UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS

JAMERSON DOS SANTOS PEREIRA

MATERIAIS MANIPULÁVEIS E A PARTICIPAÇÃO DE ESTUDANTES: ENGAJAMENTO MÚTUO E REPERTÓRIO COMPARTILHADO NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Salvador
2013

JAMERSON DOS SANTOS PEREIRA

MATERIAIS MANIPULÁVEIS E A PARTICIPAÇÃO DE ESTUDANTES: ENGAJAMENTO MÚTUO E REPERTÓRIO COMPARTILHADO NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, para a obtenção do grau de Mestre em Ensino, Filosofia e História das Ciências, na área de concentração em Educação Científica e Formação de Professores.

Orientadora: Profª. Dra. Andréia Maria Pereira de Oliveira

Salvador
2013

Ficha Catalográfica – Biblioteca Central Julieta Carteado

Pereira, Jamerson dos Santos
P492m Materiais manipuláveis e a participação de estudantes: engajamento mútuo e repertório compartilhado nas aulas de matemática / Jamerson dos Santos Pereira. – Salvador, 2013.
124 f.: il.

Orientadora: Andréia Maria Pereira de Oliveira.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, 2013.

1. Geometria – Estudo e ensino. 2. Geometria – Materiais didáticos. 3. Matemática – Estudo e ensino. I. Oliveira, Andréia Maria Pereira de, orient. II. Universidade Federal da Bahia. III. Universidade Estadual de Feira de Santana. IV. Título.

CDU: 514

Universidade Federal da Bahia
Universidade Estadual de Feira de Santana

MATERIAIS MANIPULÁVEIS E A PARTICIPAÇÃO DE ESTUDANTES: ENGAJAMENTO MÚTUO E REPERTÓRIO COMPARTILHADO NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Resultado da Banca: APROVADO

BANCA EXAMINADORA:

Andréia Maria Pereira de Oliveira
Prof^a. Dr^a. Andréia Maria Pereira de Oliveira
Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS

Adair Mendes Nacarato
Prof^a. Dr^a. Adair Mendes Nacarato
Universidade São Francisco – USF

Prof. ~~Dr.~~ Elder Sales Teixeira
Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS

Aos meus pais e irmãos por todo carinho. À minha esposa pelo amor, carinho e dedicação, durante toda minha caminhada.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, por sempre estar comigo nas horas difíceis.

Sou imensamente grato pelo apoio e incentivo de muitas pessoas que participaram, ao longo da caminhada, do processo de investigação e escrita desta dissertação. Em especial,

À minha orientadora, Andréia Maria Pereira de Oliveira, por ter me concedido o privilégio de ser seu orientando; por ter proposto desafios, exigindo o melhor de mim; pelo acompanhamento e diálogo constante.

Às professoras participantes desta pesquisa, por terem se disponibilizado a desenvolver as tarefas propostas, por ter permitido que eu coletasse, em suas salas de aula, os dados que constituem esta dissertação, além da atenção manifestada.

Aos professores Adair Mendes Nacarato e Elder Sales Teixeira, pelas sugestões e comentários apresentados no exame de qualificação.

Aos professores André Luís Mattedi Dias, Jany Santos Souza Goulart e Eliene Barbosa Lima, o meu agradecimento pelo incentivo ao ingresso no mestrado.

Aos colegas do Núcleo de Pesquisas em Modelagem Matemática (NUPEMM), agradeço pela convivência e discussões importantes para meu amadurecimento enquanto pesquisador.

Agradeço os comentários e sugestões feitas pelos membros do Grupo de Orientação e Pesquisa em Educação Matemática (GOPEMAT), à versão preliminar da dissertação: Anayle Santos de Queiroz, Airam da Silva Prado, Lilian Aragão da Silva, Meline Nery Melo Pereira, Wagner Ribeiro Aguiar e Wedeson Oliveira Costa.

À minha família, pelo apoio dispensado durante o mestrado.

À minha esposa, pelo amor, dedicação e paciência durante toda essa caminhada.

E, por fim, a CAPES, pelo apoio financeiro.

RESUMO

O presente estudo teve por objetivo investigar a *participação* de estudantes em aulas de Matemática que abordam tópicos de geometria, por meio de materiais manipuláveis, em termos do engajamento mútuo e repertório compartilhado. O referencial teórico utilizado foi a Perspectiva da Aprendizagem Situada, conforme Jean Lave e Etienne Wenger. O contexto desta pesquisa foram duas salas de aulas do 8º ano e do 9º ano da Rede Pública de Feira de Santana e de Salvador, respectivamente. Os procedimentos de coleta de dados utilizados foram a observação, entrevista e análise de documentos, sendo a primeira a fonte primária dos dados. A observação foi registrada por meio de filmagem; a entrevista e os documentos foram utilizados para subsidiar as interpretações dos dados coletados na observação. Os resultados apontam as seguintes formas de engajamento: o engajamento dos estudantes no contato preliminar com os elementos do material manipulável; o envolvimento dos estudantes no recorte dos quadrados, conforme as regras; o engajamento na associação do ângulo nulo à posição inicial dos palitos e o envolvimento na associação dos lados dos quadrados com os lados do triângulo. Além disso, os resultados sugerem as seguintes formas de compartilhamento de repertório: o uso compartilhado de ferramentas e termos; interpretações compartilhadas sobre o ângulo de 180º; compartilhamento de símbolos, expressões e termos geométricos e tentativas compartilhadas de ajustar a fórmula do teorema de Pitágoras.

Palavras-chave: Geometria. Materiais manipuláveis. Participação. Engajamento mútuo. Repertório compartilhado.

ABSTRACT

The present study aimed to investigate the participation of students in mathematics classes that address topics of geometry, through manipulative materials, in terms of mutual engagement and shared repertoire. The theoretical framework used was the Situated Learning Perspective according to Jean Lave and Etienne Wenger. The research context was two 8th grade and 9th grade classrooms of a public school from Feira de Santana and Salvador, respectively. The data collection procedures were observation, interviews and documents analysis, being the former the primary data source. The observation was recorded by filming; interviews and documents were used to support the interpretation of the data collected in the observation. The results point out the following forms of engagement: the students engagement in preliminary contact with the elements of the manipulative materials; the student involvement in the cutout of some squares, according to the rules given; their engagement in the association of zero angle to the starting position of the toothpicks and the involvement in the association of the sides of the square with the sides of the triangle. Furthermore, the results suggest the following ways of shared repertoire: the shared use of tools and terms; shared interpretations about the angle of 180 º; sharing symbols, expressions and geometric terms e attempts shared adjust the formula of the Pythagorean Theorem.

Keywords: Geometry. Manipulatives. Participation. Mutual engagement. Shared repertoire.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, proponho-me a discutir os seguintes elementos que configuram o presente estudo: objetivo da pesquisa, revisão de literatura e fundamentação teórica. Inicio as explanações a partir do contato com o problema de pesquisa, em interface com a minha trajetória de formação, desde a graduação até a fase de escrita da dissertação. Além disso, apresentarei o método utilizado durante a pesquisa e também a estrutura da dissertação.

1.1 O CONTATO COM O PROBLEMA DE PESQUISA

Ao ingressar no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), Feira de Santana, na Bahia, no semestre letivo 2006.2, notei que no ambiente acadêmico já se discutia a respeito do atual ensino de Matemática. No que tange às disciplinas, notei que tinha uma afinidade maior pelas disciplinas ligadas à geometria, principalmente as voltadas para os conteúdos do Ensino Fundamental. É importante destacar, dentre tantas outras, as disciplinas Geometria Euclidiana I e II que contribuíram imensamente para a compreensão dos conteúdos de geometria plana e espacial. Destaco essas duas disciplinas do curso porque elas permitiram refletir mais sobre o ensino desse tópico da Matemática: geometria.

Foi um momento oportuníssimo para solidificar o conhecimento de geometria plana e espacial e adquirir informações novas, nessas duas disciplinas em particular. Além de experimentar diversas sugestões metodológicas, oportunizadas pela disciplina Instrumentalização para o Ensino de Matemática V, que trazia uma proposta de ensino baseada nas atividades do Projeto Fundão, projeto este que se apoiava em estruturas geométricas manipuláveis para o ensino de conteúdos geométricos.

Durante a graduação, participei de alguns eventos da área de Educação Matemática, como o XIII Encontro Baiano de Educação Matemática em 2009 e o X Encontro Nacional de Educação Matemática. Nesses eventos, até mesmo pelo caráter deles, discutia-se bastante sobre o ensino e, frequentemente, o ensino de geometria estava em debate.

Deste modo, fui me inteirando das discussões, ao tempo em que se intensificavam, ainda mais, as minhas inquietações referentes ao ensino de geometria. Em uma das

Orientações à Pesquisa[1], conheci a professora Ms. Jany Santos Souza Goulart que se tornou minha orientadora do Trabalho de Conclusão de Curso e convidou-me para participar de um Projeto de Extensão intitulado “O Visual e o Concreto no Ensino de Geometria: uma abordagem sobre a observação, estudo e construção de objetos geométricos com a participação de estudantes da Rede Pública de Ensino de Feira de Santana”.

Neste projeto, inicialmente, participei como colaborador/voluntário, mas, tão logo, concorri a uma bolsa de extensão, passei a ser bolsista desse projeto sob a orientação do professor Dr. André Luís Mattedi Dias. Por meio deste projeto, amadureci um pouco mais minhas ideias e participei da produção de dois relatos de experiência. A primeira produção textual referente a essa pesquisa, intitulada “O visual e o concreto no Ensino de Geometria” (PEREIRA; MELO, 2009) foi apresentada e publicada nos anais da Jornada de Extensão Universitária da Bahia.

Uma segunda produção textual, intitulada “Geometria no Ensino Fundamental: Experiência com um Projeto de Extensão” (PEREIRA; MELO; GOULART; DIAS, 2010), foi apresentada e publicada nos anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática (X ENEM). De maneira geral, a experiência com o projeto mostrou-se valiosa, pois contribuiu e favoreceu a inserção do caráter de pesquisa no contexto extensionista.

Na graduação, minhas inquietações, naquele momento, estavam voltadas para a produção de significados por meio do uso de materiais manipuláveis no ensino de geometria. O fato de alguns tópicos da matemática, e em particular da geometria, possuírem alto grau de abstração que muitas vezes os estudantes não conseguem empreender, traz à luz algumas alternativas de estudo aceitáveis, a exemplo da utilização de materiais manipuláveis.

Além disso, o presente trabalho justifica-se pela necessidade de contribuir para a discussão sobre o ensino de geometria no Ensino Fundamental, acrescentando a essa discussão a questão dos materiais manipuláveis como elementos integrantes no processo de ensino-aprendizagem.

Autores como Pavanello (1989, 2004), Maciel e Maciel (2010), Rego et al. (2003) apontam que o ensino tem sofrido defasagem. De acordo com os autores citados, a geometria vem sendo apresentada no final dos livros didáticos e trabalhada apenas no final do ano letivo. Para alguns autores, cada vez mais esta disciplina vem deixado de ser abordada devido à insegurança dos professores. Em casos mais restritos, eles argumentam que a geometria é

[1] No curso de Licenciatura da Universidade Estadual de Feira de Santana, constam, na grade curricular, quatro disciplinas chamadas Orientação à Pesquisa I, II, III e IV. Estas disciplinas são voltadas às orientações referentes ao Trabalho de Conclusão de Curso, a monografia.

tratada com bastante formalidade, sob influência dos movimentos que trouxeram rigor excessivo ao ensino da geometria (PAVANELLO, 2004).

A insatisfação, a exemplo dos autores citados, com o ensino de geometria se manifestava analogamente à insatisfação com o ensino de Matemática de maneira geral. Burigo (1989, p. 40) salienta que

> as aulas de Matemática eram expositivas, sendo que nem sequer a resolução de exercícios pelos alunos em sala de aula era uma prática generalizada. Quando era feita, o que se apresentava aos alunos eram exercícios padronizados, que deveriam ser resolvidos conforme o “problema modelo”, com ênfase nos cálculos volumosos. As demonstrações dos teoremas eram expostas pelo professor e decoradas pelos alunos, para apresentação nas provas. Os recursos utilizados não iam além do giz, quadro-negro e livro-texto, se houvesse.

Tradicionalmente, na maioria das vezes, a execução de algoritmos e memorização de fórmulas referentes a conteúdos de geometria e desvinculadas de significados para os estudantes era frequente nas aulas de Matemática. No entanto, é importante que os jovens possam tornar-se mais ativo no processo de ensino-aprendizagem e, do mesmo modo, possam associar as duas dimensões: experimentação e abstração. Em nosso entender, partir do concreto pode favorecer a experimentação e esta pode favorecer o processo de abstração de ideias e conceitos matemáticos, inclusive na área de geometria, que é importante para a consolidação do conhecimento.

Diante disso, acredito que a utilização de atividades de cunho exploratório e investigativo, com materiais manipuláveis[2], para o ensino de geometria pode ser eficaz[3] no sentido de dar lugar ativo ao estudante no processo de reconhecimento de relações dos elementos do material com ideias matemáticas ou estabelecimento de relações que ainda não foram pensadas pelo professor, por exemplo. Pais (2000) discute que o uso dos manipulativos[4] no Ensino de Geometria deve ser alvo de uma reflexão mais aprofundada no sentido de comprovar a sua aceitação no ensino e o nível de aprendizagem favorecido pela sua utilização nas práticas pedagógicas. Assim, parece aceitável que os manipuláveis funcionem

---

[2] Considero como materiais manipuláveis conforme a definição de Reys (1971 apud MATOS; SERRAZINA, 1996, p.78). Reys (1998) considera que esses elementos são “objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar”, dobrar, girar, justapor, etc.

3 Note, porém, que a intenção não é levantar a bandeira do empirismo em detrimento do racionalismo. Pelo contrário, a ideia é trabalhar associando essas duas dimensões: empirismo e racionalismo.

[4] No intuito de evitar repetições, por vezes, utilizarei as palavras *materiais*, *objetos*, *manipuláveis*, *manipulativos* como sinônimos para *materiais manipuláveis*.

como potencializadores da abstração de ideias e conceitos matemáticos, permitindo que o estudante transcenda a exploração pela manipulação.

Conforme discutido por Pais (2000), há tendências extremistas da racionalidade e do empirismo geométricos. A exploração não deve ter fim em si mesmo, nem a racionalidade sobrepujar a experimentação. Assim, o contexto social da prática da matemática escolar permite a coexistência destas duas dimensões: experimental e racional.

Além disso, no quadro internacional, Meissner (2001) salienta, em seu estudo sobre o processo de ensino/aprendizagem de geometria, que não tem sido muito investigado como as crianças aprendem geometria. Ele apresenta como exemplo que apenas 5% das dissertações de mestrado em Educação Matemática são referentes à geometria. Para comparar com o quadro nacional, Arbach (2002) argumenta que foram encontradas dezessete dissertações e uma tese de doutorado que tratam do ensino de geometria plana, em busca feita a Universidade Estadual Paulista (UNESP) – Rio Claro e Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP).

1.2 REVISÃO DE LITERATURA

Os currículos e programas escolares têm dado menos importância para o campo geométrico. Isso tem se evidenciado porque a geometria perdeu espaço para o campo algébrico nas décadas de 60 e 70 (REGO et al., 2003). Além disso, muitos professores se sentem menos preparados e inseguros quando se trata de geometria (PAVANELLO, 2004). Por conta disso, uma das soluções utilizadas pelos docentes para contornar a situação de insegurança tem sido usar unicamente os livros didáticos e, muitas vezes, apenas reproduzindo aquilo que está nele.

Mesmo havendo várias possibilidades didáticas para a formação de conceitos geométricos, como aponta Proença e Pirola (2011), algumas pesquisas, como a de Pais (2011) e Pirola e Brito (2001), apontam que tem se valorizado mais a memorização de regras, definições e fórmulas. Esse movimento pode contribuir pouco para a formação desses conceitos geométricos, o que possivelmente desestimula os estudantes no processo de aprendizagem. (PROENÇA; PIROLA, 2011).

Nesse sentido, Gonçalez e Brito (2001) apontam que os estudantes que tem contato com o conhecimento matemático “pronto” e sem possibilidades de interferências tornam-se, à medida que vão entrando em contato com ele, mais incapazes de transpor o que aprenderam ou de utilizarem isso em outras situações que requisite tal conhecimento.

Ao comparar as ideias de Gonçalez e Brito (2001) e Proença e Pirola (2011), verifica-se que quando o estudante desenvolve um conceito geométrico ele pode não apenas resolver situações simples que exijam a percepção do que ocorre, mas, também, pode utilizar o que tem de conhecimento e generalizar para outros exemplos referentes ao conceito ou conhecimento em questão.

Em paralelo a isso, o estudante pode perceber as ações e suas consequências, predizer um fenômeno e notar correlações em outros, no intuito ou com a possibilidade de resolver problemas de cunho intelectual mais complexo. Pais (2011), nesse ponto, traz uma contribuição importante quando argumenta que a compreensão apontada acima se refere ao movimento de chegar a níveis aceitáveis de generalização e abstração. E mais, é aceitável que dar ênfase a memorização descompassada de fórmulas e regras sem dar o suporte com conceitos, em sala de aula, pode levar o estudante a apresentar dificuldades em atividades matemáticas.

A defasagem acima mencionada pode ser também discutida a partir da baixa pontuação dos estudantes em questões que envolvem a geometria. Para essa argumentação, Proença e Pirola (2011) salientam que essas questões não são abordadas em sala de aula, ou, quando são, aparecem de maneira bastante precária.

Em relação à formação docente, Guimarães, Vasconcellos e Teixeira (2006), argumentam que essa tem uma estrutura precária, sem que haja o devido preparo pedagógico-metodológico desses profissionais. De acordo com as autoras, os cursos, estruturados dessa forma, propiciam aos formandos algumas limitações ao ingressarem no mercado de trabalho, pois eles concluem o curso sem conhecimento da geometria e da importância desta disciplina e de seus conteúdos no ensino fundamental.

Diante disso, a geometria, muitas vezes, não vem sendo explorada de maneira satisfatória, associando o concreto e o abstrato. Conforme Nacarato (2005) discute, há estudos que apontam para a superação da perspectiva da geometria baseada apenas na abstração, preenchida de ideias imutáveis, ou apenas na experimentação. Nesse sentido, concordo com uma abordagem da geometria que defende a associação entre a experimentação e a abstração.

Contudo, apesar dos problemas enfrentados, esse campo da matemática vem tentando reconquistar seu espaço como essencial na formação dos estudantes. Os currículos mostram-se mais preocupados com o ensino de geometria, dando maior atenção para esta que é tão relevante para os estudantes quanto a álgebra e aritmética (PIRES; CURI; CAMPOS, 2000).

Pais e Freitas (1999) apontam para a importância do ensino da geometria, uma vez que esta propicia o desenvolvimento do raciocínio do estudante, a aplicação em outros conteúdos e sua utilidade em situações práticas da vida.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) sugerem que os professores de Matemática explorem situações nas quais sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, garantindo a visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações. No bloco de conteúdos Espaço e Forma, esse documento contribui afirmando que se deve trabalhar o estudo das formas, noções de posição, localização de figuras e outros elementos. Em consonância com isso, a exploração deve ser feita a partir de pinturas, desenhos, artesanato, dentre outras. Isso deve acontecer para que o estudante possa estabelecer elos entre a matemática e outras áreas do conhecimento.

Para tentar suprir a insuficiência do ensino de geometria e favorecer o desenvolvimento de habilidades tais como percepção espacial, manipulação, percepção de propriedades e outros, os PCN (1998) sugerem um trabalho que enfatize a relação entre os conteúdos estudados em sala de aula com as formas geométricas presentes no mundo físico, possibilitando a exploração de formas geométricas espaciais. Para tanto, é necessário que outro enfoque seja dado à geometria, ou seja, os aprendizes precisam manipular objetos e inter-relacioná-los com os conteúdos trabalhados.

Nessa ótica, o estudante deve aproximar-se de atividades que favoreçam a manipulação de modelos concretos e de objetos presentes no seu dia a dia, na tentativa de encontrar um modelo mais visível ou mais próximo da realidade, fazendo referência àquele que facilite ou favoreça as interpretações e permita que ele faça descobertas. Nesse sentido, Passos (2004) argumenta que os ativistas sustentam que ação e manipulação são fundamentais e necessárias para favorecer o processo de aprendizagem e por isso privilegiam materiais manipuláveis. Mas o que são materiais manipuláveis?

Sob a ótica de Reys (1971, *apud*. Passos, 2004, p. 2), os materiais manipuláveis podem ser conceitualizados como "objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma idéia". Passos (2004, p. 2) ainda completa esse conceito ao afirmar que "os materiais manipuláveis são caracterizados pelo envolvimento físico dos alunos numa situação de aprendizagem ativa". Desse modo, entendemos os materiais manipuláveis como objetos ou coisas que o estudante é capaz de sentir, tocar, dobrar, girar, comparar, sobrepor, justapor, perceber vértices, arestas etc.

Nesse sentido, é de fundamental importância destacar um trecho presente em Castillo (1989, apud Kaleff, 1994, p.22):

> [...] o que caracteriza o trabalho de Geometria nas séries iniciais é a predominância de concretização sobre a simbolização. Mais importante que "definir" e "designar", como ações meramente repetidoras das palavras e proposições que o professor fala ou escreve, é observar, descrever, comparar, tocar, construir. Esta fase inicial se caracteriza por atividades ligadas à ação: o aluno manipula e constrói objetos das mais variadas formas para então analisar suas características físicas e geométricas.

No entanto, é necessário frisar que os materiais utilizados em sala de aula só fazem sentido se houver interpretação das relações destes com os conceitos envolvidos, além da interação entre os estudantes com o próprio material (NACARATO, 2005). Para essa autora, havendo a relação dos estudantes com os materiais é mais provável que os estudantes construam as relações que o professor objetiva (MATOS; SERRAZINA, 1996 *apud*. NACARATO, 2005).

Nesse caso, Moyer (2001) corrobora com Nacarato (2005) quando argumenta que os estudantes, muitas vezes, aprendem a usar os materiais manipuláveis de forma meramente mecânica sem pouca ou nenhuma aprendizagem dos conceitos matemáticos por trás dos procedimentos realizados no processo. A autora salienta, ainda, que o uso efetivo desses materiais para ensinar matemática, e mais precisamente geometria, é mais complicado do que parece.

Torna-se aceitável sua argumentação pelo fato de que as relações matemáticas, que são almejadas pelo professor quando pensa em trabalhar com tais recursos, devem ser impostas sobre os materiais. Em outras palavras, a própria ideia que se tem do objeto deve, sobremaneira, conectar-se com a representação externa ou manipulável deste para que o estudante possa, assim, perceber conceitos ou elementos matemáticos no objeto analisado.

Estudos mais recentes destacam que o uso de materiais em sala de aula possibilita ao estudante experimentação, identificação de propriedades geométricas, classificação, seleção e movimentação de possíveis peças do material, apropriação de vocabulário específico relacionado às formas geométricas elementares (KALLEF; VOTO; ROSA, 2010; MACIEL; MACIEL, 2010). Nessa perspectiva, os estudantes podem comparar objetos, discernir em largura, comprimento, volume, quantidade de arestas, faces, vértices, dentre outros.

A partir dos materiais manipuláveis é possível haver observação, manipulação e exploração dos objetos reais ou próximos do real, possibilitando construção e reconstrução, além de proporcionar a formação de conceitos geométricos (MACIEL; MACIEL, 2010). Estudos envolvendo materiais manipuláveis podem ser encontrados na literatura. Destacarei alguns deles no intuito de evidenciar as produções nessa área.

Proença e Pirola (2011) realizaram uma pesquisa com o objetivo de investigar e analisar o desempenho de estudantes do Ensino Médio na identificação de exemplos e não-exemplos de polígonos e poliedros, tendo em vista os atributos definidores e atributos irrelevantes. O trabalho dos referidos autores é relevante no sentido de trazer contribuições importantes no que se refere a conceitos geométricos e dificuldades na interpretação ou aprendizagem destes. Nesse estudo, foi apresentada uma atividade na qual era preciso associar cada figura a uma de três alternativas: polígono, poliedro ou nda (nenhuma das anteriores).

O estudo de Barbosa et. al (2008) objetivou apresentar atividades que estimulassem o raciocínio geométrico para estudantes regulares e com deficiência visual. A autora trabalhou o tema simetria em algumas atividades, tendo como pressuposto o aparecimento de uma questão de simetria que apareceu na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática para as Escolas Públicas (1ª OBMEP – nível 2 – 1ª fase, 2005). Nesse estudo, eles concluem que essa abordagem permite aos estudantes "descoberta, iniciativa, originalidade e crítica, onde a criatividade não seja sufocada ou ignorada" (BARBOSA, et.al, 2008, p. 7).

Outras tantas atividades com materiais manipuláveis enchem o rol das publicações em Educação Matemática. Maciel e Maciel (2010), Kaleff, Votto e Rosa (2010) e Batistela (2010), por exemplo, apresentam algumas atividades com materiais didáticos[5], apresentando uma sequência de atividades que favoreçam a manipulação, observação e exploração de objetos cotidianos como canudos, palitos e espelhos. Nesse sentido, além de estimular conceitos geométricos, noção de direção e dimensão a partir do trabalho com poliedros ou montagem de figuras com os palitos e canudos, foi possível proporcionar um ambiente instigante, no qual os estudantes puderam participar ativamente de todo o processo de construção do seu próprio conhecimento.

Além do mais, nesse percurso, tornou-se possível utilizar o material para tornar as aulas potencialmente atrativas, despertando curiosidades, estimulando os estudantes a questionarem, descobrindo similaridades ou relações entre as partes do material, entre as produções de cada estudante ou grupo, dentre outros.

Souza (2011) realizou um estudo com o objetivo de compreender a participação dos estudantes na aula de Matemática ao fazer uso de materiais manipuláveis e abordou o tema

[5] Materiais didáticos podem ser compreendidos tais como materiais manipuláveis.

em dois contextos: ensino fundamental e ensino superior. A autora conclui que os estudantes podem participar de aulas de Matemática definindo, deduzindo, reconhecendo objetos matemáticos nos materiais manipuláveis.

Nessa ótica, são diversas formas de participação que poderiam ser depreendidas do mesmo trabalho, por visões diferentes. Assim, é seguro afirmar que, de maneira alguma, na literatura que trata da temática, tenham sido esgotadas as discussões sobre materiais manipuláveis e participação. Desse modo, é necessário discutir outras formas de participação com outros participantes e em outros contextos, o que ocorre nelas e quais são as características de cada uma delas.

Os materiais manipuláveis podem gerar implicações para o ensino de geometria. Nessa perspectiva, proponho-me, nesta pesquisa, compreender como os estudantes do Ensino Fundamental participam de aulas de Matemática que abordam tópicos de geometria ao utilizar materiais manipuláveis, em termos de elementos específicos que são engajamento mútuo e repertório compartilhado[6].

