exemplo 21. *Sr. Monteiro, um rico empresário, possui em sua mansão quatro empregados domésticos: uma empregada que realiza os serviços gerais, uma cozinheira, um motorista particular e uma governanta, com salários de R\$ 2.000,00, R\$ 3.000,00, R\$ 6.000,00, R\$ 10.000,00, respectivamente. Calcule as contribuições previdenciárias (patronais e dos segurados) decorrentes da situação hipotética acima. Obs.: No cálculo da contribuição patronal, desconsidere a contribuição relativa ao Seguro Acidente de Trabalho (SAT).*

R.: Temos a contribuição previdenciária: a) dos empregados domésticos, incidente sobre o salário-de-contribuição de cada um deles; e b) do empregador doméstico, também incidente sobre o salário-de-contribuição dos empregados domésticos a seu serviço. Consultando a tabela 3.2, verifica-se que as alíquotas de contribuição dos empregados domésticos a serviço do Sr. Monteiro serão de 9% para a empregada que recebe R\$ 2.000,00 e de 11% para os demais empregados, sendo necessário atentar que, no caso do motorista e da governanta, a alíquota de 11% não incidirá sobre a remuneração total de cada um deles, uma vez que tais remunerações estão acima do limite máximo do salário-de-contribuição. Assim, teremos os seguintes valores para a contribuição previdenciária dos segurados: $9\% \times R\$ 2.000,00 = R\$ 180,00$; $11\% \times R\$ 3.000,00 = R\$ 330,00$; $11\% \times R\$ 5.189,82 = R\$ 570,88$ e $11\% \times R\$ 5.189,82 = R\$ 570,88$, sendo estes dois últimos os valores da contribuição previdenciária do motorista e da governanta. Já a contribuição patronal do Sr. Monteiro, na condição de empregador doméstico, não incidirá sobre a remuneração total dos empregados, mas sobre o salário-de-contribuição destes, à alíquota de 8%, conforme art. 24, I, da Lei 8,212/91. Logo, basta somar todos os salários-de-contribuição e aplicar a essa soma a referida alíquota. Assim, temos que a contribuição previdenciária patronal do Sr. Monteiro será de $8\% \times (R\$ 2.000,00 + R\$ 3.000,00 + R\$ 5.189,82 + R\$ 5.189,82) = 8\% \times R\$ 15.379,64 = R\$ 1.230,38$.

Segue um resumo do exemplo acima analisado:

<i>Sr. Monteiro (empregador doméstico)</i>					
<i>Remuneração do Segurado (A)</i>	<i>Salário-de-Contribuição (B)</i>	<i>Alíquota do Segurado (C)</i>	<i>Contribuição do Segurado (B × C)</i>	<i>Alíquota Patronal (D)</i>	<i>Contribuição Patronal (B × D)</i>
<i>R\$ 2.000,00</i>	<i>R\$ 2.000,00</i>	<i>9%</i>	<i>R\$ 180,00</i>	<i>8%</i>	<i>R\$ 160,00</i>
<i>R\$ 3.000,00</i>	<i>R\$ 3.000,00</i>	<i>11%</i>	<i>R\$ 330,00</i>	<i>8%</i>	<i>R\$ 240,00</i>
<i>R\$ 6.000,00</i>	<i>R\$ 5.189,82</i>	<i>11%</i>	<i>R\$ 570,88</i>	<i>8%</i>	<i>R\$ 415,19</i>
<i>R\$ 10.000,00</i>	<i>R\$ 5.189,82</i>	<i>11%</i>	<i>R\$ 570,88</i>	<i>8%</i>	<i>R\$ 415,19</i>

Relativamente à contribuição previdenciária do empregador doméstico, vale registrar, ainda que de forma breve, a criação recente do Simples Doméstico, regime instituído pela Lei Complementar 150/2015, que unificou o pagamento dos tributos e dos encargos trabalhistas e previdenciários que deverão ser recolhidos pelos empregadores domésticos em função dos trabalhadores a eles vinculados. A partir de outubro de 2015, todas essas obrigações passaram a ser recolhidas por meio de uma guia única, o DAE (Documento de Arrecadação do eSocial), viabilizando, entre outros direitos, a inclusão trabalhadores domésticos ao FGTS.

O eSocial é um sistema de escrituração digital das obrigações fiscais, previdenciárias e trabalhistas, visando unificar a prestação de informações pelo empregador em relação aos seus trabalhadores (como cadastramento, vínculos, contribuições previdenciárias e folha de pagamento, entre outros), gerido pela Caixa Econômica Federal (CEF), INSS, Receita Federal do Brasil e Ministério do Trabalho e Previdência Social.

O eSocial para o empregador doméstico é uma solução web para prestação de informação simplificada e *online* por meio do endereço eletrônico *www.eSocial.gov.br*. A obrigatoriedade de uso do eSocial observa o previsto na Lei Complementar 150/2015.

A partir de outubro de 2015, o recolhimento do FGTS do trabalhador doméstico tornou-se obrigatório devendo ser realizado por meio do regime unificado, em guia única (DAE), e disponível a partir do registro no portal eSocial. O pagamento do DAE viabiliza o recolhimento unificado das seguintes obrigações:

- 8 a 11% de contribuição previdenciária a cargo do trabalhador doméstico;
- 8% de contribuição previdenciária patronal a cargo do empregador;
- 0,8% de contribuição para financiamento do seguro contra acidentes do trabalho;
- 8% de recolhimento para o FGTS;
- 3,2% destinada ao pagamento de FGTS da indenização compensatória da perda do emprego, sem justa causa; e
- imposto de renda retido na fonte, se incidente.

3.8 O (alegado) Déficit da Previdência Social

Nos últimos anos, houve no Brasil pelo menos duas importantes reformas previdenciárias: a primeira, entre 1998 e 1999, durante o governo de Fernando Henrique Cardoso (FHC), que, dentre outras medidas, criou o fator previdenciário; a segunda, em 2003, durante o governo Lula, que tratou essencialmente do regime previdenciário dos servidores públicos.

Não obstante, ocorreram em 2015, agora sob a égide do governo Dilma, novas e importantes alterações na legislação previdenciária, dentre as quais a criação da regra 85/95 progressiva. Mesmo após essas alterações, a então presidente Dilma Rousseff se pronunciou afirmando que era urgente uma nova reforma da Previdência e que o seu governo estaria até mais preocupado com essa questão do que com o processo de *impeachment* que já se encontrava em andamento no Congresso Nacional. "*Acho que a questão mais importante para o país é a Previdência. Isso não quer dizer que tentativas golpistas não sejam importantes*", disse a então presidente ao ser perguntada sobre qual assunto seria mais urgente para sua gestão: a Previdência ou o pedido de *impeachment*³³. Considerando que o processo de *impeachment* resultou em nada menos que o fim do governo Dilma, dá para concluir desse episódio que a reforma da Previdência é algo que, de fato, merece nossa preocupação.

Toda vez que os sucessivos governos, de FHC a Dilma, trouxeram à tona a necessidade de reforma da Previdência, o motivo alegado foi basicamente o mesmo: o déficit previdenciário. E, neste exato momento, a sociedade brasileira se vê novamente no início de um debate (que promete mais uma vez ser bastante acalorado) sobre uma nova tentativa de reforma previdenciária, agora sob a batuta do governo Temer, e o motivo alegado para justificar a necessidade e urgência de mais essa reforma é o crescimento "explosivo" do déficit previdenciário, argumento que tem sido frequentemente contestado por especialistas no tema³⁴, a exemplo da economista Denise Gentil³⁵, professora da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), hoje uma das principais vozes contra a ideia de que

³³Fonte: Agência Brasil. Disponível em: <<http://economia.uol.com.br/noticias/redacao/2016/01/15/dilma-diz-que-previdencia-preocupa-mais-governo-do-que-impeachment.htm>> . Acesso em: 29/12/2016.

³⁴A esse respeito, vide a cartilha *Desmistificando o Déficit da Previdência*. Disponível em: <<https://fernandonogueiracosta.files.wordpress.com/2016/08/desmistificando-o-dc3a9fcit-da-previdc3aancia-01-06-2016.pdf>>. Acesso em: 30/12/2016. Um interessante contraponto, em defesa da existência do déficit, pode ser lido no Boletim Legislativo nº 37/2015, do Senado Federal, produzido pelo Consultor Legislativo Pedro Fernando Nery. Disponível em: <<https://www12.senado.leg.br/publicacoes/estudos-legislativos/tipos-de-estudos/boletins-legislativos/bol37>>. Acesso em 02/01/2017

³⁵Vide alguns pronunciamentos da citada economista em <<https://www.brasildefato.com.br/2016/07/22/estabrandando-muito-dinheiro-na-previdencia-entenda-os-numeros/>>, <<http://www.ocafezinho.com/2016/07/18/em-tese-de-doutorado-pesquisadora-denuncia-a-farsa-da-crise-da-previdencia-no-brasil-forjada-pelo-governo-com-apoio-da-imprensa/>>, <<https://www.youtube.com/watch?v=vXzUbziZQ2c>> e <https://www.youtube.com/watch?v=D_HQM7xqaFI>.

exista o déficit na Previdência Social que os últimos governos vêm tentando nos fazer crer.

