Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matematica - IM
Sociedade Brasileira de Matematica - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Sequências, Progressões e Séries: Uma Abordagem para o Ensino Médio

David Pinto Martins

Salvador - Bahia

Abril de 2013

Sequências, Progressões e Séries: Uma Abordagem para o Ensino Médio

David Pinto Martins

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo César Rodrigues Pinto Varandas.

Salvador - Bahia

Abril de 2013

SEQUÊNCIAS, PROGRESSÕES E SÉRIES: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO

DAVID PINTO MARTINS

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 04 de abril de 2013.

Banca Examinadora:

Paulo Varandas

Prof. Dr. Paulo César Rodrigues Pinto Varandas (Orientador)
UFBA

Rita de Cássia de Jesus Silva

Prof^{a}. Dr^{a}. Rita de Cássia de Jesus Silva
UFBA

Marcelo Viana

Prof. Dr. Marcelo Miranda Viana da Silva
IMPA

À minha mãe, Dona Elisabete; ao meu pai, Seu Francisco.

Agradecimentos

Penso que agradecer é algo que devemos fazer sempre, pois a vida, apesar das asperezas e revezes existentes em alguns momentos, é mesmo um presente de Deus. Agradeço a Ele não só por ter chegado até aqui, mas por tudo, pela maravilha que é viver. De alguns dos filhos d'Ele, tenho muito a agradecer também e espero não esquecer de nenhum.

Manifesto assim meu agradecimento aos meus pais, que me amam muito e fizeram por mim mais do que puderam e muito mais do que eu mereço; à minha madrinha, pelo amor que nutre por mim desde quando nasci e em especial pelo auxílio e dedicação demonstrado no momento mais difícil que tive durante o mestrado; ao meu avô Fernando, *in memorian*, homem muito inteligente e honrado; e à minha família.

Aos meus amigos da Praia do Flamengo, obrigado pela compreensão por minhas ausências e por existirem em minha vida há muitos anos: Ahdam, André Viterbo, Arnaldinho, Carlão, Cristiano, Hebert, Igor, Jailson, Tarciso e todos que jogam bola comigo aos domingos de manhã na praia, apesar de minha inabilidade nesta área. Isso é que é amizade, e eu nem sou o dono da bola...

Aos meus amigos de outros lugares, meus agradecimentos também: Elisângelo, sempre um ombro amigo, que Deus lhe ilumine cada vez mais. Uma pessoa fantástica e um caráter nobre. Jamilton, outro amigo verdadeiro e muito prestativo, muito obrigado pelo apoio e ajuda também. André Vieira, meu amigo e diretor do colégio onde ensino desde 2004, obrigado também por me ajudar no que foi possível neste mestrado, mas acima de tudo, agradeço pela nossa amizade sincera. E, claro, agradeço também aos demais colegas de profissão pelo companheirismo e por toda ajuda que tive e tenho. Agradeço a Clair e Joilson; apesar de distantes fisicamente, nossa amizade é firme como uma rocha. Saudade dos tempos em que nós três estudávamos juntos no Instituto Educacional Humberto de Campos. Um amigo recente que me auxiliou de forma decisiva nesta dissertação foi o matemático cearense Rui Eduardo Brasileiro Paiva, a quem agradeço aqui.

Agradeço à minha turma, pelos ótimos momentos que vivemos juntos, de aprendizagem e principalmente de amizade (os comentários após os nomes se referem a alguns aspectos marcantes deles para mim ou para toda a turma da nossa amizade): Acélio (Messi, joga muito...), André Mendes (o goleirão), Andréa (guerreira Déa, uma batalhadora), Elaine (a fotógrafa), Fábio (esse é o cara, não precisa dizer mais nada), Humberto (Humbertão, o menino de Santo Antônio de Jesus e do beiju caprichado), Ian (juiz de futevôlei com experiência internacional), Jackson (menino de Feira de Santana e da UEFS, ganhei de você no bolão do Brasileirão), Jorge Alécio (outro menino de Feira de Santana, esse é o *hi-tech man*), José Roberto (Beto, uma grande figura), José Luiz (Zé Luiz, o octacampeão da OBMEP), Josias (menino de Cachoeira, o cara da voz e violão), Lise (se superou, vencedora com V maiúsculo), Luiz José (companheiro Ziul, esse tem história de vida para contar), Magali (a força de vontade em forma de gente), Paulo (menino de Feira de Santana que na verdade nasceu em Minas Gerais e mora em Serrinha) e Rogério (menino corinthiano de Irecê, somos bicampeões mundiais FIFA), obrigado por vocês fazerem parte de minha vida. Já sinto falta dos sábados de estudo com vocês. Essa turma foi mais um presente de Deus para mim, pois foi sem exagero a melhor turma de minha vida.

Meus professores, que muito me ensinaram, não só matemática como lições de vida, meus sinceros agradecimentos: Enaldo Vergasta, Ana Lúcia Pinheiro, Glória Costa, Joseph Yartey, Paulo Varandas, Isaac Lázaro, Evandro Ferreira, Carlos Bahiano, Vinícius Mello, Perfilino Eugênio, Rita de Cássia e Graça Dominguez, muito obrigado pelos ricos momentos de aprendizagem em sala de aula e também pelas conversas que tive com cada um de vocês fora da sala, pelos corredores da UFBA ou pelas ruas de Salvador. Sair do conforto da casa da gente para ensinar ao próximo que quer aprender é divino, não preciso dizer mais nada sobre estas iluminadas pessoas.

Ao meu amigo e orientador Paulo Varandas, agradecimentos mais que especiais pelo compromisso com esta dissertação, pelas valiosas orientações e contribuições, além do estímulo em interessantes suposições e problemas discutidos virtual e presencialmente, inclusive em guardanapos de cafeteria. O admiro muito, pessoal e profissionalmente.

Encerro estes agradecimentos com pessoas igualmente especiais: meus professores do ensino básico. É verdade, já não os vejo há muitos anos. Para alguns deles, eu era só um garotinho, para outros, um adolescente. Não importa. Eu devo demais a eles e não poderia os esquecer. Vivos ou não, estejam onde estiverem, obrigado por me ensinar. Eu acredito que ser professor é ser instrumento de Deus para o aperfeiçoamento da humanidade.

*"De que me irei ocupar no céu,
durante toda a Eternidade, se não me
derem uma infinidade de problemas de
Matemática para resolver?"*
Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857),
matemático francês.

Resumo

Esta dissertação se propõe a estudar temas tradicionais da matemática do ensino médio, as sequências, progressões e séries. A intenção não é apenas ser mais um material didático dentre os tantos existentes, mas se constituir em um aprofundamento de tais temas. Desta maneira, são estudadas as progressões aritméticas e geométricas, também em suas ordens superiores. Além disso, são analisadas as progressões harmônicas, aritmético-geométricas e geométrico-aritméticas, inclusive as de ordens superiores. As respectivas séries foram determinadas. Junto à isso, o uso da história da matemática como agente estimulador permeou o texto e diversos problemas, alguns clássicos, outros desafiadores em um nível de olimpíada matemática, foram abordados de forma a mostrar a larga aplicabilidade destes conteúdos. Em toda a abordagem, houve um cuidado de se utilizar a matemática elementar, facilitando assim o acesso do mesmo ao estudante do ensino médio.

Palavras-chave: Sequências; Progressões aritmética, geométrica, harmônica; Progressões aritmético-geométrica e geométrico-aritmética; Ordem superior; Séries.

Abstract

This thesis proposes to study traditional topics from the mathematics taught in the high school, namely sequences, series and progressions. The intention is not to be just another educational material among many existing ones, but to go deeper on such topics and provide a different presentation of them. Usual arithmetic and geometric progressions are studied, also in their higher orders. Furthermore, we analyzed not only the harmonic progressions, arithmetic-geometric and geometric-arithmetic as their higher order forms and, whenever possible with elementary mathematics, the respective series were determined. In addition, the use of mathematics' history as a stimulating agent permeates the text and various problems, some classical and others in a challenging level as mathematics olympiads, were discussed in order to show the broad applicability of these contents. Throughout the approach, much care was taken to use elementary mathematics, thereby facilitating the comprehension by the high school students.

Keywords: Sequences; Arithmetic, geometric, harmonic, arithmetic-geometric and geometric-arithmetic progressions; Higher order progressions; Series.

Sumário

Introdução

O estudo das progressões no ensino médio, na maioria das escolas brasileiras, limita-se tão somente a analisar as progressões aritméticas e geométricas, em um roteiro quase sempre definido da seguinte forma: primeiro, se estuda a progressão aritmética, o que essencialmente significa obter a expressão do termo geral da progressão aritmética e a soma dos seus termos, além da resolução de problemas, contextualizados ou não; e depois, a progressão geométrica, que basicamente segue o mesmo caminho da progressão aritmética, com a particularidade de que aqui se determina também a soma de infinitos termos, quando a razão desta é um número do intervalo $(-1; 1)$.

Os estudantes do ensino médio geralmente gostam destes dois assuntos; progressões, via de regra, não estão entre os assuntos mais temidos de matemática. Entretanto, um aluno com mais curiosidade pode se perguntar se pode explorar mais as progressões aritmética e geométrica, inovando em relação ao que os livros básicos trazem sobre o tema. Ou, ainda, se estas seriam as únicas progressões existentes; e, existindo outra progressão, como ela é e o que é possível fazer com tal progressão.

A verdade é que mesmo licenciados em matemática, que são professores destes alunos, revelam em sua maioria um desconhecimento do tema, se limitando à reprodução do que dizem os livros para o ensino médio de matemática sobre os assuntos.

Esta dissertação é uma abordagem expositiva com teoria e resolução de problemas que pretende explorar mais as progressões aritmética e geométrica, ao abordar tais progressões em suas ordens superiores, detendo-se mais na segunda ordem, bem como explorar as progressões harmônica, aritmético-geométrica e geométrico-aritmética, progressões que são praticamente desconhecidas dos professores e estudantes do ensino médio.

Um dos norteadores desta pesquisa foi a acessibilidade em termos matemáticos para o estudante do ensino médio: o leitor não necessitará de nenhum conhecimento adicional além daquele já visto até o ensino médio e terá a possibilidade de resolver problemas que, até então, não teria condições de resolver com a matemática vista apenas nas progressões aritmética e geométrica.

A ênfase na resolução de problemas como agente motivador do ensino em matemática está presente nesta dissertação, por ser uma das melhores formas de se promover a real aprendizagem matemática para os alunos. Neste sentido, o notável matemático húngaro George Polya (1887 − 1985) deixou uma lição muito conhecida no meio matemático, quando dividiu o processo de resolução de problemas em matemática em quatro passos básicos.

Para Polya, o primeiro passo é a compreensão do problema; em seguida, a construção de uma estratégia de resolução; o penúltimo passo é a execução da estratégia e, por fim, a revisão da solução. Polya sabia da importância de se resolver problemas em matemática para a consistência da aprendizagem de quem a estuda.

É também da autoria de Polya os dez mandamentos para o professor de matemática, onde no oitavo mandamento, recomenda que se busque no problema em que aborda aspectos que possam ser úteis em problemas futuros − e foi isso que se procurou fazer no desenvolvimento desta dissertação, ao se estender a definição de ordem superior para a progressão geométrica, harmônica, aritmético-geométrica e geométrico-aritmética, uma vez que as referências nesse sentido, além de raras, sempre eram relacionadas com a progressão aritmética.

Assim, com êxito, se definiu a expressão do termo geral para a ordem dois em todas estas outras citadas progressões, o que foi feito sem demandar conhecimentos de matemática de nível superior. Em realidade, se obteve mais do que isso, como se pode ver nas páginas seguintes.

Despertar o interesse do alunato para tais assuntos, além de enriquecedor matematicamente, permite que o aluno possa se indagar se outros temas, até então inacessíveis com a matemática vista nos textos básicos, podem ser expandidos. Estes temas podem ser desenvolvidos, em alguns casos, sem o uso da matemática de nível superior, o que pode ser estimulante ao espírito pesquisador deste mesmo aluno − o que é muito bom de se instigar em quem estuda.

Esta dissertação assim se justifica como um conteúdo matemático de qualidade para discorrer sobre tais progressões, uma vez que não se encontra no mercado editorial nacional uma única obra que contenha simultaneamente as cinco progressões aqui citadas, além da abordagem do ponto de vista da história da matemática.

Problemas clássicos, que muitas vezes foram os motivadores dos estudos de célebres matemáticos em tempos antigos, que colaboraram e ainda contribuem para o desenvolvimento da matemática enquanto ciência são na maioria das vezes ignorados em sala de aula, o que leva muitas pessoas a se perguntarem como surgiu tal tema. Este cuidado da inclusão de problemas clássicos foi tomado nesta dissertação, o que a enriqueceu enquanto obra e também faz aumentar o interesse de leitura enquanto conteúdo matemático.

A realização das Olimpíadas de Matemática, sobretudo a OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática da Escola Pública), recentemente criada no Brasil, é uma medida positiva para o aumento do interesse do estudo da matemática e reforça a posição de que a resolução de problemas em matemática é fundamental para o conhecimento da mesma. Muito da teoria e dos problemas aqui vistos se encaixam neste espírito olímpico, de raciocínio diferenciado. E é neste espírito que se deve estudar matemática – e foi assim que a presente dissertação foi concebida.

Capítulo 1

Sequências

1.1 Definições

Definição 1.1.1. *Todo conjunto de elementos numéricos, disposto em uma determinada ordem, é denominado de sequência ou sucessão.*

Em uma *sequência*, o primeiro elemento é indicado por a_1, o segundo elemento por a_2 e assim sucessivamente. Consequentemente, o *n-ésimo* elemento da *sequência*, que é o seu termo geral, é indicado por a_n. Uma *sequência* é representada dispondo todos os seus elementos entre parênteses e separando-os com vírgula ou ponto-e-vírgula. Comumente, se denota uma *sequência* por (a_n), o que facilita sua representação.

Uma *sequência* pode ser classificada em relação à sua quantidade de termos. Dizemos que uma *sequência* é finita se possui número limitado de termos, e assim, para algum n natural, a *sequência* tem a forma $(a_1, a_2, \dots, a_n)$; e dizemos que a *sequência* é infinita se possui número ilimitado de termos e então a mesma assume a forma $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$.

Por exemplo, $(3, 4, 92, 3, 55, 12, 47)$ e $(29, 17, -2, -6, 0, 14, 21)$ são sequências finitas, pois ambas possuem sete termos cada, enquanto que $(1, 2, 3, 4, \dots)$ é uma sequência infinita (dos números inteiros positivos).

Existem diversas *sequências*. *Sequências* onde seus termos obedecem a um padrão são *sequências* de muito interesse em matemática; especificamente, as *sequências* aqui tratadas são as *sequências* que possuem uma lei de formação como padrão.

No estudo de *sequências*, alguns conceitos são necessários. O conceito de *operador diferença* é um deles.

Definição 1.1.2. *Seja (a_n) uma sequência qualquer. O operador diferença, denotado por Δa_n, é tal que $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$. Isto é, Δa_n é a diferença entre um termo da sequência e seu antecessor.*

No caso de *sequências* finitas, o conceito de termos equidistantes é com frequência utilizado, razão pela qual também segue agora sua definição:

Definição 1.1.3. *Dois termos de uma sequência finita são equidistantes dos extremos quando o número de termos que antecede um dos termos é igual ao número de termos que sucede o outro termo.*

Assim, na sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1} \ldots, a_{n-k}, a_{n-k+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ os termos a_{k+1} e a_{n-k} são equidistantes dos extremos, para todo k, $0 \leq k \leq n$, visto que existem k termos que antecedem a_{k+1} e k termos que sucedem a_{n-k}.

Portanto, a_1 e a_n são termos equidistantes dos extremos, trivialmente; o mesmo se aplica para a_2 e a_{n-1}; igualmente, a_5 e a_{n-4} são termos equidistantes, e assim por diante.

Capítulo 2

Progressão aritmética

2.1 Definição e ideias iniciais

Definição 2.1.1. *Seja uma sequência, finita ou infinita, onde cada um dos seus termos, a partir do segundo, é igual ao antecessor mais uma constante r. Então a sequência é dita ser uma progressão aritmética e r, a sua razão.*

Assim, progressões aritméticas são sequências tais que o aumento de cada termo para o seguinte é sempre o mesmo; são sequências onde a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Temos então que

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r$$

$$a_4 = a_3 + r$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} + r.$$

Somando todas as $n-1$ igualdades acima membro a membro, temos

$$a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + (n-1)r$$

e assim, subtraindo

$$a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1}$$

em ambos os lados da igualdade, segue que

$$a_n = a_1 + (n-1)r. \tag{2.1}$$

Generalizando, sendo $m < n$, com m, n naturais, temos

$$a_n = a_m + (n-m)r \tag{2.2}$$

Podemos classificar uma *progressão aritmética* em relação à sua razão. Uma *progressão aritmética* é constante ou estacionária quando $r = 0$, crescente quando $r > 0$ e decrescente quando $r < 0$. Ou, de outro modo, $\forall n \in N$, uma *progressão aritmética* é constante ou estacionária quando $a_{n+1} = a_n$, crescente quando $a_{n+1} > a_n$ e decrescente quando $a_{n+1} < a_n$.

Problema 2.1.1. *Em uma progressão aritmética, o oitavo termo é igual a* 33 *e o terceiro termo vale* -2. *Determine o quinto termo desta progressão aritmética.*

Solução. Temos pela equação (2.2) que

$$a_8 = a_3 + (8 - 3)r.$$

Segue que

$$33 = -2 + 5r$$

$$r = 7.$$

Assim,

$$a_5 = a_3 + (5 - 3) \cdot 7 = -2 + 2 \cdot 7 = 12$$

Uma *progressão aritmética* pode ser utilizada para prever aparições de fenômenos cíclicos. O problema 2.1.2 a seguir ilustra tal afirmação.

Problema 2.1.2. *Em março de 2011, observadores na Terra puderam registrar um fenômeno conhecido como super "lua perigeu", que ocorre a cada dezoito anos. A super "lua perigeu" consiste no fato de que a lua pode ser vista maior (a lua fica a menos de 357000 quilômetros de distância da Terra) e mais brilhante do que o normal, devido à sua órbita elíptica. O trajeto elíptico da lua tem um lado, o perigeu, cerca de 50000 quilômetros mais perto da Terra do que o outro, o apogeu. Um observador na Terra vê a lua perigeu 1,14 vezes maior e 1,3 vezes mais brilhante do que a apogeu. Determine a última vez que a super "lua perigeu" poderá ser vista neste milênio.*

Solução. Consideremos a *progressão aritmética* formada por $a_1 = 2011$ e razão $r = 18$. Devemos encontrar a_n tal que, para algum número natural n, o número a_n seja o maior termo desta *progressão aritmética* que não seja superior a 3000. Pela equação (2.1) temos

$$a_n = 2011 + (n - 1) \cdot 18.$$

Como $a_n < 3000$, segue que

$$2011 + 18(n - 1) < 3000.$$

Obtemos então

$$n - 1 < \frac{989}{18} \approx 54,9.$$

Como $n \in N$ e a *progressão aritmética* dada é crescente, devemos lidar com o maior número natural n que satisfaça a última desigualdade acima e portanto segue que $n - 1 = 54$.

Concluímos que

$$a_n = 2011 + 18 \cdot 54$$

$$a_n = 2983.$$

Então, a última vez neste milênio que o fenômeno da super "lua perigeu" poderá ser observado é no ano de 2983.

Em algumas situações práticas, convém lidar com uma *progressão aritmética* denominando seu primeiro termo como a_0. A próxima aplicação exemplifica tal asserção.

Problema 2.1.3. *Uma peça de uma máquina industrial custa 2860 reais e deprecia 350 reais a cada trimestre. Verifique que é vantajoso para o dono desta peça aceitar uma oferta de 800 reais pela mesma após um ano e meio de uso.*

Solução. Seja (a_n) a *progressão aritmética* tal que seu termo a_n representa o valor da peça após se passarem n trimestres. Então, $a_0 = 2860$ e $r = -350$. Como um ano e meio equivalem a seis trimestres, devemos provar que $a_6 < 800$, assim calculemos o valor de a_6. Pela equação (2.2) temos que

$$a_6 = 2860 + (6 - 0) \cdot (-350) = 2860 - 2100 = 760$$

Logo, como o valor da peça após um ano e meio de uso é de 760 reais, é vantajoso para o dono desta peça aceitar uma oferta de 800 reais por ela.

Definição 2.1.2. *Interpolar ou inserir k meios aritméticos entre dois números A e B é formar a progressão aritmética finita de $k + 2$ termos cujos extremos são $a_1 = A$ e $a_n = a_{k+2} = B$.*

Ainda, são chamados de meios aritméticos todos os termos situados entre dois termos não consecutivos de uma progressão aritmética.

Proposição 2.1.1. *A razão da interpolação de k meios aritméticos entre os números $a_1 = A$ e $a_n = a_{k+2} = B$ é $r = \dfrac{B - A}{k + 1}$.*

Demonstração. Pela equação (2.1) temos $B = A + (k + 2 - 1) \cdot r$, logo

$$r = \frac{B - A}{k + 1}.$$

□

Corolário 2.1.1. *Calcular a média aritmética C entre dois números A e B é equivalente a inserir um meio aritmético entre A e B.*

Demonstração. A média aritmética C é tal que $C = \dfrac{B+A}{2}$.

Inserir um meio aritmético C entre A e B é formar a *progressão aritmética* (A, C, B), conforme visto anteriormente na definição 2.1.2.

Pela proposição 2.1.1 temos que $r = \dfrac{B-A}{2}$ e portanto da igualdade $a_2 = a_1 + r$ segue que

$$C = A + \frac{B-A}{2} = \frac{B+A}{2},$$

demonstrando assim o corolário. □

Exemplificaremos a aplicação destes resultados no problema 2.1.4.

Problema 2.1.4. *Insira quatro meios aritméticos entre os números $\frac{5}{4}$ e $\frac{15}{8}$ e escreva a progressão aritmética correspondente.*

Solução. Pela proposição 2.1.1 temos $r = \dfrac{\frac{15}{8} - \frac{5}{4}}{4+1} = \dfrac{1}{8}$. Assim, os meios aritméticos são:

$$a_2 = \frac{5}{4} + \frac{1}{8} = \frac{11}{8}$$
$$a_3 = \frac{11}{8} + \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$
$$a_4 = \frac{3}{2} + \frac{1}{8} = \frac{13}{8}$$

e

$$a_5 = \frac{13}{8} + \frac{1}{8} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}.$$

A *progressão aritmética* correspondente é, portanto, $(\frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{3}{2}, \frac{13}{8}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8})$.

Destacamos três propriedades das *progressões aritméticas* a seguir.

2.2 Propriedades de uma progressão aritmética

1. Em toda *progressão aritmética* cada termo, exceto o primeiro e o último (nos casos onde a *progressão aritmética* é finita), é a média aritmética dos seus termos antecessor e sucessor.

   Demonstração. Dados os três termos consecutivos quaisquer a_k, a_{k+1} e a_{k+2}, temos que $a_{k+2} - a_{k+1} = a_{k+1} - a_k$, logo

   $$a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k+2}}{2}$$

   e assim a_{k+1} é a média aritmética entre seu termo antecessor a_k e seu termo sucessor a_{k+2}, o que prova esta primeira propriedade. □

2. Em toda *progressão aritmética* finita a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos seus termos extremos.

   Demonstração. Considere a *progressão aritmética* finita

   $$(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-k}, a_{n-k+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n)$$

   Nela, os termos a_{k+1} e a_{n-k} são termos equidistantes dos extremos a_1 e a_n e, aplicando a equação (2.1) a estes termos, temos

   $$a_{k+1} = a_1 + (k + 1 - 1) \cdot r$$

   $$a_{k+1} = a_1 + kr$$

   e também

   $$a_{n-k} = a_1 + (n - k - 1) \cdot r = a_1 + (n - 1)r - kr$$

   $$a_{n-k} = a_n - kr$$

   Somando membro a membro as expressões $a_{k+1} = a_1 + kr$ e $a_{n-k} = a_n - kr$ temos que

   $$a_{k+1} + a_{n-k} = a_1 + a_n,$$

   o que prova o resultado contido nesta propriedade. □

   Das duas primeiras propriedades, extraímos como corolário que em toda *progressão aritmética* finita com número ímpar de termos, o seu termo central é a média aritmética de quaisquer dois dos termos equidistantes dos termos extremos da *progressão aritmética*.

3. Em toda *progressão aritmética*, a soma de dois termos quaisquer, digamos a_p e a_q, será igual à soma de outros dois termos, digamos a_s e a_t, desde que $p + q = s + t$. Em outras palavras, se $p+q = s+t$, (isto é, se a soma dos índices dos dois primeiros termos é igual à soma dos índices dos dois últimos termos), então $a_p + a_q = a_s + a_t$.

   Demonstração. Seja r a razão da *progressão aritmética.* Pela equação (2.1) temos:

   $$a_p = a_1 + (p - 1)r$$

   e

   $$a_q = a_1 + (q - 1)r$$

   Somando estas duas últimas igualdades, obtemos

   $$a_p + a_q = 2a_1 + (p + q - 2)r \tag{2.3}$$

Do mesmo modo, temos que

$$a_s = a_1 + (s-1)r$$

e

$$a_t = a_1 + (t-1)r$$

Analogamente, temos

$$a_s + a_t = 2a_1 + (s+t-2)r \tag{2.4}$$

Da hipótese de que $p + q = s + t$ e das igualdades (2.3) e (2.4) segue que

$$a_p + a_q = a_s + a_t.$$

□

Proposição 2.2.1. *A soma S_n dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é tal que*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Demonstração. Temos que

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

e, dispondo os termos da *progressão aritmética* na ordem inversa, que

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1.$$

Somando as duas expressões imediatamente acima membro a membro, temos

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Note que cada uma das n expressões entre parênteses à direita da última igualdade é a soma de termos equidistantes; conforme visto acima na segunda propriedade desta seção, temos que cada uma das expressões entre parênteses à direita da última igualdade é igual a $a_1 + a_n$, de modo que

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$$

e portanto

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2},$$

c.q.d. □

É provável que esta tenha sido a igualdade usada pelo ilustre matemático alemão *Carl Friedrich Gauss* $(1777-1855)$ quando, aos dez anos de idade, resolveu um problema que seu exigente professor *J. G. Büttner* passou, com a finalidade de manter a classe ocupada. O professor, juntamente com seu assistente *Johann Martin Bartels*, solicitou a *Gauss* e seus colegas de classe que encontrassem o resultado da soma

$$1+2+\cdots+99+100.$$

Quase que no mesmo instante, *Gauss*, sem nenhum cálculo escrito em suas anotações, entregou ao professor *Büttner* a resposta correta: 5050. Trata-se da soma dos termos de uma *progressão aritmética* onde $a_1=1$, $a_{100}=100$ e $n=100$. De fato, pela proposição 2.2.1 temos que $S_{100}=5050$. Mais informações sobre a vida de *Gauss* e algumas de suas façanhas matemáticas podem ser obtidas em [12] e em [26]. Nesta última obra indicada, há mais detalhes deste episódio da vida de *Gauss*.

Problema 2.2.1. *Determine a soma de todos os termos da progressão aritmética do problema 2.1.4.*

Solução. A *progressão aritmética* do problema 2.1.4 tem seis termos, de modo que devemos determinar S_6 neste caso. Assim, pela proposição 2.2.1, segue que a soma de todos os termos da *progressão aritmética* do problema citado é tal que

$$S_6=\frac{(\frac{5}{4}+\frac{15}{8})\cdot 6}{2}=\frac{75}{8}.$$

Problema 2.2.2. *Determine a soma dos primeiros números pares positivos, ou seja* $2,4,6,\ldots 2(n-1),2n.$

Solução. Os primeiros números pares positivos formam, para algum n natural, a *progressão aritmética* finita $(2,4,6,\ldots,2n)$ e assim, conforme a proposição 2.2.1, temos

$$S_{2n}=\frac{(2+2n)n}{2}=n(n+1).$$

2.3 Progressão aritmética e polinômios

Conforme visto na equação (2.1), o termo geral de uma *progressão aritmética* é dado por $a_n=a_1+(n-1)r$, logo $a_n=rn+a_1-r$.

Assim, temos que uma *progressão aritmética* não constante é um polinômio de grau 1 em n. Por esse motivo, as *progressões aritméticas* onde $r\neq 0$ são chamadas de *progressões aritméticas de primeira ordem*. Se $r=0$, a *progressão aritmética* é constante e esse polinômio é de grau 0.

Reciprocamente, se uma *sequência* for dada por um polinômio em n de grau igual ou menor que 1, então essa *sequência* é uma *progressão aritmética.* Provemos esta última asserção feita. Para tanto, considere a *sequência* $(a_n) = An+B$. Então (a_n) é a *progressão aritmética* onde $A = r$ e $B = a_1 - r$ e portanto temos, respectivamente, que $r = A$ e $a_1 = A + B$, o que conclui a prova.