1.3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A perspectiva da Aprendizagem Social, conforme é apresentada por Jean Lave e Etiene Wenger em seu trabalho intitulado "*Situated Learning - Legitimate peripheral participation*", no ano de 1991, sugere o olhar sobre conhecimento, significados e interações como produtos de atividades sociais (FRADE, 2003). Muitos aspectos são levantados e concernentes às práticas fora da sala de aula nessa teoria. Um dos muitos elementos a serem considerados diz respeito ao modo pelo qual uma pessoa passa a ser considerada participante. Os procedimentos de tomada de decisões são parte de um processo que toda pessoa a ser considerado participante deve experimentar.

Em todo caso, a aprendizagem decorrente dessa participação reconhecida vincula-se ao desenvolvimento de identidades. Essas identidades são determinadas dinamicamente ao longo do processo da participação em comunidades de prática. Desse modo, a identidade do indivíduo é mutável e se dá à medida que ele vai obtendo contato com as mais variadas práticas pertencentes à sua vivência.

[6] Repertório compartilhado e engajamento mútuo são termos utilizados por Lave e Wenger (1991), os quais serão discutidos na próxima seção.

Outro fato importante a ser constatado é que, em muitos casos e somente com uma leitura desatenciosa da teoria, confunde-se muito o significado de *situado* presente em tal teoria. Por vezes, *situado* parecia referir-se às ações das pessoas localizadas no tempo e espaço. No entanto, em outros casos, essa mesma expressão parecia referir-se a casos particulares como se as ações, por mais que fossem sociais, eram no sentido estrito; ou que as ações praticadas dependiam do seu contexto social originário para dar-lhes significado (LAVE; WENGER, 1991).

Imediatamente, notamos que o significado de *situado* vai muito além disso. Pelo contrário, aprendizagem não é meramente situada na prática como se tivesse acontecido em algum lugar localizado, assim há uma atemporalidade enraizada na prática. Logo, nem sempre um conhecimento mais geral vai se encaixar em todas as situações (LAVE; WENGER, 1991). Em outras palavras, existem circunstâncias particulares que exigem conhecimentos específicos para dar conta de tal situação.

Pensando desse modo, a prática social é sobremaneira determinante na aprendizagem e, por isso, é possível afirmar que a aprendizagem é entendida como um aspecto integral e inseparável da prática social, sendo essa estritamente formadora da prática e esta, por sua vez, implica em participação, que é elemento constitutivo da aprendizagem (LAVE; WENGER, 1991).

É importante destacar que a prática social acontece dentro de um contexto social e histórico e, por isso, existem práticas e não uma única prática. Esse contexto social e histórico dá significado ao que é feito, produzido ou dito na prática social, é o meio pelo qual a prática toma sentido. Além do mais, a prática envolve o modo como se vê o mundo, papéis e deveres delimitados, procedimentos, simbologia comum aos membros, dentre outros. Esse é o modo como Wenger (1998) entende a prática social. Sendo assim, discutir prática remete-nos às formas de agir, as quais recebem significados que são comuns aos membros de um grupo ou equipe socialmente constituída.

Outro conceito trazido por Wenger (1998) diz respeito às comunidades sociais e como a participação por ser definida em termos delas. Para ele, participação compreende a experiência social de viver no mundo em termos de ser membro em comunidades sociais, ou seja, diz respeito a um processo complexo que envolve o fazer, falar, pensar e pertencer. Comunidade social, nesse sentido, sugere rotinas comuns, pensamentos por vezes convergentes, modos de falar compartilhado.

Além disso, é possível esboçar os três conceitos norteadores de aprendizagem, conhecimento e identidade, são eles: 1) Engajamento/envolvimento mútuo, que está organizado em torno dos objetivos que a comunidade objetiva alcançar; 2) Um empreendimento conjunto, que diz respeito à negociação mútua e responsabilidade da qual se deve prestar contas (objetivo comum em empreender); 3) Um repertório compartilhado (rotinas, linguagens, símbolos, etc. (WENGER, 1998, p. 73). Assim, participar de uma comunidade significa envolver-se nas práticas sociais, ser reconhecido e reconhecer o outro como participante. As três dimensões poderiam ser aqui discutidas, mas os próximos capítulos darão conta apenas do engajamento e do repertório, pois foram mais nítidos nos dados, além de se constituírem os conceitos centrais desta dissertação.

Com critérios tão bem delineados pelo autor, surge a necessidade de reconhecer quando ocorre a participação ou não, tendo em vista não se pode banalizar o conceito de participação, desprezando o reconhecimento mútuo inerente a tal conceito. Isso quer dizer, por exemplo, que uma aluna pode estar engajada no *jogo da velha* e não ser reconhecida pelos demais membros do grupo que se destinava a compreender o Teorema de Tales. Por mais que essa jovem estivesse presente no grupo, ela não compartilhava dos mesmos objetivos do grupo e, por tal, não obtinha o reconhecimento do grupo. Nesse mesmo sentido implica dizer que realizar a atividade não significa, necessariamente, estar participando da mesma.

Diante disso, *aprender* vincula-se estritamente a *participar*. Nas relações entre participantes de um grupo, notavelmente, registra-se mudanças na forma de participação do indivíduo. Ora o indivíduo participa mais ativamente, ora menos ativamente, por exemplo. A aprendizagem é caracterizada por essa mudança na forma de participação do indivíduo no exercício de sua participação numa prática até porque não necessariamente todos os membros contribuem da mesma maneira ou intensidade (LAVE; WENGER, 1991).

Num mesmo grupo de indivíduos coexistem membros que compartilham linguagens e compartilham o conhecimento e com objetivos comuns. Esses membros trabalham juntos num empreendimento comum e mantendo sempre o engajamento entre eles. Desse modo, a participação é responsável por conectar os membros às “histórias compartilhadas de aprendizagem” dos indivíduos (WENGER, 1998, p. 86).

Nesse sentido, podemos destacar três elementos indissociáveis de uma prática social: um repertório compartilhado seja na forma de linguagem, símbolos, ferramentas ou técnicas; um empreendimento conjunto, como uma tarefa a ser realizada por todos; e um objetivo mútuo, ou seja, interesses convergentes para realizar tais tarefas. Esse último elemento dita o compromisso com o grupo e diferencia o membro de outras pessoas fora do grupo. As ferramentas das quais falamos são recursos úteis para os afazeres da prática, isto é, úteis para os membros desenvolverem suas atividades na prática. Na prática da matemática escolar, foco desta pesquisa, as tesouras, os hidrocores, os lápis de cor, os palitos, as taxinhas, partes do material ou o próprio material configuram-se como ferramentas com as quais as atividades da prática são possíveis e facilitadas.

Deste modo, um grupo de estudantes, estudantes e professor, de professores pode sim atender a esses elementos, não necessariamente de modo uniforme. Portanto, alguns aspectos da Perspectiva da Aprendizagem Situada (LAVE; WENGER, 1991) podem ser reinterpretados para adaptar-se a sala de aula. Sustentavelmente, uma sala de aula é mais do que um conglomerado de estudantes. Um objetivo está presente, mesmo que pouco visível: o de atingir um propósito ou empreendimento mútuo. Possivelmente, o fim ou o começo da prática social, a matemática escolar, seja estabelecer o diálogo entre aprendizagem e ensino.

Nesta direção, uma sala de aula de Matemática em que se utilizam materiais manipuláveis possui relações distintas de outros ambientes, são relações peculiares visando alcançar a matemática escolar. Na aula de Matemática que aborda, mais precisamente, o tópico geometria, professor e estudantes podem possuir um objetivo comum como aprender conceitos geométricos a partir da manipulação de cubos feitos de papelão ou simplesmente ser aprovado na disciplina geometria ou matemática. Além do mais, eles podem compartilhar um modo de expressão diferenciado dos demais grupos, em diferentes contextos sociais, ao usar expressões como cálculo da área do triângulo ou volume do poliedro. Soma-se a isso, um possível compromisso que é comum aos membros, seja ele o de dedicar-se às tarefas indicadas ou mesmo não levar falta ou anotações na caderneta.

Certamente, tornar-se um participante é, além de atender aos três elementos acima citados, compartilhar dos significados atribuídos pelos demais estudantes e pelo professor, bem como engajar-se na atividade, utilizando o material, isto é, manipulá-lo de acordo com as indicações do professor para que seja possível chegar às compreensões geométricas planejadas pelo professor.

Wenger (1998) preocupa-se com o que é entendido por *significado* e traz uma discussão importante em seu livro. A interação que é feita por um indivíduo e uma revista, um livro, uma caixa, um triângulo ou um quadrado ou entre pessoas não deixa de fazer parte da negociação de significados apontada pelo autor. São interações não estáticas e que, comumente, possibilita-nos atribuir significado seja a um cubo, seja a um lápis ou um conjunto complexo de materiais manipuláveis. Para exemplificar a questão, quando a professora argumenta que os estudantes poderiam chamar aquele recorte de papel em formato de círculo, desprezando sua espessura, ela está dando sentido à negociação de significados.

É importante ressaltar, ainda, que os significados, inclusive os atribuídos às atividades que envolvem materiais manipuláveis, devem ter certa aproximação com os significados já estabelecidos social e historicamente para que não sejam recusados pela estrutura social do grupo. Com isso, a seguinte conclusão é aceitável: as situações sociais possibilitam a negociação de significados e com isso, por exemplo, objetos, podem ter novos significados a depender do contexto a qual pertença (WENGER, 1998).

Outro conceito importante diz respeito à identidade. Aprendizagem e noção de identidade andam juntas. Identidade pode ser compreendida como a maneira pela qual uma pessoa é vista pelos outros e como ela se vê e se compreende (LAVE; WENGER, 1991). Desse modo, identidade também depende do meio social ao qual o indivíduo pertence, ou seja, modificando o ambiente, a identidade do indivíduo também sofre, de algum modo, modificações.

Almouloud et al. (2004) apresentou em seu estudo os principais resultados de um projeto que objetivou investigar questões referentes à aprendizagem, além de reconhecer que papel os professores atribuem à geometria no processo de formação do estudante. Um dos resultados apontou um processo de mudança principalmente nas observações dos professores e nas contradições advindas dos confrontos com a realidade. Além disso, os autores sugerem mudança pessoal e grupal ocorrendo simultaneamente, tendo em vista o caráter compartilhado das experiências e das relações de aprendizagem do grupo. Um professor teve seu comportamento e postura modificados, durante as atividades, quando passa a tentar entender como o outro pensou, ao invés de apenas sugerir que o outro apagasse, como fazia. Esse professor, certamente, não é mais visto como antes, os demais integrantes o reconhecem como alguém para o qual eu preciso justificar o que penso. Dessa maneira, tal efeito sugere mudança de identidade do indivíduo, tendo em vista que ele também não se enxerga mais como antes.

Nesta direção, o relato de Bordin e Bisognin (2011) apresentou resultados de uma pesquisa que analisou as contribuições da utilização de jogos pedagógicos e materiais manipuláveis no processo de ensino e aprendizagem das operações com números inteiros. As autoras concluem que houve mudança de atitude dos estudantes em relação à Matemática. Além disso, elas notaram que os participantes se envolveram no processo de descoberta e aplicaram os conhecimentos trabalhados com o material manipulável. O engajamento esboçado nas situações de descobertas de relações presentes no material, às operações numéricas e a aplicação disso durante o jogo, inclusive quando abandonam o material e realizam as operações mutuamente e sem o material manipulável, aponta para o envolvimento dos sujeitos em uma situação particular.

Sendo assim, uma sala de aula que utiliza os materiais manipuláveis dentro dessa configuração traz como consequência modificações na participação e na identidade dos estudantes e do próprio professor, tornando-se um ambiente modificado em que as discussões e compreensões de conceitos matemáticos se voltam e se dão a partir do manuseio do material. Desse modo, constituir algumas reflexões e entendimentos referentes às interpretações da Perspectiva da Aprendizagem Situada segundo Lave e Wenger (1991), sobre um dos aspectos particulares da aprendizagem, para trazer à tona possíveis contribuições teóricas para a área.

Assim, no capítulo II, que se refere ao artigo I, discutirei as formas de participação em termos dos modos de engajamento mútuo dos membros do grupo. No artigo 2, referente ao capítulo III, analiso como se dá o compartilhamento do repertório utilizado na prática do grupo observado. Esses conceitos podem dar suporte à compreensão da participação no contexto da sala de aula, onde ocorre a matemática escolar, no sentido de compreender como os participantes fazem as coisas, como se envolvem, como utilizam os recursos da prática para alcançar os objetivos, ao usarem matérias manipuláveis.

1.4 PROBLEMA DE PESQUISA

Na delimitação do problema de pesquisa, os conceitos *engajamento* e *repertório compartilhado*, da perspectiva da aprendizagem situada (LAVE; WENGER, 1991), são utilizados para investigar a participação de estudantes em aulas da disciplina Matemática ao utilizarem materiais manipuláveis para abordar tópicos de geometria. Assim, apresento o problema nos seguintes termos:

Como estudantes participam de aulas de Matemática que abordam tópicos de geometria ao utilizar materiais manipuláveis?

Diante disso, tratarei a participação em termos mais específicos, segundo duas dimensões apontadas por Lave e Wenger (1991):

Como estudantes se engajam em aulas de Matemática ao utilizarem materiais manipuláveis?

Como estudantes usam o repertório compartilhado em aulas de Matemática ao utilizarem materiais manipuláveis?

1.5 JUSTIFICATIVA PARA A PESQUISA

Como foi discutido anteriormente, poucos são os trabalhos que investigam como estudantes aprendem geometria (MEISSNER, 2001), menos ainda tem utilizado a perspectiva da aprendizagem situada (LAVE; WENGER, 1991) como teoria norteadora. Em contrapartida, muitos trabalhos contribuem com atividades que utilizam materiais manipuláveis (KALLEF, VOTO; ROSA, 2010; MACIEL; MACIEL, 2010). Diante disso, é uma oportunidade interessante unir pesquisa e aprendizagem em geometria, materiais manipuláveis e perspectiva da aprendizagem situada (LAVE; WENGER, 1991). Possivelmente, este olhar para os materiais manipuláveis, a partir deste referencial teórico, pode revelar novas compreensões sobre o tema. Além disso, as possíveis compreensões referentes às diversas relações presentes em sala de aula.

Nesse sentido, a perspectiva da aprendizagem situada (LAVE; WENGER, 1991) contribuirá de forma significativa por permitir um olhar para os fenômenos desencadeados das relações sociais entre os membros de um grupo. Com isso, analisarei duas dimensões apresentada por Lave e Wenger (1991), a saber: engajamento mútuo e repertório compartilhado, em dois grupos de estudantes do ensino fundamental das séries finais.

Como foi apresentado no tópico 1.1, meu percurso acadêmico foi marcado pela presença da utilização e estudos referentes aos materiais manipuláveis no ensino e aprendizagem de geometria. Enquanto pesquisador e educador, a investigação contribuiu para uma formação mais ampla, tendo em vista as contribuições da literatura e dos resultados que foram obtidos na pesquisa. Além disso, acredito que esse trabalho contribui no sentido de ampliar as discussões sobre a participação de estudantes e a utilização de materiais manipuláveis no ensino de geometria, considerando o engajamento e compartilhamento do repertório, ao tempo em que oferece subsídios para futuras pesquisas que venham a tratar do fenômeno aprendizagem na perspectiva da aprendizagem situada (LAVE; WENGER, 1991).

1.6 METODOLOGIA DA PESQUISA

Essa pesquisa trata de analisar a participação de estudantes durante a utilização de materiais manipuláveis, em aulas de Matemática, que envolveram dois tópicos de geometria: teorema de Pitágoras e ângulos fundamentais no círculo. Nesse caso, olhamos para a experiência social de dois grupos de estudantes do ensino fundamental das séries finais numa sala de aula, no que diz respeito aos seus comportamentos, sua comunicação, seu funcionamento organizacional, dentre outros. Para tal, utilizamos procedimentos para coletar os dados, como a observação, a entrevista e análise documental para enfim reunir, organizar e analisar os dados como um todo (ALVES-MAZZOTTI, 1999).

Todavia, é válido salientar que esse processo de análise e coleta não ocorreu de maneira linear. Aliás, a análise e a interpretação dos dados, em certa medida, foram feitas de forma interativa com a coleta de dados em dois encontros onde ocorriam aulas de Matemática, como argumenta Alves-Mazzotti (1999). Interessou-nos compreender e/ou analisar os fenômenos presentes na pesquisa. Assim, este estudo se classifica como sendo de natureza qualitativa.

Conforme Denzin e Licoln (2005), a pesquisa qualitativa é uma atividade situada que localiza o observador no mundo. Para os autores, o pesquisador envolve-se em um conjunto de materiais e práticas interpretativas para tornar o mundo mais visível, observando as ferramentas necessárias para isso. Tornar o mundo visível pode trazer como conseqüência mudanças no contexto de coleta em função da presença do pesquisador e da câmera, por isso é importante que o observador não interfira na dinâmica da aula e instale a câmera e deixe-a ligada mesmo antes da atividade começar. Essa ação pode favorecer, por exemplo, a descontração dos estudantes e do professor.

Nesse sentido, Miles e Huberman (1994) completam que a pesquisa qualitativa é iniciada para focar questões de pesquisa, o caso a ser estudado, os dados a serem coletados, e como estes dados serão manuseados e analisados. Deste modo, analisamos duas aulas, com duas professoras diferentes, uma chamada Ana e a outra Lúcia[7]. O intuito foi coletar os dados em salas de aula em que os estudantes faziam uso de materiais manipuláveis na abordagem do tópico geometria, objetivando compreender como se deu o fenômeno participação durante o desenvolvimento da tarefa, tendo em vista duas dimensões teóricas trazidas por Lave e Wenger (1991): o engajamento mútuo e repertório compartilhado.

Com isso, pretendemos, nesta pesquisa, gerar compreensões acerca das formas de engajamento mútuo e repertório compartilhado de dois grupos de estudantes, durante as aulas de matemática, entendendo suas experiências, bem como possibilitar a ampliação dos horizontes para futuras discussões acerca da aprendizagem, conforme entendem Lave e

---

[7] Esses foram os codinomes utilizados para nos referirmos às professoras, tendo em vista preservar suas identidades .

Wenger (1991). Nesse sentido, estamos explorando um contexto pouco explorado até então, de modo a gerar novos entendimentos a partir de uma situação particular.

As pesquisas qualitativas são caracterizadas pela possibilidade de uso de múltiplos procedimentos e instrumentos de coleta de dados que dependem da questão de pesquisa a ser respondida, além do campo a ser investigado (DENZIN E LICOLN, 2005). Para a recolha dos dados, considerando nosso problema de pesquisa, utilizamos a entrevista e análise de documento, bem como a observação, sendo esta última a principal técnica de coleta de dados. O processo de observação foi operacionalizado por meio da filmagem, o que tornou possível observar comportamentos conscientes e não-conscientes nas aulas de Matemática que abordaram o tópico de geometria, na qual se utilizava os materiais manipuláveis. Deram suporte à observação, as anotações em caderno e a análise dos registros dos estudantes, além de algumas compreensões a partir da entrevista[8] realizada com os estudantes, que subsidiaram os entendimentos dos elementos não capturados na filmagem.

A entrevista foi realizada com todos os integrantes (cinco de cada grupo) dos grupos observados, ao final da realização de cada uma das tarefas (imagens no final da sessão), tendo duração média de 5 (cinco) minutos cada entrevista. Os cincos membros foram reunidos em frente a câmera e ficaram à vontade para responder os questionamentos do pesquisador, os quais eram relacionados ao que havia ocorrido na aula e as impressões dos estudantes. Assim, as perguntas não eram direcionadas a nenhum estudante específico, o que os deixou à vontade para responder da maneira que desejassem (por exemplo, responder apenas uma pergunta, completar a resposta de um colega, etc.).

Para analisar os dados, inspiramo-nos nos procedimentos analíticos da grounded theory (CHARMAZ, 2006), referente a elaboração de códigos e categorias, o que não significa nosso comprometimento paradigmático com ela. Assim, estamos interessados em como olhar os dados brutos, transcrevê-los e analisá-los. A análise de dados, conforme é sugerida pela *grounded theory*, pode ser feita em etapas, isto é, linha a linha e assim procedemos.

Na primeira etapa, os vídeos foram assistidos várias vezes e as falas foram transcritas. Essa transcrição recebeu uma análise linha a linha (CHARMAZ, 2006). Dessa análise, foram criados alguns códigos em forma de frases curtas que resumiam as falas e ações dos participantes e que possuíam convergência de sentido, além de caracterizar momentos importantes da aula, nos quais era marcante o envolvimento mútuo dos estudantes em certas

[8] A entrevista não figurou no corpo da dissertação em função de apresentar-se de forma diluída, bastante fragmentada e com entendimento, por vezes, prejudicado quando lida sem o conhecimento da observação.

situações e o compartilhamento de uma linguagem própria. Os códigos foram agrupados e deram forma às categorias. Foram criados episódios a partir das categorias estruturadas. Assim, os episódios podem ser visto como um texto dotado de início, meio e fim, tendo como base códigos comuns, que dão corpo a uma categoria. Assim, o episódio se propõe a apresentar uma ideia acerca do foco escolhido.

Cada episódio apresentou uma introdução (*início*) para situar o leitor no contexto em que ocorreu aquela ideia. Possui um desenvolvimento (*meio*), para demarcar o que aconteceu no contexto - falas, gestos e manipulações – e o fechamento (*fim*) onde é feito um apanhado do que foi apresentado, esquematizando, assim, a categoria.

Assim, como exemplo, quando o estudante diz “aqui é cateto”, apontando para um dos lados do quadrado e fazendo referência a um dos lados do triângulo retângulo, o código “relacionando o quadrado com o triângulo” é adequado. Porém, a frase “esse lado é desse lado aqui”, quando o estudante aponta o lado do quadrado e aponta o cateto correspondente do triângulo, faz sentido o código “reconhecendo o lado correspondente no triângulo”. Assim, a categoria que os abarca é “Reconhecendo a relação dos quadrados com os lados do triângulo retângulo”.

Semelhantemente ao exemplo, os códigos foram agrupados de forma a representar um conjunto com características comuns, ou seja, a esse agrupamento de códigos chamados categorias. Nesse momento, entraram as contribuições da perspectiva da aprendizagem situada (LAVE; WENGER, 1991) como lente teórica para compreender como os estudantes participaram em termos de seu engajamento e compartilhamento de repertório. Assim, buscamos, nos dados, indícios de situações em que ocorriam o envolvimento dos estudantes, seja uma ação de recortar, seja de justapor, seja notar uma área, além de indícios de utilização compartilhada dos recursos da prática, seja um termo, uma ferramenta, uma história, uma experiência. Com isso, acredito que trarei contribuições para novas discussões que venham a complementar o presente estudo e avançar no sentido de compreender o fenômeno aprendizagem segundo Lave e Wenger (1991).

Os resultados de pesquisas foram confrontados com a revisão de literatura e analisados sob a lente da perspectiva da aprendizagem situada[9] que desloca o foco do indivíduo para o ser social. Nesse sentido, foi possível também confrontar, confirmar, revisar alguns aspectos da teoria e da revisão de literatura conforme veremos ao longo deste estudo. A seguir, apresentamos as tarefas que foram desenvolvidas pelas professoras participantes da pesquisa.

---

[9] Conforme discutida na sessão Fundamentação Teórica.

TAREFA

1) Vamos utilizar os materiais manipuláveis que vocês receberam e conhecer um pouco mais sobre ângulos. Para isso, vamos seguir os passos abaixo e responder as questões.

Inicialmente, usaremos apenas a representação do círculo.
a) Dobre a representação do círculo ao meio. O que aconteceu?
b) Dobre ao meio novamente. O que você pode observar ao realizar esse passo?
c) Desfaça os passos anteriores e trace segmentos de retas coloridas em cada marca e relate o que você observou. Agora, vamos utilizar também os palitos entregues pela professora.
d) Fixe as extremidades dos palitos no ponto de encontro dos segmentos de reta. Depois, posicione os palitos um sobre o outro. Existe ângulo nesse caso? Caso exista, qual a sua medida em graus e como podemos nomeá-lo?
e) Gire um palito em direção ao segmento de reta seguinte. Represente no verso da folha o ângulo formado entre esses segmentos. O que você observou a partir desse procedimento?
f) Escolha uma letra para o ponto de encontro dos segmentos de retas e para cada palito. Nomeie os elementos do ângulo.
g) Gire o mesmo palito em direção ao segmento de reta seguinte. Represente no verso da folha o ângulo formado entre esses segmentos. O que você observou a partir desse procedimento? Agora, retire os palitos e desfaça os comandos na representação do círculo, voltando para a posição em que estava na letra b e dobre ao meio novamente. Desfaça todos os comandos e trace com cores diferentes das anteriores os segmentos de retas que surgiram.
e) Forme um ângulo raso, e gire um dos palitos em direção ao segmento de reta seguinte. Represente abaixo o ângulo maior e menor aos segmentos com cores distintas. Quantos ângulos têm no seu desenho?
f) Gire o palito mais uma vez, em direção ao segmento de reta seguinte. Represente abaixo o ângulo formado entre esses segmentos. Qual ângulo se formou após esse procedimento?
g) Continue a girar o palito em direção ao segmento de reta seguinte. Represente abaixo o ângulo convexo formado. Qual a característica desse ângulo, com relação ao ângulo de 90º (ângulo reto)?
h) Retorne o palito dois segmentos e represente o ângulo formado. Qual a característica desse ângulo, com relação ao ângulo de 90º (ângulo reto)?

Figura 1 – Tarefa desenvolvida pela professora Ana

TAREFA

Oi pessoal, vamos agora trabalhar com uma relação métrica fundamental no triângulo retângulo. Para isso, vamos usar um material muito interessante.

Caro aluno, de posse do material emborrachado, siga as orientações abaixo:

1) Recorte os quadrinhos amarelos e vermelhos;
2) Cubra a área da figura azul com os quadrinhos recortados;

Agora, responda as seguintes questões:

1) Escreva que conclusão você tirou do experimento.
2) Tente escrever uma expressão que torne esse experimento uma regra geral. Anote abaixo essa expressão.

Figura 2 – Tarefa desenvolvida pela professora Lúcia

1.7 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

A dissertação foi estruturada no formato *multipaper* por considerar que o formato tradicional não privilegia o processo de produção para um público maior, ficando sua audiência e disseminação limitadas a um grupo restrito de pessoas (DUKE; BECK, 1999). Tal formato demanda do pesquisador, em formação, uma das atividades que será requisitada no exercício da sua atuação: a produção de artigos que possuem autonomia e podem ser enviados para publicação em periódicos. Nesse sentido, acredito que o formato *multipaper* favorece a disseminação dos resultados do trabalho, beneficiando assim o diálogo/debate entre os pares.

Todavia, uma questão, se não negativa, pelo menos crucial, a respeito do formato *multipaper* é a impressão de repetição de informações nos capítulos. O contexto e a metodologia, por exemplo, precisam ser apresentados mais de uma vez, então são lidas mais de uma vez. Ainda assim, acreditamos que a reescrita de cada sessão pode oferecer leituras diferenciadas e, portanto, apresentação de informações ainda não feita ou até mesmo a compreensão por parte do leitor de aspectos não vistos.