Segundo os dados oficiais, o déficit da Previdência Social (RGPS) teve a seguinte evolução, em valores nominais, entre os anos de 2009 a 2015 (em bilhões de reais):

Ano	Déficit	Déficit em % do PIB
2009	42,9	1,22
2010	42,9	1,38
2011	35,5	0,86
2012	40,8	0,93
2013	49,9	1,03
2014	56,7	1,10
2015	85,8	1,87

Tabela 3.4: Brasil: Evolução nominal do déficit da Previdência Social (RGPS) - 2012 a 2015, em bilhões de reais.

(Fonte: Secretaria do Tesouro Nacional, Ministério do Trabalho e Previdência Social e Ministério da Fazenda. Elaborado pelo autor)

Logo após assumir o governo, o presidente Temer afirmou que o déficit previdenciário estimado para 2016 era de R\$ 100 bilhões e de R\$ 140 bilhões, para 2017³⁶. Porém, em poucos meses, o número oficial para o déficit previdenciário subiu para R\$ 151,9 bilhões em 2016, como o governo acabou de anunciar, e agora projetando que esse déficit será de R\$ 181,2 bilhões em 2017³⁷.

Olhando a evolução dos números oficiais para o déficit, tem-se a impressão que os últimos resultados (2015 e 2016) e a projeção do governo para 2017 parecem ter sido positivamente inflados, com o objetivo de diminuir a resistência popular à nova reforma previdenciária.

Reforma da Previdência é sempre um tema espinhoso para os governantes, haja vista tratar-se de um assunto extremamente impopular e que tem grande potencial de retirar votos, um dos maiores temores de um político. Assim, está longe de ser absurda a ideia defendida por alguns especialistas de que, com o objetivo de diminuir a resistência social à reforma, o governo esteja pondo em execução, com apoio de parte da imprensa, uma espécie de "alarmismo", inflando os números relativos ao déficit e colocando seus ministros para repetir, em todas as oportunidades, o mantra *"se não reformar, não teremos como pagar"*.

Então, pergunta-se: afinal, esse déficit previdenciário que vem sendo alegado pelos sucessivos governos existe ou não? E a resposta a essa questão é: depende...

³⁶Fonte: Folha de São Paulo. Disponível em: <<https://noticias.uol.com.br/politica/ultimas-noticias/2016/12/01/temer-diz-que-reforma-da-previdencia-sera-enviada-ao-congresso-na-proxima-semana.htm>>.

³⁷Fonte: Portal G1. Disponível em: <<http://g1.globo.com/economia/noticia/rombo-da-previdencia-social-cresce-745-em-2016-e-bate-recorde.ghtml>>.

Por trás dessa controvérsia em torno da existência ou não de um déficit na Previdência, há fundamentalmente uma questão metodológica. Mas também há questões político-ideológicas.

Começando pela questão do método, o que ocorre quando o governo defende a existência do déficit é que ele o faz restringindo sua análise apenas à Previdência Social. Os críticos por sua vez, quando defendem não haver déficit algum, o fazem considerando a Seguridade Social como um todo.

No início deste capítulo, dissemos que a Previdência Social é parte de um sistema maior, a Seguridade Social, a qual é composta ainda pelas áreas da Saúde e da Assistência Social, conforme disposto no art. 194 da Constituição Federal (CF/88). Quanto ao financiamento da Seguridade Social, diz o art. 195 da CF/88 que:

Art. 195. A seguridade social será financiada por toda a sociedade, de forma direta e indireta, nos termos da lei, mediante recursos provenientes dos orçamentos da União, dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios, e das seguintes contribuições sociais:

I - do empregador, da empresa e da entidade a ela equiparada na forma da lei, incidentes sobre:

a) a folha de salários e demais rendimentos do trabalho pagos ou creditados, a qualquer título, à pessoa física que lhe preste serviço, mesmo sem vínculo empregatício;

b) a receita ou o faturamento;

c) o lucro;

II - do trabalhador e dos demais segurados da previdência social, não incidindo contribuição sobre aposentadoria e pensão concedidas pelo regime geral de previdência social de que trata o art. 201;

III - sobre a receita de concursos de prognósticos.

IV - do importador de bens ou serviços do exterior, ou de quem a lei a ele equiparar.

Percebe-se que a Seguridade Social possui uma ampla base de financiamento. Além das contribuições previdenciárias (dos segurados, dos empregadores domésticos e das empresas sobre a folha de pagamento), há diversas outras contribuições sociais, tais como a Contribuição para Financiamento da Seguridade Social (COFINS), que incide sobre a receita bruta das empresas, e a Contribuição Social sobre o Lucro Líquido (CSLL), que, como o nome indica, incide sobre o lucro líquido das empresas.

As contribuições previdenciárias são estritamente vinculadas à Previdência, ou seja, devem ser utilizadas apenas para o pagamento das despesas previdenciárias, não podendo

ser destinadas ao pagamento de despesas da Saúde ou da Assistência Social. Todavia, as demais receitas da Seguridade Social não têm vinculação específica com qualquer das suas três áreas, podendo ser legalmente utilizadas no custeio de qualquer delas, inclusive no custeio da Previdência Social.

Na consideração do déficit previdenciário, o que o governo faz é comparar o valor arrecadado apenas com as contribuições previdenciárias com o valor dos benefícios pagos pelo INSS, o que, de fato, resulta numa despesa maior que a receita, ou seja, num déficit. Os críticos, por sua vez, dizem que essa conta que o governo faz não tem o menor sentido, uma vez que não se pode analisar as receitas e despesas da Previdência isoladamente, pois as contribuições sociais que não são específicas da Previdência, em sentido estrito, são também receitas da Previdência, em sentido amplo. Ou seja, as contribuições previdenciárias são apenas da Previdência; as demais contribuições sociais são das três áreas que compõe a Seguridade Social, inclusive a Previdência.

Assim, dizem os críticos, a única comparação que faz sentido é entre as receitas e despesas da Seguridade Social como um todo. Tem que ser levado em conta, de um lado, tudo que é gasto com Saúde, Previdência Social e Assistência Social e, do outro, tudo que se arrecada a título de contribuição social, incluindo aí as contribuições previdenciárias. Quando isso é feito, o resultado é que as receitas são maiores que as despesas, ou seja, há um superávit.

Portanto, vê-se que o cerne da divergência entre os que afirmam e os que negam a existência de déficit na Previdência está nos diferentes métodos de que ambas as partes se utilizam para realizar seus cálculos.

No que tange às questões político-ideológicas acima referidas, há, aqui também, interessantes debates. Um deles envolve a discussão quanto ao papel do Estado brasileiro. De um lado, estão os defensores do chamado *Estado de bem-estar social*³⁸ (ou Estado social), que negam a própria importância do debate acerca da existência ou não de um déficit na Previdência, pois - dizem eles - a Previdência Social, ao lado da Saúde e da Assistência Social, compõe uma rede de proteção social destinada a conferir maior bem-estar aos cidadãos e, diante disso, não poderia mesmo ser objetivo do Estado obter superávit com essas ações, devendo o Estado suportar os custos e eventual déficit dessa rede protetiva da qual a Previdência faz parte.

Do outro lado, porém, há os defensores do *Estado mínimo* e do *neoliberalismo*³⁹. Apontando para uma suposta falência dos modelos de Estado social - que teria ocorrido na Europa, onde esse modelo chegou a ser efetivamente implantado em países como a Finlândia, a Noruega e a Suécia -, os defensores do Estado mínimo propõem limites bem

³⁸Para saber mais acesse: <<http://www.infoescola.com/sociedade/estado-de-bem-estar-social/>>.

³⁹Vide: <http://www.histedbr.fe.unicamp.br/navegando/glossario/verb_c_estado_minimo.htm> e <http://www.histedbr.fe.unicamp.br/navegando/glossario/verb_c_neoliberalismo1.htm>

mais restritos para a atuação do Estado em prol do bem-estar dos seus cidadãos, no que se justificaria uma firme atuação do governo na busca, se não de um desejável superávit, ao menos da maior redução possível do déficit previdenciário.