Analogamente, a soma dos n primeiros termos de uma *progressão aritmética* é, conforme a proposição 2.2.1 e a equação (2.1), tal que

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + (n-1)r)n}{2}$$

e assim temos

$$S_n = \frac{r}{2}n^2 + (a_1 - \frac{r}{2})n.$$

Se $r \neq 0$, S_n é um polinômio do segundo grau em n com termo independente nulo; e, se $r = 0$, então S_n é um polinômio de grau menor que 2 em n.

Reciprocamente, todo polinômio do segundo grau em n com termo independente nulo é o valor da soma dos n primeiros termos de alguma *progressão aritmética.* Isto porque, sendo $P(n) = An^2 + Bn$ um polinômio qualquer do segundo grau desprovido de termo independente, temos que $\frac{r}{2} = A$ e $a_1 - \frac{r}{2} = B$, de onde segue que $r = 2A$ e $a_1 = A + B$, respectivamente.

Observe que, se um polinômio é expresso na forma $P(n) = An^2 + Bn$, então não é possível obter duas *progressões aritméticas* infinitas diferentes cuja soma esteja associada a este polinômio, pois como A é fixo, então $r = 2A$ é igualmente fixo; da mesma maneira, vemos que $a_1 = A + B$ é único também, pois os números A e B são constantes. Mas se a_1 e r são únicos, então a *progressão aritmética* gerada por a_1 e r é única, tal que $(a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, \dots)$. Obviamente, o raciocínio é o mesmo quando consideramos duas *progressões aritméticas* finitas distintas.

2.4 Progressão aritmética de ordem k

A discussão da seção 2.3 motiva a definição de uma *progressão aritmética de ordem* k disposta a seguir.

Definição 2.4.1. *Uma progressão aritmética de ordem* k *é uma sequência de números na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão aritmética de ordem* $k-1$.

Assim, uma *progressão aritmética de ordem* k (também chamada de *progressão aritmética de* k*-ésima ordem*) é uma *progressão aritmética* que após k operações de diferença entre termos consecutivos das *sequências* geradas resulta em uma *progressão aritmética estacionária.*

Observe que, conforme a definição 2.4.1, uma *sequência* (a_n) é uma *progressão aritmética de segunda ordem* se, e somente se, a *sequência* (Δa_n) é uma *progressão aritmética* com $r \neq 0$, ou seja, a *sequência* (Δa_n) é uma *progressão aritmética de primeira ordem* associada à (a_n). Ainda, note que $(\Delta(\Delta a_n))$ é uma *progressão aritmética* estacionária ou constante.

A *progressão aritmética de segunda ordem* apresenta problemas e aplicações interessantes para o estudante de matemática do ensino médio, motivando assim as proposições e demais considerações que se seguem.

Proposição 2.4.1. *Seja (a_n) uma progressão aritmética de segunda ordem qualquer e $(b_n) = (\Delta a_n)$, a progressão aritmética de primeira ordem de razão r associada a (a_n). Então,*

$$a_n = a_1 + b_1(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)r}{2}$$

é o termo geral da progressão aritmética de segunda ordem (a_n).

Demonstração. Temos pela definição 2.4.1 que $(b_n) = (\Delta a_n) = a_{n+1} - a_n$. Assim, as seguintes igualdades são válidas:

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= b_1 \\ a_3 - a_2 &= b_2 \\ a_4 - a_3 &= b_3 \\ &\vdots \\ a_n - a_{n-1} &= b_{n-1}. \end{aligned}$$

Somando todas estas igualdades, temos

$$a_n - a_1 = b_1 + \cdots + b_{n-1} \tag{2.5}$$

visto que temos uma soma telescópica à esquerda da igualdade. Assim, como (b_n) é uma *progressão aritmética de primeira ordem*, temos, de acordo com a proposição 2.2.1, que

$$b_1 + \cdots + b_{n-1} = \frac{(b_1 + b_{n-1})(n-1)}{2}. \tag{2.6}$$

Então, substituindo a igualdade (2.6) na igualdade (2.5), segue que

$$a_n = a_1 + \frac{(b_1 + b_{n-1})(n-1)}{2}. \tag{2.7}$$

Denotando S_{n-1} a soma dos $n-1$ primeiros termos da *sequência* (b_n), segue que

$$a_n = a_1 + S_{n-1}. \tag{2.8}$$

Como por (2.1) temos $b_{n-1} = b_1 + (n-2)r$, substituindo em (2.7) a expressão resulta em

$$a_n = a_1 + \frac{(b_1 + b_1 + ((n-1)-1)r)(n-1)}{2}$$
$$a_n = a_1 + \frac{(2b_1 + (n-2)r)(n-1)}{2}$$
$$a_n = a_1 + \frac{(2b_1(n-1))}{2} + \frac{(n-1)(n-2)r}{2}$$

e portanto o termo geral da progressão aritmética de segunda ordem (a_n) é

$$a_n = a_1 + b_1(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)r}{2} \tag{2.9}$$

c.q.d. $\square$

As expressões (2.8) e (2.9) permitem resolver facilmente problemas como o problema 2.4.1.

Problema 2.4.1. *Calcule o termo a_{10} da sequência $(a_n) = (3, -4, -8, -9, -7, \cdots)$.*

Solução. Inicialmente, observe que a *sequência* (a_n) é uma *progressão aritmética de segunda ordem*, visto que temos $b_1 = a_2 - a_1 = -4 - 3 = -7$, $b_2 = a_3 - a_2 = -4$, $b_3 = a_4 - a_3 = -1$, $b_4 = a_5 - a_4 = 2$ e assim sucessivamente. Portanto a *sequência* $(b_n) = (-7, -4, -1, 2, \cdots)$ é uma *progressão aritmética de primeira ordem* onde $b_1 = -7$ e $r = 3$.

Pela equação (2.9), facilmente obtemos que

$$a_{10} = 3 + (-7) \cdot (10-1) + \frac{(10-1) \cdot (10-2) \cdot 3}{2} = 3 - 63 + 108 = 48.$$

Uma forma alternativa de resolução deste mesmo problema é possível com a utilização da igualdade (2.8). Como $b_1 = -7$ e $r = 3$, temos pela equação (2.1) que

$$b_9 = -7 + 8 \cdot 3 = 17$$

e assim da proposição 2.2.1 conclui-se que

$$S_9 = \frac{(-7+17) \cdot 9}{2} = 45.$$

Agora, por (2.8), igualmente segue sem dificuldade que

$$a_{10} = 3 + 45 = 48.$$

A exemplo do que ocorreu com as *progressões aritméticas de primeira ordem*, é interessante obter uma expressão que permita calcular a soma dos n primeiros termos de uma *progressão aritmética de segunda ordem*. A proposição 2.4.2 fornece uma expressão para tal soma.

Proposição 2.4.2. *Seja (a_n) uma progressão aritmética de segunda ordem qualquer, cuja soma dos seus n primeiros termos é representada por T_n; e seja $(b_n) = (\Delta a_n)$ a progressão aritmética de primeira ordem de razão r associada à sequência (a_n). Então,*

$$T_n = a_1 n + \frac{b_1 n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)r}{6}.$$

Demonstração. Provemos por meio do princípio de indução finita em n. Para $n = 1$, verificamos trivialmente que $T_1 = a_1$, logo T_1 é válida.

Se, para algum $n \in N$, igualmente temos T_n válida, vejamos o que ocorre para T_{n+1}. Temos que

$$T_{n+1} = T_n + a_{n+1},$$

logo da hipótese de indução segue que

$$T_{n+1} = a_1 n + \frac{(b_1 n(n-1))}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)r}{6} + a_{n+1}. \tag{2.10}$$

Da igualdade (2.9) temos que

$$a_{n+1} = a_1 + b_1((n+1)-1) + \frac{((n+1)-1)((n+1)-2)r}{2},$$

logo

$$a_{n+1} = a_1 + b_1 n + \frac{n(n-1)r}{2}. \tag{2.11}$$

Das igualdades (2.10) e (2.11) temos

$$T_{n+1} = a_1 n + \frac{(b_1 n(n-1))}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)r}{6} + a_1 + b_1 n + \frac{n(n-1)r}{2}$$

$$T_{n+1} = a_1 n + a_1 + \frac{b_1 n(n-1) + 2b_1 n}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)r + 3n(n-1)r}{6}$$

$$T_{n+1} = a_1(n+1) + \frac{b_1(n(n-1)+2n)}{2} + \frac{n(n-1)r(n-2+3)}{6}$$

$$T_{n+1} = a_1(n+1) + \frac{b_1(n+1)n}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)r}{6}.$$

A última igualdade acima mostra que T_{n+1} é válida.

Então, provamos por indução que vale a igualdade

$$T_n = a_1 n + \frac{b_1 n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)r}{6},$$

onde T_n é a soma dos n primeiros termos de uma *progressão aritmética de segunda ordem* (a_n) qualquer. □

Conhecer uma expressão que permite calcular a soma dos n primeiros termos de uma *progressão aritmética de segunda ordem* possibilita resolver problemas interessantes, como veremos a seguir.

Problema 2.4.2. *Determine a soma dos quadrados dos n primeiros números inteiros positivos.*

Solução. A sequência dos quadrados dos n primeiros números inteiros positivos é dada por $(a_n) = (1, 4, 9, 16, 25, \ldots)$, que é uma *progressão aritmética de segunda ordem*, uma vez que temos $b_1 = a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$, $b_2 = a_3 - a_2 = 5$, $b_3 = a_4 - a_3 = 7$, $b_4 = a_5 - a_4 = 9$ e assim por diante. Segue, portanto, que a *sequência* $(b_n) = (3, 5, 7, 9, \ldots)$ é uma *progressão aritmética de primeira ordem* onde $b_1 = 3$ e $r = 2$. Pela proposição 2.4.2, temos que

$$T_n = 1 \cdot n + \frac{3 \cdot n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2) \cdot 2}{6}$$
$$T_n = \frac{6n}{6} + \frac{9n(n-1)}{6} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{6}$$
$$T_n = \frac{6n + 9n^2 - 9n + 2n^3 - 6n^2 + 4n}{6}$$
$$T_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Problema 2.4.3. *Considere todos os retângulos cujas medidas das bases e das alturas são inteiros positivos ímpares que diferem de duas unidades. Determine a soma das áreas dos n primeiros retângulos assim constituídos.*

Solução. Em ordem crescente de área, os primeiros retângulos assim formados são os de área $1 \cdot 3$, $3 \cdot 5$, $5 \cdot 7$, $7 \cdot 9$, $\ldots$ e portanto a sequência das áreas destes retângulos é dada por $(a_n) = (3, 15, 35, 63, \ldots)$. Então (a_n) é uma *progressão aritmética de segunda ordem*, uma vez que temos $b_1 = a_2 - a_1 = 15 - 3 = 12$, $b_2 = a_3 - a_2 = 20$, $b_3 = a_4 - a_3 = 28$, $b_4 = a_5 - a_4 = 36$ e assim por diante. Portanto, a *sequência* $(b_n) = (12, 20, 28, 36, \ldots)$ é uma *progressão aritmética de primeira ordem* onde $b_1 = 12$ e $r = 8$. Pela proposição 2.4.2, temos que

$$T_n = 3 \cdot n + \frac{12 \cdot n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2) \cdot 8}{6} = \frac{9n}{3} + \frac{18n(n-1)}{3} + \frac{4n(n-1)(n-2)}{3}$$
$$T_n = \frac{9n + 18n^2 - 18n + 4n^3 - 12n^2 + 8n}{3}$$
$$T_n = \frac{4n^3 + 6n^2 - n}{3}$$

O próximo problema é clássico e relaciona dois assuntos que a princípio parecem não ter ligação, a *geometria plana* e a *progressão aritmética de segunda ordem*. O nome do problema, *a pizza de Steiner*, se deve ao ilustre matemático alemão *Jacob Steiner* $(1796 - 1863)$. *Steiner*, famoso representante da Geometria na Universidade de Berlim no início do século XIX, propôs e resolveu no ano de 1826 o problema 2.4.4 a seguir. *Steiner* é considerado, para alguns historiadores, como o maior dos geômetras desde Apolônio, e uma breve síntese do seu legado matemático pode ser encontrada em [17].

Problema 2.4.4. *(A pizza de Steiner) Qual é o maior número de partes em que se pode dividir o plano com n cortes retos?*

Solução. Os cortes possíveis de serem feitos são somente retas e as partes em que o plano é dividido, as suas regiões. Note que a $(n+1)$-ésima reta feita no plano só maximiza o número de regiões em que se divide o plano se encontra cada uma das n retas já existentes em pontos que não coincidam com os pontos de intersecção de duas retas feitas antes, pois existirão regiões delimitadas por estes pontos de intersecção. É o caso, por exemplo, da região 4 da figura 3.2 a seguir, quando consideramos a configuração correta. As figuras 3.1 e 3.2 exemplificam o que ocorre nas primeiras divisões do plano.

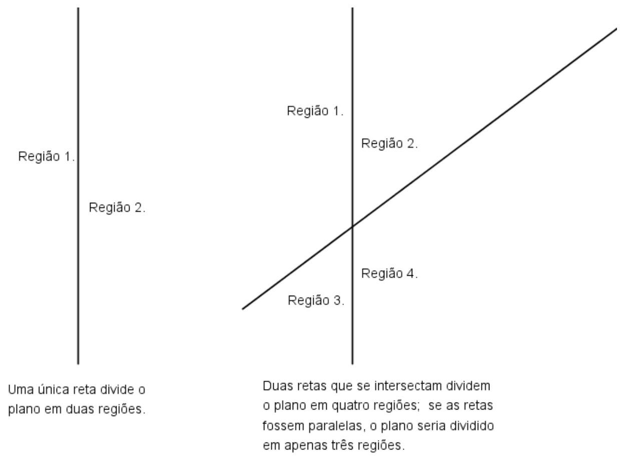

Figura 2.1: Plano dividido, respectivamente, por uma e duas retas.

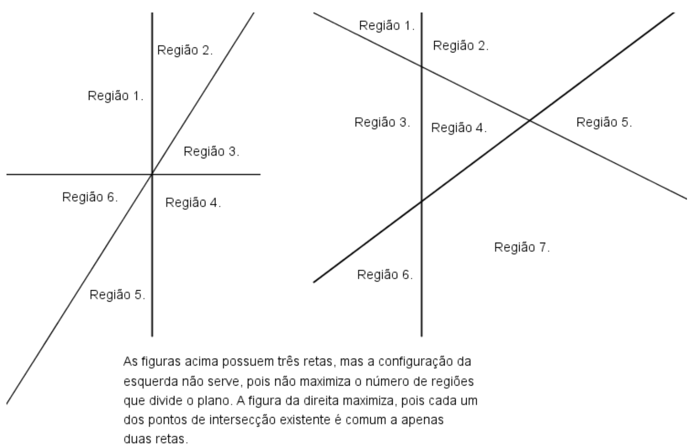

Figura 2.2: Plano dividido por três retas.

Como se deseja o maior número de partes em que se pode dividir o plano, o número de pontos de intersecção deve ser maximizado, o que só ocorre se a $(n+1)$-ésima reta traçada no plano encontra cada uma das n retas já existentes em pontos distintos dos pontos de intersecção.

Se a $(n+1)$-ésima reta encontra todas as n retas anteriores, ela gera $n+1$ novas partes, pois o $(n+1)$-ésima reta inicia em uma certa parte do plano e quando encontra a primeira reta já existente, ela separa em duas a parte do plano em que está, passando para outra parte. Ao encontrar a segunda reta existente, a $(n+1)$-ésima reta separa em duas a parte em que está, passando para outra parte do plano existente, e assim sucessivamente, até encontrar a n-ésima reta que separa a última parte do plano também em duas. Portanto, são obtidos $n+1$ novas partes além das partes que já existem.

Sendo a_n o número de partes que o plano fica dividido ao máximo quando existem n retas no plano, vemos que vale a igualdade $a_{n+1} = a_n + n + 1$, logo $a_{n+1} - a_n = n + 1$.

Sabemos que uma *sequência* (a_n) é uma *progressão aritmética de segunda ordem* se, e somente se, a *sequência* (Δa_n) é uma *progressão aritmética* com $r \neq 0$. Ainda, sabemos que uma *sequência* cujo termo de ordem n pode ser expressa como um polinômio em n de grau igual a 1 se, e somente se, essa *sequência* é uma *progressão aritmética* de razão $r \neq 0$.

Estes fatos e a igualdade $a_{n+1} - a_n = n+1$ permitem afirmar que a *sequência* (a_n), do número de partes que o plano fica dividido ao máximo quando ocorrem n cortes no plano, é uma *progressão aritmética de segunda ordem.* Não é difícil ver que a *sequência* (a_n) da *pizza de Steiner* é uma *sequência* tal que $(a_n) = (2, 4, 7, 11, 16, \dots)$. Igualmente sem dificuldades se constata que a *progressão aritmética de primeira ordem* $(b_n) = (\Delta a_n)$ relacionada à (a_n) é tal que $b_1 = 4 - 2 = 2$ e $b_2 = 7 - 4 = 3$, logo $r = b_2 - b_1 = 3 - 2 = 1$.

Pela proposição 2.4.1, temos que

$$a_n = 2 + 2 \cdot (n-1) + \frac{(n-1)(n-2) \cdot 1}{2}$$

$$a_n = \frac{4}{2} + \frac{4(n-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$a_n = \frac{4 + 4n - 4 + n^2 - 3n + 2}{2}$$

$$a_n = \frac{n^2 + n + 2}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + 1,$$

ratificando assim o resultado encontrado por *Steiner* para sua *pizza*: portanto, temos que n cortes retos dividem o plano (visto como uma *pizza*, por isso esta designação) em $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ partes (que são as regiões do plano) no máximo. Por fim, observe ainda que n e $(n+1)$ são inteiros consecutivos, logo um deles é par e assim garantimos que a_n é inteiro.

Conforme visto na proposição 2.4.1, em uma *progressão aritmética de segunda ordem*

(a_n) o seu termo geral é dado por $a_n = a_1 + b_1(n-1) + \dfrac{(n-1)(n-2)r}{2}$, logo a_n é expresso por um polinômio do 2º grau em n onde $r \neq 0$ é a razão da *progressão aritmética de primeira ordem* (b_n) associada à (a_n).

Reciprocamente, se em uma sequência (a_n) o termo de ordem n é dado por um polinômio em n de grau 2, então (a_n) é uma *progressão aritmética de segunda ordem*. Provemos esta última asserção. Para tanto, seja $a_n = An^2 + Bn + C$ o termo geral de uma *progressão aritmética de segunda ordem*, onde A, B e C são números reais quaisquer.

Da proposição 2.4.1 temos $a_n = a_1 + b_1(n-1) + \dfrac{(n-1)(n-2)r}{2}$, assim segue que

$$a_n = \frac{r(n^2 - 3n + 2)}{2} + b_1(n-1) + a_1$$

$$a_n = \frac{r}{2}n^2 + (b_1 - \frac{3r}{2})n + (a_1 + r - b_1).$$

Assim, $\dfrac{r}{2} = A$, $b_1 - \dfrac{3r}{2} = B$ e $a_1 + r - b_1 = C$, de onde se conclui, respectivamente, que $r = 2A$, $b_1 = 3A + B$ e $a_1 = A + B + C$.

Esta equivalência entre uma *progressão aritmética de segunda ordem* e um polinômio do segundo grau permite resolver os problemas vistos acima, como por exemplo o problema 2.4.1; mas, no caso deste problema, com a desvantagem de ter que resolver um sistema com três equações (obtidas por três valores da *progressão aritmética de segunda ordem* quando substituídas na expressão $a_n = An^2 + Bn + C$) e três incógnitas (no caso, A, B, C) antes para determinar a expressão do termo geral a_n para depois determinar o que se deseja, no caso o termo a_{10}, o que não é conveniente em termos práticos.

Observamos que o raciocínio acima pode ser generalizado, isto é, (a_n) é uma *progressão aritmética de ordem k* se, e somente se, a_n pode ser expresso por um polinômio de grau k em n. Neste sentido, uma prova desta afirmação se encontra em [15] e em [6], bem como o desenvolvimento de outras ideias acerca deste tema. Outras aplicações interessantes de uma *progressão aritmética de segunda ordem* relacionam, dentre outros conteúdos matemáticos, assuntos como números poligonais ou o triângulo de Pascal; exemplificando, sobre o triângulo de Pascal, demonstra-se que os elementos de sua *k-ésima* coluna é uma *progressão aritmética de ordem k*, usando para tanto a relação de *Stifel*, matemático que será devidamente apresentado no próximo capítulo.

Capítulo 3

Progressão geométrica

3.1 Definição e ideias iniciais

Definição 3.1.1. *Seja uma sequência, finita ou infinita, de termos não-nulos. Se nesta sequência cada um dos seus termos, a partir do segundo, é igual ao produto do antecessor por uma constante q, então a sequência é dita ser uma progressão geométrica e q, a sua razão. Assim, progressões geométricas são sequências onde o quociente q entre cada termo e o termo anterior é constante.*

Da definição de *progressão geométrica*, $\forall n \in N$, temos que $a_n = q \cdot a_{n-1}$. Portanto, equivalentemente

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}. \tag{3.1}$$

Em uma *progressão geométrica*, valem as igualdades

$$\begin{aligned} a_2 &= q \cdot a_1 \\ a_3 &= q \cdot a_2 \\ a_4 &= q \cdot a_3 \\ &\vdots \\ a_n &= q \cdot a_{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando todas as $n-1$ igualdades acima membro a membro, temos

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \cdots \cdot a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_{n-1} \cdot q^{n-1}$$

e assim, dividindo (o que é possível, pois $\forall j \in N$ temos $a_j \neq 0$) ambos os membros da última igualdade por $a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \cdots \cdot a_{n-1}$, segue que

$$a_n = a_1 q^{n-1}. \tag{3.2}$$

Generalizando, sendo $m < n$, com m, n naturais, o mesmo argumento anterior permite afirmar que

$$a_n = a_m q^{n-m}. \tag{3.3}$$

São exemplos de *progressões geométricas*:

$$(a_n) = (4, 4, 4),$$

$$(b_n) = (3, 9, 27, 81),$$

$$(c_n) = (-256, -64, -16, -4, -1, \dots),$$

$$(d_n) = (-2, -4, -8, -16, -32, -64, -128),$$

$$(e_n) = (3125, 625, 125, 25)$$

e

$$(f_n) = (4, -8, 16, -32, 64, \dots).$$

3.2 Classificação das progressões geométricas

Podemos classificar uma *progressão geométrica* em relação à sua razão. Uma *progressão geométrica* é constante ou estacionária quando $q = 1$; é crescente, quando $q > 1$ e seus termos são positivos, ou quando $0 < q < 1$ e seus termos são negativos; é decrescente, quando $q > 1$ e seus termos são negativos, ou quando $0 < q < 1$ e seus termos são positivos; e é alternante (ou oscilante) quando $q < 0$.

Nos casos das *progressões geométricas* estacionárias, bem como das alternantes, é fácil ver o motivo de tais designações; as *progressões geométricas* (a_n) e (f_n) dadas atrás ilustram tal fato. A *progressão geométrica* (a_n) é constante ou estacionária, onde $q = 1$; e a *progressão geométrica* (f_n) é alternante ou oscilante, com $q = -2 < 0$.

Para as *progressões geométricas* crescentes, basta notar que se seus termos são positivos, então $a_n > a_{n-1} > 0$. Dividindo toda a desigualdade por a_{n-1}, temos que $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} > 1 > 0$ e assim pela igualdade (3.1) se conclui que $q > 1$; se seus termos são negativos, segue que $a_{n-1} < a_n < 0$ e, dividindo toda a desigualdade pelo número negativo a_{n-1}, temos que $1 > \dfrac{a_n}{a_{n-1}} > 0$. Assim, novamente pela igualdade (3.1), temos $0 < q < 1$.

Para as *progressões geométricas* decrescentes cujos termos são positivos, temos $0 < a_n < a_{n-1}$; dividindo toda esta última desigualdade por a_{n-1} temos que $0 < \dfrac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ e assim, pela igualdade (3.1), segue que $0 < q < 1$. Para as *progressões geométricas* decrescentes de termos negativos, $a_n < a_{n-1} < 0$. Dividindo toda a desigualdade pelo número negativo a_{n-1}, temos que $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} > 1 > 0$ e novamente da igualdade (3.1) se conclui que $q > 1$.

Dos exemplos de *progressões geométricas* acima, temos ainda que (b_n) é crescente, pois $q = 3 > 1$ e seus termos são positivos; (c_n) é igualmente crescente, pois seus termos são negativos e $q = \frac{1}{4}$, logo vemos que $0 < q < 1$; (d_n) é decrescente, já que $q = 2 > 1$ e seus termos são negativos; e, por fim, (e_n) é também decrescente, pois seus termos são positivos e $q = \frac{1}{5}$, portanto segue que $0 < q < 1$.

Problema 3.2.1. *Uma progressão geométrica decrescente é tal que todos os seus termos possuem o mesmo sinal do seu quinto termo, que é igual a $\frac{1}{8}$. Sabendo que sua razão q é tal que $2q^2 - 5q + 2 = 0$, mostre que os dois primeiros termos desta progressão geométrica são números inteiros.*

Solução. A *progressão geométrica* é decrescente com termos positivos (pois $a_5 = \frac{1}{8}$ é positivo), consequentemente segue das considerações acima que $0 < q < 1$. Como as raízes de $2q^2 - 5q + 2 = 0$ são 2 e $\frac{1}{2}$, temos $q = \frac{1}{2}$. Da igualdade (3.2) temos $a_5 = a_1 q^4$, assim $\frac{1}{8} = a_1 \cdot \frac{1}{16}$ e portanto obtemos que $a_1 = 2$. Como $a_2 = a_1 q$, se conclui que $a_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, o que comprova que os dois primeiros termos desta progressão geométrica realmente são números inteiros.

Se uma grandeza tem uma taxa de crescimento constante i, ou seja, é tal que cada valor da grandeza é igual ao produto do valor anterior por $(1 + i)$, então estes valores estão em *progressão geométrica*, cuja razão q é tal que $q = 1 + i$. Assim, uma importante aplicação das *progressões geométricas* é a matemática financeira - mais especificamente, o estudo de juros compostos. No regime de juros compostos, um capital a_0 transforma-se, após n períodos de tempo, em um montante a_n, onde $a_n = a_0(1 + i)^n$. Aqui, $q = 1 + i$ e, assim como ocorreu no estudo de uma *progressão aritmética*, também em algumas situações práticas, convém lidar com uma *progressão geométrica* denominando seu primeiro termo como a_0. Se I é a taxa de crescimento de uma grandeza relativamente ao período de tempo T e i é a taxa de crescimento de uma grandeza relativamente ao período de tempo t, onde $T = nt$, então $1 + I = (1 + i)^n$. De fato, sendo V o valor inicial da grandeza, após um período de tempo T, o valor da grandeza será $V(1 + I)$. Como $T = nt$, então o valor da grandeza é também igual a $V(1 + i)^n$. Assim, $V(1 + I) = V(1 + i)^n$, logo $1 + I = (1 + i)^n$.

O problema 3.2.2 a seguir exemplifica tais considerações.

Problema 3.2.2. *A população de certa região cresce a 1,2% ao ano. Porcentualmente, quanto esta região crescerá em duas décadas?*

Solução. $i = 1,2\% = 0,012$, $n = 20$ e $1 + I = (1 + i)^n$. Portanto, temos que $(1 + I) = (1 + 0,012)^{20} \cong 1,2694$, logo $I \cong 26,94\%$. Esta região deve crescer quase 27%

nas próximas duas décadas.

De modo análogo ao que foi visto no capítulo 2, definiremos a seguir o que são *meios geométricos*, bem como veremos o que significa *interpolar* tais meios.

Definição 3.2.1. *Designamos por meios geométricos todos os termos situados entre dois termos não consecutivos de uma progressão geométrica.*

Definição 3.2.2. *Interpolar ou inserir k meios geométricos entre dois números A e B, ambos positivos ou ambos negativos, é formar a progressão geométrica finita de $k+2$ termos cujos extremos são $a_1 = A$ e $a_n = a_{k+2} = B$.*

Note que a definição 3.2.2 deve ser mesmo para números A e B de sinais iguais, visto que, tomando k ímpar e sendo A e B termos distintos, então A e B são termos de ordem ímpar de uma *progressão geométrica* $-$ por exemplo, $A = a_1$ e $B = a_9$ $-$ logo segue que existe m número inteiro positivo tal que $B = A(q^m)^2$. Assim, B é o produto de A pelo número positivo $(q^m)^2$, tendo portanto o mesmo sinal de A.

Proposição 3.2.1. *A razão da interpolação de k meios geométricos onde $a_1 = A$ e $a_n = a_{k+2} = B$ é $q = \pm \sqrt[k+1]{\dfrac{B}{A}}$.*

Demonstração. Pela equação (3.2) temos, para $n = k+2$, que

$$B = a_n = a_{k+2} = a_1 q^{k+2-1} = a_1 q^{k+1} = A q^{k+1},$$

donde se conclui que $q = \pm \sqrt[k+1]{\dfrac{B}{A}}$. □

Repare que da proposição 3.2.1 vemos que sempre é possível obter duas *progressões geométricas* interpolando k meios geométricos entre A e B: uma *progressão geométrica* será com termos todos dotados do mesmo sinal de A e B, se tomarmos a razão q positiva; e a outra *progressão geométrica* será oscilante, ao tomar a razão q negativa.

