Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Tese de Doutorado

Existência de Soluções Fortes para Equaçôes Diferencias Parciais Estocásticas Hiperbólicas-Parabólicas

Aubedir Seixas Costa

Salvador-Bahia
fevereiro de 2016

Existência de Soluções Fortes para Equações Diferencias Parciais Estocásticas Hiperbólicas-Parabólicas

Aubedir Seixas Costa

Tese de Doutorado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática UFBA/UFAL como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edson Alberto Coayla Teran.

Salvador-Bahia
fevereiro de 2016

Existência de Soluções Fortes para Equações Diferencias Parciais Estocásticas Hiperbólicas-Parabólicas

Aubedir Seixas Costa

Tese de Doutorado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática UFBA/UFAL como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática, aprovada em 19 de fevereiro de 2016.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Edson Alberto Coayla Teran (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Juan Andrés Gonzalez Marin
UFBA

Prof. Dra. Vanessa Barros Oliveira
UFBA

Prof. Dr. Jorge Ferreira
UFF

Prof. Dr. Pedro José Catuogno
UNICAMP

A minha primeira e grande mestra, minha Mãe.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por permitir chegar ao final deste curso.

A minha esposa Ana Cláudia e ao meu filho Cláuber, pela dedicação, paciência, apoio durante esta caminhada. Sua ajuda foi fundamental.A minha Mãe Maria Gregória Seixas e

a minha irmã Izabel (in memoria) as pessoas que mais se empenharam na minha formação pessoal e acadêmica.

Ao Professor Dr. Edson Alberto Coayla Téran, pela orientação e amiga, pelo incentivo, credibilidade e dedicação na elaboração deste trabalho.

Aos Professors Dr. Jorge Ferreira, Dr. Juan Gonzales, Dra. Vanessa Oliveira, Dr. José Pedro.

Aos Professores: Izaac, Evandro, José Nelson, Diego Catalano,....pelo incentivo.

A todos professores que compõem o Corpo Docente do Programa de Pós-graduação em Matemática da UFBA e do Instituto de Matemática da UFBA.

Aos colegas da pós-graduação em Matemática e da Estatistica pelo incentivo, companherismo, cooperação durante o curso. Em especial: Kátia, Luiz, Ellen, Alejandra, Teófilo, Roberto, Marcia, Mariana, Marcio, Giovane,...

A todos que formam o Campus Universitário do Baixo Tocantins pelo apoio total. Em especial aos professores, Damião Bezerra, Waldir Abreu, Raimundo das Graças, Sebastião, Francisca Carvalho, Renato, Silvana, Suellen,... pelo incentivo incondicionais.

Aos funcionários do Instituto de Matemática da UFBA: Davilene, Claudio, Artur, Marcio,...

" O dom da fala foi concedido aos homens não para que enganassem uns aos outros, mas sim para que expressem seus pensamentos uns aos outros".

Santo Agostinho;

Resumo

Nosso objetivo neste trabalho é determinar a existência de solução forte para a seguinte equação diferencial parcial estocástica do tipo hiperbólica-parabólica, com ruido multiplicativo, com dados iniciais não-nulos e condições de fronteira nula.

$$\begin{aligned} & k_1(x)u'' + k_2(x)u' - \Delta u = F(t,u,u') + k_1(x)B(t,u,u')\tfrac{\partial W(t)}{\partial t} \quad \text{em } Q, \\ & u = 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma, \\ & u(x,0) = u_0(x),\ k_1(x)u'(x,0) = \sqrt{k_1(x)}u_1(x) \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Onde k_1, $k_2 \in L^\infty(D)$, com $k_1(x) \geq 0$, $k_2(x) \geq \beta > 0$ e $Q =]0,T[\times D$, $\Sigma =]0,T[\times \partial D$, $T > 0$ fixo, com $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado com fronteira suáve e W é um processo de Wiener.

Provamos a existência utilizando o Método da Contração e o Teorema do ponto fixo de Banach. Para isto, encontramos uma solução para cada ϵ, $0 < \epsilon < 1$ do seguinte sistema pertubado

$$\begin{aligned} & k_{1\epsilon}(x)u_\epsilon'' + k_2(x)u_\epsilon' - \Delta u_\epsilon = F(t,u_\epsilon,u_\epsilon') + k_{1\epsilon}(x)B(t,u_\epsilon,u_\epsilon')\frac{\partial W(t)}{\partial t} \quad \text{em } Q, \\ & u_\epsilon(x,0) = u_0(x),\ k_{1\epsilon}(x)u_\epsilon'(x,0) = \sqrt{k_{1\epsilon}(x)}u_1(x) \ . \end{aligned} \tag{2}$$

Em seguida passando de limite quando $\epsilon \to 0$ obtemos a solução da equação (1).

Palavras-Chaves: Equações diferencias estocásticas, processos de Wiener, Equações hiperbólicas-parabólicas.

Abstract

The aim of this work is to determine the existence of the strong solution to the followingstochastic partial differential equation of the hyperbolic-parabolic type, with multiplicative noise, non-zero initial data and boundary condition zero:

$$
\begin{aligned}
& k_1(x)u'' + k_2(x)u' - \Delta u = F(t, u(t), z(t)) + k_1(x)B(t, u(t), z(t))\frac{\partial W(t)}{\partial t} \quad \text{em } Q, \\
& u = 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma, \\
& u(x,0) = u_0(x),\ k_1(x)u(x,0) = \sqrt{k_1(x)}u_1(x)\ .
\end{aligned} \tag{3}
$$

where $k_1,\ k_2 \in L^\infty(D),\ k_1(x) \geq 0,\ k_2(x) > 0,\ Q =]0,T[\times D,\ \Sigma =]0,T[\times \partial D,\ T > 0$ fixed and $D \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded open with smooth boundary ∂D and W is a Wiener process.

We prove the existence of a solution using the contraction method and Banach's fixed-point Theorem. For this, we find the solution existence by solving the following perturbed problem

$$
\begin{aligned}
& k_{1\epsilon}(x)u_\epsilon'' + k_2(x)u_\epsilon' - \Delta u_\epsilon = F(t, u_\epsilon, u_\epsilon') + k_{1\epsilon}(x)B(t, u_\epsilon, u_\epsilon')\frac{\partial W(t)}{\partial t} \quad \text{em } Q, \\
& u_\epsilon(x,0) = u_0(x),\ k_{1\epsilon}(x)u_\epsilon'(x,0) = \sqrt{k_{1\epsilon}(x)}u_1(x)\text{em}D.
\end{aligned} \tag{4}
$$

and then we take the limit to get the solution of the problem (3).

Key Words: Stochastic differential equation, Wiener process, hyperbolic-parabolic equation.

Sumário

Introdução

O estudo das equações diferenciais parciais estocásticas é de grande importância teórica e tem ampla aplicações em diferentes áreas de pesquisa. As equações diferenciais estocásticas podem ser entendidas como equações diferenciais de evolução acrescidas de ruidos(pertubações). Nosso trabalho tem como objetivo determinar a existência e unicidade, do seguinte problema estocástico.

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto limitado com fronteira regular Γ. Seja $T > 0$ um número real fixo. Definiremos $\mathcal{Q} = D \times]0, T[$, um cilíndro com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$. Seja $\{W(t)\}_{t \in [0,T]}$ um processo de Wiener cilíndrico sobre o espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ com valores em $L^2(D)$, $(\mathcal{F}_t)$-adaptado e, com operador de covariância R tal que $trR < \infty$. Sonbre $[0, T] \times \Omega$, consideremos a seguinte problema diferencial estocástico.

$$\begin{array}{l} k_1(x)\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_2(x)\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u(t) + F(t, u, \dfrac{\partial u}{\partial t}) + k_1(x) B(t, u, \dfrac{\partial u}{\partial t})\,\dfrac{\partial W(t)}{\partial t} \\ u = 0 \,\text{em} \sum \\ u'(0) = 0, \quad k_1 z(t) = h \text{em} D, \end{array} \tag{5}$$

onde $k_1,\, k_2 \in L^\infty(D)$ e $k_1(x) \geq 0$, $k_2(x) \geq \beta > 0$. A equação

$$k_1(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_2(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u(t) + F(t, u(t), \frac{\partial u}{\partial t}) + k_1(x) B(t, u(t), \frac{\partial u}{\partial t})\,\frac{\partial W(t)}{\partial t}$$

é denominada hiperbólica-parabólica, pois nos pontos onde $k_1(x) > 0$, é uma equação hiperbólica, e nos ponto onde $k_1(x) = 0$ é uma equação parabólica. Em (5) tomemos $z = u' = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, e reescreveremos (5) na forma de equação diferencial estocástica.

$$\begin{array}{rcl} du &=& z\,dt \\ k_1(x)\,dz &=& (-k_2(x) z + \Delta u)\,dt + F(t, u(t), z(t))\,dt + k_1(x) B(t, u(t), z(t))\,dW(t) \\ u(0) &=& g, \quad k_1 z(0) = h. \end{array} \tag{6}$$

A teoria das Integrais Estocásticas e Equações Diferencias Estocáticas foi desenvolvida por K. Itô a partir de 1942. Esta teoria foi aplicada nas chamadas equações de Kolmogorov para determinar Processos de Markov.

Antes de 1960 o estudos sobre equações diferenciais estocásticas e Integrais estocásticas se restringiam as equações diferenciais ordinárias, com ampla apliacação na área de Finanças, Físicas, Biológicas e na Engenharia. Por exemplo: Turbulência de fluxo em fluidos dinâmicos, difusão e ondas em meios aleatórios.

A partir de 1970 os estudos das equações diferenciais parciais estocásticas em espaços de Hilbert, e em espaços de Banach começaram a se desenvolver sob o nome de equação de evolução estocásticas. Bachlan [1] provou o Teorema de existência de solução para equações estocásticas parabólicas ou equações de Itô, reformulando-a como uma equação integral com auxílio da função de Green associada, utilizando os métodos e conceitos da teoria de semigroupos, cuja solução no sentido de Itô é chamada de mild solution [10]. Considerando tal equação dependendo somente da variável tempo, a correspondente solução é conhecida como solução forte.

A existencia de solução forte foi discutida primeiro por Bensoussan e Teman [3] e [4], Pardoux [27], Krilov e Rozowski [19] e outros. Mild solutions e soluções fortes ambas são soluções fracas no sentido das equações diferenciais parciais. Equações diferencias parciais estocásticas hiperbólicas descrevem fenômenos físicos e mecânicos, os mais conhecidos são os movimentos de ondas e as vibrações mecânicas. No decorrer do nosso trabalho, iremos encontrar as seguntes expressões: Problema determinístico e problema estocástico. No problema determinístico vamos olhar o problema com dependência temporal, não levando em consideração a dependência aleatória.

O problema (5) foi originado do problema:

$$\begin{aligned}
&k_1(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_2(x)\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{em} \quad Q = (0,T)\times D\\
&u(0) = g, \quad k_1 z(0) = h.
\end{aligned}$$

tendo como base o problema

$$(P)\begin{cases} k_1(x)\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_2(x)\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u\,|u|^\rho = f \quad \text{em} \quad Q = (0,T)\times D\\ u(0) = g, \quad k_1 z(0) = h. \end{cases}$$

estudado por Medeiros em [24].

Um grande número de trabalhos envolvendo equações hiperbólica-parabólica são desenvolvidos em domínios cilíndricos e poucos destes são estudados em domínios não-cilíndricos.

Os problemas lineares, e não-lineares, para equações e sistemas de equações em domínios não-cilindricos têm sido tratados por diversos autores dentre eles: J.L.Lions [21], que introduziu o método da penalização para resolver o problema de exitência de solução. Usando o mesmo método, utilazado por Medeiros, ver [23], estudou a existência de solução fraca para o problema misto:

$$u'' - \Delta u + F(u) = 0 \;\; em \;\; Q, \tag{7}$$

sendo $F(s)$ uma função contínua que satisfazem $sF(s) \geq 0$ e Q um domínio crescente. J.Cooper e C.Bardos, ver [9], estudaram a existência e unicidade de soluções para a equação (7) introduzindo o termo não-linear $F(u) = |u|^\alpha u$, $(\alpha > 0)$ e considerando a fronteira Σ de Q globalmente "time-like", e Q não necessariamente crescente.

Em 1970, Strauss, ver [32], estudou o problema (P) com $k_1 = 1$, $k_2 = 0$ e com a não-linearidade considerada em [23], isto é:

$$u'' - \Delta u + F(u) = f \quad em \quad Q. \tag{8}$$

Podemos destacar, ainda, os trabalhos envolvendo a equação

$$k_1(x)u''(x,t) + k_2(x)u'(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \quad em \quad Q, \tag{9}$$

sendo $k_1(x) \geq 0 \;\; e \;\; k_2(x) \geq \beta > 0, \forall x \in \Omega$.

A equação (9) é denominada hiperbólica-parabólica pois nos pontos onde $k_1(x) > 0$ é uma equação hiperbólica, e nos pontos onde $k_1(x) = 0$ é uma equação parabólica. Este tipo de equação foi estudado por Bensoussan-Lions-Papanicolau, ver [2], considerando dados iniciais não-nulos. Medeiros, ver [24], estudou a existência de soluções fracas para a equação (9) mas considerando o termo não-linear $|u|^\rho u, \rho > 0$. Vragov, ver [35], estudou (9) para o caso em que k_1, k_2 dependem de $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$, mas com condições iniciais nulas. Lar'kin, ver , estudou (9) com condições não-lineares mais gerais e com k_1, k_2 dependendo de $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$, incluindo também f com fortes restrinções. Em 1988, D.C.Pereira, ver [28], estudou a existência e a unicidade de solução para a equação:

$$k_1(x,t)u''(x,t) - \Delta u(x,t) - \Delta u''(x,t) + |u(x,t)|^\rho u(x,t) = f(x,t) \quad em \quad Q, \tag{10}$$

com $\rho > 0$ se $n = 1,2$ e $0 < \rho \leq \frac{2}{n-2}$ se $n \geq 3$.

Em 1995, Ferreira, ver [13], estudou a existência e decaimento exponencial, quando $t \to +\infty$, das soluções fracas do problema misto para a equação hiperbólica-parabólica não-linear:

$$(k_1(x,t)u'(x,t))' + k_2(x,t)u'(x,t) + A(t)u(x,t) + F(u) = f(x,t) \quad em \quad Q,$$

sendo $F(s)$ uma função contínua que satisfaz $sF(s) \geq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}$ e $\{A(t), t \geq 0\}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(H_0^1(\Omega); H^{-1}(\Omega))$, genera- lizando a formulação original de (9).

Outros trabalhos também tiveram significativa relevância na área foram os de: Ferreira-Pereira [15] e Ferreira-Lar'kin [14].

Organização da tese: Este trabalho está organizado da seguinte maneira;

No capítulo 1 abordamos: Os espaços funcionais; as definições e resultados do cálculo estocástico e alguns resultados do cálculo diferencial necessários para determinar a existência de soluções para equações diferenciais parciais do tipo hiperbólico-parabólico, adaptados as equações diferenciais parciais estocásticas do tipo hiperbólica-parabólica.

Capítulo 2: Aqui estudamos a existência de solução para versão linear do problema (6) com ruído aditivo.

$$\begin{aligned} u(t) &= g + \int_0^t z(s)\,ds \\ k_1(x)z(t) &= h + \int_0^t (Au(s) - k_2(x)\,z(t) + f(s))\,ds + k_1(x)\,M(t) \end{aligned} \tag{11}$$

para todo $\quad t \in [0,T], \quad$ quase sempre $\quad \omega \in \Omega$, onde $M(t)$ é um martingale em $L^2(D)$ com $M(0) = 0$. Como em Medeiros [24], a existência de solução do sistema (11), é consequência da solução do seguinte problema pertubado

$$\begin{aligned} u_\epsilon(t) &= g + \int_0^t z_\epsilon(s)\,ds \\ k_{1\epsilon}(x)z_\epsilon(t) &= h + \int_0^t (Au_\epsilon(s) - k_2(x)\,z_\epsilon(t) + f(s))\,ds + k_1\epsilon(x)\,M(t) \end{aligned} \tag{12}$$

para $\epsilon, 0 < \epsilon < 1$, com $k_{1\epsilon}(x) = k_1(x) + \epsilon$. Em seguida resolveremos o sistema aproximado

$$\begin{aligned} u_{\epsilon m}(t) &= g + \int_0^t z_{\epsilon m}(s)\,ds \\ k_{1\epsilon}(x)z_{\epsilon m}(t) &= h + \int_0^t (Au_{\epsilon m}(s) - k_2(x)\,z_{\epsilon m}(t) + f(s))\,ds + k_1\epsilon(x)\,M^m(t) \end{aligned} \tag{13}$$

que nos dará uma sequência de soluções aproximadas, posteriormente, mediante estimativas a priori, mostraremos que essa sequência converge, numa topologia adequada, para solução do sistema (12), de modo análogo passando o limite quando $\epsilon \to 0$ encontramos a solução do sistema (11)

Capítulo 3: Neste capítulo estudamos a existência de solução do problema (5) na versão não linear com ruido multiplicativo e com coeficientes Lipschitz e outras adequadas. Aqui adequamos a técnica usada na capítulo 2.

Apendices: No apêndice A abordaremos sobre o espaço de Banach E_T.

No apêndice B enunciaremos a definição de integral de Bochner e suas propriedades.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas notações, definições e resultados do cálculo estocástico e alguns resultados importantes de EDP que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Aos resultados anunciados, daremos as referências onde encontram-se as respectivas demontrações. Nas seções e capítulos seguintes, uma propriedade dos espaços de Sobolev que será usada constantemente é a imersão contínua e compacta destes espaços nos $L^p(D)$. No que segue, os símbolos $\hookrightarrow$, e $\hookrightarrow^c$ representarão imersão contínua e compacta respectivamente.

1.1 Notações

Nesta seção faremos algumas considerações sobre os espaços funcionais, assim com seus produtos internos e normas respectivamente. Aqui estaremos usando as definições e notações usuais da literatura, por exemplo, podemos consultar Brezis [6], Evans [11], Lions [21], e outros.

Seja D um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ e p um número real, $1 \leq p < \infty$, denotaremos por $L^p(D)$ o espaço de Banach das (classes de) de funções reais u definidas em D que são mensuráveis a Lebesgue e tais que $|u|^p$ é integrável, equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(D)} = (\int_D |u(x)|^p \, dx)^{1/p}$$

Quando $p = 2$ temos que $L^2(D)$ é um espaço de Hilbert. Denotaremos o produto interno e a norma deste espaço, e respectivamente, por $(.)$, $|.|$, isto é,

$$\begin{aligned} &(u, v) = \int_D u(x)v(x) \, dx, \ \forall u, v \in L^2(D) \\ &|u|^2 = (u, u), \ \forall u \in L^2(D) \end{aligned} \tag{1.1}$$

No caso $p = \infty$, denotaremos por $L^\infty(D)$ o espaço de Banach das (classes de) de funções reais u definidas em D que são mensuráveis a Lebesgue e essencialmente limitadas em D, equipado com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(D)} = \text{sup.ess}_{x\in D}|u(x)| \tag{1.2}$$

Representaremos por $\mathcal{D}(D)$ o espaço das funções testes em D, isto é, o espaço das funções $u : D \to \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis e possuem suporte compacto em D, e $\mathcal{D}'(D)$ representa o espaço das distribuições sobre D.

Denotaremos por $H^m(D)$, m inteiro não negativo, o espaço de Sobolev de ordem m, isto é, o espaço vetorial das funções u de $L^2(D)$ que possuem derivadas, no sentido das distribuiçoes sobre D, até a ordm m pertencentes a $L^2(D)$. $H^m(D)$ é o espaço de Hilbert equipado com o produro interno

$$((u,v))_{H^m(D)} = \sum_{|\alpha|\le m}\int_D D^\alpha u D^\alpha v\,dx,\ \forall u,v\in H^m(D), \tag{1.3}$$

com norma induzida por este produto interno dada por

$$\|u\|_{H^m(D)} = \sum_{|\alpha|\le m}\int_D |D^\alpha u|^2_{L^2(D)}\,dx,\ \forall u,\in H^m(D). \tag{1.4}$$

Por $H^m_0(D)$ representaremos o feicho de $\mathcal{D}(D)$ em $H^m(D)$. Denotaremos por H^{-m} o dual topológico de $H^m_0(D)$.

Sendo D um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, então decorre da desiguladade de Poincaré-Friedrich, (ver [25]) que em $H^1_0(D)$ a norma induzida por $H^1(D)$ é equivalente a

$$\|u\|^2 = |\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^{n}\int_D |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2\,dx \tag{1.5}$$

Denotaremos por $((,))$ e $\|.\|$ o produto interno e norma de $H^1_0(D)$ respectivamente induzido produto interno e norma de $H^{-1}(D)$.

Identificando $L^2(D)$ com seu dual topológico, segue pelo Teorema da Representação de Riesz, a seguinte cadeia de imersões contínuas e densas

$$\mathcal{D}(D) \hookrightarrow H^m_0(D) \hookrightarrow L^2(D) \hookrightarrow H^{-m}(D) \hookrightarrow \mathcal{D}'(D).$$

Lema 1.1.1. (Desigualdade de Poincaré) Seja $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado em alguma direção. Se $u \in H^1_0(D)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|u|^2_{L^2(D)} \le C\,|\nabla u|^2_{L^2(D)}\,.$$

Observação 1.1.1. Utilizando desigualdade de Poincaré podemos concluir que em $H^1_0(D)$, as normas $\|u\|_{H^1(D)}$ e $|\nabla u|_{L^2(D)}$ são equivalentes.

Dados um espaço de Banach X e um número real $T > 0$, denotaremos por $L^p(0,T;X)$, $1 \le p < \infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções a valores vetoriais $u :]0;T[\to X$, fortemente mensuráveis à Lebesgue e tais que a aplicação $t \to \|u(t)\|_X$ pertence $L^p(]0,T[)$, e munido com a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = (\int_0^T \|u(t)\|^p)^{1/p}.$$

Por $L^\infty(0,T;X)$ represetaremos o espaço de Banach das (classes de) funções $u :]0,T[\to X$ fortemete mensuráveis e tais que a aplicação $t \to \|u(t)\|_X$ é essencialmente limitada em $]0,T[$, equipado com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup ess_{0<t<T} \|u(t)\|_X.$$

O espaço $L^p(0,T;X)$ com $1 < p < \infty$ e X, é um espaço reflexivo. Tem-se $[L^p(0,T;X)]' = L^{p'}(0,T;X')$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e X' o dual topológico de X, p' o conjugado de p. Temos também que $[L^1(0,T;X)]' = L^\infty(0,T;X')$ é um espaço de Banach reflexivo e separável.

1.2 Definições

Nesta seção daremos algumas definições que auxiliam no cálculo estocástico, vejamos por exemplo: Evans [12], Ikeda, Watanabe [17], Prévot, and Röckner [29] e outros.

Definição 1.2.1. Seja $\Omega \neq \emptyset$ um conjunto. Seja $\mathcal{F}$ uma coleção de subconjuntos de Ω. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma álgebra em Ω se:

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$

(ii) Se $A \in \mathcal{F}$ então $A^c \in \mathcal{F}$

(iii) Se $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$ então $\bigcup_{i=1}^{n} \in \mathcal{F}$

Definição 1.2.2. Dizemos que a álgebra $\mathcal{F}$ em Ω é uma σ-álgebra em Ω se dada uma, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ com $A_i \in \mathcal{F}$ então

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}, \quad i \in \mathbb{N}$$

Definição 1.2.3. Uma medida de probablidade (ou simplesmente probabilidade) é uma medida $\mathbb{P}$ com $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Definição 1.2.4. Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável, dizemos que a tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é um espaço medida, ou espaço de probabilidades, onde $\mathbb{P}$ é a medida de probalidade sobre $\mathcal{F}$. O espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é dito completo , se para $A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}(A) = 0 \quad$ e $\quad B \subset A$ implica que $B \in \mathcal{F}$.

Observação 1.2.1. Aqui iremos supor que o espaço de probabilidade com os quais vamos trabalhar são completos.

Lemma de Borel-Cantelli:

Definição 1.2.5. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidades e sejam $A_1, ..., A_n, ...$ eventos sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. O evento

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \{\omega \in \Omega | \omega \ \text{ pertece a um número infinito de } \ A_n\},$$

é chamado de "A_n" "infinitely often", denotado por "$A_n' s$ i.o.".

Lema 1.2.1. (Borel-Cantelli):

(a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, então $\mathbb{P}(A_n \ \ i.o.) = 0$.

(b) Se a família de eventos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é independente e $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ então $\mathbb{P}(A_n) = 1$.

A demontração pode ser vista em [12] pg.19

Definição 1.2.6. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de a probabilidade e S um espaço de Banach separável. A aplicação $\mathbb{X} : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (S, \mathcal{B}(S))$ é chamado elemento aleatório ou variável aleatória mensurável, se para cada $B \in \mathcal{B}$, onde $\mathcal{B} = \mathcal{B}(S)$ é σ-álgebra de Borel de S, tivermos $\mathbb{X}^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ ou equivalentemente dizemos que $\mathbb{X}$ é $\mathcal{F}/\mathcal{B}$-mensurável.

Observação 1.2.2. Um elemento aleatório (ou variável aleatória) $\mathbb{X} : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (S, \mathcal{B})$ induz uma medida de probabilidade $\mathbb{P}_{\mathbb{X}}$ em $(S, \mathcal{B})$ dada por $\mathbb{P}_{\mathbb{X}}(B) = \mathbb{P}(\mathbb{X}^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}$

Definição 1.2.7. Seja $\mathbb{X} : \Omega \to S$ uma variável aleatória. Então

$$\sigma(\mathbb{X}) := \{\mathbb{X}^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}\}$$

é a σ-álgebra gerada por $\mathbb{X}$.

Observação 1.2.3. Se $\mathcal{G}$ é uma σ-álgebra em $\mathcal{F}$ tal que $\mathbb{X}$ é $\mathcal{G}/\mathcal{B}$-mensurável, temos que $\sigma(\mathbb{X}) \subset \mathcal{G}$. Isto é $\sigma(\mathbb{X})$ é a menor σ-álgebra que torna $\mathbb{X}$, $\sigma(\mathbb{X})/\mathcal{B}$-mensurável.

Para definir a integral de Bochner utilizaremos a definição em C. PRÉVOT, and M. RÖCKNER [29]. Como na literatura, vamos definir, primeiro, a *Integral de Bochner* sobre o espaço das funções simples.

Definição 1.2.8. Uma variável aleatória $\mathbb{X}$ sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e chamada variável aleatória simples se

$$\mathbb{X} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{X}_k \, \mathbb{I}_{A_k}(\omega)$$

onde $A_1, A_2, ...A_k \in \mathcal{F}$, $\quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$ e

$$\mathbb{I}_{A_k}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A_k \\ 0, & \omega \in \Omega - A_k \end{cases} \tag{1.6}$$

Definição 1.2.9. Seja $\mathbb{X}$ uma variável aleatória definida sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ com valores no espaço de Hilbert H. Duas variáveis aleatórias $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ são identificáveis se $\mathbb{P}[\omega; \mathbb{X}(\omega) \neq \mathbb{Y}(\omega)] = 0$. $\mathbb{X}$ é chamada integrável se

$$\int_{\Omega} \|\mathbb{X}(\omega)\|_H \mathbb{P}(d\omega) < \infty$$

Dizemos que $\mathbb{X}$ é p-integrável se

$$\int_{\Omega} \|\mathbb{X}(\omega)\|^p \mathbb{P}(d\omega) < \infty, \quad (p > 0)$$

Denotamos por $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a coleção (classes de) variáveis aleatórias p-integráveis e sobre $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiremos a norma

$$\begin{aligned} \|X\|_p &= (\int_{\Omega} \|\mathbb{X}(\omega)\| \mathbb{P}(d\omega))^{1/p}, \quad p \geq 1 \\ \|X\|_{\infty} &= \text{ess.sup}\|\mathbb{X}(\omega)\|, \quad p = \infty \end{aligned} \tag{1.7}$$

Seja $(X, \| \, \|)$ um espaço de *Banach*, $\mathcal{B}(X)$ a σ-álgebra de Borel de X e $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço mensurável com medida finita μ. Seja f uma função simples. Designaremos por

$$E = \{f : \Omega \to X | f = \sum_{k=1}^{n} x_k 1_{A_k}, x_k \in X, A_k \in \mathcal{F}, 1 \leq k \leq n, n \in \mathbb{N}\}$$

O conjunto das funções simples definidas em Ω com valores em X, e definiremos a seminorma $\| \, \|_E$ sobre o espaço vetorial E por

$$\| \, \|_E = \int \|f\| d\mu, \quad f \in E$$

Definição 1.2.10. Dado $f \in E$, a integral de *Bochner* de f é definida por

$$\int f \, d\mu := \sum_{k=1}^{n} x_k \mu(A_k).$$

Uma função mensurável $f : \Omega \to X$ é *Bochner* integrável se existe uma sequência de funções simples $f_n \in E$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} \|f - f_n\|_X \, d\mu = 0.$$

Assim a integral de Bochner é definida por

$$\int_\Omega f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu$$

Definição 1.2.11. Seja $\mathbb{X}$ uma variável aleatória $\mathcal{F}$-mensurável, Bochner integrável. Chamaremos

$$\mathbb{E}(\mathbb{X}) = \int_\Omega \mathbb{X} d\mathbb{P}$$

o valor esperado (ou esperânça ou valor médio) de $\mathbb{X}$ e

$$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \int_\Omega \|\mathbb{X} - \mathbb{E}(\mathbb{X})\|^2 d\mathbb{P}$$

a variância de $\mathbb{X}$.

A seguir enumeremos as propriedades inerentes a espearança condicional de uma variável aleatória.

(i) $\mathbb{E}(a\mathbb{X} + b\mathbb{Y}|\mathcal{G}) = a\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G}) + b\mathbb{E}(\mathbb{Y}|G)$ quase sempre, $a, b \in \mathbb{R}$.

(ii) Se $\mathbb{X} \geq 0$ quase sempre, então $\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})$.

(iii) $\mathbb{E}(\mathbb{I}|\mathcal{G}) = 1$ quase sempre.

(iv) Se $\mathbb{X}$ é $\mathcal{G}$-mensurável, então $\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G}) = \mathbb{X}$ quase sempre, em geral, se $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ é integravel e $\mathbb{X}$ é $\mathcal{G}$-mensurável $\mathbb{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}|\mathcal{G}) = \mathbb{X}\mathbb{E}(\mathbb{Y}|\mathcal{G})$ quase sempre.

(v) Se $\mathcal{G}$ é uma sub σ-álgebra de $\mathcal{F}$, então $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{F})|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})$ quase sempre.

(vi) Se $\mathbb{X}_n \to \mathbb{X}$ em $\mathcal{L}_1(\Omega)$, então $\mathbb{E}(\mathbb{X}_n|\mathcal{G}) \to \mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})$ em $\mathcal{L}_1(\Omega)$.

(vii) (Desigualdade de Jensen) Se $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é convexa e $\psi(\mathbb{X})$ é integrável então $\psi(\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})) \leq \mathbb{E}(\psi(\mathbb{X})|\mathcal{G})$ quase sempre.

Definição 1.2.12. Seja S um espaco de Banach real Separável e seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Seja $\mathbb{X}$ uma variável aleatória $\mathcal{F}$-mensurável, Bochner integrável. Seja $\mathcal{G}$ uma σ-álgebra contida em $\mathcal{F}$. Então existe uma única aplicação, a menos de um conjunto de probabilidade nula, $\mathbb{Z} : \Omega \to S$ Bochner integrável, mensurável com respeito a $\mathcal{G}$ tal que

$$\int_A \mathbb{X}\, d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{Z}\, d\mathbb{P}, \quad \text{para todo} \quad A \in \mathcal{G}.$$

$\mathbb{Z}$ é denotado por $\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})$ e é chamado de esperança condicional de $\mathbb{X}$. Além disso $\|\mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathcal{G})\| \leq \mathbb{E}(\|\mathbb{X}\|\,|\mathcal{G})$

Definição 1.2.13. **(i)** Uma coleção $\{\mathbb{X}(t); t \geq 0\}$ de variáveis aleatórias é chamada de processos estocásticos

(ii) Para cada ponto $\omega \in \Omega$, a aplicação $t \to \mathbb{X}(t, \omega)$ é denominado o caminho aleatório correspondente

Definição 1.2.14. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidades e $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ uma família crescentes de sub σ-álgebras de $\mathcal{F}$, isto é,

$$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq s$$

$\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ é contínua à direita se

$$\mathcal{F}_{t+0} := \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon} = \mathcal{F}_t$$

Definição 1.2.15. Uma σ-álgebra $\mathcal{B}_T$ de subconjuntos de $[0, \infty[\times \Omega$, gerada pelos conjuntos da forma $\{0\} \times B_0$ e $(s, t] \times B$ para $0 \leq s < t \leq T$, $B_0 \in \mathcal{F}_0$, $B \in \mathcal{F}_s$ é chamada de σ-álgebra predizíveis e seus elementos são chamados de conjuntos predizíveis. Um processo $\mathbb{X}(t)$ que é $\mathcal{B}_T$-mensurável é dito processo prédizível.

Observação 1.2.4. No que segue sempre iremos supor que a família $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ é contínua à direita, tal família $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ é chamada uma família de referência ou filtração.

Definição 1.2.16. Um processo $\mathbb{X} = (\mathbb{X}(t))_{t \geq 0}$ é chamado adaptado à filtração $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ (também dizemos $\mathcal{F}_t$-adaptado) se $\mathbb{X}(t)$ é $\mathcal{F}_t$-mensurável para cada t.

1.3 Integral Estocástica em Espaços de Hilbert

Nesta seção utilizaremos as definição em P.L. CHOW [7].