Dessa maneira, a dissertação está estruturada em capítulos e artigos. Sendo o primeiro capítulo destinado a apresentar o objetivo geral da dissertação e específicos, a justificativa para o estudo, a fundamentação teórica, a revisão de literatura, o método de estudo e o contato com o tema de pesquisa. O primeiro capítulo faz uma apresentação da dissertação, de maneira geral, enquanto que o segundo e terceiro capítulos foram escritos na forma de artigos independentes, os quais serão submetidos à publicação.

Assim, no segundo capítulo deste trabalho apresento o primeiro artigo cujo objetivo é analisar como os estudantes se engajam nas aulas de Matemática envolvendo tópicos de geometria, ao utilizarem materiais manipuláveis, justamente para compreender de que forma eles atuavam na prática, delineando as situações nas quais eles estavam envolvidos. No terceiro capítulo, apresento o segundo artigo que objetivou compreender como os estudantes compartilham o repertório geométrico na prática, para compreender como os participantes estavam utilizando os recursos da prática e quais eram as situações em que eles o faziam. Assim, ambos os artigos tiveram os mesmos contextos.

Por fim, apresento o quarto capítulo que, assim como o primeiro capítulo, também não é apresentado na forma de artigo. Nesse capítulo retomo a pergunta central da pesquisa a fim de fazer uma leitura transversal dos resultados, da revisão de literatura, da teoria apresentando as conclusões. Além disso, indico as implicações do estudo para pesquisas futuras e para prática pedagógica de professores de Matemática. Acredito, então, que os artigos serão como sementes com potencial para ampliar o impacto da dissertação na comunidade acadêmica assim como nutrir a prática pedagógica dos referidos professores.

1.8 REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A.; MANRIQUE, A. L.; SILVA, M. J. F.; CAMPOS, T. M. M. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, v. 27, p. 94-108, 2004.

ARBACH, N. **O ensino de geometria plana: o saber do aluno e o saber escolar**. 2002. 96 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

ALVES-MAZZOTTI, A. J.; O método nas ciências sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWAMDSZNADJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa**. São Paulo: Pioneira, 2002. Parte II, cap. 7, p. 147-178.

BARBOSA, P. M. ; SEGADAS, C. ; ROCHA, D. F. ; SILVA, F. ; PEREIRA, M. M.; SILVA, B. P. A importância do pensamento visual na geometria. In: VI SEMINÁRIO DE

PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO, 2008, Rio de Janeiro. **Anais**... Rio de Janeiro: SBEM, 2008. p. 1-11.

BATISTELA, R. F. Um kit de espelhos para o ensino de geometria: a construção dos instrumentos. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2010, Salvador. **Anais**... Salvador: SBEM/SP, 2010. p. 1-10. 1 CD-ROM

BORDIN, L. M. ; BISOGNIN, E. Os materiais manipuláveis e a utilização de jogos pedagógicos no processo de ensino aprendizagem das operações com números inteiros. In: II CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA/ENCONTRO REGIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2011, Ijuí. **Anais**... Ijuí, 2011. p. 1-10.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. ***Parâmetros Curriculares Nacionais*****:** Matemática. Brasília, 1998.

BÚRIGO, E. Z. **Movimento da matemática moderna no Brasil: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60**. 1989. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1989.

CHARMAZ, K. Constructing Grounded Theory: a practical guide through qualitative analysis. London: Sage, 2009.

DUKE, N.K.; BECK, S.W. Education should consider alternative formats for the Dissertation. **Educational Researcher**, v. 28, p. 31-36, 1999.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. Introduction: the discipline and practice of qualitative research. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Ed.) **Handbook of qualitative research**. 3. ed. Thousand Oaks: Sage, 2005, p. 1-32.

GONÇALEZ, M. H. C. C.; BRITO, M. R. F. A aprendizagem de atitudes positivas em relação à Matemática. In: BRITO, M. R. F (Org.). **Psicologia da Educação Matemática: teoria e pesquisa**. Florianópolis: Insular, 2001. p. 221-234.

GUIMARÃES, S. D.; VASCONCELLOS, M.; TEIXEIRA, L. R. M. O ensino de geometria nas séries iniciais do Ensino Fundamental: concepções dos acadêmicos do Normal Superior. **Zetetiké**, Cempem – FE – Unicamp – v. 14, n. 25, 2006.

LAVE, J.; WENGER, E. **Situated learning: Legitimate peripheral participation**. New York: Cambridge University Press, 1991.

KALEFF, A. M. M. R.; VOTTO, B. G.; ROSA, F. M. C. da. Experimentos Educacionais Concretos e Virtuais para o Ensino de Volumes e Poliedros Equivalentes. In: X Encontro Nacional de Educação Matemática: Educação Matemática, Cultura e Diversidade, 2010, Salvador. **Anais**... Salvador: SBEM, 2010. p. 1-10.

MACIEL, E. M. M.; MACIEL, A. A geometria nos palitos de fósforo e canudos. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: Educação Matemática, Cultura e Diversidade, 2010, Salvador. **Anais**... Salvador: SBEM, 2010. p. 1-6.

MEISSENER H. Encapsulation of Process in Geometry. **International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Utrecht. The Netherlands, v. 3, p. 359, 2001.

MILES, M. B.; HUBERMAN, A. M. **Qualitative data analysis: An expanded sourcebook**. Thousand Oaks: Sage. 1994.

MOYER, P.S. Are We Having Fun Yet? How Teachers Use Manipulatives to Teach Mathematics. **Journal Educational Studies in Mathematics**, v. 47, p. 175-197, 2001.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 9, n. 9 e 10, p. 1- 6, 2004-2005.

PAIS, L. C. Didática da matemática: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

PAIS, L. C. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria. **ANPED**, Caxambu, 23ª reunião, p. 1-16 , 24-28 set. 2000. Disponível em: <http://www.anped.org.br/reunioes/23/textos/1919t.pdf>. Acesso em: 16 mai. 2008.

PAIS, L. C., FREITAS, J. L. M. Um Estudo dos Processos de Provas no Ensino e na Aprendizagem da Geometria no Ensino Fundamental. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v.13, p. 62 - 70, 1999.

PASSOS, C. L. B. Recursos Didáticos na Formação de Professores de Matemática. In: VII ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: MATEMÁTICA NA ESCOLA: CONTEÚDOS E CONTEXTOS, 2004, São Paulo. **Anais**... São Paulo: SBEM, 2004. p. 01-11.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de geometria: uma visão histórica.** 1989. 196 f. Dissertação (Mestrado em Metodologia do Ensino) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

PAVANELLO, R. M. Por que ensinar /aprender geometria? In: VII ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2004, São Paulo. **Anais**... São Paulo: SBEM, 2004. p. 1-6.

PEREIRA, J. S. ; MELO, M. N. ; GOULART, J. S. S. ; DIAS, A. L. M. Geometria no Ensino Fundamental: Experiência com um Projeto de Extensão. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2010, Salvador. **Anais**... Salvador: SBEM, 2010.

PEREIRA, J. S. ; MELO, M. N. O visual e o Concreto no Ensino de Geometria. In: JORNADA DE EXTENSÃO UNIVERSITÁRIA DA BAHIA, 2009, Feira de Santana. **Anais**... Feira de Santana, 2009. 1 CD-ROM.

PIRES, C. M. C.; CURI, E.; CAMPOS, T. M. M. (Orgs.). Espaço e Forma: A construção de noções geométricas pelas crianças das quatro séries iniciais do Ensino Fundamental. São Paulo: PROEM, 2000. 285p.

PIROLA, N. A.; BRITO, M. R. F. A formação dos conceitos de triângulo e de paralelogramo em alunos da escola elementar. In: BRITO, M. R. F. (Org.). **Psicologia da Educação Matemática: teoria e pesquisa**. Florianópolis: Insular, 2001. p. 85-106.

PROENÇA, M. C. ; PIROLA, N. A. O Conhecimento de Polígonos e Poliedros: uma análise do desempenho de alunos do ensino médio em exemplos e não-exemplos. **Ciência e Educação**, São Paulo, v. 17, p. 199-217, 2011.

RÊGO, R. G.; RÊGO, R. M. do.; GUDÊNCIO JR., S. **A geometria do Origami: atividades de ensino através de dobraduras**. Editora Universitária. João Pessoa: UFPB, 2004.

SOUZA, J. V. B. de. **Os materiais manipuláveis e a participação dos alunos na aula de Matemática**. 2011. 74 f. Dissertação (Mestrado pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Federal da Bahia/Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2011.

WENGER, E. Comunities of Pratices Learning, Meaning, and Indentity. Cambridge: University Press, 1998.

2. ARTIGO I

MATERIAIS MANIPULÁVEIS E ENGAJAMENTO DE ESTUDANTES NAS AULAS DE MATEMÁTICA ENVOLVENDO TÓPICOS DE GEOMETRIA

Jamerson dos Santos Pereira[1]

RESUMO

Neste artigo analisamos o engajamento mútuo de estudantes no desenvolvimento de aulas de Matemática que abordaram tópicos de geometria, nas quais foram utilizados materiais manipuláveis. Para compreender o objeto de estudo, utilizamos a perspectiva da aprendizagem situada segundo Jean Lave e Etienne Wenger (1991). Os dados foram coletados primariamente por meio da observação. Além disso, foram utilizados a entrevista e os documentos (registros dos estudantes durante as tarefas) para ampliar os dados e subsidiar as interpretações. Os resultados sugerem que o conhecimento da prática é mutável segundo as mudanças que ocorrem nas formas de engajamento. Estas formas de engajamento são específicas e parte integrante que caracterizam outros engajamentos mais amplos, além da presença de negociação de significados e de tomada de decisão. Além disso, foram apresentadas as seguintes situações de engajamentos: o engajamento de estudantes no contato preliminar com os elementos do material manipulável, o envolvimento de estudantes no recorte dos quadrados conforme as regras, o engajamento na associação do ângulo nulo à posição inicial dos palitos, o envolvimento na associação dos lados dos quadrados com os lados do triângulo.

Palavras-chave: Ensino de Geometria. Materiais manipuláveis. Engajamento.

ABSTRACT

In this paper, we analyze the mutual engagement of students in the development of mathematics lessons that addressed topics of geometry, in which were used manipulative materials. To understand the object of study, we used the Situated Learning Perspective according to Jean Lave and Etienne Wenger (1991). Data were collected primarily through observation. In addition, we used the interview and documents (student records during the tasks) to enlarge the data and support the interpretations. The results suggest that knowledge of practice is changing according to the changes that occur in the forms of engagement. These forms of engagement are specific and integral part featuring other broader engagements, and the presence of meaning negotiation and decision-making. Furthermore, we presented the following situations engagements: the engagement of students in primary contact with the elements of manipulative materials, the involvement of students cutting out squares according to the rules given, the association of engagement in a zero angle to the starting position of the

---

[1] Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia (UFBA) e Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS).

sticks, and the involvement in the association with the sides of the square and the sides of the triangle.

Key words: Teaching Geometry. Manipulative Materials. Engagement.

2.1 INTRODUÇÃO

O uso de materiais didáticos, que são especialmente concebidos para fins da educação, tais como livros didáticos, jogos matemáticos, materiais concretos tem sido tema de discussão de pesquisas em Educação Matemática (PAIS, 2000; LORENZATO, 2006; PASSOS, 2006; CLEMENTS, 1999). Tais autores apontam que, de alguma maneira, deve haver uma reflexão sobre sua utilização. Nesse sentido, concordamos com Pais (2000) quando ele argumenta que se corre o risco de recair em um empirismo que não contribui para a construção do aspecto racional e abstrato que é inerente ao ensino de geometria. Desse modo, é pertinente considerar uma relação entre manipulação e as possíveis significações oportunizadas na situação.

Assim como Moyer (2001), Clements (1999) chama atenção para o fato de que os materiais didáticos por si só não garantem sucesso do estudante, mas ele acredita que estudantes que fazem uso deles, nas aulas de matemática, geralmente superam os que não usam, mesmo que sejam pequenas as superações. Sobre esse aspecto, concordo com Gellert (2004) no sentido de considerar o contexto em que os materiais didáticos[2] são implementados, ou seja, as ações sobre o material didático dependem, além da concepção do professor sobre eles, das relações sociais existentes na situação.

Lorenzato (2006) refere-se aos materiais didáticos manipuláveis ou concretos muitas vezes como materiais manipuláveis apenas. De modo semelhante, utilizaremos a expressão *materiais manipuláveis*[3] compreendendo-os como elementos capazes de estabelecer alguma relação entre os objetivos do ensino da matemática e os resultados (GELLERT, 2004). Porém, é preciso frisar que a ideia que temos é mais abrangente do que considerar os manipuláveis como artefatos que são utilizados na aula de matemática para desenvolver tarefas também matemáticas.

Consoante a esse aspecto, os materiais manipuláveis não se restringem as aulas de matemática, muito embora alguns deles se adéquem melhor a tais aulas. Diante disso, assumimos a definição de Reys (1971, *apud* Nacarato, 2005, p. 3) que aponta os materiais

---

[2] Gellert (2004), Pais (2000) e Lorenzato (2006) discutem sobre a utilização de materiais didáticos no ensino.
[3] Para evitar repetições textuais, utilizaremos as expressões *materiais manipuláveis*, *materiais* e *manipuláveis* para nos referirmos aos *materiais manipuláveis* tal como compreende Reys (1971).

manipuláveis como “objetos ou coisas que o estudante é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma idéia”. Deste modo, consideramos manipulável qualquer objeto que venha a compor o material, que pode ser sentido em sua totalidade, no intuito de cumprir o objetivo das tarefas que serão apresentadas a seguir.

Não podemos, no entanto, banalizar o que entendemos por materiais manipuláveis nem tampouco restringir demais seu conceito. Moyer (2001), por exemplo, argumenta que os bons materiais são aqueles que contribuem na construção, fortalecimento e conexão de várias ideias matemáticas. Concebemos os materiais manipuláveis para além de compreensões matemáticas, admitindo assim outras opções de uso para eles. Temos, porém, que concordar com Moyer (2001) quando ele afirma que os manipuláveis possuem um apelo visual e concreto e podem ser manipulados pelos estudantes nas experiências práticas.

Nesse sentido, o que entendemos por materiais manipuláveis não descarta uma folha de papel, uma régua, uma tesoura, pois apesar deles não serem necessariamente utilizados para trabalhar ideias matemáticas, podem ser usados pelos estudantes para realizar alguma manipulação que favoreça a elaboração de conjecturas ou ideias sobre um tópico da matemática. Clements (1999), por exemplo, argumenta que os materiais manipuláveis são eficazes porque são objetos que podem ser agarrados.

Diante disso, focaremos a discussão sobre os materiais manipuláveis no contexto da prática social de estudantes em aulas de matemática, nas quais foram abordados dois tópicos de geometria: ângulos fundamentais no círculo e teorema de Pitágoras. Portanto, analisaremos como esses estudantes se engajaram nas aulas, observando, ainda, como se dão as formas de engajamento e, possivelmente, caracterizando-as. Na seção seguinte, discutiremos os materiais manipuláveis no ensino de geometria.

2.2 ENSINO DE GEOMETRIA E MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Como discutido por Fiorentini e Miorim (1993), os estudantes têm apresentado dificuldades em compreender alguns conteúdos matemáticos, mesmo que no dia a dia eles precisem utilizar esses conteúdos intuitivamente. Eles apresentam dificuldades em utilizar os conteúdos da matemática escolar em outros contextos e em virtude de não terem aprendido conteúdos de séries anteriores, sentem dificuldades nas séries seguintes e, novamente, sentem dificuldade em exportar as ideias matemáticas para outros contextos.

Diante disso, podemos vislumbrar um ensino de geometria que favoreça não só a criatividade, mas também a descoberta, a originalidade e a liberdade de expressar suas opiniões (BARBOSA et. al., 2008). É concebível um espaço de aprender, um aprender mais amplo do que meramente repetir certas ações, decorar certas respostas. Nesse sentido, o estudante deve aprender não mecanicamente, nem tampouco sem saber o que faz (sem refletir o que está fazendo) ou que resuma suas ações somente a entretenimento. Assim, em consonância com a perspectiva da aprendizagem situada[4], segundo Lave e Wenger (1991), o *aprender* mencionado por Fiorentini e Miorim (1993) pode ser diretamente ligado à prática social, sendo que a aprendizagem toma forma sem desprezar, naturalmente, o que historicamente estabelecido.

Em conformidade com as ideias apresentadas pelos últimos autores, o material manipulável pode ser uma ferramenta interessante para promover a aprendizagem, uma vez que permite a manutenção de um momento grupal, no qual alguns estudantes podem interagir, trocar informações, gestos, modos de falar e de agir sobre determinadas situações, a partir dos materiais manipuláveis. No entanto, Fiorentini e Miorim (1993) salientam que o material mais adequado nem sempre será o pronto e acabado, nem o mais belo. Assim, deixa-se margem aos materiais manipuláveis ainda a serem construídos pelos próprios estudantes ou mesmo aqueles que não remetem, diretamente, a algum conteúdo geométrico. A exemplo disso, podemos citar uma lata de óleo para representar um cilindro em uma sala de aula.

Castilho (1989, *apud* Kaleff, 1994, p. 22) salienta que o ensino de geometria nas séries iniciais do ensino fundamental reforça a abstração. Em outras palavras, o trabalho nessas séries sugere predominância de concretização sobre a simbolização, ou seja, o foco deve estar sobre o “observar”, “descrever”, “comparar”, “tocar”, “construir” ao invés de “definir” e “designar”. Assim, ele ressalta que, nessa fase, o estudante manipula e constrói materiais das mais variadas formas para analisar suas características geométricas e físicas.

Como argumentam Fiorentini e Miorim (1993), por exemplo, nem sempre o material será o mais importante da atividade. Em outras palavras, pode-se considerar mais a discussão obtida por meio deles ou a resolução de algum problema a partir dele e ainda dá uma dica de que os materiais manipuláveis podem ser potencializadores de um raciocínio mais abstrato.

É importante ressaltar, entretanto, que os materiais manipuláveis não são garantidores de nenhuma prática pedagógica que garanta aprendizagem, por exemplo. Moyer (2001), mostra, em seu estudo, que alguns professores utilizaram materiais manipuláveis meramente

[4] Na próxima seção, discutiremos alguns conceitos desta perspectiva.

para entretenimento dos estudantes. Esse é apenas um dos modos de "ver" os materiais manipuláveis e que contraria nossa visão. Em contrapartida, por exemplo, podemos citar o estudo de Souza e Barbosa (2010), no qual os materiais manipuláveis não tiveram foco no entretenimento, mas ensejaram na constituição de práticas questionadoras[5], por conta do contexto da pesquisa.

Ainda nessa direção, podemos afirmar que os materiais manipuláveis não possuem significados em si mesmos (MOYER, 2001). Desse modo, entendemos o contexto como proporcionador de inúmeros significados. Tudo vai depender de como as interações entre os sujeitos e os materiais vão se desenrolar no contexto social[6]. Sobre isso, é importante nos questionarmos: como estudantes engajam-se na utilização de materiais manipuláveis, nas aulas de matemática?

Nesse sentido, a matemática não existe nos materiais manipuláveis e seu valor depende de como eles são utilizados pelos sujeitos para "resolver" as questões que lhes são propostas. Tal compreensão parece aceitável no sentido de que os materiais manipuláveis não precisam ser necessariamente pensados ou destinados a algum conteúdo matemático. Ou seja, eles podem ser utilizados com outras finalidades. No entanto, se o destino do material for algo relacionado à matemática, este deve ser inserido com muita atenção pelo professor para que este consiga atingir os objetivos traçados para a utilização do material, conforme o conteúdo a ser explorado.

Para responder como os estudantes se engajaram, analisamos duas aulas de matemática nas quais os estudantes fizeram uso de materiais manipuláveis para compreender o teorema de Pitágoras e os ângulos básicos no círculo trigonométrico. Nas próximas seções, veremos a fundamentação teórica, método e o contexto desta pesquisa, bem como a discussão dos dados e conclusões.

2.3 PRÁTICA SOCIAL, PARTICIPAÇÃO E ENGAJAMENTO MÚTUO

Primeiramente, é preciso deixar claro que descrever participação em termos utilizados por Lave e Wenger (1991) não nos permite atrelar esse fenômeno a uma ideia de temporalidade ou localidade. Ou seja, não é possível conceber a participação se dando em um determinado local ou espaço temporal unicamente. A compreensão de participação abrange

---

[5] Segundo a autora, *práticas questionadoras* referem-se às práticas em que estudantes questionam o fabricante dos materiais manipuláveis ou mesmo as compreensões do professor.

[6] Tal expressão será definida na próxima seção.

mais que isso, diz respeito a ser participante ativo nas práticas sociais de um grupo (WENGER, 1998).

É importante observar, ainda, que os membros de um grupo têm diferentes motivações, contribuem de diversos modos e apresentam visões diferenciadas. Assim, na medida em que os sujeitos vão se apropriando dos costumes e ações corriqueiras da prática de um determinado grupo, eles vão apresentando formas diferentes de participação. Entretanto, os autores não queriam implicar suas argumentações em co-presença nem tampouco em limites de fronteira claros. Isto é, para participar de uma prática social não precisa necessariamente estar presente, até porque as diversas interações promovidas no âmbito da prática social não fazem nenhuma referência aos limites físicos da comunidade, ou seja, não há limites fronteiriços para a prática social. Assim, apesar de as duas tarefas terem sido desenvolvidas em sala de aula, não quer dizer que o limite da prática social formada seja a própria sala, nem mesmo o contexto escolar.

Portanto, acrescento que numa prática social a participação se dá num envolvente sistema de atividades ou tarefas desempenhadas pelos membros. Nesse movimento de participação, então, pode-se considerar a partilha do que cada participante compreende sobre aquilo que é realizado ou feito na prática. Assim, o significado que é negociado por eles sobre cada elemento constitutivo da prática (sejam eles, as ações, as falas, os objetos e outros) é, em algum momento, compartilhado.

Segundo Wenger (1998), essa prática social significa um *fazer* dentro de um contexto histórico e social que dá estrutura e significado as nossas ações. Na presente pesquisa, a prática social em questão é a matemática escolar. Nessa prática, as relações sociais são específicas e por conta disso envolve linguagem, símbolos, ferramentas[7], papéis bem definidos, critérios específicos, procedimentos, regulamentos, contratos, percepções específicas, relações implícitas e visões de mundo compartilhadas (WENGER, 1998). As interações entre os estudantes e professores são reguladas pelos procedimentos, regulamentos e pelos papéis destinados aos sujeitos que integram o contexto da sala de aula.

Nesse caso, a linguagem que é veiculada em sala é uma mescla de linguagem matemática e linguagem comum (como recurso de comunicação utilizado pelos estudantes em outros contextos). Não temos, porém, necessariamente harmonia em tudo que é feito na

---

[7] Em consonância com a teoria, *ferramentas* podem ser concebidas como recursos que são utilizados ou construídos durante a prática social desenvolvida pelos participantes. Seu uso, porém, não é estático e muda conforme a necessidade dos membros. Todavia, como tudo que ocorre na prática, a funcionalidade deste recurso dependerá da aceitação dos membros, isto é, dependerá da legitimação dos membros.

prática social do grupo. Wenger (1998) ressalta que participação pode envolver todos os tipos de relações, isto é, conflituosas, competitivas ou cooperativas, inclusive. No contexto da sala de aula isso pode ser visto, quando os estudantes querem demonstrar, por exemplo, que sabem realizar um procedimento, uma ação ou que sabem responder às perguntas do professor.

A Perspectiva da Aprendizagem Situada de Lave e Wenger (1998) desloca o eixo de análise dos indivíduos isoladamente para os indivíduos como participantes no/do mundo social. As dicotomias entre mente e corpo, contemplar e envolver-se, abstrair e experimentar não fazem sentido tendo em vista que os autores não delimitam a prática em torno de tais dicotomias. Afinal, tudo está conectado, ou seja, os participantes, o mundo social e as ações estão intimamente ligados ao conhecimento, aprendizagem na prática e discurso oriundo da prática.

Na dinâmica do grupo social, a participação é pautada na negociação de significados no contexto em que os sujeitos estão inseridos; essas significações não são estáticas, permitindo uma nova negociação. Assim, as compreensões geradas na prática social e as experiências advindas dela possuem significados comuns aos membros, são compartilhados. Entretanto, não queremos gerar a compreensão de que apenas as coisas que estão relacionadas à prática à qual pertencemos são significativas. Pelo contrário, queremos frisar que o mundo social é muito maior do que as práticas vivenciadas por cada indivíduo (FRADE, 2003). Assim, podemos observar que os conceitos de concreto e abstrato não fazem referência, necessariamente, a significativo e não-significativo respectivamente, tendo em vista que algo concreto para uns pode ser abstrato para outros e vice-versa.

O intuito, nesse momento, é destacar alguns elementos que são indissociáveis da prática social e, por consequência, da participação. No entanto, ressaltamos, antes disso, que o foco desta pesquisa é o primeiro e o terceiro dos elementos a seguir. Na sua obra, Wenger (1998, p. 73) argumenta que existem três relações que associam a prática com a comunidade formada num determinado contexto: (1) O engajamento/envolvimento mútuo (organizado em torno dos objetivos que a comunidade busca alcançar); (2). Um empreendimento conjunto (e, consequentemente, negociação mútua e responsabilidade da qual se devem prestar contas); (3). Um repertório compartilhado (rotinas, linguagens, símbolos, modos de fazer). Todas as três relações poderiam ser abordadas, mas a primeira e a terceira se mostraram mais visíveis nos dados coletados, tornando-se categorias de análise desta dissertação.

Tendo em vista, a compreensão de alguns conceitos, é preciso delimitar alguns aspectos da teoria. A participação é mais que o simples engajamento numa tarefa, pelo fato de que nessa há um reconhecimento mútuo (explícito ou implícito). Deste modo, por exemplo, suponhamos que, nas tarefas que serão descritas a seguir, um dos estudantes observados estivesse lendo uma revista em quadrinhos no momento em que todos estavam manipulando o material utilizado na tarefa proposta pelo professor. Esse estudante, com certeza estava engajado na leitura de sua revista, mas não seria reconhecido como uma participante do grupo, por não ser reconhecido como participante da tarefa.

Engajamento, nesse sentido, refere-se ao envolvimento ativo em processos de negociação conjunta, ou seja, em que todos contribuem para dar significados àquilo em que estão se envolvendo. Assim, podemos considerar os participantes como tais quando reconhecemos seu envolvimento integral e grupal naquilo que se propõe a fazer. Nesse sentido, *engajar-se em algo* diz respeito ao reconhecimento do que ocorre na situação, em sua totalidade.

Aprendizagem é um conceito que não é simples discutir, mas vale ressaltar alguns aspectos em função da compreensão de outros elementos que serão destacados da teoria. Para Wenger (1998, p.95), aprendizagem na prática inclui, dentre outros elementos:

> Desenvolver seu repertório, estilos e discurso (renegociar o significado de vários elementos - da prática, produção ou adoção de instrumentos/ferramentas, criando novos termos ou abandonando velhos, modos de falar sobre eventos ou de recontá-los,…).