Corolário 3.2.1. *Calcular a média geométrica C entre dois números A e B, ambos positivos, é equivalente a inserir um meio geométrico entre A e B.*

Demonstração. A média geométrica C é tal que $C = \sqrt{AB}$. Inserir um meio geométrico entre A e B é formar a *progressão geométrica* (A, C, B). Pela proposição 3.2.1 temos que $q = \sqrt{\dfrac{B}{A}}$ e portanto da igualdade $a_2 = a_1 q$ segue que

$$C = A\sqrt{\frac{B}{A}} = \sqrt{\frac{A^2 B}{A}} = \sqrt{AB},$$

demonstrando assim o corolário. □

Problema 3.2.3. *Interpole cinco meios geométricos entre os números* -4 *e* $-\dfrac{1}{16}$ *e escreva a progressão geométrica alternante correspondente.*

Solução. Pela proposição 3.2.1 temos

$$q = \pm\sqrt[6]{\frac{-\frac{1}{16}}{-4}}$$

$$q = \pm\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$$

$$q = \pm\frac{1}{2}.$$

Como a *progressão geométrica* é alternante, segue que $q = -\dfrac{1}{2}$. Assim, os meios geométricos são:

$$a_2 = -4 \cdot (-\frac{1}{2}) = 2$$

$$a_3 = 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1$$

$$a_4 = -1 \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$a_5 = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$$

e

$$a_6 = -\frac{1}{4} \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}.$$

A *progressão geométrica* correspondente é, portanto, $(-4, 2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16})$.

Analogamente às propriedades vistas na seção 2.2 do capítulo que abordou as *progressões aritméticas*, trataremos agora das propriedades correspondentes para as *progressões geométricas.*

3.3 Propriedades da progressão geométrica

1. Em toda *progressão geométrica* cada termo, exceto o primeiro e o último (nos casos onde a *progressão geométrica* é finita), é, em módulo, a média geométrica dos seus termos antecessor e sucessor.

   Demonstração. Segue diretamente do corolário 3.2.1. Outra demonstração para esta propriedade consiste em observar que, dados os termos consecutivos a_k, a_{k+1} e a_{k+2}, temos que $\dfrac{a_{k+2}}{a_{k+1}} = q$ e $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = q$ e assim $\dfrac{a_{k+2}}{a_{k+1}} = \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, logo pela propriedade fundamental das proporções segue que

$$a_{k+1}{}^2 = a_k \cdot a_{k+2}$$

$$a_{k+1} = \pm\sqrt{a_k \cdot a_{k+2}}$$

e portanto a_{k+1} é, em módulo, a média geométrica entre seu termo antecessor a_k e seu termo sucessor a_{k+2}, o que prova esta primeira propriedade. □

2. Em toda *progressão geométrica* finita o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos seus termos extremos.

   Demonstração. Considere a *progressão geométrica* finita

$$(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{n-k}, a_{n-k+1}, \dots, a_{n-1}, a_n)$$

   Nela, os termos a_{k+1} e a_{n-k} são termos equidistantes dos extremos a_1 e a_n e, aplicando a equação (3.2) a estes termos, temos

$$a_{k+1} = a_1 q^{(k+1-1)} = a_1 q^k$$

   e também

$$a_{n-k} = a_1 q^{(n-k-1)} = a_1 q^{n-1} \cdot q^{-k} = a_n q^{-k}$$

   Multiplicando membro a membro as duas últimas expressões acima vem que

$$a_{k+1} \cdot a_{n-k} = a_1 q^k \cdot a_n q^{-k} = a_1 a_n$$

   o que prova o resultado contido nesta propriedade. □

   Das duas primeiras propriedades, extraímos como corolário que em toda *progressão geométrica* finita com número ímpar de termos, o seu termo central é a média geométrica de quaisquer dois dos termos equidistantes dos termos extremos da *progressão geométrica.*

3. Em toda *progressão geométrica*, o produto de dois termos quaisquer, digamos a_m e a_p, será igual ao produto de outros dois termos, digamos a_s e a_t, desde que

$$m + p = s + t.$$

   Em outras palavras, se $m+p = s+t$, (isto é, se a soma dos índices dos dois primeiros termos é igual à soma dos índices dos dois últimos termos), então $a_m \cdot a_p = a_s \cdot a_t$.

   Demonstração. Seja q a razão da *progressão geométrica.* Pela equação (3.2) temos:

$$a_m = a_1 q^{m-1}$$

   e

$$a_p = a_1 q^{p-1}$$

Multiplicando estas duas últimas igualdades, obtemos

$$a_m \cdot a_p = a_1^2 q^{m+p-2} \tag{3.4}$$

Do mesmo modo, temos que

$$a_s = a_1 q^{s-1}$$

e

$$a_t = a_1 q^{t-1}$$

Analogamente, temos

$$a_s \cdot a_t = a_1^2 q^{s+t-2} \tag{3.5}$$

Da hipótese de que $p + q = s + t$ e das igualdades (3.4) e (3.5) segue que

$$a_m \cdot a_p = a_s \cdot a_t.$$

$\square$

Proposição 3.3.1. *A soma S_n dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ é tal que*

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Demonstração. Temos que

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

e, multiplicando os termos da *progressão geométrica* por q, temos que

$$qS_n = a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1}.$$

Subtraindo a última expressão da penúltima, membro a membro, temos

$$S_n - qS_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) - (a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1})$$

$$S_n(1-q) = a_1 - a_{n+1} = a_1 - a_1 \cdot q^n = a_1(1-q^n)$$

e portanto

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q},$$

c.q.d. $\square$

A proposição 3.3.1, bastante conhecida dos estudantes de matemática do ensino médio, já era conhecida pelo matemático grego Euclides, um dos maiores gênios da matemática em todos os tempos. Euclides viveu por volta de trezentos anos antes de Cristo e é o autor da obra *Elementos*, coleção sobre vários assuntos de matemática disposta em

13 volumes e que contém 465 proposições. Como se pode ver em [12], a proposição 35 do livro IX dos Elementos contém uma expressão para a soma finita dos termos de uma progressão geométrica: "Se tantos números quantos quisermos estão em proporção continuada, e se subtrairmos do segundo e último números iguais ao primeiro, então assim como o excesso do segundo está para o primeiro, o excesso do último estará para todos os que o precedem." Esta afirmação, na notação matemática aqui utilizada, é tal que

$$\frac{a_2 - a_1}{a_1} = \frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + \cdots + a_n}.$$

Note que $S_n = a_1 + \cdots + a_n$; e, pela igualdade (3.2), temos $a_{n+1} = a_1 q^n$ e $a_2 = a_1 q$, logo segue que

$$\frac{a_1 q - a_1}{a_1} = \frac{a_1 q^n - a_1}{S_n}$$
$$\frac{a_1(q-1)}{a_1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{S_n}$$
$$\frac{q-1}{1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{S_n}$$

e portanto

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Problema 3.3.1. *Determine a soma de todos os termos da progressão geométrica do problema 3.2.3.*

Solução. A *progressão geométrica* do problema 3.2.3 tem sete termos, de modo que devemos determinar S_7 neste caso. Assim, pela proposição 3.3.1, segue que a soma de todos os termos da *progressão geométrica* do problema citado é tal que

$$S_7 = -4 \cdot \frac{1 - (-\frac{1}{2})^7}{1 - \frac{1}{2}} = -4 \cdot \frac{1 - (-\frac{1}{128})}{\frac{3}{2}}$$

$$S_7 = -4 \cdot \frac{\frac{129}{128}}{\frac{3}{2}} = -\frac{43}{16}.$$

Problema 3.3.2. *Seja $f(x) = x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1$ e m um número inteiro. Demonstre que $f(k)$, onde k é um número real qualquer tal que $k < -1$, é um número negativo. Prove ainda que $g(k)$ é positivo, onde $g(x) = x^{11} + f(x)$.*

Solução. Temos que $f(k) = k^{10} + k^9 + \cdots + k + 1$ é a soma de todos os onze termos da *progressão geométrica* finita $(1, k, k^2, \ldots, k^{10})$, onde $a_1 = 1$ e $q = k$. Então, conforme a proposição 3.3.1, temos $f(k) = S_{10} = 1\frac{1 - k^{10}}{1 - k} = \frac{1 - k^{10}}{1 - k}$. Como $k < -1$, temos que $1 - k > 0$ e $1 - k^{10} < 0$, visto que $k^{10} > 1 > 0$. Assim, $f(k)$ é negativo.

Para $g(x) = x^{11} + f(x) = x^{11} + x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1$, analogamente temos que $g(k) = k^{11} + k^{10} + \cdots + k + 1$ é a soma dos doze termos da *progressão geométrica* finita $(1, k, k^2, \ldots, k^{11})$, onde $a_1 = 1$ e $q = k$.

Pela proposição 3.3.1, temos $g(k) = S_{11} = 1\dfrac{1-k^{11}}{1-k} = \dfrac{1-k^{11}}{1-k}$. Como $k < -1$, temos que $1 - k > 0$ e $1 - k^{11} > 0$, visto que $k^{11} < -1 < 0$. Assim, $g(k)$ é positivo.

Problema 3.3.3. *Seja b um número inteiro positivo de um dígito. Obtenha, em função de b e de n, o valor da soma $S = b+bb+\cdots+bbbb\ldots b$, onde a última parcela da soma S tem n algarismos iguais a b. Em particular, calcule o valor da soma $9+99+\cdots+999.999.999$*

Solução. Temos que $S = b + bb + \cdots + bbbb\ldots b = b(1 + 11 + \cdots + 111\ldots 1)$.

Seja T tal que $T = 1+11+\cdots+111\ldots 1$, logo $S = bT$. Assim, para $j \in (1, 2, \ldots, n)$, a j-ésima parcela de T é um número da forma $1 + 10 + \cdots + 10^{j-1}$, que por sua vez é a soma dos j primeiros termos de uma *progressão geométrica* onde $a_1 = 1$ e $q = 10$.

Então, pela proposição 3.3.1, temos $1 + 10 + \cdots + 10^{j-1} = \dfrac{1-10^j}{1-10} = \dfrac{10^j-1}{9}$. Segue que, sendo o número $111\ldots 1$ formado por j dígitos iguais a 1, consequentemente temos $111\ldots 1 = \dfrac{10^j-1}{9}$. Portanto,

$$S = b(\frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \cdots + \frac{10^n-1}{9})$$

$$S = \frac{b}{9}[(10-1) + (10^2-1) + \cdots + (10^n-1)]$$

$$S = \frac{b}{9}[(10 + 10^2 + \cdots + 10^n) - n]$$

$$S = \frac{b}{9}[10(1 + 10 + \cdots + 10^{n-1}) - n].$$

Tomando $j = n$ na identidade $1+10+\cdots+10^{j-1} = \dfrac{10^j-1}{9}$, implica que S resulta em

$$S = \frac{b}{9}[10\frac{10^n-1}{9} - n] = \frac{b}{9}[\frac{10^{n+1}-10}{9} - \frac{9n}{9}]$$

e assim

$$S = \frac{b}{81}(10^{n+1} - 10 - 9n).$$

Em particular, $9+99+\cdots+999.999.999$ é a soma S acima para $b = n = 9$, então:

$$S = \frac{9}{81}(10^{9+1} - 10 - 9\cdot 9) = \frac{1}{9}(10^{10} - 91) = \frac{1}{9}(10.000.000.000 - 91)$$

$$S = \frac{1}{9}(9.999.999.999 + 1 - 91) = \frac{1}{9}(9.999.999.999 - 90)$$

$$S = 1.111.111.111 - 10 = 1.111.111.101$$

Observe que resolvendo desta forma é possível determinar, sem uso de calculadora, a soma $9 + 99 + \cdots + 999.999.999$.

Para o problema 3.3.4, necessitaremos das definições 3.3.1 e 3.3.2 a seguir.

Definição 3.3.1. *Um número inteiro a é dito ser um número perfeito se a soma de todos os seus divisores positivos é igual ao dobro de a.*

A próxima definição, a de primo de Mersenne, tem este nome em homenagem a Marin de Mersenne (1588 – 1648), monge franciscano e matemático amador. Dentre seus interesses matemáticos, destacam-se seus estudos sobre a curva ciclóide e também sobre os números perfeitos, sendo este último tema o abordado no problema 3.3.4 a seguir. Mais informações sobre a vida e a obra de Mersenne podem ser encontrados em [25] e em [17].

Definição 3.3.2. *Seja p um número primo. Um número da forma $M_p = 2^p - 1$ é dito ser um número de Mersenne. Se M_p é também um número primo, então M_p é denominado primo de Mersenne.*

O problema 3.3.4 traz consigo, além de Mersenne, outros dois expoentes da matemática: Euclides, que já comentamos anteriormente, e Euler. O problema 3.3.4 é a proposição 36 do volume IX da coleção *Elementos*, de Euclides.

O matemático suíço Leonhard Euler (1707 – 1783) é considerado como o autor mais prolífico em matemática de todos os tempos, mesmo nos últimos dezessete anos de sua vida, quando se encontrava completamente cego. Genial parece ser um adjetivo muito modesto para Euler. Sobre Euler, o historiador matemático E. T. Bell afirma que *"uma das mais impressionantes características da genialidade universal de Euler era sua força em ambas principais correntes da Matemática, a contínua e a discreta"*. Uma demonstração da recíproca do problema 3.3.4, que foi demonstrado por Euler, encontra-se em [18]. Mais informações sobre a vida e a obra de Euclides e Euler podem ser encontrados em [25] e em [17].

Problema 3.3.4. *(Teorema de Euclides - Proposição 36 do livro IX da coleção Elementos). Se $2^p - 1$ é um primo de Mersenne e $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, então n é um número perfeito par.*

Solução. Note que, como $2^p - 1$ é um primo de Mersenne, segue de acordo com a definição 3.3.2 que p é primo. Com isso, claramente $2^{p-1} > 2^0 = 1$ e n é par, já que é o produto de inteiros com pelo menos um fator igual a 2. Resta demonstrar que n é número perfeito. Para tanto, note que os divisores de $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, sendo $2^p - 1$ primo (pois, novamente, $2^p - 1$ é primo de Mersenne, portanto primo; a recíproca é que não é válida), são de dois tipos: os que não possuem $(2^p - 1)$ como fator, e os que possuem. Assim, os divisores do primeiro tipo são:

$$1, 2, 2^2, \ldots, 2^{p-1}.$$

E os divisores do segundo tipo são:

$$(2^p - 1), 2(2^p - 1), 2^2(2^p - 1), \ldots, (2^{p-1})(2^p - 1).$$

Os divisores do primeiro tipo formam uma *progressão geométrica* onde o primeiro termo é 1 e a razão é igual a 2. Seja $T = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{p-1}$. Pela proposição 3.3.1, temos que

$$T = 1\frac{1-2^p}{1-2} = 2^p - 1.$$

Analogamente, os divisores do segundo tipo formam uma *progressão geométrica* onde o primeiro termo é $2^p - 1$ e a razão é igual a 2.

Seja $V = 2^p - 1 + 2(2^p - 1) + \cdots + (2^{p-1})(2^p - 1)$. Novamente, ao usarmos a proposição 3.3.1, segue que

$$V = (2^p - 1)\frac{1-2^p}{1-2} = (2^p - 1)\cdot(2^p - 1).$$

Denominando por S a soma dos divisores de $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, temos que $S = T + V$, logo:

$$S = 2^p - 1 + (2^p - 1)\cdot(2^p - 1) = (2^p - 1)(1 + 2^p - 1) = 2^p(2^p - 1) = 2\cdot 2^{p-1}(2^p - 1).$$

Como $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, segue da última expressão acima que $S = 2n$ e assim S é igual ao dobro de todos os divisores positivos de n. Portanto, pela definição 3.3.1, n é um número perfeito.

Uma soma de infinitos termos é denominada de *série*. A proposição 3.3.2 a seguir trata da soma dos infinitos termos de uma *progressão geométrica*, quando sua razão pertence ao intervalo $(-1; 1)$. Como sua demonstração rigorosa requer conteúdos de matemática de nível superior, omitiremos sua prova aqui. Tal prova encontra-se em qualquer bom livro de *Cálculo diferencial e integral*. A referência bibliográfica [25] serve como exemplo.

Proposição 3.3.2. *A soma S_n dos infinitos termos de uma progressão geométrica de razão q, onde $-1 < q < 1$, é tal que $S_n = \dfrac{a_1}{1-q}$.*

O problema 3.3.5 é uma aplicação clássica da proposição 3.3.2.

Problema 3.3.5. *Determine a fração geratriz da dízima periódica 6,3878787...*

Solução. Temos que $6,3878787\cdots = 6,3 + 0,0878787\cdots = \dfrac{63}{10} + \dfrac{87}{1000} + \dfrac{87}{100000}\ldots$ e a *série* $s_n = \dfrac{87}{1000} + \dfrac{87}{100000}\ldots$ é tal que $a_1 = \dfrac{87}{1000}$ e razão $q = \dfrac{1}{100}$. Pela proposição 3.3.2 temos que

$$s_n = \frac{\frac{87}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{87}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{87}{990} = \frac{29}{330}.$$

Assim, segue que $6,3878787\cdots = \dfrac{63}{10} + \dfrac{29}{330} = \dfrac{63\cdot 33 + 29}{330} = \dfrac{2108}{330} = \dfrac{1054}{165}$.

O problema a seguir refere-se a um dos paradoxos do filósofo grego Zenão de Eléia, cujo principal personagem é Aquiles. A lenda diz que Aquiles é um herói mitológico da Grécia; filho de deuses, ele foi mergulhado nas águas de um rio encantado, de cabeça para baixo, tornando-se invulnerável na guerra, exceto pelo seu calcanhar, que foi por onde sua mãe o segurou. Isto explica o uso, ainda hoje, da expressão "calcanhar de Aquiles" como ponto fraco; Aquiles se destacou como o maior guerreiro nas batalhas contra Tróia e o mais veloz dos corredores.

Quanto ao paradoxo, há algumas versões. A que usaremos no problema 3.3.6 é cópia fiel da versão da obra do escritor argentino Jorge Luis Borges descrita nas referências bibliográficas desta dissertação em [2].

Problema 3.3.6. *(Zenão de Eléia e o paradoxo de Aquiles). "Aquiles corre dez vezes mais ligeiro que a tartaruga e lhe dá uma vantagem de dez metros. Aquiles corre esses dez metros, a tartaruga corre um. Aquiles corre esse um metro, a tartaruga corre um decímetro. Aquiles corre esse decímetro, a tartaruga corre um centímetro. Aquiles corre esse centímetro, a tartaruga um milímetro. Aquiles Pés ligeiros o milímetro, a tartaruga um décimo de milímetro e assim infinitamente, sem alcançá-la..." Determine a distância percorrida por Aquiles, supondo que o grande herói grego corra deste modo por um tempo infinito.*

Solução. Aquiles corre uma distância d tal que $d = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots$ Note que d é a soma dos infinitos termos de uma *progressão geométrica* de razão $q = \frac{1}{10}$ e primeiro termo $a_1 = 10$. Logo, pela proposição 3.3.2, segue que

$$d = \frac{10}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{9}.$$

Portanto, Aquiles percorre uma distância de aproximadamente $11,11$ metros e, paradoxalmente, nunca ficará a frente da lenta tartaruga, visto que, quando Aquiles percorre o trecho que falta para alcançá-la, esta se dista a décima parte do que o herói grego correu, e assim sucessivamente.

Proposição 3.3.3. *Dada uma progressão geométrica qualquer, o produto P_n dos seus n primeiros termos é tal que $P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$.*

Demonstração. Temos que $P_n = a_1 \cdot a_2 \ldots a_{n-1} \cdot a_n$.

Invertendo a ordem dos termos à direita desta expressão acima, também temos que

$$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \ldots a_2 \cdot a_1.$$

Multiplicando estas duas últimas expressões, membro a membro, temos

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)(a_2 \cdot a_{n-1}) \ldots (a_{n-1} \cdot a_2)(a_n \cdot a_1).$$

Observe que $(a_2 \cdot a_{n-1}) = \cdots = (a_{n-1} \cdot a_2) = (a_1 \cdot a_n)$, conforme a segunda propriedade das *progressões geométricas* vista anteriormente e portanto

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)(a_1 \cdot a_n) \ldots (a_1 \cdot a_n)(a_1 \cdot a_n)$$

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$$

$\square$

Problema 3.3.7. *Determine, em forma de potência, o quadrado do produto de todos os termos da progressão geométrica do problema 3.2.3.*

Solução. Temos $P_n^2 = (-4 \cdot \dfrac{-1}{16})^7 = (\dfrac{1}{4})^7 = 2^{-14}$.

3.4 Relacionando progressões, logaritmos e exponenciais

O matemático, físico e astrônomo escocês *John Napier* $(1550 - 1617)$, contribuiu para o avanço da matemática ao descobrir o uso dos *logaritmos* e suas propriedades, principalmente para fins astronômicos.

Sem aprofundar o debate histórico deste tema, vale a pena ressaltar que a descoberta dos *logaritmos* está associada ao matemático alemão *Michael Stifel* (1486–1567), considerado por alguns como o maior algebrista do século XVI na Alemanha, bem como tal descoberta também está intimamente ligada às *progressões aritméticas e geométricas.*

Para entendermos melhor como tais temas se relacionam, em 1544 *Stifel* escreveu o livro intitulado *Arithmetica Integra* (*Aritmética Renovada*, em português) no qual observou que os termos de uma *progressão geométrica* de razão q, dada por $(q^0, q^1, q^2, \ldots)$ correspondia aos termos de uma *progressão aritmética* de razão 1 tal que $(0, 1, 2, \ldots)$, formada pelos expoentes, da seguinte forma: a multiplicação de dois termos da *progressão geométrica* resultava em um termo cujo expoente representava a soma dos dois números correspondentes na *progressão aritmética.*

Tais correspondências se constituem nas denominadas relações de *Stifel.* Assim, por exemplo, $q^2 \cdot q^5 = q^7$ e $2 + 5 = 7$. Essa correspondência já havia sido observada pelo matemático francês *Nicolas Chuquet*, que nasceu em 1445 ou 1455 e faleceu em 1488 ou em 1500 $-$ estes registros são imprecisos. *Chuquet* registrou tal fato em seu livro *Le Triparty en la Science des Nombres* (A Triparte na Ciência dos Números, em português), dividido em três seções e escrito em 1484. Porém, foi *Stifel* quem em sua *Arithmetica integra*, começa a apresentar pela primeira vez a ideia de um expoente.

Stifel não só dá a correspondência entre a *progressão aritmética* $(1, 2, 3, 4, \ldots)$ com a *progressão geométrica* $(2, 4, 8, 16, ...)$ mas também a estende para trás, de modo que o número 0 na *progressão aritmética* corresponde ao número 1 na *progressão geométrica*, -1 corresponde a $\frac{1}{2}$, -2 corresponde a $\frac{1}{4}$ e assim sucessivamente.

Apesar de *Chuquet* e *Stifel* haverem observado essa correspondência, o uso prático dos *logaritmos* só foi realizado *Napier*, por volta de 1594, e apresentado em dois livros: *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (*Descrição do Maravilhoso Cânon (Princípio) de Logaritmos*, em português), publicado em 1614, e *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* (*Construção do Maravilhoso Cânon (Princípio) de Logaritmos*, em português), publicado postumamente em 1619.

Assim, percebe-se que os estudos de *Stifel* permitiram a descoberta dos *logaritmos* por *Napier*. A verdade é que por pouco *Stifel* não descobriu os *logaritmos*. Ele parece nem perceber que tropeçou em algo importante, pois escreveu em sua obra: "Um livro inteiro poderia ser escrito sobre as coisas maravilhosas relativas a números, mas deve abster-se e deixar essas coisas com os olhos fechados."

Para ilustrar melhor a visão de *Napier* dos *logaritmos* que não ocorreu a *Stifel*, considere a *progressão geométrica* $(3, 9, 27, \dots, 6561)$ que pode ser expressa também por $(3^1, 3^2, \dots, 3^8)$. Os expoentes desta *progressão geométrica* formam a *progressão aritmética* $(1, 2, ..., 8)$. Note ainda que, pelas relações de *Stifel* temos $3^4 \cdot 3^2 = 3^6$ e que $4 + 2 = 6$, por exemplo. Ainda, os termos da *progressão aritmética* são os respectivos *logaritmos* da *progressão geométrica*; por exemplo, $\log_3 6561 = 8$.

Dito de outra forma, os *logaritmos* são os respectivos valores que acompanham os termos de uma *progressão aritmética*. Assim, as *progressões aritméticas e geométricas* são um dos meios mais importantes para explicar e justificar o conceito de *logaritmo*. Esta é a relação existente entre *progressões*, *logaritmos* e *exponenciais*, das quais destacamos dois problemas a seguir.

Problema 3.4.1. *Se a sequência (a_n) é uma progressão aritmética, prove que a sequência $(b_n) = e^{a_n}$ é uma progressão geométrica, onde e denota o número de Euler.*

Demonstração. Sendo r a razão da *progressão aritmética* (a_n), basta notar que

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{e^{a_{n+1}}}{e^{a_n}} = e^{a_{n+1}-a_n} = e^r.$$

Como o quociente entre um termo qualquer da sequência (b_n) e o seu antecessor é a constante e^r, segue por definição que (b_n) é uma *progressão geométrica*. □

Problema 3.4.2. *Se a sequência (a_n) é uma progressão geométrica, prove que a sequência $(b_n) = \log a_n$ é uma progressão aritmética.*

Demonstração. Raciocínio análogo à resolução do problema 3.4.1. Sendo q a razão da *progressão geométrica* (a_n), basta notar que

$$b_{n+1} - b_n = \log a_{n+1} - \log a_n = \log \frac{a_{n+1}}{a_n} = \log q.$$

Como a diferença entre um termo qualquer da sequência (b_n) e o seu antecessor é a constante $\log q$, segue por definição que (b_n) é uma *progressão aritmética.* $\square$

Pelas considerações feitas antes e da igualdade (3.2) temos que uma *progressão geométrica* qualquer é uma função do tipo exponencial, expressa por $f(n) = bq^n$, onde $f(n) = a_n$ e $b = a_1$. Assim, podemos resolver facilmente o problema a seguir.

Problema 3.4.3. *Dada a função* $f(x) = 3 \cdot 4^{1-x} + 2 \cdot (\frac{2}{3})^x$*, calcule a soma* S *das imagens desta função por todos os números inteiros positivos.*

Solução. Sejam $g(x) = 3 \cdot 4^{1-x} = 3 \cdot (\frac{1}{4})^{x-1}$ e $h(x) = 2 \cdot (\frac{2}{3})^x = \frac{4}{3} \cdot (\frac{2}{3})^{x-1}$; ainda, sejam M e T, respectivamente, a soma das imagens de $g(x)$ e $h(x)$ por todos os números inteiros positivos. Assim, M é a soma dos infinitos termos da *progressão geométrica* tal que seu primeiro termo é 3 e sua razão, igual a $\frac{1}{4}$. Analogamente, T é a soma dos infinitos termos da *progressão geométrica* tal que seu primeiro termo é $\frac{4}{3}$ e sua razão, igual a $\frac{2}{3}$.

Então, pela proposição 3.3.2 temos:

$$M = 3(1 + \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + \dots) = 3(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}}) = \frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 4$$

e

$$T = \frac{4}{3}(1 + \frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 + \dots) = \frac{4}{3}(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}}) = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}} = 4.$$

Assim, $S = M + T = 4 + 4 = 8$.

3.5 Progressão geométrica de segunda ordem

De modo análogo ao que foi feito na seção 2.4 do capítulo anterior, podemos falar em *progressão geométrica de ordem k.* Aqui, concentraremos nossa atenção na *progressão geométrica de segunda ordem.*

Definição 3.5.1. *Uma progressão geométrica de ordem* k *é uma sequência finita ou infinita de números, todos diferentes de zero, na qual o quociente entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão geométrica de ordem* $k - 1$.

Assim, uma *progressão geométrica de ordem* k é uma *progressão geométrica* que após k operações de divisão entre termos consecutivos das *sequências* geradas resulta em uma *progressão geométrica constante ou estacionária.*

Em particular, uma *progressão geométrica de ordem 2*, também denominada *progressão geométrica de segunda ordem*, é uma *progressão geométrica* que após duas operações de divisão entre os termos consecutivos das suas *sequências* geradas resulta em uma *progressão geométrica* estacionária. Observe ainda que, uma *sequência* (a_n) é uma *progressão geométrica de segunda ordem* se, e somente se, a *sequência* (b_n), tal que $b_j = \dfrac{a_{j+1}}{a_j}$, para todo j natural menor ou igual a n, é uma *progressão geométrica* com $q \neq 1$, ou seja, a *sequência* (b_n) é uma *progressão geométrica de primeira ordem* associada à (a_n).