Sejam K, H dois espaços de Hilbert Separáveis com produto interno $(\,.\,)_K$, $(\,.\,)_H$ e normas $(\,.\,)_K^{1/2}$, $(\,.\,)_H^{1/2}$ respectivamente. Suponhamos $R : K \to H$ um operador linear. Conceberemos as seguintes classes de operadores:

(1) $\mathcal{L}(K, H)$: a classe de operadores lineares limitados $R : K \to H$ munido da norma

$$\|R\|_{\mathcal{L}} = \sup_{u \in K, \|u\| \leq 1} \|Ru\|$$

(2)

Definição 1.3.1. (Operador Hilbet-Schmidt). Seja $\{\phi_k,\, k \in \mathbf{N}\}$ uma base ortonormal do espaço de Hilbert K. Um operador $R \in \mathcal{L}(K, H)$ é chamado Hilbert-Schmidt se

$$\sum_{k \in \mathbf{N}} \langle R\,\phi_k, R\,\phi_k \rangle < \infty.$$

Denotaremos por $\mathcal{L}_2(K,H)$ a classe dos operadores Hilbert-Schimdt.

A norma de R é definida por

$$\|R\|_{\mathcal{L}_2} = (\sum_{k\in\mathbb{N}} \|R\,\phi_k\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

A definição de um operador Hilbert-Schmidt e sua norma são independentes da escolha da base. Além disso o espaço $\mathcal{L}_2(K,H)$ de todos os operadores Hilbert-Schmidt de K em H munido com o produto interno

$$\langle R,S\rangle_{\mathcal{L}_2} := \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle R\,\phi_k, S\,\phi_k\rangle$$

é um espaço de Hilbert separável.

A demonstração podemos encontrar em [18] proposição $B.7$ páginas $155-156$

(3) Denotaremos por $\mathcal{L}_1(K,H)$ a classe dos operadores lineares classe traço munido da norma

$$\|R\|_{\mathcal{L}_1} = Tr\hat{R} = \sum_{k=1}^{\infty}(\hat{R}\phi_k,\phi_k)$$

onde $\hat{R} = (R^*R)^{1/2}$ e R^* expressa o operador adjunto de R

As inclusões são evidentes

$$\mathcal{L}_1(K,H) \subset \mathcal{L}_2(K,H) \subset \mathcal{L}(K,H)$$

Se $K = H$ representaremos $\mathcal{L}_j(H,H)$ por $\mathcal{L}_j(H)$ onde $j = 0,1,2$ e $\mathcal{L}_0(H) = \mathcal{L}(H)$. Denotaremos por $\widehat{\mathcal{L}_1}$ a classe dos operadores auto-adjuntos classe traço, isto é $\widehat{\mathcal{L}_1} = \{S \in \mathcal{L}_1(H); S = S^*\}$.

Observação 1.3.1. **.** Se $R \in \mathcal{L}(K)$ é simétrico, não negativo então existe um único elemento $R^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(K)$ simétrico não negativo tal que $R^{\frac{1}{2}} \circ R^{\frac{1}{2}} = R$.

Se, $Tr\,R < \infty$ temos que $R^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}_2(K)$ onde $\|R^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathcal{L}_2} = Tr\,R$ e $S \circ R^{\frac{1}{2}} \in L_2(K,H)$ para todo $S \in \mathcal{L}(K,H)$.

A prova encontrar-se em [30] pg 179.

. Consideremos o espaço $K_R = R^{\frac{1}{2}}(K)$ munido do produto interno

$$\langle g,h\rangle_R := \left\langle R^{-\frac{1}{2}}g, R^{-\frac{1}{2}}h\right\rangle_K,$$

$g,h \in K_R$, onde $R^{-\frac{1}{2}}$ é o pseudo inverso de $R^{\frac{1}{2}}$ no caso em que R não é injetor. Pela proposição $C.0.3(i)$ em [29] o espaço $(K_R.\,\langle.\rangle_R)$ é um espaço de Hilbert separável. O espaço de Hilbert Separável $\mathcal{L}_2(K_R,H)$ é chamado de L_2^R. Da proposição $C.0.3(ii)$

em [29] $\{R^{\frac{1}{2}}\, g_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal de $(K_R, \langle , \rangle_R)$ se $\{g_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal de $(Ker\, R^{\frac{1}{2}})^{\perp}$. Esta base pode ser complementada a base de K pelos elementos de $KerR^{\frac{1}{2}}$. Desse modo obtemos que

$$\|S\|_{\mathcal{L}_2^R} = \|S \circ R^{\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}_2} \quad \text{para cada} \quad S \in \mathcal{L}_2^R.$$

Defina $\mathcal{L}(K, H)_R := \{T|_{K_R} | T \in \mathcal{L}(K, H)\}$. Já que $R^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}_2(K)$ então $\mathcal{L}(K, H)_R \subset \mathcal{L}_2^R$.

1.3.1 Martingales

Definição 1.3.2. Seja $M(t), t \in [0, T]$, um processo estocástico $\mathcal{F}_t$-adaptado à filtração $\mathcal{F}_t$ definido em Ω com valores em H tal que $\mathbb{E}(\|M(t)\|) = \mathbb{E}(\|M(t)\|_H) < \infty$. $M(t)$ é dito um martingale com valores em H se

$$\mathbb{E}(M(t)|\mathcal{F}_s) = M(s) \ \text{ quase sempre } \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{com} \quad s < t.$$

Um martingale $M(t)$ é dito contínuo, quase sempre $\omega \in \Omega$, se a aplicação (caminho aleatório) $t \to M(t, \omega)$ é contínua para cada $\omega \in \Omega$ fixo. Se $\mathbb{E}(M(t)|\mathcal{F}_s) \geq M(s)$, quase sempre $\omega \in \Omega$, para todo $t \in [0, T] \quad$ com $s < t$, diremos que $M(t)$ é um submartingale.

Proposição 1.3.1. Se $M(t)$ é um um martingale, então a norma $\|M(t)\|$ é um submartingale

Demonstração. A prova podemos encontrar em C. PRÉVOT, and M. RÖCKNER [29] pag. 20, prop. 2.2.6 □

Seja $M(t)$ um martingale contínuo a direita. Dizemos que que $M(t)$ é um martingale quadrado integrável se $\mathbb{E}(\|M(t)\|^2) < \infty$ para todo $t \geq 0$. Se $M(0) = 0 \quad q.s.$, e escrevemos $M \in \mathcal{M}^2$. Para qualquer $M \in \mathcal{M}^2$(ou $M \in \mathcal{M}^{2c}$, se M é também continua). $\|M(t)\|$ é um submartingale,

Agora vamos definir o processo de variação quadrática para $M \in \mathcal{M}_T^2(H)$ onde H é um espaço de Hilbert separável.

Definição 1.3.3. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e dada uma filtração $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Uma variável aleatória $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ é chamado um stopping time, com respeito a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, se para cada $t \geq 0$, $\{\omega, \sigma(\Omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Seja $M(t), t \in [0, T]$ um martingale com valor em H. $M(t)$ é dito um martingale local, se existe uma sequência de stopping times $\{\tau_n\}$ com $\tau_n \uparrow T$ quase sempre tal que $M(t \wedge \tau_n) \in \mathcal{M}^2(H)$, para cada n. Onde $t \wedge \tau_n = \min\{t, \tau_n\}$. Denotaremos por $\mathcal{M}_{loc}^2(H)$ a classe dos martingales locais quadrado integráveis.

Se $M(t) \in \mathcal{M}^2(H)$ então existe um único processo de variação quadrática $\langle M \rangle_t$, crescente, adaptado, começando de 0 tal que $\|M(t)\|_H^2 - \langle M \rangle_t\,, \quad t \in [0, T]$ é um martingale contínuo. Se $M, N \in \mathcal{M}_T^2(H)$, definiremos o processo covariância de M e N por:

$$\langle M, N\rangle_t = \frac{1}{4}(\langle M(t) + N(t)\rangle_t - \langle M(t) - N(t)\rangle_t \tag{1.8}$$

Em particular definiremos o processo de covariancia de $M(t)$ como sendo o operador $[M]_t$, contínuo, adaptado, com valores no espaço $\mathcal{L}_1(H)$, tal que para todo $g, h \in H$,

$$\langle (M(t), g)_H, (M(t), h)_H\rangle_t = ([M]_t\, g, h)_H.$$

Se $[M]_t$ tem uma densidade R_t tal que

$$[M]_t = \int_0^t R_s\, ds \tag{1.9}$$

então R_t é chamado de operador de covariância local ou operador característico local.

Lema 1.3.1. Seja $M(t)$ um martingale contínuo, quadrado integrável em H com $M(0) = 0$ e operador de covariância $\widehat{R}_t \in \widehat{\mathcal{L}}_1(H)$. Então

$$\mathbb{E}(\|M(t)\|^2) = \mathbb{E}(Tr[M]_t) = \mathbb{E}(Tr\widehat{R}_t) \tag{1.10}$$

Demonstração. Ver Chow [7] página 141 □

Denotaremos por $\mathcal{M}_T^2(H)$ a classe dos martingales $M(t)$, $t \in [0, T]$ quase sempre, contínuos tais que:

(i) $M(0) = 0$

(ii) $\sup \mathbb{E}(\|M(t)\|^2) < \infty$.

Em Metivier [26](Apud Pardux [27] pg. 5), a condição (ii) acima implica a existência de uma variável aleatória $M(T) \in L^2(\Omega; H)$ tal que $M(t) \to M(T)$ em $L^2(\Omega; H)$ quando $t \uparrow T$.

Lema 1.1. *Se $M \in \mathcal{M}_{loc}^2(H)$, e se τ é um stopping time tal que:*

$$\mathbb{E}(\sup_{t\leq\tau,\, t<T} \|M(t)\|) < \infty, \tag{1.11}$$

então $M_{t\wedge\tau} \to M(\tau)$ em $L^1(\Omega; H)$ quando $t \to T$ e $M(t\wedge\tau)_{t\in[0,T]}$ é um martingale.

mais informações vejamos Pardoux [27] página 6.

Seja $M(t) \in \mathcal{M}_T^2(H)$, Então a seguinte desigualdade é verdadeira,

$$\mathbb{E}\{\sup_{0\leq t\leq T} \|M(t)\|\} \leq \mathbb{E}(Tr[M]_T)^{1/2} \tag{1.12}$$

Lema 1.3.2. **Desigualdades de Doob**: Seja $M(t)$, $t \in [0,T]$ um martingale contínuo, L^p-integrável com valores em H. Então as seguintes desigualdades são verdadeiras.

$$\mathbb{P}(\sup_{0\le t\le T} \|M(t)\|_H > \lambda) \le \frac{1}{\lambda^p}\mathbb{E}(\|M(T)\|), \quad p \ge 1, \quad \lambda > 0 \tag{1.13}$$

$$\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T} \|M(t)\|_H) \le 3\mathbb{E}(Tr[M]_T)^{1/2}, \quad p = 1. \tag{1.14}$$

$$\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T} \|M(t)\|_H^p) \le (\frac{p}{p-1})^p\mathbb{E}(\|M(T)\|_H^p), \quad p > 1. \tag{1.15}$$

Demonstração. A prova das desigualdades: (1.13) e (1.15) encontramos, em [33] pg 21(Apud Chow [7] pg. 142); (1.14) encontramos em ([27] pg 6) e também (1.15) e encontramos em ([18] pg 19). □

1.3.2 Movimento Brownianno

Definição 1.3.4. (**Filtração Normal**) Uma filtração $\mathcal{F}_t, t \in [0,T]$ sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é chamada de normal se:

- $\mathcal{F}_0$ contém todos os elementos $A \in \mathcal{F}$ com $\mathbb{P}(A) = 0$ e
- $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$ para todo $t \in [0,T]$, isto é, uma filtração contínua a direita.

Definição 1.3.5. Um processo estocástico $X(t)$ em um espaço de Hilbert K é dito um processo Gaussiano com valores em K se para qualquer $g \in K$, $(X(t), g)$ é um processo Gaussiano com valores em $\mathbb{R}$. Seja $R \in \widehat{\mathcal{L}}_1(K)$. Um processo de Wiener em K com operador covariância R, ou um R-Processo de Wiener $\{W(t), t \ge 0\}$, é um processo Gaussiano, com valores em K, centralizado, contínuo com $W(0) = 0$ tal que incrementos independentes e a covariância

$$\mathbb{E}(W(t), g)(W(s), h) = (t \wedge s)(Rg, h). \quad \text{para qualquer} \quad s, t \in [0, \infty), g, h \in K \tag{1.16}$$

Observação 1.3.2. $W(t)$ é um martingale quadrado integrável, contínuo $\mathcal{F}_t$-adaptado em K com operador covariância local $R_t = R$ quase sempre $\forall t \ge 0$.

Teorema 1.3.1. (Representação do processo R-Wiener). Seja $\{e_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, um base ortonormal de K consistindo de autofunções do operador covariância clase traço R com correspondentes autovalores λ_k, $k \in \mathbb{N}$ tal que $Re_k = \lambda e_k$, $k = 1, 2, ...$ Então um R-processo de Wiener $W(t)$, $t \in [0,T]$, tem a seguinte representação em série

$$W(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sqrt{\lambda_k} b_k(t) e_k, \quad t \in [0,T], \tag{1.17}$$

onde $b_k(t), k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k > 0$, são movimentos Brownianos independentes, distribuidos com valores reais dados por $\beta_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}(W(t), e_k)$. Além disso a série converge uniformemente sobre qualquer intervalo finito $[0,T]$ com probabilidade 1

Demonstração. Para a prova vejamos [7] pg. 143-144. □

Foi considerado até o processo R-Wiener $W(t)$ com um operador covariância classe traço. É também de interesse considerar o processo de Wiener cilíndrico $B(t)$ em K. Formalmente $B(t) = R^{-1/2}W(t)$ que tem como covariância o operador I, operador identidade. Na verdade, faz sentido considerar $B(t)$ como um processo de Wiener generalizado com valores no espaço dual K'_R onde K_R denota o completamento de $R^{1/2}K$ com respeito a norma $\|.\|_R = \|R^{1/2}.\|$. Desde que a inclusão $i : K \hookrightarrow K'_R$ é um espaço de Hilbert-Schmidt, a tripla (i, K, K_R) forma um espaço denominado espaço de Wiener abstrato (ver [20] pg 63(Apud Chow [7] pg 144)). O processo de Wiener cilíndrico $B(t)$ pode ser definido commo um processo de Wiener em K'_R Seja K, H dois espaços de Hilbert separáveis em $W(t)$, $t \geq 0$ um R-processo de Wiener em K definido em espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ com uma filtração $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$ de sub-σ-álgebra crescente de $\mathcal{F}$. Nosso objetivo é definir a integral estocástica com respeito ao processo de Wiener $W(t)$, seja K_R o subespaço de Hilbert de K com norma $\|.\|_R$ e o produto interno

$$(g,h)_R = (R^{-1/2}g, R^{-1/2}h)_K = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}(g,e_k)_K(h,e_k)_K,\ g,h \in K. \tag{1.18}$$

Denotemos por $\mathcal{L}_2^R$ o espaço $\mathcal{L}_2(K_R, H)$ de operadores Hilbert-Schimdt. Munido da norma

$$\|S\|_R = ((S,S))_R^{1/2} = [Tr(SRS^*)]^{1/2} \tag{1.19}$$

induzida do produto interno $((F,G))_R = [Tr(GRF^*)]^{1/2}$ para qualquer $F, G \in \mathcal{L}_2^R$.

Mais detalhes veja [7] pg. 145 seção 6.3.

Seja $\Phi(t,\omega) \in \mathcal{L}_2^R$, para $t \in [0,T]$, um processo $\mathcal{F}_t$-adaptado com valores em $\mathcal{L}_2^R$ tal que

$$\mathbb{E}\int_0^T \|\Phi(s)\|^2\, d(s) \leq \infty \tag{1.20}$$

Definiremos uma integral estocástica com valores em H da forma

$$(\Phi.W) = \int_0^T \Phi(s)\, dW(s), \tag{1.21}$$

Em seguida definiremos

$$(\Phi.W)_t = \int_0^T \mathbb{I}_{[0,t]}(s)\Phi(s)\, dW(s) = \int_0^T \Phi(s)\, dW(s),\ t \leq T \tag{1.22}$$

onde $\mathbb{I}_{[0,t]}(.)$ denota a função indicadora do conjunto $[0,t]$ Definiremos um operador simples da forma

$$\Phi^n(s) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{[t_{k-1},t_k)}(s)\Phi_{k-1}, \tag{1.23}$$

onde $\pi = \{t_0, t_1, ..., t_k, ..., t_n\}$, com $0 = t_0 < t_1 < ... < t_k < ... < t_n = T$, é uma partição de $[0,T]$, e Φ_k é um $\mathcal{F}_{t_k}$-adaptado operador aleatório em L_2^R tal que

$$\mathbb{E}\|\Phi^k\|_R^2 = \mathbb{E}\, Tr(\Phi_k\, R\, \Phi_k^*) < \infty, \tag{1.24}$$

para $k = 0, 1, 2, ..., n$.

Denotamos por $S_T(K_R, H)$ o conjunto de todos os operadores simples da forma (1.23), para $\Phi \in S_T(K_R, H)$, definimos

$$(\Phi.W)_t = \int_0^t \Phi(s)\, dW(s) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_{k-1}(W_t - W_{t_k - 1}), \tag{1.25}$$

e neste caso, definimos a integral estocástica (1.22) diretamente como

$$(\Phi.W)_t = \int_0^t \Phi(s)\, dW(s) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_{k-1}(W_{t\wedge t_k} - W_{t\wedge t_k - 1}), \tag{1.26}$$

Lema 1.3.3. Para $\Phi \in S_T(K_R, H)$, $X(t) = (\Phi, W)_t$ é um martingale contínuo quadrado integrável com valores em H tal que, para todo $g, h \in H$ os que seguem são satisfeitas

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(X(t), g) = 0 \\ &\mathbb{E}(X(t), g)(X(t), h) = \mathbb{E} \int_0^{t\wedge s} (Q_r g, h)\, dr, \end{aligned} \tag{1.27}$$

e

$$\mathbb{E}\|X(t)\|^2 = \mathbb{E} \textstyle\int_0^t Tr\, Q_r\, dr \tag{1.28}$$

onde $(.) = (.)_H$ e $Q_t = (\Phi R \Phi^*)$, com $*$ denotando o adjunto.

Demonstração. ver Chow [7] pg.146. □

Para extender o integrando a um operador aleatório mais geral em L_2^R. Um processo $\Phi(t)$ com valores em L_2^R é dito operador prédizível se a aplicação $\Phi : [0,T] \times \Omega \to L_2^R$ é $\mathcal{B}_T$-mensurável. Definiremos $\mathcal{P}_T$ o espaço dos operadores predizíveis em L_R^2 munido da norma

$$\|\Phi\|_{\mathcal{P}_T} = \{\mathbb{E} \int_0^T Tr[\Phi(t) R \Phi(t)^*]\}^{1/2}\, dt. \tag{1.29}$$

Em particular conhecendo $\Phi^n \in \mathcal{P}_T$. O seguinte lema é excencial na extensão de um integrando simples a um operador predizível.

Lema 1.3.4. O conjunto $\mathcal{P}_T$ é um espaço de Hilbert separável sob a norma (1.29) e o conjunto $S_T(K_R, H)$ dos operadores predizíveis simples é denso em $\mathcal{P}_T$.

Demonstração. pode ser encontrada em [10] pg 9. □

Em vista ao lema (1.3.4) e (1.29), para $\Phi^n \in S_T(K_R, H)$, Tomemos $X^n(T) = (\Phi^n, W)$.

Então temos

$$\mathbb{E}\|X^n(t)\|_H^2 = \mathbb{E}\int_0^T Tr[\Phi^n(t)R\Phi^n(t)^*]dt = \mathbb{E}\int_0^T \|\Phi^n(t)\|_R^2\, dt. \tag{1.30}$$

Para $\Phi \in \mathcal{P}_T$ satisfazendo

$$\mathbb{E}\int_0^T Tr[\Phi(t)R\Phi(t)^*]dt < \infty, \tag{1.31}$$

pelo lema (1.3.4), existe $\Phi^n \in S_T(K_R, H)$ tal que $\|\Phi^n - \Phi\|_{\mathcal{P}_T} \to 0$ quando $n \to \infty$. A equação (1.30) mostra que a integral estocástica é uma transformação isométrica de $S_T(K_R, H) \subset \mathcal{P}_T$ no espaço $\mathcal{M}_T^2$ dos martingales com valores em H. Definiremos a integral de Itô de Φ como o limite

$$(\Phi.W) = \int_0^T \Phi(s)\, dW(s) = \lim_{n\to\infty}\int_0^T \Phi^n(s)\, dW(s) \tag{1.32}$$

em $\mathcal{M}_T^2$ e então definiremos

$$(\Phi.W)_t = \int_0^T \mathbb{I}_{[0,t]}\Phi(s)\, dW(s) = \int_0^t \Phi(s)\, dW(s) \tag{1.33}$$

que é um martingale contínuo com valores em H.

Observação 1.3.3. (1) Na verdade, a integral de Itô (1.32) pode ser definida como limite de uma sequência de integrais com operadores predizíveis simples sob a condição fraca [10]

$$\mathbb{P}\{\int_0^T Tr(\Phi(t)\, R\, \Phi^*(t))\, dt < \infty\} = 1$$

Neste caso a convergência em (1.32) é uniforme em $t \in [0, T]$ com probabilidade 1, e $X(t)$ um martingale local contínuo em$H$

(2) Tal como no caso especial, para $\Phi(t) : H \to \mathbb{R}$, escreveremos

$$(\Phi.W)_t = \int_0^t (\Phi(s), dW(s)). \tag{1.34}$$

Coomo no caso de operadores simples Lema (1.3.3), a integral de Itô definida acima satisfaz as mesmas propriedades.

Teorema 1.3.2. Para $\Phi \in \mathcal{P}_T$, a integral estocástica $X(t) = (\Phi.W(t))$ definida em (1.33), $0 \le t \le T$, é um martingale contínuo quadrado integrável com valores em H e com operador covariação

$$[(\Phi.W)]_t = \int_0^t (\Phi R \Phi^*)\, ds \tag{1.35}$$

e tem as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(X(t), g) = 0 \\ &\mathbb{E}(X(t), g)(X(t), h) = \mathbb{E}\int_0^t (\Phi(r)R\Phi(r)^*g, h)\,dr, \end{aligned} \tag{1.36}$$

para qualquer $g, h \in H$. Em particular,

$$\mathbb{E}\|X(t)\|^2 = \mathbb{E}\int_0^t Tr[\Phi(r)R\Phi(r)^*]\,dr \tag{1.37}$$

Demonstração. A ideia da prova proposta por Chow pg 149 aplica os lemas (1.3.3) e (1.3.4) via aproximações de uma sequência de operadores predizíveis simples. □

Também podemos definir uma integral estocástica com respeito a um martingale contínuo em K. Por exemplo, se $f(t) \in H$ é um processo limitado e predizível sobre $[0, T]$, similar a (1.34), podemos definir $(f.X)_t$ como a integral

$$(f.X)_t = \int_0^t (f(s), dX(s)) = \int_0^t (f(s), \Phi(s)\,dW(s)).$$

Em seguida, seguindo o mesmo procedimento na integral de Itô, podemos verificar o seguinte lema.

Lema 1.3.5. Sejam $f(t), g(t)$ qualquer processo com valores em Hque são limitados e predizíveis sobre $[0, T]$. Então o que segue é válido

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(f.X)_t = 0, \\ &\mathbb{E}(f.X)_t(g.X)_t = \mathbb{E}\int_0^t (\Phi(r)R\Phi(r)^*f(s), g(s))\,ds, \end{aligned} \tag{1.38}$$

Mais detalhes veja Chow [7] pg 149

Teorema 1.3.3. Seja $F(t, s) \in \mathcal{L}(H)$ limitado e contínuo com $s, t \in [0, T]$ tal que

$$\sup_{s,t\in[0,T]} \|\|F(t, s)\|_L < \infty. \tag{1.39}$$

Então a integral estocástica evolucional $Y(t) = \displaystyle\int_0^t F(t, s)\,\Phi(s)dW(s)$ tem uma versão contínua que é um processo $\mathcal{F}_t$-adaptado em H tal que $\mathbb{E}(Y(t)) = 0$ e

$$\mathbb{E}(Y(t), Y(s)) = \int_0^{t\wedge s} Tr[F(t, r)\Phi(r)R\Phi(r)^*F(s, r)^*]\,dr. \tag{1.40}$$

Mais detalhes encontran-se em Chow [7] pg 150.

1.3.3 Fórmula de Itô

A seguir vamos utilizar as notações usadas por Pardoux em [27] na definição da fórmula de Itô Seja X um espaço de Banach, H e K dois espaços de Hilbert separáveis. Seja Φ : $X \times H \to K$ uma aplicação que possui derivadas parciais para todo ponto $(g,h) \in X \times H$. denotaremos por $\Phi^{1,0}$, $\Phi^{0,1}$, $\Phi^{0,2}$; onde $\Phi^{1,0}(g,h) \in \mathcal{L}(X \times K)$, $\Phi^{0,1}(g,h) \in \mathcal{L}(H \times K)$ e $\Phi^{0,2}(g,h) \in \mathcal{L}(H \times H, K)$ é uma aplicação bilinear contínua.

Teorema 1.3.4. Para cada ponto $(g,h) \in E \times H$, $\Phi : E \times H \to K$ que satisfaz as seguintes propriedades;

(1) Φ, $\Phi^{1,0}$, $\Phi^{0,1}$, e $\Phi^{0,2}$ são contínuas em cada em cada subconjuntos limitados de $H \times H$

(2) Φ, $\Phi^{1,0}$, $\Phi^{0,1}$ são limitadas e uniformente contínuas em subconjuntos limitados de $H \times H$

(3) Para qualquer $f \in K'$ e qualquer $R \in \mathcal{L}_1(H' \times H)$ a aplicação $(g,h) \to (f', \Phi^{0,2}(g,h)R)$ é contínua de $X \times H$ em $\mathbb{R}$

Seja $V(t)$ um processo adaptado, contínuo e com variação limitada com valores em X e $M \in \mathcal{M}^2_{loc}(H)$, então:

$$\begin{aligned} \phi(V(t), M(t)) &= \phi(V(0), M(0)) + \int_0^t \phi^{1,0}(V(s), M(s))\, dV(s) + \int_0^t \phi^{0,1}(V(s), M(s))\, dM(s) \\ &\quad + \tfrac{1}{2} \int_0^t \phi^{0,2}(V(s), M(s))\, d\left\langle\langle M \rangle\right\rangle_s \end{aligned} \tag{1.41}$$

Para mais detalhes veja Pardoux em [27] página 20. O resultado seguinte garante a fórmula de Itô para o produto interno.

Observação 1.3.4. Para todo $(g,h) \in H \times H$, $\phi^{0,2}(g,h)$, $\phi^{1,0}(g,h)$ se identificam com elementos de H. $\phi^{0,2}(g,h)$, é uma forma bilinear simétrica em H, se identifica a um elemento auto-adjunto de $\mathcal{L}(H)$. A forma bilinear contínua sobre $\mathcal{L}_1(H)$ que define $\phi^{0,2}(g,h)$, Teorema (1.3.4), se escreve:

$$R \to Tr\, [\phi^{0,2}(g,h) \circ R].$$

A relação (1.41) se escreve na forma:

$$\begin{aligned} \phi(V(t), M(t)) &= \phi(V(0), M(0)) + \int_0^t (\phi^{1,0}(V(s), M(s)), dV(s)) + \int_0^t (\phi^{0,1}(V(s), M(s)), dM(s)) \\ &\quad + \tfrac{1}{2} Tr \int_0^t \phi^{0,2}(V(s), M(s))\, d\left\langle\langle M \rangle\right\rangle_s . \end{aligned} \tag{1.42}$$

Os dois seguintes resultados seram muito importante para encontrar a equação de energia estudada no próximo capítulo.

Lema 1.3.6. Seja $M \in \mathcal{M}^2_{loc}(0,T;H)$ satisfazendo a seguinte propriedade $M \in L^o(\Omega; L^p(0,T;H))$.

Seja u um processo mensurável com valores em H, tal que

$$\begin{array}{l} u \in C(0,T;H)\text{a.s} \\ \frac{du}{dt} \in L^{p'}(0,T;V') + L^1(0,T;H),\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1 \end{array} \tag{1.43}$$

Então $\forall t \in [0,T]$

$$(u(t), M(t)) = 2\int_0^t (u(s), dM(s)) + 2\int_0^t (M(s), \frac{du}{dt}(s))\, ds. \tag{1.44}$$

Demonstração. Ver Pardoux [27] página 43. □

Seja $u(t)$ um processo adaptado com valores em V

(0.1) $u(t) \in L^o(\Omega; L^p(0,T;V))$.

(0.2) $u(t) = u_0 + \displaystyle\int_0^t v(s)\, ds + M(t)$.

(0.3) $u_0 \in L^o(\Omega; \mathcal{F}_0, \mathcal{P}; H))$.

(0.4) $v \in L^o(\Omega; L^1(0,T;H)) + L^o(\Omega; L^{p'}(0,T;V))$.

(0.5) $M \in \mathcal{M}^2_{loc}(0,T;H)$.

Onde a notação $L^o(\Omega; L^p(0,T;V))$ denota o espaço vetorial dos (classes de) processos a valores em $L^p(0,T,V)$. Para maiores informações veja Pardoux [27] páginas 15 a 17.

Lema 1.3.7. Seja V um espaço de Banach, a tripla (V, V', p) é tal que existe um operador $A(t,.) : V \to V'$ uma família de operadores que satisfazem as seguintes propriedades:

A1. A é hemicontínua de V em V' quase sempre, isto é, a aplicação $\lambda \to \langle A(u + \lambda v), w\rangle$ é continua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ para todo $u, v, w \in V$

A2. $A(t,.)$ é limitado: Existe β tal que:

$$\|A(t,u)\|_{V'} \leq \beta \|u\|^p,\ \forall u \in V$$

quase sempre

A3. $A(t,.)$ é coersíva: existe $\alpha > 0$ tal que:

$$\langle A(t,u), u\rangle \geq \alpha \|u\|^p,\ \forall u \in V$$

A4. $A(t,u)$ é monotóno:

$$\langle A(t,u) - A(t,v), u - v\rangle \geq 0,\ \forall u \in V$$

quase sempre

A5. $\forall u \in V$, a aplicação $t \to A(t,u)$ é Lebesgue-mensurável com valores em V'

Consideremos (A1)-(A5), então sob as hipóteses (0.1)-(0.5) e suponhamos que o martingale local $M \in \mathcal{M}^2_{loc}(0,T;H)$ satisfazendo a seguinte propriedade $M \in L^o(\Omega; L^p(0,T;H))$. Então

$$\begin{cases} u \in C(0,T;H) \\ |u(t)|^2 = |u_0| + 2\displaystyle\int_0^t \langle v(s), u(s)\rangle \, ds + 2\int_0^t u(s), dM(s)) + Tr\,[M]_s \end{cases} \tag{1.45}$$

Demonstração. Veja [27] página 58. □

Sejam K e H espaços de Hilbert separáveis reais, e seja W_t um Q-processo de Wiener com valores em K sobre o espaço de probabilidade com completo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ com filtração normal $\{\mathcal{F}_t\}_{t\leq T}$ em H.

1.4 Resultados Importantes

A seguir enunciaremos alguns resultados que serão utilizados posteriormente.

Sejam $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $f : D \to \mathbb{R}^n$. Dizemos que f satisfaz as condições de Carathéodory sobre D se

- $f(t,x)$ é mensurável em t, para cada x fixo;
- $f(t,x)$ é contínua em x, para cada t fixo;
- Para cada compacto $K \subset D$, existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que $|f(t,x)| \leq m_K(t)$, para todo $(t,x) \in D$.

Consideremos o retângulo $R = \{(t,x) \in \mathcal{R}^{n+1}; |t-t_0| \leq a, \;\; |x-x_0| \leq b\}$, com $a,b > 0$.

Teorema 1.4.1 (Carathéodory). Seja $f : R \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre R. Então, sobre algum intervalo $|t-t_0| \leq \beta \quad (\beta > 0)$, existe uma solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} X' = f(t,X) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases} \tag{1.46}$$

Demonstração. Podemos encontrar em [8](apud Maciel(Apud Santos Junior [31] pg 25)) □

Corolário 1.4.1 (Prolongamento de solução). Seja $D = [0,\omega] \times B$, com $0 < \omega < \infty$ e $B = \{x \in \mathcal{R}^n; |x| \leq b\}$, $b > 0$ e f nas condições de Carathéodory. Seja $\varphi(t)$ uma solução de

$$\begin{cases} X' = f(t,X) \\ X(0) = X_0, \quad |X_0| \le b. \end{cases}$$

Suponhamos que em qualquer intervalo $I \subset [0,T]$ onde $|\phi(t)| \le M$, para todo $t \in I$, $\quad M$ é independente de I e $M < b$. Então ϕ tem um prolongamento a todo $[0,T]$.

Demonstração. Podemos encontrar em [8](apud Maciel(Apud Santos Junior [31] pg 25)) □

Lema 1.4.1. (Desigualdade de *Gronwall*) Suponhamos que a função $\phi \in L^1[a,b]$ satisfaz a desigualdade

$$\phi(t) \le f(t) + \beta \int_a^t \phi(s)\, ds \quad \forall t \in [a,b] \tag{1.47}$$

onde $f \in L^1[a,b]$ e β é uma constante positiva. Então

$$\phi(t) \le f(t) + \beta \int_a^t f(s) e^{\beta(t-s)}\, ds \tag{1.48}$$

Em particular, quando $f(t)$ e uma constante α, temos

$$\phi(t) \le \alpha\, e^{\beta(t-a)} \quad \forall t \in [a,b] \tag{1.49}$$

Relembraremos aqui, alguns resultados que chamaremos de determinísticos que serão úteis no nosso estudo.