Dentre aqueles que se filiam à política neoliberal e à ideia de Estado mínimo, há inclusive quem defenda a total desvinculação entre Estado e Previdência Social, isto é, a privatização do sistema previdenciário, a exemplo do ocorrido no Chile, vedete das políticas neoliberais durante os anos 90 e primeiro país do mundo a privatizar totalmente seu sistema de previdência, sob a ditadura do general Pinochet. Segue o resultado dessa experiência chilena, segundo a avaliação de Jorge Felix, jornalista e mestre em Economia Política pela PUC-SP:

Trinta e cinco anos depois da reforma da previdência, o balanço continua perverso para os trabalhadores chilenos. De acordo com reportagem da Bloomberg, as mulheres chegam aos 60 anos acumulando menos de 110 mil reais de poupança, em média, em suas contas de previdência privada. Os homens, aos 65 anos, conseguem guardar em torno de 200 mil. Como a expectativa de vida média é de 80,5 anos – a maior da América Latina –, podemos considerar que a previsão de benefício de aposentadoria do Chile, por mês, em média, é equivalente à metade de um salário mínimo brasileiro (R\$ 440,00).⁴⁰

O discurso do "explosivo déficit previdenciário" é bastante conveniente para justificar o endurecimento das regras para obtenção de benefícios pelo trabalhador, a ponto de desencorajá-lo de filiar-se à Previdência ou ao menos de filiar-se somente à previdência pública. Como alternativa, resta ao trabalhador adquirir um plano de previdência privada. Assim, não é preciso muito esforço intelectual para se perceber que essas ideias se alinham perfeitamente aos interesses dos grandes grupos financeiros, bastante atentos ao bilionário mercado dos planos de previdência privada. Se hoje os aposentados chilenos estão à mingua, como visto no excerto acima, o mesmo não se pode dizer das instituições financeiras para as quais o sistema previdenciário chileno foi entregue.

Vê-se, portanto, que a discussão em torno do suposto déficit previdenciário não se restringe, em absoluto, a uma mera questão matemática ou contábil. Por trás desse debate, há um pano de fundo político-ideológico ao qual a sociedade brasileira deve estar atenta, pois o volume de recursos abarcados pela Previdência Social é gigantesco, despertando interesses de toda ordem.

⁴⁰Disponível em: <<http://brasileiros.com.br/2016/06/previdencia-chile-e-o-exagero-neoliberalismo/#>>. Acesso em: 10/01/2017. Para saber mais sobre o fracasso do modelo de previdência chileno, acesse também: <<http://www1.folha.uol.com.br/mercado/2017/01/1849981-modelo-na-regiao-chile-quer-rever-sistema-de-aposentadoria.shtml>> Acesso em: 10/01/2017.

Capítulo 4

Atividades Propostas

Após a apresentação do conteúdo visto até aqui, chegamos ao momento da proposição de algumas atividades que o professor poderá desenvolver em sala de aula. Obviamente, em razão das limitações deste trabalho, o número de atividades propostas é bastante reduzido diante das inúmeras possibilidades que podem ser desenvolvidas a partir dos temas que abordamos. Ademais, sempre caberá a cada professor a tarefa de avaliar quais atividades melhor atendem às características de cada turma, podendo adaptar as tarefas abaixo propostas, além de elaborar tantas outras, de modo a melhor cumprir seu mister.

4.1 Atividades 01 a 05 - Cálculo da Contribuição Previdenciária

Objetivo

Calcular o valor da contribuição previdenciária dos segurados empregado, empregado doméstico e contribuinte individual, bem como a contribuição do empregador doméstico.

Conteúdo programático

Porcentagem.

Metodologia

Aula expositiva, com resolução da atividade individualmente ou em grupo.

Obs.: Nas atividades a seguir, sempre que houver referência a "salário" ou a "salário bruto", considerar-se-á que, respeitado o seu limite máximo, o salário-de-contribuição correspondente será de mesmo valor.

Atividade 01

Antônio, Beatriz, Claudionor e Daiane são empregados da empresa Alfa Ltda. e têm salários de R\$ 1.000,00, R\$ 2.000,00, R\$ 3.000,00 e R\$ 6.000,00, respectivamente. Calcule o valor que a empresa deverá descontar dos salários de cada um dos referidos empregados, a título de contribuição previdenciária.

Resolução:

Como se tratam de segurados empregados, deverá ser utilizada a tabela 3.2, devendo ser encontrada a alíquota correspondente ao salário de cada empregado. Assim, no caso de Antônio, a alíquota aplicável é de 8%, pois seu salário encontra-se na primeira faixa (até R\$ 1.556,94). Seguindo o mesmo raciocínio, conclui-se que, para Beatriz, Claudionor e Daiane, as alíquotas aplicáveis são de 9%, 11% e 11%, respectivamente. Porém, no caso de Daiane, deve-se atentar para o valor máximo do salário-de-contribuição, que é de R\$ 5.189,82. Em razão disso, embora o salário de Daiane seja de R\$ 6.000,00, sua contribuição deverá ser calculada sobre R\$ 5.189,82. Fazendo os cálculos, encontram-se os seguintes valores para as contribuições de Antônio, Beatriz, Claudionor e Daiane:

Antônio: $R\$ 1.000,00 \times 8\% = R\$ 80,00$

Beatriz: $R\$ 2.000,00 \times 9\% = R\$ 180,00$

Claudionor: $R\$ 3.000,00 \times 11\% = R\$ 330,00$

Daiane: $R\$ 5.189,82 \times 11\% = R\$ 570,88$

Atividade 02

Cristiano é um trabalhador autônomo, exercendo a atividade de taxista, a qual lhe proporciona um rendimento mensal médio de R\$ 3.500,00. Considerando esse valor como o seu salário-de-contribuição, quanto Cristiano deverá recolher mensalmente para a Previdência Social?

Resolução:

Como a questão se refere a um segurado contribuinte individual, deverá ser utilizada a tabela 3.3, devendo ser aplicada a alíquota de 20% sobre o seu salário-de-contribuição, aqui considerado como o seu rendimento médio mensal, ou seja, R\$ 3.500,00. Assim, o valor da contribuição previdenciária que deverá ser recolhida por Cristiano será: $R\$ 3.500,00 \times 20\% = R\$ 700,00$

Atividade 03

Eduardo é professor de inglês. Além de ensinar numa conhecida escola de idiomas, onde é empregado, ele exerce, de forma autônoma, duas outras atividades remuneradas: dá aulas particulares e realiza tradução de textos. O rendimento mensal auferido por Eduardo como empregado é de R\$ 4.000,00 e com suas duas atividades autônomas, R\$ 5.000,00, totalizando, portanto, R\$ 9.000,00 mensais. Considerando que a escola efetua regularmente o desconto da contribuição previdenciária sobre os R\$ 4.000,00 pagos a Eduardo, determine o valor que o professor ainda deverá recolher mensalmente para a Previdência, na condição de contribuinte individual e o valor total da sua contribuição mensal.

Resolução:

Como a questão se refere a um segurado que tanto exerce atividade de empregado, quanto de contribuinte individual, deverão ser aplicadas, em princípio, a tabela 3.2 e a tabela 3.3. Entretanto, há que se respeitar o limite máximo do salário-de-contribuição (teto), que é de R\$ 5.189,82, atualmente. Como Eduardo já contribui sobre um salário de R\$ 4.000,00, que ele recebe da escola de idiomas, resta-lhe contribuir, por suas atividades como contribuinte individual, apenas sobre a diferença entre R\$ 4.000,00 e o teto, ou seja, R\$ 1.189,82. Assim, na condição de contribuinte individual, Eduardo deverá recolher, mensalmente, o valor de $R\$ 1.189,82 \times 20\% = R\$ 237,96$. Consultando a tabela 3.2, observa-se que é de 11% a alíquota a ser utilizada para o cálculo da contribuição previdenciária sobre o valor do salário que Eduardo recebe da escola, sendo, portanto, de $R\$ 4.000,00 \times 11\% = R\$ 440,00$ o valor descontado. Logo, o total da contribuição mensal do professor é de $R\$ 440,00 + R\$ 237,96 = R\$ 677,96$.

Atividade 04

Etinevaldo é professor de matemática em duas escolhas particulares, na condição de empregado. Em uma das escolas, seu salário é de R\$ 3.200,00; na outra, recebe R\$ 3.800 de salário. Em ambas as escolas, a contribuição previdenciária do referido professor é descontada sobre o valor total do seu salário. Como Etinevaldo tem pouco conhecimento acerca das normas previdenciárias, jamais questionou tal situação. Entretanto, segundo as normas vigentes, Etinevaldo está contribuindo para a Previdência em valor superior ao que deveria. Calcule o valor da contribuição previdenciária que está sendo indevidamente descontada do salário do professor.