Proposição 3.5.1. *Seja (a_n) uma progressão geométrica de segunda ordem qualquer e (b_n) a progressão geométrica de primeira ordem de razão q associada à (a_n). Então,*

$$a_n = a_1 b_1^{(n-1)} q^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$$

é o termo geral da progressão geométrica de segunda ordem (a_n).

Demonstração. Provemos por indução. Notando que $n-1$ é fator dos expoentes de b_1 e q, para $n = 1$ verifica-se trivialmente que a afirmação é válida. Assim, se para algum natural n vale que

$$a_n = a_1 b_1^{(n-1)} q^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)},$$

provemos que

$$a_{n+1} = a_1 b_1^{n} q^{\frac{1}{2}n(n-1)}.$$

Para tanto, note que pela definição 3.5.1 temos que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = b_n$, onde $b_n = b_1 q^{n-1}$, visto que (b_n) é uma *progressão geométrica de primeira ordem.* Assim, segue que

$$a_{n+1} = a_n b_n = (a_1 b_1^{n-1} q^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)})(b_1 q^{n-1})$$

$$a_{n+1} = a_1 b_1^{n} q^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+n-1}.$$

Notando que

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + n - 1 = (n-1)(\frac{n-2}{2} + 1) = (n-1)(\frac{n-2+2}{2}),$$

logo

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + n - 1 = (n-1)(\frac{n}{2})$$

e segue que

$$a_{n+1} = a_1 b_1^{n} q^{\frac{1}{2}n(n-1)},$$

o que conclui a demonstração. □

Com este conhecimento, podemos agora resolver problemas como o problema 3.5.1 a seguir. Vendo somente a abordagem tradicional, o estudante do ensino médio não pode resolver problemas deste tipo, pois tal abordagem é limitada a *progressões geométricas de primeira ordem.*

Problema 3.5.1. *Calcule o termo a_5 da sequência $(a_n) = (4, 12, -72, -864, \cdots)$.*

Solução. Inicialmente, observe que a *sequência* (a_n) é uma *progressão geométrica de segunda ordem*, visto que temos

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{4} = 3$$

$$b_2 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{-72}{12} = -6$$

$$b_3 = \frac{a_4}{a_3} = \frac{-864}{-72} = 12$$

e assim sucessivamente. Portanto a *sequência* $(b_n) = (3, -6, 12, \cdots)$ é uma *progressão geométrica de primeira ordem* onde $b_1 = 3$ e $q = -2$.

Pela proposição 3.5.1, facilmente obtemos que

$$a_5 = 4 \cdot 3^4 \cdot (-2)^6 = 20736.$$

A proposição a seguir fornece uma igualdade para calcular o produto dos n primeiros termos de uma *progressão geométrica de segunda ordem.*

Proposição 3.5.2. *Seja (a_n) uma progressão geométrica de segunda ordem, à qual está associada a progressão geométrica de primeira ordem (b_n), de razão q. O produto P_n dos n primeiros termos da progressão geométrica de segunda ordem (a_n) é tal que*

$$P_n = a_1^n b_1^{\frac{1}{2}n(n-1)} q^{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)}.$$

Demonstração. Provemos por indução em n. Para $n = 1$ verifica-se trivialmente que a afirmação é válida, notando que $n - 1$ é fator dos expoentes de b_1 e q. Assim, se para algum natural n vale que

$$P_n = a_1^n b_1^{\frac{1}{2}n(n-1)} q^{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)},$$

provemos que

$$P_{n+1} = a_1^{n+1} b_1^{\frac{1}{2}(n+1)n} q^{\frac{1}{6}(n+1)n(n-1)}.$$

Temos que

$$P_{n+1} = (a_1 a_2 \ldots a_n) a_{n+1} = P_n \cdot a_{n+1}.$$

Utilizando a hipótese de indução e, para a_{n+1} a propriedade 3.5.1, temos

$$P_{n+1} = (a_1^n b_1^{\frac{1}{2}n(n-1)} q^{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)}) \cdot (a_1 b_1^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)})$$

$$P_{n+1} = a_1^{n+1} b_1^{\frac{1}{2}n(n-1)+n} q^{\frac{(n-1)}{6}n(n-2)+\frac{n-1}{2}(n-1)}. \tag{3.6}$$

Calculando separadamente as expressões dos expoentes de b_1 e q, temos, respectivamente, que

$$\frac{1}{2}n(n-1) + n = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2n) = \frac{1}{2}(n^2 + n) = \frac{1}{2}n(n+1) \tag{3.7}$$

e
$$\frac{n-1}{6}n(n-2)+\frac{n-1}{2}n=\frac{n-1}{6}(n(n-2)+3n)=\frac{n-1}{6}n(n+1) \qquad (3.8)$$
Logo, substituindo as igualdades (3.7) e (3.8) na igualdade (3.6), temos que

$$P_{n+1}=a_1^{n+1}b_1^{\frac{1}{2}n(n+1)}q^{\frac{(n-1)}{6}n(n+1)},$$

e portanto fica demonstrado que

$$P_n=a_1^n b_1^{\frac{1}{2}n(n-1)}q^{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)}.$$

□

Problema 3.5.2. *Calcule o produto dos cinco primeiros termos da sequência do problema 3.5.1, dada por* $P_5 = 4\cdot 12\cdot(-72)\cdot(-864)\cdot 20736$.

Solução. Conforme a proposição 3.5.2 temos que

$$P_5=4^5\cdot 3^{\frac{1}{2}5\cdot 4}\cdot(-2)^{\frac{1}{6}5\cdot 4\cdot 3}=4^5\cdot 3^{10}\cdot(-2)^{10}=61.917.364.224$$

Problema 3.5.3. *Se* $n = 2187\cdot 8748\cdot 5832\cdot 648\cdot 12\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{52488}\cdot\frac{1}{612220032}$ *é um número natural tal que seus nove fatores formam uma progressão geométrica de segunda ordem, determine* n.

Solução. Uma solução para este problema se obtém usando a teoria exposta acima.

Então, como os fatores de n formam uma *progressão geométrica de segunda ordem*, facilmente vemos que $a_1 = 2187$, $b_1=\frac{a_2}{a_1}=4$, $b_2=\frac{a_3}{a_2}=\frac{2}{3}$ e $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{1}{6}$. Assim, temos que:

$$P_8=2187^8\cdot 4^{\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 7}\cdot(\frac{1}{6})^{\frac{1}{6}\cdot 8\cdot 7\cdot 6}.$$

Como $2187 = 3^7$ temos que $2187^8 = 3^{56}$ e, igualmente, como $4 = 2^2$ temos que $4^{\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 7} = 2^{56}$. Assim, P_8 é tal que

$$P_8=3^{56}\cdot 2^{56}\cdot(\frac{1}{6})^{56}=6^{56}\cdot(\frac{1}{6})^{56}=1.$$

Outra solução possível, porém muito cansativa, seria realizar a multiplicação diretamente, o que demonstra a importância da teoria exposta.

Problema 3.5.4. *Prove que nenhum termo da sequência do problema 3.5.1, dada por* $(a_n) = (4, 12, -72, -864, \cdots)$ *é divisível por 14.*

Solução. Da solução do problema 3.5.1 temos que $a_1 = 4$, $b_1 = 3$ e $q = -2$. Por absurdo, suponha que exista um número natural j tal que a_j é termo da *sequência* (a_n) com a_j divisível por 14. Então, em particular, a_j é divisível por 7.

Assim, o produto P_j dos j primeiros termos de (a_n) é divisível por 7. Mas P_j é produto de potências de $a_1 = 4$, $b_1 = 3$ e $q = -2$, logo P_j é produto de potências de 2 e 3, absurdo! Segue que nenhum termo da sequência do problema 3.5.1, dada por $(a_n) = (4, 12, -72, -864, \cdots)$ é divisível por 14.

Encerramos este capítulo com a proposição 3.5.3, que expande a relação existente entre *progressões, logaritmos* e *exponenciais*, ao considerar agora as *progressões de ordem k* nesta relação, generalizando o resultado obtido anteriormente no problema 3.4.2.

Proposição 3.5.3. *Se a sequência (a_n) é uma progressão geométrica de ordem k, então a sequência $(b_n) = \log a_n$ é uma progressão aritmética de ordem k, para todo k inteiro positivo.*

Demonstração. Provemos esta proposição por indução. O caso $k = 1$ foi provado quando se resolveu o problema 3.4.2. Assim, por hipótese de indução, seja (a_n) uma *progressão geométrica de ordem k*, então a sequência $(b_n) = \log a_n$ é uma *progressão aritmética de ordem k*, para todo k inteiro positivo.

Agora, note que, como (a_n) uma *progressão geométrica de ordem k*, ao definirmos uma sequência (c_n) tal que $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = a_n$, temos que (c_n) é uma *progressão geométrica de ordem* $k+1$.

Definamos também $(d_n) = \log c_n$, e assim, para finalizar a prova desta proposição, basta demonstrar que (d_n) é uma *progressão aritmética de ordem* $k+1$. Temos $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = a_n$ e assim, calculando o *logaritmo* em ambos os membros desta última igualdade, vem que

$$\log \frac{c_{n+1}}{c_n} = \log a_n$$

e, por propriedade de *logaritmo*, segue que

$$\log c_{n+1} - \log c_n = \log a_n.$$

Como $(b_n) = \log a_n$ e $(d_n) = \log c_n$, temos

$$d_{n+1} - d_n = b_n$$

mas (b_n) é uma *progressão aritmética de ordem k*, para todo k inteiro positivo, por hipótese de indução, de modo que (d_n) é uma sequência tal que a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos seus é igual a um polinômio de grau k, expresso por b_n; portanto, (d_n) é uma *progressão aritmética de ordem* $k+1$, conforme a definição 2.4.1 e a proposição está demonstrada. □

Por fim, dois breves comentários: na demonstração acima a base do *logaritmo* é um número real qualquer, desde que respeitadas as condições de base: ser positiva e diferente da unidade; e, obviamente, se a sequência (a_n) é uma *progressão aritmética de ordem k*, então a sequência $(b_n) = e^{a_n}$ é uma *progressão geométrica de ordem k*, onde e denota o número de *Euler*.

Capítulo 4

Progressão harmônica

4.1 Definição e ideias iniciais

Definição 4.1.1. *Uma progressão harmônica é uma sequência finita ou infinita de números cujos termos são todos diferentes de zero e tais que seus inversos formam uma progressão aritmética de primeira ordem.*

Assim, a sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ *é uma progressão harmônica se, e somente se, a sequência* $(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}, \ldots)$ *é uma progressão aritmética de primeira ordem.*

Definimos a *progressão harmônica* finita de modo inteiramente análogo: a sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é uma *progressão harmônica* se, e somente se, a sequência $(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n})$ é uma *progressão aritmética de primeira ordem.* Para simplificar, seja no caso infinito ou finito, quando nos referirmos daqui por diante à *progressão aritmética de primeira ordem* que está associada a uma dada *progressão harmônica*, a chamaremos apenas de *progressão aritmética.*

Determinemos a expressão do termo geral de uma *progressão harmônica.* Para tanto, seja a_j um termo qualquer da *progressão harmônica* (a_n), então $b_j = \frac{1}{a_j}$ é o termo geral de uma *progressão aritmética* de razão r tal que

$$r = b_2 - b_1 = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2}$$

e então, conforme a igualdade (2.1), temos que

$$b_j = b_1 + (j-1)r = \frac{1}{a_1} + (j-1)\frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2} = \frac{a_2 + (j-1)(a_1 - a_2)}{a_1 a_2}.$$

Como $b_j = \frac{1}{a_j}$, segue que

$$\frac{1}{a_j} = \frac{a_2 + (j-1)(a_1 - a_2)}{a_1 a_2}$$

e assim chegamos à

$$a_j = \frac{a_1 a_2}{a_2 + (j-1)(a_1 - a_2)} \tag{4.1}$$

que é a expressão do termo geral de uma *progressão harmônica* para $j > 2$, onde j é um número natural.

São exemplos de *progressões harmônicas* as *sequências* (a_n), (b_n) e (c_n) dispostas a seguir:

$$(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$$
$$(b_n) = (\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{7})$$
$$(c_n) = (4, 4, 4, 4, \dots)$$

As *sequências* (a_n), (b_n) e (c_n) são *progressões harmônicas* pois podemos associar, respectivamente, à (a_n), (b_n) e (c_n) as *sequências*

$$(d_n) = (1, 2, \dots, n, \dots)$$

$$(e_n) = (5, 2, -1, -4, -7)$$

e

$$(f_n) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots),$$

que são *progressões aritméticas.*

É possível classificar as *progressões harmônicas* quanto ao número de termos: uma *progressão harmônica* pode ser finita, como por exemplo a *progressão harmônica* (b_n) acima, ou infinita, como a *progressão harmônica* (a_n) anterior.

Problema 4.1.1. *Dada a progressão harmônica* $(3, \frac{12}{7}, \frac{6}{5}, \frac{12}{13}, \dots)$, *determine o seu nono termo.*

Solução. Temos pela igualdade (4.1) que

$$a_9 = \frac{(3 \cdot \frac{12}{7})}{\frac{12}{7} + (9-1)(3 - \frac{12}{7})} = \frac{\frac{36}{7}}{\frac{12 + 8 \cdot 9}{7}} = \frac{36}{84} = \frac{3}{7}.$$

Do mesmo modo como foi desenvolvido nos capítulos anteriores, abordemos a interpolação de meios; mais especificamente, tratemos neste momento da *interpolação de meios harmônicos*. *Meios harmônicos* são os termos situados entre dois termos não consecutivos de uma progressão harmônica.

Quando é possível, interpolar ou inserir k *meios harmônicos* entre dois números A e B é formar a *progressão harmônica* (a_n) de $k+2$ termos de tal forma que $a_1 = A$ e $a_n = a_{k+2} = B$. Pela definição 4.1.1, isso equivale a formar uma *progressão aritmética* (b_n) de $k+2$ termos onde $b_1 = \dfrac{1}{A}$ e $b_n = b_{k+2} = \dfrac{1}{B}$, o que já foi visto no capítulo 2. Os inversos dos k *meios aritméticos* assim obtidos são os k *meios harmônicos* procurados.

Problema 4.1.2. *Interpole três meios harmônicos entre* 3 *e* 6*.*

Solução. Seja (b_n) a *progressão aritmética* associada à *progressão harmônica* (a_n) procurada. Interpolar três *meios harmônicos* entre 3 e 6 é equivalente a interpolar três *meios aritméticos* entre $b_1 = \dfrac{1}{3}$ e $b_5 = \dfrac{1}{6}$.

Pela proposição 2.1.1, temos que $r = \dfrac{\frac{1}{6} - \frac{1}{3}}{3+1} = \dfrac{-\frac{1}{6}}{4} = -\dfrac{1}{24}$. Assim, segue que os *meios aritméticos* são tais que:

$$b_2 = b_1 + r = \frac{1}{3} - \frac{1}{24} = \frac{7}{24},$$

$$b_3 = b_2 + r = \frac{7}{24} - \frac{1}{24} = \frac{1}{4},$$

$$b_4 = b_3 + r = \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{5}{24}.$$

Portanto os *meios harmônicos* são $a_2 = \dfrac{24}{7}$, $a_3 = 4$ e $a_4 = \dfrac{24}{5}$, de modo que a *progressão harmônica* procurada é $(3, \dfrac{24}{7}, 4, \dfrac{24}{5}, 6)$.

Observação: Não é possível interpolar k *meios harmônicos* entre dois números A e B se estes números possuem sinais distintos.

Isto ocorre pois os termos encontrados podem não se situar entre os números dados, ou pelo fato de que podemos encontrar um termo nulo na *progressão aritmética* associada à *progressão harmônica* procurada; logo inexistirá o termo correspondente na *progressão harmônica* a ser formada. Como exemplo de que não é possível interpolar com números dados de sinais distintos, tentemos interpolar três *meios harmônicos* entre -3 e 6. Temos que, sendo (b_n) a *progressão aritmética* associada à *progressão harmônica* (a_n) procurada, interpolar três *meios harmônicos* entre -3 e 6 é equivalente a interpolar três *meios aritméticos* entre $b_1 = \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}$ e $b_5 = \dfrac{1}{6}$. Pela proposição 2.1.1, segue que $r = \dfrac{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}}{3+1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{4} = \dfrac{1}{8}$. Portanto, os *meios aritméticos* são tais que:

$$b_2 = b_1 + r = -\frac{1}{3} + \frac{1}{8} = -\frac{5}{24},$$

$$b_3 = b_2 + r = -\frac{5}{24} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{12},$$

$$b_4 = b_3 + r = -\frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{1}{24}.$$

Então, os *meios harmônicos* são $a_2 = -\frac{24}{5}$, $a_3 = -12$ e $a_4 = 24$. Note que nenhum dos *meios harmônicos* está entre $a_1 = -3$ e $a_5 = 6$. Sobre estas considerações, outro exemplo desta impossibilidade de se lidar com números de sinais distintos: ao tentarmos interpolar três *meios harmônicos* entre -2 e 6, raciocínio análogo ao do primeiro exemplo exposto acima revela que $b_4 = 0$, logo inexiste o *meio harmônico* a_4 correspondente.

Aqui, muito útil será a definição de *média harmônica*. Os gregos antigos a estudaram, gerando problemas e descobertas interessantes, que aqui serão abordados. A definição de *média harmônica* disposta a seguir, para três números, pode ser facilmente generalizada para k números, onde k é um inteiro positivo qualquer.

Definição 4.1.2. *Dados três números a, H, b, dizemos que H é a média harmônica de a e b se entre estes números vale a igualdade $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{H} + \frac{1}{H}$, que é equivalente à igualdade $H = \frac{2ab}{a+b}$.*

Percebemos então da definição 4.1.2 que o significado de *média harmônica* entre dois números é obter um número H tal que a soma do inverso de a com o inverso de b seja igual à soma do inverso de H consigo próprio; ou seja, podemos substituir cada uma das frações $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b}$ por $\frac{1}{H}$ que o resultado da soma entre eles é preservado.

Na Grécia antiga, cerca de 500 anos antes de Cristo, uma corrente filosófica marcou época. Os *pitagóricos* eram uma escola de pensadores cujo líder foi o matemático e filósofo *Pitágoras*, o qual acredita-se ter nascido em 565 a.C. e falecido em 490 a.C.. Os *pitagóricos* em muito contribuíram para a matemática e a cultura de modo geral; para saber mais sobre os *pitagóricos* e seu fundador, uma boa referência é [27].

Os *pitagóricos* definiam a *média harmônica* da seguinte forma: dados dois números positivos a e b, H é a *média harmônica* de a e b se existe um número n tal que $a = H + \frac{a}{n}$ e $H = b + \frac{b}{n}$. Esta definição é equivalente à definição 4.1.2, pois ao multiplicarmos por b a igualdade $a = H + \frac{a}{n}$ temos que

$$ab = bH + \frac{ab}{n}$$

e assim

$$ab - bH = \frac{ab}{n}. \tag{4.2}$$

Analogamente, multiplicando por a a igualdade $H = b + \frac{b}{n}$ temos

$$aH = ab + \frac{ab}{n}$$

e assim

$$ab - aH = -\frac{ab}{n}. \tag{4.3}$$

Somando membro a membro as igualdades (4.2) e (4.3), temos:

$$2ab - bH - aH = 0$$

$$2ab - H(b+a) = 0$$

$$2ab = H(a+b)$$

e portanto

$$H = \frac{2ab}{a+b}.$$

Vejamos agora duas propriedades válidas para as *progressões harmônicas*; a primeira destaca-se por relacionar a *progressão harmônica* com a *média harmônica*.

4.2 Propriedades da progressão harmônica

1. Em toda *progressão harmônica*, quaisquer três termos consecutivos são tais que o segundo é a *média harmônica* dos outros dois.

   Demonstração. Sejam a, h, b três termos de uma *progressão harmônica*. Assim, pela definição 4.1.1, temos que $(\frac{1}{a}, \frac{1}{h}, \frac{1}{b})$ é uma *progressão aritmética*. De acordo com a primeira propriedade das *progressões aritméticas*, temos que vale a igualdade

$$\frac{1}{h} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}.$$

   Assim, segue que

$$\frac{1}{h} = \frac{\frac{b+a}{ab}}{2} = \frac{a+b}{2ab},$$

   logo

$$h = \frac{2ab}{a+b}.$$

   $\square$

2. Denominando por P o produto dos n primeiros termos de uma *progressão aritmética* (b_n), temos que o produto dos n primeiros termos da *progressão harmônica* (a_n) associada à (b_n) é igual a $\frac{1}{P}$.

   Demonstração. Sendo $P = b_1 b_2 \ldots b_n$, onde $b_1, b_2, \ldots, b_n$ são os n termos da *progressão aritmética* (b_n), temos que o produto dos n termos da *progressão harmônica* (a_n) é tal que $a_1 a_2 \ldots a_n = \frac{1}{b_1}\frac{1}{b_2} \ldots \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b_1 b_2 \ldots b_n} = \frac{1}{P}$. $\square$

Diversas contribuições os gregos, *pitagóricos* ou não, deixaram à humanidade no que se refere à *média harmônica*. O problema a seguir explica o motivo de *Filolao*, um *pitagórico* que viveu por volta de 425 a.C., denominar o cubo de *harmonia geométrica*.

Problema 4.2.1. *Determine o segundo termo de uma progressão harmônica* (a_n) *cujo primeiro termo é igual a* 6 *e tal que* $a_3 = 2a_1$.

Solução. Temos $a_3 = 12$ e, pela primeira propriedade das *progressões harmônicas*, a_2 é a *média harmônica* entre os inteiros positivos $a_1 = 6$ e $a_3 = 12$. Assim, segue que:

$$a_2 = \frac{2 \cdot 6 \cdot 12}{6 + 12} = \frac{144}{18} = 8.$$

O motivo de *Filolao* chamar o cubo de *harmonia geométrica* se deve ao fato de que este tem 6 faces, 8 vértices e 12 arestas e, pelo resultado do problema 4.2.1, vemos que o número de vértices de um cubo, que é uma figura *geométrica* espacial, é a *média harmônica* entre o seu número de faces e o seu número de arestas. A figura 4.1 a seguir é de um cubo planificado:

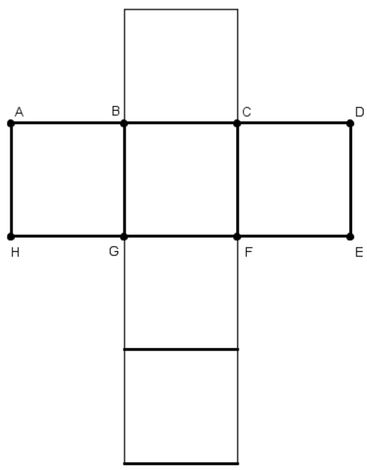

Figura 4.1: A harmonia geométrica do cubo.

As seis faces são os quadrados, os oito vértices são os pontos denotados por letras maiúsculas (os demais pontos de intersecção entre dois segmentos perpendiculares, ao montar o cubo, coincidem com algum dos vértices destacados) e as doze arestas são os segmentos de reta mais espessos e que são lados dos quadrados da *harmonia geométrica* de *Filolao*.

4.3 Pappus, construções geométricas e médias

O grego *Pappus de Alexandria*, que viveu no século IV, é descrito como um matemático habilidoso, elegante e com muitas ideias. Viveu em uma época em que a matemática grega estava em declínio, mas isto não o impediu de, no ano 320 aproximadamente, escrever sua obra *Coleção Matemática*, composta por oito livros. Para mais detalhes sobre a vida e a obra de *Pappus*, duas excelentes referências são [12] e [25].

Focaremos nossa atenção no livro III da *Coleção Matemática*, onde *Pappus* trata da teoria das médias. Ele oferece ao leitor uma construção geométrica simples, porém elegante e muito interessante, onde representa geometricamente em um semicírculo ao mesmo tempo a média aritmética, a média geométrica e a média harmônica entre dois números positivos que são representados por medidas de segmentos de reta. É esta construção geométrica o tema central do problema 4.3.1 disposto a seguir.

Problema 4.3.1. *(Construção geométrica das médias por Pappus) Prove que os segmentos OD, BD e FD construídos conforme orientações a seguir possuem, respectivamente, medidas iguais à média aritmética, geométrica e harmônica dos números dados por* $\overline{AB}$ *e* $\overline{BC}$*. A construção geométrica a ser feita começa ao traçar uma reta suporte t e nela representar dois segmentos de reta adjacentes, cujas medidas são os números* $\overline{AB}$ *e* $\overline{BC}$ *aos quais se quer obter as médias aritmética, geométrica e harmônica, como se vê na figura 4.2 a seguir. Trace o ponto médio O do segmento AC assim construído e, com o compasso centrado em O e com a outra extremidade do compasso em A, trace o semicírculo de diâmetro AC. Por B, trace uma perpendicular ao segmento AC, que intersectará o semicírculo em um ponto que denotaremos por D. Trace o segmento OD, cuja medida é o raio do semicírculo construído. Para finalizar, trace por B uma perpendicular ao segmento OD e denote por F o ponto de intersecção desta perpendicular com o segmento OD.*

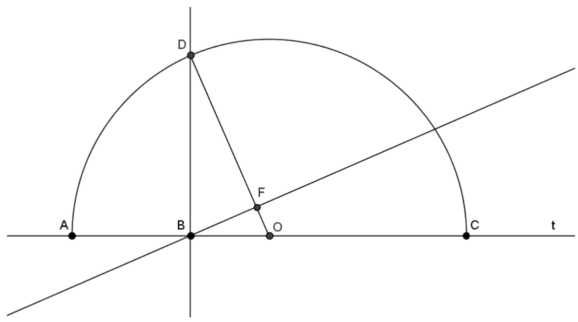

Figura 4.2: Semicírculo de Pappus e as médias.

Demonstração. Inicialmente, provemos que $\overline{OD}$ é a média aritmética de $\overline{AB}$ E $\overline{BC}$. Temos que $\overline{OD} = r$, onde r é o raio do semicírculo construído conforme descrito acima; e claramente $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} = 2r$, de modo que $\overline{AB} + \overline{BC} = 2\overline{OD}$, logo

$$\overline{OD} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{2}$$

e portanto $\overline{OD}$ é a média aritmética de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

Para ver que $\overline{BD}$ é a média geométrica de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, note que o triângulo ADC está inscrito no semicírculo que foi construído e portanto o triângulo ADC é retângulo em D. Sua altura relativa à base AC, que é o segmento BD, satisfaz $\overline{BD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$, pelas relações trigonométricas existentes em um triângulo retângulo. Logo,

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}$$

e assim $\overline{BD}$ é a média geométrica de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

Por fim, provemos que $\overline{FD}$ é a média harmônica de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Para tanto, note que os triângulos DFB e DBO são semelhantes, visto que o ângulo com vértice em D é ângulo comum a estes triângulos; ainda, estes triângulos DFB e DBO possuem, respectivamente, ângulo reto com vértice em F e B. Então, desta relação de semelhança, temos que

$$\frac{\overline{FD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{OD}}$$

e assim

$$\overline{FD} = \frac{\overline{BD}^2}{\overline{OD}}.$$

Como vimos acima que $\overline{BD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$, segue que

$$\overline{FD} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{OD}}.$$

Vimos também que $\overline{OD} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{BC}}{2}$ e portanto temos

$$\overline{FD} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\frac{\overline{AB}+\overline{BC}}{2}}$$

$$\overline{FD} = \frac{2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB} + \overline{BC}},$$

o que comprova o último resultado a ser demonstrado. □

Problema 4.3.2. *Aproveitando a construção geométrica realizada no problema 4.3.1, prove a desigualdade das médias: dados dois números, a média aritmética entre eles é sempre maior ou igual do que sua média geométrica, que por sua vez é sempre maior ou igual do que sua média harmônica.*

Solução. Se $\overline{AB} = \overline{BC}$, o que só ocorre se, e somente se, B e O são pontos coincidentes, trivialmente verificamos que as médias são iguais entre si. Se $\overline{AB} \neq \overline{BC}$, observe que no triângulo retângulo DBO temos que $\overline{OD} > \overline{BD}$, visto que em qualquer triângulo retângulo a hipotenusa é sempre maior que qualquer um dos seus catetos. Analogamente, no triângulo retângulo DBF temos que $\overline{BD} > \overline{FD}$. Destas duas últimas desigualdades, temos que

$$\overline{OD} > \overline{BD} > \overline{FD},$$

e assim concluímos que, dados dois números positivos, aqui representados por $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, a *média aritmética* entre eles é sempre maior ou igual do que sua *média geométrica*, e esta por sua vez é sempre maior ou igual do que sua *média harmônica*.

O livro III da *Coleção Matemática* traz ainda outra construção elegante, desta vez exclusiva para obtenção da *média harmônica*. Esta construção geométrica da *média harmônica* será vista agora, no problema 4.3.3.