Lema 1.4.2. Seja u uma aplicação absolutamente contínua de $[0,T]$ com valor em V' tais que:

(i) $u \in L^p(0,T;V)$

(ii) $\dfrac{du}{dt} \in L^{p'}(0,T;V)$

Então $u \in C(0,T;H)$ e ademais

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = 2\left\langle u(t), u'(t) \right\rangle, \text{ para quase todo} \quad t \in [0,T]$$

onde p' é o conjugado de p, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Demonstração. ver lema 2.1 em [27] pg 30. □

Lema 1.4.3. : Seja u uma aplicação absolutamente contínua de $[0,T]$ com valor em V' tais que.

(i) $u \in L^p(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$

(ii) $\dfrac{du}{dt} \in L^{p'}(0,T;V') + L^1(0,T;H)$

Então $u \in C(0,T;H)$ e além disso

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = 2\left\langle u(t), u'(t)\right\rangle \text{ para quase todo } \quad t \in [0,T]$$

Demonstração. ver lema 2.2 em [27] pg 30 □

Teorema 1.4.2. Suponhamos que a triple (V, V', p) com $p > 1$ tal que exista um operador $A : V \to V'$ que satisfaz as hipóteses (A1)-(A3). Então se $u \in L^p(0,T;V)$ satisfaz,

$$u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)\, ds, \forall t \in [0,T] \tag{1.50}$$

com $u_0 \in H$, $v \in L^{p'}(0,T;V') + L^1(0,T;H)$.

Então $u \in C(0,T;H)$, ademais

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = 2\left\langle u(t), u'(t)\right\rangle \text{ para quase todo } \quad t \in [0,T]$$

Lema 1.4.4. (Lions) Seja X um espaço de Banach. Se $u \in L^p(0,T;X)$ e $u' \in L^{p'}(0,T;X)$; $(1 \leq p \leq \infty)$ e p' o conjugado de p, então u após uma eventual modificação por um conjunto de medida nula de $(0,T)$, é contínua de $[0,T] \to X$

Demonstração. Ver em [21] pg. 8 □

1.5 Problema Determinístico

Nosso objetivo, nesta secção, será de determinar a existência e unicidade de soluções integrais para o problema determinístico seguinte, no caso particular para o termo $|u|^\rho u = 0$.

$$\begin{aligned}
&k_1(x)u'' + k_2(x)u' - \Delta u + |u|^\rho u = f \quad \text{no sentido fraco em} \quad L^2(0,T;H^{-1}(D)) \\
&u(t,x) = z(t,x) = 0 \;\text{ sobre }\; \Sigma \\
&u(0,x) = u_0(x) \;\text{ em }\; D \\
&k_1(x)z(0,x) = \sqrt{k_1(x)}z_0(x) \;\text{ em }\; D
\end{aligned} \tag{1.51}$$

Vale salientar que Medeiros em [24] estudou a existência e unicidade de soluções fracas, no sentido das distribuições. A seguir enuciaremos o Teorema devido a Medeiros cuja a demmonstração encontra-se em [24]. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira regular $\partial D = \Gamma$. Para cada número real $T > 0$, $\mathcal{Q}$ denota o cilíndro $\mathcal{Q} =]0,T[\times D$ com fronteira lateral $\Sigma =]0,T[\times\Gamma$. Consideremos as seguintes hipótese

(H1) $k_1,\, k_2 \in L^\infty(D)$ tais que $k_1(x) \geq 0$ e $k_2(x) \geq \beta > 0$ quase sempre em D

(H2) $f \in L^2(D)$

Teorema 1.5.1. Assumimos as hipóteses (H1)-(H2). Seja $u_0 \in H_0^1(D)$, $\;u_1 \in L^2(D)$ e $0 \leq \rho \leq 2/(n-2)$, então existe uma única função $u(t,x)$ em Q, tal que:

1. $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(D))$
2. $u' \in L^\infty(0,T;L^2(D));\qquad \sqrt{k_1(x)}u' \in L^2(0,T;L^2(D))$
3. $k_1 u'' \in L^2(0,T;H^{-1}(D))$
4. $k_1(x)u'' + k_2(x)u' - \Delta u + |u|^\rho u = f$ no sentido fraco em $L^2(0,T;H^{-1}(D))$
5. $u(0) = u_0;\quad k_1(x)u'(0) = \sqrt{k_1(x)}u_1$

Demonstração. Ver [24] Teorema 1. $\square$

Observação 1.5.1. Seja u a função do Teorema (1.5.1). De (1), (2), (3) e (4) e pelo Lema (1.4.4), $u \in C(0,T;H_0^1(D))$ e $k_1u' \in C(0,T;H^{-1}(D))$.

A seguir enunciaremos uma versão para o problema de Medeiros (1.51) que será útil no desenvolvimento do nosso trabalho. Nas Hipóteses admitidas por Medeiros em [24], queremos determinar as funções u e z que satisfazem o sistema

$$\begin{aligned} & u(t) = u_0 + \int_0^t z(s)\, ds \;\text{ em }\; \mathcal{Q} \\ & k_1(x)\, z(t) = \sqrt{k_1(x)}\, z_0 - \int_0^t k_2(x)\, z(s)\, ds + \int_0^t \Delta u(s)\, ds + \int_0^t f(s)\, ds \;\text{ em }\; \mathcal{Q} \\ & u(t) = z(t) = 0 \;\text{ sobre }\; \Sigma \end{aligned} \tag{1.52}$$

1.5.1 Existência de Solução

Dizemos que o par $(u,z) \in L^2(0,T;V) \times L^2(0,T;V')$, é solução do problema (1.52) se satisfaz o sistema:

$$\begin{aligned} & (u(t),\phi_1) = (u(0),\phi_1) + \int_0^t (z(s),\phi_1)\, ds \\ & (k_1\, z(t),\phi_2) = (k_1\, z(0),\phi_2) - \int_0^t (k_2\, z(s),\phi_2)\, ds + \int_0^t \langle \Delta u(s),\phi_2\rangle\, ds + \int_0^t (f(s),\phi_2)\, ds \\ & \text{para}\quad \text{toda}\;\; \phi_1,\, \phi_2 \in V \;\;\text{e}\quad \text{para}\quad \text{todo}\;\; 0 \leq t \leq T, \;\;\text{e} \\ & u(t,x) = z(t,x) = 0 \;\text{ sobre }\; \Sigma \end{aligned} \tag{1.53}$$

Onde $\phi_1 \in L^2(D)$ e $\phi_2 \in H_0^1(D)$

Teorema 1.5.2. Considerando as hipóteses do Teorema (1.5.1). Dado $u_0 \in H_0^1(D)$ e $z_0 \in L^2(D)$, então existe um par de funções (u, z) tais que:

$$
\begin{aligned}
&(u, z) \in L^2(0, T; H_0^1(D)) \times L^2(0, T; L^2(D))\\
&k_1 z,\ k_2\, z \in L^2(0, T; L^2(D)), \sqrt{k_1}\, z \in L^2(0, T; L^2(D))\\
&\text{satisfazendo as equações integrais}\\
&(u(t), \phi_1) = u(0) + \int_0^t (z(s), \phi_1)\, ds \quad \text{em} \quad V', \quad \forall t \in [0, T]\\
&(k_1\, z(t), \phi_2) = (k_1\, z(0), \phi_2) - \int_0^t (k_2\, z(s), \phi_2)\, ds + \int_0^t \langle \Delta u(s), \phi_2 \rangle\ ds + \int_0^t (f(s), \phi_2)\, ds\\
&u(t, x) = z(t, x) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma
\end{aligned}
\tag{1.54}
$$

para todo $\phi_1 \in L^2(D)$ e $\phi_2 \in H_0^1(D)$

A demonstração do Teorema (1.5.2) será uma consequência do seguinte problema pertubado.

$$
P^\epsilon \begin{cases}
u_\epsilon(t) = u_\epsilon(0) + \displaystyle\int_0^t z_\epsilon(s)\, ds \quad \text{em} \quad \mathcal{Q}\\
k_{1\epsilon}(x) z_\epsilon(t) = k_{1\epsilon} z_\epsilon(0) - \displaystyle\int_0^t k_2(x)\, z_\epsilon(s)\, ds + \int_0^t \Delta u_\epsilon(s)\, ds + \int_0^t f(s)\, ds \quad \text{em} \quad \mathcal{Q}\\
u_\epsilon(0) = u_0 \quad \text{em} \quad D\\
k_{1\epsilon} z_\epsilon(0) = \sqrt{k_1} z_0 \quad \text{em} \quad D
\end{cases}
\tag{1.55}
$$

onde $k_{1\epsilon} = k_1 + \epsilon$

Lema 1.5.1. Nas hipóteses do teorema (1.5.2), suponhamos $f \in L^2(0, T; H)$. Dados $u_0 \in V$, $z_0 \in H$. Então para cada $0 < \epsilon < 1$ existe um par de funções $u_\epsilon,\ z_\epsilon : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ tais que: $(u_\epsilon, z_\epsilon) \in L^2(0, T; V) \times L^2(0, T; H)$ satisfazendo ao sistema de equações integrais:

$$
\begin{aligned}
&(u_\epsilon(t), \phi_1) = (u_\epsilon(0), \phi_1) + \int_0^t (z_\epsilon(s), \phi_1)\, ds\\
&(k_{1\epsilon} z_\epsilon(t), \phi_2) = (k_{1\epsilon} z_\epsilon(0), \phi_2) - \int_0^t (k_2\, z_\epsilon(s), \phi_2)\, ds + \int_0^t \langle \Delta u(t), \phi_2 \rangle\ ds + \int_0^t (f(s), \phi_2)\, ds
\end{aligned}
\tag{1.56}
$$

para toda $\phi_1 \in L^2(D),\ \phi_2 \in H_0^1(D)$

A demontração da solução $(u_\epsilon, z_\epsilon), 0 < \epsilon < 1$, do problema pertubado (P^ϵ), será feito utilizando o método de Galerkin. A solução u do Teorema (1.5.2) será obtida tomando o limite desta solução (u_ϵ, u_ϵ) quando $\epsilon \to 0$

Demonstração. Com a intenção de construir a solução fraca do nosso problema (P^ϵ), utilizaremos o método de *Galerkin* que consiste em:

- Encontrar uma sequência de soluções(locais) aproximadas $(u_{\epsilon m}, z_{\epsilon m})$ para o problema pertubado aproximado $(P^{\epsilon m})$, no intervalo $[0, t_{\epsilon m})$, $t_{\epsilon m} < T$.

- Por estimativas a priori prolongar a solução $(u_{\epsilon m}, z_{\epsilon m})$ a todo intervalo $[0, T]$,
- Utilizando as estimativas a priori mostraremos que a sequência $(u_{\epsilon m}, z_{\epsilon m})$ de soluções convergirá, numa topologia adequada, para a solução (u_ϵ, z_ϵ) do problema pertubado (P^ϵ).

Consideremos $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma base Hilbertiana em $L^2(D)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, consederemos o subespaço $V_m = span\{\omega_1,\ \omega_2,\ ...,\ \omega_m\}$ de $H_0^1(D)$. Procuramos por funções $u_{\epsilon m};\ z_{\epsilon m} : [0, t_{\epsilon m}[\to V_m$ da forma:

$$u_{\epsilon m}(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{\epsilon jm}(t)\omega_j \tag{1.57}$$

$$z_{\epsilon m}(t) = \sum_{j=1}^{m} h_{\epsilon jm}(t)\omega_j \tag{1.58}$$

onde $g_{\epsilon jm}(t)$, $h_{\epsilon jm}(t)$ são funções de $[0, t_{\epsilon m}[\to \mathbb{R}$ que satisfação o problema aproximado associado

$$P^{\epsilon m} \begin{cases} (u'_{\epsilon m}(t), \omega_i) = (z_{\epsilon m}(t), \omega_i) \\ (k_{1\epsilon} z'_{\epsilon m}(t), \omega_j) + (k_2 z_{\epsilon m}(t), \omega_j) - a(u_{\epsilon m}(t), \omega_j) = (f(t), \omega_j) \\ u_{\epsilon m}(0) = u_{0m};\quad \text{em} \quad \text{que} \quad u_{0m} \to u_0\ forte\ em \quad V \\ k_{1\epsilon} z_{\epsilon m}(0) = \sqrt{k_{1\epsilon}} z_{0m};\quad em \quad que \quad z_{0m} \to z_0\ forte\ em \quad H \end{cases} \tag{1.59}$$

Observação 1.5.2. Onde, $a(u, v)$ representa a forma de Dirichlet, isto é,

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_D \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(D).$$

e a forma quadrática de $a(u, v)$ representaremos por $a(v)$

Como na literatura,

Observação 1.5.3. Sendo $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma base Hilbertiana de $L^2(D)$ então $\{\sqrt{k_{1\epsilon}}\omega_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma base de $L^2(D)$. Daí:

(a) $u_0 \in H_0^1(D) \Rightarrow u_0 = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{0jm}\omega_j = \lim_{m\to\infty} u_{0m}$.

assim $\quad u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{0jm}\omega_j$

(b) $z_0 \in H \Rightarrow z_0 = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \beta_{0jm}\sqrt{k_{1\epsilon}}\omega_j = \lim_{m\to\infty} z_{0m}$.

assim $z_{0m} = \sum_{j=1}^{m} \beta_{0jm}\sqrt{k_{1\epsilon}}$

Da mesma maneira $(\sqrt{k_2}\omega_j)_{j\in\mathbf{N}}$ também é uma base para $L^2(D)$.

Agora usando a definição (1.57) obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} g'_{\epsilon im}(t) &= h_{\epsilon im}(t) \\ k_{1\epsilon}\, h'_{\epsilon im}(t) &= -k_2\, h_{\epsilon im}(t) + g_{\epsilon im}(t)a(\omega_i,\omega_j) + (f(t),\omega_j) \end{aligned} \tag{1.60}$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned} g'_{\epsilon j}(t) &= h_{\epsilon i}(t) \\ h'_{\epsilon j}(t) &= -k_{1\epsilon}^{-1}\left(k_2\, h_{\epsilon j}(t) + a(\omega_j,\omega_j)g_{\epsilon j}(t) + (f(t),\omega_j)\right) \\ g_{\epsilon j}(0) &= \alpha_{0j}, \quad h_{\epsilon j}(0) = \beta_{0j}. \end{aligned} \tag{1.61}$$

Tomando $X = (X_1, ..., X_m, Y_1, ..., Y_m)^T$ onde, $X_j = g_{\epsilon j}(t)$ e $Y_j = h_{\epsilon j}(t)$ com $j = 1, ..., m$. Já que $\{k_{1\epsilon}\omega_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ é uma base, temos a seguinte forma matricial para o sistema:

$$X' = \mathbf{A}X + \mathbf{B} \tag{1.62}$$

$$X(0) = X_0 \tag{1.63}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} O_{m\times m} & I_{m\times m} \\ E_{m\times m} & G_{m\times m} \end{bmatrix}_{2m\times 2m}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} O_{m\times 1} \\ D_{m\times 1} \end{bmatrix}_{2m\times 1}.$$

Com

$$E_{ij} = k_{1\epsilon}^{-1}a(\omega_i,\omega_j), \quad G_{ii} = (k_{1\epsilon}^{-1}k_2), \quad D_{i1} = (k_{1\epsilon}^{-1}(f(t), w_i).$$

com $1 \leq i, j, \leq m$ e as matrizes $O_{m\times m}$, $O_{m\times 1}$, $I_{m\times m}$ são $m\times m$-matriz nula, $m\times 1$-matriz coluna nula e $m\times m$-matriz identidade, respectivamente.

Agora verificaremos as condições de Caratheodory para existência de solução do problema de valores iniciais (1.62).

No PVI acima consideramos $F_1(t,X) = \mathbf{A}X$ e $F_2(t,X) = \mathbf{B}$ e tomemos $F(t,X) = F_1(t,X) + F_2(t,X)$

1. Para X fixado F é mensurável em t.
   De fato, a função $F_1(t,X)$ é independente t e consequentemente mensurável em t para X fixado, pois a matriz $\mathbf{A}$ não dependente de t.
   Além disso, $F_2(t,X)$ é mensurável em t para X fixado, sendo que $f(t)\in L^2(D)$ e a aplicação $t \to f(t)(.,\omega_j)$ é contínua portanto mensurável em t.

2. Para t fixado F é contínua em X.
   A função $F_2(t,X)$ é contínua em X para t fixado, pois não depende de X

A função $F_1(t,X) = \mathbf{A}X$ é uma função linear em X portanto contínua em X para t fixado.

3. $F(t,X)$ é integrável.
Seja $K \subset D = \{X \in \mathbb{R}^{2n+1}; \|X\| \leq \delta,\, \delta > 0\}$ um conjunto compacto. Devemos mostrar que existe uma funçâo real $m_k(t)$ integrável em $[0,T]$ tal que.

$$\|F(t,X)\|_{\mathbb{R}^{n+1}} \leq m_k(t),\, \forall (t,X) \in [0,T] \times D.$$

Com efeito,

$$\|F(t,X)\| \leq \|F_1(t,X)\| + \|F_2(t,X)\|$$

notemos que

- $F_2(t,X)$ é limitada. De fato, como $f \in L^2(D)$ pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que:

$$\begin{aligned} |k_{1\epsilon}^{-1}(f(t),\omega_j)| &\leq \|k_{1\epsilon}\|^{-1}\||(f(t),\omega_j)| \\ &\leq \leq C_0\|f(t)\|_{L^2(D)} < \infty, \end{aligned}$$

- $F_1(t,X)$ é também limitada, isto é,

$$\|F_1(t,X)\| \leq \|\mathbf{A}\|_\infty \|X\|_{2m\times 1} \leq C_1\delta$$

pois,

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\{1, \|E\|_\infty + \|G\|_\infty\} \leq C_1 < \infty$$

com

$$\|E\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{m} |E_{ij}|, \quad \|G\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} |G_{ii}|$$

onde,

$$\begin{aligned} |E_{ij}| &\leq |k_{1\epsilon}^{-1}\, a(\omega_i,\omega_j)| \leq \|k_{1\epsilon}\|^{-1}|a(\omega_i,\omega_j)| \\ &\leq \|k_{1\epsilon}\|^{-1}\, \|\omega_i\|\, \|\omega_j\| \leq C_2|k_{1\epsilon}\|^{-1} < \infty \end{aligned}$$

$$|G_{ii}| = |k_{1\epsilon}^{-1}\, k_2| \leq \|k_{1\epsilon}\|^{-1}\|\|k_2\| < \infty$$

Basta tomar $C_1 = \max\{1, \|k_{1\epsilon}\|^{-1}(C_2 + \|k_2\|)\}$. Portanto

$$\|F(t,X)\|_{\mathbb{R}^{n+1}} \leq m_k(t),$$

onde $m_k(t) = C_1\delta + C_0\,\phi(t)$. O que mostra que $F(t,X)$ é integrável.

1.5.2 Estimativas a priori

:

A partir das estimativas apriori obtidas teremos condições de passar o limite quando $m \to \infty$ na solução do problema pertubado apeoximado. Voltando ao problema aproximado (1.59), multiplicamos a primeira linha por $h_{\epsilon\, jm}(t)$ e somando em j, $j = 1, ..., m$, na segunda linha, multiplicando por $g_{\epsilon\, im}(t)$ e somando em i, $i = 1, ..., n$ temos.

$$\begin{aligned} (u'_{\epsilon m}(t), u_{\epsilon m}(t)) &= (z_{\epsilon m}(t), u_{\epsilon m}(t)) \\ (k_{1\epsilon} z'_{\epsilon m}(t), z_{\epsilon m}(t)) + (k_2 z_{\epsilon m}(t), z_{\epsilon m}(t)) + a(u_{\epsilon m}(t), z_{\epsilon m}(t)) &= (f(t), z_{\epsilon m}(t)) \end{aligned} \tag{1.64}$$

Portanto, podemos escrever

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{\epsilon m}(t)|^2 = (z_{\epsilon m}(t), u_{\epsilon m}(t)) \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\sqrt{k_{1\epsilon}} z_{\epsilon m}(t)|^2 + |\sqrt{k_2}\, z_{\epsilon m}(t)|^2 + a(u_{\epsilon m}(t), z_{\epsilon m}(t)) = (f(t), z_{\epsilon m}(t)) \end{array} \tag{1.65}$$

sendo que $a(u_{\epsilon m}(t), z_{\epsilon m}(t)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_D \frac{\partial u_{\epsilon m}(t)}{\partial x_i} \frac{\partial z_{\epsilon m}}{\partial (t)} dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{\epsilon m}(t)|^2$. Somando as equações acima obtemos:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\|u_{\epsilon m}(t)\|^2_{H_0^1(D)} + |\sqrt{k_{1\epsilon}} z_{\epsilon m}(t)|^2 + |\sqrt{k_2}\, z_{\epsilon m}(t)|^2 \\ = (z_{\epsilon m}(t), u_{\epsilon m}(t)) + (f(t), z_{\epsilon m}(t)) \end{array} \tag{1.66}$$

Integrando de 0 a t, obtemos

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}\{\|u_{\epsilon m}(t)\|^2 + |\sqrt{k_{1\epsilon}(x)} z_{\epsilon m}(t)|^2\} + \displaystyle\int_0^t |\sqrt{k_2(x)} z_{\epsilon m}(s)|^2\, ds \\ = \frac{1}{2}\{\|u_{\epsilon m}(0)\|^2 + |\sqrt{k_{1\epsilon}} z_{\epsilon m}(0)|^2\} + \displaystyle\int_0^t (z_{\epsilon m}(s), u_{\epsilon m}(s))\, ds \\ + \displaystyle\int_0^t (f(s), z_{\epsilon m}(s))\, ds \end{array} \tag{1.67}$$

Das hipóteses

$$u_{\epsilon m}(0) = u_{0m} \to u_0 \quad \text{forte em} \quad V \tag{1.68}$$

$$z_{\epsilon m}(0) = z_{0m} \to z_0 \quad \text{forte em} \quad H \tag{1.69}$$

temos que existe uma constante C_0 independente de m, ϵ, e t. tal que

$$\|u_{\epsilon m}(0)\|^2 + \frac{1}{2}|\sqrt{k_{1\epsilon}} z_{\epsilon m}(0)|^2 \leq C_0.$$

Portanto

$$\begin{aligned} &\|u_{\epsilon m}(t)\|^2 + |\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}z_{\epsilon m}(t)|^2 + 2\int_0^t |\sqrt{k_2(x)}z_{\epsilon m}(s)|^2\, ds \\ &\leq C_0 + 2\int_0^t (z_{\epsilon m}(s), u_{\epsilon m}(s))\, ds + 2\int_0^t (f(s), z_{\epsilon m}(s)\, ds \end{aligned} \tag{1.70}$$

Usando a desigualdade elementar $ab \leq \frac{1}{\beta}a^2 + \beta b^2$ na desigualdade (1.70) e utilizando a Hipótese (H1) obtemos.

$$\begin{aligned} &\|u_{\epsilon m}(t)\|^2 + |\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}z_{\epsilon m}(t)|^2 + 2\beta\int_0^t |z_{\epsilon m}(s)|^2\, ds \\ &\leq C_0 + 2\int_0^t (z_{\epsilon m}(s), u_{\epsilon m}(s))\, ds + \beta\int_0^t |z_{\epsilon m}(s)|^2\, ds + \frac{4}{\beta}\int_0^t |f(s)|^2\, ds \end{aligned} \tag{1.71}$$

ou seja

$$\begin{aligned} &\|u_{\epsilon m}(t)\|^2 + |\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}z_{\epsilon m}(t)|^2 + \beta\int_0^t |z_{\epsilon m}(s)|^2\, ds \\ &\leq C_0 + \tfrac{4}{\beta}\int_0^t |f(s)|^2\, ds + 2\int_0^t (z_{\epsilon m}(s), u_{\epsilon m}(s)\, ds \end{aligned} \tag{1.72}$$

Como $f \in L^2(0,T;L^2(D))$ e usando a desigualdade de Cauchy obtemos

$$\begin{aligned} &\|u_{\epsilon m}(t)\|^2 + |\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}z_{\epsilon m}(t)|^2 + \beta\int_0^t |z_{\epsilon m}(s)|^2\, ds \\ &\leq C_0 + C_1 + 2\int_0^t |z_{\epsilon m}(s)|\, \|u_{\epsilon m}(s)\|\, ds \end{aligned} \tag{1.73}$$

usando a desigualdade $ab \leq \frac{1}{12}\,a^2 + 3\,b^2$, e tomando $\eta > 0$ com $a = \sqrt{\eta}\,|z_{\epsilon m}|$ e $b = \frac{1}{\sqrt{\eta}}\,\|u_{\epsilon m}\|$; além disso, pela hipótese (H 2) $0 < \beta \leq \inf\limits_{x\in D} \|k_2(x)\| \leq \sup\limits_{x\in D} \|k_2(x)\|$ segue-se que;

$$\begin{aligned} &\|u_{\epsilon m}(t)\|^2 + |\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}z_{\epsilon m}(t)|^2 + \beta\int_0^t |z_{\epsilon m}(s)|^2\, ds \\ &\leq C_0 + 2C_1 + \tfrac{\eta}{6}\int_0^t |z_{\epsilon m}(s)|^2\, ds + \frac{6}{\eta}\int_0^t \|u_{\epsilon m}(s)\|^2\, ds \end{aligned} \tag{1.74}$$

Tomando $\eta = \beta$ teremos

$$\|u_{\epsilon m}(t)\|^2 + |\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}z_{\epsilon m}(t)|^2 + \frac{5\eta}{6}\int_0^t |z_{\epsilon m}(s)|^2\, ds \leq C_2 + \frac{6}{\eta}\int_0^t \|u_{\epsilon m}(s)\|^2\, ds \tag{1.75}$$

onde $C_2 = C_0 + C_1 > 0$ De (1.75) temos

$$\|u_{\epsilon m}(t)\|^2 \leq C_3 + \frac{3}{\eta}\int_0^t \|u_{\epsilon m}(s)\|^2\, ds \tag{1.76}$$

Agora, tomando $\phi(t) = \|u_{\epsilon m}(t)\|$ e $\psi(t) = C_2$, ambas integráveis em $0 \leq t \leq T$. Aplicando a desigualdade de *Gronwall*, temos:

$$\|u_{\epsilon m}(t)\|^2 \leq C_4, \tag{1.77}$$

onde$C_4 > 0$ é uma constante independente de ϵ, m e t.

Como $H_0^1(D) \subset L^2(D)$ é densa, e por definição de norma temos que

$$\|z_{\epsilon m}(t)\|_{L^2(D)} \leq \|u_{\epsilon m}(t)\|_{L^2(D)} + \|z_{\epsilon m}(t)\|_{L^2(D)} = \|u_{\epsilon m}(t)\|_{H_0^1(D)}$$

e como consequência $|\sqrt{k_1(x)} z_{\epsilon m}(t)|_{L^2(D)} \leq \|u_{\epsilon m}(t)\|_{H_0^1(D)}$. segue-se então que

$$|\sqrt{k_{1\epsilon}(x)} z_{\epsilon m}(t)|^2 + \|u_{\epsilon m}(t)\|^2 + \int_0^t |\sqrt{k_2(x)} z_{\epsilon m}(s)|^2\, ds \leq C \tag{1.78}$$

$C > 0$ uma constante independente de ϵ, m e t.

1.5.3 Passagem ao limite

: Nesta seção, faremos a passagem ao limite quando $m \to \infty$ na equação aproxima do problema $(P^{\epsilon m})$

Da desigualdade acima temos que

$$(u_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^2(0,T,V) \tag{1.79}$$

$$(z_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^2(0,T;H) \tag{1.80}$$

$$(\sqrt{k_{1\epsilon}} z_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^2(0,T,H) \tag{1.81}$$

Como os espaços onde as sequências acima estão limitadas são espaços de Banach reflexivos, podemos extrair uma subsequência de $(u_{\epsilon m}(t))$ a qual denotaremos por $(u_{\epsilon m}(t))$ tal que:

$$u_{\epsilon m} \to u_\epsilon \text{ fraco em } L^2(0,T,V) \tag{1.82}$$

$$z_{\epsilon m} \to z_\epsilon \text{ fraco em } L^2(0,T;H) \tag{1.83}$$

$$\sqrt{k_{1\epsilon}}\, z_{\epsilon m} \to \sqrt{k_{1\epsilon}}\, z_\epsilon \text{ fraco em } L^2(0,T;H) \tag{1.84}$$

As convergências (1.82) e (1.83) nos garantem:

$$\int_0^T \langle u_{\epsilon m}(t), v\rangle\, dt \to \int_0^T \langle u_\epsilon(t), v\rangle\, dt \text{ para toda } v \in L^2(0,T,V'), \tag{1.85}$$

em particular

$$\int_0^T (u_{\epsilon m}(t), v)\, dt \to \int_0^T (u_\epsilon(t), v) dt \text{ para toda } v \in L^2(0,T,H). \tag{1.86}$$

e

$$\int_0^T (z_{\epsilon m}(t), v) dt \to \int_0^T (z_\epsilon(t), v) dt \text{ para todo } v \in L^2(0,T;H), \tag{1.87}$$

Como $z_{\epsilon m} \to z_\epsilon$ fraco em $L^2(0,T;H)$, e k_2 é independe de ϵ, m e t temos que

$$\int_0^T (k_2\, z_{\epsilon m}(t), v)\, dt \to \int_0^T (k_2\, z_\epsilon(t), v)\, dt \quad \text{para todo} \quad v \in L^2(0,T;H) \tag{1.88}$$

Notemos que $\sqrt{k_{1\epsilon}} \in L^2(D)$ para todo $v \in L^2(0,T;L^2(D))$. De fato,

$$\begin{aligned} \|\sqrt{k_{1\epsilon}}v\|^2_{L^2(0,T;L^2(D))} &= \int_0^T \|\sqrt{k_{1\epsilon}}v(t)\|^2_{L^2(D)}dt = \int_0^T \int_D |\sqrt{k_{1\epsilon}}v(t,x)|^2 dx\, dt \\ &\leq \sup_{x\in D} |k_{1\epsilon}(x)| \int_0^T |v(t)|^2_{L^2(D)} dt < \infty. \end{aligned} \tag{1.89}$$

Da convergência (1.83)-(1.84) temos que

$$\int_0^T (\sqrt{k_{1\epsilon}} z_{\epsilon m}, \sqrt{k_{1\epsilon}}v)dt \to \int_0^T (\sqrt{k_{1\epsilon}} z_\epsilon, \sqrt{k_{1\epsilon}}v)dt, \quad \forall v \in L^2(0,T,L^2(D)), \tag{1.90}$$

o que implica

$$\int_0^T (k_{1\epsilon} z_{\epsilon m}, v)dt \to \int_0^T (k_{1\epsilon} z_\epsilon, v)dt, \quad \forall v \in L^2(0,T,L^2(D))). \tag{1.91}$$

Tomando $v = \theta(t)\, b$, onde $b \in H^1_0(D)$ e $\theta \in L^\infty(0,T)$, temos

$$\int_0^T (k_{1\epsilon} z_{\epsilon m}(t), b)\theta(t)dt \to \int_0^T (k_{1\epsilon} z_\epsilon(t), b)\theta(t)dt, \quad \forall b \in H^1_0(D), \forall \theta \in L^\infty(0,T). \tag{1.92}$$

portanto

$$(k_{1\epsilon} z_{\epsilon m}(t), b) \to (k_{1\epsilon} z_\epsilon(t), b)\, \forall b \in H^1_0(D). \tag{1.93}$$

Já que $u_{\epsilon m} \to u_\epsilon$ fraco em $L^2(0,T;H^1_0(D))$. Sendo $\Delta : H^1_0(D) \to H^{-1}(D)$ um operador linear, contínuo segue que:

$$\int_0^T \langle \Delta u_{\epsilon m}, v\rangle_{H^1_0 H^{-1}}\, dt \to \int_0^T \Delta \,\langle u_\epsilon m, v\rangle_{H^1_0 H^{-1}}\, dt, \forall v \in L^2(0,T;H^{-1}(D)) \tag{1.94}$$

Das convergências (1.82, (1.83), (1.87), (1.88), (1.93), e (1.94). Passando o limite quando $m \to 0$, em temos

$$\begin{aligned} ((u_\epsilon(t), w)) &= (u_0, w) + \int_0^t (z_\epsilon(s)\,, w)\, ds \\ (k_{1\epsilon} z_\epsilon(t), w) &= (\sqrt{k_{1\epsilon}}\, z_0, w) - \int_0^t (k_2\, z_\epsilon(s), w)\, ds + \int_0^t \langle \Delta u_\epsilon(s), w\rangle\; ds \\ &\quad + \int_0^t (f(t), w)\, ds \\ &\quad \text{para todo} \;\; w \in V, \;\; \text{para todo} \;\; 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \tag{1.95}$$

1.5.4 Verificação dos dados iniciais

Nesta seção verificaremos que os dados inicias são satisfeitos.Sabemos que:

$$\begin{aligned} u_{\epsilon m} &\rightarrow u_\epsilon \ \text{ fraco em } \ L^2(0,T;V) \\ z_{\epsilon m} &\rightarrow z_\epsilon \ \text{ fraco em } \ L^2(0,T;H) \end{aligned} \tag{1.96}$$

onde $\frac{d}{dt}u_{\epsilon m}(t) = z_{\epsilon m}(t)$ Então, $u_{\epsilon m} \in C^0(0,T;H)$, desse modo podemos calcular u_{0m}. Agora, considerando $\theta \in C^1(0;T)$ e $v \in V$, com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$ logo, segue-se que;

$$\int_0^T (u_{\epsilon m}, v)\theta'(t)\,dt \rightarrow \int_0^T (u_\epsilon, v)\theta'(t)\,dt \tag{1.97}$$

$$\int_0^T (z_{\epsilon m}, v)\theta(t)\,dt \rightarrow \int_0^T (z_\epsilon, v)\theta(t)\,dt \tag{1.98}$$

$$\text{para todo } \ v \in V. \tag{1.99}$$

Somando-se a integrais acima.

$$\int_0^T (u_{\epsilon m}, v)\theta'(t)\,dt + \int_0^T (z_{\epsilon m}, v)\theta(t)\,dt \rightarrow \int_0^T (u_\epsilon, v)\theta'(t)\,dt + \int_0^T (z_\epsilon, v)\theta(t)\,dt \quad \text{para todo } \ v \in V. \tag{1.100}$$

ou seja,

$$\int_0^T (u_{\epsilon m}, v)\theta'(t) + (z_{\epsilon m}, v)\theta(t)\,dt \rightarrow \int_0^T (u_\epsilon, v)\theta'(t) + (z_\epsilon, v)\theta(t)\,dt \quad \text{para todo } \ v \in V. \tag{1.101}$$

$$\int_0^T \frac{d}{dt}[(u_{\epsilon m}, v)\theta(t)]\,dt \rightarrow \int_0^T \frac{d}{dt}[(u_\epsilon, v)\theta(t)]\,dt \quad \text{para todo } \ v \in V. \tag{1.102}$$

fazendo a integração e usando a definição de θ temos que,

$$-(u_{\epsilon m}(0), v) \rightarrow -(u_\epsilon(0), v), \ \text{ para todo } \ v \in V. \tag{1.103}$$

Como $u_{\epsilon m}(0) = u_{0m} \rightarrow u_0$ forte em V, pela unicidade de limite temos que

$$(u_0, v) = (u_\epsilon(0), v)\forall v \in V.$$

E como V é imersamente e continuamente denso em H, em símbolos $V \hookrightarrow H$, concluimos que

$$(u_0, v) = (u_\epsilon(0), v) \quad \forall v \in H.$$

$u_\epsilon(0) = u_0$ no sentido de H.