Nesse sentido, o aprendiz[8] precisa não só desenvolver a habilidade de se engajar com outros membros e com os afazeres e rotinas da prática, como também fazer uso do repertório da prática para nela poder se engajar. Assim, acrescentamos que o repertório da prática é particular, estruturado em torno das necessidades dos participantes. Quando o estudante manipula o triângulo, por exemplo, ele pode fazê-lo para perceber o lado maior e relacioná-lo com o lado do quadrado maior, enquanto que em outro contexto ele poderia apenas visualizar o triângulo como elemento de decoração.

O artigo de Gellert (2004) reflete sobre o uso de material didático em aulas de Matemática, focando sobre atividades matemáticas de estudantes e atividades didáticas de professores. A rotina[9] da prática, neste caso, foi caracterizada pela visualização das multiplicações de números naturais na tabela e pelo cálculo mental de certas multiplicações,

---

[8] Naturalmente, podemos nomear cada participante observado dessa maneira, tendo em vista que a tarefa proposta foi elaborada no intuito de favorecer a aprendizagem dos estudantes. Além disso, este termo está em consonância com a teoria utilizada nesta dissertação, onde concebe os participantes que se iniciam na prática como aprendizes.

[9] *Rotina* é entendida como um agrupamento de ações repetidas ou comuns aos membros de um grupo.

representadas em cores escuras, ditas fáceis pelos autores e associação com outras, ditas difíceis. Um exemplo que ilustra bem a tarefa é quando uma estudante realiza a multiplicação 3x2 = 6 (que é uma multiplicação de números pequenos) para chegar a 3x4. A estudante soma ao resultado 6, 3 unidades e depois mais 3 unidades e para vários outros exemplos de multiplicação, utilizando procedimento análogo. No referido trabalho, o momento em que os estudantes são incentivados a resolver algumas multiplicações, olhando para a tabela, eles estão se engajando nesse processo mutuamente. Isso marca o ponto em que eles estão convergindo olhares, falas, pensamentos, ou seja, compartilhando os afazeres da prática social. Além disso, o reconhecimento dos elementos do material apresentado na aula foi fortemente marcado no artigo.

O trabalho de Kamii, Lewis e Kirkland (2001), por exemplo, foi feito a partir da ótica piagetiana, na qual o foco é no indivíduo. Eles analisaram as utilidades de materiais manipuláveis no que se refere à aquisição de conhecimento lógico-matemático pelas crianças, concluindo que o importante na construção deste conhecimento é que os sujeitos pensem. Todavia, a partir de uma leitura com lentes da perspectiva da aprendizagem situada, o que move o conhecimento nessa situação são as interações sociais promovidas no contexto. Sendo assim, as experiências advindas da manipulação desses materiais podem possibilitar a conexão com os conceitos e ideias matemáticas, favorecendo no desenvolvimento do pensamento e da aprendizagem.

Além disso, para os autores citados, a Matemática não existe nos manipuláveis sugeridos, isto é, o manipulável pode ser útil ou inútil dependendo da qualidade do pensamento que eles estimulam. Sob a ótica da perspectiva da aprendizagem situada, os manipuláveis são recursos da prática e possibilitam experimentação e interação social na prática da matemática escolar, na qual os participantes podem coexistir e trocar saberes. De modo geral, outra leitura dos resultados do trabalho de Lewis e Kirkland (2001) sugere considerar o indivíduo, em termos da perspectiva da aprendizagem situada, e sua relação com o contexto social, rodeado dos elementos presentes no meio social, sujeito às formas de pensar e agir dos demais integrantes. Assim, desconsiderar as possíveis contribuições do contexto parece inconsistente.

O pensamento, elemento indissociável da construção do conhecimento lógico-matemático das crianças, conforme salientam os autores, pode ser concebido como uma estruturação das ações, associação de elementos, determinação de direções a serem seguidas. Assim, em termos da perspectiva da aprendizagem situada, o pensamento diz respeito à tomada de decisão. Nesse sentido, os estudantes devem exercitar a tomada de decisão, durante o trabalho com os materiais manipuláveis. Outro fator importante é que não há possibilidade de classificar o material como útil ou inútil, ou seja, a concepção do professor sobre o material, a forma como os estudantes o recebem, a forma como ele é abordado, os conteúdos a serem trabalhados, todos esses elementos são contundentes na escolha do material pela sua utilidade ou não.

Por fim, projetando um olhar sob as lentes da perspectiva da aprendizagem situada (LAVE; WENGER, 1991), uma ocasião na qual os estudantes podem utilizar os materiais manipuláveis na aula de Matemática que abordam tópicos de geometria constitui-se em uma prática social. Nesta pesquisa, os sujeitos dessa prática, incluindo as professoras, puderam interagir uns com os outros e com os materiais manipuláveis e, do mesmo modo, puderam dar significado às suas ações, às suas falas, aos seus gestos, às suas ferramentas, levando em consideração os significados historicamente já atribuídos. Assim, discutiremos esses aspectos a partir dos trechos das aulas apresentados posteriormente.

2.4 CONTEXTO DO ESTUDO

Os dados deste artigo foram coletados em duas salas de aula, sendo uma do 8º ano e outra do 9º ano, séries finais do ensino fundamental, da rede pública de Feira de Santana-Ba e Salvador-Ba, respectivamente, sendo utilizadas três aulas de 50 minutos na turma de Feira de Santana e duas aulas de 50 minutos na turma de Salvador.

As tarefas utilizadas nessa pesquisa foram desenvolvidas pelo Observatório de Educação Matemática[10] da Bahia (OEM-Bahia). O grupo do OEM-Bahia é formado por professores da educação básica, graduandos, pós-graduandos e pesquisadores com o foco na produção de materiais curriculares educativos que possibilitem potencializar a aprendizagem dos professores. O grupo produziu tarefas que exploravam tópicos de geometria, no ano de 2011.

Duas professoras que estavam envolvidas na construção de tarefas com materiais manipuláveis foram convidadas a participar desta pesquisa. Elas possuíam propriedade sobre

---

[10] O Programa Observatório da Educação, resultado da parceria entre a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) e a Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização e Diversidade (SECAD), foi instituído pelo Decreto Presidencial nº 5.803, de 08 de junho de 2006, com o objetivo de fomentar estudos e pesquisas em educação, que utilizem a infraestrutura disponível das Instituições de Educação Superior – IES e as bases de dados existentes no INEP, estimulando a produção acadêmica e a formação de recursos pós-graduados, em nível de mestrado e doutorado. Ver em http://portal.inep.gov.br/.

a tarefa que iriam desenvolver e poderiam modificá-la caso considerassem necessário. Os estudantes também foram convidados a participar da pesquisa pelas professoras e a permissão para os estudantes serem filmados foi dada a partir do Termo de Consentimento Livre Esclarecido assinado pelos seus pais.

A professora Ana[11], licenciada em Ciências e Matemática, trabalha na rede pública de ensino há 26 anos, desenvolveu uma tarefa que explorava ângulos fundamentais no círculo a partir do uso de materiais manipuláveis (Veja figura 1). No desenvolvimento da tarefa, os estudantes utilizaram recorte de papel em formato de círculo, palitos de picolé, taxinhas de ferro, hidrocores e lápis de cor. Ana organizou a turma em grupos de quatro e cinco estudantes. A escolha do grupo observado foi livre para a professora. A justificativa dela baseou-se no posicionamento do grupo na sala de aula, o que evitaria que outros estudantes de outros grupos fossem filmados também. Os participantes foram Camila, Gabriela, Felipe, Gustavo e Marta. Durante a tarefa, Camila e Gabriela agiam, em alguns momentos, mais que os outros estudantes e demonstravam vontade de participar dos questionamentos, mesmo apresentando timidez nas respostas. Enquanto isso, Felipe, Gustavo e Marta observavam, atentamente, as ações de Gabriela e Camila.

Lúcia, professora licenciada em Ciências e Matemática, trabalha na rede pública de ensino há 21 anos, desenvolveu uma tarefa que enfatizou as compreensões acerca do teorema de Pitágoras por meio de materiais manipuláveis (Ver figura 2). O kit do material manipulável constituía-se de quadrado amarelo (3x3 cm), quadrado vermelho (4x4 cm), quadrado azul (5x5) e triângulo retângulo (3,4 e 5 cm). A professora também organizou a turma em grupos de quatro ou cinco estudantes. Assim, deixamos a critério da professora a escolha do grupo e ela pautou sua escolha argumentando que os estudantes do grupo escolhido se destacavam nas aulas. Raquel, Lucas, Flávia, Fernando e João integraram o grupo observado. Durante a tarefa, João e Fernando eram os mais ativos no grupo, contribuindo bastante na manipulação envolvida na tarefa e nas respostas aos questionamentos da professora. Os dois disseram já terem visto tal conteúdo, mas que não haviam compreendido. Outros três, Raquel, Lucas e Flávia, aparentavam distanciamento da tarefa, mas, na medida em que foram convidados a manipular e responder, familiarizaram-se com a tarefa.

---

[11] Pseudônimos foram utilizados para preservar a identidade dos participantes dessa pesquisa.

TAREFA

1) Vamos utilizar os materiais manipuláveis que vocês receberam e conhecer um pouco mais sobre ângulos. Para isso, vamos seguir os passos abaixo e responder as questões.

Inicialmente, usaremos apenas a representação do círculo.
a) Dobre a representação do círculo ao meio. O que aconteceu?
b) Dobre ao meio novamente. O que você pode observar ao realizar esse passo?
c) Desfaça os passos anteriores e trace segmentos de retas coloridas em cada marca e relate o que você observou. Agora, vamos utilizar também os palitos entregues pela professora.
d) Fixe as extremidades dos palitos no ponto de encontro dos segmentos de reta. Depois, posicione os palitos um sobre o outro. Existe ângulo nesse caso? Caso exista, qual a sua medida em graus e como podemos nomeá-lo?
e) Gire um palito em direção ao segmento de reta seguinte. Represente no verso da folha o ângulo formado entre esses segmentos. O que você observou a partir desse procedimento?
f) Escolha uma letra para o ponto de encontro dos segmentos de retas e para cada palito. Nomeie os elementos do ângulo.
g) Gire o mesmo palito em direção ao segmento de reta seguinte. Represente no verso da folha o ângulo formado entre esses segmentos. O que você observou a partir desse procedimento? Agora, retire os palitos e desfaça os comandos na representação do círculo, voltando para a posição em que estava na letra b e dobre ao meio novamente. Desfaça todos os comandos e trace com cores diferentes das anteriores os segmentos de retas que surgiram.
e) Forme um ângulo raso, e gire um dos palitos em direção ao segmento de reta seguinte. Represente abaixo o ângulo maior e menor aos segmentos com cores distintas. Quantos ângulos têm no seu desenho?
f) Gire o palito mais uma vez, em direção ao segmento de reta seguinte. Represente abaixo o ângulo formado entre esses segmentos. Qual ângulo se formou após esse procedimento?
g) Continue a girar o palito em direção ao segmento de reta seguinte. Represente abaixo o ângulo convexo formado. Qual a característica desse ângulo, com relação ao ângulo de 90º (ângulo reto)?
h) Retorne o palito dois segmentos e represente o ângulo formado. Qual a característica desse ângulo, com relação ao ângulo de 90º (ângulo reto)?

Figura 1 – Tarefa desenvolvida pela professora Ana

TAREFA

Oi pessoal, vamos agora trabalhar com uma relação métrica fundamental no triângulo retângulo. Para isso, vamos usar um material muito interessante.

Caro aluno, de posse do material emborrachado, siga as orientações abaixo:

1) Recorte os quadrinhos amarelos e vermelhos;
2) Cubra a área da figura azul com os quadrinhos recortados;

Agora, responda as seguintes questões:

1) Escreva que conclusão você tirou do experimento.
2) Tente escrever uma expressão que torne esse experimento uma regra geral. Anote abaixo essa expressão.

Figura 2 – Tarefa desenvolvida pela professora Lúcia

2.5 MÉTODO DO ESTUDO

Conforme ressaltamos anteriormente, os dados obtidos nesta pesquisa foram coletados em duas salas de aula em que os estudantes faziam uso de materiais manipuláveis na abordagem de tópicos de geometria. Nesse sentido, analisamos as aulas de duas professoras, em contextos diferentes, no intuito de compreender como se deu o fenômeno participação durante a realização da tarefa. Em outras palavras, a preocupação que se instala é a de compreender o fenômeno. Nesse sentido, buscamos interpretar o fenômeno participação em termos de duas dimensões teóricas, a saber: engajamento mútuo e repertório compartilhado (LAVE; WENGER, 1991). No entanto, neste artigo, trataremos, especificamente, de uma delas, no caso, engajamento mútuo.

Na pesquisa em questão, estávamos, portanto. focados no fenômeno participação e utilização de materiais manipuláveis durante duas aulas de matemática, envolvendo tópicos de geometria. Em outras palavras, estávamos interessados em analisar a vivência de um grupo de estudantes numa sala de aula, em termos das experiências vividas. Assim, esse estudo pautou-se na abordagem de natureza qualitativa, como entende Denzin e Licoln (2005). Segundo os autores, o pesquisador qualitativo, nesse caso, vale-se de métodos de pesquisa para reunir seus dados, como entrevistas e observações e organiza seus dados de modo que possam ser analisados.

No contexto desta pesquisa, almejou-se entender o significado da experiência dos estudantes, além de visar à exploração de um contexto pouco ou nada explorado até então, ou seja, analisar uma situação particular para gerar novos entendimentos (ALVES-MAZZOTTI, 2002).

Os *dados*, que podem ser obtidos da observação, documentos (registros dos estudantes), filmagem e entrevistas - conforme os autores citados - foram obtidos basicamente por meio da observação e dos documentos produzidos pelos estudantes durante o desenvolvimento da tarefa. A observação, que foi operacionalizada por meio da filmagem, propiciou a constatação de comportamentos inconscientes ou não-intencionais na aula de Matemática que abordou o tópico de geometria, com a utilização de materiais manipuláveis, permitindo, também, capturar o comportamento dos estudantes em determinado momento (ALVES-MAZZOTI, 2002). Como suporte à observação, os registros produzidos pelos estudantes foram utilizados para completar algum entendimento não favorecido plenamente pela filmagem.

É importante frisar que a filmagem (gravação de áudio e imagem) fez-se necessária nesse contexto, porque apenas gravar o áudio nos remeteria, provavelmente, numa perda de outras compreensões possíveis a partir de *um apontar*, de *um balançar de cabeça* ou de qualquer outra ação acompanhada de registro verbal, os quais seriam registrados pela captura de imagens. Nesse sentido, a filmagem foi realizada com a máxima discrição possível, tornando ínfimas as distrações dos estudantes com a câmera ou com conversas com o pesquisador. Desse modo, buscamos tornar o ambiente mais natural possível para que os dados coletados fossem os mais condizentes com a realidade.

Além disso, utilizamos as anotações escritas pelo pesquisador durante a aula, as quais foram de fundamental importância para registrar informações sobre a organização da sala; a organização da tarefa, as contribuições de cada estudante ou da professora.

Em relação aos procedimentos utilizados para analisar os dados, valemo-nos dos procedimentos analíticos da *Grounded Theory* (CHARMAZ, 2009), os quais sugerem princípios e práticas para análise de processos e elaboração de argumentos baseados nos dados de pesquisa, fomentando assim compreensões teóricas. Entretanto, não nos comprometemos com os seus paradigmas.

A *Grounded Theory* sugere a análise em níveis, sendo o primeiro deles a codificação, utilizada na primeira etapa da análise. Desse modo, os dados foram transcritos a partir da "leitura" exaustiva dos vídeos e analisados *linha a linha* (CHARMAZ, 2009). Com isso, foram originados alguns códigos, pequenas frases que resumiam as ações e falas dos estudantes que caracterizavam o envolvimento e compartilhamento de uma linguagem própria do grupo; ou em outras palavras, participação. Assim, considere, por exemplo, que na fala do estudante "o quadrado é igual à hipotenusa..." o código seria "Reconhecendo a relação dos quadrados com os lados do triângulo retângulo", tendo em vista que o estudante fazia referência a um quadrado que tinha lado igual à hipotenusa do triângulo retângulo.

Em etapa posterior, esses códigos foram agrupados de forma a representar um conjunto de códigos que possuíam propriedades comuns, ou seja, formando categorias que indicam ideias mais gerais, essas categorias foram apresentadas na forma de episódios como pode ser vistas mais adiante. Por fim, o olhar transversal impregnado da teoria sobre os resultados da pesquisa, ensejaram possíveis contribuições/compreensões teóricas para olhar a participação no sentido de como estudantes se envolvem e compartilham repertório da sua prática, durante aulas de matemática. O que, por sua vez, fomenta agora novas discussões acerca da aprendizagem em termos do envolvimento dos estudantes e do compartilhamento desse repertório.

E, por fim, *resultados escritos* foram construídos a partir do amadurecimento proporcionado pela pesquisa. Nos relatórios escritos, neste caso, na forma de dissertação, foi possível organizar os resultados de uma análise transversal dos dados obtidos, da teoria e revisão de literatura, confrontando/confirmando/revisando alguns aspectos das mesmas, conforme veremos a seguir.

2.6 APRESENTAÇÃO DOS DADOS

Nesta seção, os episódios apresentados foram estruturados em torno das falas e ações dos estudantes e das duas professoras, Ana e Lúcia, durante o desenvolvimento de duas tarefas em aulas distintas que abordaram tópicos de geometria, nas quais os estudantes faziam uso de materiais manipuláveis. Além das falas coletadas no processo de observação, foram utilizadas, como consulta, as entrevistas feitas com os estudantes no final de cada tarefa e os registros (documentos) produzidos por esses sujeitos.

Alguns elementos utilizados na transcrição dos dados foram inspirados nos trabalhos de Silva (2002) e Brum-de-Paula e Espinar (2002). Outros elementos, no entanto, foram adaptados de modo a subsidiar a transcrição. Dentre essas inspirações, estão os códigos como informações dentro dos colchetes indicando uma ação dos participantes ou explicações sobre a fala deles que, por exemplo, foram largamente utilizados na apresentação dos dados. Além disso, o símbolo “...” (reticências) foi utilizado para evidenciar uma suspensão de ideia ou de fala.

Além desses símbolos, cada linha da transcrição foi enumerada partindo de (1) justamente para facilitar a localização de cada linha quando houver qualquer referência a ela. Porém, antes de cada numeração, atribuímos uma letra para identificar quais momentos a linha se reportava, isto é, a letra O foi atribuída para as falas registradas durante a observação dos estudantes desenvolvendo a tarefa. Desse modo, a primeira linha de transcrição de cada episódio seria iniciada por (O1); a segunda, por (O2); e assim por diante.

Cada episódio foi construído a partir do que foi considerado importante na observação e que expressava, sugestivamente, formas de engajamento, considerando códigos que representavam ideias comuns. Como exemplo, o **engajamento dos estudantes no contato preliminar com os elementos do material manipulável** é um episódio que sugere a associação de ações e falas iniciais e que demarcaram o reconhecimento de formas, cores, funções e características gerais. Dois episódios de cada tarefa foram apresentados nessa sessão, totalizando quatro episódios para esse artigo. Assim, os episódios foram apresentados sem seguir necessariamente uma ordem cronológica, apesar de muitos recortes dos episódios possuírem certa cronologia. Esses trechos foram acompanhados de uma análise inicial para situar o leitor e dar subsídios a uma análise mais refinada, em seguida.

Assim, os episódios 1 e 2, abaixo apresentados, são referentes à tarefa desenvolvida na aula da professora Ana, enquanto que os episódios 3 e 4 são referentes à tarefa desenvolvida na aula da professora Lúcia.

Episódio 1: O engajamento de estudantes no contato preliminar com os elementos do material manipulável

Neste episódio, os participantes foram lembrados dos termos de consentimento para a realização das observações filmadas na sala de aula e a professora forneceu alguns avisos, como exemplo, os dias que teriam aula ou não. Em seguida, a professora começou a entregar as folhas da tarefa para cada equipe. Por ordem de entrega, a equipe[12] observada foi a terceira a receber a folha da tarefa. A professora entregou, aos estudantes, a representação do círculo[13], já recortadas em folha branca, com 12 cm de diâmetro, após a entrega das folhas da tarefa.

Na sequência, a professora entregou os palitos afixados por uma taxinha metálica nas pontas, de modo que os palitos formaram um "V". Vejamos abaixo imagens que ilustram o material descrito:

Figura 3 – Círculos, palitos e hidrocores entregues às equipes.

[12] Por vezes, utilizarei a expressão *equipe* ao invés de *grupo* para referir-me a um conjunto ou agrupamento de participantes consoante à teoria.
[13] Utilizarei a expressão *círculo* no corpo do episódio para expressar uma representação do círculo, sem prejuízo das demais interpretações.

Esse e outros materiais são mencionados nos recortes de aula abaixo:

(O1) Gabriela:	Posso escrever no caderno, professora?
(O2) Professora:	No caderno? Pode sim!
(O3) Professora:	Agora, presta atenção!
(O4) Felipe:	Oh Pró, já vai ler?
(O5) Professora:	[Faz sinal com as mãos espalmadas, pedindo para esperar] Já vou entregar o papel [Segurando a representação do círculo].
(O6) Felipe:	Círculo...
(O7) Camila:	Não... Não é círculo. Parece... No papel.
(O8) Marta:	Como se fosse... É círculo então.
(O9) Gustavo:	Ok! É um para cada? [Referindo-se ao círculo]
(O10) Professora:	Sim!
(O11) Professora:	Todos já pegaram?

Na linha (O1), Gabriela mostrou-se preocupada com alguma forma de rascunhar antes de passar para a folha da tarefa ou como se precisasse entregar uma folha à parte de resposta. A professora aceitou a utilização do caderno, na linha (O2), e exigiu atenção dos estudantes, principalmente do grupo em foco que se encontrava disperso.

Quando Felipe recebeu o círculo, ele apresentou uma expressão de dúvida (linha (O6)) e sua dúvida pareceu ecoar entre os participantes do grupo mesmo que ele apenas tenha dito "círculo". Neste momento[14], foi possível perceber, pela expressão de dúvida, que ele queria dizer mais do que essa palavra, era como se aquelas ideias que não foram explicitamente apresentadas aos demais integrantes do grupo fossem totalmente captadas pelos outros participantes. Assim, Camila e Marta, linhas (O7) e (O8), preocuparam-se como chamar aquele objeto. É possível supor, portanto, que eles não estivessem tentando chegar ao objeto matemático, mas apenas querendo nomear e tivessem percebido que a nomeação daquele objeto em mãos dependia de um contexto. Então, para eles, talvez restasse a pergunta: *círculo ou representação do círculo?*

Ao passo em que todos se calaram ou não comentaram mais sobre como nomear tal objeto, nas linhas (O7) e (O8), é possível sustentar que eles finalmente chegaram a um acordo: nomearemos de círculo então.

---

[14] Algumas feições de dúvidas dos estudantes foram registradas no diário de bordo, anotações que favorecem a análise e interpretação dos dados posteriormente. Os estudantes também apresentaram feições de que haviam compreendido alguma ideia.

(O12) Professora:	Então pronto, vamos entregar os palitos [Referindo-se aos palitos que representariam os lados dos ângulos].
(O13) Professora:	Aqui garotos e garotas [Entregando os palitos com uma taxinha afixada nas extremidades].
(O14) Gustavo:	O que vamos fazer pró?
(O15) Professora:	Usar o círculo.
(O16) Gabriela	Acho que é para girar [Fixando à taxinha no centro do círculo e simulando o giro dos palitos].
(O17) Marta:	A taxinha me furou, ai!
(O18) Gustavo:	A taxinha está soltando pró.
(O19) Professora:	Tem nada não, é para deixar em cima do círculo, não precisa deixar na mão.
(O20) Marta:	Ah, entendi Professora!
(O21) Professora:	O que é que vocês têm nas mãos?
(O22) Todos:	Palitos, círculo...
(O23) Marta	E tesoura pró?
(O24) Professora:	Depois, os palitos de picolé presos com as taxas [Os estudantes falaram juntamente com a Professora].

Da linha (O12) até a linha (O24), os estudantes tiveram contato com os palitos de picolé com uma taxinha afixada nas extremidades. Neste momento, ao receberem os palitos, eles se questionaram sobre a utilidade dos palitos, até mesmo porque a professora não havia passado um cronograma da tarefa antes de sua execução. Então, os estudantes faziam perguntas a professora sobre a realização da tarefa, à medida que eles iam recebendo cada peça do material manipulável (linha (O14)). A professora forneceu uma dica para eles, na linha (O15), o que enseja o envolvimento em outra situação particular: como usar os palitos no círculo. Nesse momento, os estudantes apresentavam uma expressão de questionamento. Enquanto isso, Gabriela girava ambas as pontas do palito no sentido anti-horário. Felipe, Gustavo, Camila e Marta observavam atentamente a forma como Gabriela os girava - linha (O16).

Gabriela, então, havia antecedido as instruções da tarefa ao simular as rotações dos palitos sobre o círculo. Não obstante, a professora fez questão de se aproximar da equipe e mostrar como se posicionava a taxinha no círculo e como deveria ser feita a rotação. Nesse momento, todos os estudantes permaneceram atentos às explicações da professora e repetiram em seguida os mesmos movimentos dela.

Isso nos evidencia uma sequência de passos utilizados pela professora, passos estes realizados pelos estudantes, que iniciam na apresentação do primeiro elemento do material ao último, tangenciando algumas características destes elementos e anunciando algumas utilidades deles durante a tarefa. Por meio destes passos, os estudantes tomaram conhecimento sobre tudo aquilo que utilizariam e algumas regras de utilização para o uso dos materiais manipuláveis para a abordagem de ângulos.

Nesse sentido, podemos notar que os recortes de momentos da aula e as análises que tangenciaram esses recortes trazem à tona o episódio nomeado de "**O engajamento de estudantes no contato preliminar com os elementos do material manipulável**". Nesse episódio, foi possível notar que os participantes foram apresentados aos materiais manipuláveis e neste momento eles puderam perceber as peculiaridades dos mesmos. Além disso, durante as observações, foi possível notar que os estudantes vislumbraram o tamanho do círculo, dos palitos, a variedade dos lápis de cor, além de ensejar as primeiras indagações sobre o que fazer com aquilo tudo. Esse momento, afinal, mostrou-se oportuno para representar uma forma de engajamento dos participantes: *discussão sobre círculo ou representação, palitos no círculo*.

Episódio 2: O engajamento na associação do ângulo nulo à posição inicial dos palitos

Neste episódio foi possível notar o momento em que os estudantes começaram a lidar com o ângulo nulo a partir da rotação de palitos de picolé sobre um círculo de diâmetro 12 cm. Nesta etapa, os estudantes já procederam a manipulação que dividiu o círculo em 4 partes iguais, formando quatro ângulos de 90 graus. Os estudantes mantiveram os palitos de picolés[15] sobrepostos, de modo que o ângulo entre eles foi de zero grau, como pode ser observado na figura abaixo:

Figura 4 – Palitos formando ângulo nulo

A seguir, um recorte da transcrição que evidencia o momento no qual os estudantes concluíram que os palitos justapostos sugeriam um ângulo nulo:

---

[15] Por vezes, utilizarei apenas a expressão *palito* para representar os palitos de picolé sem prejuízos no significado.