Problema 4.3.3. *(Construção geométrica da média harmônica por Pappus). Prove que a medida do segmento OC, construído conforme as instruções a seguir, é a média harmônica dos números dados pelas medidas dos segmentos OA e OB. A construção geométrica a ser feita é a seguinte: dada uma reta suporte t, fixe nela um ponto O e represente na mesma semirreta os pontos A e B, de modo que OA e OB tenham como medidas os números para os quais se quer saber a média harmônica. Sem perda de generalidade, seja* $\overline{OB} > \overline{OA}$*, como indica a figura 4.3 a seguir. Trace por B uma perpendicular à reta t e nela marque os pontos D e E, de modo que* $\overline{BD} = \overline{BE} = k$*, onde k é um número real positivo qualquer. Trace então o segmento OD. Em seguida, trace outra perpendicular à reta t, agora passando por A e seja F o ponto de intersecção entre esta última perpendicular e o segmento OD. Por fim, trace o segmento EF e seja C o ponto de intersecção dos segmentos OB e EF.*

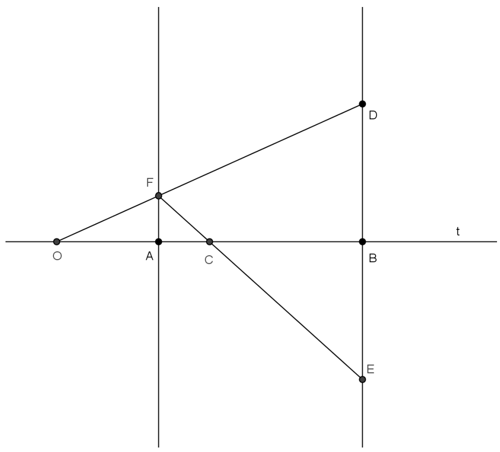

Figura 4.3: Semicírculo de Pappus e a média harmônica.

Demonstração. Os triângulos OAF e OBD são semelhantes, visto que o ângulo com vértice no ponto O é comum a ambos; ainda, o triângulo OAF tem no seu vértice A um ângulo reto, o mesmo ocorrendo no triângulo OBD em seu vértice B. Desta semelhança de triângulos temos que

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{BD}}.$$

Como $\overline{BD} = \overline{BE}$, segue que

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{BE}}. \tag{4.4}$$

Notemos agora que os triângulos ACF e BCE são também semelhantes entre si, visto que possuem um ângulo oposto pelo vértice em C e, ainda, o triângulo ACF tem no seu vértice A um ângulo reto, o que também ocorre no triângulo BCE em relação ao seu vértice B. Desta outra semelhança de triângulos temos que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{BE}}.$$

Como $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA}$ e $\overline{CB} = \overline{OB} - \overline{OC}$, segue que

$$\frac{\overline{OC} - \overline{OA}}{\overline{OB} - \overline{OC}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{BE}}. \tag{4.5}$$

Das igualdades (4.4) e (4.5) temos que

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC} - \overline{OA}}{\overline{OB} - \overline{OC}}.$$

Pela propriedade fundamental das proporções, temos

$$\overline{OB} \cdot (\overline{OC} - \overline{OA}) = \overline{OA} \cdot (\overline{OB} - \overline{OC})$$

$$\overline{OB} \cdot \overline{OC} - \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OA} \cdot \overline{OB} - \overline{OA} \cdot \overline{OC}$$

$$\overline{OB} \cdot \overline{OC} + \overline{OA} \cdot \overline{OC} = \overline{OA} \cdot \overline{OB} + \overline{OA} \cdot \overline{OB}$$

$$\overline{OC}(\overline{OB} + \overline{OA}) = 2 \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB}$$

e assim, dividindo ambos os membros desta última igualdade por $\overline{OB} + \overline{OA} \neq 0$, temos

$$\overline{OC} = \frac{2 \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB}}{\overline{OA} + \overline{OB}}.$$

Assim, demonstramos que a medida do segmento OC, construído como orientou o grande matemático grego *Pappus de Alexandria*, é a média harmônica das medidas dos segmentos OA e OB. $\square$

4.4 Problemas e aplicações com média e progressão harmônica

Quando restrita a apenas três termos desconhecidos, problemas com *progressões harmônicas* se revelam interessantes com o uso da matemática vista no ensino médio. Vejamos alguns desses problemas; os dois primeiros foram extraídos de [12].

Problema 4.4.1. *Se a^2, b^2 e c^2 estão em progressão aritmética, então $b+c, a+c$ e $a+b$ estão em progressão harmônica.*

Solução. Se $a = b = c$ a *progressão aritmética* (a^2, b^2, c^2) é estacionária, bem como a sequência $(b+c, a+c, a+b)$, que trivialmente se vê neste caso que é uma *progressão harmônica.*

Caso contrário, como a^2, b^2 e c^2 formam uma *progressão aritmética*, então existe uma constante real r tal que $c^2 - b^2 = r$, $c^2 - a^2 = 2r$ e $b^2 - a^2 = r$.

De $c^2 - b^2 = r$, temos $(c-b)(b+c) = r$ e, dividindo ambos os lados desta última igualdade por $c - b$, o que é possível pois $b \neq c$, temos $\dfrac{b+c}{1} = \dfrac{r}{c-b}$. Segue que

$$\frac{1}{b+c} = \frac{c-b}{r}. \tag{4.6}$$

Analogamente, de $c^2 - a^2 = 2r$ e $b^2 - a^2 = r$ temos, respectivamente, que

$$\frac{1}{a+c} = \frac{c-a}{2r} \tag{4.7}$$

e

$$\frac{1}{a+b} = \frac{b-a}{r}. \tag{4.8}$$

Provemos que, nesta ordem, os números $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{a+c}, \dfrac{1}{a+b}$ formam uma *progressão aritmética.*

Subtraindo a igualdade (4.6) da igualdade (4.7), temos que

$$\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} = \frac{c-a}{2r} - \frac{c-b}{r} = \frac{c-a-2c+2b}{2r} = \frac{2b-a-c}{2r}.$$

Analogamente, subtraindo a igualdade (4.7) da igualdade (4.8), temos

$$\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c} = \frac{b-a}{r} - \frac{c-a}{2r} = \frac{2b-2a-c+a}{2r} = \frac{2b-a-c}{2r}.$$

Logo, das duas últimas igualdades, temos que

$$\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c}$$

e portanto

$$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}$$

formam nesta ordem uma *progressão aritmética*, visto que a diferença entre o segundo e o primeiro termo é igual à diferença entre o terceiro e o segundo termo. Pela definição 4.1.1, segue que os números $b+c, a+c$ e $a+b$ estão em *progressão harmônica.*

Problema 4.4.2. *Se a, b, c estão em progressão harmônica, então ocorre o mesmo com* $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{a+c}, \frac{c}{a+b}$.

Solução. Sejam $m = \frac{a}{b+c}$ e $n = \frac{c}{a+b}$. Sabemos que interpolar um meio harmônico k entre m e n equivale a formar a *progressão harmônica* (m, k, n). Como k deve ser média harmônica de m e n, temos que $k = \frac{2mn}{m+n}$, logo:

$$k = \frac{2(\frac{a}{b+c})(\frac{c}{a+b})}{\frac{a}{b+c} + \frac{c}{a+b}}$$

$$k = \frac{\frac{2ac}{(b+c)(a+b)}}{\frac{a(a+b)+c(b+c)}{(b+c)(a+b)}}$$

$$k = \frac{2ac}{a(a+b)+c(b+c)} = \frac{2ac}{a^2+ab+bc+c^2}$$

e assim temos que

$$k = \frac{2ac}{a^2+b(a+c)+c^2}. \tag{4.9}$$

Por outro lado, como (a, b, c) é por hipótese uma *progressão harmônica*, então por definição temos que $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ é uma *progressão aritmética*. Então, vale a igualdade:

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$$

e então, temos

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$$
$$\frac{2}{b} = \frac{a+c}{ac}.$$

Portanto, segue que

$$b(a+c) = 2ac. \tag{4.10}$$

Substituindo a igualdade (4.10) tanto no numerador quanto no denominador da expressão à direita da igualdade (4.9), obtemos

$$k = \frac{b(a+c)}{a^2+2ac+c^2}$$

e assim

$$k = \frac{b(a+c)}{(a+c)^2}. \tag{4.11}$$

Note que (a, b, c) estão em *progressão harmônica*, então temos que $b = \dfrac{2ac}{a+c}$ e assim $a + c = \dfrac{2ac}{b}$. Mas, por definição, a *progressão harmônica* dada tem seus termos a, b, c todos diferentes de zero, logo $a+c = \dfrac{2ac}{b} \neq 0$. Dividindo o numerador e o denominador da expressão à direita da igualdade (4.11) acima por $a+c$, obtemos que $k = \dfrac{b}{a+c}$. Portanto, segue que $(m, k, n) = (\dfrac{a}{b+c}, \dfrac{b}{a+c}, \dfrac{c}{a+b})$ é uma *progressão harmônica.*

Problema 4.4.3. *Sejam a, b e c números reais positivos que nesta ordem formam uma progressão harmônica. Se a, b e c representam, respectivamente, o lado, a área da face e o volume de um cubo, demonstre que este cubo é o cubo unitário.*

Solução. Temos que $b = a^2$ e $c = a^3$, logo (a, a^2, a^3) é uma *progressão harmônica* e então a^2 é a média harmônica de a e a^3. Assim, $a^2 = \dfrac{2a \cdot a^3}{a + a^3}$ e segue que

$$2a^4 = a^3 + a^5.$$

Como a é positivo, dividindo a expressão acima por a^3 obtemos:

$$2a = 1 + a^2$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0$$

$$(a - 1)^2 = 0$$

e assim $a = -1$ ou $a = 1$. Novamente, lembremos que a é positivo e portanto $a = -1$ não é resposta deste problema. Consequentemente, o cubo tem lado $a = 1$, área da face $a^2 = 1^2 = 1$ e volume igual $a^3 = 1^3 = 1$, o que comprova que o cubo dado é o cubo unitário.

Finalizamos esta seção com uma aplicação de [12] que mostra que utilizamos a *média harmônica* quando lidamos com grandezas inversamente proporcionais como velocidade e tempo, por exemplo. Mais especificamente, mantendo fixa a distância total percorrida, a *média harmônica* das velocidades deste corpo em todos os trechos parciais da distância total percorrida é igual à velocidade média do corpo em todo percurso, conforme veremos no problema 4.4.4 a seguir para o caso de dois trechos.

Problema 4.4.4. *Um carro viaja à razão de r_1 quilômetros por hora de A até B e então retorna de B a A à razão de r_2 quilômetros por hora. Mostre que a velocidade média do percurso de ida e volta é a média harmônica de r_1 e r_2.*

Solução. Sejam d, t_1 e t_2, respectivamente, a distância total percorrida, o tempo da viagem de A até B e o tempo da viagem de B a A.

Temos que $t_1 = \dfrac{d}{2r_1}$ e $t_2 = \dfrac{d}{2r_2}$. A velocidade média r_m deste carro é tal que $r_m = \dfrac{d}{t_1 + t_2}$, logo segue que:

$$r_m = \frac{d}{\dfrac{d}{2r_1} + \dfrac{d}{2r_2}}.$$

Como $d \neq 0$, dividindo a igualdade acima por d obtemos:

$$r_m = \frac{1}{\dfrac{1}{2r_1} + \dfrac{1}{2r_2}}$$

$$r_m = \frac{1}{\dfrac{r_2}{2r_1r_2} + \dfrac{r_1}{2r_1r_2}}$$

e portanto

$$r_m = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2},$$

logo a velocidade média r_m do percurso de ida e volta é a média harmônica de r_1 e r_2.

4.5 A série harmônica

A *série harmônica*, aqui denominada S_h, é a soma infinita dos inversos dos números inteiros positivos, isto é: $S_h = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$

Se uma série tem soma finita, então esta série é dita *convergente*; caso contrário, a série é dita *divergente*. A série vista no problema 3.3.6, de Zenão de Eléia e o paradoxo de Aquiles, é *convergente*. Veremos aqui que a *série harmônica* é *divergente*.

Percebe-se facilmente que os termos da *série harmônica* decrescem tendendo para zero, dando a impressão de que esta série é igual a uma constante, como a série vista no citado problema 3.3.6. De fato, somando os primeiros trinta milhões de termos da *série harmônica* o resultado é um número menor que 18. Mas esta impressão de convergência não se confirma, e o matemático francês *Nicole Oresme* $(1325 - 1382)$ foi o primeiro a provar tal fato.

Nicole Oresme é considerado por alguns historiadores como o maior matemático do século XIV. Acredita-se que *Oresme* seja precursor da geometria analítica, importante ramo da matemática estudada no ensino médio. Ao lidar com a *série de Suiseth*, que abordaremos no capítulo 5, *Oresme* também se revela como precursor da análise infinitesimal, ramo de muita importância da matemática de nível superior. Conforme afirmado anteriormente, *Oresme* teve sucesso ao demonstrar que a *série harmônica* é *divergente*, o que nos revela o quanto é fundamental a utilização do raciocínio lógico para verificar algo que é impossível constatar de outro modo.

A *série harmônica diverge*, pois sendo k um número natural fixo porém arbitrário com $k \geq 2$, como temos $2^{k-1} + m \leq 2^k$, para todo m natural tal que $1 \leq m \leq 2^{k-1}$, segue que $\dfrac{1}{2^{k-1}+m} \geq \dfrac{1}{2^k}$; assim ao agruparmos todos os seus termos da forma $\dfrac{1}{2^{k-1}+1}$ até $\dfrac{1}{2^k}$, para todo $k \geq 2$, obtemos:

$$S_h = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}) + \dots$$
$$S_h \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}) + \dots$$

Notando que cada um dos parênteses acima é igual a $\frac{1}{2}$, pois a soma de 2^{k-1} parcelas iguais de $\frac{1}{2^k}$ é igual a $\frac{2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2}$, segue que:

$$S_h \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

Como a série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ é claramente divergente, uma vez que podemos somar infinitas parcelas iguais a $\frac{1}{2}$, consequentemente a *série harmônica* diverge.

Para maiores detalhes sobre a lenta divergência da *série harmônica*, recomendamos a leitura de [8].

A retirada de uma quantidade finita de termos da *série harmônica* obviamente não fará a mesma convergir. Entretanto, provaremos que uma retirada infinita de termos da *série harmônica* pode implicar na convergência da série remanescente. A ideia que será exposta é baseada em [28] e é válida para qualquer número formado por um único algarismo.

Consideremos a série que denominaremos por S_7, formada pela série harmônica menos todos os elementos que possuem o algarismo 7 no denominador; assim, $\frac{1}{7}, \frac{1}{37}, \frac{1}{71}$ e $\frac{1}{60738}$ são exemplos de termos que não fazem parte de S_7. Temos que:

$$S_7 = \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \cdots + \frac{1}{26} + \frac{1}{28} + \dots$$

Cada um dos 8 primeiros termos, onde os denominadores possuem apenas um algarismo, é menor ou igual a 1 e assim $\frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} < 8$.

Analogamente, cada um dos $8 \cdot 9$ termos seguintes, onde os denominadores possuem somente dois algarismos, é menor ou igual a $\frac{1}{10}$ e portanto a soma destes termos é menor que $8 \cdot 9 \cdot \frac{1}{10} = 8 \cdot \frac{9}{10}$.

O mesmo raciocínio vale para cada um dos $8 \cdot 9 \cdot 9$ termos seguintes, onde os denominadores possuem exatos três algarismos, é menor ou igual a $\frac{1}{100}$ e portanto a soma destes termos é menor que $8 \cdot 9^2 \cdot \frac{1}{100} = 8 \cdot \frac{9^2}{10^2}$.

Prosseguindo este raciocínio para os demais termos da série S_7, vemos que

$$S_7 < 8 + 8 \cdot \frac{9}{10} + 8 \cdot \frac{9^2}{10^2} + \dots$$

Então, como $8+8\cdot\frac{9}{10}+8\cdot\frac{9^2}{10^2}+\dots$ é a soma dos infinitos termos de uma *progressão geométrica* tal que $a_1 = 8$ e razão $q = \frac{9}{10}$, segue pela proposição 3.3.2 que

$$8 + 8 \cdot \frac{9}{10} + 8 \cdot \frac{9^2}{10^2} + \dots = \frac{8}{1 - \frac{9}{10}} = 80$$

e assim $S_7 < 80$, logo S_7 converge.

Vejamos agora uma interessante discussão sobre o motivo da série ser denominada de *série harmônica.* Inicialmente, note que a *média harmônica* de dois números dados é igual ao inverso da *média aritmética* dos seus inversos. De fato, pela definição 4.1.2, temos que dados a e b, sua *média harmônica* H é tal que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{H} + \frac{1}{H} = \frac{2}{H}$, logo:

$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{H}{2}.$$

Multiplicando por 2 a expressão acima, temos

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = H,$$

e portanto

$$H = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}}.$$

A *série harmônica* tem esse nome pois seu termo geral $\frac{1}{n}$ é igual à *média harmônica* do seu antecessor $\frac{1}{n-1}$ e seu sucessor $\frac{1}{n+1}$. Com efeito, como vimos antes, a *média harmônica* de dois números dados é igual ao inverso da *média aritmética* dos seus inversos; tomando os inversos do antecessor e do sucessor de $\frac{1}{n}$, dados por $n - 1$ e $n + 1$, respectivamente, a *média aritmética* entre eles é igual a $\frac{(n-1)+(n+1)}{2} = n$, cujo inverso é $\frac{1}{n}$, que é o termo geral da *série harmônica.* Isso explica o motivo para a denominação *série harmônica*, mas é natural perguntar agora o motivo da *média harmônica* ter esse nome.

A origem é incerta, mas historiadores acreditam que o mais provável é que os *pitagóricos* tenham assim a denominado. Existem registros de que dois *pitagóricos*, *Arquitas* e *Hipaso*, tenham mudado o nome da média de *subcontrária*, designação inicial, para a atual, *harmônica.* Outras possibilidades para a origem, bem remotas, são o Egito e a

Babilônia. Mas o motivo da denominação é conhecido: a *média harmônica* aparece na consideração dos tons de um monocórdio. O dicionarista Aurélio Buarque de Holanda Ferreira define o monocórdio como o instrumento composto de uma caixa de ressonância, sobre a qual se estende uma corda que fica apoiada sobre dois cavaletes móveis, e que já era usado no tempo de Pitágoras para o estudo e cálculo das relações entre as vibrações sonoras.

A matemática explica melhor o que ocorre. Considere três tons sonoros diferentes de um monocórdio, o primeiro produzido quando a corda é esticada em todo seu tamanho, aqui considerado 1 unidade de comprimento; a oitava, que é quando a corda é reduzida à $\frac{1}{2}$ de comprimento; e a quinta, que é quando a corda tem $\frac{2}{3}$ de comprimento. A *média harmônica* H dos números 1 e $\frac{1}{2}$ é, de acordo com a definição 4.1.2, igual a:

$$H = \frac{2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Então, $\frac{2}{3}$ é a *média harmônica* de 1 e $\frac{1}{2}$, de modo que a frequência da quinta é a *média harmônica* das outras duas frequências. A palavra *harmônica* tem a ver, portanto, com a harmonia do som intermediário relativo aos outros dois sons.

Isso explica também a *proporção musical*: dados dois inteiros positivos a e b, os *pitagóricos* descobriram uma importante relação, chamada por eles de *proporção musical*, entre a, b, sua *média aritmética* A e sua *média harmônica* H, expressa por $\frac{a}{A} = \frac{H}{b}$.

Encerramos esta seção verificando a validade da *proporção musical*. Para tal, calculemos a *média harmônica* H por esta proporção; então, devemos encontrar como resultado $H = \frac{2ab}{a+b}$. Temos $A = \frac{a+b}{2}$, logo segue que:

$$\frac{a}{\frac{a+b}{2}} = \frac{H}{b}$$

$$\frac{2a}{a+b} = \frac{H}{b}$$

e assim obtemos

$$H = \frac{2ab}{a+b},$$

comprovando a validade da *proporção musical*.

4.6 A progressão harmônica de segunda ordem e o triângulo harmônico

Assim como foi feito em seções anteriores, podemos definir *progressão harmônica de ordem k*. Novamente, concentraremos a atenção na ordem dois, isto é, abordaremos a *progressão harmônica de segunda ordem*.

Definição 4.6.1. *Uma progressão harmônica de ordem k é uma sequência finita ou infinita de números, todos diferentes de zero, tais que seus inversos formam uma progressão aritmética de ordem k.*

Então, tomando $k = 2$, temos que uma *progressão harmônica de segunda ordem* é uma sequência finita ou infinita de números, todos diferentes de zero, tais que seus inversos formam uma *progressão aritmética de segunda ordem*.

Seja (h_n) uma *progressão harmônica de segunda ordem* qualquer e (a_n), a *progressão aritmética de segunda ordem* associada a (h_n). Ainda, seja (b_n) a *progressão aritmética de primeira ordem* de razão r associada a (a_n). Como o termo geral da *progressão aritmética de segunda ordem* é, conforme a proposição 2.4.1, expresso por $a_n = a_1 + b_1(n-1) + \dfrac{(n-1)(n-2)r}{2}$, segue que

$$h_n = \frac{1}{a_1 + b_1(n-1) + \dfrac{(n-1)(n-2)r}{2}}. \tag{4.12}$$

O problema a seguir é facilmente resolvido com a utilização da igualdade expressa em (4.12).

Problema 4.6.1. *Seja (a_n) a progressão aritmética de segunda ordem tal que $(a_n) = (2, 6, 12, 20, \dots)$, a qual está associada a progressão aritmética de primeira ordem $(b_n) = (4, 6, 8, 10, \dots)$. Determine o termo geral da progressão harmônica de segunda ordem (h_n) associada a (a_n), bem como seu sétimo termo.*

Solução. Temos $a_1 = 2$, $b_1 = 4$ e $r = b_2 - b_1 = 6 - 4 = 2$. Pela igualdade (4.12), segue que

$$h_n = \frac{1}{2 + 4(n-1) + \dfrac{(n-1)(n-2)2}{2}}.$$

Desenvolver algebricamente esta última expressão resulta em

$$h_n = \frac{1}{2 + 4n - 4 + n^2 - 3n + 2}$$

e portanto o termo geral h_n é dado por

$$h_n = \frac{1}{n^2 + n}. \tag{4.13}$$

De posse da igualdade (4.13), vemos sem dificuldade que o sétimo termo de (h_n) é tal que

$$h_7 = \frac{1}{7^2 + 7} = \frac{1}{56}.$$

O matemático alemão *Gottfried Wilhelm Leibniz* $(1646 - 1716)$ é, às vezes, considerado o último sábio a conseguir conhecimento universal, por ter estudado matemática, direito, teologia e filosofia na universidade. Ele contribuiu significativamente nestas áreas e também em história, diplomacia, política e metafísica. Em matemática, *Leibniz* é considerado personagem principal no descobrimento do cálculo diferencial e integral, área da matemática de nível superior. Começou a produzir em matemática quando estudou séries e, em especial, calculou várias séries através do *triângulo harmônico.*

O *triângulo harmônico* que analisaremos agora e que fascinou *Leibniz* é da seguinte forma: na primeira coluna, de cima para baixo, são escritos os termos da *série harmônica*, do maior para o menor; na segunda coluna, cada elemento é a diferença entre o elemento imediatamente acima e o elemento ao lado, ambos da coluna à esquerda mais próxima; para as demais colunas, o mesmo raciocínio da segunda coluna se aplica. A figura 4.4 a seguir mostra os primeiros elementos do *triângulo harmônico.*

Por exemplo, o terceiro elemento da segunda coluna é $\frac{1}{12}$, pois $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$. Repare que $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{6}$ são os elementos que estão, respectivamente, imediatamente acima e ao lado da primeira coluna, que é a coluna da esquerda mais próxima em relação à segunda coluna.

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1} & & & & & & \\[6pt]
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & \\[6pt]
\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & & & & \\[6pt]
\frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & & & \\[6pt]
\frac{1}{5} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \frac{1}{20} & \frac{1}{5} & & \\[6pt]
\frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60} & \frac{1}{60} & \frac{1}{30} & \frac{1}{6} & \\[6pt]
\frac{1}{7} & \frac{1}{42} & \frac{1}{105} & \frac{1}{140} & \frac{1}{105} & \frac{1}{42} & \frac{1}{7} \\[6pt]
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Figura 4.4: Triângulo harmônico.

Analisemos o *triângulo harmônico*; para tanto, denotemos por k a posição da coluna do *triângulo harmônico*, da esquerda para a direita; e denotemos por n, a posição, considerada de cima para baixo, do elemento localizado na k-ésima coluna do *triângulo harmônico*. Assim, um elemento qualquer do *triângulo harmônico* pode ser denotado por $T_{n,k}$. Por exemplo, $T_{2,3}$ denota o segundo elemento da terceira coluna do *triângulo harmônico*, conforme se pode ver na figura 4.5.

$$\begin{array}{ccccccc}
T_{1,1} & & & & & & \\
T_{2,1} & T_{1,2} & & & & & \\
T_{3,1} & T_{2,2} & T_{1,3} & & & & \\
T_{4,1} & T_{3,2} & T_{2,1} & T_{1,4} & & & \\
T_{5,1} & T_{4,2} & T_{3,3} & T_{2,4} & T_{1,5} & & \\
T_{6,1} & T_{5,2} & T_{4,3} & T_{3,4} & T_{2,5} & T_{1,6} & \\
T_{7,1} & T_{6,2} & T_{5,3} & T_{4,4} & T_{3,5} & T_{2,6} & T_{1,7} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Figura 4.5: Triângulo harmônico conforme notação utilizada.

Com esta notação, os termos do *triângulo harmônico* são, por definição, tais que

$$T_{n,k} = T_{n,k-1} - T_{n+1,k-1}. \tag{4.14}$$

A proposição 4.6.1 permite calcular um termo qualquer do *triângulo harmônico* somente em função de n e k. Porém, precisamos de duas definições antes desta proposição, o que será feito agora.

Definição 4.6.2. *Sendo j um número inteiro positivo, definimos o fatorial de j, ao qual denotamos por $j!$, como o número $j! = j \cdot (j-1) \dots 2 \cdot 1$. Se $j = 0$ ou $j = 1$ então definimos $j! = 1$.*

Definição 4.6.3. *Dados dois números naturais a e b, com $b \leq a$, denominamos de número binomial ao qual denotamos por $\binom{a}{b}$ o número $\binom{a}{b} = \dfrac{a!}{b!(a-b)}$.*

Proposição 4.6.1. *Seja $T_{n,k}$ um elemento qualquer do triângulo harmônico. Temos que*

$$T_{n,k} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\binom{n+k-1}{n}}$$

Demonstração. Provemos por indução em k, deixando n fixo porém arbitrário. Para $k = 1$, temos que:

$$T_{n,1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\binom{n+1-1}{n}}$$

$$T_{n,1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\binom{n}{n}}$$

e, como $\binom{n}{n} = 1$, segue que

$$T_{n,1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{n},$$

verificando assim a validade do caso $k = 1$, pois os elementos da primeira coluna são os termos da *série harmônica*, que são da forma $\frac{1}{n}$.

Se, para algum número natural k temos válida a igualdade $T_{n,k} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\binom{n+k-1}{n}}$, então basta mostrar que é válida também a igualdade $T_{n,k+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\binom{n+k}{n}}$, para que a proposição fique totalmente demonstrada.