Voltando ao problema aproximando, consideremos o seguinte sistema

$$(\frac{d}{dt}(k_{1\epsilon}z_{\epsilon m}(t)),v)+(k_2 z_{\epsilon m}(t),v)+a(u_{\epsilon m}(t),v)=(f(t),v) \tag{1.104}$$

Para calcular $k_{1\epsilon}\, z(0)$ multiplicaremos o sistema acima por θ e integraremos de 0 a T

$$\begin{aligned}&\int_0^T(\frac{d}{dt}(k_{1\epsilon}z_{\epsilon m}(t)),v)\theta(t)\,dt+\int_0^T(k_2 z_{\epsilon m}(t),v)\theta(t)\,dt+\int_0^T a(u_{\epsilon m}(t),v)\theta(t)\,dt\\&=\int_0^T(f(t),v)\theta(t)\,dt\end{aligned} \tag{1.105}$$

Agora integrando por partes a primeira integral obtemos

$$\begin{aligned}&-(\sqrt{k_{1\epsilon}}\,z_{0m},v)-\int_0^T(k_{1\epsilon}z_{\epsilon m}(t),v)\theta'(t)\,dt+\int_0^T(k_2 z_{\epsilon m}(t),v)\theta(t)\,dt\\&+\int_0^T a(u_{\epsilon m}(t),v)\theta\,dt=\int_0^T(f(t),v)\theta(t)\,dt\end{aligned} \tag{1.106}$$

Passando limite quando $m\to\infty$ e sendo que $z_{0m}\to z_0$ forte em V temos

$$\begin{aligned}&-(\sqrt{k_{1\epsilon}}\,z_0,v)-\int_0^T(k_{1\epsilon}z_\epsilon(t),v)\theta'(t)\,dt+\int_0^T(k_2 z_\epsilon(t),v)\theta'(t)\,dt\\&+\int_0^T a(u_\epsilon(t),v)\theta'\,dt=\int_0^T(f(t),v)\theta'(t)\,dt\end{aligned} \tag{1.107}$$

integrando por partes, outra vez, a primeira integral da identidade acima obtemos

$$\begin{aligned}&-(\sqrt{k_{1\epsilon}}\,z_0,v)+(k_{1\epsilon}\,z_\epsilon(0),v)+\int_0^T(\frac{d}{dt}(k_{1\epsilon}\,z_\epsilon(t)),v)\theta(t)\,dt\\&+\int_0^T(k_2\,z_\epsilon(t),v)\theta(t)\,dt+\int_0^T a(u_\epsilon(t),v)\theta\,dt\\&=\int_0^T(f(t),v)\theta(t)\,dt\end{aligned} \tag{1.108}$$

Como,

$$\begin{aligned}&\int_0^T(\frac{d}{dt}(k_{1\epsilon}\,z_\epsilon(t)),v)\theta(t)\,dt+\int_0^T(k_2\,z_\epsilon(t),v)\theta(t)\,dt+\int_0^T a(u_\epsilon(t),v)\theta\,dt\\&=\int_0^T(f(t),v)\theta(t)\,dt\end{aligned} \tag{1.109}$$

Segue que,

$$-(\sqrt{k_{1\epsilon}}\,z_0,v)+(k_{1\epsilon}\,z_\epsilon(0),v)=0 \tag{1.110}$$

isto é

$$(k_{1\epsilon}\,z_\epsilon(0),v)=(\sqrt{k_{1\epsilon}}\,z_0,v)\quad\text{para toda}\quad v\in V \tag{1.111}$$

Pela densidade de V em H temos $k_{1\epsilon}\,z_\epsilon(0)=\sqrt{k_{1\epsilon}}\,z_0$. O que prova o teorema (1.5.1) □

Demonstração. Teorema (1.5.2) Como as estimativas anteriores obtidas são independentes de ϵ, temos as seguintes convergências:

$$u_{\epsilon m} \to u_\epsilon \ \text{ fraco em } \ L^2(0,T,H_0^1(D)) \tag{1.112}$$
$$z_{\epsilon m} \to z_\epsilon \ \text{ fraco em } \ L^2(0,T;L^2(D)) \tag{1.113}$$
$$\sqrt{k_{1\epsilon}}\, z_{\epsilon m} \to \sqrt{k_{1\epsilon}}\, z_\epsilon \ \text{ fraco em } \ L^2(0,T;L^2(D)) \tag{1.114}$$
$$\tag{1.115}$$

E então, pelo teorema de *Banach-Steinhaus*

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty(0,T,H_0^1(D))} \leq \lim_{\epsilon\to 0}\inf \|u_{\epsilon m}\|_{L^\infty(0,T,H_0^1(D))} \leq C. \tag{1.116}$$
$$|z_\epsilon|_{L^2(0,T,L^2(D))} \leq \lim_{m\to\infty}\inf |z_{\epsilon m}|_{L^2(0,T;L^2(D))} \leq C. \tag{1.117}$$
$$\|\sqrt{k_{1\epsilon}} z_\epsilon\|_{L^\infty(0,T,H_0^1(D))} \leq \lim_{m\to\infty}\inf \|\sqrt{k_{1\epsilon}} z_{\epsilon m}\|_{L^\infty(0,T,H_0^1(D))} \leq C. \tag{1.118}$$
$$\tag{1.119}$$

onde C é uma constante independente de ϵ, $0 < \epsilon < 1$. Consquentemente,

$$\|u_\epsilon(t)\|^2 + |\sqrt{k_{1\epsilon}(x)} z_\epsilon(t)|^2 + \frac{5\eta}{6}\int_0^t |z_\epsilon(s)|^2\, ds \leq C \tag{1.120}$$

onde C é uma constante independente de ϵ.

Da estimativa acima tomemos $\epsilon = \frac{1}{l}$, $2 \leq l \in \mathbb{N}$; notemos que, quando $l \to \infty$, temos que $\epsilon \to 0$, assim deduzimos:

$$(u_{\frac{1}{l}})_{l\in\mathbb{N}} \ \text{ é limitada em } L^2(0,T;V) \tag{1.121}$$
$$(z_{\frac{1}{l}})_{l\in\mathbb{N}} \ \text{ é limitada em } L^2(0,T;H) \tag{1.122}$$
$$(\sqrt{k_1\epsilon}\, z_{\frac{1}{l}})_{l\in\mathbb{N}} \ \text{ é limitada em } L^2(0,T;H) \tag{1.123}$$

Agora, de modo semelhante, usando os mesmo argumentos de antes podemos obter uma subsequência de $(u_{\frac{1}{l_k}})_{l\in\mathbb{N}}$ de $(u_{\frac{1}{l}})_{l\in\mathbb{N}}$ que continuamos a denotar por $(u_{\frac{1}{l}})_{l\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$u_{\frac{1}{l}} \to u \ \text{ fraco em } \ L^2(0,T,V) \tag{1.124}$$
$$z_{\frac{1}{l}} \to z \ \text{ fraco em } \ L^2(0,T;H) \tag{1.125}$$

Afirmamos que:

$$\sqrt{k_{1\frac{1}{l}}}\, z_{\frac{1}{l}} \to \sqrt{k_1}\, z \ \text{ fraco em } \ L^2(0,T;H)$$

Com efeito,

$$
\begin{aligned}
|\left\langle \sqrt{k_{1\frac{1}{l}}}\, z_{\frac{1}{l}}, \omega \right\rangle - \langle \sqrt{k_1}\, z, \omega\rangle| \;\; &\le \;\; |\left\langle \sqrt{k_{1\frac{1}{l}}}\, z_{\frac{1}{l}}, \omega \right\rangle - \left\langle \sqrt{k_1}\, z_{\frac{1}{l}}, \omega \right\rangle| \\
&\quad +|\left\langle \sqrt{k_1}\, z_{\frac{1}{l}}, \omega \right\rangle - \langle \sqrt{k_1}\, z, \omega\rangle|
\end{aligned}
$$

como $z_{\frac{1}{l}} \to z$ fraco em $L^2(0,T;H)$ logo

$$
|\left\langle \sqrt{k_1}\, z_{\frac{1}{l}}, \omega \right\rangle - \left\langle \sqrt{k_1}\, z, \omega \right\rangle| \to 0 \;\text{ quando }\; l \to \infty.
$$

Usando fato de $\sqrt{a} - \sqrt{b} \le \sqrt{a-b}$ com $a, b > 0$ temos que

$$
\begin{aligned}
\sqrt{k_{1\frac{1}{l}}(x)} - \sqrt{k_1(x)} \;\; &= \;\; \sqrt{k_1(x) + \tfrac{1}{l}} - \sqrt{k_1(x)} \\
&\le \;\; \sqrt{k_1(x) + \tfrac{1}{l} - k_1(x)} \\
&= \;\; \sqrt{\tfrac{1}{l}} \to 0 \;\text{ quando }\; l \to \infty.
\end{aligned}
$$

assim sendo, temos que $|\left\langle \sqrt{k_{1\frac{1}{l}}}\, z_{\frac{1}{l}}, \omega \right\rangle - \left\langle \sqrt{k_1}\, z_{\frac{1}{l}}, \omega \right\rangle| \to 0,$ quando $l \to \infty$, portanto $\left\langle \sqrt{k_{1\frac{1}{l}}}\, z_{\frac{1}{l}}, \omega \right\rangle \to \langle \sqrt{k_1}\, z, \omega \rangle$ para toda $\omega \in L^2(0,T;H)$. Mostramos que

$$
\sqrt{k_{1\frac{1}{l}}}\, z_{\frac{1}{l}} \to \sqrt{k_1}\, z \;\text{ fraco em }\; L^2(0,T;H), \tag{1.126}
$$

e por consequência

$$
k_{1\frac{1}{l}}\, z_{\frac{1}{l}} \to k_1\, z \;\text{ fraco em }\; L^2(0,T;H). \tag{1.127}
$$

Da convergencia (1.125) temos

$$
\int_0^T (z_{\frac{1}{l}}(t), v) dt \to \int_0^T (z(t), v) dt \;\text{ para todo }\quad v \in L^2(0,T;H), \tag{1.128}
$$

Com k_2 independe de t, segue de (1.128):

$$
\int_0^T (\sqrt{k_2}, z_{\frac{1}{l}}(t), v)\, dt \to \int_0^T (\sqrt{k_2}\, z(t), v)\, dt \;\text{ para todo }\; v \in L^2(0,T;H). \tag{1.129}
$$

Já que $u_{\frac{1}{l}} \to u$ fraco em $L^2(0,T;H_0^1(D))$. Sendo $\Delta : H_0^1(D) \to H^{-1}(D)$ um operador linear, contínuo segue que:

$$
\int_0^T \left\langle \Delta u_{\frac{1}{l}}, v \right\rangle_{H_0^1 H^{-1}} dt \to \int_0^T \Delta \left\langle u_{\frac{1}{l}}, v \right\rangle_{H_0^1 H^{-1}} dt, \forall v \in L^2(0,T;H^{-1}(D)) \tag{1.130}
$$

Das convergência (1.124), (1.125), (1.127), (1.128) e (1.130) segue que:

$$\begin{aligned} ((u(t),w)) &= ((u(0),w)) + \int_0^t (z(s),w)\,ds \\ (k_1\,z(t),v) &= (k_1\,z_0,w) - \int_0^t (k_2\,z(s),w)\,ds + \int_0^t \langle \Delta u(s),w\rangle\;ds \\ &\quad + \int_0^t (f(t),w)\,ds \quad \text{para todo} \quad v\in V,\;\; 0\le t\le T. \end{aligned} \tag{1.131}$$

quando $\quad l\to\infty,\quad$ isto é, quando $\quad \epsilon\to 0$

1.5.5 Verificação das condições iniciais

Sabemos que

$$u_\epsilon \to u \;\text{ fraco em }\; L^2(0,T,V), \tag{1.132}$$

$$z_\epsilon \to z \;\text{ fraco em }\; L^2(0,T;H), \tag{1.133}$$

$$\sqrt{k_{1\frac{1}{l}}}\,z_{\frac{1}{l}} \to \sqrt{k_1}\,z \;\text{ fraco em }\; L^2(0,T;H), \tag{1.134}$$

$$\sqrt{k_2}\,z_{\frac{1}{l}} \to \sqrt{k_2}\,z \;\text{ fraco em }\; L^2(0,T;H) \tag{1.135}$$

Dos dados iniciais anteriores encontramos facilmente que $u(0)=u_0$. Verificaremos então que

$$k_1 z(0) = \sqrt{k_1} z_0$$

Do cálculo das condições iniciais anteriores obtemos

$$\begin{aligned} &-(\sqrt{k_{1\epsilon}}\,z_0,v) - \int_0^T (k_{1\epsilon}z_\epsilon(t),v)\theta'(t)\,dt + \int_0^T (k_2 z_\epsilon(t),v)\theta(t)\,dt \\ &+ \int_0^T \langle -\Delta u_\epsilon(t),v\rangle\,\theta\,dt = \int_0^T (f(t),v)\theta(t)\,dt \end{aligned} \tag{1.136}$$

com $\theta,\;\; \theta'\in L^2(0,T),\;\; \theta(0)=1\;$ e $\;\theta(T)=0.$

Integrando por partes, a primeira integral em (1.136) obtemos

$$\begin{aligned} &-(\sqrt{k_{1\epsilon}}\,z_0,v) + (k_{1\epsilon}\,z_\epsilon(0),v) + \int_0^T (\frac{d}{dt}(k_{1\epsilon}\,z_\epsilon(t)),v)\theta(t)\,dt \\ &+ \int_0^T (k_2\,z_\epsilon(t),v)\theta(t)\,dt + \int_0^T \langle -\Delta u_\epsilon(t),v\rangle\,\theta\,dt \\ &= \int_0^T (f(t),v)\theta(t)\,dt \end{aligned}$$

usando, as convergências (1.132)-(1.135) e as hipóteses sobre θ passando o limite quando

$\epsilon \to o$ obtemos

$$
\begin{aligned}
&-(\sqrt{k_1}\, z_0, v) + (k_1\, z(0), v) + \int_0^T (\frac{d}{dt}(k_1\, z(t), v)\theta(t)\, dt \\
&+ \int_0^T (k_2\, z(t), v)\theta(t)\, dt + \int_0^T \langle -\Delta u(t), v\rangle\, \theta\, dt \\
&= \int_0^T (f(t), v)\theta(t)\, dt
\end{aligned} \tag{1.137}
$$

como

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T (\frac{d}{dt}(k_1\, z(t)), v)\theta(t)\, dt + \int_0^T (k_2\, z(t), v)\theta(t)\, dt + \int_0^T \langle -\Delta u(t), v\rangle\, \theta\, dt \\
&= \int_0^T (f(t), v)\theta(t)\, dt
\end{aligned}
$$

Segue que,

$$-(\sqrt{k_1}\, z_0, v) + (k_1\, z(0), v) = 0$$

isto é

$$(k_1\, z_0, v) = (\sqrt{k_1}\, z_0, v) \quad \text{para toda} \quad v \in V$$

Pela densidade de $H_0^1(D)$ em $L^2(D)$ temos $\quad k_1\, z(0) = \sqrt{k_1}\, z_0$. O que prova o teorema (1.5.2).

1.5.6 Unicidade

. A unicidade pode ser obtida de modo similar em Medeiros [24] ou em Santos [31]. $\square$

Capítulo 2

Existência de Solução para o Problema Estocástico Linear com Ruido Aditivo

Neste capítulo temos como objetivo de encontrar solução para a equação diferencial parcial estocástica do tipo hiperbólica-parabólica, equação (2.1) a seguir. O estudo de solução tanto para equação diferencial parcial estocástica do tipo hiperbólica assim como para equação diferencial parcial estocástica do tipo parabólica, encontramos em Chow [7] e em Pardoux [27]. Tendo essas duas referências foi possível encontrarmos solução de equação diferencial parcial estocástica do tipo hiperbólica-parabólica. É importante o estudo da solução deste tipo de equação, pois é possível vislumbrar um novo horizonte para este ramo da pesquisa envolvendo equação diferencial parcial estocástica. A seguir daremos o sentido da solução que queremos, e a definição da unicidade.

2.1 Definição da Solução do Problema

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$, um subconjunto aberto limitado com fronteira regular Γ. Seja $T > 0$ um número real fixo. Definimos $\mathcal{Q} = D \times]0, T[$, um cilíndro com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times [0, T]$. Seja $\{W_t\}_{t \in [0,T]}$ um processo de Wiener sobre o espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ com valores em $L^2(D)$, $(\mathcal{F}_t)$-adaptado e, com operador de covariância R tal que $Tr\, R < \infty$. Consideremos a seguinte equação diferencial estocástica.

$$k_1(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_2(x)\frac{\partial u}{\partial t} \;=\; \Delta u(t) + F(t, u(t), u'(t)) + k_1(x)B(t, u(t),\, u'(t))\,\frac{\partial W(t)}{\partial t} \tag{2.1}$$

onde $k_1(x) \geq 0$, $k_2(x) \geq \beta > 0$ quase sempre em D. Em (2.1) tomemos $u' = z$ onde $u' = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ e reescrevemos-o na forma.

$$\begin{aligned} du &= z\, dt \\ k_1(x)\, dz &= (-k_1(x)z + \Delta u)\, dt + F(t, u(t), z(t))dt + k_1(x)B(t, u(t), z(t))\, dW(t) \\ u(0) &= g, \quad k_1 z(0) = h. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Vamos considerar $V = H_0^1(D)$ e $H = L^2(D)$, usaremos os símbolos $\langle , \rangle$, $(,)$, $\|.\| = \|.\|_{H_0^1}(D)$, $|\,.\,| = \|\ ,\ \|_{L^2(D)}$ para denotar a dualidade entre os espaços$H_0^1(D)$ e $H^{-1}(D)$, o produto interno em $L^2(D)$, as normas em $H_0^1(D)$, e em $L^2(D)$ respectivamente. Seja W um R-processo de Wiener com valores no espaço de Hilbet K, com $Tr\, R < \infty$. Seja (u_0, z_0) uma variável aleatória $\mathcal{F}_0$-mensurável, com valores em $H_0^1(D) \times L^2(D)$ tal que $\mathbb{E}(|u_0|^2) < \infty$, $\mathbb{E}(|z_0|^2) < \infty$, independe de $W(t)$. Sejam as seguintes aplicações: $F : [0, T] \times H_0^1(D) \times H^{-1}(D) \to L^2(D)$ um processo predizível, e $E(\int_0^T |F(s)|^2 ds) < \infty$ e $B : [0, T] \times H_0^1(D) \times H^{-1}(D) \to L_2^R$ um operador contínuo. O processo estocástico $(u(t), z(t)) \in L^2(\Omega \times [0, T]; H_0^1(D)) \times L^2(\Omega \times [0, T]; H^{-1}(D))$, $\mathcal{F}_t$-adaptado, com $\mathbb{E}(\|u(t)\|^2) < \infty$ e $\mathbb{E}(\int_0^T |z(t)|^2\, dt) < \infty$ $\forall t \in [0, T]$ é solução forte do problema (2.2) se satisfaz:

$$\begin{aligned} (u(t), \phi) &= (u_0, \phi) + \int_0^t (z(s), \phi)\, ds \\ (k_1(x)z(t), \psi) &= (k_1\, z_0, \psi) + \int_0^t \langle Au, \psi\rangle\ ds + \int_0^t (-k_2(x)z(s), \phi) ds \\ &\quad + \textstyle\int_0^t (F(s, u(s), z(s)), \psi)\, ds + \displaystyle\int_0^t (\psi, k_1(x)\, B(s, u(s), z(s))\, dW(s)) \end{aligned} \tag{2.3}$$

quase sempre $\omega \in \Omega$, onde $\phi \in L^2(D)$ e $\psi \in H_0^1(D)$.

Definição 2.1.1. (Unicidade) Dizemos que a solução de (2.1) é solução única; se (u, z), (u_1, z_1) são soluções de (2.1) temos que $\mathbb{P}\{(u(t), z(t)) = (u_1(t), z_1(t)), \forall t, 0 \leq t \leq T\} = 1$

2.2 O problema Linear Estocástico com Ruido Aditivo

Para estudar a existência de solução para o problema (2.2). Consideremos $\Delta = A$ com $A : D(A) \subset H_0^1(D) \to H^{-1}(D)$ um operador, mensurável onde $D(A) = H_0^1(D) \cup H^2(D)$. Sobre A consideremos as seguintes propriedades;

(A1) A é um operador linear, contínuo, fechado, com domínio $\mathcal{D}(A) = H_0^1(D)$ denso em $L^2(D)$ com valores em V'

(A2) Existe $\alpha_1 > 0$ tal que

$$|\,\langle Au, v\rangle\,| \leq \alpha_1\, \|u\|_{H_0^1(D)}\, |v|_{L^2(D)}, [0, T] \times \Omega.$$

(A3) Existe $\alpha_2 > 0$ tal que, para qualquer $v \in V$

$$2\langle Av, v\rangle \leq -\alpha_2 \|v\|^2_{H^1_0(D)},$$

Para obter a solução do problema (2.2), econtraremos a existência de soluções para o seguinte problema estocástico linear com ruido aditivo.

$$\left\{\begin{array}{rcl} du(t) & = & z(t)\,dt \\ d(k_1\,z(t)) & = & Au(t)\,dt + (f(t) - k_2(x)\,z(t))\,dt + d(k_1\,M(t)) \\ u_0 & = & g, \quad k_1 z_0 = \sqrt{k_1} z_0 = h \end{array}\right. \tag{2.4}$$

cuja forma integral, é

$$\begin{array}{rcl} u(t) & = & g + \displaystyle\int_0^t z(s)\,ds \\ k_1(x)z(t) & = & h + \displaystyle\int_0^t (Au(s) - k_2(x)\,z(t) + f(s))\,ds + k_1(x)\,M(t) \end{array} \tag{2.5}$$

para todo $t \in [0,T]$, quase sempre $\omega \in \Omega$, onde $M(t)$ é um martingale em $L^2(D)$ com $M(0) = 0$.

Observação 2.2.1. Como em [2] e [24] consideremos a hipótese

(H1) k_1, $k_2 \in L^\infty(D)$ tais que $k_1(x) \geq 0$ e $k_2(x) \geq \beta > 0$ quase sempre em D

Definiremos o operador linear $L_{k_1} : H \to H$ por $L_{k_1}(g) = k_1 g$ para todo $g \in H$.

Lema 2.2.1. Consideremos $M(t), t \in [0,T]$ um martingale com operador de covariância local R. Seja $k_1 \in L^\infty(D)$ com $k_1(x) \geq 0$ quase sempre em D. Então $k_1(x)M(t)$ é um martingale contínuo quadrado integrável em $L^2(D)$ com operador covariânçia $[k_1 M]_t = L_{k_1}\widehat{R}_s\, L_{k_1}$. Além disso

$$[k_1 M]_t = L_{k_1} \int_0^t R_s\,ds\,L_{k_1} = \int_0^t L_{k_1}\,R_s\,L_{k_1} ds \tag{2.6}$$

onde $L_{k_1}\,R_s\,L_{k_1}$ é o operador de covariância local de $k_1(x)M(t)$

Demonstração. Afirmação $k_1(x)M(t)$ é um martingale. Com efeito, sendo $k_1(x)$ independente de t e $M(t)$ é $\mathcal{F}_t$-mensurável então $k_1(x)M(t)$ é $\mathcal{F}_t$-mensurável.

Usando o Teorema de Fubini mostraremos que $k_1(x)M(t)$ é quadrado integrável, isto é, devemos mostrar que $\mathbb{E}(\|k_1(x)M(t)\|^2) < \infty$. Com efeito

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\|k_1(x)M(t)\|^2_{L^2(D)}) &= \int_\Omega \int_0^T \int_D |k_1(x)M(t,\omega,x)|^2 \, dx \, ds \, \mathbb{P}(d\omega) \\
&\leq \sup_{x \in D} |k_1(x)|^2 \int_0^T \int_\Omega \int_D |M(t,\omega,x)|^2 \, dx \, \mathbb{P}(d\omega) \, dt \\
&\leq \|k_1\|^2_{L^\infty(D)} \int_0^T \int_\Omega \|M(t)\|^2_{L^2(D)} \, \mathbb{P}(d\omega) \, dt \\
&\leq \|k_1\|^2_{L^\infty(D)} \int_0^T \mathbb{E}(\|M(t)\|^2_{L^2(D)}) \, dt < \infty
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Além disso, como k_1 independe de t, logo mensurável com relação a σ-álgebra $\mathcal{F}_t$, então podemos escrever

$$\mathbb{E}(k_1(x)M(t) \,|\mathcal{F}_s) = k_1(x)\mathbb{E}(M(t) \,|\mathcal{F}_s) = k_1(x)M(s), t > s$$

.

Já que $k_1(x)M(t)$ é um martingale contínuo quadrado integrável em H, para este martingale, queremos encontrar um processo integrável, que denotaremos por $[k_1 \, M]_t$, se existe com valores em $\widehat{\mathcal{L}_1}(H)$ sobre $[0,T]$ tal que

$$\langle (k_1(x)M, g), (k_1(x)M, h) \rangle_t = ([k_1 \, M]_t \, g, h) \quad \forall g, h \in H. \tag{2.8}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\langle (k_1(x) \, M, g), (k_1(x) \, M, h) \rangle_t &= \langle (M, k_1(x)g), (M, k_1(x)h) \rangle_t \\
&= ([M]_t \, k_1(x)g, k_1(x)h) \\
&= (k_1(x)g, [M]_t \, k_1(x)h) \\
&= (g, k_1(x) \, [M]_t \, k_1(x)h) \\
&= (g, k_1(x) \int_0^t R_s \, ds \, k_1(x)h).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Onde $[M]_t = \displaystyle\int_0^t R_s \, ds$ é denominado o operador covariância do martingale $M(t)$ e R_t seu correspondende operador de covariância local.

Definiremos $[k_1 \, M]_t \, h = L_{k_1} \displaystyle\int_0^t R_s \, ds \, L_{k_1}(h) = k_1(x) \int_0^t R_s \, ds \, k_1(x)h$.

Afirmamos que: $L_{k_1} \displaystyle\int_0^t R_s \, ds \, L_{k_1}(h) = \int_0^t L_{k_1} R_s L_{k_1} \, ds(h)$. Com efeito, suponhamos que R_t seja uma função simples, isto é,

$$R_t = \sum_{k=1}^m C_k \chi_{A_k}(t), \quad \text{onde} \quad A_k \in \mathcal{B}([0,T]) \quad \text{e} \quad C_k \in \mathcal{L}(H). \tag{2.10}$$

Ora, temos que

$$\begin{aligned} L_{k_1} R_t L_{k_1}(f) &= L_{k_1} \sum_{k=1}^{m} C_k \chi_{A_k}(t) L_{k_1}(f) = \sum_{k=1}^{m} L_{k_1} C_k L_{k_1}(f) \chi_{A_k}(t) \\ &= \sum_{k=1}^{m} L_{k_1} C_k L_{k_1} \chi_{A_k}(t)(f) \end{aligned} \tag{2.11}$$

integrando no sentido de Bochner de 0 a t obtemos

$$\begin{aligned} L_{k_1} \int_0^t R_s \, ds L_{k_1}(f) &= L_{k_1} \sum_{k=1}^{m} C_k \mu(A_k) L_{k_1}(f) = \sum_{k=1}^{m} L_{k_1} C_k L_{k_1}(f) \mu(A_k) \\ &= \sum_{k=1}^{m} L_{k_1} C_k \, L_{k_1} \mu(A_k)(f) \end{aligned} \tag{2.12}$$

e

$$\int_0^t L_{k_1} R_s L_{k_1} \, ds(f) = \sum_{k=1}^{m} L_{k_1} C_k L_{k_1} \mu(A_k)(f) \tag{2.13}$$

onde $f \in H$, a afirmação é válida.

Se $R_t \in \mathcal{L}(L^2(D))$, como $\mathcal{L}(H)$ é um espaço de Banach separável existe uma sequência R_t^n de funções simples em $\mathcal{L}_1(L^2(D))$ onde $R_t^n := \int_s^t R_s^n \, ds$ tais que $\|R_t - R_t^n\|_{\mathcal{L}L^2(D)} \to 0$ quando $n \to \infty$. Além disso $\lim_{n\to\infty} \int_0^t \|R_s - R_s^n\|_{\mathcal{L}L^2(D)} \, ds = 0$. Por outro lado, da parte anterior, temos.

$$\begin{aligned} \|L_{k_1} \int_0^t R_s \, ds L_{k_1} - L_{k_1} \int_0^t R_s^n \, ds L_{k_1}\|_{\mathcal{L}L^2(D)} &= \|L_{k_1} \int_0^t R_s \, ds - \int_0^t R_s^n \, ds \, L_{k_1}\|_{\mathcal{L}L^2(D)} \\ &= \|L_{k_1} \int_0^t (R_s - R_s^n) \, ds L_{k_1}\|_{\mathcal{L}L^2(D)} \\ &\le \|L_{k_1}\|^2 \| \int_0^t (R_s - R_s^n) \, ds\|_{\mathcal{L}L^2(D)} \\ &= \|L_{k_1}\|^2 \int_0^t \|R_s - R_s^n\|_{\mathcal{L}L^2(D)} ds \to 0, \end{aligned} \tag{2.14}$$

quando $\quad n \to \infty$.

Temos ainda que

$$\begin{aligned} \| \int_0^t L_{k_1} R_s L_{k_1} \, ds - \int_0^t L_{k_1} R_s^n L_{k_1} \, ds\|_{\mathcal{L}L^2(D)} &= \| \int_0^t (L_{k_1} R_s L_{k_1} - L_{k_1} R_s^n L_{k_1}) \, ds\|_{\mathcal{L}L^2(D)} \\ &\le \int_0^t \|L_{k_1} R_s L_{k_1} - L_{k_1} R_s^n L_{k_1}\|_{\mathcal{L}(H)} \, ds \\ &\le \int_0^t \|L_{k_1}\|^2 \|(R_s - R_s^n)\|_{\mathcal{L}L^2(D)} \, ds \\ &= \|L_{k_1}\|^2 \int_0^t \|R_s - R_s^n\|_{\mathcal{L}L^2(D)} ds \to 0, \end{aligned} \tag{2.15}$$

quando $\quad n \to \infty$.

Por consequência,

$$\begin{array}{l} L_{k_1}\int_0^t R_s\,dsL_{k_1} = \lim_{n\to\infty} L_{k_1}\int_0^t R_s^n\,dsL_{k_1} \\ \Rightarrow \int_0^t L_{k_1}R_sL_{k_1}\,ds = \lim_{n\to\infty}\int_0^t L_{k_1}R_s^nL_{k_1}\,ds \end{array} \tag{2.16}$$

pois,

$$\lim_{n\to\infty} L_{k_1}\int_0^t R_s^n\,dsL_{k_1} = \lim_{n\to\infty}\int_0^t L_{k_1}R_s^nL_{k_1}\,ds. \tag{2.17}$$

O que prova o lema (2.2.1). □

Lema 2.2.2. Suponhamos que as condições $(A_1)-(A_3)$ válidas e considerando $k_1,\, k_2 \in L^\infty(D)$ com $k_1(x)\geq 0,\ k_2>\beta\geq 0$ sejam verdadeiras e seja $f(t)$, um processo $\mathcal{F}_t$-predizível em $L^2([0,T]\times\Omega; L^2(D))$. Assumimos que $M(t)$ é um martingale contínuo com valores em $H_0^1(D)$ tal que $AM(t)$ é um $L^2(\Omega)$-processo contínuo em $L^2(D)$. Então, dado $g\in H_0^1(D)$, e $h\in L^2(D)$ o problema (2.5) tem uma única solução $(u;z)\in L^2(\Omega;L^2(0,T;H_0^1(D)))\times L^2(\Omega;L^2([0,T];L^2(D)))$ tal que a equação da energia é satisfeita:

$$\begin{aligned} |\sqrt{k_1}\,z(t)|^2 &= |h|^2 + 2\int_0^t (Au(s),z(s))\,ds + 2\int_0^t ((f(s),z(s))\,ds \\ &\quad -2\int_0^t (k_2(x)\,z(s),z(s))\,ds + 2\int_0^t (\sqrt{k_1}\,z(s), d(\sqrt{k_1}\,M(s))) \\ &\quad + \int_0^t Tr\,[L_{k_1}\,R_sL_{k_1}]\,ds. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Observação 2.2.2. Sendo $u'=z$, e A um operador linear simétrico, então temos que $2(Au,z)=\dfrac{d}{dt}\langle Au,u\rangle$ logo

$$2\int_0^t (Au(s),z(s))\,ds = \int_0^t \frac{d}{ds}\langle Au(s),u(s)\rangle\,ds = \langle Au(t),u(t)\rangle - \langle Ag,g\rangle \tag{2.19}$$

e a equação energia torna-se da forma

$$\begin{aligned} |\sqrt{k_1}\,z(t)|^2 &= |h|^2 + \langle Au(t),u(t)\rangle - \langle Ag,g\rangle + 2\int_0^t (f(s),z(s))\,ds \\ &\quad -2\int_0^t (k_2(x)\,z(s),z(s))\,ds + 2\int_0^t (\sqrt{k_1}\,z(s), d(\sqrt{k_1}\,M(s))) \\ &\quad + \int_0^t Tr\,[L_{k_1}\,R_sL_{k_1}]\,ds. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Demonstração. Consideremos o processo $N(t)=\displaystyle\int_0^t M(s)\,ds$. Definiremos $\mu(t)=u(t)-N(t)$ e $\nu(t)=z(t)-M(t)$, com $M(0)=0$. Então

$$
\begin{aligned}
u(t) - N(t) &= u_0 + \int_0^t (z(s) - m(s))\, ds \\
k_1(x)(z(t) - M(t)) &= \sqrt{k_1(x) z_0} + \int_0^t A(u(s) - N(s))\, ds - \int_0^t k_2(x)(z(s) - M(s))\, ds \\
&\quad + \in_0^t (f(s) - k_2(x)\, M(s) + AN(s))\, ds
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
\mu(t) &= u_0 + \int_0^t \nu(s)\, ds \\
k_1(x)\nu(t) &= \sqrt{k_1(x) z_0} + \int_0^t A\, mu(s)\, ds - \int_0^t k_2(x)\, \nu(s)\, ds + \in_0^t \widetilde{f}(s,x)\, ds
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

onde $\widetilde{f}(t,x) = f(t) - k_2(x)M(t) + AN(t)$.