(O1) Professora:	Palitos posicionados... Existe ângulo nesse caso?
(O2) Marta:	Existe...
(O3) Camila:	Sim, tem ângulo...
(O4) Gabriela:	[Risos]
(O5) Professora:	De quanto é?
(O6) Professora:	Nulo... De 0 grau!
(O7) Professora:	Eu perguntei se existe ângulo... Então, caso exista, qual a medida dele?
(O8) Camila:	0 grau.
(O9) Professora:	E como podemos nomeá-lo?
(O10) Felipe:	Ângulo nulo.

Antes de a professora orientar que seria o momento em que eles deveriam fixar a taxa no centro do círculo e fazer a rotação, os estudantes já estavam manuseando o círculo e os palitos de modo a encontrar vários ângulos, sem ter a preocupação de compreender nenhum deles. Alguns já deixavam os palitos formando zero grau, mas outros não.

Ao perceber que eles já estavam se adiantando, a professora solicitou que posicionassem os palitos um em cima do outro, na *posição inicial*[16]. Ao mesmo tempo, ela indicava como deveria ser feito com outro manipulável em mãos e exposto à turma. Desse modo, ela fez o movimento e perguntou aos estudantes qual ângulo teria sido formado (linha (O1). Marta, linha (O2), reconheceu que ali se formou um ângulo, o que, aliás, acrescenta elementos à prática, como a noção de *ângulo* e a ideia de ângulo naquela posição especificamente. Os estudantes não só se engajaram na situação particular de reconhecer a posição dos palitos (segmentos de reta) formando ângulo nulo, ou seja, que *existia um ângulo*, mas também permitiram que outra situação se estruturasse naquele momento: *qual medida teria tal ângulo*.

Camila, na linha (O3), concorda com Marta sobre a existência de um ângulo, mas só cita sua medida após os questionamentos da professora. Na linha (O4), Gabriela sorriu porque vê as colegas apenas dizendo que existe ângulo, mas também não diz qual a medida do ângulo. Alguns estudantes disseram qual era o ângulo formado, outros não. Assim, mesmo que algum participante não soubesse a medida daquela ângulo, no momento em que ele foi exposto no grupo, esta medida passa a estar disponível para o grupo. Deste modo, a posição dos palitos determinando o ângulo nulo passou a ser parte da situação da qual eles estavam experimentando.

Como nenhum dos estudantes arriscou determinar o ângulo formado, a professora decidiu apontar e apresentar o ângulo *nulo* para eles (linhas (O5) e (O6)). Enquanto isso,

[16] Termo utilizado pela professora para se referir à posição na qual os palitos formavam ângulo nulo e não haviam sofrido nenhuma rotação.

Felipe não conseguiu manusear a taxinha, deixando-a cair dos palitos e seu colega Gustavo observou atentamente, mas nada fez para ajudá-lo.

A professora Ana, mesmo apresentando uma resposta a sua própria pergunta, repetiu o questionamento (linha (O7)). Sua pergunta agora se tornou retórica ao passo que ela já havia lançado uma possível resposta. Além disso, é possível notar, em sua pergunta, que ela queria, de alguma forma, suscitar a discussão sobre o fato de o ângulo nulo ser dito equivocadamente por muitos estudantes como inexistente.

Outra pergunta retórica é apresentada por Ana, na linha (O9), tendo em vista que ela já tinha falado em ângulo nulo. Ou seja, era uma tentativa de incentivar os estudantes a formalizarem a compreensão sobre ângulo reto, entendendo-o como ângulo em que a abertura entre os lados é nula, nomeando-o, assim, de ângulo nulo.

Desse modo, neste episódio, compreendeu-se ângulo como uma abertura e a partir da sobreposição dos palitos, foi possível, aos participantes, entenderem que ali era uma abertura nula. Sendo assim, os estudantes conseguiram não só compreender quando há um ângulo, como também o reconheceram como de 0 grau, além de nomeá-lo adequadamente.

Por conta disso, intitulamos esse episódio como "**O engajamento na associação do ângulo nulo à posição inicial dos palitos"** no sentido de fazê-lo apresentar duas ideias básicas: reconhecer e compreender. Desse modo, foi apresentado o momento em que os participantes se focaram na tentativa de reconhecer o ângulo nulo formado entre os palitos e de compreendê-lo na posição em que se encontravam os palitos, além disso, os integrantes puderam associar a posição inicial ao ângulo nulo. Para isso, eles notaram que *existia um ângulo quando os palitos estavam na posição inicial*, ou seja, justapostos, e notaram que sua *medida era de zero grau*. Isso nos dá mais subsídios para discutirmos como os participantes se engajam em tal situação.

Episódio 3: O envolvimento de estudantes no recorte dos quadrados conforme as regras

Inicialmente, a professora Lúcia apresentou o pesquisador à turma, ressaltando que haveria uma *filmagem* do desenvolvimento da tarefa e entregou o kit do material manipulável, descrito a seguir, para dar início à tarefa que foi proposta. Neste momento preliminar, foi possível observar que a professora definiu as regras inerentes à tarefa. Ou seja, ela apresentou como os estudantes poderiam proceder, deixando claro alguns limites e alguns casos em que eles teriam liberdade para decidir, segundo suas vontades.

Os estudantes receberam um kit de material (ver figura 3 abaixo) contendo tesouras sem ponta, três quadrados[17] e um triângulo retângulo[18]. A tarefa consistia na manipulação desses elementos para que, de alguma maneira, surgisse entendimentos ou compreensões, por meio da prática do Teorema de Pitágoras, da sobreposição de áreas de figuras quadradas. Há uma forte presença da manifestação da professora, pois, nesta etapa, era necessário deixar claras as regras e os procedimentos adequados, além da orientação sobre a possibilidade de cortar o material, pois ele era feito de papel duplex. Vejam a figura 5 a seguir:

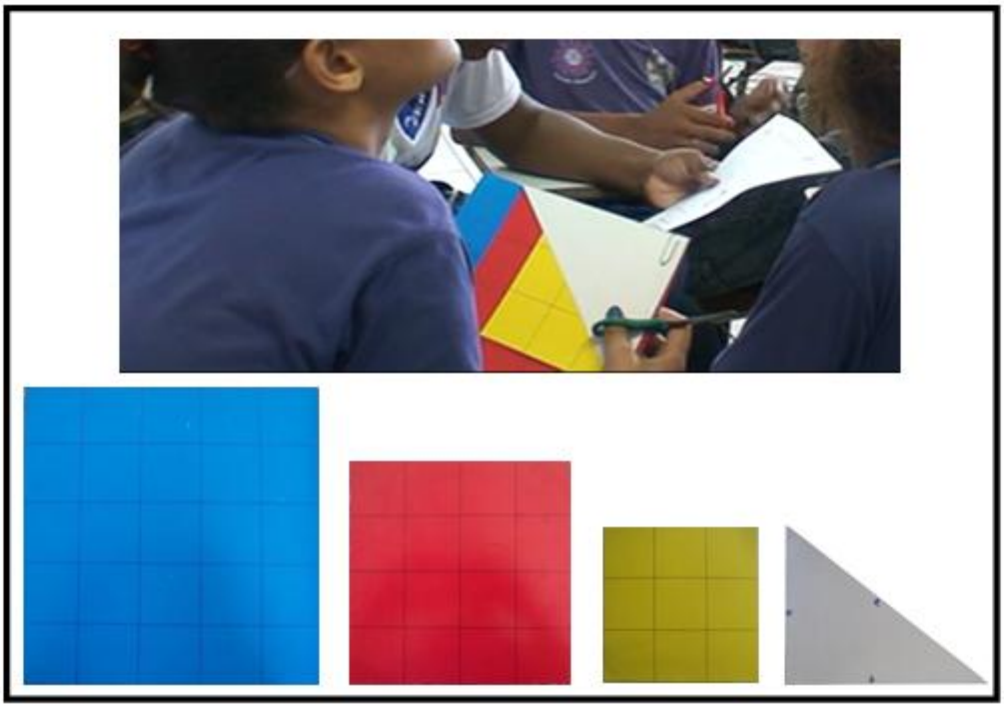


Figura 5[19] – Quadrados e triângulo retângulo

A euforia e ansiedade dos estudantes exprimidas nos questionamentos frequentes, "o que fazer" e "como fazer", oportunizou a apresentação dos materiais manipuláveis. Inicialmente, isso funcionou como um convite para a tarefa, como podemos ver abaixo:

---

[17] Refiro-me aos "quadrados" no lugar de representações do quadrado confeccionadas e recortadas na cartolina sem perder a coerência e o rigor geométricos inerentes a tal situação.
[18] De modo análogo, refiro-me à representação do triângulo como "triângulo".
[19] Quadrado azul, 25x25 cm, quadrado vermelho, 20x20 cm, quadrado amarelo 15x15 cm e triângulo retângulo de lados a = 25 cm, b = 20 cm e c = 15 cm e ângulo entre c e b igual a 90º.

(O1) Professora:	O que é que a gente vai fazer... Não é? Todo mundo já leu o texto ai do início, não é?
(O2) Professora:	Caro estudante, de posse do material... Que não é emborrachado, vocês tão vendo que é cartolina, então pode ser cortado livremente... Siga as orientações abaixo.
(O3) Professora:	Recorte os quadrinhos amarelos e vermelhos [Nesse momento, os estudantes estão experimentando a tesoura e tocando os dois quadrados].
(O4) João:	Pode começar a cortar Lucas. [Lucas toma a frente com a tesoura, mas não começa a cortar os quadrinhos].
(O5) Professora:	Como está na tarefa... O azul não é para cortar [Referindo-se ao fato de que na folha de tarefa não constava instruções para cortar o azul].
(O6) Raquel:	Toma [Referindo-se ao João e entrega uma tesoura a ele].
(O7) João:	Corta direito! [Falando com o Lucas].
(O8) Flávia:	É para cortar assim, não é? [Apontando para as linhas do quadrado amarelo].

Como pode ser visto na linha (O1), a professora iniciou as explanações referentes aos materiais ou a tarefa em foco. Nessa etapa, ela utilizou supressão de ideias para deixar os estudantes inquietos sobre o que fazer ou como se quisesse instigá-los a descobrir *o que vem depois*.

Nas linhas (O1), (O2) e (O3), a professora forneceu algumas orientações e frisou o fato de o material poder ser cortado, pois ele é feito de um material mais barato que o EVA[20].

Com isso e com a ênfase de João, na linha (O4), os estudantes tomaram fôlego e começaram a cortar. No entanto, apenas as meninas de fato começaram a cortar os quadrados. Raquel, após ter cortado uma tira do quadrado vermelho, passou a tira para João terminar o corte das unidades quadradas[21] (linha (O6)). Raquel iniciou a tarefa muito quieta e reservada, mas aos poucos foi deixando-se levar pelas ações dos grupos e passou a contribuir mais incisiva e diretamente no trabalho.

Na linha (O7), João preocupou-se com o corte correto quando percebeu que Flávia iria cortar fora da linha no quadrado amarelo. Na linha (O8), Flávia tentou compreender o que João estava falando. A todo o momento, os estudantes estavam experimentando o material, enquanto um não cortava, o outro estava contando a quantidade de quadrados.

Ainda nessa etapa, ocorreu algo interessante, Raquel e Flávia cortaram sem dar muitas palavras, como se tivessem certeza das etapas do processo a ser desenvolvido ali, enquanto os

[20] O EVA é um material semelhante à borracha e pode ser encontrados em diversas cores. No entanto, na atividade deu-se preferência à utilização do duplex por conta do custo-benefício, levando-se em conta os cortes com tesoura propostos na atividade.

[21] Usarei, por vezes, a expressão *unidades quadradas* para representar os menores quadrados obtidos do corte, quadrados de 5 cm de lado.

outros se mantinham experimentando o quadrado azul e as outras tiras amarelas e vermelhas. Os participantes se mantiveram envoltos em duas situações particulares, nas quais eles puderam se dar conta de que as situações existiam, além de reconhecerem os elementos atrelados a elas. Isto é, a primeira situação instalada foi quando começaram a se engajar no corte dos quadrados. Assim, os estudantes utilizaram tesouras e associaram-na ao elemento a ser cortado; outra, quando perceberam a importância do corte o mais rente possível às linhas, momento este em que os estudantes compartilham a sua compreensão sobre a forma correta de cortar o material. Mesmo que, possivelmente, inconscientes ou sem refletir sobre o que estavam fazendo, eles estavam engajados em tais situações.

Diante disso, vemos que esse entrelaçamento das linhas transcritas e discussões acerca destas linhas caracterizam o episódio intitulado "**O envolvimento de estudantes no recorte dos quadrados conforme as regras"**, que fomenta o primeiro contato do grupo[22] de estudantes observados com os materiais. Nesse momento, eles puderam perceber as características dos materiais manipuláveis, notar coloridos diferentes, perceber as linhas cortando cada quadrado, observar as medidas de cada lado do triângulo, perceber a funcionalidade de cada elemento do material etc. Além disso, eles se engajaram ao *começarem a cortar os quadrados* e *compreenderam a importância do corte adequado*. Desse modo, foram apresentadas diversas situações nas quais os participantes estiveram engajados na ação de recortar os quadrados conforme as regras impostas pela tarefa, pela professora e até pelos participantes.

Episódio 4: O envolvimento na associação dos lados dos quadrados com os lados do triângulo

Neste episódio, os participantes encontravam-se no momento em que tiveram que compreender qual seria a relação dos quadrados com o triângulo retângulo em uma tarefa destinada a gerar compreensões sobre o teorema de Pitágoras a partir da manipulação dos materiais manipuláveis. E, por fim, a obtenção da fórmula de tal teorema a partir da manipulação de elementos de um kit de figuras geométricas: quadrado amarelo, 15 cm de lado; quadrado azul, 25 cm; quadrado vermelho, 20 cm de lado e triângulo retângulo, com hipotenusa igual a 25 cm, e catetos iguais a 4 cm e 3 cm (Vejam a figura 6 abaixo).

[22] Mais detalhes sobre o grupo e como ele foi formado encontram-se no contexto.

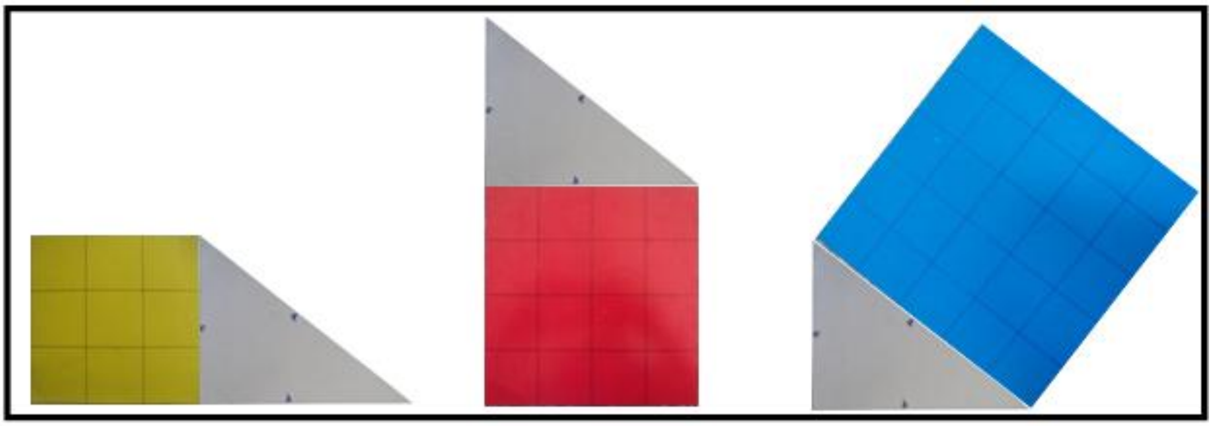


Figura 6[23] – Quadrados

Nessa etapa, os estudantes tentaram remontar os quadrados cortados à priori, para que pudessem perceber as áreas destes e sua relação com os lados do triângulo. Vejam abaixo algumas discussões sobre isso:

(O1) João:	Aqui gente, triângulo... lados, altura... [aponta para o triângulo, tangenciando seu dedo como se desenhasse o perímetro do triângulo, além de apontar a altura do triângulo e do quadrado].
(O2) Professora:	A gente já conhece esses lados, não é Fernando?
(O3) Fernando:	É o cateto...
(O4) Professora:	Onde é cateto?
(O5) Fernando:	Aqui [apontando para a hipotenusa do triângulo]
(O6) Professora	Ai é cateto?
(O7) Fernando:	Não... aqui, pró!
(O8) Professora:	Agora vem cá, e esse daqui, esse azul, é de que lado do triângulo?
(O9) João:	Hipotenusa!
(10) Professora:	Você acha que é hipotenusa?
(11) João:	Sim... é a hipotenusa mesmo.

Na linha 1, João demonstrou ter percebido alguns elementos geométricos presentes no material manipulável. Enquanto que nas linhas (O2), (O3) e (O4) e (O5), ele revelou reconhecer alguma relação do lado do quadrado amarelo com o cateto do triângulo mesmo que ele não saiba determinar onde se encontra o cateto (linhas (O5) e (O6)).

Para o quadrado azul, eles conseguiram fazer uma referência mais imediata com a hipotenusa, talvez por este possuir um lado maior que os outros e lembrar a hipotenusa do triângulo, por esta ser o maior lado do triângulo, linhas (O8) e (O9). Os estudantes

[23] O quadrado amarelo possui lado igual a *c; o vermelho igual a b; e o azul igual a c*.

conseguiram compreender algumas relações quanto aos lados, partindo, posteriormente, para as relações quanto às áreas, como veremos a seguir:

(12) João:	Professora!
(13) João:	Entendi... Está quase completo...
(14) João:	Vai cobrir tudo, entendi!
(15) João:	É porque a soma dos catetos... Não... É isso... A soma dos catetos é igual ao cateto maior, no caso hipotenusa.
(16) Lucas:	O quadrado é igual à hipotenusa... [Referindo-se à área do quadrado azul]
(17) Professora:	Como é? O quadrado...? Igual a hipotenusa?
(18) Fernando:	Está. E o triângulo?
(19) João:	A área dele...
(20) Fernando:	Professora! Professora...! A área do triângulo retângulo é igual à área do quadrado.
(21) Professora:	É isso? A área do triângulo retângulo é igual à área do quadrado? A gente conversou sobre área não foi?
(22) Professora:	Isso daqui é o triângulo [Toma o triângulo em mãos e o faz sobrepor o quadrado].
(23) Professora:	Ai, ele ocupa o quadrado?

Os estudantes começaram a preencher a área do quadrado azul com as unidades quadradas[24] vermelhas e amarelas (linhas (O13) e (O14)), sobrepondo cada unidade quadrada vermelha e amarela nas unidades quadradas azuis. Nas linhas (O14), (O15) e (O16), é possível notar que os estudantes estavam confundindo *cateto* com *área*. Nesse caso, eles acreditaram que os dois catetos eram iguais à hipotenusa. Talvez pelo fato de os quadrados (vermelho e amarelo) possuírem lados iguais aos catetos do triângulo retângulo e suas áreas somadas serem iguais à área do quadrado azul, de lado igual à hipotenusa.

Na linha (O16), por exemplo, Lucas dá indícios de um possível amadurecimento em termos de perceber a relação. Ele tentou relacionar o quadrado azul com a hipotenusa do triângulo, mas ele gesticulava como se quisesse falar da área e ao mesmo tempo apontava o lado do quadrado azul. Deste modo, ele deixou margens a futuras conclusões próprias ou de algum outro participante e apontou a relação direta entre a hipotenusa e a área do quadrado (Esta relação pode ser sintetizada pela expressão *hipotenusa x hipotenusa).*

Na linha (O18), Fernando preocupou-se com o triângulo e quais as relações teriam para ele de fato. Nesse momento, os estudantes se inspiraram e começaram a utilizar frequentemente o termo área. No entanto, eles acreditavam que a área do triângulo retângulo era igual à área do quadrado azul (linha (O20)). Lúcia questionou-os sobre tal afirmação, nas linhas (O21), (O22) e (O23), e eles chegaram à conclusão de que isso não era coerente apenas

[24] Os quadrados originais do kit, cortados em quadrados menores, resultariam em unidades quadradas; isto é, quadrados com 5 cm de lado.

sinalizando com a cabeça. É importante salientar que todas as discussões foram feitas tendo o material em mãos.

Neste episódio, pode-se notar que os estudantes chegaram à compreensão das possíveis relações entre os quadrados do material e o triângulo retângulo. Com isso, eles puderam perceber que cada quadrado tinha a medida do lado correspondente à medida de um lado do triângulo e a área desse quadrado corresponderia ao quadrado dessa medida. Em outras palavras, por exemplo, o quadrado de medida c corresponde ao lado do triângulo de medida c e sua área é dada por c^2. Analogamente, a área dos outros dois quadrados é dada por a^2 e b^2.

A partir do que foi visto, a análise feita acima e as transcrições apresentadas, podemos perceber porque o episódio foi intitulado "**O envolvimento na associação dos lados dos quadrados com os lados do triângulo"**. Nesse caso, foram apresentadas e discutidas as relações dos quadrados com os lados do triângulo, além disso, deu indícios de envolvimento dos participantes nessas situações, ou seja, nos momentos em que eles estavam se envolvendo em situações que se referem a tais relações. Com isso, podemos enfatizar que os estudantes se envolveram na *descoberta de elementos geométricos no material manipulável*, quando apontaram altura, lado, triângulo e quadrado; quando *relacionam os lados do quadrado com os lados do triângulo*; e quando eles tentaram *expressar a área do quadrado em função do lado do triângulo*.

2.7 DISCUSSÃO DOS DADOS E CONCLUSÕES

Neste artigo, almejamos levantar algumas características que subsidiasse a percepção e discussão sobre como os participantes se engajam em determinadas situações sociais, por meio da observação de aulas de Matemática que abordaram o tópico de geometria, nas quais os participantes fizeram uso de materiais manipuláveis. Essa discussão teve a perspectiva da aprendizagem situada (LAVE; WENGER, 1991) como referencial teórico, que tem o engajamento mútuo como uma das três dimensões da prática social.

Sobremaneira, olharemos então para os dados no sentido de discutir os padrões de envolvimento ou apontar características, padrões desse envolvimento. Para isso, como sugerem Clements (1999) e Barbosa et. al. (2008), nas aulas que abordaram o tópico geometria, em particular (pelo menos), os estudantes foram incentivados a progredir nas tarefas e nas suas compreensões, isto é, propiciaram uma situação favorável à abstração do saber, o que pode acrescentar elementos referentes ao engajamento na prática social destas salas de aula.

Aliás, o fato de os estudantes participarem das aulas que abordaram o tópico geometria, ora se familiarizando com os manipuláveis, ora reconhecendo a relação dos quadrados com os lados do triângulo retângulo, ora compreendendo o ângulo nulo no círculo, caracterizou a participação nessa prática escolar. Essa participação, no entanto, não é comum a todas as práticas sociais e sugere formas diferentes de engajamento. Consoantes às ideias de Clements (1999) e Barbosa et. al. (2008), os participantes progrediram no sentido de se engajarem em diversas situações, experimentando, assim, diversas compreensões específicas proporcionadas pelo contexto. De todo modo, os estudantes estão sendo reconhecidos pelas suas ações, pelo seu modo de falar e por se engajar de maneiras distintas (WENGER, 1998).

Nos episódios acima apresentados, podemos notar que os estudantes além de situarem o conhecimento na prática (LAVE; WENGER, 1991), eles começaram a se familiarizar com os elementos do material manipulável apresentados pela professora Lúcia. Além disso, em cada uma dessas formas de participação, os estudantes apresentaram formas de engajamento distintas, em momentos específicos, ao passo em que eles passaram a se envolver em algo.

Assim, em conformidade com o objetivo do presente artigo, podemos notar no episódio intitulado "**O engajamento de estudantes no contato preliminar com os elementos do material manipulável"**, que os estudantes apresentaram bastante ansiedade ao receberem os primeiros elementos do material manipulável. Essa sensação era visível em seus rostos e notável em suas perguntas como: *o que faremos? Para que usarei isso?* Além disso, no episódio intitulado "**O envolvimento de estudantes no recorte dos quadrados conforme as regras"** ocorre algo similar, ou seja, os estudantes da aula de Lúcia apresentaram muita ansiedade e, consequentemente, precipitam-se em algumas etapas, como corte de algumas peças do material antes da hora.

A curiosidade demarca fortemente o território durante o desenvolvimento das tarefas, para os quatro episódios. Em certos momentos, os estudantes antecedem as instruções da tarefa ou das professoras e realizam algum procedimento não orientado ainda, por exemplo, a rotação dos palitos sobre o círculo sem antes serem orientados para tal. Não que isso seja um ponto negativo, mas demarca que os estudantes tendem a inserir-se na tarefa com vontade de descobrir, compreender e conhecer.

Ainda nesse sentido, foi possível perceber fortemente tomada de decisão juntamente com negociação de significados. Em outras palavras, quando os estudantes questionam se é "*círculo ou representação"*, decidindo conjuntamente qual o significado a que vão associar a tal elemento do kit do material manipulável, o círculo. Deste modo, eles estão não só exercitando o espírito de grupo, mas o de respeitar modo de pensar, agir e falar dos demais membros. Aliás, é interessante pensar num engajamento voltado para a compreensão do que ocorre a sua volta, ou seja, cabe ao participante tornar-se ciente de tudo que diz respeito ao que ele está envolvido.

Sem prejuízo do entendimento, podemos entender cada participante completamente envolvido no sentido de saber que se trata de círculo e porque se faz referência a ele; saber que se trata de representação do círculo e porque se refere a ele; e qual o significado disso para o grupo.

No episódio intitulado "**O engajamento na associação do ângulo nulo à posição inicial dos palitos**", os estudantes envolveram-se na descoberta do ângulo nulo, sem muitas orientações prévias da professora Ana, já que eles estavam se antecipando na tarefa. Os participantes compartilharam do saber atrelado à descoberta do ângulo nulo como *posição inicial*[25] dos palitos. No entanto, a forma como eles tentam determinar o ângulo nulo não é compartilhada, isto é, eles mostram-se receosos para afirmar se existe ângulo ou não e como poderia ser nomeado no caso dos palitos sobrepostos. Por isso, alguns deles até rotacionaram os palitos sem maiores compreensões sobre os ângulos formados, enquanto outros apenas deixaram os palitos sobrepostos e na posição inicial.

O episódio intitulado "**O envolvimento na associação dos lados dos quadrados com os lados do triângulo**", sugere um envolvimento dos estudantes direcionado ao reconhecimento da relação do quadrado amarelo com o cateto menor do triângulo retângulo, o lado *c*, do quadrado vermelho com o cateto médio, lado b; e do quadrado azul com a hipotenusa. Para cada participante engajar-se em tais descobertas, foi necessário não só a plenitude de conhecimento de cada elemento associado à situação (seja a relação do quadrado amarelo, seja do vermelho ou do azul) por parte de cada participante, como também reconhecê-los de uma forma associada.