Temos, pela igualdade (4.14), que $T_{n,k} = T_{n,k-1} - T_{n+1,k-1}$, logo

$$T_{n,k+1} = T_{n,k} - T_{n+1,k}. \tag{4.15}$$

Como por hipótese de indução temos que $T_{n,k} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\binom{n+k-1}{n}}$, também temos que $T_{n+1,k} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\binom{n+1+k-1}{n+1}} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\binom{n+k}{n+1}}$, logo dessas duas últimas igualdades e também de (4.15) segue que

$$T_{n,k+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\binom{n+k-1}{n}} - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\binom{n+k}{n+1}}. \tag{4.16}$$

A definição 4.6.3, aplicada na igualdade (4.16), nos permite afirmar que

$$T_{n,k+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}} - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\frac{(n+k)!}{(n+1)!(k-1)!}}.$$

Notando que $\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\frac{1}{k}} = 1$, prosseguindo com os cálculos algébricos temos:

$$T_{n,k+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}} \cdot \frac{n+k}{n+k} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\frac{1}{k}} - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\frac{(n+k)!}{(n+1)n!(k-1)!}} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\frac{1}{k}}.$$

Na primeira parcela da diferença, agrupando as expressões $\frac{1}{n+k}$ e $\frac{1}{\frac{1}{k}}$ nos fatoriais $\frac{1}{(n+k-1)!}$ e $\frac{1}{\frac{1}{(k-1)!}}$, respectivamente; e, na segunda parcela da diferença, simplificando a expressão $n-1$ e agrupando $\frac{1}{\frac{1}{k}}$ no fatorial $\frac{1}{\frac{1}{(k-1)!}}$, obtemos

$$T_{n,k+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\frac{(n+k)!}{n!k!}} \cdot \frac{n+k}{k} - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\frac{(n+k)!}{n!k!}} \cdot \frac{n}{k}.$$

Novamente, da definição 4.6.3, temos $\dfrac{(n+k)!}{n!k!} = \binom{n+k}{n}$ e assim

$$T_{n,k+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\binom{n+k}{n}} \cdot \frac{n+k}{k} - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\binom{n+k}{n}} \cdot \frac{n}{k}.$$

Colocando $\dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{\binom{n+k}{n}}$ em evidência, temos

$$T_{n,k+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\binom{n+k}{n}} (\frac{n+k}{k} - \frac{n}{k})$$

$$T_{n,k+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\binom{n+k}{n}} (\frac{n+k-n}{k})$$

$$T_{n,k+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\binom{n+k}{n}} (\frac{k}{k})$$

$$T_{n,k+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\binom{n+k}{n}} \cdot 1,$$

portanto

$$T_{n,k+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\binom{n+k}{n}}$$

e a proposição está demonstrada por completo. □

Corolário 4.6.1. *O termo geral do triângulo harmônico pode ser expresso também como*

$$T_{n,k} = \frac{(k-1)!}{n \cdot (n+1) \ldots (n+(k-1))}.$$

Demonstração. Basta notar que da proposição 4.6.1 temos $T_{n,k} = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{\binom{n+k-1}{n}}$, logo

$$T_{n,k} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\dfrac{(n+(k-1))!}{n!(k-1)!}}$$

$$T_{n,k} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n!(k-1)!}{(n+(k-1))!}$$

$$T_{n,k} = \frac{(n-1)!(k-1)!}{(n+(k-1))!}$$

$$T_{n,k} = \frac{(k-1)!}{n \cdot (n+1) \ldots (n+(k-1))},$$

c.q.d. □

O corolário a seguir é de fundamental importância em nossos estudos nesta seção, pois relaciona o *triângulo harmônico* com a *progressão harmônica de ordem k*.

Corolário 4.6.2. *Os elementos da k-ésima coluna do triângulo harmônico formam uma progressão harmônica de ordem k.*

Demonstração. Como sabemos que (a_n) é uma *progressão aritmética de ordem* k se, e somente se, a_n pode ser dado por um polinômio de grau k em n, então (h_n) é uma *progressão harmônica de ordem* k se, e somente se, h_n pode ser expresso por uma fração de numerador igual a 1 e denominador dado por um polinômio de grau k em n. Sem perda de generalidade, esta afirmação permanece válida se multiplicarmos por uma constante todos os termos da *progressão aritmética de ordem* k.

Do corolário 4.6.1, temos que $T_{n,k} = \dfrac{(k-1)!}{n \cdot (n+1) \ldots (n+(k-1))}$, isto é, $T_{n,k}$ é igual à uma fração onde o numerador é um inteiro positivo dado por $(k-1)!$ e com denominador igual a um polinômio de grau k em n. Segue então que os elementos da k-ésima coluna do *triângulo harmônico* formam uma *progressão harmônica de ordem* k. □

A propriedade 4.6.2 revela que a comutatividade é válida para os índices dos termos do *triângulo harmônico*, como veremos a seguir.

Proposição 4.6.2. *Sejam $T_{n,k}$ e $T_{k,n}$ termos quaisquer do triângulo harmônico. Temos que $T_{n,k} = T_{k,n}$, isto é, a troca dos índices n e k não altera o valor do termo.*

Demonstração. Pela proposição 4.6.1, temos que $T_{k,n} = \dfrac{1}{k} \cdot \dfrac{1}{\binom{k+n-1}{k}}$, logo

$$T_{k,n} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\binom{n+k-1}{k}} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}}$$

$$T_{k,n} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\dfrac{n(n+k-1)!}{k(k-1)!n(n-1)!}} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{k}} \cdot \frac{1}{\dfrac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}}.$$

Como $\dfrac{1}{k} \cdot \dfrac{1}{\dfrac{1}{k}} = 1$, segue que

$$T_{k,n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\dfrac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\binom{n+k-1}{n}}$$

e assim, utilizando novamente a proposição 4.6.1 na última igualdade aqui obtida, temos que $T_{k,n} = T_{n,k}$. □

Encerramos este capítulo com a maior motivação de *Leibniz* em relação ao *triângulo harmônico*: o cálculo de séries infinitas. Para entender melhor, vejamos a última proposição desta seção agora.

Proposição 4.6.3. *A soma $S_{n,k}$ dos n primeiros termos da k-ésima coluna, de cima para baixo, com $k > 1$, é tal que*

$$S_{n,k} = \frac{1}{k-1} - \frac{(k-2)!}{(n+1)\cdot(n+2)\ldots(n+(k-1))}.$$

Demonstração. Da igualdade (4.14) temos que

$$T_{1,k} = T_{1,k-1} - T_{2,k-1}$$

$$T_{2,k} = T_{2,k-1} - T_{3,k-1}$$

$$\vdots$$

$$T_{n,k} = T_{n,k-1} - T_{n+1,k-1}.$$

Somando estas n igualdades membro a membro, temos:

$$T_{1,k} + T_{2,k} + \cdots + T_{n,k} = (T_{1,k-1} + T_{2,k-1} + \cdots + T_{n,k-1}) - (T_{2,k-1} + \cdots + T_{n+1,k-1}).$$

Como $S_{n,k} = T_{1,k} + T_{2,k} + \cdots + T_{n,k}$, segue que

$$S_{n,k} = (T_{1,k-1} + T_{2,k-1} + \cdots + T_{n,k-1}) - (T_{2,k-1} + T_{2,k-1} + \cdots + T_{n+1,k-1}).$$

Notando que esta é uma soma telescópica, chegamos a

$$S_{n,k} = T_{1,k-1} - T_{n+1,k-1}. \tag{4.17}$$

Calculando agora $T_{1,k-1}$, pelo corolário 4.6.1, temos que

$$T_{1,k-1} = \frac{(k-1-1)!}{1\cdot 2\ldots(1+(k-1-1))} = \frac{(k-2)!}{1\ldots(k-1)} = \frac{(k-2)!}{(k-1)!} = \frac{(k-2)!}{(k-1)(k-2)!}$$

e assim

$$T_{1,k-1} = \frac{1}{k-1}. \tag{4.18}$$

Analogamente, calculando agora $T_{n+1,k-1}$, pelo corolário 4.6.1, temos que

$$T_{n+1,k-1} = \frac{(k-1-1)!}{(n+1)\cdot(n+2)\ldots(n+1+(k-1-1))}$$

e portanto

$$T_{n+1,k-1} = \frac{(k-2)!}{(n+1)\cdot(n+2)\ldots(n+(k-1))}. \tag{4.19}$$

Substituindo as igualdades (4.18) e (4.19) na igualdade (4.17), obtemos que

$$S_{n,k} = \frac{1}{k-1} - \frac{(k-2)!}{(n+1)\cdot(n+2)\ldots(n+(k-1))},$$

o que encerra a demonstração. $\square$

Voltando a falar das séries infinitas calculadas por *Leibniz*, note que quando n tende ao infinito, a soma da série infinita S formada pela k-ésima coluna do *triângulo harmônico* é tal que $S = \dfrac{1}{k-1}$, visto que quando n tende ao infinito, a parcela

$$\frac{(k-2)!}{(n+1)\cdot(n+2)\ldots(n+(k-1))}$$

da soma parcial S_n tende a zero. Desta forma, *Leibniz* obteve o valor de convergência para infinitas séries; em particular, por exemplo, temos que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots=1,$$

referente à soma de todos os termos da segunda coluna do *triângulo harmônico*; ainda, mais um exemplo, desta vez se referindo à soma de todos os termos da quinta coluna do *triângulo harmônico*:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{30}+\frac{1}{105}+\cdots=\frac{1}{4}.$$

Capítulo 5

Progressão aritmético-geométrica

5.1 Definição e ideias iniciais

Definição 5.1.1. *Sejam a_1, r, q constantes reais; a progressão aritmético-geométrica é definida como a sequência infinita que é formada quando os termos consecutivos de uma progressão aritmética qualquer dada por $(a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, \dots)$ são ordenadamente multiplicados por termos consecutivos da progressão geométrica de primeiro termo igual a 1, dada por $(1, q, q^2, \dots)$.*

Este raciocínio continua válido ao se definir a progressão aritmético-geométrica com k termos, ressaltando que neste caso as progressões aritmética e geométrica associadas são dadas, respectivamente, por $(a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, \dots, a_1 + (k-1)r)$ e $(1, q, q^2, \dots, q^{k-1})$.

Os números r e q são denominados, respectivamente, *razão aritmética* e *razão geométrica* da *progressão aritmético-geométrica.*

Assim definida, a *progressão aritmético-geométrica* é a *sequência* cujos termos são da forma

$$a_1, (a_1 + r)q, (a_1 + 2r)q^2, \dots$$

observando também que, da definição, o primeiro termo da *progressão aritmético-geométrica* sempre é igual ao primeiro termo da *progressão aritmética* que lhe é associada.

Sabemos da igualdade (2.1) que o termo geral de uma *progressão aritmética* genérica é $a_n = a_1+(n-1)r$ e, da igualdade (3.2), também temos a expressão do termo geral de uma *progressão geométrica* qualquer, dado por $b_n = b_1 q^{n-1}$. Como no estudo das *progressões aritmético-geométricas* por definição o primeiro termo da sua *progressão geométrica* associada é igual a 1, segue que seu termo geral é $b_n = q^{n-1}$.

Destes fatos e da definição 5.1.1, temos que o termo geral A_n de uma *progressão aritmético-geométrica* é expresso por $A_n = [a_1 + (n-1)r]q^{n-1}$.

Note que, por esta última expressão, para $n = 1$, temos $A_1 = a_1$, ou seja o primeiro termo da *progressão aritmético-geométrica* é igual ao primeiro termo da sua *progressão* *aritmética* associada; assim, o termo geral de uma *progressão aritmético-geométrica* é

$$A_n = [A_1 + (n-1)r]q^{n-1}. \tag{5.1}$$

Resolver o problema a seguir revela o quanto a igualdade (5.1) é útil; mais ainda, esta igualdade e outras deste tipo, constantes deste e do próximo capítulo, são fundamentais para resolver intrincados desafios típicos dos problemas de olimpíadas de matemática ou questões relativas às ideias básicas de teoria dos números, cujos rudimentos (como divisibilidade, por exemplo) já são conhecidos pelos estudantes do ensino médio.

Problema 5.1.1. *Prove que o sétimo termo da progressão aritmético-geométrica*

$$(A_n) = (3, 21, 99, 405, \dots)$$

é um cubo perfeito cuja base também é um cubo perfeito.

Solução. Determinemos A_7. Assim, pela equação (5.1), temos para $n = 2$ que

$$A_2 = [A_1 + (2-1)r]q^{2-1} = (A_1 + r)q.$$

Como $A_1 = 3$ e $A_2 = 21$, segue que

$$21 = (3+r)q. \tag{5.2}$$

A equação (5.1), agora para $n = 3$, nos fornece que

$$A_3 = [A_1 + (3-1)r]q^{3-1} = (A_1 + 2r)q^2.$$

Como $A_1 = 3$ e $A_3 = 99$, segue que

$$99 = (3+2r)q^2. \tag{5.3}$$

Elevando a equação (5.2) ao quadrado, temos

$$441 = (3+r)^2q^2. \tag{5.4}$$

Dividindo membro a membro a equação (5.4) pela (5.3), temos que

$$\frac{441}{99} = \frac{(3+r)^2q^2}{(3+2r)q^2}.$$

Note que $q \neq 0$, pois a *progressão aritmético-geométrica* não é nula; assim, cancelando q^2 e desenvolvendo o produto notável na fração à direita da igualdade acima e simplificando os números da fração à esquerda da igualdade, temos:

$$\frac{49}{11} = \frac{9 + 6r + r^2}{3+2r},$$

logo
$$11(9+6r+r^2)=49(3+2r)$$
e, após alguns cálculos algébricos, chegamos à equação polinomial do segundo grau dada por
$$11r^2-32r-48=0,$$
cujas raízes são 4 e $-\dfrac{12}{11}$.

Se $r=-\dfrac{12}{11}$, pela igualdade (5.2) temos que $q=11$. A equação (5.1) para $n=4$ nos afirma que

$$A_4=[A_1+(4-1)r]q^{4-1}=(A_1+3r)q^3=(3+3(-\frac{12}{11}))11^3=-363.$$

Porém, $A_4=405$, absurdo! Segue que $r=4$. Pela igualdade (5.2), se $r=4$ então $q=3$. Portanto, pela igualdade (5.1), o termo geral da *progressão aritmético-geométrica* dada é tal que
$$A_n=[3+(n-1)4]3^{n-1}=(4n-1)3^{n-1}$$
e assim
$$A_7=(4\cdot 7-1)3^{7-1}=27\cdot 3^6=19683.$$

Como $19683=3^9=(3^3)^3$, segue que o sétimo termo da progressão aritmético-geométrica $(A_n)=(3,21,99,405,\dots)$ é um cubo perfeito cuja base $3^3=27$ também é um cubo perfeito.

5.2 Propriedades da progressão aritmético-geométrica

1. Seja n um número natural fixo, porém arbitrário, tal que $n>1$. O n-ésimo termo de uma *progressão aritmético-geométrica* se relaciona com seu antecessor e com as razões aritmética e geométrica da *progressão aritmético-geométrica* de acordo com a igualdade $A_n=qA_{n-1}+rq^{n-1}$.

   Demonstração. Pela igualdade (5.1), temos que $A_n=[A_1+(n-1)r]q^{n-1}$, logo subtraindo e somando r dentro dos colchetes desta expressão temos:

$$A_n=[A_1+(n-1)r-r+r]q^{n-1}$$
$$A_n=[A_1+(n-2)r+r]q^{n-1}$$
$$A_n=[A_1+(n-2)r]q^{n-1}+rq^{n-1}$$
$$A_n=[A_1+(n-2)r]q^{n-2}q+rq^{n-1}.$$

Notando que $[A_1 + (n-2)r]q^{n-2} = A_{n-1}$, segue que

$$A_n = qA_{n-1} + rq^{n-1},$$

o que encerra a demonstração. □

2. Qualquer *progressão aritmética*, bem como qualquer *progressão geométrica*, pode ser vista como um caso particular da *progressão aritmético-geométrica.*

Demonstração. Tomando $q = 1$ na equação (5.1), temos que

$$A_n = [A_1 + (n-1)r]1^{n-1} = A_1 + (n-1)r,$$

logo qualquer *progressão aritmética* pode ser vista como o caso particular da *progressão aritmético-geométrica* onde $q = 1$.

Tomando $r = 0$ na equação (5.1), temos que

$$A_n = [A_1 + (n-1)\cdot 0]q^{n-1} = A_1 q^{n-1},$$

logo qualquer *progressão geométrica* pode ser vista como o caso particular da *progressão aritmético-geométrica* onde $r = 0$. □

Problema 5.2.1. *Prove, de dois modos distintos, que qualquer termo da progressão aritmético-geométrica* $(A_n) = (3, 21, 99, 405, \dots)$*, do problema 5.1.1, sempre é divisível por* 3*.*

Solução. Uma maneira para provar que um termo qualquer da *progressão aritmético-geométrica* dada sempre é divisível por 3 é com o uso da primeira propriedade de uma *progressão aritmético-geométrica* vista acima. Antes, note que, da solução do problema 5.1.1, temos que $A_1 = 3$, $r = 4$ e $q = 3$, logo as progressões associadas à *progressão aritmético-geométrica* são formadas exclusivamente por números inteiros. Em particular, qualquer antecessor de um termo também é inteiro. Da citada propriedade, temos que $A_n = qA_{n-1} + rq^{n-1}$, logo ambas as parcelas tem o fator $q = 3$ em comum; segue que A_n é divisível por 3.

Outra maneira de resolver este problema é considerando a solução do problema 5.1.1, onde vimos que um termo da *progressão aritmético-geométrica* dada é conforme a expressão $A_n = (4n-1)3^{n-1}$, logo temos:

$$A_n = (3n + (n-1))3^{n-1} = 3n \cdot 3^{n-1} + (n-1)3^{n-1}$$

$$A_n = 3(n \cdot 3^{n-1} + (n-1)3^{n-2})$$

e portanto como n é inteiro segue que A_n é divisível por 3.

A proposição a seguir permite calcular a soma dos n primeiros termos de uma *progressão aritmético-geométrica* qualquer.

Proposição 5.2.1. *A soma S_n dos n primeiros termos de uma progressão aritmético-geométrica é dada pela expressão*

$$S_n = \frac{A_1(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq(1-nq^{n-1}+(n-1)q^n)}{1-q^2}.$$

Demonstração. Seja (A_n) uma *progressão aritmético-geométrica* qualquer, cuja soma dos seus n primeiros termos seja denotada por S_n.

Assim, $S_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1} + A_n$. Ainda, sejam r e q, respectivamente, a *razão aritmética* e a *razão geométrica* da *progressão aritmético-geométrica* dada. Pela igualdade (5.1), temos que

$$S_n = A_1 + (A_1 + r)q + \cdots + [A_1 + (n-1)r]q^{n-1}. \tag{5.5}$$

Distribuindo as potências de q na igualdade (5.5), segue que

$$S_n = A_1 + A_1q + rq + \cdots + A_1q^{n-1} + (n-1)rq^{n-1}$$

e assim, agrupando nesta última expressão de S_n as parcelas que possuem simultaneamente os fatores A_1 e q, e também agrupando as parcelas que possuem simultaneamente os fatores r e q, segue que

$$S_n = A_1 + (A_1q + \cdots + A_1q^{n-1}) + (rq + \cdots + (n-1)rq^{n-1}). \tag{5.6}$$

Agora, multiplicando por q ambos os membros da igualdade (5.6), temos:

$$qS_n = A_1q + q(A_1q + \cdots + A_1q^{n-1}) + q(rq + \cdots + (n-1)rq^{n-1}).$$

Distribuindo q nas duas últimas parcelas à direita, a expressão resulta em

$$qS_n = A_1q + (A_1q^2 + \cdots + A_1q^n) + (rq^2 + \cdots + (n-1)rq^n)$$

e portanto

$$qS_n = (A_1q + A_1q^2 + \cdots + A_1q^n) + (rq^2 + \cdots + (n-1)rq^n). \tag{5.7}$$

Subtrairemos membro a membro a igualdade (5.7) da igualdade (5.6). Para facilitar a compreensão dos cálculos que serão feitos, faremos dois passos em separado. Assim, temos que

$$(A_1q + \cdots + A_1q^{n-1}) - (A_1q + A_1q^2 + \cdots + A_1q^n) = -A_1q^n. \tag{5.8}$$

E, sendo W_1 tal que

$$W_1 = (rq + 2rq^2 + \cdots + (n-1)rq^{n-1}) - (rq^2 + 2rq^3 + \cdots + (n-2)rq^{n-1} + (n-1)rq^n),$$

temos que

$$W_1 = rq + rq^2 + rq^3 + \cdots + rq^{n-1} - (n-1)rq^n$$

$$W_1 = r(q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1}) - (n-1)rq^n.$$

A expressão entre parênteses acima é a soma de $n-1$ termos de uma *progressão geométrica* de razão q e primeiro termo também igual a q, logo pela proposição 3.3.1 temos que

$$W_1 = r(q\frac{1-q^{n-1}}{1-q}) - (n-1)rq^n. \tag{5.9}$$

Então, subtraindo agora membro a membro a igualdade (5.7) da igualdade (5.6) e considerando as igualdades (5.8) e (5.9), temos

$$S_n - qS_n = A_1 - A_1q^n + r(q\frac{1-q^{n-1}}{1-q}) - (n-1)rq^n$$

$$S_n - qS_n = A_1 - A_1q^n + rq(\frac{1-q^{n-1}}{1-q} - (n-1)q^{n-1})$$

e assim

$$(1-q)S_n = A_1(1-q^n) + rq(\frac{1-q^{n-1}}{1-q} - (n-1)q^{n-1}). \tag{5.10}$$

Seja $W_2 = \dfrac{1-q^{n-1}}{1-q} - (n-1)q^{n-1}$, logo

$$W_2 = \frac{1-q^{n-1}}{1-q} - \frac{(1-q)(n-1)q^{n-1}}{1-q}$$

$$W_2 = \frac{1-q^{n-1}}{1-q} - \frac{(n-1-nq+q)q^{n-1}}{1-q}$$

$$W_2 = \frac{1-q^{n-1}}{1-q} + \frac{(-n+1+nq-q)q^{n-1}}{1-q}$$

$$W_2 = \frac{1}{1-q} + \frac{(-1-n+1+nq-q)q^{n-1}}{1-q}$$

$$W_2 = \frac{1}{1-q} + \frac{(-n+nq-q)q^{n-1}}{1-q}$$

$$W_2 = \frac{1}{1-q} + \frac{(-n+q(n-1))q^{n-1}}{1-q}$$

$$W_2 = \frac{1}{1-q} + \frac{(-nq^{n-1}+q(n-1)q^{n-1})}{1-q}$$

e portanto

$$W_2 = \frac{1-nq^{n-1}+(n-1)q^n}{1-q}. \tag{5.11}$$

Segue das equações (5.10) e (5.11) que

$$(1-q)S_n = A_1(1-q^n) + rq\frac{1-nq^{n-1}+(n-1)q^n}{1-q}$$

e finalmente obtemos

$$S_n = \frac{A_1(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq(1-nq^{n-1}+(n-1)q^n)}{(1-q)^2},$$

o que conclui a demonstração desta proposição. $\square$

Problema 5.2.2. *Seja* $S_k = 1 + 11 + \cdots + 11111\ldots1$, *onde a última parcela de* S_k *tem* k *dígitos iguais a* 1. *Determine o valor da soma* S_k.

Solução. Temos que

$$S_k = 1 + 11 + \cdots + 11111\ldots1 = 1 + (1+10) + (1+10+100) + \cdots + (1+\cdots+10^{k-1}),$$

logo o número 1 está em todas as k parcelas de S_k; o número 10, nas últimas $k-1$ parcelas de S_k; e assim sucessivamente, até que o número 10^{k-1} se faz presente apenas na última parcela de S_k. Então, $S_k = k\cdot 1 + (k-1)\cdot 10 + \cdots + 1\cdot 10^{k-1}$.

Os números $k, k-1, \ldots, 1$, nesta ordem, formam uma *progressão aritmética* de k termos de razão $r=-1$ e $a_1 = k$. Estes números estão ordenadamente multiplicados aos números $1, 10, \ldots, 10^{k-1}$, que, nesta ordem, formam uma *progressão geométrica* de razão $q = 10$ e primeiro termo igual a 1.

De acordo com a definição 5.1.1, temos que as parcelas de S_k formam portanto uma *progressão aritmético-geométrica*; então S_k é a soma de uma *progressão aritmético-geométrica* e, pela proposição 5.2.1, temos que

$$S_k = \frac{k(1-10^k)}{1-10} + \frac{(-1\cdot 10)(1-k10^{k-1}+(k-1)10^k)}{(1-10)^2}$$

$$S_k = \frac{k(10^k-1)}{10-1} + \frac{(-10)(1-k10^{k-1}+(k-1)10^k)}{(-9)^2}$$

$$S_k = \frac{9k(10^k-1)}{9(10-1)} + \frac{(-10+k10^k-(k-1)10^{k+1})}{81}$$

$$S_k = \frac{9k10^k-9k}{81} + \frac{(-10+k10^k-(k-1)10^{k+1})}{81}$$

$$S_k = \frac{9k10^k-9k-10+k10^k-(k-1)10^{k+1}}{81}$$

$$S_k = \frac{10k10^k-9k-10-k10^{k+1}+10^{k+1}}{81}$$

e portanto

$$S_k = \frac{10^{k+1}-9k-10}{81}.$$

Do mesmo modo que ocorre com uma *progressão geométrica*, à qual podemos somar seus infintos termos se sua razão q é tal que $-1 < q < 1$, podemos somar os infintos termos de uma *progressão aritmético-geométrica.* Pelo mesmo motivo que a proposição 3.3.2 não foi provada, não demonstraremos a proposição seguinte: sua demonstração rigorosa requer conteúdos de matemática de nível superior.

Proposição 5.2.2. *Sendo q a razão geométrica de uma progressão aritmético-geométrica infinita tal que $-1 < q < 1$, temos que a soma S dos seus infinitos termos é tal que*

$$S = \frac{A_1}{1-q} + \frac{rq}{(1-q)^2}.$$

Esta proposição será muito útil na resolução de problemas; antes, porém, vejamos uma outra proposição igualmente interessante:

Proposição 5.2.3. *Seja uma sequência onde todos os seus termos são frações, expressa por $(\frac{a_1}{g_1}, \frac{a_2}{g_2}, \frac{a_3}{g_3}, \dots)$. Se os numeradores $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ formam uma progressão aritmética e os denominadores $(g_1, g_2, g_3, \dots)$ formam uma progressão geométrica, com $g_1 = 1$, então esta sequência é uma progressão aritmético-geométrica.*

Demonstração. Inicialmente, note que o denominador do primeiro termo da *sequência* associada é igual a 1, pois todo inteiro pode ser visto como uma fração com denominador igual a 1.

Assim, a *sequência* em questão é da forma $(a_1, \frac{a_2}{g_2}, \dots, \frac{a_n}{g_n})$. Por hipótese, esta *sequência* tem elementos tais que $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é uma *progressão aritmética.* Também por hipótese, $(1, g_2, \dots, g_n)$ é uma *progressão geométrica* de primeiro termo igual a 1 e razão q, logo vale para todo k inteiro, com $1 < k \leq n$, que $\frac{g_k}{g_{k-1}} = q$ e então

$$\frac{g_{k-1}}{g_k} = \frac{1}{q}. \tag{5.12}$$

Agora, note que a *sequência* formada pelos inversos dos denominadores da *sequência* dada, expressa por $(\frac{1}{1}, \frac{1}{g_2}, \dots, \frac{1}{g_n})$ é também uma *progressão geométrica*, pois para todo k inteiro tal que $1 < k \leq n$, temos

$$\frac{\frac{1}{g_k}}{\frac{1}{g_{k-1}}} = \frac{1}{g_k} \cdot \frac{g_{k-1}}{1} = \frac{g_{k-1}}{g_k} = \frac{1}{q},$$

que é constante; a última igualdade vem da igualdade (5.12). Repare ainda que o primeiro termo desta *progressão geométrica* também é 1 e $q \neq 0$, pois senão a *sequência* dada inicialmente seria formada por frações de denominador nulo, o que é impossível. Obviamente, se a *sequência* inicial é infinita, o mesmo raciocínio é igualmente válido.

Assim, temos termos de uma *progressão aritmética* ordenadamente multiplicados por termos de uma *progressão geométrica* cujo termo inicial é 1 e portanto segue da definição 5.1.1 que a *sequência* inicial é mesmo uma *progressão aritmético-geométrica.* □

Estes dois últimos resultados vistos permitem resolver problemas muito interessantes, dos quais dois serão exibidos agora; o primeiro problema é facilmente resolvido devido aos dois citados resultados, enquanto que o segundo revela que a *progressão aritmético-geométrica* tem aplicação concreta, pois trata-se de um problema contextualizado.

Problema 5.2.3. *Determine a soma de todas as frações tais que seu numerador é o número inteiro positivo correspondente ao sucessor da sua posição na sequência formada, e seu denominador é a potência de* 5 *elevada ao antecessor da sua posição na sequência formada. Assim definida, a terceira fração desta sequência é* $\frac{4}{5^{3-1}} = \frac{4}{25}$*; a sexta fração, dada por* $\frac{7}{5^{6-1}} = \frac{7}{3125}$.

Solução. Temos pela proposição 5.2.3 que a *sequência* dada é uma *progressão aritmético-geométrica*, pois seus numeradores formam a *progressão aritmética* $(2, 3, 4, \dots)$, enquanto que seus denominadores formam a *progressão geométrica* $(1, 5, 5^2, \dots)$.

A *progressão aritmético-geométrica* é $(2, \frac{3}{5}, \frac{4}{25}, \dots)$, com $A_1 = 2$, $r = 1$ e $q = \frac{1}{5}$.

A soma dos infinitos termos desta *progressão aritmético-geométrica* é, conforme a proposição 5.2.2, igual a

$$S = \frac{2}{1-\frac{1}{5}} + \frac{1\cdot\frac{1}{5}}{(1-\frac{1}{5})^2} = \frac{2}{\frac{4}{5}} + \frac{\frac{1}{5}}{(\frac{4}{5})^2} = \frac{10}{4} + \frac{\frac{1}{5}}{\frac{16}{25}} = \frac{10}{4} + \frac{5}{16} = \frac{40}{16} + \frac{5}{16} = \frac{45}{16}.$$

O problema a seguir é uma adaptação do problema tratado em [7] e constitui em interessante aplicação para a *progressão aritmético-geométrica.* Neste citado artigo há outra forma de resolução para o problema.