Podemos reescrever o Sistema Estocástico (2.4) na forma diferencial,

$$
\begin{aligned}
d\mu(t) &= \nu(s)\, dt \\
d(k_1(x)\nu(t)) &= A\mu(t)\, dt - k_2(x)\, \nu(t)\, dt + \widetilde{f}(t,x)\, dt \\
\mu_0 &= g, \\
k_1\, \nu_0 &= \sqrt{k_1} \nu_0 = h
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

onde $\widetilde{f}(t,x) = f(t) + AN(t) - k_2(x)M(t)$.

O problema (2.23) é equivalente ao problema determinístico

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2}(k_1\, \mu(t)) + \frac{d}{dt}(k_2 \mu(t)) = A\mu(t) + \tilde{f}(t,x) \\
&u_0 = g, \\
&k_1 \mu_0' = \sqrt{k_1} \mu_0' = h
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

(i) Sendo $M(t)$ um martingale contínuo no tempo t, k_2 independe de t, então aplicando o teorema de *Fubini* temos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\int_0^T \|k_2(x)M(s)\|^2_{L^2(D)}\, ds) &= \int_\Omega \int_0^T \int_D |k_2(x)M(t,\omega,x)|^2\, dx\, dt\, \mathbb{P}(d\omega) \\
&= \int_0^T \int_\Omega \int_D |k_2(x)|^2 |M(t,\omega,x)|^2\, dx\, \mathbb{P}(d\omega)\, ds \\
&\leq \sup_{x \in D} |k_2(x)|^2 \int_0^T \int_\Omega \|M(t)\|^2_{L^2(D)} \mathbb{P}(d\omega)\, dt \\
&\leq \|k_2\|^2_{L^\infty(D)} \int_0^T \mathbb{E}(\|M(t)\|^2_{L^2(D)})\, dt < \infty
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

assim sendo, $k_2(x)M(t) \in L^2([0,T] \times \Omega; L^2(D)))$.

(ii) Usando a hipótese sobre $M(t)$, e como A é um operador contínuo temos que $AM(t)$

é um processo $L^2(\Omega)$-contínuo em $L^2(D)$, consequentemente

$$AN(t) = A\int_0^t M(s)\,ds = \int_0^t AM(s)\,ds$$

tambem é um processo $L^2(\Omega)$-contínuo em H, isto é, $AN \in L(\Omega; C([0,T]; L^2(D)))$

(iii) $f(t)$ é um processo predizível em $L^2([0,T]\times\Omega; L^2(D))$.

Então de (i)-(iii) podemos deduzir que $\tilde{f}(t,x) = f(t) + AN(t) - K_2(x)M(t) \in L^2([0,T]\times\Omega; L^2(D))$ quase sempre $\omega \in \Omega$.

Pelo Teorema (1.5.2), (ver também Teorema 1 em [24]),o sistema (2.5) tem uma solução $\mu \in L^2([0,T]; H_0^1(D))$ com $\nu \in L^2([0,T]; H)$.Aplicando o Lema (1.4.3) ao sistema (2.23), (μ,ν) satisfaz a equação

$$|\sqrt{k_1(s)}\nu(t)|^2 = |h|^2 + 2\int_0^t (d(k_1(x)\nu(s)),\nu(s))\,ds. \tag{2.26}$$

Da Equação (2.23) temos

$$|\sqrt{k_1}\,\nu(t)|^2 \;=\; |h|^2 + 2\int_0^t (A\mu(s) - k_2\nu(s) + \widetilde{f}(s),\nu(s))\,ds. \tag{2.27}$$

Além disso, como

$$u(t) = \mu(t) + N(t) \;\text{ e }\; z(t) = \nu(t) + M(t).$$

Então podemos deduzir que o sitema (2.5) tem uma única solução $u \in L^2(\Omega; L^2(0,T;V))$ e $z \in L^2(\Omega; L^2(0,T;H))$ com $k_1 z \in L^2(\Omega; L^2(0,T;H^{-1}(D)))$ quase sempre $\omega \in \Omega$.

Afirmamos que, a equação

$$\begin{aligned} |\sqrt{k_1(x)}\,z(t)|^2 &= |h|^2 + \langle Au(s),u(s)\rangle - \langle Ag,g\rangle + 2\int_0^t (f(s),z(s))\,ds \\ &\quad +2\int_0^t (\sqrt{k_1(x)}\,z(s), d(\sqrt{k_1(x)}\,M(s))) \\ &\quad -2\int_0^t |\sqrt{k_2(x)}\,z(s)|^2\,ds + \int_0^t Tr\,[L_{k_1}\,R_s L_{k_1}]\,ds \end{aligned} \tag{2.28}$$

é válida. Com efeito, substituindo $\mu(t) = u(t) - N(t)$, $\nu(t) = z(t) - M(t)$ e $\widetilde{f}(t,x) = f(t) + AN(t) - k_2(x)M(t)$ na igualdade (2.27), e simplificando os termos semelhantes obtemos

$$\begin{aligned} &\|\sqrt{k_1(x)}\,z(t) - \sqrt{k_1(x)}\,M(t)\|^2_{L^2(D)} = \\ &|h|^2 + 2\int_0^t (Au(s) - AN(s) - k_2(x)z(s) + k_2(x)M(s) \\ &+f(s) + AN(s) - k_2(x)M(s), z(s) - M(s))\,ds \end{aligned} \tag{2.29}$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
&|\sqrt{k_1(x)}\, z(t) - \sqrt{k_1(x)}\, M(t)|^2 = \\
&|h|^2 + 2\int_0^t (Au(s) - k_2(x)z(s) + f(s), z(s) - M(s))\, ds
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
&|\sqrt{k_1(x)}\, z(t)|^2 - 2(\sqrt{k_1(x)}z, \sqrt{k_1(x)}M(t)) + |\sqrt{k_1(x)}M(t)|^2 \\
&= |h|^2 + 2\int_0^t (Au(s), z(s))ds - 2\int_0^t (Au(s), M(s))ds \\
&+2\int_0^t (f(s), z(s))ds - 2\int_0^t (f(s), M(s))ds \\
&-2\int_0^t |\sqrt{k_2(x)}\, z(s)|^2\, ds + \int_0^t (k_2(x)\, z(s), M(s))\, ds.
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

Como

$$
-2(\sqrt{k_1(x)}z, \sqrt{k_1(x)}M(t)) = -2(\sqrt{k_1(x)}\nu, \sqrt{k_1(x)}M(t)) - 2|\sqrt{k_1(x)}M(t)|^2
$$

, então temos que

$$
\begin{aligned}
&|\sqrt{k_1(x)}\, z(t)|^2 - 2(\sqrt{k_1(x)}\nu(t), \sqrt{k_1(x)}M(t)) - |\sqrt{k_1(x)}M(t)|^2 \\
&= |h|^2 - 2\int_0^t (Au(s), z(s))ds - 2\int_0^t (Au(s), M(s))ds + 2\int_0^t (f(s), z(s))ds \\
&-2\int_0^t (f(s), M(s))ds - 2\int_0^t |\sqrt{k_2(x)}\, z(s)|^2\, ds + 2\int_0^t (k_2(x)\, z(s), M(s))\, ds
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

Pelo o Lema (1.3.6) temos que

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{k_1(x)}\nu(t), \sqrt{k_1(x)}M(t)) &= \int_0^t (\sqrt{k_1(x)}\nu(s), d(\sqrt{k_1(x)}M(s))) \\
&+ \int_0^t (\frac{d}{dt}(k_1(x)\nu(s)), M(s))\, ds
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Já que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t (d(k_1(x)\nu(s)), M(s))\, ds \\
&= \int_0^t (A\mu(s) - k_2(x)\nu(s) + \tilde{f}(s), M(s))\, ds \\
&= \int_0^t (Au(s) - AN(s) - k_2(x)z(s) + k_2(x)M(s), M(s))\, ds \\
&+ \int_0^t (f(s) + AN(s) - k_2(x)M(s), M(s))\, ds \\
&= \int_0^t (A\, u(s), M(s))\, ds - \int_0^t (k_2(x)\, z(s), M(s))\, ds + \int_0^t (f(s), M(s))\, ds.
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{k_1(x)}\nu(s), d(\sqrt{k_1(x)}M(s))) &= (\sqrt{k_1(x)}z(s), d(\sqrt{k_1(x)}M(s))) \\
&-(\sqrt{k_1(x)}M(s), d(\sqrt{k_1(x)}M(s)))
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

temos que

$$
\begin{aligned}
&-2(\sqrt{k_1(x)}\nu(t), \sqrt{k_1(x)}M(t)) \\
&= -2\int_0^t (\sqrt{k_1(x)}z(s), d(\sqrt{k_1(x)}M(s))) \\
&+2\int_0^t (\sqrt{k_1(x)}M(s), d(\sqrt{k_1(x)}M(s))) \\
&-2\int_0^t (A\,u(s), M(s))\,ds + 2\int_0^t (k_2(x)\,z(s), M(s))\,ds \\
&-2\int_0^t (f(s), M(s))\,ds
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

Sendo que M é um martingale contínuo quadrado integrável em $L^2(D)$, aplicando a o Lema (1.3.6)obtemos

$$
|\sqrt{k_1}\,M(t)|^2 = 2\int_0^t \left\langle \sqrt{k_1}\,M(s), d(\sqrt{k_1}\,M(s))\right\rangle\,ds + Tr\,[k_1\,M]_t \tag{2.37}
$$

substituindo (2.36) e (2.37) em (2.32) obtemos

$$
\begin{aligned}
&|\sqrt{k_1(x)}\,z(t)|^2 - 2\int_0^t (\sqrt{k_1(x)}z(s), d(\sqrt{k_1(x)}M(s))) \\
&-2\int_0^t (A\,u(s), M(s))\,ds + 2\int_0^t (\sqrt{k_1(x)}M(s), d(\sqrt{k_1(x)}M(s))) \\
&+2\int_0^t (k_2(x)\,z(s), M(s))\,ds - 2\int_0^t (f(s), M(s))\,ds \\
&-2\int_0^t \left\langle \sqrt{k_1}\,M(s), d(\sqrt{k_1}\,M(s))\right\rangle\,ds - Tr\,[k_1\,M]_t \\
&= \|h\|^2 + 2\int_0^t (A\,u(s), z(s))\,ds - 2\int_0^t (Au, M(s))\,ds \\
&-2\int_0^t |\sqrt{k_2(x)}\,z(s)|^2\,ds + 2\int_0^t (k_2(x)\,z(s), M(s))\,ds \\
&+2\int_0^t (f(s), z(s))\,ds - 2\int_0^t (f(s), M(s))\,ds
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

simplificando os termos semelhantes

$$
\begin{aligned}
&|\sqrt{k_1(x)}\,z(t)|^2 \;\; - 2\int_0^t \left\langle \sqrt{k_1(x)}\,z(s), d(\sqrt{k_1(x)}\,M(s))\right\rangle - Tr\,[k_1\,R_s] \\
&= |h|^2 + 2\int_0^t (A\,u(s), z(s))\,ds - 2\int_0^t |\sqrt{k_2(x)}\,z(s)|^2\,ds \\
&+2\int_0^t (f(s), z(s))\,ds
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
|\sqrt{k_1(x)}\, z(t)|^2 &= |h|^2 + 2\int_0^t (A\, u(s), z(s))\, ds - 2\int_0^t |\sqrt{k_2(x)}\, z(s)|^2\, ds \\
&\quad +2\int_0^t (f(s), z(s))\, ds + Tr\, [L_{k_1}\, R_s L_{k_1}] \\
&\quad +2\int_0^t (\sqrt{k_1(x)}\, z(s), d(\sqrt{k_1(x)} M(s))\, ds
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

Da Observação (2.2.2) e do Lema (2.2.1) $k_1(x)\, M(t)$ é um martingale com operador de covariação $[k_1\, M]_t$ onde $[k_1\, M]_t := \displaystyle\int_0^t L_{k_1}\, R_s L_{k_1}\, ds$ temos que

$$
\begin{aligned}
&|\sqrt{k_1(x)}\, z(t)|^2 - \langle Au(s), u(s)\rangle + 2\int_0^t |\sqrt{k_2(x)}\, z(s)|^2\, ds \\
&= \|h\|^2 - \langle Ag, g\rangle + 2\int_0^t (f(s), z(s))\, ds + \int_0^t Tr\, [L_{k_1}\, R_s L_{k_1}]\, ds \\
&+2\int_0^t \left\langle \sqrt{k_1(x)}\, z(s), d(\sqrt{k_1(x)}\, M(s)) \right\rangle
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

Portanto o problema (2.4) tem solução única (u, z) com as mesmas regularidades de (μ, ν) tal que $u(t) \in L^2(\Omega; L^2([0, T]; H_0^1(D)))$ e $z(t) \in L^2(\Omega; L^2([0, T]; L^2(D)))$. O que prova o Lema (2.2.2). $\square$

Teorema 2.2.1. : Dadas as condições (A1)-(A3) verdadeiras. Assumimos que $f(t)$, é um processo predizível com valores em $L^2(D)$, e $M(t)$ é um martingale contínuo quadrado integrável (L^2-martingale) em $L^2(D)$ com operador covariância local R_t tal que

$$
\mathbb{E}\{\int_0^t (c|f(s)|^2 + Tr\, [L_{k_1}\, R_s L_{k_1}])\, ds\} < \infty. \tag{2.42}
$$

Então, para $g \in H_0^1(D)$ e $h \in L^2(D)$ o problema (2.5) tem uma única solução (u, z) com $u \in L^2(\Omega; L^2(0, T; H_0^1(D)))$ e $z \in L^2(\Omega; L^2([0, T]; L^2(D)))$.

Demonstração. UNICIDADE. Da literatura, nota-se que a dualidade $\langle k_1 z', z'\rangle$ não faz sentido. Portanto o método da energia não pode ser aplicado para encontrar a unicidade de soluções: Aqui utilizamos o método introduzido por Visik e Ladyzenskaja em [34].

Assumimos as hipótese do Teorema (2.2.1). Suponhamos que (u, z) e $(\widetilde{u}, \widetilde{z})$ são ambas soluções do problema (2.4). Seja $(v, w) = (u - \widetilde{u}, z - \widetilde{z})$, então (v, w) satisfaz o sistema

$$
\begin{aligned}
dv(t) &= w(t)dt \\
d(k_1\, w(t)) &= [Av(t) - k_2\, w(t)]dt \\
v(0) &= 0, \\
k_1 w(0) = 0.
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

O que equivale ao problema

$$
\begin{aligned}
(k_1\, v''(t)) &= [Av(t) - k_2\, v'(t)]dt\\
v(0) &= 0,\\
k_1 v'(0) = 0.
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

Fixando $s \in (0, T)$, definamos

$$
\varphi(t) = \begin{cases} -\displaystyle\int_t^s v(r)\, dr, & \text{se} \quad 0 \le t \le s \\ 0 \quad \text{se} & s < t \le T \end{cases}
$$

Nestas condições temos que

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &= \int_0^t v(r)\, dr - \int_0^t v(r)\, dr - \int_t^s v(r)\, dr\\
&= \int_0^t v(r)\, dr - \int_0^s v(r)\, dr
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

Tomando $U_1(t) = \displaystyle\int_0^t v(r)\, dr$ e $U_1(s) = \displaystyle\int_0^s v(r)\, dr$. Notemos que $\varphi(s) = 0$ e $\varphi'(t) = v(t)$, $0 \le t \le s$.

Portanto se $0 \le t \le s$; $\varphi(t) = U_1(t) - U_1(s)$. Desde que $v \in L^2(\Omega, C(0, T; H_0^1(D)))$. Vejamos que $\varphi \in L^2(\Omega, L^2(0, T; H_0^1(D)))$. De fato

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\int_0^T \|\varphi(t)\|^2 dt) &= \mathbb{E}(\int_0^s \|U_1(t) - U_1(s)\|^2 dt)\\
&\le \mathbb{E}(\int_0^s (\|U_1(t)\| + \|U_1(s)\|)^2 dt)\\
&\le 2\mathbb{E}(\int_0^T (\|\int_0^t v(r)\, dr\|^2 + \|\int_0^s v(r)\, dr\|^2) dt)\\
&\le 4\mathbb{E}(\int_0^T \|\int_0^T v(r)\, dr\|^2 dt)\\
&\le 4T^2\mathbb{E}(\int_0^T \|v(t)\|^2 dt) < \infty
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

Portando, $\varphi \in L^2((\Omega; L^2(0, T; L^2(H_0^1(D)))$ para todo $t \in (0; T)$, quase sempre $\omega \in \Omega$.

Fazendo o produto interno por φ em (2.44) e integrando de 0 à s temos,

$$
\int_0^s \langle k_1(x)\, v''(t), \varphi(t)\rangle\, dt - \int_0^s \langle Av(t), \varphi(t)\rangle\, dt + \int_0^s \langle k_2\, v'(t), \varphi(t)\rangle\, dt = 0 \tag{2.47}
$$

Do primeiro membro de (2.47) temos e de $\varphi'(t) = v(t)$, $0 \le t \le s$ e de $\varphi(s) = 0$ e como

$k_1(x)v(0) = 0$ temos que

$$\begin{aligned}\int_0^s \langle k_1(x)\, v''(t), \varphi(t)\rangle\, dt &= \int_0^s d\,\langle k_1(x)\, v'(t), \varphi(t)\rangle - \int_0^s \langle k_1(x)\, v'(t), \varphi'(t)\rangle\, dt \\ &= \langle k_1(x)\, v'(s), \varphi(s)\rangle - \langle k_1(x)\, v'(0), \varphi'(0)\rangle - \int_0^s \langle k_1(x) v'(t), \varphi'(t)\rangle\, dt \\ &= -\int_0^s \langle k_1(x) v'(t), \varphi'(t)\rangle\, dt.\end{aligned} \tag{2.48}$$

Como $\varphi'(t) = v(t)$ temos que

$$\int_0^s \langle k_1(x)\, v''(t), \varphi(t)\rangle\, dt = -\int_0^s \langle k_1(x) v'(t), v(t)\rangle\, dt, \tag{2.49}$$

sendo que $v' \in L^2(\Omega; L^(0, T; L^2(D)))$ temos que

$$\int_0^s (k_1(x)\, v"(t), \varphi(t))dt = -\frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}(k_1(x)v(t), v(t))dt = -\frac{1}{2}(k_1(x)v(t), v(t)). \tag{2.50}$$

Por outro lado, de modo análago obtemos

$$\int_0^s (k_1(x)\, v'(t), \varphi(t))dt = -\int_0^s (k_2\, v(t), v(t))dt. \tag{2.51}$$

Mais ainda, como o operador $A := \Delta$, então temos que,

$$\begin{aligned}\int_0^s \langle -\Delta v(t), \varphi(t)\rangle\, dt &= \int_0^s a(v(t), \varphi(t))dt = \int_0^s a(\varphi'(t), \varphi(t))dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt} a(\varphi'(t), \varphi(t))dt = \frac{1}{2}a(\varphi(s), \varphi(s)) - \frac{1}{2}a(\varphi(0), \varphi(0)) \\ &= -\frac{1}{2}a(\varphi(0), \varphi(0))\end{aligned} \tag{2.52}$$

Substituindo (2.50), (2.51) e (2.52) em (2.47) resulta que

$$-\frac{1}{2}(k_1(x)v(t), v(t)) - \frac{1}{2}a(\varphi(0), \varphi(0)) - \int_0^s (k_2\, v(t), v(t))dt = 0, \tag{2.53}$$

para todo $t \in [0, T]$ quase sempre $\omega \in \Omega$.

Como $a(\varphi(0), \varphi(0)) = \|\varphi(0)\|^2_{H^1_0(D)}$ e $\dfrac{1}{k_2(x)} \leq \|\dfrac{1}{k_2}\|_{L^\infty(D)}$ quase sempre em D, então $k_2(x) = |k_2(x)| \geq \frac{1}{\|\frac{1}{k_2}\|} = \delta$ quase sempre em D. Desse modo, de (2.53), resulta que

$$\frac{1}{2}(k_1(x)v(t), v(t)) + \frac{1}{2}\|\varphi(0)\|^2 + \delta\int_0^s (v(t), v(t))dt \leq 0, \tag{2.54}$$

para todo $t \in [0, T]$ quase sempre $\omega \in \Omega$.

Como o primeiro membro da desigualdade (2.54) são de termos positivos devemos ter que $\varphi(0) = 0$ e $\displaystyle\int_0^s (v(t), v(t))dt = 0$ quase sempre

obtemos $v(t) = 0$, quase sempre $\omega \in \Omega$ e consequentemente $w(t) = 0$, para cada

$t \in [0,T]$. Seja $\{r_1, r_2, r_3, ...\}$ um conjunto enumerável de números racionais em $[0,T]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe Ω_n tal que $\mathbb{P}(\Omega_n) = 1$ e $v(r_n, \omega) = 0$ para todo $\omega \in \Omega_n$. Seja $\Omega' = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, então $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ e para cada $\omega \in \Omega'$ temos $v(r_n, \omega) = 0$ para todo n. Já que $v(t)$ é um processo estocástico contínuo existe Ω'' com $\mathbb{P}(\Omega'') = 1$ e para cada $\omega \in \Omega''$ a função $t \to v(t,\omega)$ é contínua. Seja $\Omega_0 = \Omega' \cap \Omega''$, então $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ e para cada $\omega \in \Omega_0$, $v(t,\omega) = 0$ para todo $t \in [0,T]$, consequentemente $w(t,\omega) = 0$ para todo $t \in [0,T]$. Portanto $(u,z) = (\widetilde{u}, \widetilde{z})$ para todo $t \in [0,T]$, quase sempre $\omega \in \Omega$. Portanto concluimos que a solução é única.

Existência

Para demonstrarmos a existência primeiro consideremos o sistema perturbado

$$\begin{aligned} du_\epsilon(t) &= z_\epsilon(t)\,dt \\ d(k_{1\epsilon}\, z_\epsilon(t)) &= Au_\epsilon(t)\,dt + (f(t) - k_2(x)\, z_\epsilon(t))\,dt + d(k_{1\epsilon}\, M(t)) \\ u_\epsilon(0) &= u_0 = g, \quad k_{1\epsilon} z_\epsilon(0) = k_{1\epsilon} z_0 = \sqrt{k_1 \epsilon} z_0 = h \end{aligned} \tag{2.55}$$

com a respectiva equação integral

$$\begin{aligned} u_\epsilon(t) &= u_0 + \int_0^t z_\epsilon(s)\,ds \\ k_{1\epsilon}\, z_\epsilon(t) &= \sqrt{k_1 \epsilon} z_0 + \int_0^t (Au_\epsilon(s) + f(s) - k_2(x)\, z_\epsilon(s))\,ds + d(k_{1\epsilon}\, M(s)) \end{aligned} \tag{2.56}$$

para todo $t \in [0,T]$ e quase sempre $\omega \in \Omega$. Onde $k_{1\epsilon}(x) = k_1(x) + \epsilon, \quad$ com $\quad 0 < \epsilon < 1$.

Para prova do Teorema (2.2.1) vamos necessitar do seguinte lema que que garante a solução do sistema (2.56) e atende a equação energia.

Lema 2.2.3. Considerando as hipóteses do Teorema (2.2.1).Assumimos que $f(t)$, é um processo predizível com valores em H, e $k_{1\epsilon} M(t)$ é um martingal contínuo quadrado integrável (L^2-martingale) em H com operador covariância local $L_{k_{1\epsilon}} R_t L_{k_{1\epsilon}}$ tal que Para cada $0 < \epsilon < 1$

$$\mathbb{E}\{\int_0^t (c|f(s)|^2 + Tr\,[L_{k_{1\epsilon}}\, R_s L_{L_{1\epsilon}}])\,ds\} < \infty. \tag{2.57}$$

Então, dados $g \in H_0^1(D)$ e $h \in L^2(D)$ o problema (2.56) tem um par de solução (u_ϵ, z_ϵ) com $u_\epsilon \in L^2(\Omega; C([0,T]; H_0^1(D)))$ e $z_\epsilon \in L^2(\Omega; L^2([0,T]; L^2(D)))$ tal que a equação da energia é satisfeita.

$$\begin{aligned} |\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\, z_\epsilon(t)|^2 &= \|h\|^2 + (Au_\epsilon(t), u_\epsilon(t)) - (Ag, g) - 2\int_0^t |\sqrt{k_2(x)}\, z_\epsilon(s)|^2\,ds \\ &+2\int_0^t (f(s), z_\epsilon(s))\,ds + 2\int_0^t (\sqrt{k_{1\epsilon}}\, z_\epsilon(s), d(\sqrt{k_{1\epsilon}}\, M(s))) \\ &+ \int_0^t Tr\,[L_{k_{1\epsilon}}\, R_s L_{k_{1\epsilon}}]\,ds. \end{aligned} \tag{2.58}$$

A seguir faremos demonstração do Lema (2.2.3)

Passo 1: Para efeito de simplicidade na escrita, a partir daqui vamos representa nossos espaços por: $V = H_0^1(D)$ e $H = L^2(D)$ e $V' = H^{-1}(D)$. Seja $\{\phi_k\}$, $k = 1, 2, 3, ...$ uma base ortonormal em H ortogonal em V. Definiremos $H_n = span\{\phi_1, ..., \phi_n\}$. Supomos que $P_n : H \to H_n$ é o operador projeção ortogonal definido por $P_n g = \sum_{k=1}^{n} (g, \phi_k)\phi_k$, para $g \in H$. Então $P_n g \in \mathcal{D}(A)$, onde $\mathcal{D}(A)$ denota o domínio de A, denso em H. Desde que $M(t)$ é um L^2-martingale em H. Definiremos $M^n(t) = P_n\, M(t)$, sendo $M^n(t)$ um L^2-martingale em H. Seja $\{M^n(t)\}$ uma sequência de L^2-martingales contínuos em $D(A)$ tal que $AM^n(t)$ é um L^2-processo contínuo em H e $\mathbb{E}\{\sup_{0\le t\le T} \|M(t) - M^n(t)\|^2\} \to 0$ quando $n \to \infty$.

Para cada ϵ fixado, consideramos o seguinte sistema

$$
\begin{aligned}
(du^n_\epsilon(t), \phi_i) &= (z^n_\epsilon(t), \phi_i)\, dt \\
(d(k_{1\epsilon}\, z^n_\epsilon(t)), \phi_j) &= ((Au^n_\epsilon(t) - k_2\, z^n_\epsilon(t)), \phi_j)\, dt + (f(t), \phi_j)\, dt \\
&\quad +(\phi_j, d(k_{1\epsilon}\, M^n(t))) \\
u^n_\epsilon(0) &= u_0, \\
k_{1\epsilon}\, z^n_\epsilon(0) &= \sqrt{k_{1\epsilon}}\, z_0.
\end{aligned}
\tag{2.59}
$$

quase sempre $\omega \in \Omega$ ou na forma integral

$$
\begin{aligned}
(u^n_\epsilon(t), \phi_i) &= (u_0, \phi_i) + \int_0^t (z^n_\epsilon(s), \phi_i)\, ds \\
(k_{1\epsilon}\, z^n_\epsilon(t), \phi_j) &= (\sqrt{k_{1\epsilon}} z_0, \phi_j) + \int_0^t ((Au^n_\epsilon(s) - k_2\, z^n_\epsilon(s)), \phi_j)\, ds \\
&\quad + \textstyle\int_0^t (f(s), \phi_j)\, ds + (\phi_i, k_{1\epsilon}\, M^n(t))
\end{aligned}
\tag{2.60}
$$

quase sempre $\omega \in \Omega$ Pelo Lema 2.2.2, o sistema (2.59) tem uma única solução $(u^n_\epsilon(t), z^n_\epsilon(t)) \in L(\Omega, C([0, T]; V)) \times L(\Omega; L^2([0, T]; H))$ satisfazendo a equação energia

$$
\begin{aligned}
|\sqrt{k_{1\epsilon}}\, z^n_\epsilon(t)|^2 &= |\sqrt{k_{1\epsilon}} z_0|^2 + 2(Au^n_\epsilon(t), u^n_\epsilon(t)) - 2(Au_0, u_0) - 2\int_0^t |\sqrt{k_2}\, z^n_\epsilon(s)|^2\, ds \\
&\quad +2\int_0^t (f(s), z^n_\epsilon(s))\, ds + 2\int_0^t (\sqrt{k_{1\epsilon}}\, z^n_\epsilon(s), d(\sqrt{k_{1\epsilon}}\, M^n(s))) \\
&\quad + \int_0^t Tr\, [L_{k_{1\epsilon}}\, R^n_s L_{k_{1\epsilon}}]\, ds.
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

quase certamente $\omega \in \Omega$

Passo 2: Convergência

Sejam $(u^m_\epsilon(t), z^m_\epsilon(t))$ e $(u^n_\epsilon(t), z^n_\epsilon(t))$ soluções de (2.60). Definamos $(u^{mn}_\epsilon(t), z^{mn}_\epsilon(t)) = (u^m_\epsilon(t) - u^n_\epsilon(t), z^m_\epsilon(t) - z^n_\epsilon(t))$ e $M^{mn}(t) = M^m(t) - M^n(t)$. De acordo com o problema linear (2.5), $(u_\epsilon^{mn}(t), z_\epsilon^{mn}(t))$ satisfaz o sistema abaixo

$$\begin{aligned} u_\epsilon^{mn}(t) &= \int_0^t z_\epsilon^{mn}(s)\,ds \\ k_{1\epsilon}\, z_\epsilon^{mn}(t) &= \int_0^t (Au_\epsilon^{mn}(s) - k_2\, z_\epsilon^{mn}(s))\,ds + k_{1\epsilon}\, M^{mn}(t) \end{aligned} \tag{2.62}$$

com a correspondente equação de energia.

$$\begin{aligned} |\sqrt{k_{1\epsilon}}\, z_\epsilon^{mn}(t)|^2 &= 2\,\langle Au_\epsilon^{mn}(t), u_\epsilon^{mn}(t)\rangle - 2\int_0^t |\sqrt{k_2}\, z_\epsilon^{mn}(s)|^2\,ds \\ &+2\int_0^t (\sqrt{k_{1\epsilon}}\, z_\epsilon^{mn}(s), d(\sqrt{k_{1\epsilon}}\, M^{mn}(s))) + \int_0^t Tr\,[L_{k_{1\epsilon}}\, R_s^{mn} L_{k_{1\epsilon}}]\,ds. \end{aligned} \tag{2.63}$$

onde $L_{k_{1\epsilon}}\, R_t^{mn} L_{k_{1\epsilon}}$ denota o operador covariação para $k_{1\epsilon}\, M^{mn}(t)$. Aplicando a condição (A3), na igualdade (2.63) teremos

$$\begin{aligned} &|\sqrt{k_{1\epsilon}}\, z_\epsilon^{mn}(t)|^2 + \alpha_2\|u_\epsilon^{mn}(t)\|^2 + 2\int_0^t |\sqrt{k_2}\, z_\epsilon^{mn}(s)|^2\,ds \\ &\leq 2\int_0^t (\sqrt{k_{1\epsilon}}\, z_\epsilon^{mn}(s), d(\sqrt{k_{1\epsilon}}\, M^{mn}(s))) \\ &+ \int_0^t Tr\,[L_{k_{1\epsilon}}\, R_s^{mn} L_{k_{1\epsilon}}]\,ds. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Assim, podemos reescrever a desigualdade (2.64)

$$\begin{aligned} &|\sqrt{k_{1\epsilon}}\, z_\epsilon^{mn}(t)|^2 + \alpha_2\|u_\epsilon^{mn}(t)\|^2 + 2\int_0^t |\sqrt{k_2}\, z_\epsilon^{mn}(s)|^2\,ds \\ &\leq 2\int_0^t (\sqrt{k_{1\epsilon}}\, z_\epsilon^{mn}(s), d(\sqrt{k_{1\epsilon}}\, M^{mn}(s))) + \int_0^t Tr\,[L_{k_{1\epsilon}}\, R_s^{mn} L_{k_{1\epsilon}}]\,ds. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Agora, tomamos a esperança, temos

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\{|\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\, z_\epsilon^{mn}(t)|^2 + \alpha_2\|u_\epsilon^{mn}(t)\|_V^2\}) + 2\mathbb{E}(\int_0^t |\sqrt{k_2(x)}\, z_\epsilon^{mn}(s)|^2\,ds) \leq \\ &\mathbb{E}(\int_0^t Tr\,[L_{k_{1\epsilon}}\, R_s^{mn} L_{k_{1\epsilon}}]\,ds). \end{aligned} \tag{2.66}$$