Assim, os estudantes engajaram-se, mutuamente, num processo de visualizar tais relações. Todavia, em alguns momentos da tarefa, os estudantes estavam confundindo cateto com área, quanto tentavam associar o lado do quadrado azul com o triângulo retângulo.

Por mais que elenquemos inúmeras formas de engajamento, não conseguiremos esgotar as possibilidades, dados os inúmeros olhares sobre os dados. No entanto, deixamos algumas delas como ponto de partida para outras contribuições que venham somar-se a essas.

---

[25] Termo utilizado pela professora no Episódio 2.

É preciso, porém, demarcar mais alguns elementos. Assim, envolver-se em torno de algo, sempre está atrelado ao objetivo central, seja ele compreender o teorema de Pitágoras ou compreender os ângulos fundamentais a partir do círculo. Além disso, à medida que ocorre engajamento, ocorre também reconhecimento por parte de todos os participantes. Disso, decorrem duas dimensões: uns reconhecem explicitamente e outros não. Outro fator importante é a negociação de significados conjunta mediante cada engajamento. Isso é importante para demarcar que os significados atribuídos nessa atividade podem ter sentido apenas nessa situação. Ou seja, o que é reconhecido como uma representação do círculo para outros pode ter outro significado que não este.

Podemos observar, por exemplo, que os estudantes estavam em pleno exercício de negociação de significados a respeito da representação do círculo, isto é, o momento é oportuno para que eles confrontem o significado antes atribuído àquela figura com o significado que é válido para a situação. Ademais, é um momento em que eles precisam se engajar conjuntamente, todos precisam negociar os significados daquilo. Ou seja, não parece coerente pensar em participante que não se disponha a negociar significados de tudo àquilo atrelado à prática.

Quando os estudantes focalizam na obtenção e reconhecimento do ângulo nulo, eles envolvem-se numa situação também bastante particular da tarefa. Ou seja, a prática do grupo estava voltada para reconhecer aquela posição dos palitos como caracterizadora da angulação nula. Até os gestos, o balançar de cabeça favoreceu a negociação de significados, nesse caso. Por sinal, as ações da prática indicaram um dos muitos modos de se perceber o ângulo nulo. Em outras palavras, o modo especial de compreendê-lo, abstrair e tornar-se capaz de valer-se da sua compreensão em outras ocasiões diferencia-se de outros modos, como ver o ângulo nulo apenas como um dos pontos de uma aula de Matemática que aborda o tópico geometria.

Os estudantes ganharam afinidade com os materiais manipuláveis, gradualmente. João, por exemplo, envolveu-se no corte das unidades quadradas como se tivesse propriedade daquilo, "*corta direito, Lucas*", reconhecendo e fazendo reconhecerem que o corte fora da linha poderia prejudicar o material ou mesmo sua compreensão. Assim, ao passo em que Flávia pergunta "*como?*", sugere uma ligeira sintonia com o que João falou. Nesse sentido, tanto a visão de João atentando para que se tenha cuidado quanto à forma correta do corte foi compartilhada. De uma maneira ou de outra, cada estudante participou, seja argumentando ou apenas consentindo.

Apesar de o objetivo central ser compreender todas as relações possíveis entre os lados do quadrado e os lados do triângulo retângulo, os estudantes engajaram-se, num momento particular, em determinar o cateto do triângulo e determinar a que lado do triângulo corresponde o lado do quadrado azul. O êxito de João estende-se aos demais colegas e então ele é reconhecido como participante pleno na consecução de relacionar esse lado do quadrado.

Diante disso, concluímos que os estudantes podem apresentar diferentes modos de engajamento dentro de diferentes formas de participação, como já discutido acima, ao passo em que vão estabelecendo familiaridade com os manipuláveis ou reconhecendo ângulos e compreendendo o teorema de Pitágoras. Ao engajar-se na ação de reconhecer a representação do círculo como o próprio círculo, o que caracteriza uma tomada de decisão por parte dos participantes, os estudantes estão colocando em prática a negociação de significados das suas ações, interpretações e de suas argumentações.

Notamos, porém, que essas considerações são possíveis dentro de uma esfera local, mesmo que tenham poder expansivo e abrangem outras situações. De todo modo, acreditamos que podem existir outros modos de engajamento em outras esferas até mesmo a partir de outros olhares sobre essa. Assim, o engajamento mútuo proporcionado pelos materiais manipuláveis na aula de Matemática que abordou o tópico de geometria pode ter variações segundo o uso realizado pelo estudante.

Outra consideração importante diz respeito ao saber na prática. Nesse sentido, o saber ou conhecimento na prática está relacionado com o engajamento, em outras palavras, conhecimento é uma questão de participação nesses modos de se engajar ativamente no mundo de uma maneira mais geral (WENGER, 1998), pois o saber dependeu intrinsecamente das relações estabelecidas entre as pessoas pertencentes à prática. Notamos, também, que esse saber é mutável seguindo parâmetros estabelecidos pela mudança na forma de engajamento mútuo.

Proença e Pirola (2011), por exemplo, apontam a importância da apresentação de figuras de triângulos com tamanhos diferentes aos estudantes para que eles percebam que se tratam da mesma figura. Semelhantemente, os participantes do grupo observado puderam experimentar formas diferenciadas de engajamento, seja reconhecendo algum ângulo, percebendo existência de outro ou associando elementos geométricos.

Diante disso, conforme os resultados nesta pesquisa e consoante às compreensões geradas por outras pesquisas relacionadas direta ou indiretamente, acreditamos contribuir para entendermos como funcionam outras formas de engajamento não destacadas aqui ou até mesmo em outras práticas sociais. Além disso, as implicações desse artigo podem gerar subsídios para compreendermos o fenômeno aprendizagem de estudantes. Possivelmente, estaremos também contribuindo para se refletir o trabalho em sala de aula.

2.8 REFERÊNCIAS

ALVES-MAZZOTTI, A. J.; O método nas ciências sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWAMDSZNADJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa**.. São Paulo: Pioneira, 2002. p. 147-178.

BARBOSA, P. M.; SEGADAS, C. ; ROCHA, D. F. ; SILVA, F. ; PEREIRA, M. M.; SILVA, B. P. A importância do pensamento visual na geometria. In: VI SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO, 2008, Rio de Janeiro. **Anais**... Rio de Janeiro: SBEM, 2008. p. 1-11.

BRUM-DE-PAULA, M. R.; ESPINAR, G. S. Coleta, transcrição e análise de produções orais. In: BRUM-DE-PAULA, M. R.; SCHERER, A. E.; PARAENSE, S. C. L. (Orgs.). **Letras**, nº 21. Santa Maria: PPGL Editores, 2002. p. 1-13.

CHARMAZ, K. Constructing Grounded Theory: a practical guide through qualitative analysis. London: Sage, 2009.

CLEMENTS, D. H. ‘Concrete’ manipulatives, concrete ideas. **Contemporary Issues in Early Childhood**, v. 1, n. 1, p 1-16, 1999.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. Introduction: the discipline and practice of qualitative research. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Ed.) **Handbook of qualitative research**. 3. ed. Thousand Oaks: Sage, 2005, p. 1-32.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Uma Reflexão Sobre o Uso de Materiais Concretos e Jogos no Ensino de Matemática. **Boletim da SBEM**, São Paulo, v. 4, n. 7, 1993.

FRADE, C. **Componentes Tácitos e Explícitos do Conhecimento Matemático de Áreas e Medidas**. 2003. 251 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2003.

GELLERT, U. Didatic material confronted with the concept of mathematical literacy. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, 55; p. 163 – 179, 2004.

KALEFF, A. M. M. R., **Vendo e Entendendo Poliedros**. Niterói: EdUFF, 1998.

KAMII, C.; LEWIS, B.A.; KIRKLAND, L. Manipulatives: When are they useful? **Journal of Mathematics Behavior**, v. 20, p. 21-31, 2001.

LAVE, J.; WENGER, E. **Situated learning: Legitimate peripheral participation**. New York: Cambridge University Press, 1991.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. (Org.) **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores Associados, 2006. p. 3-38.

MOYER, P.S. Are We Having Fun Yet? How Teachers Use Manipulatives to Teach Mathematics. **Journal Educational Studies in Mathematics**, v. 47, p. 175-197, 2001.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 9, n. 9 e 10, p. 1- 6, 2004-2005.

PAIS, L. C. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria. **ANPED**, Caxambu, 23ª reunião, p. 1-16 , 24-28 set. 2000. Disponível em: <http://www.anped.org.br/reunioes/23/textos/1919t.pdf>. Acesso em: 16 mai. 2008.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, S. (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores Associados, 2006. p. 77-92.

PROENÇA, M. C.; PIROLA, N. A. O Conhecimento de Polígonos e Poliedros: uma análise do desempenho de aluno do ensino médio em exemplos e não-exemplos. **Ciência e Educação**, São Paulo, v. 17, p. 199-217, 2011.

SILVA, M. C. F. Pausas em textos orais e espontâneos e em textos falados**. Linguagem em discurso**, Tubarão, v.3, n. 1, p.111-133, 2002.

SOUZA, J. V. B. de; BARBOSA, J. C. Os manipuláveis e a prática questionadora dos alunos na sala de aula de matemática. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2010, Salvador. Anais... São Paulo: SBEM, 2010, p 1-10.

WENGER, E. Comunities of Pratices Learning, Meaning, and Indentity. Cambridge: University Press, 1998.

3. ARTIGO II

MATERIAIS MANIPULÁVEIS E REPERTÓRIO COMPARTILHADO NAS AULAS DE MATEMÁTICA ENVOLVENDO TÓPICOS DE GEOMETRIA

Jamerson dos Santos Pereira[1]

RESUMO

Neste artigo buscamos analisar o repertório compartilhado no desenvolvimento de duas tarefas em aulas de Matemática que abordaram tópicos de geometria, na qual foram utilizados materiais manipuláveis. Utilizamos, como lente teórica na compreensão do objeto de estudo e discussão dos dados, a perspectiva da aprendizagem situada segundo Jean Lave e Etienne Wenger (1991). Os dados foram coletados, principalmente, por meio da observação, entrevista e registros dos estudantes. Por resultados, concluímos que os participantes apresentam modos compartilhados de participar, tornando comuns os elementos do repertório dispensado pela sua prática social. A partir da pesquisa, algumas situações de compartilhamento foram delineadas: *o uso compartilhado de ferramentas e termos*; *Interpretações compartilhadas sobre o ângulo de 180 graus*; *Compartilhamento de símbolos, expressões e termos geométricos*; *tentativas compartilhadas de ajustar a fórmula do teorema de Pitágoras*.

Palavras-chave: Ensino de Geometria. Materiais manipuláveis. Repertório compartilhado.

ABSTRACT

In this paper, we analyze the shared repertoire in the development of two tasks in mathematics classes that addressed topics of geometry, in which were used manipulative materials. We used the Situated Learning Perspective as provided by Jean Lave and Etienne Wenger (1991) as theoretical lens to understand the object of study and the discussion of the data. Data were collected through mainly observation, interview and student records. For results, we conclude that the participants have shared ways to participate, making the common elements of the repertoire dispensed by its social practice. From the research, some sharing situations were outlined: the sharing of tools and terms; shared interpretations about the angle of 180 degrees; Sharing symbols, expressions and geometric terms; shared attempts to adjust the formula of the Pythagoras' theorem.

Key words: Teaching Geometry. Manipulative Materials. Shared repertoire.

---

[1] Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia (UFBA) e Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS).

3.1 INTRODUÇÃO

Os materiais didáticos têm sido foco de pesquisas em Educação Matemática (PAIS, 2000; CLEMENTS, 1999). Estas pesquisas, em sua maioria, discutem sobre as vantagens e as desvantagens da sua utilização no ensino de Matemática e outras, mais especificamente, no ensino de geometria. Nessa direção, alguns autores chamam atenção para o uso do material didático pautado numa reflexão antes de usá-lo em sala de aula (PAIS, 2000). Esses materiais, no sentido amplo, são recursos utilizados pelo professor, tais como livros, listas de exercício, jogos, materiais manipuláveis ou concretos, etc.

Os professores, em sua maioria, costumam acreditar que o fato de utilizar os materiais didáticos, em sala de aula, ameniza as dificuldades de ensino, pensando que o simples manuseio destes recursos acarretaria na compreensão dos conteúdos por parte dos estudantes (PASSOS, 2006, 2007). Entretanto, Pais (2000) salienta que o uso desses materiais didáticos no ensino de geometria deve ser pautado numa reflexão pedagógica, evitando, assim, que se recaia numa experiência desprovida de intenções pedagógicas. Nesse mesmo sentido, Passos (2007) acrescenta que há uma estreita relação entre experimentação e a reflexão, pontuando que o professor tem papel importante tanto no que diz respeito à escolha do material quanto no cuidado da relação estudante-conhecimento.

Outro fator a se considerar diz respeito às intenções que o professor delineia e os resultados alcançados pelos estudantes. Sendo assim, os docentes precisam atentar para as relações entre o material didático e o objeto matemático a ser trabalhado por meio deste (PAIS, 2000; PASSOS, 2007). Nessa perspectiva, os significados atribuídos às ações, ao pensar, às relações estabelecidas pelos estudantes durante a utilização dos materiais manipuláveis, são os mais variados possíveis, considerando a pluralidade das relações sociais estabelecidas em cada contexto.

Materiais didáticos são, por vezes, denominados apenas como materiais manipuláveis. Lorenzato (2006), por exemplo, utiliza as expressões "*concreto* e *manipulável"*, como se os materiais manipuláveis permitissem o contato físico. Seguindo essa ideia, utilizaremos, a partir de agora, somente o termo *materiais manipuláveis* e convergiremos para o sentido apontado por Reys (1971, apud Passos, 2006). Para o autor, os materiais manipuláveis são "objetos ou coisas que o estudante é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma idéia" (REYS, 1971, apud Passos, 2006, p. 78). Notemos, porém, que essa definição não faz referência à ideias estritamente matemáticas.

Moyer (2001), no entanto, argumenta que os bons materiais são aqueles que favorecem a construção, fortalecimento e ligação entre várias ideias matemáticas. Isso ocorre, desde quando não se restrinja apenas às relações matemáticas, isto é, de modo que os estudantes possam também trabalhar outras ideias. Assim, Lamberty e Kolodner (2002), Moyer (2001), Pais (2000) e Passos (2007) ressaltam que os materiais manipuláveis podem ser trabalhados como uma ferramenta de aprendizagem, porque eles podem contribuir na visualização de conceitos matemáticos de modo concreto. Além disso, o apelo visual e concreto que os materiais possuem é apontado nas experiências práticas desenvolvidas nas salas de aula (MOYER, 2001).

Desse modo, podemos observar que a ideia de *concreto* no material manipulável é frisada por alguns autores. Clements (1999), por exemplo, associa o material manipulável ao fato de eles poderem ser concretos, isto é, agarrados ou manipulados com as próprias mãos. De certo modo, suas ideias convergem com as de Reys (1971, apud Passos, 2006) no sentido de permitirem o toque, a manipulação, o movimento e, devo acrescentar, o dobrar, frisar, recortar, sobrepor, justapor. Assim, ganham espaço, por exemplo, uma régua, uma tesoura, uma folha de papel ou garrafa plástica que não são especialmente construídos para trabalhar ideias matemáticas, mas que podem ser utilizados pelos estudantes e professores de modo a fomentar alguma compreensão matemática.

Outro olhar sobre materiais manipuláveis é apresentado por Fiorentini e Miorim (1993). Estes autores argumentam que estes podem ser considerados como um conjunto de objetos abstratos porque existem apenas na escola com a finalidade de ensino. Contudo, essa ideia é bastante limitadora da compreensão que temos dos materiais manipuláveis, tendo em vista seu contexto e finalidade particulares. No entanto, é preciso concordar com os autores no sentido de que o concreto para o estudante nem sempre é o material manipulável, mas sim a relação que ele estabelece socialmente.

Nesse sentido, precisamos levar em consideração o contexto em que se utiliza o material manipulável como também as relações sociais estabelecidas pelos sujeitos. Assim, focaremos a discussão no que tange aos materiais manipuláveis no contexto da prática social de estudantes do Ensino Fundamental II, em aulas de matemática, nas quais foram abordados dois tópicos de geometria: teorema de Pitágoras e ângulos fundamentais. Diante disso, analisaremos, então, como esses estudantes compartilham o repertório nas práticas das quais eles participam. Na seção seguinte, traremos, mais especificamente, da perspectiva teórica e de alguns conceitos que embasaram esta pesquisa.

3.2 PRÁTICA SOCIAL, PARTICIPAÇÃO E REPERTÓRIO COMPARTILHADO

A prática social, conforme argumenta Wenger (1998), diz respeito a um fazer situado dentro de um contexto histórico e social que fornece estrutura e significado às nossas ações. Nesse movimento, são estabelecidas relações específicas entre os membros que compõem o grupo, formas de se relacionar particulares em cada contexto; ou seja, a linguagem, os símbolos, os instrumentos são específicos Sendo assim, os membros precisam, de algum modo, ter seus papéis bem definidos, os critérios específicos, percepções específicas e visões de mundo compartilhadas por todos.

Em relação ao conceito de aprendizagem, consoante a perspectiva da aprendizagem situada segundo Lave e Wenger (1991), podemos dizer que é um aspecto inseparável da prática social. Assim, a aprendizagem é um constituinte da prática social. As relações sociais dessa prática definem as possibilidades de aprendizagem (MATOS, 1999). Desse modo, Matos (1999) argumenta que essa perspectiva desloca o foco sobre o indivíduo como alguém que aprende sozinho, enfatizando que o aprender se dá por meio da participação no mundo social. Em outras palavras, o olhar está voltado para o que ocorre na prática social ao invés de focar no processo de aprendizagem individual.

A prática social, nesse sentido, diz respeito às formas de agir que são compartilhadas direta ou indiretamente pelos grupos socialmente estabelecidos. Esse conceito de prática social está intimamente ligado ao de participação. Esse conceito, então, refere-se a um processo de estar envolvido ativamente nas práticas sociais (WENGER, 1998). Nesse sentido, Wenger (1998) aponta para a possibilidade de haver, nas relações sociais, reconhecimento mútuo, isto é, na efetivação das ações entre os membros de um grupo deve haver a possibilidade destas serem reconhecidas por todos os integrantes, inclusive o praticante da ação.

É importante destacar que as relações estabelecidas na prática social de um grupo não são, necessariamente, harmoniosas em todos os aspectos da prática. Participação, aliás, engloba todo tipo de relação, ou seja, envolve as relações competitivas, cooperativas ou conflituosas (WENGER, 1998). Compartilhar, nesse sentido, não remete, necessariamente, a concordar com tudo que é dito ou feito, mas sim tomar conhecimento de que o fato existe. Além disso, não consta na perspectiva da aprendizagem situada (LAVE; WENGER, 1991) que deve haver a participação presencial dos membros, nem tampouco a definição clara de fronteiras do grupo (MATOS, 1999).

Desse modo, a prática social está relacionada à participação. Para delimitar o conceito de participação, em função do que foi dito, Lave e Wenger (1991) argumentam que isso implica num sistema de atividade sobre as quais os participantes compartilham compreensões concernentes ao que eles estão fazendo e o que isso significa em suas vidas. Decorre disso o conceito de participação em níveis múltiplos, isto é, os membros contribuem com o grupo social diferentemente, apresentam diferentes pontos de vista e interesses (LAVE; WENGER, 1991).

Frade (2003) argumenta que é necessário distinguir participação de outras atividades. Assim, nem todo engajamento se configura como participação, pois nem todo engajamento permite que haja reconhecimento mútuo. Portanto, podemos estar envolvidos na leitura de uma revista em quadrinhos, assistindo um filme, uma entrevista, fazendo algum trabalho no computador, pesquisando sem que sejamos de fato um participante, pois estas situações não envolvem reconhecimento mútuo. Pode acontecer, também, do indivíduo integrar um grupo e estar envolvido em alguma conversa com algum colega de outro grupo sobre futebol, por exemplo, sem, necessariamente, contribuir com o seu grupo ou com a prática social deste. Assim, ele não estaria nem poderia ser reconhecido pelos demais integrantes.

Desse modo, o conceito de participação não só está conectado ao de prática social, mas também ao de aprendizagem, que é caracterizado pela mudança de participação do indivíduo nas atividades vinculadas à prática (LAVE; WENGER, 1991). Nesse sentido, Frade (2003, p. 68) argumenta que, no processo de aprendizagem, o desenvolvimento de uma prática é caracterizado pela "capacidade de manter o engajamento de seus membros na perseguição de empreendimentos comuns". Aprendizagem, nesse sentido, tem a ver com estar engajado nos empreendimentos/objetivos comuns.

Além disso, conforme Wenger (1998), a aprendizagem numa prática inclui: (a) Evolução de formas de engajamento mútuo, isto é, referem-se às descobertas feitas pelos indivíduos de como se engajar e desenvolver relações mútuas, além de reconhecer o que é bom ou não, quem sabe o quê ou o que é fácil ou não; (b) Compreensão e reparo do seu empreendimento, isto é, diz respeito a alinhar o engajamento ao empreendimento, além de resolver os conflitos sobre as interpretações referentes ao que o empreendimento sugere, isto é, delimitar os objetivos do que se pretende fazer para que seja possível o engajamento; (c) Desenvolvimento do repertório, isto é, estilos e discursos renegociando os significados de vários elementos, além da produção de várias ferramentas, representações; religar eventos, criar histórias e encerrar outras.

Num grupo social, os membros necessitam desenvolver e utilizar meios, físicos ou não, que auxiliem sua prática, estes meios podem ser concebidos como ferramentas da prática. Estas devem ser entendidas como elementos/instrumentos auxiliadores da prática, da ação desenvolvida pelo grupo. Assim, uma tesoura, numa aula de Matemática, por exemplo, pode ter um significado; numa aula de Geometria, pode ter um sentido diferente. Nessa perspectiva, uma professora de Matemática pode utilizar uma tesoura apenas para fazer algum trabalho de recorte e colagem com seus estudantes; enquanto que na aula de Geometria, a professora pode utilizar as pontas da tesoura para representar o ângulo de 90 graus, por exemplo, o que sugere um significado completamente diferente. Assim, as ferramentas e seus significados dependem do contexto, das intencionalidades, ou seja, de seu uso nas práticas sociais.

Consequentemente, os materiais manipuláveis configuram-se como ferramentas disponíveis na prática e tem sua função definida pela dinâmica e estrutura desta. No entanto, as ferramentas nem sempre são físicas, pois a prática não é, necessariamente, caracterizada pelo uso de elementos manuseáveis (LAVE; WENGER, 1991). Assim, na prática em que se utilizam materiais manipuláveis podem existir meios não-físicos que a subsidiam, a exemplo da ação de contar histórias de vida na prática do grupo de alcoólicos anônimos , conforme ressaltam os referidos autores. Desse modo, o kit[2] do material manipulável ou as partes do material manipulável, tesouras, lápis hidrocores podem se configurar como ferramentas de determinada prática.

Em conformidade com a perspectiva da aprendizagem situada (LAVE; WENGER, 1991), acreditamos que, na aula de Matemática, na qual os materiais manipuláveis são utilizados, estudantes e professores podem compartilhar os objetivos, ferramentas, modos de falar, de agir. Ao utilizarem os materiais manipuláveis, os sujeitos podem compartilhar um modo ímpar de se expressar do grupo. Ao lidarem com ângulos fundamentais no círculo, os estudantes podem se envolver na discussão de como nomear cada elemento, se é círculo ou representação do círculo, por exemplo. Em outros contextos, essa discussão poderia não ter o mesmo significado.

Nesse aspecto, tornar-se um participante, de fato, refere-se ao envolvimento dos estudantes no uso dos materiais manipuláveis disponíveis nas aulas de Matemática. Nessa relação com os manipuláveis, os estudantes atribuem significado a vários elementos, ações e modos de se expressar vinculados à prática social. No contexto da sala de aula, por exemplo, quando a professora chama atenção para a posição em que os palitos formam um ângulo nulo,

---

[2] Ver contexto e apresentação dos dados apresentados posteriormente.

ela dá margens para que os estudantes negociem o significado daquela posição. Dessa maneira, os significados se interrelacionam, propiciando a partilha de uma compreensão comum a essa situação (SANTOS, 2004). A isso, Wenger (1998) denomina de *negociação de significado*.

Esse conceito diz respeito a um processo por meio do qual o indivíduo experimenta o mundo social e seu engajamento significativamente (WENGER, 1998). Nesse sentido, o significado não reside no indivíduo nem no mundo social, mas na relação variável que se estabelece com o mundo. Diante disso, o autor salienta que o engajamento humano no mundo é primariamente um processo de negociação de significados. Sobre isso, ele destaca que esse conceito pode envolver linguagem, mas ela não o limita. Tal conceito inclui nossas relações sociais, mas não implica necessariamente interação direta com outra pessoa (WENGER, 1998). Assim, pode haver negociação de significado entre um participante e o material manipulável.

Nessa direção, podemos ter negociação de significados no fazer, falar, pensar, sentir e pertencer. Isso remete diretamente ao conceito de participação, pois os participantes precisam estar completamente envolvidos em algo. O trabalho de Nacarato et. al (2009), cujo objetivo era analisar os processos de argumentação e validação em geometria, apresentou a importância do movimento de negociações em busca de processos de validação, provas e refutações para várias hipóteses lançadas. Para os autores, é importante vivenciar experiências em que esses processos estejam em circulação.

No trabalho dos autores citados, podemos notar que houve negociação de significados para vários elementos da prática de validação, provas e refutações. O modo de expressão do grupo era particular, próprio dos membros do grupo e em outros contextos, talvez, não tivesse sentido. Assim, nessa prática, possivelmente não seria adequado a expressão “está errado”, por conta do modo de agir do grupo, que estava utilizando as perguntas feitas para corrigir os próprios equívocos. Com isso, eles demarcaram um modo especial de agir, pensar e falar de uma dada prática social.

O repertório desse grupo, além de ser especial e particular, é compartilhado por todos os membros. Ou seja, todos os integrantes compartilham da mesma rotina da prática, considerando as ferramentas utilizadas, o modo de pensar, agir e se expressar. Em outras palavras, os participantes compartilham da forma de proceder, derrubando hipóteses previamente construídas por meio de provas e refutações, utilizam argumentos que passam a ser de conhecimento de todos e limitam-se às expressões utilizadas dentro do grupo, além de utilizar recursos físicos da sua prática. Nesse sentido, a prática social, com utilização de materiais manipuláveis, sugere olhar para os termos empregados no decorrer da prática, o modo como os estudantes utilizam os materiais disponíveis ou suas partes. Assim, manipular um triângulo de modo a associar um de seus lados ao lado de um quadrado, por exemplo, sugere a criação de hipótese e utilização de parte de um material.

Deste modo, considerando este episódio, o caráter compartilhado está embutido nas ações de manipular o triângulo e o quadrado de modo a permitir tal associação. As ações não precisam ser de todos os membros, mas devem ocorrer de modo que sirvam como degrau para alcançar outras compreensões, possibilitar outras manipulações ou ações afins do/no grupo.