Problema 5.2.4. *Em um hospício, há uma sala secreta com três túneis. O túnel A conduz à liberdade em* 7 *horas e o túnel B, em* 8 *horas; mas o túnel C retorna à mesma sala após* 5 *horas. Os milhares de internos deste hospício se rebelam, invadem esta sala e resolvem fugir. Mas alguns dos internos que fogem pelo túnel C, por terem problemas mentais, são incapazes de distinguir o túnel C dos outros dois mesmo já tendo passado por ele e repetem a fuga por C um certo número de vezes, ou até mesmo indefinidamente. Determine, em média, o tempo T gasto pelos internos que fogem do hospício.*

Solução. As possibilidades de fuga para um interno que consegue a liberdade são: fugir pelo túnel A; fugir pelo túnel B; entrar uma vez pelo túnel C e depois fugir pelo túnel A; entrar uma vez pelo túnel C e depois fugir pelo túnel B; entrar duas vezes pelo túnel C e depois fugir pelo túnel A; entrar duas vezes pelo túnel C e depois fugir pelo túnel B; e assim sucessivamente. De modo geral, além da fuga direta pelo túnel A ou B, o interno que consegue fugir deste hospício pode entrar k vezes no túnel C e depois entrar no túnel A ou B.

Notando que a probabilidade do interno fugir em cada uma dessas situações é igual a $\frac{1}{3}$, temos que o tempo T então é dado por:

$$T = \frac{1}{3} \cdot 7 + \frac{1}{3} \cdot 8 + (\frac{1}{3})^2 \cdot (5+7) + (\frac{1}{3})^2 \cdot (5+8) + (\frac{1}{3})^3 \cdot (5+5+7) + (\frac{1}{3})^3 \cdot (5+5+8) + \dots$$

e assim, colocando os tempos de percurso em cada túnel em evidência, temos que

$$T = 7 \cdot (\frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + \dots) + 8 \cdot (\frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + \dots) + 5 \cdot (\frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{6}{81} + \dots).$$

Na expressão à direita da última igualdade obtida, colocando em evidência a soma $(\frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + \dots)$ nas duas primeiras parcelas e, na última parcela, colocando em evidência o número $\frac{2}{9}$, segue que

$$T = (7+8) \cdot (\frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + \dots) + 5 \cdot \frac{2}{9}(1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{9} + \dots). \tag{5.13}$$

Temos que $(\frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + \dots)$ é a soma dos infinitos termos de uma *progressão geométrica* de primeiro termo e razão ambas iguais a $\frac{1}{3}$, logo pela proposição 3.3.2 obtemos

$$(\frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + \dots) = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}. \tag{5.14}$$

Ainda, conforme a proposição 5.2.3, os termos da série $S = (1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{9} + \dots)$ formam uma *progressão aritmético-geométrica*, pois são termos formados por termos da *progressão aritmética* $(1, 2, 3, \dots)$ ordenadamente multiplicados pela *progressão geométrica* $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots)$. Notando que $a_1 = 1$, $r = 1$ e $q = \frac{1}{3}$ neste caso, segue pela proposição 5.2.2 que

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{(1 - \frac{1}{3})^2} = \frac{1}{\frac{2}{3}} + \frac{\frac{1}{3}}{(\frac{2}{3})^2} = \frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}. \tag{5.15}$$

Substituindo as igualdades (5.14) e (5.15) na igualdade (5.13) vem que

$$T = (7+8) \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{4} = \frac{15}{2} + \frac{5}{2} = \frac{20}{2} = 10,$$

portanto os internos que fogem do hospício gastam em média 10 horas.

5.3 A série de Suiseth

Uma aplicação muito interessante da *progressão aritmético-geométrica* é a *série de Suiseth.* Esta série tem este nome em homenagem ao matemático que primeiro a estudou, o inglês *Richard Suiseth*, que viveu em meados do século XIV. Sobre sua vida, os dados não são precisos; até mesmo o registro do seu nome é vago, uma vez que há historiadores que o chamam de *Raymond.* Isto também acontece com seu sobrenome, pois outros historiadores designam por *Suisset* ou *Swineshead.* Ele ainda era conhecido como *Calculator.* Para evitar confusões, adotaremos o nome mais encontrado na literatura, *Richard Suiseth* ou simplesmente *Suiseth.*

Suiseth era matemático de *Oxford* e, por volta de 1350, considerou o seguinte problema: se *"durante a primeira metade de um tempo dado, uma variação continua com uma certa intensidade, durante a quarta parte seguinte do intervalo continua com o dobro da intensidade, durante a oitava parte seguinte do intervalo com o triplo da intensidade e assim ad infinitum"* então qual seria a *"intensidade média para o intervalo todo"*?

Para facilitar a compreensão do problema, na linguagem atual, considere o seguinte movimento de um corpo, durante o intervalo de tempo $[0,1]$: o corpo tem velocidade constante $v = 1$ durante o intervalo $[0, \frac{1}{2}]$; sua velocidade dobra de valor em $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ e triplica de valor em $[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}]$; e assim por diante. O que se deseja é determinar a distância total percorrida por este corpo.

Como a distância d que um corpo percorre é igual ao produto da velocidade v pelo tempo t, temos que no primeiro intervalo de tempo, este corpo percorre uma distância igual a $1 \cdot \frac{1}{2}$; no segundo intervalo, o corpo percorre uma distância igual a $2 \cdot \frac{1}{4}$; e assim por diante, infinitamente. Note que no n-ésimo intervalo o corpo percorre uma distância igual a $n \cdot \frac{1}{2^n}$.

Portanto, a *sequência* (S_n), dada por

$$(S_n) = (1 \cdot \frac{1}{2}, 2 \cdot \frac{1}{4}, 3 \cdot \frac{1}{8}, \dots, n \cdot \frac{1}{2^n}, \dots) = \frac{1}{2} \cdot (1 \cdot \frac{1}{1}, 2 \cdot \frac{1}{2}, 3 \cdot \frac{1}{4}, \dots, n \cdot \frac{1}{2^{n-1}}, \dots)$$

é tal que $(S_n) = \frac{1}{2} \cdot (R_n)$, onde a *sequência* (R_n) é expressa por

$$R_n = (1 \cdot \frac{1}{1}, 2 \cdot \frac{1}{2}, 3 \cdot \frac{1}{4}, \dots, n \cdot \frac{1}{2^{n-1}}, \dots).$$

(R_n) é uma *sequência* formada pelos termos de uma *progressão aritmética* dada por $(1, 2, 3, \dots)$ que estão ordenadamente multiplicados pelos termos da *progressão geométrica* $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots)$ de razão $\frac{1}{2}$ e primeiro termo igual a 1. Então, conforme visto na proposição 5.2.3, a *sequência* $(1 \cdot \frac{1}{2}, 2 \cdot \frac{1}{4}, 3 \cdot \frac{1}{8}, \dots, n \cdot \frac{1}{2^n}, \dots)$ é uma *progressão aritmético-geométrica* e, como sua *razão geométrica* $q = \frac{1}{2}$ é tal que $-1 < q < 1$, podemos utilizar a proposição

5.2.2 para resolver a *série de Suiseth* S, dada por

$$S = \frac{1}{2}(1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + n \cdot \frac{1}{2^n} + \dots).$$

Para a *série de Suiseth* temos que $A_1 = 1$, $r = 1$ e $q = \frac{1}{2}$, logo pela citada proposição 5.2.2 segue que

$$S = \frac{1}{2}(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{(1 - \frac{1}{2})^2}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}) = \frac{1}{2}(2 + 2) = 2.$$

Este é o resultado que foi encontrado por *Suiseth*, que afirmou corretamente que *"a intensidade média para o intervalo todo será a intensidade de variação durante o segundo subintervalo (ou o dobro da intensidade inicial)"*. *Suiseth* não utilizou a abordagem aqui vista; de acordo com o historiador *Carl Boyer*, ele *"deu uma longa e tediosa prova verbal"* pois não conhecia representação gráfica, recurso matemático utilizado por *Nicole Oresme*, matemático visto na seção 4.5, para resolver mais facilmente a *série de Suiseth*. Para conhecer a excelente ideia de *Nicole Oresme*, recomendamos especificamente a leitura de [8], um excelente livro.

5.4 Progressão aritmético-geométrica de segunda ordem

De modo análogo ao que foi realizado em capítulos anteriores, definiremos agora a *progressão aritmético-geométrica de ordem k*.

Definição 5.4.1. *A progressão aritmético-geométrica de ordem k é a sequência infinita que é formada quando os termos consecutivos de uma progressão aritmética de ordem k qualquer são ordenadamente multiplicados por termos consecutivos da progressão geométrica de ordem k, onde, para todo $j \leq k$, com j inteiro positivo, o primeiro termo da progressão geométrica de ordem j é igual a 1.*

Ainda, definimos progressão aritmético-geométrica de ordem k finita usando o mesmo raciocínio, ressaltando que neste caso as progressões aritmética e geométrica de ordem j, para todo $j \leq k$, com j inteiro positivo, associadas à progressão aritmético-geométrica gerada possuem, cada uma, a mesma quantidade de termos.

Fixaremos, à semelhança do que foi desenvolvido em capítulos anteriores, as atenções para a *progressão aritmético-geométrica de ordem 2* ou *progressão aritmético-geométrica de segunda ordem*, aqui denotada por (B_n). Assim, sejam (a_n) e (b_n), respectivamente, a *progressão aritmética* de segunda e primeira ordem associada à (B_n); analogamente, sejam (c_n) e (d_n), respectivamente, a *progressão geométrica* de segunda e primeira ordem associada à (B_n), tais que $c_1 = d_1 = 1$. Sabemos da proposição 2.4.1 que o termo geral da *progressão aritmética de segunda ordem* é expresso por

$$a_n = a_1 + b_1(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)r}{2}.$$

Também sabemos da proposição 3.5.1 que o termo geral da *progressão geométrica de segunda ordem* é expresso por

$$c_n = c_1 d_1^{(n-1)} q^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}.$$

Como pela definição de *progressão aritmético-geométrica de segunda ordem* temos $c_1 = d_1 = 1$, sua *progressão geométrica de segunda ordem* associada tem termo geral dado por

$$c_n = 1 \cdot 1^{(n-1)} q^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)},$$

e assim temos

$$c_n = q^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}. \tag{5.16}$$

Segue que o termo geral da *progressão aritmético-geométrica de segunda ordem*, definido como $B_n = a_n \cdot c_n$, é tal que

$$B_n = [a_1 + b_1(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)r}{2}] q^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}. \tag{5.17}$$

Percebe-se que a equação (5.17) denota o termo geral de uma única *progressão aritmético-geométrica de segunda ordem* se conhecidos a_1, b_1, r e q. Conhecidos os termos iniciais de B_n, percebe-se que de (5.16) temos $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = q$, $c_4 = q^3$, $c_5 = q^6$, $c_6 = q^{10}$ e assim por diante, parecendo a princípio que para determinar o termo geral *progressão aritmético-geométrica de segunda ordem* teremos que lidar com uma equação polinomial de grau superior a 2, conteúdo que não é abordado no ensino fundamental e médio. Contornaremos tal obstáculo com o algoritmo descrito a seguir para obter o termo geral de uma *progressão aritmético-geométrica de segunda ordem* qualquer, que é único quando conhecidos seus seis termos iniciais.

Como $B_n = a_n \cdot c_n$, temos que $B_1 = a_1$, $B_2 = a_2$, $B_3 = a_3 q$, $B_4 = a_4 q^3$, $B_5 = a_5 q^6$, $B_6 = a_6 q^{10}$. Com isso, a_1 está determinado, pois:

$$a_1 = B_1. \tag{5.18}$$

Temos $B_2 = a_2$ e pela definição 2.4.1 segue que $(b_n) = (\Delta a_n) = a_{n+1} - a_n$, então para $n = 2$ segue que $b_1 = a_2 - a_1$ e assim

$$b_1 = B_2 - B_1. \tag{5.19}$$

Então b_1 está igualmente determinado e resta determinar r e q. Note que $B_3 = a_3q$ e $B_4 = a_4q^3$, de modo que um sistema envolvendo B_3 e B_4 implicará necessariamente no aparecimento de uma equação polinomial cúbica. Trabalharemos com B_4 e B_5 para resolver este impasse. Para isso, considere que pela proposição 2.4.1 e das igualdades (5.18) e (5.19) temos

$$a_4 = a_1 + 3b_1 + 3r = B_1 + 3(B_2 - B_1) + 3r$$

e portanto

$$a_4 = 3B_2 - 2B_1 + 3r. \tag{5.20}$$

Analogamente, também temos

$$a_5 = a_1 + 4b_1 + 6r = B_1 + 4(B_2 - B_1) + 6r$$

de onde segue que

$$a_5 = 4B_2 - 3B_1 + 6r. \tag{5.21}$$

Como $B_4 = a_4q^3$, elevando ambos os lados desta expressão ao quadrado temos $(B_4)^2 = (a_4)^2q^6$ e pela igualdade (5.20) temos que

$$(B_4)^2 = (3B_2 - 2B_1 + 3r)^2q^6. \tag{5.22}$$

Substituindo a igualdade (5.21) em $B_5 = a_5q^6$, temos

$$B_5 = (4B_2 - 3B_1 + 6r)q^6. \tag{5.23}$$

Se $q = 0$, não há o que fazer, pois a *progressão aritmético-geométrica de segunda ordem* será nula a partir do terceiro termo, trivialmente; assim, consideremos $q \neq 0$. Dividindo membro a membro a igualdade (5.22) pela igualdade (5.23), temos

$$\frac{(B_4)^2}{B_5} = \frac{(3B_2 - 2B_1 + 3r)^2q^6}{(4B_2 - 3B_1 + 6r)q^6}$$

e portanto

$$B_5(3B_2 - 2B_1 + 3r)^2 = (B_4)^2(4B_2 - 3B_1 + 6r). \tag{5.24}$$

Logo, temos uma equação polinomial do segundo grau em r, a qual pode ter no máximo duas raízes distintas; se isto ocorre, como $B_3 = a_3q$, teremos dois valores distintos para q, notando que

$$a_3 = a_1 + 2b_1 + r = B_1 + 2(B_2 - B_1) + r = 2B_2 - B_1 + r$$

e portanto a_3 é conhecido.

Porém, calculando a_6q^{10}, como

$$a_6 = a_1 + 5b_1 + 10r = B_1 + 5(B_2 - B_1) + 10r = 5B_2 - 4B_1 + 10r$$

e portanto a_6 é conhecido, devemos encontrar B_6 como resultado, visto que vale a igualdade $B_6 = a_6q^{10}$. Assim, somente um dos valores obtidos para q é válido; o problema a seguir exemplifica a utilização do algoritmo anteriormente descrito.

Problema 5.4.1. *Determine o termo geral da progressão aritmético-geométrica de segunda ordem expressa por* $(2, 5, 20, 136, 1664, 37888, \dots)$

Solução. Da igualdade (5.18) temos que $a_1 = B_1 = 2$ e da igualdade (5.19) segue que $b_1 = B_2 - B_1 = 5 - 2 = 3$.

A igualdade (5.24) nos diz que $B_5(3B_2 - 2B_1 + 3r)^2 = (B_4)^2(4B_2 - 3B_1 + 6r)$, logo

$$1664(3 \cdot 5 - 2 \cdot 2 + 3r)^2 = 136^2(4 \cdot 5 - 3 \cdot 2 + 6r)$$

$$1664(3r + 11)^2 = 18496(6r + 14)$$

$$1664(9r^2 + 66r + 121) = 110976r + 258944$$

$$14976r^2 + 109824r + 201344 = 110976r + 258944$$

$$14976r^2 - 1152r - 57600 = 0.$$

Dividindo ambos os membros desta última equação por 1152, temos a equação

$$13r^2 - r - 50 = 0,$$

cujas raízes são $-\dfrac{25}{13}$ e 2.

Considerando inicialmente $r = -\dfrac{25}{13}$, temos

$$a_3 = 2B_2 - B_1 + r = 2 \cdot 5 - 2 + (-\frac{25}{13}) = \frac{79}{13}$$

e de $B_3 = a_3q$ temos $20 = \dfrac{79}{13}q$, logo $q = \dfrac{260}{79}$.

Mas observe que

$$a_6 = 5B_2 - 4B_1 + 10r = 5 \cdot 5 - 4 \cdot 2 + 10 \cdot (-\frac{25}{13}) = 17 - \frac{250}{13} = -\frac{29}{13},$$

de modo que $a_6q^{10} = -\dfrac{29}{13} \cdot (\dfrac{260}{79})^{10} < 0$ e portanto $r = -\dfrac{25}{13}$ não serve, pois $a_6q^{10} = B_6 = 37888$.

Agora, considerando $r = 2$, temos

$$a_3 = 2B_2 - B_1 + r = 2 \cdot 5 - 2 + 2 = 10$$

e de $B_3 = B_3q$ temos $20 = 10q$, logo $q = 2$.

Ainda, temos

$$a_6 = 5B_2 - 4B_1 + 10r = 5 \cdot 5 - 4 \cdot 2 + 10 \cdot 2 = 37,$$

de modo que $a_6q^{10} = 37 \cdot 2^{10} = 37888 = B_6$, então $r = q = 2$ são os últimos valores procurados.

Então, pela equação (5.17), segue que

$$B_n = [2 + 3(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)2}{2}]2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)},$$

logo

$$B_n = (n^2 + 1)2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$$

é o termo geral da *progressão aritmético-geométrica de segunda ordem* dada.

Observe que se a *progressão aritmético-geométrica de segunda ordem* dada só exibisse os cinco primeiros termos, poderia ter outra lei de formação, expressa por

$$B_n = [2 + 3(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)(-\frac{25}{13})}{2}](\frac{260}{79})^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$$

$$B_n = [3n - 1 - \frac{25(n-1)(n-2)}{26}](\frac{260}{79})^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}.$$

5.5 Média aritmético-geométrica

Sejam as *sequências* (a_n) e (b_n) tais que $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ e $b_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot b_{n-1}}$, onde $a_0 = a$ e $b_0 = b$ são tais que $0 < b \leq a$. À medida em que o número natural n aumenta de valor, é possível provar que as *sequências* (a_n) e (b_n) convergem para o mesmo valor, que é a *média aritmético-geométrica* dos números a e b.

A definição da *média aritmético-geométrica*, da qual acima apenas transmitimos sua ideia, apesar de exigir conhecimentos de matemática de nível superior tanto para a prova rigorosa da convergência citada quanto para suas aplicações, será aqui abordada, pois com a matemática vista no ensino médio é possível calcular os valores das sequências (a_n) e (b_n) de modo que a obter a *média aritmético-geométrica* de dois números a e b tão precisa quanto se desejar.

A *média aritmético-geométrica*, apesar de muito pouco conhecida, vem se tornando um instrumento de grande utilidade para fins matemáticos e físicos e é conhecida pelos matemáticos há pouco mais de dois seculos. Para ser mais exato, foi no ano de 1785 que o matemático italiano *Joseph Louis Lagrange* $(1736 - 1813)$, considerado por muitos como um dos dois maiores matemáticos do século XVIII (o outro era *Leonhard Euler*, de quem comentamos antes, no capítulo 3), publicou sua descoberta da *média aritmético-geométrica*. O trabalho de *Lagrange* teve profunda influência nas pesquisas matemáticas subsequentes; para conhecer um pouco mais da vida e da obra de *Lagrange*, uma boa referência é [17].

De forma independente, em 1791 o genial *Gauss*, aqui apresentado no capítulo 2, redescobriu a *média aritmético-geométrica*. No momento da descoberta, *Gauss* tinha apenas 14 anos; sabemos disso graças a uma carta escrita por *Gauss* em 16 de abril de 1816 para seu amigo *H. C. Schumacher*, onde ele confidencia este acontecimento. Oito a nove anos mais tarde, *Gauss* escreveu um longo artigo descrevendo suas descobertas com a *média aritmético-geométrica*, mas que só foi publicado após sua morte, em 1866, por *E. Schering*, editor de suas obras. Matemáticos como *Legendre, Landen* e *Ramanujan* também voltaram suas atenções para a *média aritmético-geométrica*, desenvolvendo o conhecimento sobre este assunto.

A *média aritmético-geométrica* surgiu da procura por um método para o cálculo exato do perímetro da elipse, que é o conjunto dos pontos P no plano cartesiano tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos do plano, denominados focos, é constante. A questão central era a necessidade de determinar precisamente a órbita elíptica dos planetas. Atualmente, a *média aritmético-geométrica* é uma ferramenta computacional de larga precisão e muito importante, cujas aplicações incluem o cálculo de funções elementares, como por exemplo a função logarítmica, a exponencial e as trigonométricas; na matemática de nível superior, a *média aritmético-geométrica* pode ser aplicada no cálculo das integrais elípticas completas do primeiro e do segundo tipo, no cálculo das funções hipergeométricas e no problema clássico de determinar o número π com uma quantidade arbitrária de casas decimais.

Esclarecida a ideia de *média aritmético-geométrica*, devidamente situada no contexto histórico e conhecida sua importância, provaremos agora duas importantes proposições sobre a mesma, para que a entendamos melhor no nível deste trabalho. A proposição 5.5.1 nos revela que a_{n+1} e b_{n+1} se tornam mais próximos de uma constante, que é a *média aritmético-geométrica* dos números a e b dados, a cada iteração realizada. A proposição 5.5.2 nos afirma que a distância entre a_n e b_n cai quadraticamente por iteração feita.

Proposição 5.5.1. *Sejam as sequências* (a_n) *e* (b_n)*, respectivamente, definidas tais que* $a_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ *e* $b_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot b_{n-1}}$*, onde* $a_0 = a$ *e* $b_0 = b$ *com* $0 < b \leq a$*. Temos, para todo* n *inteiro não-negativo, que*

$$0 < b = b_0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_n \leq a_n \leq \cdots \leq a_1 \leq a_0 = a.$$

Demonstração. Provemos por indução. Como por hipótese temos $a_0 = a$ e $b_0 = b$ tais que

$0 < b \leq a$, segue trivialmente que $0 < b_0 \leq a_0$ e o caso $n = 0$ é válido. Assim, suponha que para algum n inteiro positivo vale que

$$0 < b = b_0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_n \leq a_n \leq \cdots \leq a_1 \leq a_0 = a.$$

Devemos provar que

$$0 < b = b_0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n \leq \cdots \leq a_1 \leq a_0 = a$$

para concluir esta demonstração.

Por hipótese de indução temos $b_n \leq a_n$, logo

$$b_n \cdot b_n \leq a_n \cdot b_n$$

$$b_n^2 \leq a_n \cdot b_n$$

$$\sqrt{b_n^2} \leq \sqrt{a_n \cdot b_n}$$

e assim, como $b_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}$, temos

$$b_n \leq b_{n+1}. \tag{5.25}$$

Por outro lado, sabemos que $0 \leq \dfrac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2}$ e portanto

$$0 \leq \frac{(\sqrt{a_n})^2 - 2\sqrt{a_n \cdot b_n} + (\sqrt{b_n})^2}{2}$$

$$0 \leq \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{2\sqrt{a_n \cdot b_n}}{2}$$

$$\sqrt{a_n \cdot b_n} \leq \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Mas $b_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}$ e $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, portanto

$$b_{n+1} \leq a_{n+1}. \tag{5.26}$$

Novamente, por hipótese de indução temos $b_n \leq a_n$, logo

$$a_n + b_n \leq a_n + a_n = 2a_n$$

$$\frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{2a_n}{2} = a_n$$

e assim, como $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, temos

$$a_{n+1} \leq a_n. \tag{5.27}$$

Da hipótese de indução e das desigualdades (5.25), (5.26) e (5.27) temos

$$0 < b = b_0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n \leq \cdots \leq a_1 \leq a_0 = a,$$

concluindo portanto a demonstração. $\square$

Proposição 5.5.2. *Sejam as sequências* (a_n) *e* (b_n)*, respectivamente, definidas tais que* $a_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ *e* $b_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot b_{n-1}}$*, onde* $a_0 = a$ *e* $b_0 = b$ *com* $0 < b \leq a$*. Temos, para todo* n *inteiro não-negativo, que*

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a_n - b_n)^2}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2}.$$

Demonstração. Temos que

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{2\sqrt{a_n b_n}}{2} = \frac{a_n - 2\sqrt{a_n b_n} + b_n}{2}$$

e assim

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2}. \tag{5.28}$$

Mas, por outro lado temos

$$(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) \cdot (\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}) = (\sqrt{a_n})^2 - (\sqrt{b_n})^2 = a_n - b_n$$

de modo que

$$\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n} = \frac{a_n + b_n}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}} \tag{5.29}$$

Das igualdades (5.28) e (5.29) temos que

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{a_n - b_n}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}})^2$$

e portanto

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a_n - b_n)^2}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2}.$$

□

O fato da convergência ser quadrática faz, a grosso modo, com que o número de casas decimais iguais entre a_n e b_n dobre a cada iteração. É essa convergência acelerada que possibilita o cálculo da *média aritmético-geométrica* de a e b ser determinada com extrema precisão realizando poucas iterações. Isso explica o motivo de, recentemente, a *média aritmético-geométrica* ser usada em métodos numéricos de rápida convergência. O problema a seguir nos mostra na prática como calcular a *média aritmético-geométrica* de dois números a e b dados.

Problema 5.5.1. *Calcule a média aritmético-geométrica dos números* 18 *e* 162 *com precisão até a primeira casa decimal.*

Solução. Temos $b = b_0 = 18$ e $a = a_0 = 162$. Assim, segue que:

$$b_1 = \sqrt{a_0 \cdot b_0} = \sqrt{162 \cdot 18} = \sqrt{2916} = 54$$

e

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{162 + 18}{2} = 90.$$

A segunda iteração nos fornece

$$b_2 = \sqrt{a_1 \cdot b_1} = \sqrt{90 \cdot 54} = \sqrt{4860} \cong 69,714$$

e

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{90 + 54}{2} = 72,$$

enquanto que a terceira iteração nos mostra que

$$b_3 = \sqrt{a_2 \cdot b_2} \cong \sqrt{72 \cdot 69,714} \cong 70,848$$

e

$$a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} \cong \frac{72 + 69,714}{2} \cong 70,857.$$

Então, a *média aritmético-geométrica* dos números 18 e 162, com precisão até a primeira casa decimal, é igual a $70,8$.

Capítulo 6

Progressão geométrico-aritmética

6.1 Definição e ideias iniciais

Definição 6.1.1. *Sejam a_1, r, q constantes reais. Definimos a progressão geométrico-aritmética como a sequência infinita que é formada quando os termos consecutivos de uma progressão geométrica qualquer dada por $(a_1, a_1q, a_1q^2, \dots)$ são ordenadamente multiplicados por termos consecutivos da progressão aritmética de primeiro termo igual a 0, dada por $(0, r, 2r, \dots)$*

O mesmo raciocínio segue válido ao se definir a progressão geométrico-aritmética com k termos, ressaltando que neste caso as progressões geométrica e aritmética associadas são dadas, respectivamente, por $(a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{k-1})$ e $(0, r, 2r, \dots, (k-1)r)$.

Os números q e r são denominados, respectivamente, *razão geométrica* e *razão aritmética* da *progressão geométrico-aritmética.*

Desta definição, a *progressão geométrico-aritmética* é a *sequência* cujos termos são da forma

$$a_1, a_1q + r, a_1q^2 + 2r, \dots,$$

notando que ainda temos da definição que o primeiro termo da *progressão geométrico-aritmética* sempre é igual ao primeiro termo da *progressão geométrica* que lhe é associada.

Sabemos da igualdade (3.2) que a expressão do termo geral de uma *progressão geométrica* qualquer é dado por $a_n = a_1q^{n-1}$ e, da igualdade (2.1), que o termo geral de uma *progressão aritmética* genérica é $b_n = b_1 + (n-1)r$. Como no estudo das *progressões geométrico-aritméticas* por definição o primeiro termo da sua *progressão aritmética* associada é igual a 0, segue que seu termo geral é $b_n = (n-1)r$.

Destes fatos e da definição 6.1.1, temos que o termo geral A_n de uma *progressão geométrico-aritmética* é expresso por $A_n = a_1q^{n-1} + (n-1)r$.

Note que, por esta última expressão, para $n = 1$, temos $A_1 = a_1$, ou seja o primeiro termo da *progressão geométrico-aritmética* é igual ao primeiro termo da sua *progressão* *geométrica* associada; assim, o termo geral de uma *progressão geométrico-aritmética* é

$$A_n = A_1 q^{n-1} + (n-1)r. \tag{6.1}$$

A resolução do problema seguinte mostra a importância da igualdade (6.1).

Problema 6.1.1. *Prove que há infinitos múltiplos de* 3 *na progressão geométrico-aritmética* $(A_n) = (5, 13, 41, 129, \dots)$. *Prove que o mesmo vale para os múltiplos de* 5.