Da desigualdade (2.66) deduzimos

$$\begin{aligned} &\sup_{0\leq r\leq t} \mathbb{E}(\{|\sqrt{k_{1\epsilon}}\, z_\epsilon^{mn}(r)|^2 + \alpha_2\|u_\epsilon^{mn}(r)\|_V^2\}) + 2\mathbb{E}(\int_0^t |\sqrt{k_2(x)}\, z_\epsilon^{mn}(s)|^2\,ds) \\ &\leq \mathbb{E}(\int_0^t Tr\,[L_{k_{1\epsilon}}\, R_s^{mn}\, L_{k_{1\epsilon}}]\,ds). \end{aligned} \tag{2.67}$$

Em (2.65), tomamos o supremo e depois a esperança:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(\sup_{0\leq r\leq t}\{|\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\,z_\epsilon^{mn}(s)|^2+\alpha_2\|u_\epsilon^{mn}(s)\|_V^2\})+2\mathbb{E}(\int_0^t|\sqrt{k_2(x)}\,z_\epsilon^{mn}(s)|^2\,ds)\leq\\&+2\mathbb{E}(\sup_{0\leq r\leq t}|\int_0^t(\sqrt{k_{1\epsilon}}\,z_\epsilon^{mn}(s),d(\sqrt{k_{1\epsilon}}\,M^{mn}(s)))|)+\mathbb{E}(\int_0^t Tr\,[L_{k_{1\epsilon}}\,R_s^{mn}\,L_{k_{1\epsilon}}]\,ds).\end{aligned}\tag{2.68}$$

Observação 2.2.3. Aplicamos as desigualdades maximal de **Doob** para $p=1$ lema (1.3.2), Cauchy e a desigualdade elementar $3ab\leq\frac{1}{4}a^2+9b^2$, no que segue temos

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(\sup_{0\leq r\leq t}|\int_0^r(\sqrt{k_{1\epsilon}}\,z_\epsilon^{mn}(s),d(\sqrt{k_{1\epsilon}}\,M^{mn}(s)))|)\\&\underbrace{\leq}_{des.Doob}\;3\mathbb{E}(|\int_0^t(\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\,z_\epsilon^{mn}(s),L_{k_{1\epsilon}}\,R_s^{mn}L_{k_{1\epsilon}}\,\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\,z_\epsilon^{mn}(s))ds|)^{1/2}\\&\underbrace{\leq}_{des.Cauchy}\;3\mathbb{E}(\int_0^t|\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\,z_\epsilon^{mn}(s)|\,\|L_{k_{1\epsilon}}\,R_s^{mn}L_{k_{1\epsilon}}\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\,z_\epsilon^{mn}(s)\|ds)^{1/2}\\&\leq\;3\mathbb{E}(\int_0^t|\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\,z_\epsilon^{mn}(s)|^2\,\|L_{k_{1\epsilon}}\,R_s^{mn}L_{k_{1\epsilon}}\|_{\mathcal{L}_1(L^2(D))}ds)^{1/2}\\&\leq\;3\mathbb{E}(\{\sup_{0\leq r\leq t}|\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\,z_\epsilon^{mn}(s)|^2\}^{1/2}\{\int_0^t\|L_{k_{1\epsilon}}\,R_s^{mn}L_{k_{1\epsilon}}\|_{\mathcal{L}_1(H)}\,ds\}^{1/2})\\&\leq\;3\mathbb{E}(\{\sup_{0\leq r\leq t}|\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\,z_\epsilon^{mn}(s)|\}\{\int_0^t\|L_{k_{1\epsilon}}\,R_s^{mn}L_{k_{1\epsilon}}\|_{\mathcal{L}_1(H)}\,ds\}^{1/2})\\&\underbrace{\leq}_{ab\leq\frac{1}{12}a^2+3b^2}\;\frac{1}{4}\mathbb{E}\sup_{0\leq r\leq t}(|\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\,z_\epsilon^{mn}(t)|^2)+9\mathbb{E}(\int_0^t\|L_{k_{1\epsilon}}\,R_s^{mn}L_{k_{1\epsilon}}\|_{\mathcal{L}_1(H)}\,ds)\end{aligned}\tag{2.69}$$

Substituindo (2.69) em (2.68) obtemos

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(\sup_{0\leq r\leq t}\{|\sqrt{k_{1\epsilon}}\,z_\epsilon^{mn}(t)|^2+\alpha_2\|u_\epsilon^{mn}(t)\|_V^2\})+\mathbb{E}(\int_0^t|\sqrt{k_2(x)}z_\epsilon(s)^{mn}|^2\,ds)\leq\\&\leq\frac{1}{2}\mathbb{E}\sup_{0\leq r\leq t}(|\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\,z_\epsilon^{mn}(t)|^2)+18\mathbb{E}(\int_0^t\|L_{k_{1\epsilon}}\,R_s^{mn}L_{k_{1\epsilon}}\|_{\mathcal{L}_1(H)}\,ds)\\&+\mathbb{E}(\int_0^t Tr\,[L_{k_{1\epsilon}}\,R_s^{mn}L_{k_{1\epsilon}}]\,ds).\end{aligned}\tag{2.70}$$

resulta que

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(\sup_{0\leq r\leq t}\{\frac{1}{2}|\sqrt{k_{1\epsilon}}\,z_\epsilon^{mn}(t)|^2+\alpha_2\|u_\epsilon^{mn}(t)\|_V^2\})+\mathbb{E}(\int_0^t|\sqrt{k_2(x)}z_\epsilon^{mn}(s)|^2\,ds)\\&\leq 19\mathbb{E}(\int_0^t Tr\,[L_{k_{1\epsilon}}\,R_s^{mn}L_{k_{1\epsilon}}]\,ds).\end{aligned}\tag{2.71}$$

Observação 2.2.4. Aqui usamos o fato de R_t ser um operador classe traço auto-adjunto e como L_{k_1} ser um operador linear, então $L_{k_1}\,R_t^{mn}L_{k_1}$ é também um operador classe traço, auto-adjunto, temos

$$\|L_{k_1}\,R_t^{mn}L_{k_1}\|_{\mathcal{L}_1(H)}\;=\;Tr[L_{k_1}\,R_t^{mn}L_{k_1}]\tag{2.72}$$

De modo semelhante

$$\begin{aligned}\|L_{k_{1\epsilon}}\, R_t^{mn}\, L_{k_{1\epsilon}}\|_{\mathcal{L}_1(H)} &= Tr[L_{k_{1\epsilon}}\, R_t^{mn}\, L_{k_{1\epsilon}}] \\ &\leq Tr[L_{k_1}\, R_t^{mn}\, L_{k_1}] + (2\|L_{k_1}\|_{\mathcal{L}(H)} + 1)\, Tr\, R_t^{mn}\end{aligned} \tag{2.73}$$

Sendo que $L_{k_1}\, R_t^{mn}\, L_{k_1}$, R_t^{mn} é o operador covariancia local de $k_1(x)\, M^{mn}$ e M_t^{mn}, então

$$\begin{aligned}\int_0^t Tr[L_{k_{1\epsilon}}\, R_s^{mn} L_{k_{1\epsilon}}]\, ds &= \int_0^t \|L_{k_{1\epsilon}}\, R_s^{mn} L_{k_{1\epsilon}}\|^2_{\mathcal{L}_1(H)}\, ds \\ &\leq \int_0^t \|L_{k_{1\epsilon}}\|^2_{\mathcal{L}(H)}\, \|(M^m(s) - M^n(s))\|^2_{\mathcal{L}_1(H)}\, ds \\ &= \|L_{k_{1\epsilon}}\|^2_{\mathcal{L}(H)} \int_0^t \|(P_m M_s - P_n M_s)\|^2\, ds \\ &\leq (\|L_{k_1}\|^2_{\mathcal{L}(H)} + \epsilon^2) \int_0^t \|(P_m - P_n)\, M(s)\|^2\, ds \\ &\leq (\|L_{k_1}\|^2_{\mathcal{L}(H)} + 1) \int_0^t \|(P_m - P_n)\, M(s)\|^2\, ds\end{aligned} \tag{2.74}$$

pois $0 < \epsilon^2 < \epsilon < 1$

Observação 2.2.5. $\mathbb{E} \int_0^t Tr\, [L_{k_{1\epsilon}}\, R_s^{mn} L_{k_{1\epsilon}}]\, ds \to 0$ quando $m, n \to \infty$,

Voltando a equação (2.71) aplicando a propriedade (H1) temos que

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(\sup_{0\leq r\leq t} \{|\sqrt{k_{1\epsilon}}\, z_\epsilon^{mn}(t)|^2 + \|u_\epsilon^{mn}(t)\|_V^2\}) + \mathbb{E}(\int_0^t |z_\epsilon^{mn}(s)|^2\, ds) \\ &\leq 19\alpha \mathbb{E}(\int_0^t Tr\, [L_{k_{1\epsilon}}\, R_s^{mn} L_{k_{1\epsilon}}]\, ds) \to 0\end{aligned} \tag{2.75}$$

onde $\alpha = \dfrac{1}{\min\{\frac{1}{2}, \alpha_2, 2\beta\}}$

Desse modo, segue-se que

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq r\leq t} \{|\sqrt{k_{1\epsilon}}(\, z_\epsilon^m(t) - z_\epsilon^n(t))|^2 + \|u_\epsilon^m(t) - u_\epsilon^n(t)\|_V^2\}) + \mathbb{E}(\int_0^t |z_\epsilon^m(s) - z_\epsilon^n(s)|^2\, ds) \to 0 \tag{2.76}$$

isto é

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq r\leq t} \{|\sqrt{k_{1\epsilon}}(\, z_\epsilon^m(t) - z_\epsilon^n(t))|^2 + \|u_\epsilon^m(t) - u_\epsilon^n(t)\|_V^2\}) \to 0 \tag{2.77}$$

quando $m, n \to \infty$.

Portanto a sequência $\{(u_\epsilon^n, z_\epsilon^n)\}$ é uma sequência de `Cauchy` em E_T logo convergente ao limite $(u_\epsilon, z_\epsilon) \in L^2(\Omega; C([0,T]; V)) \times L^2(\Omega; C([0,T]; H))$.

Passo 3: Passagem do limite

Para quaisquer $\phi \in H$ e $\xi \in V$ aplicando o produto interno em H no sistema (2.59); Então, podemos garantir que o sistema abaixo

$$\begin{aligned} (u_\epsilon^n(t),\phi) &= (g,\phi)+\int_0^t (z_\epsilon^n(s),\phi)\,ds \\ (k_{1\epsilon} z_\epsilon^n(t)),\xi) &= (h,\xi)+\int_0^t (Au_\epsilon^n(s)-k_2 z_\epsilon^n(s),\xi)\,ds+\int_0^t (f(s),\xi)\,ds \\ &\quad +(k_{1\epsilon}M^n(t),\xi) \end{aligned} \tag{2.78}$$

Converge termo a termo ao limite

$$\begin{aligned} (u_\epsilon(t),\phi) &= (g,\phi)+\int_0^t (z_\epsilon(s),\phi)\,ds \\ (k_{1\epsilon} z(t),\xi) &= (h,\xi)+\int_0^t (Au_\epsilon(s)-k_2(x)\,z_\epsilon(s),\xi)\,ds+\int_0^t (f(s),\xi)\,ds \\ &\quad +(k_{1\epsilon}M(t),\xi) \end{aligned} \tag{2.79}$$

quando $n \to \infty$ para todo $t \in [0,T]$, quase sempre $\omega \in \Omega$

Assim obtemos que, para todo $t \in [0,T]$ e quase sempre $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned} u_\epsilon^n(t) &= g+\int_0^t z_\epsilon^n(s)\,ds \\ k_{1\epsilon} z_\epsilon^n(t) &= h+\int_0^t Au_\epsilon^n(s)-k_2\, z_\epsilon^n(s)\,ds+\int_0^t f(s)\,ds+k_{1\epsilon}M^n(t) \end{aligned} \tag{2.80}$$

converge para

$$\begin{aligned} u_\epsilon(t) &= g+\int_0^t z_\epsilon(s)\,ds \\ k_{1\epsilon} z_\epsilon(t) &= h+\int_0^t (Au_\epsilon(s)-k_2(x)\,z_\epsilon(s))\,ds+\int_0^t f(s)\,ds+k_{1\epsilon}M(t) \end{aligned} \tag{2.81}$$

quando $n \to \infty$..

Com efeito, no passo 2 obtivemos as seguintes convergências

$$\begin{aligned} u_\epsilon^n(t) \to u_\epsilon(t) &\quad \text{fortemente em} \quad L^2(\Omega; L(0,T;H_0^1(D))) \\ z_\epsilon^n(t) \to z_\epsilon(t) &\quad \text{fortemente em} \quad L^2(\Omega; L(0,T;^2(D))) \end{aligned} \tag{2.82}$$

Seguiremos os seguintes itens.

(a)

$$\mathbb{E}|(u_\epsilon^n(t)\phi)-(u_\epsilon(t),\phi)|^2=\mathbb{E}|(u_\epsilon^n(t)-u_\epsilon(t),\phi)|^2 \le \mathbb{E}\|\phi\|^2\,\mathbb{E}(|u_\epsilon^n t-u_\epsilon(t)|^2) \tag{2.83}$$

(b)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|\int_0^t (z_\epsilon^n(t),\xi)\,ds - \int_0^t (z_\epsilon(t),\xi)\,ds|^2 = \mathbb{E}|\int_0^t (z_\epsilon^n(t)-z_\epsilon(t),\xi)\,ds|^2 \\
&\leq \mathbb{E}\int_0^t |(z_\epsilon^n(t)-z_\epsilon(t),\xi)|^2\,ds \leq \mathbb{E}\int_0^t |(z_\epsilon^n(t)-z_\epsilon(t),\xi)|^2\,ds \\
&\leq \{\mathbb{E}\int_0^t \|\xi\|^2\,ds\}\,\{\mathbb{E}\int_0^t |(z_\epsilon^n(t)-z_\epsilon(t),|^2\,ds\}
\end{aligned} \tag{2.84}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|(k_{1\epsilon}(x)\,z_\epsilon^n(t),\xi)-(k_{1\epsilon}\,z_\epsilon(t),\xi)|^2 &\leq 2\mathbb{E}|(k_{1\epsilon}(x)\,(z_\epsilon^n(t)-z_\epsilon(t)),\xi)|^2 \\
&\leq 2\sup_{0\leq t\leq T}|k_{1\epsilon}(x)|^2\mathbb{E}|(z_\epsilon^n(t)-z_\epsilon(t),\xi)|^2 \\
&\leq 2\sup_{0\leq t\leq T}|k_{1\epsilon}(x)|^2\,E\|\xi\|^2\mathbb{E}|z_\epsilon^n(t)-z_\epsilon(t)|^2
\end{aligned} \tag{2.85}$$

(d)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|\int_0^t (Au_\epsilon^n(t),\xi)\,ds - \int_0^t (Au_\epsilon(t),\xi)\,ds|^2 = \mathbb{E}|\int_0^t (A(u_\epsilon^n(t)-u_\epsilon(t)),\xi)\,ds|^2 \\
&\leq \mathbb{E}\int_0^t |(A(u_\epsilon^n(t)-u_\epsilon(t),\xi)|^2\,ds \leq \alpha_1^2\mathbb{E}\int_0^t \|\xi\|^2\,ds\,\mathbb{E}\int_0^t |z_\epsilon^n(t)-z_\epsilon(t)|^2\,ds
\end{aligned} \tag{2.86}$$

(e)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|\int_0^t (k_2(x)\,z_\epsilon^n(t),\xi)\,ds - \int_0^t (k_2(x)\,z(t),\xi)\,ds|^2 = \mathbb{E}|\int_0^t (k_2(x)(z_\epsilon^n(t)-z(t)),\xi)\,ds|^2 \\
&\leq \mathbb{E}\int_0^t |(k_2(x)(z_\epsilon^n(t)-z(t)),\xi)|^2\,ds \leq \sup_{0\leq t\leq T}|k_2(x)|^2\mathbb{E}\int_0^t |(z_\epsilon^n(t)-z(t),\xi)|^2\,ds \\
&\leq \sup_{0\leq t\leq T}|k_2(x)|^2\mathbb{E}\int_0^t \|\xi\|^2\,ds\,\mathbb{E}\int_0^t |z_\epsilon^n(t)-z_\epsilon(t)|^2\,ds
\end{aligned} \tag{2.87}$$

(f)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|(k_{1\epsilon}(x)\,M^n(t),\xi)-(k_{1\epsilon}(x)\,M(t),\xi)| = \mathbb{E}|(M^n(t)-M(t),k_{1\epsilon}(x)\,\xi)| \\
&\leq \mathbb{E}|M^n(t)-M(t)|\,|k_{1\epsilon}(x)\,\xi| \leq \{\mathbb{E}|k_{1\epsilon}(x)\,\xi|^2\}^{1/2}\,\{\mathbb{E}|M^n(t)-M(t)|^2\}^{1/2} \\
&\leq \{\mathbb{E}|k_{1\epsilon}(x)\,\xi|^2\}^{1/2}\,\{\mathbb{E}|P_n\,M(t)-P\,M(t)|^2\}^{1/2} \\
&\leq \{\mathbb{E}|k_{1\epsilon}(x)\,\xi|^2\}^{1/2}\,\{\mathbb{E}|(P_n-P)\,M(t)|^2\}^{1/2} \\
&\leq \|P_n-P\|\,\{\mathbb{E}|k_{1\epsilon}(x)\,\xi|^2\}^{1/2}\,\{\mathbb{E}|M(t)|^2\}^{1/2}
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Passo 4: Equação da Energia.

Sabemos que $(u_\epsilon^n(t), z_\epsilon^n(t))$ por ser uma sequência de Cauchy converge forte para $(u_\epsilon(t), z_\epsilon(t))$ em $L^2(\Omega; L(0,T; H_0^1(D))) \times L^2(\Omega; L(0,T; L^2(D)))$ quando $n \to \infty$. Queremos mostrar que a equação

$$
\begin{aligned}
|\sqrt{k_{1\epsilon}}\, z_\epsilon^n(t)|^2 \;&=\; |\sqrt{k_{1\epsilon}} z_0|^2 + 2(Au_\epsilon^n(t), u_\epsilon^n(t)) - 2(Au_0, u_0) - 2\int_0^t |\sqrt{k_2}\, z_\epsilon^n(s)|^2\, ds \\
&+2\int_0^t (f(s), z_\epsilon^n(s))\, ds + 2\int_0^t (\sqrt{k_{1\epsilon}}\, z_\epsilon^n(s), d(\sqrt{k_{1\epsilon}}\, M^n(s))) \\
&+\int_0^t Tr\,[L_{k_{1\epsilon}}\, R_s^n L_{k_{1\epsilon}}]\, ds.
\end{aligned}
\tag{2.89}
$$

converge termo a termo quando $n \to \infty$ para a equação limite

$$
\begin{aligned}
|\sqrt{k_{1\epsilon}}\, z_\epsilon(t)|^2 \;&=\; |\sqrt{k_{1\epsilon}} z_0|^2 + 2(Au_\epsilon(t), u_\epsilon(t)) - 2(Au_0, u_0) - 2\int_0^t |\sqrt{k_2}\, z_\epsilon(s)|^2\, ds \\
&+2\int_0^t (f(s), z_\epsilon(s))\, ds + 2\int_0^t (\sqrt{k_{1\epsilon}}\, z_\epsilon(s), d(\sqrt{k_{1\epsilon}}\, M(s))) \\
&+\int_0^t Tr\,[L_{k_{1\epsilon}}\, R_s L_{k_{1\epsilon}}]\, ds.
\end{aligned}
\tag{2.90}
$$

Seguiremos os seguintes itens.

(i)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}|\,|\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\, z_\epsilon^n(t)|^2 - |\sqrt{k_{1\epsilon}(x)} z_\epsilon(t)|^2\,| \;&=\; \mathbb{E}|k_{1\epsilon}(x)\,(|z_\epsilon^n(t)|^2 - |z_\epsilon(t)|^2) \\
&\leq\; \sup_{x\in D} k_{1\epsilon}(x)\mathbb{E}||z_\epsilon^n(t)|^2 - |z_\epsilon(t)|^2| \\
&\leq\; \sup_{x\in D} k_{1\epsilon}(x)\mathbb{E}(|z_\epsilon^n(t)| + |z_\epsilon(t)|) \\
&\quad\; \mathbb{E}(||z_\epsilon^n(t)| - |z_\epsilon(t)||) \\
&\leq\; \sup_{x\in D} k_{1\epsilon}(x)\mathbb{E}(|z_\epsilon^n(t)| + |z_\epsilon(t)|) \\
&\quad\; \mathbb{E}(|z_\epsilon^n(t) - z_\epsilon(t)|).
\end{aligned}
\tag{2.91}
$$

que converge a zero quando $n \to 0$

(ii) Aqui utilizaremos a propriedade (A2) relativo ao operador A

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}|A(u_\epsilon^n(t), u_\epsilon^n(t)) - A(u_\epsilon(t) - u_\epsilon(t))|^2 \;&\leq\; \mathbb{E}|A(u_\epsilon^n(t), u_\epsilon^n(t) - u_\epsilon(t))|^2 \\
&\quad +\mathbb{E}|(A(u_\epsilon(s) - u_\epsilon(s)), u_\epsilon(t))|^2 \\
&\leq\; \alpha_1^2\mathbb{E}(\|u_\epsilon^n(t)\|^2 \|u_\epsilon(s) - u_\epsilon(s)\|^2) \\
&\quad +\alpha_1^2\mathbb{E}(\|u_\epsilon(t)\|^2 \|u_\epsilon(s) - u_\epsilon(s)\|^2) \\
&\leq\; \alpha_1^2\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}\{\|u_\epsilon^n(t)\|^2 + \|u_\epsilon(t)\|^2\}) \\
&\quad\; \mathbb{E}(\|u_\epsilon^n(s) - u_\epsilon(s)\|^2).
\end{aligned}
\tag{2.92}
$$

que converge a zero quando $n \to \infty$.

(iii)

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}|\int_0^t |\sqrt{k_2(x)}\, z_\epsilon^n(s)|^2\, ds - \int_0^t |\sqrt{k_2(x)}\, z_\epsilon(s)|^2\, ds| \\
&= \mathbb{E}|\int_0^t \; k_2(x)|(z_\epsilon^n(s)|^2 - |z_\epsilon(s)|^2)\, ds| \\
&\le \sup_{x\in D} k_2(x)\mathbb{E}|\int_0^T \; (|z_\epsilon^n(s)| + |z_\epsilon(s)|)(|z_\epsilon^n(s)| - |z_\epsilon(s)|)\, ds| \\
&\le \sup_{x\in D} k_2(x)\mathbb{E}\int_0^T \; |(|z_\epsilon^n(s)| + |z_\epsilon(s)|)(|z_\epsilon^n(s)| - |z_\epsilon(s)|)|\, ds \\
&\le \sup_{x\in D} k_2(x)\mathbb{E}\int_0^T \; (|z_\epsilon^n(s)| + |z_\epsilon(s)|)(|z_\epsilon^n(s) - z_\epsilon(s)|)|\, ds \\
&\underbrace{\le}_{desig.\, de Holder} \; 2\sup_{x\in D} k_2(x)\{\mathbb{E}\int_0^T \; (|z_\epsilon^n(s)|^2 + |z_\epsilon(s)|^2)\, ds\}\, \{\mathbb{E}\int_0^T \; |z_\epsilon^n(s) - z_\epsilon(s)|^2\, ds\}
\end{aligned}
\tag{2.93}
$$

que converge a zero quando $n \to \infty$.

(iv)

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}|\int_0^t (\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\, z_\epsilon^n(s), d(\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\, M^n(s))) - \int_0^t (\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\, z_\epsilon(s), d(\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\, M(s)))| \\
&= \mathbb{E}|\int_0^t (z_\epsilon^n(s), d(k_{1\epsilon}(x)\, M^n(s))) - \int_0^t (z_\epsilon(s), d(k_{1\epsilon}(x)\, M(s)))| \\
&\le \mathbb{E}|\int_0^t (z_\epsilon^n(s), d(k_{1\epsilon}(x)\, M^n(s))) - \int_0^t (z_\epsilon(s), d(k_{1\epsilon}(x)\, M^n(s)))| \\
&\quad + \mathbb{E}|\int_0^t (z_\epsilon(s), d(k_{1\epsilon}(x)\, M^n(s))) - \int_0^t (z_\epsilon(s), d(k_{1\epsilon}(x)\, M(s)))| \\
&\le \underbrace{\mathbb{E}\int_0^t |(z_\epsilon^n(s) - z_\epsilon(s), d(k_{1\epsilon}(x)\, M^n(s)))|}_{1} + \underbrace{\mathbb{E}|\int_0^t (z_\epsilon(s), d(k_{1\epsilon}(x)\, (M^n(s) - M(s))))|}_{2}
\end{aligned}
\tag{2.94}
$$

Observemos

1. Aqui usamos a desigualdade maximal

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E} \sup_{0\le t\le T} |\int_0^t (z_\epsilon^n(s) - z_\epsilon(s), d(k_{1\epsilon}(x)\, M^n(s)))| \le \\
&\le 3\mathbb{E}(|\int_0^t (z_\epsilon^n(s) - z_\epsilon(s), L_{k_{1\epsilon}} R_s^n L_{k_{1\epsilon}}(z_\epsilon^n(s) - z_\epsilon(s)) ds|)^{1/2} \\
&\le 3\mathbb{E}(\int_0^t |z_\epsilon^n(s) - z_\epsilon(s)|^2\, \|L_{k_{1\epsilon}} R_s^n L_{k_{1\epsilon}}\|)\, ds|)^{1/2} \\
&\le 3\{\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T} |z_\epsilon^n(s) - z_\epsilon(s)|^2\}^{1/2}\, \{\mathbb{E}(\int_0^t \|L_{k_{1\epsilon}} R_s^n L_{k_{1\epsilon}}\|\, ds\}^{1/2}
\end{aligned}
$$

Que converge a zero quando $n \to \infty$

2.
$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}|\int_0^t (z_\epsilon(s), d(k_{1\epsilon}(x)\,(M^n(s)-M(s))))| \\
&\leq 3\mathbb{E}(|\int_0^t (z^n_\epsilon(s), L_{k_{1\epsilon}}(R^n_s - R_s)L_{k_{1\epsilon}}\, z^n_\epsilon(s))ds|)^{1/2} \\
&\leq 3\mathbb{E}(\int_0^t |z^n_\epsilon(s)|^2\, \|L_{k_{1\epsilon}}(R^n_s - R_s)L_{k_{1\epsilon}}\|\, ds|)^{1/2} \\
&\leq 3\mathbb{E}\{\sup_{0\leq t\leq T} |z^n_\epsilon(s)|^2\}^{1/2}\,\mathbb{E}\{\int_0^t \|L_{k_{1\epsilon}}(R^n_s - R_s)L_{k_{1\epsilon}}\|\, ds\}^{1/2} \\
&\leq 3\mathbb{E}\{\sup_{0\leq t\leq T} |z^n_\epsilon(s)|^2\}^{1/2}\,\mathbb{E}\{\int_0^t \|L_{k_{1\epsilon}}\|^2\, \|(P_n - P)R_s)\|\, ds\}^{1/2} \\
&\leq 3\mathbb{E}\{\sup_{0\leq t\leq T} |z^n_\epsilon(s)|^2\}^{1/2} \quad \|L_{k_{1\epsilon}}\|^2\, \{\|P_n - P\|\}^{1/2}\mathbb{E}\{\int_0^t R_s\, ds\}^{1/2}
\end{aligned}
$$

que tende a zero quando $n \to \infty$.

Dos itens (1) e (2) acarreta que a o item (ii) tende a zero quando $n \to \infty$.

Portanto de (i) e (ii) temos que (2.94) tende a zero quando $n \to \infty$. Finalmente, passando o limite quando $n \to \infty$ nas desigualdades (2.91), (2.92), (2.93) e (2.94) obtemos a equação de energia.

$$
\begin{aligned}
|\sqrt{k_{1\epsilon}}\, z_\epsilon(t)|^2 \;=\; & |\sqrt{k_{1\epsilon}} z_0|^2 + 2(Au_\epsilon(t), u_\epsilon(t)) - 2(Au_0, u_0) - 2\int_0^t |\sqrt{k_2}\, z_\epsilon(s)|^2\, ds \\
& +2\int_0^t (f(s), z_\epsilon(s))\, ds + 2\int_0^t (\sqrt{k_{1\epsilon}}\, z_\epsilon(s), d(\sqrt{k_{1\epsilon}}\, M(s))) \\
& +\int_0^t Tr\,[L_{k_{1\epsilon}}\, R_s L_{k_{1\epsilon}}]\, ds.
\end{aligned}
\tag{2.95}
$$

Com isto provamos o Lema (2.2.3).

Voltando a demmonstração do Teorema (2.2.1). Da equação (2.95), usando as propriedades (A2)-(A3), (H1), e tomando a esperança temos

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}(|\sqrt{k_{1\epsilon}}\, z_\epsilon(t)|^2 + \alpha_2\|u_\epsilon(t)\|^2_V) + 2\beta\mathbb{E}(\int_0^t |z_\epsilon(s)|^2\, ds) \leq \\
&\mathbb{E}(\alpha_2\|u_0\|^2 + |\sqrt{k_{1\epsilon} z_0}|^2 + 2\int_0^t (f(s), z_\epsilon(s))\, ds + \int_0^t Tr\,[L_{k_{1\epsilon}}\, R_s L_{k_{1\epsilon}}]\, ds).
\end{aligned}
\tag{2.96}
$$

Agora utilizando a desigualdade elementar $ab \leq \dfrac{1}{\beta}a^2 + \beta b^2$ deduzimos.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}(|\sqrt{k_{1\epsilon}}\, z_\epsilon(t)|^2 + \alpha_2\|u_\epsilon(t)\|^2_V) + \beta\mathbb{E}(\int_0^t |z_\epsilon(s)|^2\, ds) \leq \\
&\mathbb{E}(\alpha_2\|u_0\|^2 + |\sqrt{k_{1\epsilon}} z_0|^2) + \mathbb{E}(\int_0^t \frac{4}{\beta}|f(s)|^2\, ds + \int_0^t Tr\,[L_{k_{1\epsilon}}\, R_s\, L_{k_{1\epsilon}}]\, ds)
\end{aligned}
\tag{2.97}
$$

para ϵ fixado, $\mathbb{E}(\int_0^t \frac{4}{\beta}|f(s)|^2 + Tr\,[L_{k_{1\epsilon}}\, R_s\, L_{k_{1\epsilon}}]\, ds) < \infty$, então

$$\mathbb{E}(\alpha_2\|u_0\|^2 + |\sqrt{k_{1\epsilon}}z_0|^2) + \frac{4}{\beta}\mathbb{E}(\int_0^t |f(s)|^2\, ds + \int_0^t Tr\,[L_{k_{1\epsilon}}\, R_s\, L_{k_{1\epsilon}}]\, ds) \leq C \tag{2.98}$$

Agora verificaremos que a constante C é uma constante positiva, independente de t e ϵ. Com efeito, como $\mathbb{E}(\|u_0\|^2) < \infty$ e por hipótese $\mathbb{E}(\int_0^t |f(s)|^2)\, ds < \infty$, então basta verificar que os termos

(i) $\mathbb{E}|\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}z_0|^2 \leq C_1$

(ii) $\mathbb{E}(Tr\,[L_{k_{1\epsilon}}\, R_s\, L_{k_{1\epsilon}}]\, ds) \leq C_2$

onde C_1, C_2 são constantes que independem $\epsilon, 0 < \epsilon < 1$.

Ora, temos por definição $k_{1\epsilon}(x) = k_1(x) + \epsilon$, e $R_s\, L_{k_{1\epsilon}} g_j = R_s\, L_{k_1} g_j + \epsilon\, R_s\, g_j$, segue-se que

$$\mathbb{E}(|\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}z_0|^2) \leq (\sup\|k_1(x)\| + \epsilon)|z_0|^2 \leq (\sup\|k_1(x)\| + 1)|z_0|^2 \leq C_1 \tag{2.99}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\int_0^T Tr[L_{k_{1\epsilon}}\, R_s\, L_{k_{1\epsilon}}\, ds) &= \mathbb{E}(\int_0^T \sum_{j=1}^{\infty} \big\langle (L_{k_{1\epsilon}}\, R_s\, L_{k_{1\epsilon})g_j}, g_j \big\rangle\, ds) \\ &= \mathbb{E}(\int_0^T \sum_{j=1}^{\infty} \big\langle (R_s\, L_{k_{1\epsilon})g_j}, L_{k_{1\epsilon}}\, g_j \big\rangle\, ds) \\ &= \mathbb{E}(\int_0^T \sum_{j=1}^{\infty} \langle (R_s\, L_{k_1})g_j + \epsilon\, R_s g, L_{k_1}\, g_j + \epsilon g_j \rangle\, ds) \end{aligned} \tag{2.100}$$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\int_0^T \sum_{j=1}^{\infty} \langle (R_s\, L_{k_1}) g_j + \epsilon\, R_s g, L_{k_1}\, g_j + \epsilon g_j\rangle\ ds)\\
&= \mathbb{E}(\int_0^T \sum_{j=1}^{\infty} \langle (L_{k_1}\, R_s\, L_{k_1}) g_j, g_j\rangle\ ds) + 2\epsilon \mathbb{E}(\int_0^T \sum_{j=1}^{\infty} \langle L_{k_1}\, g_j, R_s\, g_j\rangle\ ds)\\
&\quad + \epsilon^2 \mathbb{E}(\int_0^T \sum_{j=1}^{\infty} \langle R_s\, g_j, g_j\rangle\ ds)\\
&\leq \mathbb{E}(\int_0^T \sum_{j=1}^{\infty} \langle (L_{k_1}\, R_s\, L_{k_1}) g_j, g_j\rangle\ ds) + 2\, \|L_{k_1}\|_{\mathcal{L}(H)} \mathbb{E}(\int_0^T \sum_{j=1}^{\infty} \langle g_j, R_s\, g_j\rangle\ ds)\\
&\quad + \mathbb{E}(\int_0^T \sum_{j=1}^{\infty} \langle R_s\, g_j, g_j\rangle\ ds)\\
&\leq \mathbb{E}(\int_0^T Tr[L_{k_1}\, R_s\, L_{k_1}]\, ds) + 2\, \|L_{k_1}\|_{\mathcal{L}(H)} \mathbb{E}(\int_0^T Tr\, R_s\, ds)\\
&\quad + \mathbb{E}(\int_0^T Tr R_s\, ds)\\
&\leq \mathbb{E}(\int_0^T Tr[L_{k_1}\, R_s\, L_{k_1}]\, ds) + (2\, \|L_{k_1}\|_{\mathcal{L}(H)} + 1) \mathbb{E}(\int_0^T Tr R_s\, ds) \leq C_2
\end{aligned}
\tag{2.101}
$$

independente de ϵ.