Wenger (1998) conceitua tal situação como *repertório compartilhado*. Segundo ele, existem três relações que unem a prática à estrutura social formada num determinado contexto: (a) o engajamento mútuo, que se organiza em torno de objetivos almejados; (b) um empreendimento conjunto, que diz respeito à negociação mútua e responsabilidade sobre a qual se devem prestar contas; e, por fim, foco deste artigo, (b) um repertório compartilhado, que inclui rotinas, linguagens, símbolos, modos de fazer e pensar da prática.

Beline (2012) salienta que a busca do desenvolvimento das tarefas de um grupo acarreta no desenvolvimento de alguns recursos físicos e simbólicos. O entendimento de tal entidade teórica permitirá reconhecer e definir práticas compartilhadas mais adiante. Estas práticas compartilhadas podem ser muito bem entendidas como ações desenvolvidas pelo grupo durante as interações sociais. Desse modo, concordamos com St. Clair (2008) quando ressalta que o repertório compartilhado representa o conteúdo do grupo social e o engajamento mútuo e empreendimento conjunto representam o processo ou estrutura.

O que é tido como compartilhado refere-se aos elementos que compõem o repertório. Esses elementos são diversos e não tem autonomia enquanto símbolos, gestos, histórias, gêneros, ações, ferramentas, rotinas, palavras, conceituações, mas sim vinculados ao fato de pertencer e contribuírem para a prática do grupo (Wenger, 1998).

Grando et. al (2008), por exemplo, objetivou discutir as atuais tendências didático-pedagógicas para o ensino de geometria na educação básica e apresenta conclusões que sugerem que os estudantes, na experiência com tarefas exploratório-investigativas, envolvem-se em sua realização, porque sempre há garantia de uma resposta possível. Além disso, os autores apontam para a importância de uma prática pedagógica com foco nos saberes dos estudantes que se ressaltam quando eles têm voz e são ouvidos, no sentido de poderem se expressar e obter atenção nisso. Assim, o grupo está pondo em prática o reconhecimento mútuo, no qual cada participante reconhece a contribuição do outro.

Com isso, discutir repertório compartilhado numa prática em que se instala o uso de materiais manipuláveis, visando abordar algum tópico de geometria, é mais que tangenciar apenas a linguagem do grupo, diz respeito, também, à compreensão de seus modos de agir, pensar, argumentar, nomear elementos, nomear relações estabelecidas entre os membros e entre membros e o material manipulável; seus modos de criar e utilizar uma simbologia comum do/no grupo; entendendo, ainda, a negociação dos significados produzidos e/ou utilizados na prática.

3.3 CONTEXTO DO ESTUDO

O contexto de coleta de dados foram duas salas de aula, sendo uma do 8º ano e outra do 9º ano, séries finais do Ensino Fundamental, da rede pública de Feira de Santana-Ba e Salvador-Ba, respectivamente. Na turma de 8º ano, foram utilizadas três aulas de 50 minutos e no 9º ano, duas aulas de 50 minutos. As tarefas utilizadas nessa pesquisa foram desenvolvidas pelo Observatório de Educação Matemática[3] da Bahia (OEM-Bahia). Este projeto consiste em grupo formado por professores da educação básica, graduandos, pós-graduandos e pesquisadores com intuito de produzir materiais curriculares educativos que possam potencializar a aprendizagem de professores. No ano de 2011, o grupo dedicou-se a produção de tarefas que exploravam tópicos de geometria.

Duas professoras que estavam envolvidas na construção de tarefa com materiais manipuláveis foram convidadas a participar da pesquisa. Assim, elas possuíam propriedade sobre a tarefa, ficando livre para modificá-las, caso considerassem necessário. Os estudantes também foram convidados, pelas professoras, a participarem da pesquisa. Para tanto, os pais dos estudantes assinaram o Termo de Consentimento Livre Esclarecido, permitindo a participação.

Ana[4], professora licenciada em Ciências e Matemática, trabalha na rede pública de ensino há 26 anos. Ela desenvolveu uma tarefa que explorava ângulos fundamentais no círculo, na qual os estudantes fizeram uso de materiais manipuláveis (Veja figura 1). Os

---

[3] O Programa Observatório da Educação, resultado da parceria entre a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) e a Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização e Diversidade (SECADI), foi instituído pelo Decreto Presidencial nº 5.803, de 08 de junho de 2006, com o objetivo de fomentar estudos e pesquisas em educação, que utilizem a infraestrutura disponível das Instituições de Educação Superior – IES e as bases de dados existentes no INEP, estimulando a produção acadêmica e a formação de recursos pós-graduados, em nível de mestrado e doutorado. Ver em http://portal.inep.gov.br/.

[4] Pseudônimos foram utilizados para preservar a identidade dos participantes dessa pesquisa.

manipuláveis utilizados nessa tarefa foram os seguintes: recortes de papel em formato de círculo, palitos de picolé, taxinhas de ferro, hidrocores e lápis de cor. Para o desenvolvimento desta tarefa, ela organizou a turma em grupos de cinco ou quatro estudantes. Como apenas um grupo seria observado, deixamos a critério da professora a escolha da equipe. Ela justificou a escolha pelo posicionamento na sala de aula, o que evitaria que estudantes de outros grupos fossem filmados também. Camila, Gabriela, Felipe, Gustavo e Marta foram os integrantes do grupo observado. As estudantes Camila e Gabriela mostravam-se mais ativas no desenvolvimento da tarefa e esforçavam-se para contribuir com o grupo, mas todos apresentavam bastante timidez ao responder à professora. Gabriela participava de cada resposta e de cada manipulação do material, enquanto Felipe, Gustavo e Marta observavam mais do que manipulavam efetivamente.

Lúcia, licenciada em Ciências e Matemática, trabalha na rede pública de ensino há 21 anos, desenvolveu uma tarefa que enfatizou as compreensões acerca do teorema de Pitágoras, por meio de materiais manipuláveis (Ver figura 2). O kit do material manipulável constituía-se de quadrado amarelo (3x3 cm), quadrado vermelho (4x4 cm), quadrado azul (5x5) e triângulo retângulo (3,4 e 5 cm). Para o desenvolvimento da tarefa, a professora organizou a turma em grupos de cinco ou quatro estudantes. Como era necessário escolher um grupo para ser observado, deixamos a critério da professora que justificou a escolha argumentando que os estudantes do grupo escolhido se destacavam nas aulas. Os integrantes deste grupo eram Raquel, Lucas, Flávia, Fernando e João. João e Fernando eram os mais ativos no grupo, contribuindo bastante na manipulação envolvida na tarefa. Estes dois estudantes disseram que haviam estudado o tema da tarefa, mas que ainda não haviam compreendido. Raquel, Lucas e Flávia pareciam deslocados no início da tarefa, mas logo foram se familiarizando com a tarefa.

TAREFA

1) Vamos utilizar os materiais manipuláveis que vocês receberam e conhecer um pouco mais sobre ângulos. Para isso, vamos seguir os passos abaixo e responder as questões.

Inicialmente, usaremos apenas a representação do círculo.
a) Dobre a representação do círculo ao meio. O que aconteceu?
b) Dobre ao meio novamente. O que você pode observar ao realizar esse passo?
c) Desfaça os passos anteriores e trace segmentos de retas coloridas em cada marca e relate o que você observou. Agora, vamos utilizar também os palitos entregues pela professora.
d) Fixe as extremidades dos palitos no ponto de encontro dos segmentos de reta. Depois, posicione os palitos um sobre o outro. Existe ângulo nesse caso? Caso exista, qual a sua medida em graus e como podemos nomeá-lo?
e) Gire um palito em direção ao segmento de reta seguinte. Represente no verso da folha o ângulo formado entre esses segmentos. O que você observou a partir desse procedimento?
f) Escolha uma letra para o ponto de encontro dos segmentos de retas e para cada palito. Nomeie os elementos do ângulo.
g) Gire o mesmo palito em direção ao segmento de reta seguinte. Represente no verso da folha o ângulo formado entre esses segmentos. O que você observou a partir desse procedimento? Agora, retire os palitos e desfaça os comandos na representação do círculo, voltando para a posição em que estava na letra b e dobre ao meio novamente. Desfaça todos os comandos e trace com cores diferentes das anteriores os segmentos de retas que surgiram.
e) Forme um ângulo raso, e gire um dos palitos em direção ao segmento de reta seguinte. Represente abaixo o ângulo maior e menor aos segmentos com cores distintas. Quantos ângulos têm no seu desenho?
f) Gire o palito mais uma vez, em direção ao segmento de reta seguinte. Represente abaixo o ângulo formado entre esses segmentos. Qual ângulo se formou após esse procedimento?
g) Continue a girar o palito em direção ao segmento de reta seguinte. Represente abaixo o ângulo convexo formado. Qual a característica desse ângulo, com relação ao ângulo de 90º (ângulo reto)?
h) Retorne o palito dois segmentos e represente o ângulo formado. Qual a característica desse ângulo, com relação ao ângulo de 90º (ângulo reto)?

Figura 1 – Tarefa desenvolvida pela professora Ana

TAREFA

Oi pessoal, vamos agora trabalhar com uma relação métrica fundamental no triângulo retângulo. Para isso, vamos usar um material muito interessante.

Caro aluno, de posse do material emborrachado, siga as orientações abaixo:

1) Recorte os quadrinhos amarelos e vermelhos;
2) Cubra a área da figura azul com os quadrinhos recortados;

Agora, responda as seguintes questões:

1) Escreva que conclusão você tirou do experimento.
2) Tente escrever uma expressão que torne esse experimento uma regra geral.
Anote abaixo essa expressão.

Figura 2 – Tarefa desenvolvida pela professora Lúcia

3.4 MÉTODO DO ESTUDO

Os dados da presente pesquisa foram coletados em duas aulas de Matemática, nas quais os estudantes utilizavam materiais manipuláveis diferentes, no intuito de abordar tópicos de geometria. Deste modo, essas aulas foram analisadas no sentido de compreender como os estudantes compartilharam o repertório da prática em questão, conforme é conceituado por Lave e Wenger (1991).

Nesse sentido, focamos na análise da experiência social de dois grupos de estudantes numa sala de aula como participantes de uma prática, na qual eram utilizados materiais manipuláveis para abordar tópicos de geometria. Assim, observamos as experiências vividas durante a prática social dos grupos, além de sua estrutura funcional, caracterizando-se, assim, uma pesquisa qualitativa (DENZIN; LICOLN, 2005).

Consoante ao método de pesquisa, procedemos de maneira sistemática na coleta de dados, concebendo a observação, a entrevista e os documentos como fontes de dados (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008). Nesse caso, a observação foi utilizada como procedimento primário de coleta dos dados por permitir observar fatos, comportamentos e o próprio cenário da prática que caracteriza ação de grande valor na pesquisa qualitativa (ALVES-MAZZOTTI, 2002). Conforme os autores, o tempo demandado para observação se mostrou bem empregado diante da necessidade de compreender os significados de alguns eventos ocorridos durante o desenvolvimento da tarefa, assim como alguns comportamentos que talvez não fossem registrados por meio de outras técnicas de coleta. Seguindo essa ideia, Alves-Mazzotti (2002) ainda argumenta que a observação independe do nível de conhecimento ou de verbalização dos indivíduos. Além do mais, ela permite identificar comportamentos não-intencionais ou inconscientes e registrar as situações em seu contexto, no momento em que ocorrem (em tempo real).

A observação foi desenvolvida num contexto de sala de aula, no qual se desenvolviam tarefas de geometria. A essa estrutura de observação, Lankshear e Knobel (2008) nomeiam não-estruturada. Para os autores, aliás, isso ocorre quando o pesquisador entra num ambiente suficientemente aberto, ou pelo menos com a permissão dos responsáveis, tentando ao máximo possível apenas “ver” o que está ali para ser visto.

Por meio da observação, foi possível “congelar” parte do evento no momento em que ele ocorreu, usando um dispositivo de gravação durável – áudio e vídeo (LANKSHEAR;

KNOBEL, 2008) – para capturar não só a fala, mas, também, comportamentos e expressões corporais. A filmadora encontrava-se próxima ao grupo escolhido, assim, áudio e vídeo puderam ser bem capturados, apesar do barulho que se apresentava nas aulas (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008).

A entrevista foi realizada com todos os integrantes do grupo observado, após o desenvolvimento da tarefa e teve duração média de 5 minutos. Esta entrevista foi pouco estruturada e não houve uma ordem rigorosamente estabelecida para as perguntas (ALVES-MAZZOTTI, 2002). Desse modo, os estudantes puderam falar livremente sobre cada pergunta feita pelo pesquisador. As perguntas eram direcionadas à compreensão do significado atribuído por eles aos eventos ocorridos, situações que não ficaram claras e processos realizados.

Nesse sentido, esse procedimento serviu para subsidiar as compreensões de determinados procedimentos adotados pelos participantes: falas utilizadas, formas de interação com o material ou com os colegas, etc. (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008). Além disso, houve a preocupação de elaborar questões abertas no sentido de não gerar apenas *sim* ou *não* como resposta. Dessa forma, algumas situações puderam ser mais bem compreendidas a partir do que os estudantes argumentaram, mesmo que por meio de argumentos fragmentados. Em alguns momentos, por exemplo, os estudantes foram interrompidos pelos colegas para completar alguma ideia.

No caso desta pesquisa, os documentos analisados foram os registros que os estudantes produziram durante o desenvolvimento das tarefas (ALVES-MAZZOTTI, 2002). Eles também foram utilizados como subsídios às compreensões não proporcionadas, integralmente, pela observação.

Na análise dos dados, foi utilizada a *Grounded Theory* (CHARMAZ, 2009), que sugere uma análise em etapas. Entretanto, não nos comprometemos com os seus paradigmas, ou seja, não estamos preocupados com os pressupostos filosóficos assumidos nessa teoria, mas sim com o que é sugerido como procedimento de análise. Os dados foram transcritos por meio do processo de assistir os vídeos repetidas vezes. Assim, foram organizados em linhas, numeradas a partir de 1e foram analisadas uma a uma, processo este denominado de análise *linha a linha* (CHARMAZ, 2009). A partir disso foram criados códigos, frases relativamente curtas, que resumiam as ações e falas dos estudantes.

Os códigos criados foram reunidos por suas propriedades comuns, dando origem às categorias que expressavam ideias mais amplas, mas que faziam referência à mesma propriedade. Essas categorias foram denominadas de episódios e apresentadas na sessão abaixo. A partir disso foram feitas análises destas categorias, ou seja, foi realizada uma análise transversal sobre os resultados da pesquisa com lentes da teoria e dos trabalhos encontrados na literatura da área. Esse processo foi realizado no sentido de estabelecer um diálogo entre os resultados da pesquisa, o conceito de repertório compartilhado, segundo a perspectiva da aprendizagem situada (LAVE; WENGER, 1991), dos resultados dos trabalhos sobre ensino de geometria e os resultados de trabalhos sobre ensino de geometria e materiais manipuláveis.

3.5 APRESENTAÇÃO DOS DADOS

Os episódios que serão apresentados nesta seção foram originados das ações e falas dos estudantes, durante o desenvolvimento de tarefas sobre ângulos fundamentais (0º, 90º, 180º, 270º e 360º) no círculo e compreensões sobre o teorema de Pitágoras, a partir de triângulos e quadrado. O desenvolvimento das duas tarefas foi registrado por meio de filmagem e será apresentado, a seguir, em forma de episódios. Esses episódios foram organizados em torno de momentos considerados importantes e que apresentavam características marcantes do fenômeno repertório compartilhado. Cada fala foi apresentada em linhas separadas por conta do intervalo de uma fala para outra, isto é, se o estudante João falou agora, o grupo ficou em relativo silêncio e falou novamente após um minuto, então essas falas seriam registradas em duas linhas.

Os códigos a exemplo de algumas *informações dentro dos colchetes*, que indicou a ação dos participantes ou a explicação sobre as ações ou as falas deles, foram utilizados em toda a transcrição (BRUM-DE-PAULA, 2002; SILVA, 2002). Esse elemento pode ser fundamental para uma determinada compreensão, isto é, quando o estudante fala, por exemplo, *lado* ele pode estar se referindo a qualquer lado de qualquer uma das figuras utilizadas na tarefa desenvolvida por Lúcia. No entanto, se houver a explicação dentro dos colchetes informando que o estudante apontava para o lado menor do triângulo, será possível obter uma compreensão mais incisiva. As "..." (reticências) foram os símbolos utilizados para indicar uma pausa ou suspensão da ideia ou fala.

Na tentativa de facilitar a referência às linhas da transcrição, as linhas foram numeradas a partir de 1 e antes de cada numeração, atribuímos a letra O para indicar o momento em que a linha se referia, ou seja, ao momento das observações. Assim, a primeira linha da transcrição em cada episódio começou com (O1), a segunda com (O2) e assim sucessivamente. A mesma lógica serve para indicar os trechos da entrevista, com (E1), (E2) e assim por diante.

Dois dos quatro episódios fizeram referência à professora Ana e os outros dois à professora Lúcia. Desse modo, houve cronologia em relação ao momento em que as tarefas foram desenvolvidas, mas não necessariamente entre os elementos de cada um dos episódios, ou seja, ao focar numa situação em que os estudantes discutem sobre o ângulo nulo, não quer dizer que os estudantes se mantiveram o tempo todo nessa discussão. Assim, os participantes poderiam ter intercalado tal discussão com outra situação e depois retornaram a esta.

Os episódios foram criados seguindo a ideia básica de *momento importante da aula* associado aos códigos que possuíam assunto comum, no qual os estudantes estavam envolvidos em alguma discussão fazendo uso explicito ou implicitamente do material manipulável. Assim, o **uso compartilhado de ferramentas e termos**, por exemplo, é um episódio que sugere a união de elementos associados às ferramentas e termos sendo utilizados na prática com indícios de compartilhamento. Nesse sentido, podemos entender os episódios como recortes da aula que não aconteceram, necessariamente, em ordem cronológica, possuindo início, meio e fim e convergindo para a mesma ideia.

No caso dos episódios das aulas da professora Ana, foram evidenciados, os eventos que traziam os quatro ângulos fundamentais e o momento em que ela introduziu os materiais manipuláveis na aula. Em relação às aulas da professora Lúcia, foram destacados momentos em que os estudantes reconheciam elementos matemáticos nos materiais manipuláveis ou quando eles estavam nitidamente engajados em alguma discussão.

Desse modo, os episódios 1 e 2, que serão apresentados a seguir, foram referentes à tarefa desenvolvida pela professora Ana e os episódios 3 e 4 referentes à tarefa desenvolvida pela professora Lúcia. Cada episódio foi contemplado com uma análise prévia e inicial de modo a inserir o leitor no contexto em que ocorreu a tarefa, além das imagens disponibilizadas do respectivo material manipulável. Feito isso, foram realizadas as análises mais sistemáticas, no intuito de discutir como os participantes compartilham o repertório na prática em que são utilizados materiais manipuláveis para abordar tópicos de geometria. A seguir, veremos os episódios e as análises.

Episódio 1: O uso compartilhado de termos e ferramentas

Este episódio tem por objetivo discutir como os estudantes utilizaram termos específicos e ferramentas pertencentes ao repertório da prática social do grupo, durante o uso de materiais manipuláveis nas aulas de matemática. Consoante à perspectiva da aprendizagem situada, analisamos, num contexto social, a utilização de dois dos elementos constitutivos do repertório disponibilizados para/pela prática: termos e ferramentas. Os *termo*s referem-se às palavras que os estudantes utilizam durante o desenvolvimento de suas ações no contexto social. Já as *ferramentas* dizem respeito aos elementos capazes de auxiliar no desenvolvimento de alguma ação ou processo. Nesse sentido, os materiais manipuláveis, ou até mesmo parte deles, podem ser concebidos como ferramentas capazes de auxiliar em alguma compreensão a abordagem e um conteúdo nas aulas. A seguir, apresentaremos e discutiremos alguns trechos da transcrição da observação realizada.

Neste episódio, os estudantes encontravam-se focados na compreensão do ângulo de 90 graus e do círculo como uma volta completa, ou seja, 360 graus. Eles realizaram os passos destinados à manipulação que originaram duas metades do círculo e dobraram novamente para obter quatro partes iguais no círculo, tendo em vista facilitar a determinação de cada ângulo fundamental.

Figura 3[5]– Círculo dividido em quatro partes

Abaixo, podemos ver como a professora e os estudantes começaram a resolver a questão que solicitava alguns procedimentos.

---

[5] Os palitos estão posicionados formando um ângulo de 90 graus.

(O1) Professora:	A primeira questão pede o quê? Dobre a representação do círculo ao meio.
(O2) Felipe:	Dobrar...
(O3) Professora:	Dobraram a representação...
(O4) Todos:	**...** Ao meio
(O5) Professora:	O que foi que aconteceu com o círculo?
(O6) Felipe:	Ficou dividido em duas partes.
(O7) Felipe:	Dobrar na mão é fácil.
(O8) Marta:	É... Virou metade do círculo.

Como os estudantes estavam começando a desenvolver a tarefa, o grupo ainda não tinha utilizado termos tão específicos, mas já lançaram mão de outros que tornaram a situação mais particular, como por exemplo: *dobrar*, *duas partes*, *círculos*, etc. A seguir, podemos ver um trecho que captura o momento em que os estudantes e o pesquisador conversaram sobre algumas ferramentas (*círculo*, *hidrocor*) e sobre o trabalho em grupo.

(E1) Pesquisador:	Em um grupo sempre tem alguém que sabe ou conhece menos do que outros. Será que essa interação promovida pelo grupo é capaz de tornar esse individuo... integrado na tarefa tal como outros?
(E2) Marta:	Você tem que pensar que você consegue [...] Sente aqui para eu ajudar [...] Até você chegar no mesmo nível que eu.
(E3) Felipe:	E a gente vai usar o que tem para usar, todos vão usar.
(E4) Pesquisador:	O que você está se referindo? O uso disso seria comum?
(E5) Marta:	Sim, quando a gente pega o círculo, ele é de todos. A gente mexe nele, risca, e ele é do grupo.

Da linha (O1) a (O8), a professora orientou que os estudantes dobrassem o círculo ao meio, o que permitia, logo de antemão, determinar o ângulo raso, 180º. Todos os estudantes se envolveram na manipulação de modo que cada círculo do grupo ficou dobrado ao meio, mas não era qualquer dobradura, eles pareciam buscar a perfeição das metades. Assim, após terem dobrado, todos suspenderam o círculo para mostrar à professora como tinha ficado.

Nesse momento, os estudantes começaram a se apropriar de um elemento próprio dessa situação, o que a torna particular. Eles conceberam que aquele movimento de dobrar deu origem a duas partes, conforme linha (O6). Marta percebeu que cada uma das duas partes era metade do círculo. Com isso, podemos notar a utilização de duas expressões até então não vistas no desenvolvimento da tarefa: “metade” e “ao meio”. Na linha (E2), eles reconheceram que há um compromisso mútuo entre os membros do grupo, no sentido de que todos devem estar cientes do que ocorreu na dinâmica do grupo. Nas linhas (E3) e (E5), Felipe e Marta evidenciaram o uso das ferramentas que estavam à disposição do grupo na prática social e admitiram que esses elementos foram de uso comum. Assim, à medida que os integrantes usaram tais elementos, fizeram de modo peculiar, isto é, o uso das ferramentas foi particularizado pela prática social em questão.

(O9) Professora:	Respondeu? [Perguntando diretamente ao grupo observado]
(O10) Todos:	Já!
(O11) Professora:	Peguem o material... O círculo e dobre novamente.
(O12) Professora:	O que vocês observaram após esse passo?
(O13) Gabriela	Ficaram quatro partes.
(O14) Professora:	Ah, então o círculo ficou agora dividido em...
(O15) Felipe:	Quatro partes.
(O16) Gabriela:	Quatro partes.
(O17) Marta:	Quatro partes.
(O18) Professora:	Vou escrever aqui o que vocês disseram.

Podemos observar que o material era composto por taxinhas, hidrocor, círculo, palitos, sendo que uma de suas partes (o círculo) foi utilizada separadamente, em certas ocasiões. Os estudantes as utilizaram como ferramentas para auxiliar na obtenção dos ângulos no círculo. Na linha (O11), a professora solicitou que os estudantes dobrassem novamente o círculo para obter quatro segmentos de reta que se encontravam no centro do círculo e atribuíssem a letra O ao ponto de encontro dos segmentos. As linhas (O15), (O16) e (O17) sugerem que os participantes compreenderam a ideia de divisão do círculo em quatro partes iguais, o que, futuramente, contribuiu para outro entendimento: quatro ângulos iguais. A seguir, veremos trechos em que o grupo discutiu sobre os ângulos formados a partir dos dois movimentos anteriores:

(O19) Professora	E esse grupo aí, além de perceber que o círculo está dividido em quatro partes, tem alguma coisa a acrescentar?
(20) Camila:	Está formando o ângulo... Ângulo reto.
(O21) Professora:	Ângulos...?
(O22) Camila:	...Retos
(O23) Marta:	...Retos
(O24) Professora:	Vou fazer só uma perguntinha.
(O25) Professora:	Vocês sabem que quando o círculo é dividido em quatro partes... E vocês disseram que aparecem ângulos retos... Quatro ângulos. Quanto vale um ângulo reto?
(O26) Camila:	90 graus
(O27) Professora:	É isso aí!
(O28) Professora:	Então 90, 90, 90, 90... 90 vezes 4 forma... O círculo todo.
(O29) Camila:	O círculo todo.
(O30) Marta:	O círculo todo.
(O31) Professora:	Então... 90 vezes 4, Camila?
(O32) Camila:	360
(O33) Professora:	360 o quê?
(O34) Camila:	Graus, não é? Isso... Graus.
(O35) Professora:	Não... Posicione no começo. Assim... Gire agora para o

	seguinte. Isso é o vizinho dele. Falando com Felipe.
(O36) Professora:	Represente no verso da folha o ângulo formado... Que ângulo é esse?
(O37) Professora:	Ah, a gente fez isso... Daqui para cá [Mostrando no quadro o movimento dos palitos].
(O38) Professora:	Representar é desenhar.
(O39) Marta:	Assim... [Simulando o desenho do círculo no verso da folha]
(O40) Professora:	Só o ângulo reto, não é a bola [Referindo-se ao círculo]
(O41) Professora:	Como é o ângulo reto?
(O42) Felipe:	Assim pró... [Escrevendo no ar algo que lembrasse um “L”]
(O43) Professora:	Eu pedi para desenharem o ângulo reto. E porque vocês tão fazendo círculo?
(O44) Gustavo:	É só metade.
(O45) Felipe:	Não, é menor.
(O46) Gabriela:	Metade e metade [Possivelmente, referindo-se a metade da metade do círculo, ou seja, ¼ dele]

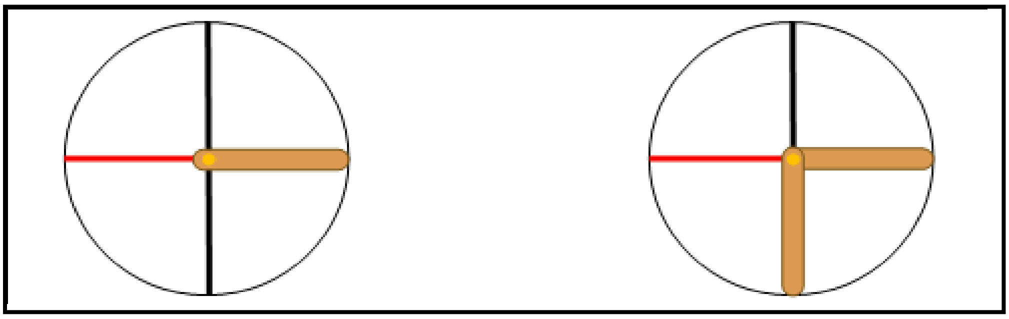


Figura 4 – Posição inicial dos palitos e posição posta por Felipe na linha (O42)

Após terem dobrado o círculo em 4 (quatro) partes iguais, os participantes demonstraram curiosidade sobre o que tinham feito e demonstraram isso, abrindo o círculo e passando o dedo sobre cada segmento. Nem todos os participantes praticaram a mesma ação, mas todos olharam atentamente.