Resolução:

Sabe-se que o limite máximo do salário-de-contribuição (teto) é atualmente de R\$ 5.189,82. Somando os salários de Etinevaldo nas duas escolas, obtém-se um valor de R\$ 7.000,00, portanto acima do teto. Assim, o professor está contribuindo com o valor de R\$ $3.200,00 \times 11\% + R\$ 3.800,00 \times 11\% = R\$ 770,00$, quando deveria estar contribuindo com apenas R\$ $5.189,82 \times 11\% = R\$ 570,88$. Logo, R\$ 199,12 estão sendo indevidamente descontados do rendimento do professor. Obs.: Para solucionar o problema, basta Etinevaldo apresentar em uma das escolas documento que comprove o valor já descontado pelo outro empregador (contracheque, por exemplo). Desse modo, essa segunda escola deverá observar o valor já descontado na primeira, a fim de que o desconto total não supere o valor máximo da contribuição do segurado.

Atividade 05

Hercília é empregada doméstica na residência de Lígia, sua patroa. O salário de Hercília é de 1,5 salário mínimo, cujo valor atual é de R\$ 880,00. Relativamente à contribuição previdenciária incidente sobre essa relação de emprego, calcule:

- a) O valor que Lígia deverá descontar do salário de Hercília;
- b) O valor da contribuição patronal de Lígia, incluindo a contribuição para o financiamento do seguro contra acidente de trabalho (SAT);
- c) O valor total (parte patronal + parte descontada do empregado) que Lígia deverá recolher mensalmente.

Resolução:

a) Na situação acima descrita, deve-se levar em conta que tanto Hercília deve contribuir para a Previdência, na categoria de empregado doméstico, quanto Lígia, sua patroa, na condição de empregador doméstico. No caso de Hercília, deve ser aplicada a tabela 3.2 e, no caso de Lígia, as alíquotas definidas no art. 24, incisos I e II, da Lei 8.212/91. O salário de Hercília é de $1,5 \times R\$ 880,00 = R\$ 1.320,00$, de onde se conclui que, conforme a tabela 3.2, sua alíquota de contribuição é de 8%. Assim, a contribuição de Hercília deve ser de $R\$ 1.320,00 \times 8\% = R\$ 105,60$, que, portanto, deverá ser o valor descontado do seu salário.

b) No caso de Lígia, sua contribuição patronal, conforme as alíquotas previstas art. 24, incisos I e II, da Lei 8.212/91, deve ser de $8\% \times 1.320,00 = R\$ 105,60$ e mais $0,8\% \times 1.320,00 = R\$ 10,56$, relativo ao SAT, totalizando, portanto, R\$ 116,16.

c) O valor total que Lígia ficará responsável por recolher para a Previdência Social, relativamente a sua contribuição e à contribuição da sua empregada doméstica, será de $R\$ 116,16 + R\$ 105,60 = R\$ 221,76$.

4.2 Atividades 06 e 07 - Cálculo do Fator Previdenciário

Objetivo

Obter o valor do fator previdenciário para distintos valores de idade e tempo de contribuição, permitindo que os alunos se familiarizem com o cálculo do fator e que percebam a influência de cada componente da fórmula do FP (idade, expectativa de sobrevida e tempo de contribuição) no seu resultado.

Conteúdo programático

Função, noções de modelagem matemática, cálculo do fator previdenciário.

Metodologia

Aula expositiva, desenvolvida preferencialmente em um laboratório de informática, com resolução das atividades individualmente ou em grupo.

Material

Programa GeoGebra

Atividade 06

O professor deverá fornecer alguns pares de valores de idade e tempo de contribuição para que os alunos determinem o fator previdenciário correspondente, comparando em seguida os resultados obtidos com os valores constantes da tabela respectiva.

Para que os alunos possam melhor perceber a influência de cada componente da fórmula do fator previdenciário no resultado deste, recomenda-se a utilização do GeoGebra, conforme o modelo apresentado no seção 3.6., onde cada componente (tempo de contribuição, idade e expectativa de sobrevida) pode ser manipulado por meio de um controle deslizante, mantendo os demais componentes inalterados, de modo que o aluno possa perceber o comportamento do fator previdenciário à medida em que o valor do componente em estudo varia.

Atividade 07

Como já comentado no Capítulo 3, Seção 3.6, há uma correlação entre *idade* e *expectativa de sobrevida*, fato de grande relevância para os estudos no campo da previdência. Vamos utilizar essa correlação para elaborar no GeoGebra um gráfico *Idade x Fator Previdenciário* e um gráfico *Tempo de Contribuição x Fator Previdenciário*.

Roteiro

Considere a fórmula do fator previdenciário:

$$f = \frac{T_c \cdot a}{E_s} \cdot \left[1 + \frac{(I_d + T_c \cdot a)}{100} \right]$$

a) Verifique se a função $f(I_d) = 0,004I_d^2 - 1,238I_d + 81,884$ expressa corretamente a relação entre idade (I_d) e expectativa de sobrevida (E_s), admitindo-se uma margem de erro absoluto de até 0,2 em relação aos valores constantes da tabela do fator previdenciário;

b) Caso constatada a adequação da função proposta acima¹, substituir, na fórmula do FP, a componente E_s por $0,004I_d^2 - 1,238I_d + 81,884$, obtendo a função:

$$f = \frac{T_c \cdot a}{0,004I_d^2 - 1,238I_d + 81,884} \cdot \left[1 + \frac{(I_d + T_c \cdot a)}{100} \right]$$

c) Represente a função acima no GeoGebra, assumindo T_c como constante, vinculando-o a um controle deslizante, para obter o gráfico *Idade x Fator Previdenciário*;

d) Repita o passo anterior, agora considerando I_d como uma constante, também associando-o a um controle deslizante, para obter o gráfico *Tempo de Contribuição x Fator Previdenciário*;

e) Compare os resultados obtidos a partir dos gráficos acima com os valores da tabela do FP.

Para exemplificar, seguem abaixo os gráficos que construímos no GeoGebra seguindo os passos acima:

Vale registrar que, no primeiro caso, como o tempo de contribuição foi adotado como uma constante, para cada valor de T_c será obtido um gráfico *Idade x Fator Previdenciário* correspondente. Analogamente, no segundo caso, para cada valor de I_d será obtido um gráfico *Tempo de Contribuição x Fator Previdenciário* correspondente.

Interessante comparar o comportamento dos dois gráficos. No caso do gráfico *Tempo de Contribuição x Fator Previdenciário*, no intervalo visível acima, seu traçado assemelha-se a uma reta². Já o gráfico *Idade x Fator Previdenciário* apresenta-se mais semelhante a uma exponencial (também considerando apenas o intervalo visível no gráfico).

A constatação acima nos sugere que, para valores elevados de idade e tempo de contribuição (digamos, idade a partir dos 60 anos e tempo de contribuição a partir dos 35 anos), a influência de cada ano a mais na idade é maior que o de cada ano a mais no

¹A função $f(I_d)$ proposta pode ser adotada como representativa da correlação entre idade e expectativa de sobrevida, uma vez que o maior erro obtido para a expectativa de sobrevida com a referida função é menor que 0,2, dentro portanto da margem de erro admitida.

²Porém, se diminuirmos o *zoom* o suficiente, constataremos que, na verdade, trata-se de uma parábola.

tempo de contribuição, para o resultado do fator previdenciário. Vejamos um exemplo. Nos dois gráficos acima, tomamos *idade* igual a 60 anos e *tempo de contribuição* igual a 35 anos, obtendo, em ambos os gráficos, como era de se esperar, $FP = 0,842$. Se, em qualquer dos dois gráficos, aumentarmos a idade em mais 1 ano, obtemos $FP = 0,877$. Já se o aumento de 1 ano for no tempo de contribuição, o FP obtido é 0,868, corroborando a constatação acima. Não por acaso, no cálculo do fator previdenciário, o ajuste realizado para mulheres e professores, com a adição de 5 ou 10 anos, conforme o caso, é efetivado sobre o tempo de contribuição e não sobre a idade.

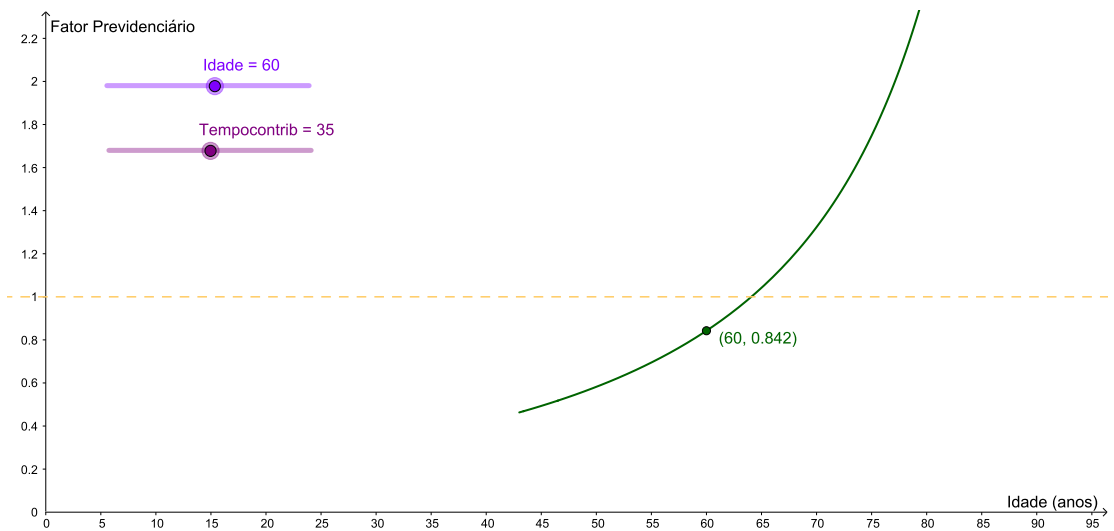


Figura 4.1: Gráfico *Fator Previdenciário x Idade*. Determinação do valor do fator previdenciário para uma idade de 60 anos e tempo de contribuição de 35 anos.

(Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/r2GJfZY8>>)

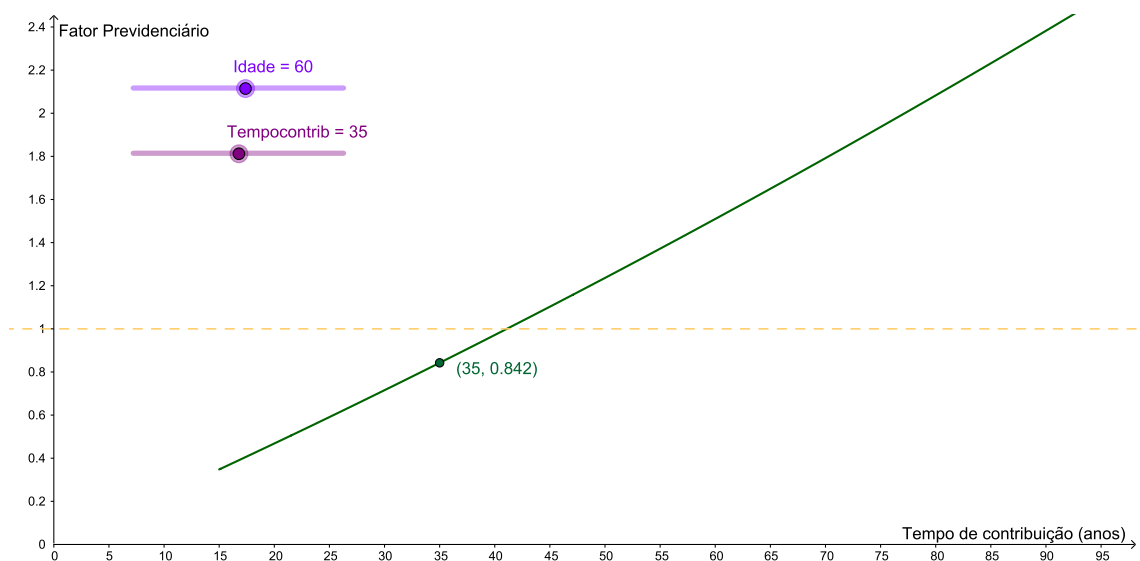


Figura 4.2: Gráfico *Fator Previdenciário x Tempo de Contribuição*. Determinação do valor do fator previdenciário para um tempo de contribuição de 35 anos e 60 anos de idade.

(Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/GQznURM5>>)

4.3 Atividades 08 a 12 - Cálculo do Valor da Aposentadoria

Objetivo

Utilizar os conhecimentos matemáticos e previdenciários adquiridos pelos alunos para calcular o valor da aposentadoria em algumas situações hipotéticas.

Conteúdo programático

Média aritmética, porcentagem, cálculo do fator previdenciário.

Metodologia

Aula expositiva, desenvolvida preferencialmente em um laboratório de informática, com resolução da atividade individualmente ou em dupla.

Material

Programa GeoGebra

Roteiro

O professor deverá apresentar algumas situações hipotéticas de segurados com idade I_d , tempo de contribuição T_c e cuja média aritmética do 80% maiores salários-de-contribuição corrigidos resultou em um valor X . Então deverá ser solicitado aos alunos que determinem o valor da aposentadoria em cada caso, observando as normas previdenciárias vigentes.

Nos casos em que, segundo as regras atuais, o segurado possa aposentar-se tanto pela regra 85/95, quanto pela regra dos 30/35 anos de contribuição, com incidência do fator previdenciário, solicitar aos alunos que indiquem qual a opção resultaria numa aposentadoria de maior valor.

No caso de aplicação do fator previdenciário, este poderá ser determinado com a utilização da tabela correspondente, ou calculado com uso de uma calculadora ou ainda utilizando a planilha elaborada no GeoGebra durante o desenvolvimento da atividade 06.

Para exemplificar, apresentamos as atividades a seguir.

Atividade 08

Marina é segurada da Previdência Social, contando atualmente com 50 anos de idade e 31 anos de contribuição. A média aritmética simples dos 80% maiores salários-de-contribuição de Marina, a partir de julho de 1994, em valores atualizados³, resulta em R\$ 1.500,00. Caso Marina resolva requerer sua aposentadoria hoje, qual seria o valor do referido benefício?

³Nas próximas atividades, chamaremos essa média apenas de *média dos salários-de-contribuição*.

Resolução:

Como a soma da idade atual de Marina (50 anos) com seu tempo de contribuição (31 anos) resulta em 81 pontos, valor abaixo dos 85 pontos exigidos para as mulheres, a referida segurada não poderá aposentar-se pela regra 85/95, restando-lhe, portanto, a aposentadoria pela regra dos 30/35 anos de contribuição, com a incidência obrigatória do fator previdenciário. Como a média aritmética dos 80% maiores salários-de-contribuição a partir de julho de 1994 já foi fornecida, para encontrar o valor da aposentadoria será bastante multiplicar essa média pelo FP obtido no caso de Marina. Consultando a tabela respectiva, verificamos que o valor do fator correspondente a uma idade de 50 anos e tempo de contribuição de 31 anos é de 0,511. Porém, não devemos esquecer que, no caso das mulheres, são adicionados 5 anos ao tempo de contribuição. Logo, nesse caso, o fator previdenciário correto será o correspondente a 50 anos de idade e 36 anos de contribuição (somados mais 5 anos de contribuição aos 31 anos de contribuição efetiva). Consultando novamente a tabela, encontramos 0,600 para o correto valor do FP. Assim, o valor da aposentadoria de Marina será $R\$ 1.500,00 \times 0,600 = R\$ 900,00$.

Atividade 09

Antônio, segurado da Previdência Social, conta atualmente com 60 anos de idade e 40 anos de contribuição. A média dos salários-de-contribuição de Antônio resulta hoje em R\$ 1.200,00. Caso o referido segurado resolva requerer sua aposentadoria neste momento, qual seria o valor do referido benefício?

Resolução:

Como a soma da idade atual de Antônio (60 anos) com seu tempo de contribuição (40 anos) resulta em 100 pontos, valor acima dos 95 pontos atualmente exigidos para os homens, o referido segurado poderá aposentar-se tanto pela regra 85/95, quanto pela regra dos 30/35 anos de contribuição, com a incidência do fator previdenciário. Como a média dos salários-de-contribuição de Antônio resulta em R\$ 1.200,00, no caso de aplicação da regra 85/95, ele receberá esse mesmo valor de aposentadoria, não havendo qualquer redução (aposentadoria integral). Já no caso de Antônio optar pela regra dos 30/35 anos de contribuição, será aplicado o fator previdenciário à média acima referida. Consultando a tabela respectiva, verificamos que o fator previdenciário correspondente a uma idade de 60 anos e tempo de contribuição de 40 anos é 0,972. Logo, o valor da aposentadoria de Antônio, pela regra 30/35, seria $R\$ 1.200,00 \times 0,972 = R\$ 1.166,40$, resultando, portanto, num valor inferior ao valor obtido pela regra 85/95.

Atividade 10

Marcelo é segurado da Previdência Social, filiado na categoria de contribuinte individual, contando atualmente com 67 anos de idade e 43 anos de contribuição. Após tantos anos de trabalho, finalmente Marcelo resolveu requer sua aposentadoria junto à Previdência. Sabendo que a média atual dos seus salários-de-contribuição é de R\$ 2.000,00, determine o valor inicial da aposentadoria do referido segurado.