Então, de (i) e (ii) segue-se que

$$
\mathbb{E}(|\sqrt{k_{1\epsilon}}\, z_\epsilon(t)|^2) + \mathbb{E}(\|u_\epsilon(t)\|_V^2) + \beta \mathbb{E}(\int_0^t |z_\epsilon(s)|^2\, ds) \leq C \tag{2.102}
$$

e também vale a desigualdade

$$
\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |\sqrt{k_{1\epsilon}}\, z_\epsilon(t)|^2) + \mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} \|u_\epsilon(t)\|_V^2) + \beta \mathbb{E}(\int_0^T |z_\epsilon(s)|^2\, ds) \leq C \tag{2.103}
$$

onde C é uma constante independente de e ϵ, $0 < \epsilon < 1$.

Da estimativa acima tomemos $\epsilon = \frac{1}{l}$, $2 \leq l \in \mathbb{N}$; notemos que, quando $l \to \infty$, temos $\epsilon \to 0$, assim podemos deduzir que:

$$
(u_{\frac{1}{l}})_{l\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(\Omega; L^2(0,T;V)) \tag{2.104}
$$

$$
(z_{\frac{1}{l}})_{l\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(\Omega; L^2(0,T;H)) \tag{2.105}
$$

$$
(\sqrt{k_{1\frac{1}{l}}}\, z_{\frac{1}{l}})_{l\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(\Omega; L^2(0,T;H)) \tag{2.106}
$$

Agora, como os espaços em questão são espaços de Banach separáveis, podemos extrair uma subsequência de $(u_{\frac{1}{l_k}})$, e de $(z_{\frac{1}{l}})$ que continuamos a denotar por $(u_{\frac{1}{l_k}})$, $(u_{\frac{1}{l}})$, tais que

$$
u_{\frac{1}{l}}(t) \to u(t) \quad \text{fraco em} \quad L^2(\Omega; L^2(0,T,H_0^1(D)) \quad \text{quando} \quad l \to \infty \tag{2.107}
$$

$$z_{\frac{1}{l}}(t) \to z(t) \;\; \text{fraco em} \;\; L^2(\Omega; L^2(0,T; L^2(D))), \qquad \text{quando} \quad l \to \infty \tag{2.108}$$

$$\sqrt{k_{1\frac{1}{l}}}\, z_{\frac{1}{l}}(t) \to \sqrt{k_1}\, z(t) \;\; \text{fraco em} \;\; L^2(\Omega; L^2(0,T; L^2(D))), \qquad \text{quando} \quad l \to \infty \tag{2.109}$$

Assumimos as convergência acima, podemos tomar o limite

$$\begin{aligned} &k_{1\frac{1}{l}}(x)\, z_{\frac{1}{l}}(t) \to k_1(x)\, z(t), \quad \text{fraco em} \quad L^2(\Omega; L^2(0,T; L^2(D))) \\ &\text{quando} \quad l \to \infty \end{aligned} \tag{2.110}$$

Isto é,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \int_0^T \left\langle k_{1\frac{1}{l}}(x) z_{\frac{1}{l}}(t), v \right\rangle \, dt\, \mathbb{P}(d\omega) \to \int_\Omega \int_0^T \langle k_1(x)\, z(t), v\rangle \, dt\, \mathbb{P}(d\omega), \\ &\text{quando} \quad l \to \infty, \quad \text{para todo} \quad v \in L^2(\Omega; L^2(0,T; L^2(D))) \end{aligned} \tag{2.111}$$

ou,

$$\begin{aligned} &\lim_{l\to\infty} \Big| \int_\Omega \int_0^T \left\langle k_{1\frac{1}{l}}(x) z_{\frac{1}{l}}(t), v \right\rangle \, dt - \int_0^T \langle k_1(x)\, z(t), v\rangle \, dt\, \mathbb{P}(d\omega)\Big| \\ &= \lim_{l\to\infty} \Big| \int_\Omega \int_0^T \left\langle k_{1\frac{1}{l}}(x) z_{\frac{1}{l}}(t) - k_1(x)\, z(t), v \right\rangle \, dt\, \mathbb{P}(d\omega)\Big| = 0, \end{aligned} \tag{2.112}$$

para todo $v \in L^2(\Omega; L^2([0,T]; L^2(D)))$

Sendo que $k_1 \in L^\infty(D)$ é simples de verificar que $k_{1\epsilon} \in L^\infty(D)$. Tomando, $v(t,\omega,x) = b(x)\,\eta(t,\omega)$ onde $b \in H_0^1(D)$ e $\eta \in L^\infty([0,T] \times \Omega; \mathbb{R})$. Temos

$$\begin{aligned} &\Big| \int_\Omega \int_0^T (k_{1\frac{1}{l}}(x)\, z_{\frac{1}{l}}(t), b(x)\eta(t,\omega))\, dt, \mathbb{P}(d\omega) \; - \int_\Omega \int_0^T (k_1(x)\, z(t), b(x)\eta(t,\omega))\, dt\, \mathbb{P}(d\omega)\Big| \\ &\leq \underbrace{\Big| \int_\Omega \int_0^T ((k_{1\frac{1}{l}}(x)\, z_{\frac{1}{l}}(t) - k_1(x) z_{\frac{1}{l}}(t)), b(x)\eta(t,\omega))\, dt\, \mathbb{P}(d\omega)\Big|}_{I_1} \\ &\qquad + \underbrace{\Big| \int_\Omega \int_0^T (k_1(x)\, (z_{\frac{1}{l}}(t) - z(t)), b(x)\,\eta(t,\omega))\, dt\, \mathbb{P}(d\omega)\Big|}_{I_2} \end{aligned}$$

Agora, verificaremos que as integrais I_1 e I_2 convergem a zero quando l tende ao infinito.

(I_1) Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a desigualdede Hölder e utilizando definição de $k_{1\epsilon}$ temos:

$$
\begin{aligned}
&|\int_\Omega \int_0^T ((k_{1\frac{1}{l}}(x) - k_1(x))\, z_{\frac{1}{l}}(t), b(x)\,\eta(t,\omega))\, dt\, \mathbb{P}(d\omega)| \\
&\leq \int_\Omega \int_0^T |((k_{1\frac{1}{l}}(x) - k_1(x))\, z_{\frac{1}{l}}(t), b(x)\,\eta(t,\omega))|\, dt\, \mathbb{P}(d\omega) \\
&\leq T^{1/2} \sup_{x\in D} |k_{1\frac{1}{l}}(x) - k_1(x)|\, |b|_{L^2(D)}\, \|\eta\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega;\mathbb{R})} \{\int_\Omega \int_0^T |z_{\frac{1}{l}}(t)|^2\, dt\, \mathbb{P}(d\omega)\}^{1/2} \\
&\to 0 \quad \text{quando} \quad l\to\infty.
\end{aligned}
\tag{2.113}
$$

(I_2) Sendo $k_1 \in L^\infty(D)$ e $b \in H_0^1(D)$, então

$$
k_1\, b \in L^2(D). \tag{2.114}
$$

Com efeito

$$
\begin{aligned}
|k_1\, b|^2_{L^2(D)} &= \int_D |k_1(x) b(x)|^2\, dx \leq \sup_{x\in D} |k_1(x)|^2 \int_D |b(x)|^2\, dx \\
&\leq \|k_1\|^2_{L^\infty(D)}\, |b|^2_{L^2(D)} \underbrace{\leq}_{H_0^1(D)\hookrightarrow L^2(D)} C\|k_1\|^2_{L^\infty(D)}\, \|b\|^2_{H_0^1(D)} < \infty,
\end{aligned}
\tag{2.115}
$$

portanto vale (2.114) e pela convergência (2.108) temos

$$
\begin{aligned}
&|\int_\Omega \int_0^t (k_1(x)\,(z_{\frac{1}{l}}(t) - z(t)), b(x)\,\eta(t,\omega))\, dt\, \mathbb{P}(d\omega)| \to 0 \\
&\text{quando} \quad l\to\infty.
\end{aligned}
\tag{2.116}
$$

De (2.113) e (2.116) temos que

$$
\begin{aligned}
&|\int_\Omega \int_0^T (k_{1\frac{1}{l}}(x)\, z_{\frac{1}{l}}(t), b(x)\eta(t,\omega))\, dt - \int_0^T (k_1(x)\, z(t), b(x)\eta(t,\omega))\, dt\, \mathbb{P}(d\omega)| \to 0 \\
&\text{quando} \quad l\to\infty
\end{aligned}
\tag{2.117}
$$

Assim sendo, (2.110) é válida.

Do mesmo modo, devemos mostrar que

$$
k_2(x) z_{\frac{1}{l}}(t) \to k_2(x) z(t) \quad \text{fraco em} \quad L^2(\Omega; L^2(0,T; L^2(D))), \quad \text{quando} \quad l\to\infty. \tag{2.118}
$$

Isto é,

$$
\int_\Omega \int_0^T \left\langle k_2(x)\, z_{\frac{1}{l}}(t), v \right\rangle\, dt\, \mathbb{P}(d\omega) \to \int_\Omega \int_0^T \langle k_2(x)\, z(t), v\rangle\, ds\, \mathbb{P}(d\omega) \tag{2.119}
$$

para todo $v \in L^2(\Omega; L^2(0,T; L^2(D)))$

Para isto, tomando novamente $v(t,\omega,x) = b(x)\eta(t,\omega)$, onde $b \in H_0^1(D)$ e $\eta \in L^\infty([0,T]\times$

$\Omega; \mathbb{R})$, sendo $k_2 \in L^\infty(D)$ e $b \in H_0^1(D)$, como em (2.115) temos que $k_1 b \in L^2(D)$, e de (2.108), temos

$$
\begin{aligned}
&|\int_\Omega \int_0^T (k_2(x)\, z_{\frac{1}{l}}(t), v)\, dt\mathbb{P}(d\omega) - \int_\Omega \int_0^T (k_2(x)\, z(t), v)\, dt\, \mathbb{P}(d\omega)| \\
&\leq |\int_\Omega \int_0^T (\underbrace{z_{\frac{1}{l}}(t) - z(t)}_{\downarrow 0.conv.\,(2.108)}, k_2(x) b(x))\, \eta(t,\omega)\, dt\, \mathbb{P}(d\omega)| \to 0 \\
&\text{quando} \quad l \to \infty
\end{aligned}
\tag{2.120}
$$

e

$$
k_{1\frac{1}{l}}(x) M(t) \to k_1(x) M(t) \quad \text{fraco em} \quad L^2(\Omega; L^2(0,T; L^2(D))), \quad \text{quando} \quad l \to \infty \tag{2.121}
$$

Com efeito, para todo $v \in L^2(\Omega; L^2(0,T; L^2(D)))$.

$$
\begin{aligned}
&|\int_\Omega \int_0^T (k_{1\frac{1}{l}}(x) M(t), v) dt\, \mathbb{P}(d\omega) - \int_\Omega \int_0^T k_1(x)\, M(t), v)\, dt\, \mathbb{P}(d\omega)| \\
&= |\int_\Omega \int_0^T ((k_{1\frac{1}{l}}(x) - k_1(x))\, v, M(t)) dt\, \mathbb{P}(d\omega)| \to 0 \\
&\text{quando} l \to \infty
\end{aligned}
\tag{2.122}
$$

Observação 2.2.6. Já que a sequência $\{u_{\frac{1}{l}}(t)\}_{l\in\mathbb{N}}$ é limitada e o operador A é linear contínuo, podemos garantir que a sequência $\{Au_{\frac{1}{l}}(t)\}_{l\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(\Omega; L^2([0,T]; H^{-1}(D)))$ em particula em $L^2(\Omega; L^2([0,T]; L^2(D)))$. Segue-se então que podemos extrair uma subsequência $\{u_{\frac{1}{l_k}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{u_{\frac{1}{l}}\}_{l\in\mathbb{N}}$ a qual continuamos a denotar por $\{u_{\frac{1}{l}}(t)\}_{l\in\mathbb{N}}$ tal que

$$
Au_{\frac{1}{l}}(t) \to Au(t) \tag{2.123}
$$

converge fracamente quando $l \to \infty$ em $L^2(\Omega; L^2([0,T]; L^2(D))) \hookrightarrow L^2(\Omega; L^2([0,T]; H^{-1}(D))$, isto é,

$$
\int_\Omega \int_0^T (Au_{\frac{1}{l}}(t), v)\, ds\, \mathbb{P}(d\omega) \to \int_\Omega \int_0^T (Au, v)\, ds\, \mathbb{P}(d\omega) \tag{2.124}
$$

quando $\quad l \to \infty \quad$ para todo $\quad v \in L^2(\Omega; L^2([0,T]; L^2(D)))$.

De (2.107), (2.108), (2.110), (2.118), (2.121) e (2.123), podemos passar o limite em (2.79) quando $l \to \infty$. Então para todo $t \in [0,T]$ e quase sempre $\omega \in \Omega$ obtemos

$$
\begin{aligned}
(u(t), \phi) &= (g, \phi) + \int_0^t (z(s), \phi)\, ds \\
(k_1(x)\, z(t), \xi) &= (h, \xi) + \int_0^t (Au(s) - k_2(x)\, z(s), \xi)\, ds + \int_0^t (f(s), \xi)\, ds \\
&\quad + (k_1(x)\, M(t), \xi)
\end{aligned}
\tag{2.125}
$$

O que prova o Teorema (2.2.1). $\square$

Lema 2.2.4. Assumimos as hipóteses do Teorema (2.2.1). Então a seguinte desigualdade de energia é verdadeira.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}|\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\,z_\epsilon(t)|^2+\sup_{0\leq t\leq T}\|u_\epsilon(t)\|^2\})+\mathbb{E}(\int_0^T|z_\epsilon(t)|^2\,dt)\,dt\\
&\leq\frac{1}{C}\mathbb{E}\{\alpha_2\|g\|^2+|h|^2+\int_0^T(\frac{4}{\beta}|f(t)|^2+19\int_0^t Tr\,[L_{k_{1\epsilon}}\,R_s\,L_{k_{1\epsilon}}]\,ds\\
&\quad+19(2\,\|L_{k_1}\|+1)\int_0^t Tr\,R_s\,ds)
\end{aligned}
\tag{2.126}
$$

Demonstração. A prova do Lema (2.2.4) é consequência das desigualdades (2.96), (2.97) e (2.98). □

Capítulo 3

Problema Estocástico não Linear com Ruido Multiplicativo e com coeficiente de Lipschitz

O objetivo deste capítulo é estudar a solução para o problema (2.2), aqui chamamos Problema Estocastico não Linear com Ruido Multiplicativo e com as condições de Lipschitz e monotonia

Agora consideremos sistema o não linear

$$\begin{aligned} du(t) &= z(t)\,dt \\ d(k_1(x)\,z(t)) &= (Au(t) - k_2(x)\,z(t)\,dt + F(t, u(t), z(t))\,dt \\ &\quad + k_1(x)\,B(t, u(t), z(t))\,dW(t) \\ u(0) &= g, \\ k_1 z(0) &= \sqrt{k_1}\,z_0 = h \end{aligned} \tag{3.1}$$

Com a seguinte equação integral

$$\begin{aligned} u(t) &= g + \int_0^t z(s)\,ds \\ k_1(x)\,z(t) &= h + \int_0^t (Au(s) - k_2(x)\,z(s))\,ds + \int_0^t F(s, u(s), z(s))\,ds \\ &\quad + \int_0^t k_1(x)\,B(s, u(s), z(s))\,dW(s) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Assumiremos as seguintes condições nos termos não lineares. Consideremos o espaço

$$E_T = \{(u_\epsilon(t), z_\epsilon(t)) \in L^2(\Omega; C([0,T]; H_0^1(D)))5 \times L^2(\Omega; C([0,T]; L^2(D)))\} \tag{3.3}$$

dos $\mathcal{F}_t$-processos adaptados com caminhos aleatórios contínuos em $H_0^1(D) \times L^2(D)$

munido da norma

$$\|(u_\epsilon, z_\epsilon)\|_T = (\mathbb{E}\{\sup_{o\le t\le T}\{\|u_\epsilon(t)\|^2 + |\sqrt{k_{1\epsilon}}z_\epsilon(t)|^2\}\})^{1/2} \tag{3.4}$$

B1 Para qulquer $u \in H_0^1(D)$. $z(t) \in L^2(D)$. Sejam $F(t,u(t),z(t))$ e $k_1(x)\,B(t,u(t),z(t))$ $\mathcal{F}_t$-processos adaptados com valores em $L^2(D)$, L_2^R respectivamente, onde L_2^R designa o espaço $\mathcal{L}_2(K_R, H)$. Suponhamos que existam constantes positivas b, C_1 tais que:

$$\mathbb{E}\int_0^T [\|F(t,0,0)\|^2 + \|B(t,0,0)\|_R^2]\,dt \le b \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} &\|F(t,u(t),z(t)) - F(t,0,0)\|^2 + \|L_{k_1}\|^2\,\|(B(t,u(t),z(t)) - B(t,0,0))\|_R^2 \\ &\le C_1(\|u(t)\|^2 + |\sqrt{k_1(x)}\,z(t)|^2)), \quad \text{a.e.} \quad (t,\omega)\in[0,T]\times\Omega \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde C_1

B2 Para qualquer $u, \tilde{u} \in V$ existe constante $C_2 > 0$ tal que a condição de Lipschitz é verdadeira.

$$\begin{aligned} &|F(t,u(t),z(t)) - F(t,\tilde{u}(t),\tilde{z}(t))|^2 + \|(B(t,u(t),z(t)) - B(t,\tilde{u}(t),\tilde{z}(t)))\|_R^2 \\ &\le C_2\,(\|u(t)-\tilde{u}(t)\|_V^2 + |\sqrt{k_1(x)}(z(t)-\tilde{z}(t))|^2) \\ &\text{quase certamente} \;\; (t,\omega)\in[0,T]\times\Omega \end{aligned} \tag{3.7}$$

B3 Para qualquer $u, v, z, w \in V$, a condição de monotonicidade é satisfeita

$$\begin{aligned} &2\,\langle A(u(t)) - A(v(t)), u(t)-v(t)\rangle + 2\,\langle F(t,u(t),z(t)) - F(t,v(t),w(t)), z(t)-w(t)\rangle \\ &+\|L_{k_{1\epsilon}}B(t,u(t),z(t)) - L_{k_1}B(t,v(t),w(t))\|_R^2 \le \delta\|u(t)-v(t)\|^2, \quad \text{com} \quad 0<\epsilon<1. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Teorema 3.0.2. Assumimos as hipótesis:(A1)-(A3) e (B1)-(B2). Então para $g \in H_0^1(D)$ e $h \in L^2(D)$, o problema não linear (3.1) tem uma única solução forte $(u(t), z(t))$ com $u \in L^2(\Omega; L^2(0,T; H_0^1(D)))$ e $z \in L^2(\Omega; L^2(0,T; L^2(D)))$.

Demonstração. Aqui nos propomos encontrar a existência de solução do problema (3.2), que é a forma integral do sistema estocástico (3.1). Primeiro utilizaremos o método da contração para encontrar a solução (u_ϵ, z_ϵ), $\quad 0<\epsilon<1$ do seguinte problema pertubado , e logo após passaremos o limite quando $\epsilon \to 0$, para encontrar a solução pretendida.

$$\begin{aligned} u_\epsilon(t) &= g + \int_0^t z_\epsilon(s)\,ds \\ k_{1\epsilon}(x)z_\epsilon(t) &= h + \int_0^t(-k_2(x)z_\epsilon(s) + Au_\epsilon(s))\,ds + \int_0^t F(s,u_\epsilon(s),z_\epsilon(s))\,ds \\ &\quad + \int_0^t k_{1\epsilon}(x)\,B(s,u_\epsilon(s),z_\epsilon(s))\,dW(s). \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde $g = u_\epsilon(0) = u_0$ e $h = k_{1\epsilon}(x) z_\epsilon(0) = \sqrt{k_{1\epsilon}(x)} z_0$ e que satisfaz a equação energia

$$\begin{aligned} |\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\, z_\epsilon(t)|^2 &= |h|^2 + (Au_\epsilon(t), u_\epsilon(t)) - (Ag, g) - 2\int_0^t |\sqrt{k_2(x)} z_\epsilon(s)|^2\, ds \\ &\quad +2\int_0^t (F(s, u_\epsilon(s), z_\epsilon(s)), z_\epsilon(s))\, ds \\ &\quad +2\int_0^t (k_{1\epsilon}(x)\, z_\epsilon(s), B(s, u_\epsilon(s), z_\epsilon(s))\, dW(s)) \\ &\quad + \int_0^t Tr[L_{k_{1\epsilon}}\, B(s, u_\epsilon(s), z_\epsilon(s))\ R_s\, B(s, u_\epsilon(s), z_\epsilon(s))^*\, L_{k_{1\epsilon}}]\, ds. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Suponhamos $F(t, 0, 0) = 0$, $k_{1\epsilon}(x) B(t, 0, 0) = 0$. Dados $u_\epsilon \in L^2(\Omega; L^2(0, T; H_0^1(D)))$ e $z_\epsilon \in L^2(\Omega; L^2(0, T; L^2(D)))$ fixos, consideremos o seguinte sistema.

$$\begin{aligned} \mu_\epsilon(t) &= g + \int_0^t \nu_\epsilon(s)\, ds \\ k_{1\epsilon}(x)\nu_\epsilon(t) &= h + \int_0^t (-k_2(x)\nu_\epsilon(s) + A\mu_\epsilon(s))\, ds + \int_0^t F(s, u_\epsilon(s), z_\epsilon(s))\, ds \\ &\quad + \int_0^t k_{1\epsilon}(x)\, B(s, u_\epsilon(s), z_\epsilon(s))\, dW(s). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Tomemos a seguir,

$$f(t) = F(t, u_\epsilon(t), z_\epsilon(t)) \quad \text{e} \quad k_{1\epsilon}(x)\, M(t) = \int_0^t k_{1\epsilon}(x)\, B(s, u_\epsilon(s), z_\epsilon(s))\, dW(s)$$

onde $k_{1\epsilon} M(t)$ é um martingale com operador covariância local $L_{k_{1\epsilon}}\, R_t\, L_{k_{1\epsilon}}$. Então podemos reescrever o sistema (3.9)

$$\begin{aligned} \mu_\epsilon(t) &= g + \int_0^t \nu_\epsilon(s)\, ds \\ k_{1\epsilon}(x)\nu_\epsilon(t) &= h + \int_0^t (-k_2(x)\nu_\epsilon(s) + A\mu_\epsilon(s))\, ds + \int_0^t f(s)\, ds \\ &\quad +k_{1\epsilon}(x)\, M(t). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Para que μ_ϵ, ν_ϵ seja solução de (3.11), devem satisfazer as hipóteses do Teorema (2.2.1). Para isto, devemos verificar que

$$\mathbb{E}\{\int_0^t (|f(s)|^2 + Tr\,[L_{k_{1\epsilon}}\, R_s L_{k_{1\epsilon}}])\, ds\} < \infty. \tag{3.13}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\{\int_0^t (|f(s)|^2 + Tr\,[L_{k_{1\epsilon}}\, R_s L_{k_{1\epsilon}}])\, ds\} \\
&= \mathbb{E}(\int_0^t |F(t, u_\epsilon(s), z_\epsilon(s))|^2 + \int_0^t Tr[L_{k_{1\epsilon}}(B(s, u_\epsilon(s), z_\epsilon(s)) R B(s, u_\epsilon(s), z_\epsilon(s))^*) L_{k_{1\epsilon}}]\, ds) \\
&= \mathbb{E}(\int_0^t |F(s, u_\epsilon(s), z_\epsilon(s))|^2\, ds) + \mathbb{E}(\int_0^t \|L_{k_{1\epsilon}}\, B(s, u_\epsilon(s), z_\epsilon(s))\|^2\, ds)
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Observemos que; para $0 < \epsilon < 1$, $k_{1\epsilon}(x) = k_1(x) + \epsilon$, então

$$
\begin{aligned}
\|L_{k_{1\epsilon}}\| &= \sup_{\|g\|\leq 1} \|K_{1\epsilon} g(x)| = \sup_{\|g\|\leq 1} |L_{k_1} g(x) + \epsilon g(x)| = \sup_{\|g\|\leq 1} |k_1\, g(x) + \epsilon g(x)| \\
&\leq \sup_{\|g\|\leq 1} |k_1\, g(x)| + \epsilon |g(x)| \leq \sup_{\|g\|\leq 1} |L_{k_1}\, g(x)| + \epsilon \|g\| \leq \|L_{k_1}\| + 1
\end{aligned}
$$

e

$$
\|L_{k_{1\epsilon}}\|^2 \leq C(\|L_{k_1}\|^2 + 1)
$$

onde C é uma constante positiva, independente de ϵ. Além disso da propriedade (B1) temos

$$
|F(t, u_\epsilon(t), z_\epsilon(t))|^2 \leq (\|u_\epsilon(t)\|^2 + \tfrac{1}{k_{1\epsilon}(x)} |\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\, z_\epsilon(t)|^2 \leq C_0(\|u_\epsilon(t)\|^2 + |\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\, z_\epsilon(t)|^2
\tag{3.15}
$$

onde $C_0 = \max\{1, \frac{1}{k_{1\epsilon}(x)}\}$

$$
\|L_{k_{1\epsilon}} B(t, u_\epsilon(t), z_\epsilon(t))\|^2 = \|L_{k_{1\epsilon}}\|^2 \|B(t, u_\epsilon(t), z_\epsilon(t))\|^2 \leq C_1(\|L_{k_1}\|^2 + 1) \|B(t, u_\epsilon(t), z_\epsilon(t))\|^2
\tag{3.16}
$$

Aplicando a hipótese (B1) obtemos

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\{\int_0^t (|f(s)|^2 + Tr\,[L_{k_{1\epsilon}}\, R_s L_{k_{1\epsilon}}])\, ds\} \\
&= \mathbb{E}(\int_0^t |F(s, u_\epsilon(s), z_\epsilon(s))|^2\, ds) + \mathbb{E}(\int_0^t \|L_{k_{1\epsilon}}\, B(s, u_\epsilon(s), z_\epsilon(s))\|^2\, ds) \\
&\leq \mathbb{E}(\int_0^t |F(s, u_\epsilon(s), z_\epsilon(s))|^2\, ds) + \mathbb{E}(\int_0^t \|L_{k_{1\epsilon}}\|^2 |B(s, u_\epsilon(s), z_\epsilon(s))\|^2\, ds) \\
&\leq \mathbb{E}(\int_0^t C_0(\|u_\epsilon(s)\|^2 + |\sqrt{k_{1\epsilon}} z_\epsilon(s))|^2)\, ds) + \mathbb{E}(\int_0^t C_0\, C_1(\|L_{k_1}\|^2 + 1) \\
&\qquad (\|u_\epsilon(s)\|^2 + \|\sqrt{k_{1\epsilon}(x)} z_\epsilon(s)|^2)\|^2\, ds) \\
&\leq C\mathbb{E}(\int_0^T \sup_{0\leq t\leq T} \{\|u_\epsilon(t)\|^2 + |\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\, z_\epsilon(t)|^2\}\, ds) \\
&\leq C\, T\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} \{\|u_\epsilon(t)\|^2 + |\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\, z_\epsilon(t)|^2\}) < \infty
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

$C = C_0(1 + C_1(\|k_1\|^2 + 1))$ uma constante positiva independente de ϵ. Além disso $\|(u_\epsilon, z_\epsilon)\|_T^2 = E(\sup_{0\leq t\leq T} \{\|u_\epsilon(t)\|^2 + |\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\, z_\epsilon(t)|^2\}) < \infty$.

Portanto, para $u_\epsilon \in L^2(\Omega; L^2(0, T; V))$, $z_\epsilon \in L^2(\Omega; L^2(0, T; H))$ fixados pelo Teorema

(2.2.1), existe um único par de solução $(\mu_\epsilon, \nu_\epsilon)$ para o sistema de equação (3.11) .

Definiremos a aplicação $\Theta : E_T \to E_T$ por $\Theta(u_\epsilon, z_\epsilon) = (\mu_\epsilon, \nu_\epsilon)$. Então, para cada par (u_ϵ, z_ϵ) fixado e pela unicidade de solução do problema (3.9), Então, Θ está bem definida.

Suponhamos $0 < r < T$ pequeno, queremos mostrar que Θ é uma contração. Seja $B_E[0,a]$ a bola fechada de centro 0 e raio a em E_T. Tomemos $(u_\epsilon, z_\epsilon), (\tilde{u}_\epsilon, \tilde{z}_\epsilon) \in B_E$. Definiremos $\Theta(\tilde{u}_\epsilon, \tilde{z}_\epsilon) = (\tilde{\mu}_\epsilon, \tilde{\nu}_\epsilon)$. Tomemos $\xi_\epsilon = \mu_\epsilon - \tilde{\mu}_\epsilon$ e $\eta_\epsilon = \nu_\epsilon - \tilde{\nu}_\epsilon$. Então ξ_ϵ e η_ϵ satisfazem o sistema.

$$\begin{aligned} \xi_\epsilon(t) &= \int_0^t \eta_\epsilon(s)\,ds \\ k_{1\epsilon}(x)\eta_\epsilon(t) &= \int_0^t A\,\xi_\epsilon(s)\,ds - \int_0^t k_2(x)\,\eta_\epsilon(s)\,ds \\ &\quad + \int_0^t [F(s,u_\epsilon(s),z_\epsilon(s)) - F(s,\tilde{u}_\epsilon(s)), \tilde{z}_\epsilon(s)]\,ds \\ &\quad + \int_0^t k_1(x)\,[B(s,u_\epsilon(s),z_\epsilon(s)) - B(s,\tilde{u}_\epsilon(s),\tilde{z}_\epsilon(s)]\,dW(s). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Aplicando o Lema (2.2.4) para o sistema (3.18) podemos deduzir que;

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le r}\{\|\xi_\epsilon(t)\|_V^2 + |\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\eta_\epsilon(t)|^2\}) + \mathbb{E}(\int_0^r |\sqrt{k_2(x)}\eta_\epsilon(s)|^2\,ds) \\ &\le \mathbb{E}\int_0^r \{\|F(t,u_\epsilon(t),z_\epsilon(t)) - F(t,\tilde{u}_\epsilon(t),\tilde{z}_\epsilon(t))\|^2 \\ &+\|L_{k_{1\epsilon}}(B(t,u_\epsilon(t),z_\epsilon(t)) - B(t,\tilde{u}_\epsilon(t),\tilde{z}_\epsilon(t)))\|_R^2\}\,dt \end{aligned} \tag{3.19}$$

Aplicando a condição (B2) em (3.19) obtemos

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le r} |\xi_\epsilon(t)\|_V^2 + |\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\eta_\epsilon(t)|^2) \\ &\le\ C\,\mathbb{E}(\int_0^r \sup_{0\le t\le r} \|u_\epsilon(t) - \tilde{u}_\epsilon(t)\|^2 + |\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}(z_\epsilon(t) - \tilde{z}_\epsilon(t))|^2\,ds) \\ &\le\ C\,r\,\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le r} \|u_\epsilon(t) - \tilde{u}_\epsilon(t)\|^2 + |\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}(z_\epsilon(t) - \tilde{z}_\epsilon(t))|^2) \end{aligned} \tag{3.20}$$

onde $C = \frac{C_0(1+C_1(\|L_{k_1}\|^2+1))}{\min\{\alpha_1,1\}} > 0$, ou ainda,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le r}\{\|\mu(t) - \tilde{\mu}(t)\|_V^2 + |\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}(\nu_\epsilon(t) - \tilde{\nu}_\epsilon(t))\|^2\}) \\ &\le C\,r\,\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le r}\{\|u_\epsilon(t) - \tilde{u}_\epsilon(t)\|^2 + |\sqrt{k_{1_\epsilon}(x)}(z_\epsilon(t) - \tilde{z}_\epsilon(t))|^2\}), \end{aligned} \tag{3.21}$$

onde r é tomado de modo que $0 < C\,r = \frac{C_0(1+C_1(\|L_{k_1}\|^2+1))}{\min\{\alpha_1,1\}}\,r < 1$ da definição de Θ e da norma $\|.\|_T$ temos

$$\|\Theta(u_\epsilon(t),z_\epsilon(t))-\Theta(\tilde{u}_\epsilon(t),\tilde{z}_\epsilon(t))\|_T^2\le C\,r\,\|(u_\epsilon(t),z_\epsilon(t))-(\tilde{u}_\epsilon(t),\tilde{z}_\epsilon(t))\|_T^2 \tag{3.22}$$

para todo par $(u_\epsilon(t),z_\epsilon(t))$, $(\tilde{u}_\epsilon(t),\tilde{z}_\epsilon(t))\in B_E[0,a]$. de modo que

$$\begin{aligned}\|\Theta(u_\epsilon(t),z_\epsilon(t))-\Theta(\tilde{u}_\epsilon(t),\tilde{z}_\epsilon(t))\|_T^2 &\le C\,\|(u_\epsilon(t),z_\epsilon(t))-(\tilde{u}_\epsilon(t),\tilde{z}_\epsilon(t))\|_T^2\\ &\le C\,r\,a^2\le a^2\end{aligned} \tag{3.23}$$

Portanto a aplicação $\Theta : B_E[0,a]\to B_E[0,a]$ é uma contração para todo $t\in[0,r]$. Pelo Teorema do Ponto Fixo de *Banach*, (u_ϵ,u_ϵ) é a única solução do sistema (3.9). Assim, pelo argumento de continuação podemos estender a para qualquer $T>0$. Portanto, (u_ϵ,z_ϵ) é solução do problema (3.9).

$$\begin{aligned}|\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}z_\epsilon(t)|^2 &= |h|^2+2(Au_\epsilon(t),u_\epsilon(t))-2(Ag,g)-2\int_0^t|\sqrt{k_2(x)}z_\epsilon(s)|^2\,ds\\ &+2\int_0^t(F(s,u_\epsilon(s),z_\epsilon(s)),z_\epsilon(t))\,ds+2\int_0^t(k_{1\epsilon}(x)z_\epsilon(s),B(s,u_\epsilon(s),z_\epsilon(s))\,dW(s))\\ &+\int_0^t Tr[L_{k_{1\epsilon}}\,B(s,u_\epsilon(s),z_\epsilon(s))\,R_s\,B(s,u_\epsilon(s),z_\epsilon(s))^*L_{k_{1\epsilon}}]\,ds.\end{aligned} \tag{3.24}$$

onde

$$Tr[L_{k_{1\epsilon}}\,B(s,u_\epsilon(s),z_\epsilon(s))\,R_s\,B(s,u_\epsilon(s),z_\epsilon(s))^*L_{k_{1\epsilon}}]=\|L_{k_{1\epsilon}}\,B(s,u_\epsilon(s),z_\epsilon(s))\|_R^2$$

Proposição 3.0.1. Sejam B_1, B_2 espaços de Banach e seja $S :: B_1\to B_2$ um operador linear contínuio. Se $(x_n\, n\in\mathbb{N})$ é uma sequência em B_1 tal que $x_n\rightharpoonup x$ (onde $x\in B_1$), então $S(x_n)\rightharpoonup S(x)$

Demonstração. Para mais detalhes ver [5]. □

Da proposição acima obtem-se o segunte corolário.