Solução. Determinemos A_n. Assim, temos que $A_1 = 5$. Como $A_2 = 5q + r$, temos

$$13 = 5q + r,$$

logo

$$10q + 2r = 26. \tag{6.2}$$

Como $A_3 = 5q^2 + 2r$, temos

$$5q^2 + 2r = 41. \tag{6.3}$$

Subtraindo membro a membro a igualdade (6.2) da igualdade (6.3), temos que $5q^2 - 10q = 15$. Dividindo por 5, segue que $q^2 - 2q = 3$, e assim temos

$$q^2 - 2q - 3 = 0,$$

que é uma equação polinomial do segundo grau cujas raízes são -1 e 3. Mas se $q = -1$, então da igualdade (6.2) segue que $r = 18$.

Então, $A_4 = 5q^3 + 3r = 5 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot 18 = 49$, o que é falso, pois $A_4 = 129$.

Assim, $q = 3$. Novamente, usando a igualdade (6.2), temos que $r = -2$. A igualdade (6.1) nos permite afirmar que

$$A_n = A_1 q^{n-1} + (n-1)r = 5 \cdot 3^{n-1} - 2(n-1).$$

Sendo t um número inteiro positivo qualquer, podemos afirmar que os sucessores dos múltiplos de 3 são números da forma $3t + 1$ e assim

$$A_{3t+1} = 5 \cdot 3^{(3t+1)-1} - 2((3t+1) - 1) = 5 \cdot 3^{3t} - 2(3t).$$

Como cada uma das parcelas desta última diferença é múltipla de 3, segue que na *progressão geométrico-aritmética* $(A_n) = (5, 13, 41, 129, \dots)$ existem infinitos múltiplos de 3. Analogamente, sendo v um número inteiro positivo qualquer, temos que os sucessores dos múltiplos de 5 são da forma $5v + 1$ e assim

$$A_{5v+1} = 5 \cdot 3^{(5v+1)-1} - 2((5v+1) - 1) = 5 \cdot 3^{5v} - 2(5v).$$

Cada uma das parcelas desta última diferença é múltipla de 5; igualmente segue que na *progressão geométrico-aritmética* $(A_n) = (5, 13, 41, 129, \dots)$ há infinitos múltiplos de 5.

Problema 6.1.2. *Sendo A_1, q e r inteiros, prove que não existe uma progressão geométrico-aritmética formada apenas por números primos, a partir do segundo termo.*

Solução. Dada a igualdade (6.1), é trivial, se A_1 ou q é nulo. Se ambos não são nulos, analisemos dois casos: o primeiro, onde pelo menos um dos números A_1 e q é diferente de 1; e o segundo, onde $A_1 = q = 1$.

Aproveitando a ideia da resolução do problema 6.1.1, considere que A_1 e q não são ambos iguais a 1. Assim, se $q \neq 1$, então note que sendo t um número inteiro positivo qualquer, podemos afirmar que os sucessores dos múltiplos de q são números da forma $qt + 1$, logo

$$A_{qt+1} = A_1 q^{(qt+1)-1} + ((qt+1) - 1)r = A_1 q^{qt} + qtr.$$

Como cada uma das parcelas desta última diferença é múltipla de q, segue nesse caso que uma *progressão geométrico-aritmética* qualquer possui infinitos múltiplos de q. Em particular, não é possível obtermos uma *progressão geométrico-aritmética* formada somente com números primos deste modo.

Se $A_1 \neq 1$, seja v um número inteiro positivo qualquer. Então, analogamente, temos que os sucessores dos múltiplos de A_1 são da forma $A_1 v + 1$ e assim

$$A_{A_1 v+1} = A_1 q^{(A_1 v+1)-1} + ((A_1 v + 1) - 1)r = A_1 q^{A_1 v} + A_1 vr.$$

Cada uma das parcelas desta última diferença é múltipla de A_1 e portanto segue que uma *progressão geométrico-aritmética* qualquer tem infinitos múltiplos de A_1. Novamente, é impossível conseguirmos uma *progressão geométrico-aritmética* formada apenas com números primos desta maneira.

Se $A_1 = q = 1$, note que $r \neq 0$, pois $r = 0$ implica na *progressão geométrico-aritmética* ter todos os seus elementos iguais a 1, conforme a igualdade (6.1), recaindo trivialmente em uma *progressão aritmética* estacionária sem números primos.

Assim, suponha por absurdo que existe uma *progressão geométrico-aritmética* tal que $A_1 = q = 1$ onde após o primeiro termo os termos são todos números primos. Sabemos que $r \neq 0$ nesse caso. Como $A_1 = q = 1$, temos que os termos da *progressão geométrico-aritmética* são da forma $1 + jr$, onde j é um número inteiro positivo. Em particular, $1 + r = p$, onde p denota um número primo. Portanto, $1 + 4pr$ é termo desta *progressão geométrico-aritmética* e também é um número primo. Mas, temos que

$$1 + 4pr = 1 + 4(1 + r)r = 4r^2 + 4r + 1 = (1 + 2r)^2,$$

logo $1 + 2r \neq 1$ (pois r é um número inteiro tal que $r \neq 0$, como vimos antes) é um termo desta *progressão geométrico-aritmética*, assim $1 + 2r$ é um número primo que é divisor de outro número primo, expresso por $1 + 4pr$, absurdo!

Então, sendo A_1, q e r inteiros, provamos que inexiste uma *progressão geométrico-aritmética* formada exclusivamente por números primos, a partir do segundo termo.

6.2 Propriedades da progressão geométrico-aritmética

1. Seja n um número natural fixo, porém arbitrário, tal que $n > 1$. O n-ésimo termo de uma *progressão geométrico-aritmética* se relaciona com seu antecessor e com as razões geométrica e aritmética da *progressão geométrico-aritmética* de acordo com a igualdade
$$A_n = qA_{n-1} + r[(n-1)(1-q) + q].$$

   Demonstração. Pela igualdade (6.1), temos
$$A_{n-1} = A_1 q^{(n-1)-1} + ((n-1) - 1)r$$
$$A_{n-1} = A_1 q^{n-2} + (n-2)r,$$
   logo
$$qA_{n-1} = q[A_1 q^{n-2} + (n-2)r] = A_1 q^{n-1} + (n-2)qr$$
   e assim
$$qA_{n-1} = A_1 q^{n-1} + nqr - 2qr. \tag{6.4}$$
   Temos também que
$$r[(n-1)(1-q) + q] = r[n - nq - 1 + 2q] = r(n-1) - nqr + 2qr. \tag{6.5}$$
   Somando membro a membro as igualdades (6.4) e (6.5), temos
$$qA_{n-1} + r[(n-1)(1-q) + q] = (A_1 q^{n-1} + nqr - 2qr) + (r(n-1) - nqr + 2qr)$$
   e assim
$$qA_{n-1} + r[(n-1)(1-q) + q] = A_1 q^{n-1} + (n-1)r = A_n,$$
   onde a última igualdade decorre, mais uma vez, da igualdade (6.1), encerrando portanto a demonstração. □

2. Qualquer *progressão aritmética*, bem como qualquer *progressão geométrica*, pode ser vista como um caso particular da *progressão geométrico-aritmética.*

   Demonstração. Tomando $q = 1$ na equação (6.1), temos que
$$A_n = A_1 \cdot 1^{n-1} + (n-1)r = A_1 + (n-1)r$$
   logo qualquer *progressão aritmética* pode ser vista como o caso particular da *progressão geométrico-aritmética* onde $q = 1$.

Tomando $r = 0$ na equação (6.1), temos que

$$A_n = A_1 q^{n-1} + (n-1) \cdot 0 = A_1 q^{n-1}$$

logo qualquer *progressão geométrica* pode ser vista como o caso particular da *progressão geométrico-aritmética* onde $r = 0$. □

Após vermos as propriedades de uma *progressão geométrico-aritmética*, observemos a proposição seguinte, que nos mostra uma expressão para a soma dos n termos de uma *progressão geométrico-aritmética*.

Proposição 6.2.1. *A soma S_n dos primeiros n termos de uma progressão geométrico-aritmética é conforme a expressão*

$$S_n = \frac{A_1(1-q^n)}{1-q} + \frac{(n-1)nr}{2},$$

onde A_1, q e r são, respectivamente, o primeiro termo da progressão geométrico-aritmética, sua razão geométrica e sua razão aritmética, onde $q \neq 1$ e $r \neq 0$.

Demonstração. Seja (A_n) uma *progressão geométrico-aritmética* qualquer, onde q e r são, respectivamente, sua *razão geométrica* e sua *razão aritmética*. Denotemos a soma dos primeiros n termos de (A_n) por S_n.

Assim, $S_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1} + A_n$.. Pela igualdade (6.1), temos

$$S_n = A_1 + (A_1 q + r) + \cdots + [A_1 q^{n-1} + (n-1)r]$$

$$S_n = (A_1 + A_1 q + \cdots + A_1 q^{n-1}) + (r + 2r + \cdots + (n-1)r)$$

e assim

$$S_n = A_1(1 + q + \cdots + q^{n-1}) + r(1 + 2 + \cdots + (n-1)). \tag{6.6}$$

Note que

$$1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}, \tag{6.7}$$

pois se trata da soma dos n termos de uma *progressão geométrica* de primeiro termo igual a 1 e razão q.

Também temos que

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{(1 + (n-1))(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \tag{6.8}$$

pois se trata da soma dos $n-1$ termos de uma *progressão aritmética* de primeiro termo e razão ambas iguais a 1 e último termo igual a $n-1$.

Substituindo as igualdades (6.7) e (6.8) na igualdade (6.6), temos

$$S_n = \frac{A_1(1-q^n)}{1-q} + \frac{(n-1)nr}{2},$$

comprovando a asserção feita. □

Problema 6.2.1. *Calcule a soma dos dez primeiros termos da progressão geométrico-aritmética* $(A_n) = (5, 13, 41, 129, \dots)$ *vista no problema 6.1.1.*

Solução. Vimos no problema 6.1.1 que $A_1 = 5$, $q = 3$ e $r = -2$. Pela proposição 6.2.1 temos que

$$S_{10} = \frac{5(1-3^{10})}{1-3} + \frac{(10-1)10\cdot(-2)}{2} = 5\cdot 29524 - 90 = 147530.$$

Problema 6.2.2. *O tanque de água de uma chácara tem oito mil litros de capacidade e está totalmente cheio. Seu dono vê o exato momento do começo de um vazamento causado por um furo, que aumenta de tamanho em 5% a cada minuto que passa. No minuto seguinte ao começo do vazamento, o cano de saída do tanque se rompe de modo que jorram dois litros em um minuto e, gradativamente, a quantidade de água que se perde por este cano dobra por minuto. Após meia hora do começo do vazamento, técnicos de uma empresa especializada fazem todos os reparos. Determine uma expressão que represente a quantidade de litros de água desperdiçados no n-ésimo minuto, bem como o total de litros de água desperdiçado, sabendo que se perdeu cem litros de água no primeiro minuto do vazamento causado pelo furo.*

Solução. Consideremos o instante zero quando o dono percebe o início do vazamento causado pelo furo. Assim, a quantidade de água que se perde por minuto pelo furo forma uma *progressão geométrica* de primeiro termo igual a 100 e razão igual a $1,05$; já a quantidade de água que se perde por minuto pelo cano rompido forma uma *progressão aritmética* de primeiro termo igual a zero e razão igual a 2.

No n-ésimo minuto, a quantidade A_n de água desperdiçada no total é a soma das quantidades de água desperdiçadas pelo furo e pelo cano rompido, portanto temos que (A_n) é uma *progressão geométrico-aritmética*. Uma expressão para A_n é uma expressão que representa a quantidade de litros de água desperdiçados no n-ésimo minuto e pela igualdade 6.1 temos que

$$A_n = 100\cdot 1,05^{n-1} + (n-1)2 = 100\cdot 1,05^{n-1} + 2n - 2.$$

Seja, portanto, S_n a soma dos primeiros n termos desta *progressão geométrico-aritmética*. Assim, determinar a quantidade total de litros de água desperdiçados é calcular S_{30}.

Pela propriedade 6.2.1, temos que

$$S_{30} = \frac{100(1-1,05^{30})}{1-1,05} + \frac{(30-1)30\cdot 2}{2}$$

$$S_{30} = \frac{100(1,05^{30}-1)}{0,05} + 29\cdot 30$$

$$S_{30} = 2000(1,05^{30} - 1) + 870$$

$$S_{30} \approx 2000 \cdot 3,322 + 870 = 6644 + 870 = 7514.$$

Então, foram desperdiçados cerca de 7514 litros de água deste tanque no total.

6.3 Progressão geométrico-aritmética de segunda ordem

Podemos, a exemplo do que foi feito em capítulos anteriores, lidar com a *progressão geométrico-aritmética de ordem k*, definida a seguir.

Definição 6.3.1. *A progressão geométrico-aritmética de ordem k é a sequência infinita que é formada quando os termos consecutivos de uma progressão geométrica de ordem k qualquer são ordenadamente somados por termos consecutivos da progressão aritmética de ordem k, onde, para todo $j \leq k$, com j inteiro positivo, o primeiro termo da progressão aritmética de ordem j é igual a* 0.

Ainda, definimos progressão geométrico-aritmética de ordem k finita usando o mesmo raciocínio, ressaltando que neste caso as progressões geométrica e aritmética de ordem j, para todo $j \leq k$, com j inteiro positivo, associadas à progressão geométrico-aritmética gerada possuem, cada uma, a mesma quantidade de termos.

Mais uma vez, voltamos nossa atenção à ordem dois, isto é, estamos interessados no estudo da *progressão geométrico-aritmética de ordem 2*, também denominada de *progressão geométrico-aritmética de segunda ordem*, denotando-a por (B_n).

Assim, sejam (a_n) e (b_n), respectivamente, a *progressão geométrica* de segunda e primeira ordem associada à (B_n); ainda, sejam (c_n) e (d_n), respectivamente, a *progressão aritmética* de segunda e primeira ordem associada à (B_n).

Sabemos da proposição 3.5.1 que o termo geral da *progressão geométrica de segunda ordem* é expresso por

$$a_n = a_1 b_1^{(n-1)} q^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}.$$

Também sabemos da proposição 2.4.1 que o termo geral da *progressão aritmética de segunda ordem* é expresso por

$$c_n = c_1 + d_1(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)r}{2}.$$

Como pela definição de *progressão geométrico-aritmética de segunda ordem* temos $c_1 = d_1 = 0$, sua *progressão aritmética de segunda ordem* associada tem termo geral dado por

$$c_n = 0 + 0 \cdot (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)r}{2}$$

e assim temos

$$c_n = \frac{(n-1)(n-2)r}{2} \tag{6.9}$$

Segue que o termo geral da *progressão geométrico-aritmética de segunda ordem*, definido como $B_n = a_n + c_n$, é tal que

$$B_n = a_1 b_1^{(n-1)} q^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} + \frac{(n-1)(n-2)r}{2} \tag{6.10}$$

Pela igualdade acima uma *progressão geométrico-aritmética de segunda ordem* da qual conhecemos os seus termos iniciais terá seu termo geral conhecido se determinarmos a_1, b_1, q e r. O algoritmo descrito agora, semelhante ao algoritmo visto no capítulo anterior, permitirá obter a expressão de uma *progressão geométrico-aritmética de segunda ordem* quando conhecemos os seus seis termos iniciais.

Notando que, na igualdade (6.10), se $n = 1$, temos que

$$a_1 = B_1 \tag{6.11}$$

e que, se $n = 2$, obtemos $B_2 = a_1 b_1$. Mas pela igualdade (6.11) temos $a_1 = B_1$ e portanto

$$b_1 = \frac{B_2}{B_1}. \tag{6.12}$$

Para $n = 3$ e $n = 4$, a igualdade (6.10) nos diz, respectivamente, que

$$B_3 = a_1 b_1^2 q + r \tag{6.13}$$

e

$$B_4 = a_1 b_1^3 q^3 + 3r, \tag{6.14}$$

o que, à primeira vista, conduz a uma equação polinomial do terceiro grau. Para contornar tal problema, note que $B_5 = a_1 b_1^4 q^6 + 6r$ e assim

$$B_5 - 6r = a_1 b_1^4 q^6. \tag{6.15}$$

Da igualdade (6.14), temos $B_4 - 3r = a_1 b_1^3 q^3$. Elevando ambos os membros desta última igualdade ao quadrado, obtemos

$$(B_4 - 3r)^2 = a_1^2 b_1^6 q^6. \tag{6.16}$$

Dividindo membro a membro a igualdade (6.16) pela igualdade (6.15), segue que

$$\frac{(B_4 - 3r)^2}{B_5 - 6r} = \frac{a_1^2 b_1^6 q^6}{a_1 b_1^4 q^6} = a_1 b_1^2 = B_1 (\frac{B_2}{B_1})^2 = \frac{(B_2)^2}{B_1}$$

e assim

$$B_1 (B_4 - 3r)^2 = (B_2)^2 (B_5 - 6r). \tag{6.17}$$

Da igualdade (6.17) temos dois valores distintos para r no máximo; para cada um deles, há um valor assumido por q, pois substituindo as igualdades (6.11) e (6.12) na igualdade (6.13) temos que

$$B_3 = B_1(\frac{B_2}{B_1})^2 q + r$$

e assim temos

$$q = \frac{B_1}{(B_2)^2}(B_3 - r). \tag{6.18}$$

Para encontrar os valores de q e r corretos, calculamos $\frac{B_2^5}{B_1^4}q^{10} + 10r$ e devemos encontrar B_6, visto que

$$B_6 = a_1 b_1^5 q^{10} + 10r = B_1(\frac{B_2}{B_1})^5 q^{10} + 10r = \frac{B_2^5}{B_1^4}q^{10} + 10r.$$

A resolução do problema a seguir, revela a utilidade do algoritmo e das igualdades (6.11), (6.12), (6.17) e (6.18).

Problema 6.3.1. *Determine a expressão do termo geral da progressão geométrico-aritmética de segunda ordem dada por* $(1, 2, 15, 85, 1066, 32838, \dots)$.

Solução. Temos das igualdades (6.11) e (6.12), respectivamente, que

$$a_1 = B_1 = 1$$

e

$$b_1 = \frac{B_2}{B_1} = \frac{2}{1} = 2.$$

Da igualdade (6.17) temos

$$1 \cdot (85 - 3r)^2 = 2^2 \cdot (1066 - 6r)$$

$$9r^2 - 510r + 7225 = 4262 - 24r$$

$$9r^2 - 486r + 2961 = 0$$

$$r^2 - 54r + 329 = 0,$$

equação cujas raízes são 47 e 7.

Se $r = 47$, então pela igualdade (6.18) temos

$$q = \frac{B_1}{(B_2)^2}(B_3 - r) = \frac{1}{2^2}(15 - 47) = -8.$$

Mas $\frac{B_2^5}{B_1^4}q^{10} + 10r = \frac{2^5}{1^4}(-8)^{10} + 10 \cdot 47 = 2^{35} + 470 > 2^{16} > 32838 = B_6$ e portanto estes valores não se aplicam para r e q.

Se $r = 7$, da igualdade (6.18) temos que

$$q = \frac{B_1}{(B_2)^2}(B_3 - r) = \frac{1}{2^2}(15 - 7) = 2,$$

notando que

$$\frac{B_2^5}{B_1^4}q^{10} + 10r = \frac{2^5}{1^4}2^{10} + 10 \cdot 7 = 2^{15} + 70 = 32838 = B_6,$$

o que nos permite afirmar que para a *progressão geométrico-aritmética de segunda ordem* deste problema temos $r = 7$ e $q = 2$.

Segue da igualdade (6.10) e dos resultados obtidos acima que o termo geral da *progressão geométrico-aritmética de segunda ordem* é dado por

$$B_n = 1 \cdot 2^{(n-1)} \cdot 2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} + \frac{(n-1)(n-2) \cdot 7}{2}$$

$$B_n = 2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+n-1} + \frac{7(n-1)(n-2)}{2}.$$

Repare que se o sexto termo não fosse conhecido, a *progressão geométrico-aritmética de segunda ordem* poderia ter seu termo geral também expresso por

$$B_n = 1 \cdot 2^{(n-1)} \cdot (-8)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} + \frac{(n-1)(n-2) \cdot 47}{2}.$$

Capítulo 7

Conclusão

O estudo aqui realizado sobre sequências, progressões e séries procurou aprofundar o conhecimento das progressões aritmética e geométrica, mas também apresentar as progressões harmônica, aritmético-geométrica e geométrico-aritmética, relacionando com a história da matemática e enfatizando a resolução de problemas, alguns deles clássicos.

Mais do que isso, vários temas matemáticos permearam esta dissertação, um elemento enriquecedor que deve fazer parte das aulas de um bom professor. Na escola básica, em sala de aula, muitos assuntos são abordados de forma isolada uns dos outros, o que contribui para o desestímulo na aprendizagem dos estudantes do ensino fundamental e médio.

Assim, geometria plana e espacial, construções geométricas com régua e compasso, equação polinomial do primeiro e do segundo grau, números primos, operações algébricas básicas, fatorial e muitos outros temas matemáticos estiveram presentes ao longo deste trabalho. É evidente que muitas aplicações que relacionam outros temas matemáticos ao que aqui foi abordado podem ter lugar em uma produção deste porte, mas esta dissertação não teve a pretensão de esgotar os temas; na verdade, a intenção foi trazer os mesmos à tona, com uma abordagem acessível, dado o quase desconhecimento dos mesmos.

Neste sentido, lembramos também do matemático e professor brasileiro *Geraldo Ávila* ($1933 - 2010$), a quem se atribui a seguinte frase, que serve de reflexão para toda pessoa que estuda matemática: *"Ninguém aprende Matemática ouvindo o professor em sala de aula, por mais organizadas e claras que sejam suas preleções, por mais que se entenda tudo que ele explica. Isto ajuda muito, mas é preciso estudar por conta própria logo após as aulas, antes que o benefício delas desapareça com o tempo... Mas este estudo exige muita disciplina e concentração: estuda-se sentado à mesa, com lápis e papel à mão, prontos para serem usados a todo momento. Você tem que interromper a leitura... para fazer um gráfico ou diagrama, ou alguma figura que ajude a seguir o raciocínio do livro, sugerir ou testar uma ideia... Por isso mesmo, não espere que o livro seja completo, sem* *lacunas a serem preenchidas pelo leitor; do contrário, esse leitor será induzido a uma situação passiva, quando o mais importante é desenvolver as habilidades para o trabalho independente... Os exercícios são uma das partes mais importante do livro. De nada adianta estudar a teoria sem aplicar-se na resolução dos exercícios propostos. Muitos desses exercícios são complementos da teoria e não podem ser negligenciados, sob pena de grande prejuízo no aprendizado. Você estará fazendo progresso realmente significativo quando sentir que está realmente aprendendo a aprender."*

A utilização da história da matemática foi um fator de estímulo para a pesquisa, mas não se resumiu apenas à narração histórica dos fatos e dos personagens matemáticos; pelo contrário, a história da matemática foi, quando tratada aqui, o passo inicial para se realizar cálculos, obter expressões, fazer suposições e demonstrá-las, além de resolver problemas que em algum momento ocuparam a mente de grandes matemáticos do passado.

As definições de progressões de ordem superior, algo encontrado de modo muito escasso nos livros, artigos e *sites* pesquisados para a progressão aritmética, representa a criatividade desta pesquisa, algo que deve existir em cada professor para, diante de uma ideia nova, fazer quando possível a extensão natural desta. Em muitos casos, em consultas a tais materiais, apenas havia uma breve indicação do tema, o que levou a produção do conhecimento por conta própria. Um exemplo disso ocorreu com o triângulo harmônico de *Leibniz*, do qual só havia um breve comentário no excelente livro de *Carl Boyer* sobre história da matemática que consta na bibliografia deste trabalho. Alguns poucos *sites* faziam referência a este tema, mas sem apresentar conteúdo matemático significativo. O desenvolvimento deste conteúdo nesta pesquisa, assim, ocorreu sem mais nenhum outro suporte bibliográfico.

Interessante também destacar que em alguns destes problemas, sobretudo os que envolvem as progressões aritmético-geométrica e geométrico-aritmética de segunda ordem, é de bom tom que não somente se permita ao estudante a utilização da calculadora, como também se incentive. A finalidade ao lidar com tais temas não é a de verificar se o estudante conhece as operações básicas de aritmética, mas se sabe concatenar ideias e colocar o raciocínio lógico ao seu favor quando se depara com um desafio matemático. A depender do caso, o computador pode e deve ser igualmente permitido e incentivado. As novas tecnologias e mídias estão aí a oferecer seu vasto potencial a quem sabe tirar bom proveito delas.

Os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) afirmam que no Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de diversos campos do conhecimento matemático e que, já no Ensino Médio, estes alunos *"estão em condições de utilizá-los e ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, inves-*

tigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade." Sendo assim, pondera que o *"impacto da tecnologia na vida de cada indivíduo vai exigir competências que vão além do simples lidar com as máquinas. A velocidade do surgimento e renovação de saberes e de formas de fazer em todas as atividades humanas tornarão rapidamente ultrapassadas a maior parte das competências adquiridas por uma pessoa ao início de sua vida profissional."*

Encerramos com um pensamento de um matemático muito importante para esta dissertação: *Gauss*. É uma citação que sintetiza muito desta produção; em certa ocasião, *Gauss* afirmou sobre a matemática que:

"Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta."

Referências Bibliográficas

[1] Eduardo Wagner e Sheila C. Zani Augusto C. Morgado. Progressões e Matemática Financeira. IMPA, VITAE, Rio de Janeiro, 2006.

[2] Jorge Luis Borges. Obras Completas, Volume 1. Editora Emecé, Buenos Aires, 1974.

[3] J. M. Borwein and P.B. Borwein. The arithmetic-geometric mean and fast computation of elementary functions. SIAM Review, Volume 26, Issue 3, Julho de 1984.

[4] Nelson Gentil e Sérgio E. Greco Carlos A. Marcondes. Matemática Para o Ensino Médio, Volume Único. Editora Ática, São Paulo, 1999.

[5] Luís de B. R. Lopes. Manual de Sequências e Séries. Editora Didática e Científica Ltda., Rio de Janeiro, 1992.

[6] Luís de B. R. Lopes. Manual de Progressões. Editora Interciência, Rio de Janeiro, 1998.

[7] Raphael Alcaires de Carvalho. Valor esperado e progressão aritmético-geométrica na fuga de prisioneiros. Revista do Professor de Matemática Número 77, Janeiro de 2012.

[8] Geraldo S. de S. Ávila. Várias Faces da Matemática. Editora Edgard Blücher Ltda., São Paulo, 2010.

[9] Gert Almkvist e Bruce Berndt. Gauss, landen, ramanujan, the arithmetic-geometric mean, ellipses, π, and the *Ladies Diary*. The American Mathematical Monthly 95, Agosto e Setembro de 1988.

[10] José P. Carneiro e Carlos G. Moreira. Sequências aritmético-geométricas. Revista Eureka! Número 14, Maio de 2002.

[11] Claudio G. Carvalhaes e Patrick Suppes. O cálculo de alta precisão do período do pêndulo simples. Revista Brasileira de Ensino de Física, Volume 31, número 2, Junho de 2009.

[12] Carl B. Boyer e Uta C. Merzbach. História da Matemática. Editora Edgard Blücher Ltda., São Paulo, 1996.

[13] Aref Antar Neto et al. Progressões e Logaritmos, Volume 2. Editora Moderna, Coleção Noções de Matemática, São Paulo, 1979.

[14] Elon Lages Lima et al. A Matemática do Ensino Médio, Volume 1. SBM, Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, 2006.

[15] Elon Lages Lima et al. A Matemática do Ensino Médio, Volume 2. SBM, Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, 2006.

[16] Elon Lages Lima et al. A Matemática do Ensino Médio, Volume 4. SBM, Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, 2007.

[17] Howard Eves. Introdução à História da Matemática. Editora Unicamp, Campinas, 2008.

[18] Abramo Hefez. Elementos de Aritmética. SBM, Coleção Textos Universitários, Rio de Janeiro, 2006.

[19] Elon Lages Lima. Meu Professor de Matemática. SBM, Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, 1991.

[20] Elon Lages Lima. Curso de Análise, Volume 1. IMPA, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2002.

[21] Elon Lages Lima. Análise Real, Volume 1. IMPA, Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro, 2004.

[22] Rui Eduardo Brasileiro Paiva. Progressões aritmético-geométricas e progressões geométrico-aritméticas. Revista do Professor de Matemática Número 73, Setembro de 2010.

[23] George Pólya. Dez mandamentos para professores. Revista do Professor de Matemática Número 10, Maio de 1987.

[24] George Pólya. A arte de resolver problemas. Editora Interciência, Rio de Janeiro, 1995.

[25] George F. Simmons. Cálculo com Geometria Analítica, Volume 1. Editora McGraw-Hill, Ltda, São Paulo, 1987.

[26] Ian Nicholas Stewart. Uma História da Simetria na Matemática. Jorge Zahar Editor, Rio de Janeiro, 2012.

[27] Paul Strathern. Pitágoras e Seu Teorema em 90 Minutos. Jorge Zahar Editor, Série Cientistas em 90 Minutos, Rio de Janeiro, 1998.

[28] Renate Gompertz Watanabe. Alergia pelo número 7. Revista do Professor de Matemática Número 31, Setembro de 1996.