Resolução:

A soma da idade atual de Marcelo (67 anos) com seu tempo de contribuição (43 anos) resulta em 110 pontos, valor superior aos 95 pontos atualmente exigidos para os homens, no caso de aplicação da regra 85/95. Sendo assim, Marcelo poderá optar por aposentar-se por essa regra, recebendo aposentadoria no valor integral da média dos seus salários-de-contribuição, ou seja, R\$ 2.000,00. Todavia, Marcelo também pode optar pela regra dos 30/35 anos de contribuição, com incidência do fator previdenciário. Nesse caso, o FP a ser utilizado é o correspondente a uma idade de 67 anos e a um tempo de contribuição de 43 anos, resultando em um FP de valor igual a 1,422, conforme tabela. Assim, no caso de optar pela aplicação do fator previdenciário, Marcelo obteria uma aposentadoria de $R\$ 2.000,00 \times 1,422 = R\$ 2.844,00$, valor bem acima do anterior, calculado pela regra 85/95, sendo este, portanto, um caso em que a aplicação do fator previdenciário seria mais vantajosa para o segurado.⁴

Atividade 11

Daiane é segurada da Previdência Social, na categoria de empregado, tendo exercido a atividade de professora da Educação Infantil durante 25 anos, iniciando essa atividade aos 25 anos. Assim, a referida segurada conta hoje com 25 anos de contribuição e 50 anos de idade. A média dos salários-de-contribuição de Daiane resulta hoje em R\$ 1.000,00. Caso a referida segurada resolva requerer sua aposentadoria neste momento, qual seria o valor inicial do referido benefício?

Resolução:

A soma da idade atual de Daiane (50 anos) com seu tempo de contribuição (25 anos) resulta em 75 pontos, valor inferior aos 85 pontos atualmente exigidos para as mu-

⁴Não podemos deixar de observar, entretanto, que a aplicação do FP somente resultou mais favorável para o segurado em razão da elevada idade deste no momento de solicitação da aposentadoria (67 anos) e, também, em razão do seu elevado tempo de contribuição (43 anos, portanto 8 anos a mais que o tempo de contribuição mínimo necessário, nesse caso).

lheres, no caso de aplicação da regra 85/95. Porém, como se trata de uma professora do ensino básico, há o acréscimo de 5 pontos, resultando, portanto, em 80 pontos, ainda assim inferior à pontuação mínima exigida pela regra. Logo, restará a Daiane a aposentadoria pela regra dos 30/35 anos de contribuição, com a incidência do fator previdenciário. Porém, por se tratar de uma professora do ensino básico, deve haver o acréscimo de 10 anos no tempo de contribuição para a determinação do FP. Assim, no caso de Daiane, o fator previdenciário a ser utilizado será o correspondente a uma idade de 50 anos e tempo de contribuição de 35 anos (considerando o acréscimo de 10 anos previsto na legislação), o que resulta em um FP igual a 0,582. Logo, o valor da aposentadoria de Daiane seria, em princípio, igual a $R\$ 1.000,00 \times 0,582 = R\$ 582,00$, valor inferior ao do salário mínimo. Tendo em vista que, conforme já comentamos, a Constituição Federal proíbe o pagamento de aposentadoria em valor inferior ao salário mínimo, a aposentadoria de Daiane será ajustada para esse valor.

Atividade 12

Ivanilton é segurado da Previdência Social, na categoria de empregado, tendo exercido a atividade de professor do Ensino Médio durante 30 anos, iniciando essa atividade aos 22 anos. Assim, o referido segurado conta hoje com 30 anos de contribuição e 52 anos de idade. A média dos salários-de-contribuição de Ivanilton resulta hoje em R\$ 1.600,00. Caso o referido segurado resolva requerer sua aposentadoria neste momento, qual seria o valor inicial do referido benefício?

Resolução:

A soma da idade atual de Ivanilton (52 anos) com seu tempo de contribuição (30 anos) resulta em 72 pontos, valor inferior aos 95 pontos atualmente exigidos para os homens, no caso de aplicação da regra 85/95. Porém, como se trata de um professor do ensino básico, há o acréscimo de 5 pontos, resultando, portanto, em 77 pontos, ainda assim inferior à pontuação mínima exigida pela regra. Logo, restará ao segurado em questão a aposentadoria pela regra dos 30/35 anos de contribuição, com a incidência do fator previdenciário, sendo que, nesse caso, por se tratar de professor (homem), há o acréscimo de 5 anos de contribuição na determinação do FP. Assim, o fator previdenciário a ser utilizado, nesse caso, será o correspondente a uma idade de 52 anos e tempo de contribuição de 35 anos (considerando o acréscimo de 5 anos previsto na legislação), o que resulta em um FP igual a 0,624. Logo, o valor inicial da aposentadoria de Ivanilton será igual a $R\$ 1.600,00 \times 0,624 = R\$ 998,40$, valor superior ao do salário mínimo atual, que é de R\$ 937,00. Portanto, o valor inicial da aposentadoria de Ivanilton seria de R\$ 998,40.

4.4 Atividade 13 - Contribuição Previdenciária x Poupança

Seria interessante verificar o que aconteceria se um trabalhador filiado à Previdência Social pudesse dispor do valor da sua contribuição previdenciária mensal e o investisse em uma caderneta de poupança. Será que, no longo prazo, seria mais vantajoso para o trabalhador essa acumulação individual de capital, relativamente uma futura aposentadoria que ele poderia obter junto à Previdência? Para verificar essa situação hipotética, propomos a realização desta atividade, em que utilizaremos a calculadora gráfica desenvolvida no GeoGebra e apresentada no capítulo 2.

Objetivo

Comparar o benefício de uma aposentadoria obtida com a contribuição previdenciária em relação à opção de investir o valor dessa contribuição em uma aplicação financeira.

Conteúdo programático

Matemática financeira (rendas ou anuidades).

Metodologia

Aula expositiva, a ser desenvolvida em um laboratório de informática, com resolução da atividade individualmente ou em dupla.

Material

Laboratório de Informática.

Programa GeoGebra.

Roteiro

Considere a situação de uma segurada empregada que contribua para a Previdência Social com uma alíquota de 8% sobre o seu salário e pretenda aposentar-se pela regra 85/95, aos 55 anos de idade e 30 anos de contribuição, atingindo, assim, os 85 pontos exigidos no caso das mulheres. Assumindo que seja de 0,5% a.m o rendimento da caderneta de poupança e considerando que o salário da segurada e, conseqüentemente, o valor da sua contribuição permaneçam constantes, responda as questões a seguir:

a) Se, durante os 30 anos de contribuição, a segurada tivesse investido mensalmente o valor da sua contribuição previdenciária em uma caderneta de poupança⁵, por quanto

⁵A simulação poderá ser realizada com outro tipo de investimento. Optamos pela caderneta de poupança por ser esta o investimento mais popular no Brasil.

tempo o montante acumulado ao longo desse período permitiria uma retirada mensal de valor igual ao do seu salário atual?

b) Na sua avaliação, a opção pelo investimento na caderneta de poupança seria mais vantajosa que uma aposentadoria por tempo de contribuição concedida pela Previdência Social nas condições acima?

c) Qual o percentual mínimo do seu salário a segurada em questão deveria poupar mensalmente a fim de obter uma renda mensal equivalente ao de uma aposentadoria integral, ou seja, uma renda perpétua de valor mensal igual ao do seu salário?

d) Caso a segurada em questão fosse uma contribuinte individual (autônoma), sujeita a uma alíquota de contribuição previdenciária de 20% do seu salário, na sua avaliação a opção pelo investimento do valor mensal da sua contribuição previdenciária em uma caderneta de poupança seria mais vantajosa que contribuir para a Previdência Social a fim de obter uma aposentadoria por tempo de contribuição pela regra 85/95, após 30 anos de contribuição?

Resolução:

Utilizando os dados do enunciado em nossa calculadora gráfica, obtemos o seguinte resultado:

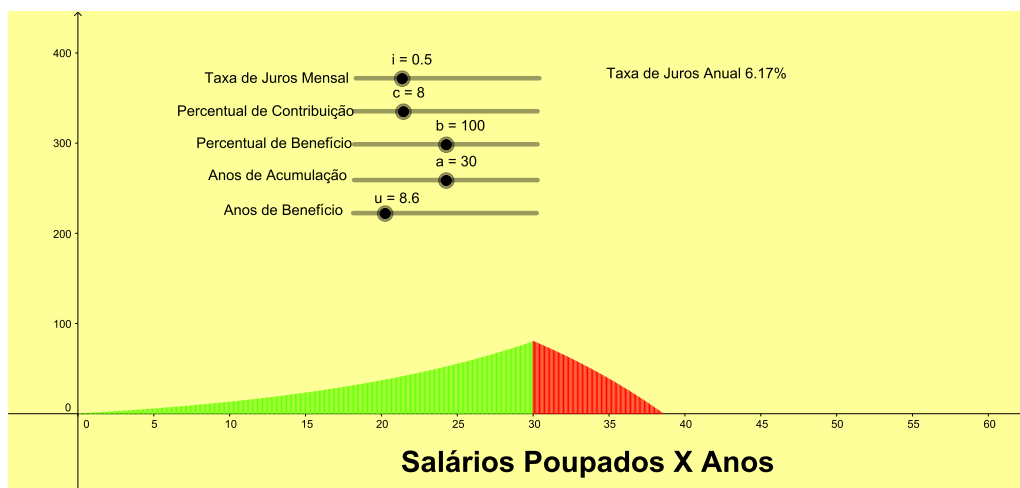


Figura 4.3: Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução da atividade 13: cálculo do tempo de benefício, para uma taxa de 0,5% a.m., percentual de contribuição de 8% do salário ou renda mensal, percentual de benefício de 100% do salário ou renda mensal e 30 anos de acumulação.

(Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/UDdV3yty>>)

a) Conforme constatamos acima, o montante obtido com o investimento mensal do valor da contribuição previdenciária em uma caderneta de poupança, durante 30 anos, considerando uma taxa de rendimento de 0,5% a.m, somente asseguraria à segurada a realização de retiradas mensais de valor igual ao seu salário por um período de 8,6 anos.

b) Fica claro que, contrariamente ao que muitos imaginam, a opção hipotética em análise não seria mais vantajosa que uma aposentadoria integral que viesse a ser concedida pela Previdência nas mesmas condições (30 anos de contribuição e 55 anos de idade), uma vez que, pelas regras atuais, esse benefício é concedido sem limite de tempo para sua fruição. Uma vez concedida pela Previdência, a aposentadoria será usufruída pelo beneficiário até a sua morte, podendo ainda gerar pensão para os seus dependentes.⁶

c) Para responder a essa questão, basta utilizar o gráfico já obtido acima, alterando o percentual de contribuição com o uso do controle deslizante, até que a parte do gráfico correspondente ao período de usufruto apresente valor constante, indicando que o montante não mais decresce ao longo do tempo, o que corresponde à obtenção de uma renda perpétua, conforme abaixo:



Figura 4.4: Calculadora gráfica elaborada com o GeoGebra. Resolução da atividade 13: cálculo do tempo de benefício, para uma taxa de 0,5% a.m., percentual de contribuição de 20% do salário ou renda mensal, percentual de benefício de 100% do salário ou renda mensal e 30 anos de acumulação.

(Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/ftdRwUbG>>)

Verifica-se que, a partir de um período de acumulação de 30 anos e taxa de juros de 0,5% a.m, uma renda mensal perpétua em valor igual ao do salário da segurada seria obtida com uma contribuição mensal de valor igual a 20% do seu salário, o que corrobora a avaliação anterior de que a aposentadoria por tempo de contribuição que a segurada pode obter junto à Previdência Social aos 55 anos de idade e 30 anos de contribuição é financeiramente mais vantajosa que a opção de investir o valor correspondente ao da sua contribuição previdenciária em uma caderneta de poupança, uma vez que, com uma contribuição previdenciária equivalente a 8% do salário da segurada, ela pode obter uma renda perpétua (aposentadoria) que somente seria obtida, no caso de opção pela poupança

⁶Além disso, é preciso ter em conta que a filiação à Previdência Social gera direito a outros benefícios como auxílio-doença, auxílio-acidente, aposentadoria por invalidez, salário maternidade etc., fato que a torna ainda mais vantajosa nesse caso.

individual, com depósitos mensais de valor equivalente a 20% do seu salário.

d) Conforme resultado obtido no item "c" o valor mínimo do depósito mensal em uma caderneta de poupança (considerando uma taxa de rendimento de 0,5% a.m), necessário para obtenção de uma renda perpétua de valor igual ao do salário, após trinta anos de acumulação, seria de 20% do salário, que é justamente a alíquota de contribuição previdenciária estabelecida para o contribuinte individual. Portanto, nesse caso, considerando apenas a aposentadoria, pagar a contribuição previdenciária ou investir o valor correspondente em uma caderneta de poupança seriam opções financeiramente equivalentes.⁷

4.5 Atividade 14 - Pirâmide Etária

Uma questão bastante relevante para os estudos realizados dentro do campo da previdência social é a estrutura etária da população. O envelhecimento das populações tem sido uma tendência verificada em diversos países. Embora esse fenômeno tenha sido observado com maior intensidade em países desenvolvidos, nos últimos anos o mesmo tem-se intensificado também em países em desenvolvimento, como é o caso do Brasil, com diminuição contínua da taxa de natalidade e aumento contínuo da expectativa de vida, o que se reflete em uma pirâmide etária com uma base cada vez mais estreita e topo cada vez mais alargado. No que tange à previdência social, isso significa que teremos cada vez menos pessoas economicamente ativas para sustentar um número cada vez maior de aposentados e pensionistas, o que cria sérias dificuldades para a manutenção do equilíbrio financeiro do sistema. Esse envelhecimento da população, aliás, tem sido um dos principais argumentos daqueles que defendem a necessidade e urgência da reforma do sistema previdenciário brasileiro.

Dada a importância do tema, apresentamos a seguir uma atividade em que é solicitado aos alunos a construção de uma pirâmide etária, com o auxílio do GeoGebra, devendo haver uma interpretação conjunta dos modelos obtidos, indicando aqueles com maior proporção de indivíduos com idade de 60 anos ou mais em relação ao restante da

⁷Todavia, convém ressaltar mais uma vez que o segurado da Previdência tem direito a benefícios que vão além da aposentadoria, conforme já citamos acima. Assim, numa avaliação mais ampla, a filiação à Previdência Social ainda seria mais vantajosa, mesmo nesse caso. Também é importante levar em conta que, apesar de estarmos considerando neste trabalho, para fins didáticos, uma taxa de rendimento de 0,5% a.m para a caderneta de poupança (que é, aproximadamente, o rendimento teórico estabelecido pelo governo para esse investimento), na prática, segundo estudo da consultoria financeira Econômica (fonte: Revista Exame, disponível em: <http://exame.abril.com.br/seu-dinheiro/poupanca-e-superada-pela-inflacao-no-1o-semester-de-2014/>), a média de rendimento anual real (acima da inflação) da caderneta de poupança no período de 1994 a 2013, foi de apenas 2,06% a.a, ou o equivalente a apenas 0,17% a.m, aproximadamente.

população.

Objetivo

Construir uma pirâmide etária, utilizando o GeoGebra, a partir da manipulação de controles deslizantes, observando e avaliando a configuração obtida.

Conteúdo programático

Modelagem matemática, interpretação de gráficos, porcentagem.

Metodologia

Aula expositiva, a ser desenvolvida em um laboratório de informática, com resolução da atividade individualmente ou em dupla.

Material

Laboratório de Informática.

Programa GeoGebra.

Roteiro

Utilizando o modelo de pirâmide etária desenvolvido no GeoGebra, a seguir, os alunos deverão atribuir a cada faixa etária a partir da segunda faixa (10 a 19 anos) um número que representa o percentual de indivíduos em relação à faixa etária imediatamente abaixo, utilizando os controles deslizantes respectivos.

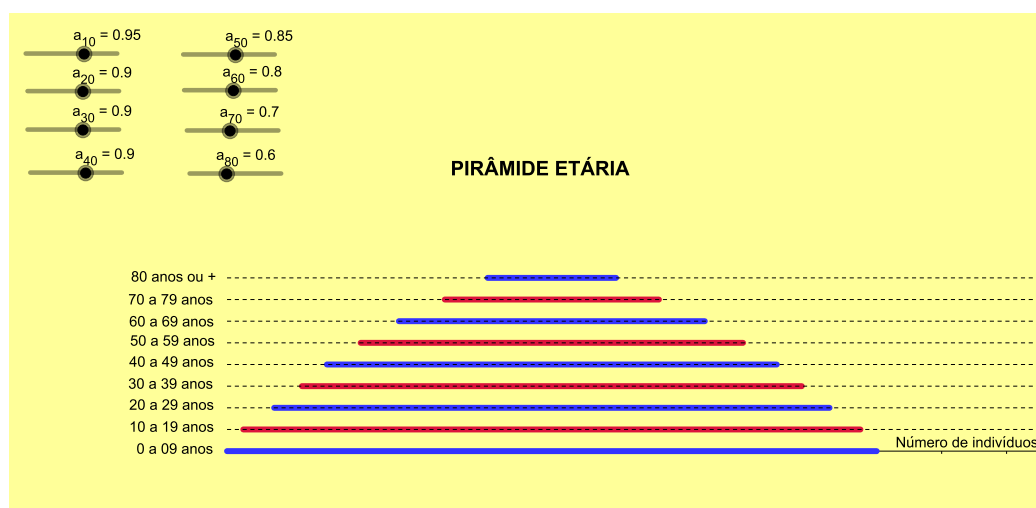


Figura 4.5: Pirâmide Etária: modelo abstrato.

(Fonte: Elaborado pelo Autor. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/kPvmgSTS>>)

4.6 Atividades 15 e 16 - Pesquisa de Campo

Objetivo

Utilizar os conhecimentos matemáticos e previdenciários adquiridos pelos alunos para para analisar situações práticas.

Conteúdo programático

Porcentagem, média aritmética, cálculo da contribuição previdenciária, cálculo do fator previdenciário, cálculo do valor inicial da aposentadoria por tempo de contribuição.