Corolário 3.0.1. Se B é um espaço de Banach e se x_n é uma sequência de $L^2([0,T]\times\Omega;B)$, que converge fracamente a $x\in L^2([0,T]\times\Omega;B)$, então para $n\to\infty$ as seguintes afirmações são verdadeiras:

(i)

$$\int_0^t x_n(s)\,ds\rightharpoonup\int_0^t x(s)\,ds\quad\text{e}\quad\int_0^t x_n(s)\,dW(s)\rightharpoonup\int_0^t x(s)\,dW(s)\quad\text{em } L^2([0,T]\times\Omega;B)$$

(ii)

$$\int_0^T x_n(s)\,ds \rightharpoonup \int_0^T x(s)\,ds \quad \text{e} \int_0^T x_n(s)\,dW(s) \rightharpoonup \int_0^T x(s)\,dW(s) \quad \text{em} \quad L^2(\Omega;B)$$

Demonstração. A prova encontramos em [5] □

Da equação (3.24) obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\{|\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\,z_\epsilon(t)|^2+\alpha_2\|u_\epsilon(t)\|^2\}+\beta\mathbb{E}\int_0^r |z_\epsilon(s)|^2 \leq \\ &\mathbb{E}\{\alpha_2\|g\|^2+|h|^2\}+\frac{4}{\beta}\mathbb{E}(\int_0^t |F(s,u_\epsilon(s),z_\epsilon(s))|^2\,ds)+\mathbb{E}(\int_0^t \|L_{k_{1\epsilon}}B(s,u_\epsilon(s),z_\epsilon(s))\|_R^2\,ds).\end{aligned} \tag{3.25}$$

E da propriedade (B1) temos;

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(\textstyle\int_0^t |F(s,u_\epsilon(s),z_\epsilon(s))|^2\,ds)+\mathbb{E}(\displaystyle\int_0^t \|L_{k_{1\epsilon}}B(s,u_\epsilon(s),z_\epsilon(s))\|_R^2\,ds) \\ &< C_2\,\mathbb{E}\textstyle\int_0^t(\|u_\epsilon(t)\|^2+|\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\,z_\epsilon(t)|^2)\,ds\end{aligned} \tag{3.26}$$

onde $C_2=C_0(\dfrac{4}{\beta}+C_1(\|L_{k_1}\|^2+1))$ substituindo na desigualdade (3.25) e usado o Teorema de Fubini temos

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\{|\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\,z_\epsilon(t)|^2+\alpha_2\|u_\epsilon(t)\|^2\}+\beta\mathbb{E}\int_0^r |z_\epsilon(s)|^2 \\ &\leq \mathbb{E}\{\alpha_2\|g\|^2+|h|^2\}+C_1\ \textstyle\int_0^t \mathbb{E}(\|u_\epsilon(t)\|^2+|\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\,z_\epsilon(t)|^2)\,ds+\beta\mathbb{E}\displaystyle\int_0^r |z_\epsilon(s)|^2.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Então utilizando a desigualdade de Gronwall obtemos

$$\mathbb{E}\{|\sqrt{k_{1\epsilon}(x)}\,z_\epsilon(t)|^2+\|u_\epsilon(t)\|^2\}+\beta\mathbb{E}\int_0^r |z_\epsilon(s)|^2 \leq C \tag{3.28}$$

Na desigualdade (3.28) tomemos $\epsilon=\frac{1}{l}$. De (3.28), existem $u\in L^2(\Omega,L^2(0,T;V))$, $z\in L^2(\Omega,L^2(0,T;H))$, $f\in L^2(\Omega,L^2(0,T;H))$ e $M\in L^2([0,T]\times\Omega;L_R^2)$ e uma subsequência $(\frac{1}{l_k})$, $k\in\mathbb{N}$ que denotaremos por $(\frac{1}{l},\ l\in\mathbb{N})$ tal que

$$u_{\frac{1}{l}} \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad L^2(\Omega;L^2(0,T;H_0^1(D))) \quad \text{quando} \quad l\to\infty \tag{3.29}$$

$$z_{\frac{1}{l}} \rightharpoonup z \quad \text{em} \quad L^2(\Omega;L^2(0,T;L^2(D))) \quad \text{quando} \quad l\to\infty \tag{3.30}$$

$$\sqrt{k_{1\frac{1}{l}}(x)}z_{\frac{1}{l}} \rightharpoonup \sqrt{k_1(x)}z \quad \text{em} \quad L^2(\Omega;L^2(0,T;L^2(D))) \quad \text{quando} \quad l\to\infty \tag{3.31}$$

$$F(s,u_{\frac{1}{l}},z_{\frac{1}{l}}) \rightharpoonup f \quad \text{em} \quad L^2(\Omega;L^2(0,T;H=L^2(D))) \quad \text{quando} \quad l\to\infty \tag{3.32}$$

$$B(s,u_{\frac{1}{l}},z_{\frac{1}{l}}) \rightharpoonup M \quad \text{em} \quad L^2(\Omega;L^2(0,T;L_R^2)) \quad \text{quando} \quad l\to\infty \tag{3.33}$$

Voltamos a ao sistema

$$
\begin{aligned}
(u_{\frac{1}{l}}(t), v) &= (g, v) + \int_0^t (z_{\frac{1}{l}}(s), v)\, ds \\
(k_{1\frac{1}{l}}(x) z_{\frac{1}{l}}(t), v) &= h + \int_0^t (-k_2(x) z_{\frac{1}{l}}(s), v) ds + \int_0^t (Au_{\frac{1}{l}}(s), v)\, ds \\
&\quad + \int_0^t (F(s, u_{\frac{1}{l}}(s), z_{\frac{1}{l}}(s)), v)\, ds \\
&\quad + \int_0^t (v, k_{1\frac{1}{l}}(x)\, B(s, u_{\frac{1}{l}}(s), z_{\frac{1}{l}}(s))\, dW(s)).
\end{aligned} \tag{3.34}
$$

para todo $v_1, v_2 \in V$, para todo $t \in [0, T]$, quase sempre $\omega \in \Omega$.

Em (3.34) tomemos o limite $l \to \infty$, das convergências fracas e utilizando o Corolário (3.0.1) acima, obtemos

$$
\begin{aligned}
(u(t), v_1) &= g + \int_0^t (z(s), v_1)\, ds \\
(k_1(x)\, z(t), v_2) &= h + \int_0^t (Au(s) - k_2(x)\, z(s), v_2)\, ds + \int_0^t (f(s), v_2)\, ds \\
&\quad + \int_0^t (v_2, k_1(x)\, M(s))\, dW(s)
\end{aligned} \tag{3.35}
$$

para todo $v_1, v_2 \in V$, para todo $t \in [0, T]$, quase sempre $\omega \in \Omega$. Devemos mostrar que $f(t) = F(t, u(t), z(t))$ e $M = B(t, u(t), z(t))$.

Da condição de monotonia temos

$$
\begin{aligned}
&2 \langle A(u^n(t)) - A(v(t)), u^n(t) - v(t) \rangle + 2 \langle F(t, u^n(t), z^n(t)) - F(t, v(t), w(t)), z^n(t) - w(t) \rangle \\
&+ \| L_{k_{1n}} B(t, u^n(t), z^n(t)) - L_{k_1} B(t, v(t), w(t)) \|_R^2 - \delta \| u^n(t) - v(t) \|^2 \leq 0
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

onde estamos adotando a notação de $u^n = u_{\frac{1}{n}}$, analogamente para z^n e $L_{k_{1n}} = L_{k_{1\frac{1}{n}}}$.

Escrevendo

$$
\begin{aligned}
Z_n &= 2\mathbb{E} \int_0^T e^{-\delta s} [\langle A(u(s)) - A(v(s)), u(s) - v(s) \rangle - \delta \| u(s) - v(s) \|^2]\, ds \\
&+ 2\mathbb{E} \int_0^T e^{-\delta s} [\langle F(s, u(s), z(s)) - F(s, v(s), w(s)), z(s) - w(s)]\, ds \rangle \\
&+ \mathbb{E} \int_0^T e^{-\delta s} \| L_{k_{1n}} B(s, u(s), z(s)) - L_{k_1} B(s, v(s), w(s)) \|_R^2\, ds \leq 0
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

Pela condição de monotonicidade (B3), e tomando $\delta = 0$ ou caso contrário substituimos

A por $A-\delta$. Escrevendo $Z_n = Z_n' + Z_n'' \leq 0$, onde

$$Z_n' = 2\mathbb{E}\int_0^T \langle A(u^n(s)), u^n(s)\rangle\, ds + 2\mathbb{E}\int_0^T \langle F(s, u^n(s), z^n(s)), z^n(s)\rangle\, ds +$$
$$\mathbb{E}\int_0^T \|L_{k_{1n}} B(s, u^n(s), z^n(s))\|_R^2\, ds$$

e

$$Z_n'' = -2\mathbb{E}\int_0^T \langle A(u^n(s)), v(s)\rangle\, ds + 2\mathbb{E}\int_0^T \langle A(v(s)), v(s)\rangle\, ds$$
$$-2\mathbb{E}\int_0^T \langle A(v(s)), u^n(s)\rangle\, ds - 2\mathbb{E}\int_0^T \langle F(s, u^n(s), z^n(s)), w(s)\rangle\, ds$$
$$-2\mathbb{E}\int_0^T \langle F(s, u(s), z(s)), z^n(s)\rangle\, ds + 2\mathbb{E}\int_0^T \langle F(s, u(s), z(s)), w(s)\rangle\, ds$$
$$+\mathbb{E}\int_0^T \|L_{k_1} B(s, v(s), w(s))\|_R^2\, ds$$
$$-2\mathbb{E}\int_0^T \langle L_{k_{1n}} B(s, u^n(s), z^n(s)), L_{k_1} B(s, v(s), w(s))\rangle\, ds$$

Da equação (3.24) e utilizndo o Teorema de Fatou temos

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} Z_n' &\geq \mathbb{E}|\sqrt{k_1(x)}z(t)|^2 - |h|^2 + \langle Ag, g\rangle - \langle Au(t), (t)\rangle + \mathbb{E}\int_0^T |\sqrt{k_2(x)}z(s)|^2\, ds \\ &+\mathbb{E}\int_0^T \langle Au(t), u(t)\rangle\, ds \geq \mathbb{E}\int_0^T \langle Au(s), u(s)\rangle\, ds \\ &+2\mathbb{E}\textstyle\int_0^T (f(s), z(s))\, ds + \mathbb{E}\int_0^T \|L_{k_1} M(s)\|_R^2\, ds\end{aligned} \tag{3.38}$$

De (3.37) e (3.38) temos que

$$\mathbb{E}\int_0^T \langle A(u(s)) - A(v(s)), u(s)_v(s)\rangle\, ds + 2\mathbb{E}\int_0^T \langle F(s.v(s), w(s)) - f(s), z(s) - w(s)\rangle\, ds$$
$$+\mathbb{E}\int_0^T \|L_{k_1} M(s) - L_{k_1} B(s, v(s), w(s))\|_R^2\, ds \leq \liminf_{n\to\infty} Z_n \leq 0$$

Portando tomando $v = u$, $w = z$ em (3) vem

$$\mathbb{E}\int_0^T \|L_{k_1} M(s) - L_{k_1} B(s, v(s), w(s))\|_R^2\, ds \leq 0 \tag{3.39}$$

implica que $L_{k_1} M = L_{k_1} B(s, u(s), z(s))$, e além disso, segue de (3.38) que

$$\begin{aligned}&2\mathbb{E}\int_0^T \langle F(s.v(s), w(s)) - f(s), z(s) - w(s)\rangle\, ds \\ &+2\mathbb{E}\int_0^T \|L_{k_1} M(s) - L_{k_1} B(s, v(s), w(s))\|_R^2\, ds \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} Z_n \leq 0\end{aligned} \tag{3.40}$$

Tomando $v = u - \alpha\, v_1$, $w = z - \alpha\, w_1$ onde $L^2([0,T] \times \Omega; V)$. Então temos

$$\alpha^2 \mathbb{E} \int_0^T \langle A(v_1(s)) - A(v_1(s)) \rangle \; ds + \alpha \mathbb{E} \int_0^T \langle F(s, u - \alpha v_1(s)) - f(s), w_1(s) \rangle \leq 0$$

ou seja

$$\alpha \mathbb{E} \int_0^T \langle A v_1(s) - v_1(s) \rangle \; ds + \mathbb{E} \int_0^T \langle F(s, u(s) - \alpha v_1(s), z(s) - \alpha w_1(s)) - f(s), w_1(s) \rangle \leq 0$$

Tomando o limite quando $\alpha \to 0$ temos

$$\mathbb{E} \int_0^T \langle F(s, u(s), z(s)) - f(s), w_1(s) \rangle \leq 0 \quad \text{para todo} \quad w_1 \in L^2([0,T] \times \Omega; V).$$

O que implica $F(s, u(s), z(s)) = f(s)$ quase sempre. Portanto o limite fraco $(u(t), z(t))$ é uma solução forte. $\square$

Apêndice A

O Espaço de Banach E_T

Seja $E_T = \{(u_\epsilon(t), z_\epsilon(t)) : u \in L^2(\Omega, C([0,T]; H_0^1(D))) \times L^2(\Omega, C([0,T]; L^2(D)))$ e $z_\epsilon \in L^2(\Omega, C([0,T]; L^2(D)))\}$, onde $u_\epsilon(t)$, $z_\epsilon(t)$ são $\mathcal{F}_t$-processos adaptados contínuos. E_T é um espaço de Banach com respeito a norma

$$\|(u_\epsilon, z_\epsilon)\|_T = \{\mathbb{E} \sup_{0\le t\le T} \{\|u_\epsilon(t)\|^2_{H_0^1(D)} + |\sqrt{k_{1\epsilon}} z_\epsilon(t)|^2_{L^2(D)}\}\}^{1/2}. \tag{A.1}$$

Assumimos que $\|\,.\,\|_T$ é uma norma em E_T. Com efeito, suponhamos que $\|(u(t), z(t))\|_T = 0$, então

$$\mathbb{E} \sup_{0\le t\le T} \{\|u_\epsilon(t)\|^2_{H_0^1(D)} + |\sqrt{k_{1\epsilon}} z_\epsilon(t)|^2_{L^2(D)}\} = 0,$$

isto é,

$$\sup_{0\le t\le T} \{\|u_\epsilon(t)\|^2_{H_0^1(D)} + |\sqrt{k_{1\epsilon}} z_\epsilon(t)|^2_{L^2(D)}\} = 0$$

desse modo $\|u_\epsilon(t)\|^2_{H_0^1(D)} = 0$, $|\sqrt{k_{1\epsilon}} z_\epsilon(t)|^2_{L^2(D)} = 0$, já que $\|\,.\,\|^2_{H_0^1(D)}$ é uma norma, segue que $u(t) = 0$ para todo $t \in [0,T]$ q.s. $\omega \in \Omega$, por outro lado, como $k_{1\epsilon}(x) = k_1(x) + \epsilon > 0$ temos que $|\sqrt{k_{1\epsilon}} z_\epsilon(t)|^2_{L^2(D)} = 0$ acarreta $z(t) = 0$ para todo $t \in [0,T]$, q.s. $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned}
\|\lambda(u_\epsilon, z_\epsilon)\|_T &= \|(\lambda u_\epsilon, \lambda z_\epsilon)\|_T \\
&= \{\mathbb{E} \sup_{0\le t\le T} \{(\lambda \|u_\epsilon(t)\|^2_{H_0^1(D)} + |\lambda \sqrt{k_{1\epsilon}} z_\epsilon(t)|^2_{L^2(D)})\}\}^{1/2} \\
&= \{|\lambda|^2 \mathbb{E} \sup_{0\le t\le T} \{(\|u_\epsilon(t)\|^2_{H_0^1(D)} + |\sqrt{k_{1\epsilon}} z_\epsilon(t)|^2_{L^2(D)})\}\}^{1/2} \\
&= |\lambda| \{\mathbb{E} \sup_{0\le t\le T} \{(\|u_\epsilon(t)\|^2_{H_0^1(D)} + |\sqrt{k_{1\epsilon}} z_\epsilon(t)|^2_{L^2(D)})\}\}^{1/2} \\
&= |\lambda|\, \|(u_\epsilon, z_\epsilon)\|_T.
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Agora vamos usar o fato de que $\|\,.\,\|_{H_0^1(D)}$ e $|\,.\,|_{L^2(D)}$ são normas nos seus respectivos espaços, temos

$$\begin{aligned}
\|(u_\epsilon,z_\epsilon)+(\tilde{u}_\epsilon,\tilde{z}_\epsilon)\|_T^2 &= \|(u_\epsilon+\tilde{u}_\epsilon, z_\epsilon+\tilde{z}_\epsilon)\|_T^2\\
&= \mathbb{E}\{\sup_{0\le t\le T}\{\|u_\epsilon(t)+\tilde{u}_\epsilon(t)\|^2_{H_0^1(D)}\\
&\quad +|\sqrt{k_{1\epsilon}}(z_\epsilon(t)+\tilde{z}_\epsilon)(t)|^2_{L^2(D)}\}\}\\
&\le 2\mathbb{E}\{\sup_{0\le t\le T}\{\|u_\epsilon(t)\|^2_{H_0^1(D)}+\|\tilde{u}_\epsilon(t)\|^2_{H_0^1(D)}\\
&\quad +|\sqrt{k_{1\epsilon}}z_\epsilon(t)|^2_{L^2(D)}+|\sqrt{k_{1\epsilon}}\tilde{z}_\epsilon(t)|^2_{L^2(D)}\}\} \qquad (A.3)\\
&\le 2\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T}\{\|u_\epsilon(t)\|^2_{H_0^1(D)}+|\sqrt{k_{1\epsilon}}z_\epsilon(t)|^2_{L^2(D)}\})\\
&\quad +2\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T}\{\|\tilde{u}_\epsilon(t)\|^2_{H_0^1(D)}+|\sqrt{k_{1\epsilon}}\tilde{z}_\epsilon(t)|^2_{L^2(D)}\})\\
&= 2(\|(u_\epsilon,z_\epsilon)\|_T^2+\|(\tilde{u}_\epsilon,\tilde{z}_\epsilon)\|_T^2)\\
&\le (\|(u_\epsilon,z_\epsilon)\|_T+\|(\tilde{u}_\epsilon,\tilde{z}_\epsilon)\|_T)^2.
\end{aligned}$$

Provaremos que $(E_T, \|\,.\,\|_T)$ é um espaço de Banach.

Seja $\{(u^n_\epsilon(t), z^n_\epsilon(t))\}_{n\in\mathbf{N}}$ uma sequência em E_T cuja as séries convergem absolutamente. Devemos mostrar que ela própria converge

Queremos provar que $\{u^n_\epsilon(t), z^n_\epsilon(t)\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge a um limite $\{u_\epsilon(t), z_\epsilon(t)\}$ em E_T. Com efeito, temos por definição

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|(u^n_\epsilon(t), z^n_\epsilon(t))\| = \sum_{n=1}^{\infty}\{\mathbb{E}\{\sup_{0\le t\le T}\{\|u^n_\epsilon(t)\|^2+|\sqrt{k_{1\epsilon}}z^n_\epsilon(t)|^2\}\}\}^{1/2}<\infty \qquad (A.4)$$

então

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\mathbb{E}\{\sup_{0\le t\le T}\|u^n_\epsilon(t)\|^2\}\}^{1/2}<\infty$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\mathbb{E}\{\sup_{0\le t\le T}|\sqrt{k_{1\epsilon}}z^n_\epsilon(t)|^2\}\}^{1/2}<\infty$$

Aplicando as propriedades da Esperança temos

$$\mathbb{E}\{\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{0\le t\le T}\|u^n_\epsilon(t)\|^2\} = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\{\sup_{0\le t\le T}\|u^n_\epsilon(t)\|^2\}<\infty \qquad (A.5)$$

e

$$\mathbb{E}\{\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{0\le t\le T}|\sqrt{k_{1\epsilon}}z^n_\epsilon(t)|^2\} = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\{\sup_{0\le t\le T}|\sqrt{k_{1\epsilon}}z^n_\epsilon(t)|^2\}<\infty, \qquad (A.6)$$

para todo $\omega\in\Omega'\subset\Omega$ tal que $\mathbb{P}(\Omega')=1$.

Tomemos

$$a_n(t) = \sum_{k=1}^{n}\sup_{0\le t\le T}\|u^n_\epsilon(t)\|^2<\infty \qquad (A.7)$$

e

$$b_n(t) = \sum_{n=1}^{n} \sup_{0\le t\le T} |\sqrt{k_{1\epsilon}} z_\epsilon^n(t)|^2 < \infty \tag{A.8}$$

Usando a desigualdade (A.7) obtemos que

$$\mathbb{E}(a_n(t)) = \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n} \sup_{0\le t\le T} \|u_\epsilon^n(t)\|^2) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T} \|u_\epsilon^n(t)\|^2) < \infty \tag{A.9}$$

Notemos que a sequência (a_n) é uma sequência de cauchy. Assim sendo, podemos escolher uma subsequência (a_{n_k}) de (a_n) que denotaremos por (a_k) tal que

$$\|a_{k+1}(t) - a_k(t)\| < \frac{1}{2^k} \tag{A.10}$$

E aplicando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\mathbb{E}\|a_{k+1}(t) - a_k(t)\| \le \mathbb{E}|a_{k+1}(t) - a_k(t)\|^2 \chi_{A_k}(t)^{1/2} \le \frac{\mu(A_k)}{2^{k-1}} \tag{A.11}$$

onde $A_k \in \mathcal{F}$ para todo $\omega \in \Omega' \subset \Omega$ talque $\mathbb{P}(\Omega') = 1$

Pelo Teorema da Convergencia Monótona podemos garantir que a série $\sum_{k=1}^{\infty} \|a_{k+1}(t) - a_k(t)\|$ é convergente, para todo $\omega \in \Omega' \subset \Omega$ tal que $\mathbb{P}(\Omega') = 1$. Portanto a série $\sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1}(t) - a_k(t))$ é convergente para todo $\omega \in \Omega' \subset \Omega$ tal que $\mathbb{P}(\Omega') = 1$.

A $(n-1)$-ésima soma parcial desta série é

$$\sup_{0\le t\le T} \|u_\epsilon^k(t)\|^2 - \sup_{0\le t\le T} \|u_\epsilon^1(t)\|^2$$

ou seja, da equação (A.11) temos

$$\sup_{0\le t\le T} \|u_\epsilon^k(t)\|^2 < \frac{1}{2^k} + \sup_{0\le t\le T} \|u_\epsilon^1(t)\|^2$$

Notemos que a sequência (u_ϵ^k) é uma sequência de Cauchy em $C([0,T]; H_0^1(D))$ e como $C([0,T]; H_0^1(D))$ é um espaço de Banach com a norma do supremo, então temos que $(u_\epsilon^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para uma função mensurável u_ϵ em $C([0,T]; H_0^1(D))$.

Tomemos $k \in \mathbb{N}$ fixado. Se

Apêndice B

A Integral de Bochner

Aqui vamos usar a definição utilazada em [,]

B.1 Definição da Integral de Bochner

Seja $(X, \| \, \|)$ um espaço de Banach, $\mathcal{B}(X)$ a σ-álgebbra de Borel de X e $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço mensurável com medida finita μ.

Passo 1 : Como primeiro passo queremos definir a integral de Bochner para funções simples que são definidas como segue. Definamos

$$E = \{f : \Omega \to X | f = \sum_{k=1}^{n} x_k 1_{A_k}, x_k \in X, A_k \in \mathcal{F}, 1 \leq k \leq n, n \in \mathbb{N}\}$$

e definimos a semi-norma $\| \, \|_E$ sobre o espaço vetorial E por

$$\| \, \|_E = \int \|f\| d\mu, \quad f \in E$$

Para garantirmos que $(E, \| \, \|_E)$ é um espaço vetorial normado consideremos as classes de equivalência com respeito a $\| \, \|_E$. Por simplicidades seram mantidas as mesma notações.

Dado $f \in E$ a integral de Bochner é definida por

$$\int f d\mu := \sum_{k=1}^{n} x_k \mu(A_k).$$

Deste modo obtemos uma aplicação

$$\begin{aligned} int : (E, \| \, \|_E) &\to (X, \| \, \|) \\ f &\to \int f \, d\mu \end{aligned} \tag{B.1}$$

que é linear e uniformemente contínua desde que $\| \int f \, d\mu \| \leq \int \|f\| \, d\mu$ para todo

$f \in E$. Agora devemos agora extender a aplicação *int* ao complemennto abstrato de E com respeito a $\| \|_E$ que denotaremos por $\overline{E}$

Passo 2 Vamos dar uma representação explicita de $\overline{E}$

Definição B.1.1. A função $f : \Omega \to X$. é chamada fortemente mensurável se é Borel mensurável e $f(\Omega) \subset X$ é separável.

Definição B.1.2. Seja $1 \leq p < \infty$. Então definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{F}, \mu; X) &:= \mathcal{L}(\mu; X) \\ &:= \{f : \Omega \to X | f \quad \text{é fortmente mensurável com respeito a} \quad \mathcal{F}, \\ &\qquad \text{e} \quad \int \|f\|^p d\mu < \infty\} \end{aligned}$$

e a semi-norma $\|f\| := (\int \|f\|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{F}, \mu; X)$. O espaço de todas as classes de equivalência em $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu; X)$ com respeito a $\|\|_{\mathcal{L}^p}$ é denotado por $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu; X) = \mathcal{L}^p(\mu; X)$

Observação B.1.1. $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu; X) = \overline{E}$

B.2 Propriedades da Integral de Bochner

Proposição B.2.1. (Desigualdade de Bochner) Seja $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu; X)$. Então

$$\| \int f \, d\mu \| \leq \int \|f\| \, d\mu$$

Proposição B.2.2. Seja $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu; X)$. Então

$$\int \varphi \circ f \, d\mu\| \leq \varphi(\int \|f\| \, d\mu)$$

verdadeira para toda $\varphi \in X^* = L(X; \mathbb{R})$.

Proposição B.2.3. (Teorema Fundamental). Seja $-\infty < a < b < \infty$ e $f \in C^1([a, b]; X)$. Então

$$f(t) - f(s) = \int_s^t f'(u) \, du := \begin{cases} \displaystyle\int 1_{[s,t](u)} f'(u) \, du & \text{si} \quad s \leq t \\ \displaystyle -\int 1_{[t,s](u)} f'(u) \, du & \text{em outros casos} \end{cases}$$

para todo $s, t \in [a, b]$ onde du denota a medida de Lebesgue on $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Referências Bibliográficas

[1] BAKLAN, V.V. On the Existence of Solutions of stochastic equation in Hibert space, Depov, Akad . Nauk, Ukr, URS, 10(1963) , 1299-1303

[2] BENSOUSSAN, A. LIONS, J.L. and PAPANICOLAOU, G. Pertubations et augmentation des conditions initiales, in: Singular pertubation and baundary large theory. Springes-Verag, LION(1976), pp 10-26

[3] BENSOUSSAN, A. TEMAM, R. Équations aux dérivées partiellés stochastiques no linéaires, Israel J. Math., 11 ((1972). 95-129

[4] BENSOUSSAN, A. TEMAN, R. Équations stochastiques du type Navier-Stoques, J. Funct. Analy, 13 ((1973). 195-222

[5] BRECNER, H. Galerkin approximation and the strong solution of the stochastic Navier-Stokes equation, J. Appl. Stochastic Analysis. 13(3) (2000) 239-259.

[6] BREZIS, H. Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications. Masson, Paris, 1983.

[7] CHOW, P.L. Stochastic Partial Differential Equation. Chapman and Hall/CCR applied mathematics and nonlinear Science

[8] CODDINGTON E. and LEVINSON, N. Theory of ordinary differential equations. ed. 1. New York; MacGraw-Hill 1995

[9] COOPER, J. BARDOS, C. A nonlinear wave equation in a time dependent domain. J. Math. Anal. Appl, 42, 29-60, 1973.

[10] DA PRATO, G. and ZABCZYK, J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions, Cambridge Universty Press, Cambridg 2002

[11] EVANS, L.C. Partial Differential Equations, Volume 19. American Mathematical Society

[12] EVANS, L. C. An Introdution to Stochastic Differential Equations, UC Berkeley

[13] FERREIRA, J. Nonlinear hyperbolic-parabolic partial differential Equation in noncilindrical domain. Rendiconti del Circolo Matemático Di Palermo (Italia), vol. 44, serie II, pp 135-146, 1995.

[14] FERREIRA, J. LAR'KIN, N.A. Global solvability of a mixed problem for a nonlinear hyperbolic-parabolic equation in noncilindrical Domains. Portugaliea mathematica, vol. 53, fasc. 4-1996.

[15] FERREIRA, J. PEREIRA, D.C. Existence of global weak solutions or an equation of nonlinear vibrations. Boletim da Sociedade Brasileira Paranaense de Matemática. vol. 11(02), pp 70-90, 1990.

[16] GAWARECKI, L. MANDREKAR, V. Stochastic Differential Equations in Infinte Dimensions With Applications to Stochastic Partial Differential Equations. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

[17] IKEDA, N. WATANABE, S. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. Secund Edition. North-Holland Mathematical Library 1981

[18] KNOCHE, C. and FRIELER, K. Solutions of Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensional Hilbert Spaces and Their Depçendence on Initial Data. Thesis, Universität Bielefeld, 2001.

[19] KRILOV, N.N., ROZOVSKI, B.I. Stochastic Evolution equations, J. Soviet Math., 14 (1981), 1233-1277

[20] KUO, H.H. Gaussian Measures in Banach Spaces, Lecture Notes in Math. No. 463. Springer-Verlag, New York, 1975

[21] LIONS, J.L. Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non lineáres. Dunod, Paris, 1969.

[22] LOVE, A.H. A treatise on the mathematical theory of elasticity, Dover, New York, 1944.

[23] MEDEIROS, L.A. nonlinear wave equations in domains wiht variable boundary, Arch. Rational Mech. Anal., 47 pp 47-58, 1972.

[24] MEDEIROS, L.A. Nonlinear hyperbolic-parabolic partial differential Equation, Funkcialaj Ekvacioj, 23 pp 151-158, 1978.

[25] MEDEIROS, L.A., MIRANDA, M.M. Introdução aos espaços de sobolev e as equações diferenciais parciais. Textos de métodos matemáticos nº 25. IME/UFRJ, 1993.

[26] METIVIER, M. Martingales à valeurs vectorielles à la dérivation des mesures vectorielles-Ann. Inst. Fourier 1965

[27] PARDOUX, E. Équations aux Dérivées Partielles Stochastiques Non Linéaires Monotones Étude de Solutions Fortes de Type Ito, These, 1975.

[28] PEREIRA, D.C. Problema misto para uma equação de vibrações não lineares. Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, vol. 9(01), pp 31-43, 1988

[29] PRÉVOT, C. and RÖCKNER, M. A Concise Course on Stochastic Partial Differential Equations. Springer

[30] REED, M. and SIMON, B. Methodes of modern mathematical physics. New York-London: Academic Press 1972

[31] SANTOS JUNIOR, R.R. Existência e unicidade de Solução fraca para uma equação hiperbólica-parabólica não linear. Dissertação de mestrado UFBA 2000.

[32] STRAUSS, W.A. On weak solutions of semiliear hyperbolic equation. Anais da Academia Brasileira de Ciências, vol. 42(4) pp 645-751, 1970.

[33] STROOK, D.W. and VARADHAN, S.R.S. Multidimensional Diffusion Processes, Springer-Verlag, Berlin 1979.

[34] VISIK, M. ; O. LADYZENSKAJA, A. On boundary value problem for PDE and certain class of opertators equations. Amer. Math. Soc. Transl, v. 10, n.2, 1958

[35] VRAGOV, N. On a mixed problem of a hyperbolic-parabolic equation. Dolk. Akad. Nank-URSS, vol. 244(2) pp 1179-1183, 1975.