Metodologia

Pesquisa de campo, com avaliação dos resultados em sala de aula.

Atividade 15

Solicitar aos alunos pesquisar junto a pessoas próximas (pais, responsáveis, parentes, amigos etc) que sejam segurados da Previdência Social na condição de empregados, qual o valor da contribuição previdenciária que lhes é descontada pelas empresas para as quais trabalham e verificar, de acordo com a tabela 3.2, se os valores descontados estão corretos. Também levantar junto alguns segurados da categoria de contribuinte individual (autônomos) o valor da contribuição previdenciária que eles recolhem mensalmente e, partir daí, calcular os salários-de-contribuição correspondentes, bem como calcular o salário-de-contribuição médio dos entrevistados.

Atividade 16

Solicitar aos alunos fazer uma pesquisa junto a segurados da Previdência Social, registrando a idade e o tempo de contribuição de cada entrevistado. Após o levantamento desses dados, solicitar que calculem, para cada caso, o tempo mínimo de contribuição para que os entrevistados se aposentem pela regra 85/95 progressiva e pela regra dos 30/35 anos de contribuição, com a incidência do Fator Previdenciário, indicando a regra que resultaria no maior valor inicial do benefício, no caso de aposentadoria imediatamente após o cumprimento das condições exigidas por ambas as regras. Atentar para a progressividade da regra 85/95, uma vez que a mesma passará a ser 86/96 em 31/12/2018, 87/97 em 31/12/2020, 88/98 em 31/12/2022, 89/99 em 31/12/2024 e, finalmente, 90/100 em 31/12/2026. Ou seja, entre 2018 e 2026, inclusive, haverá o aumento de 1 ponto a cada dois anos, o que explica o porquê da regra ser denominada de *progressiva*. No caso da regra dos 30/35 anos de contribuição, com a incidência do Fator Previdenciário, o referido fator deverá ser calculado com base na tabela atual.

Capítulo 5

Considerações Finais

Ao longo do presente trabalho procuramos demonstrar que não somente é possível, mas também desejável, estabelecer correlações entre a matemática e a educação previdenciária, trazendo a discussão de ambos os assuntos, interligados, para a sala de aula. Essa estratégia, por um lado, oportuniza aos alunos uma experiência de aplicação prática e cotidiana da matemática, disciplina por vezes abordada no ensino básico de forma pouco associada com assuntos cotidianos, o que contribui para o distanciamento dos discentes em relação à disciplina. Por outro lado, ao estudar aplicações da matemática em questões previdenciárias, os alunos têm a oportunidade de entrar em contato com temas hoje essenciais ao pleno exercício dos direitos e deveres da cidadania. Como afirmam Giambiagi e Tafner, *“quando se trata do tema previdenciário, não há como dividir a sociedade entre ‘interessados’ e ‘não interessados’ na matéria, pois ela interessa a todos, já que todos ou são aposentados ou aspiram a sê-lo algum dia”*¹.

No que tange às questões previdenciárias aqui discutidas, tentamos apresentar o conteúdo que consideramos mais básico para um estudo inicial do assunto, tendo sempre o cuidado, porém, de indicar fontes de leitura para aqueles que desejarem um estudo mais aprofundado dos temas apresentados. Principalmente aos professores, recomendamos a leitura de pelo menos uma das obras de Direito Previdenciário que indicamos e também da legislação previdenciária a que fizemos referência, além do acesso às páginas eletrônicas cujos *links* foram disponibilizados ao longo de todo trabalho. Cabe aqui também um alerta quanto às frequentes alterações das regras previdenciárias, o que exige um constante acompanhamento. Uma vez que os seguidos governos não tem tido força política para aprovar uma reforma previdenciária mais ampla e definitiva, a todo momento vai-se fazendo minirreformas, o que cria dificuldades para quem quer manter-se atualizado nos temas relacionados à previdência. Todavia, há também temas previdenciários mais

¹GIAMBIAGI, Fábio; TAFNER, Paulo. Demografia – a ameaça invisível: o dilema previdenciário que o Brasil se recusa a encarar. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011, p. 12.

basilares, cuja mudança não ocorre com tanta frequência, até por estarem previstos na Constituição Federal, para cuja alteração exige-se um rito mais rigoroso. O importante é que os professores tenham sempre o cuidado de verificar a ocorrência de possíveis alterações nas normas previdenciárias relativas aos temas que pretende abordar, antes de efetivamente levá-los à discussão com os alunos.

Esperamos que o presente trabalho contribua para encorajar professores e alunos a começar a explorar, dentro do estudo da Matemática, ao menos os temas mais básicos relacionados à educação previdenciária, os quais procuramos destacar nesta dissertação. Por óbvio, a educação previdenciária pode também ser abordada no contexto de outras disciplinas, como Geografia e História, sendo desejável que haja uma coordenação entre os professores dessas disciplinas, a fim de melhor planejar a abordagem desse importante conteúdo, que a cada dia ganha mais relevo nas sociedades modernas e que, como já dissemos, é hoje de fundamental importância para o pleno exercício da cidadania.

Referências

- ALMEIDA, Mário Sérgio Mattos de. **A matemática de alguns experimentos sonoros**. 2014. 84 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT), Instituto de Matemática, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2014
- CASTRO, Carlos Alberto Pereira de; LAZZARI, João Batista. **Manual de Direito Previdenciário**. 6. ed. São Paulo: LTR, 2005.
- GIAMBIAGI, Fábio; TAFNER, Paulo. **Demografia – a ameaça invisível: o dilema previdenciário que o Brasil se recusa a encarar**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.
- IBRAHIM, Fábio Zambitte. **Curso de direito previdenciário**. 20 ed. Rio de Janeiro: Impetus, 2015
- IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**. Vol. 1 e 11. São Paulo: Atual, 2013.
- KERTZMAN, Ivan. **Curso prático de direito previdenciário**. 13. ed. Salvador: Editora Juspodivm, 2015.
- LIMA, Elon Lages. **A matemática do ensino médio**. Vol. 1 e 2. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- MENEZES, Adriana de Almeida. **Direito previdenciário**. 4. ed. Salvador: Editora Juspodivm, 2014.
- MATHIAS, Washington Franco; GOMES, José Maria. **Matemática financeira**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 1995.
- MORGADO, Augusto César. **Progressões e matemática financeira**. 5. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2001.
- NÍDIA, M. L. Lubisco; VIEIRA, Sônia Chagas. **Manual de estilo acadêmico: monografias, dissertações e teses**. 2. ed. Salvador: EDUFBA, 2003.

Páginas eletrônicas:

<http://veja.abril.com.br/politica/expectativa-de-vida-avanca-25-anos-em-meio-seculo/>.
<http://www.mtps.gov.br/perguntas-frequentes?catid=20>.
<http://www.previdencia.gov.br/2015/06/servico-novas-regras-para-aposentadoria-por-tempo-de-contribuicao-ja-estao-em-vigor>.
<http://www.previdencia.gov.br/2015/12/aposentadoria-fator-previdenciario-e-alterado-pela-tabua-de-mortalidade-do-ibge/>.
<https://previdenciarista.com/wp-content/uploads/2016/05/FatorPrevidenciario2016.pdf>.
<http://economia.uol.com.br/noticias/redacao/2016/01/15/dilma-diz-que-previdencia-preocupa-mais-governo-do-que-impeachment.htm>.
<https://fernandonogueiracosta.files.wordpress.com/2016/08/desmistificando-o-dc3a9ficid-da-previdc3aancia-01-06-2016.pdf>
<https://www12.senado.leg.br/publicacoes/estudos-legislativos/tipos-de-estudos/boletins-legislativos/bol37>.
<https://noticias.uol.com.br/politica/ultimas-noticias/2016/12/01/temer-diz-que-reforma-da-previdencia-sera-enviada-ao-congresso-na-proxima-semana.htm>.
<http://g1.globo.com/economia/noticia/rombo-da-previdencia-social-cresce-745-em-2016-e-bate-recorde.ghtml>.
<https://www.brasildefato.com.br/2016/07/22/esta-sobrando-muito-dinheiro-na-previdencia-entenda-os-numeros/>.
<http://www.ocafezinho.com/2016/07/18/em-tese-de-doutorado-pesquisadora-denuncia-a-farsa-da-cri-se-da-previdencia-no-brasil-forjada-pelo-governo-com-apoio-da-imprensa/>.
<http://brasileiros.com.br/2016/06/previdencia-chile-e-o-exagero-neoliberalismo/#>.

Vídeos:

<https://www.youtube.com/watch?v=vXzUbziZQ2c>

https://www.youtube.com/watch?v=D_HQM7xqaFI

<https://www.youtube.com/watch?v=ximRnKLSKQk&feature=youtu.be>

<https://www.youtube.com/watch?v=qWssYAeMj3w>