Quando as estudantes Camila e Marta utilizaram o termo “círculo todo”, fazendo referência ao círculo que continha quatro ângulos de 90 graus, linhas (O29) e (O30), já começaram dar margem para outros participantes se familiarizarem com o termo, na prática do grupo. Isso converge para o que os estudantes argumentaram na linha (E40). Ou seja, o que está disponível para eles como meio de se expressar, seja oralmente ou por ações – termos/palavras e ferramentas, respectivamente – sugere o caráter compartilhado de tais elementos. Na linha (O23), a professora utilizou a ideia de círculo todo, como foi usado no grupo, por meio da soma dos quatro ângulos presentes no círculo.

A professora tentou interferir afirmando que não é a bola e mencionou o termo *bola* para se referir ao círculo, conforme linha (O40). Apesar de esse ter sido um termo dito para os participantes do grupo, ele não foi utilizado pelos mesmos. Felipe, na linha (O42), referiu-se ao ângulo reto como um “L” ao desenhar no ar com o dedo indicador e, em seguida, fez o mesmo movimento no círculo. Após ver esse movimento, a professora perguntou por que eles queriam desenhar o círculo ao invés do ângulo em questão, linha (O43).

Em suma, notamos que os estudantes puderam identificar o ângulo reto, determinar sua medida e, por fim, representá-lo na utilização dos materiais manipuláveis nas aulas que abordaram o tópico ângulos. Durante esse processo, alguns outros termos foram utilizados, como “metade e metade” na linha (O46), o que sugere a utilização de expressões mais comuns em situação particular da matemática escolar. Portanto, esses termos podem não ser utilizados comumente por todos os estudantes no dia a dia, mas durante o desenvolvimento da tarefa constituiu o repertório da prática; e como tal, estava disponível a todos eles. Deste modo, **ferramentas e termos dessa prática social foram utilizados pelos participantes de modo compartilhado**, com o acesso de todos os membros às dobraduras no círculo, compreensões acerca das aberturas ali representadas, das posições dos palitos, aos palitos em si, às tesouras e aos termos empregados.

Episódio 2: Interpretações compartilhadas sobre o ângulo de 180º

Este recorte tem o intuito de evidenciar o momento em que os estudantes estavam focados na interpretação das aberturas promovidas pelas dobraduras no círculo, solicitadas pela tarefa e correspondentes ao ângulo de 180 graus. Os estudantes, nessa etapa, já tinham dobrado o círculo em quatro partes iguais e destacado a marca do círculo com cores diferentes. Assim, a professora pediu que eles tirassem os palitos da posição de 90 graus e girassem para o segmento seguinte. Nesse caso, um palito ficaria na *posição inicial* (como a própria professora nomeou) e o outro palito ficaria dois segmentos adiante, indicando assim, uma abertura de 180 graus entre eles. Esses procedimentos foram baseados nas orientações da professora, como podemos ver nos trechos a seguir:

(O1) Professora:	Certo, agora podemos girar para o seguimento seguinte.
(O2) Professora:	E aí? Que ângulo formou?
(O3) Felipe:	O ângulo raso.
(O4) Professora:	Muito bem. Represente no verso da folha.
(O5) Professora:	Ok, qual deles? Esse daqui? [Apontando para o ângulo externo, ou seja, o ângulo formado pelos segmentos rotacionados em sentido anti-horário. Felipe balança a cabeça concordando com a professora].
(O6) Professora:	Então, represente esse, que a gente chama de ângulo...
(O7) Todos:	Raso!

Os estudantes removeram os palitos da posição em que era formado o ângulo de 90 graus para o segmento seguinte, conforme linha (O1), continuando a seguir o sentido horário. Durante todo o tempo, ela deixou que eles mesmos manipulassem, sempre perguntando o que aconteceu após cada movimento realizado, linha (O2). Felipe, disse a resposta, linha (O3), e acreditou ser o ângulo raso, o ângulo formado. Nesse caso, precisamos atentar para dois aspectos. O primeiro diz respeito à obtenção de dois ângulos e a utilização apenas do ângulo interno ao movimento. O segundo aspecto refere-se ao modo como eles entenderam o ângulo de 180 graus, remetendo-o a um termo consagrado para nomear tal ângulo, ângulo *raso*.

A professora, conforme linhas (O4) e (O5), valida o movimento realizado pelo estudante. A negociação de significado se faz presente quando a professora procura associar a ideia de ângulo raso à abertura de 180 graus (quando ela aponta para a abertura externa ao movimento), independente do sentido do movimento. Nesse momento, Felipe concorda com a professora como se reconhecesse o *ângulo externo* também como *ângulo raso*, isso sugere que ele se desvinculou do sentido do movimento.

Na linha (O6), a professora indicou para eles concluírem qual foi o ângulo formado e todos afirmaram que foi o ângulo raso, linha (O7). A forma como Felipe interpretou o ângulo formado repercutiu no grupo, o que possibilitou aos demais visualizarem aquela abertura. Assim, os estudantes partiram para a representação do ângulo raso no verso da folha da tarefa e utilizaram o material manipulável para representar no fundo da folha. Camila, por exemplo, tentou riscar por cima do círculo, mas depois removeu o círculo e continuou riscando no verso da tarefa os segmentos de reta necessários para representar o ângulo raso. Enquanto isso, Gabriela não conseguia fazer o ponto de encontro dos segmentos.

Nas linhas abaixo, os estudantes se concentraram no ponto de encontro dos dois segmentos de reta (palitos) que formaram o ângulo de 180º:

(O8) Professora:	Só isso que você fez? Está faltando algo?
(O9) Gustavo:	A ponta dos lápis [Referindo-se a marca feita pela ponta do lápis para representar o ponto de encontro].
(O10) Professora:	É isso... Isso que está querendo falar! [referindo-se a todos os elementos necessários para representar o ângulo]
(O11) Professora:	Gustavo, isso que você fez você vai representar aqui [A professora aponta para o verso da folha].

Na linha (O8), a professora questionou o estudante Gustavo sobre sua representação do ângulo de 180º. O estudante apenas havia pintado um ponto preto no local do encontro dos palitos, sendo que a representação deveria ter sido feita no fundo da folha da tarefa. Quando

Gustavo se refere ao ponto feito pela ponta do lápis, linha (O9), ele demonstrou que aceitou aquele ponto como uma representação do material em mãos. A professora não o questionou no intuito de saber se ele representaria ou não mais alguma coisa do material manipulável. Todavia, linhas (O10) e (O11), a professora sugeriu que ele desenhasse o ângulo da forma como aparecia no material (incluindo o ponto de encontro desenhado por ele em cima do palito). As representações dos estudantes ficaram iguais.

Podemos observar, a seguir, um dos momentos em que os estudantes começaram a se apropriar de outros elementos geométricos relacionados à prática social em questão.

(O12) Professora:	Quando terminarem me digam.
(O14) Camila:	Pronto.
(O17) Professora:	Então, vocês representaram o ângulo de... Meia...
(O18) Todos:	Volta!
(O19) Professora:	O que vocês observaram desse desenvolvimento? Formou o quê?
(O20) Camila:	Ângulo de meia volta.
(O21) Professora:	Também tem outro nome, como é?
(O22) Gustavo:	Raso!
(O23) Marta:	Raso!
(O24) Professora:	Então, eu pergunto a vocês, qual é a medida dele?
(O25) Felipe:	180. [Camila, Marta, Gustavo balançam a cabeça concordando enquanto Felipe apontava o ângulo interno e o externo ao movimento e para as duas aberturas de 90 graus]
(O26) Camila:	Menor... Menor que 90 e maior que 180.
(O27) Professora:	Não, ele é 180.
(O28) Camila:	Ah, é o ângulo obtuso.
(O29) Professora:	Calma, é exatamente 180º

Na linha (O17), notamos que a professora estimulou os estudantes a interpretarem e discutirem sobre o ângulo observado ou encontrado. Nesse momento, a professora valeu-se da supressão para incitar o aparecimento de outro termo a ser adicionado ao vocabulário ou conhecimento dos estudantes. A expressão “meia volta” não é diretamente introduzida, ela faz parte do estímulo feito pela professora aos estudantes. Interpretar o ângulo de 180 graus como ângulo de meia volta – linhas (O17), (O18) e (O20) – sugere um entendimento diferente de apenas visualizar o ângulo como raso, o que possibilita trabalhar a volta completa. Além disso, os membros do grupo indicaram uma interpretação comum da mesma situação presente nos materiais manipuláveis.

Na linha (O25), Felipe respondeu à professora que o ângulo raso mede 180º e, simultaneamente, ele apontou para o ângulo interno e externo formados e para as duas aberturas de 90 graus, sinalizando duas partes. Possivelmente, Felipe e os demais participantes perceberam o ângulo interno e externo e o ângulo de 180 graus como a junção de duas aberturas, 90 graus e 90 graus, o que indica outro modo de perceber tal ângulo.

Diante disso, nota-se que os estudantes conceberam a ideia do ângulo raso e o interpretaram conforme foi possibilitado pela dinâmica da prática social. Os estudantes visualizaram-no como ângulo raso, de meia volta e composto por partes. Assim, com o modo compartilhado de operar os instrumentos da sua prática – ou seja, do material manipulável aos termos, expressões – os participantes puderam também **compartilhar os modos de interpretar o ângulo de 180 graus** na determinação do mesmo.

Episódio 3: Compartilhamento de símbolos, expressões e termos geométricos

Neste episódio, o intuito é evidenciar alguns trechos em que os estudantes utilizavam símbolos, termos ou expressões geométricas ou que faziam referência a algum elemento geométrico e discutir como ocorre o uso desses elementos na prática social dos participantes. Os estudantes já estavam com os kits em mãos, que eram compostos de triângulo retângulo, quadrado azul de 25 cm de lado, quadrado vermelho de 20 cm de lado e quadrado amarelo de 15 cm de lado, além de tesouras.

Esse kit foi necessário para o desenvolvimento de uma tarefa que objetivou levar os estudantes à compreensão do teorema de Pitágoras e a sua fórmula por meio de igualdade de áreas de figuras planas. Nessa etapa, os estudantes chegaram à fase de cortar os materiais manipuláveis, sobrepor e justapor as partes do material (Ver figura 5). Os símbolos são elementos que possuem estrutura compacta e são carregados de significado. Nessa atividade, alguns símbolos surgiram no sentido de representar áreas, lados e catetos. Como exemplo, o símbolo c^2 foi utilizado para representar a área do quadrado amarelo de lado c.

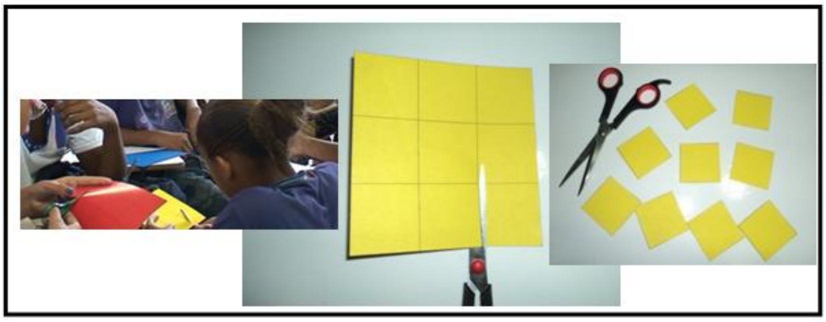


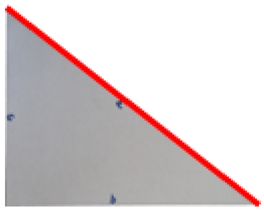
Figura 5[6] – Recortes de quadrados amarelos e vermelhos.

---

[6] Estudantes recortando quadrados amarelos e vermelhos, recorte no quadrado amarelo e unidades quadradas amarelas.

Feito isso, os estudantes puderam ver os objetos do kit cortados, alguns nas mãos e outros sobre o braço da cadeira com expressões que indicavam investigação, além de *reconhecerem alguns elementos geométricos nos materiais manipuláveis* e, consequentemente, introduzirem expressões, símbolos e termos durante o desenvolvimento da tarefa. A transcrição, a seguir, traz um pouco do momento em que eles começaram a tornar explícito esse reconhecimento.

(O1) João:	Aqui gente, triângulo... Lados, altura... [Segura os materiais nas mãos].
(O2) Professora:	A gente já conhece esses lados, não é Fernando?
(O3) Fernando:	É o cateto...
(O4) Professora:	Onde é cateto?
(O5) Fernando:	Aqui [Apontando para a hipotenusa do triângulo (Ver figura 6)]



Hipotenusa (*a*)

Figura 6 – Hipotenusa do triângulo em destaque

Na linha (O1), João demonstrou interesse em provar para o grupo que ele entendeu do que estava falando. Ao dizer isso, ele segurou o triângulo retângulo na mão e começou a apontar os lados e a altura do triângulo e os lados do quadrado sobre a mesa com o dedo indicador. O que ele falou foi atentamente ouvido pelos outros integrantes e consequentemente sua forma de se expressar foi reconhecida. Os demais integrantes tomaram os materiais em mãos e começaram a olhar como se quisessem verificar o que foi dito por João. Não é possível afirmar o quanto foi socializado as ideias desse membro, mas que essas ações, em forma de palavras, expressões, símbolos e gestos são partilhados. Desse modo, cada membro pode corroborar e compartilhar do mesmo entendimento tido por João.

As ações presentes nesse trecho, juntamente com outras ações e os termos *lado*, *altura*, *triângulo* e outros constituem o repertório da prática. Elas são compartilhadas talvez nem sempre diretamente, mas marcando certamente que todos saibam do que se tratava. Desse modo, quando João demarca alguns elementos que é do conhecimento dele, surge uma zona de reconhecimento grupal que engloba os outros membros. Além disso, quando ele faz uso dos materiais manipuláveis para apontar esses elementos, que são de uso comum do grupo, permite que os outros também visualizem o que ele chama de altura, lado, etc.

Conforme aparece na linha (O2), a professora estimulou os estudantes a pensarem em nomes específicos para os lados do triângulo retângulo. A partir deste momento, foi possível notar que os estudantes começaram a se apropriar de um repertório de palavras e frases particular e compartilhado pelo grupo, além dos modos de fazer determinada tarefa. Algumas interpretações não foram legitimadas pelo grupo e, por conta disso, não foram consideradas mais adiante. Quando João, por exemplo, anunciou *lado* e Fernando anunciou *cateto* quando deveriam dizer hipotenusa, o grupo não legitima essas formas de denominar tal lado do triângulo. Nesse sentido, alguns aspectos da prática social são legitimados como consequência dinâmica da prática do grupo. Assim, o que define o que é adequado à prática são os próprios membros do grupo.

Na linha (O3), Fernando respondeu como se todos os lados do triângulo fossem *catetos*, mas a professora estimulou-o a perceber que um dos lados teria um termo específico: hipotenusa. Logo após Fernando ter percebido isso, ele tentou justapor o lado correspondente à hipotenusa do triângulo no lado do quadrado de medidas 15 cm e verificou que a hipotenusa era maior que o lado do quadrado. Feito isso, os demais membros apenas observaram e balançaram a cabeça como se estivessem confirmando que entenderam a situação.

Nas duas linhas seguintes, veremos um momento em que a professora incentivou o estudante a perceber a relação existente entre o lado do quadrado azul com a hipotenusa do triângulo, de modo que evidenciou uma forma de diálogo que foi sendo estabelecida no grupo, com termos peculiares à situação. Além disso, os estudantes reconheceram mais um elemento geométrico no triângulo.

(O6) Professora:	Agora vem cá, e esse daqui, esse azul, é de que lado do triângulo?
(O7) João:	Hipotenusa!
(O8) João:	Você vai ver, é o quadrado... Então é a soma dos quadrados dos catetos.
(O9) Fernando:	A área do triângulo retângulo é igual à área do quadrado...
(O10) Professora:	É isso? A área do triângulo retângulo é igual à área do quadrado?

Na linha (O8), João utilizou o termo *quadrado* para se referir à *representação do quadrado*, o que dá indícios de que, no mínimo, essa é uma figura geométrica familiar para ele. O termo cateto já ficou bastante familiar nas discussões dos estudantes. Nas linhas (O9) e (O10), podemos perceber que eles reconheceram a ideia de área nos materiais. Fernando entendeu a área do triângulo retângulo como a área do quadrado azul, possivelmente porque este possuía lado igual à hipotenusa do triângulo. Nesse momento, a professora mostrou para o estudante que tinha algo estranho no que ele tinha dito e demonstrou isso pedindo que ele sobrepusesse o triângulo no quadrado azul (Ver figura 7).

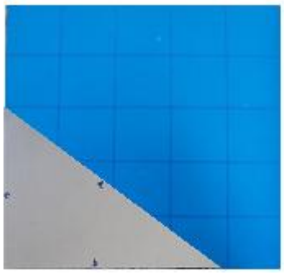


Figura 7[7] – Sobreposição do triângulo no quadrado.

Desse modo, foi possível verificar que não se tratavam de mesma área ali. Assim, a relação do lado do quadrado com a hipotenusa não implicou na igualdade das áreas. Segue alguns trechos da transcrição:

(O11) Professora:	Olha... Ele disse que a área do quadrado amarelo é 9... Isso porque ele está considerando isso aqui como uma... Unidade [A professora mostrou a equipe um quadradinho].
(O12) Professora:	Mas se não tivesse cortado? Que medida é essa? [Apontou para o cateto de medida c do triângulo e aproximou-o do lado quadrado também de medida c]
(O13) João:	c!
(O14) Professora:	Então a área desse quadrado é?
(O15) João:	c^2!
(O16) Raquel:	c^2!
(O17) Professora:	E do vermelhinho?
(O18) Raquel:	16
(O19) Professora:	E se não fosse dividido e eu disse que é b, como está aqui?
(O20) João:	b^2!
(O21) Professora:	E o da hipotenusa?
(O22) Raquel:	h^2!

Até essa parte, os estudantes chegaram à conclusão de que cada área tinha uma ligação com o produto do respectivo lado do triângulo. Nesse ponto, foi fundamental o questionamento da professora juntamente com a ação de segurar e apontar cada objeto geométrico em questão para que os estudantes pudessem reconhecer elementos geométricos neles. Por exemplo, ao falar do quadrado amarelo, a professora segurava-o em suas mãos e

7 Esta figura mostra que o triângulo não possui a mesma área do quadrado pela sobreposição.

apontava para seu lado quando ela perguntava o tamanho do lado. Ao falar da área do quadrado, ela gesticulava como se apontasse para toda a região da figura.

Com isso, a professora fez com que os estudantes percebessem a área de cada quadrado em função das medidas dos lados do triângulo retângulo e em termos das letras *a*, *b* e c, linhas (O12) a (O22), que foram símbolos utilizados para representar esses elementos geométricos. Em outras palavras, os estudantes compreenderam a área do quadrado amarelo como 9 unidades de área ou c^2; do quadrado vermelho, 16 unidades de área ou b^2 ; e do quadrado azul, 25 unidades quadradas ou a^2.

É possível notar as discussões sobre os elementos geométricos presentes nos materiais manipuláveis. Os estudantes falaram sobre lados, nomearam-os, referindo-se às figuras pelos nomes, como *quadrado* e *triângulo retângulo*, encontraram a área dos quadrados e encontraram quadrados perfeitos, como a^2, b^2 e c^2. Esses símbolos a^2, b^2 e c^2, os termos e expressões utilizados fazem parte do repertório da prática social do grupo e possuem significados partilhados pelos membros. Desse modo, o episódio conseguiu retratar o uso compartilhado de um dos elementos que compõem o repertório da prática social do grupo de estudantes observados, sendo o uso partilhado pelos membros e os elementos destacados dotados de significados negociados, não necessariamente iguais, mas que se interrelacionam. Assim, s**ímbolos, expressões e termos geométricos são compartilhados entre os membros do grupo** como indispensáveis para manter os participantes unidos na perseguição dos objetivos do grupo.

Episódio 4: Tentativas compartilhadas de ajustar a fórmula do teorema de Pitágoras

Neste episódio, o objetivo centrou-se no processo de ajuste da fórmula do teorema de Pitágoras, que sugere o uso do repertório disponível na prática de modo compartilhado. Esta etapa remete às últimas instâncias de interpretação da situação caracterizada pelo material manipulável no que diz respeito à determinação da fórmula do teorema de Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$). Para isso, os membros do grupo manipularam os objetos geométricos contidos no kit que foi entregue no início da tarefa (três quadrados, de 15, 20 e 25 cm e um triângulo retângulo de 15, 20 e 25 cm).

Figura 8 – Kit do material manipulável entregue aos estudantes

Os estudantes tentaram, com o auxílio do material manipulável e com o auxílio de desenhos na cadeira, ajustar a fórmula ao que eles haviam compreendido a respeito da sobreposição das áreas dos quadrados (Ver figura 9). Isso pode ser evidenciado nas linhas nas transcrições abaixo:

Figura 9[8] – Preenchimento total da área do quadrado azul

(O1) Fernando:	O quadrado azul tem a medida da hipotenusa [Nesse momento, o estudante passou o dedo por toda a hipotenusa do triângulo].
(O2) Professora:	Então, o que é que a gente pode escrever sobre isso? [Faz um gesto com as mãos em direção aos materiais manipuláveis]
(O3) Lucas:	O quadrado... da hipotenusa é igual à soma dos catetos... [Balançava a cabeça como se confirmasse o que dizia]
(O4) Professora:	O quadrado da hipotenusa é igual à soma das medidas dos catetos? É isso?
(O5) Professora:	O quadrado azul é a hipotenusa ao quadrado. E os menores? São os catetos ao quadrado? [Referiu-se à área dos quadrados e tomou em suas mãos o quadrado azul e passa a mão sobre todo o quadrado]
(O6) Fernando:	A soma dos catetos ao quadrado é igual à medida da hipotenusa... [O estudante faz expressão de como se estivesse pensando]
(O7) Professora:	Gente, vocês estão com o material nas mãos, é só olhar...

8 Na primeira imagem, o quadrado amarelo cortado; na segunda imagem, o quadrado vermelho cortado; na terceira imagem, início da sobreposição de parte da área dos quadrados amarelos e vermelhos na área do quadrado azul.

	[Segura todo o material utilizado]
(O8) João:	Quer ver? Olhando e riscando é melhor. [Risca a mesa com o desenho do material manipulável montado].
(O9) Professora:	O quê que é isso aqui? [Apontando para o lado do quadrado amarelo de lado igual ao cateto menor do triângulo]
(O10) Fernando:	Quadrado do cateto menor.
(O11) Professora:	E isso? [Aponta para o quadrado vermelho, de lado igual ao cateto médio do triângulo]
(O12) João:	Quadrado do cateto maior.
(O13) Professora:	E quando eu juntei?
(O14) Turma:	A área do quadrado maior é igual à área dos quadros menores.

Na linha (O1), Fernando começou a perceber certos vínculos entre a representação do quadrado e a do triângulo, o que o possibilitou notar no quadrado a medida equivalente à medida da hipotenusa do triângulo. Esse contato que o estudante fez com os dedos no lado referente à hipotenusa permitiu que ele estabelecesse uma ponte entre os entes geométricos *hipotenusa* e *lado do quadrado*. A professora questiona o estudante, linha (O2), de modo a dar margem às primeiras generalizações do teorema de Pitágoras. Na linha (O4), a professora suscita uma interpretação diferenciada de Fernando, que não legitimou integralmente o que foi dito por João. Nesse sentido, os membros partilham a forma como tentam ajustar a formula, isto é, resgatando suas interpretações sobre os materiais manipuláveis.

Nos trechos transcritos acima, os estudantes não utilizaram a palavra "*área*" para expressar a quantidade de espaço ou superfície dos quadrados. Assim, na linha (O3), ao salientar "*o quadrado da hipotenusa*...", é revelada a tentativa de associar a ideia de área do quadrado ao produto de um dos lados do triângulo por ele mesmo (nesse caso, hipotenusa).

A professora retomou a discussão, na linha (O5), e também não se referiu ao termo "*área*", mas apresentou esta ideia quando passou as mãos sobre a superfície do material. Tendo em vista que os estudantes já associaram uma medida do triângulo ao lado do quadrado maior, ela buscou que eles associassem os demais lados do triângulo aos outros quadrados.

Na linha (O6), ficou claro que o estudante associou cateto e hipotenusa à ideia de área. No entanto, ele chegou a um raciocínio, de certa maneira, aproveitável e moldável, pois ele mostrou compreender que a soma de duas grandezas (mesmo referindo-se ao quadrado da soma ao invés de soma dos quadrados) é igual à terceira grandeza, ou seja, ele observou uma igualdade. Nesse momento, a professora percebeu que estava cada vez mais perto de os estudantes chegarem à compreensão do teorema e conseguirem deixar a expressão o mais condizente possível com o teorema. Sendo assim, ela solicitou que eles retornassem ao material na linha (O7). A imagem, a seguir, foi retirada do registro escrito dos participantes, durante a tarefa. Esse registro foi produção conjunta do grupo.

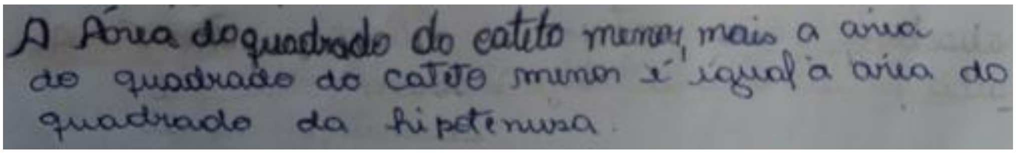

A Àrea doquadrado do cateto menor, mais a área do quadrado do cateto menor é igual a área do quadrado da hipotenusa.

Figura 10 – Fragmento do registro dos estudantes

Decorrendo alguns segundos, linha (O9), a professora solicitou que eles sobrepusessem todas as unidades quadradas (Ver figura 9) no quadrado azul para que percebessem as áreas. As linhas (O10) e (O12) sugerem que os estudantes compreenderam que cada área era determinada pelos respectivos lados do triângulo ao quadrado. Nas linhas (O11) e (O13), a professora legitimou o significado atribuído pelos estudantes e na linha (O14) há indícios de que os membros do grupo legitimaram as contribuições de Fernando e João. Abaixo segue a ilustração das figuras quadradas:

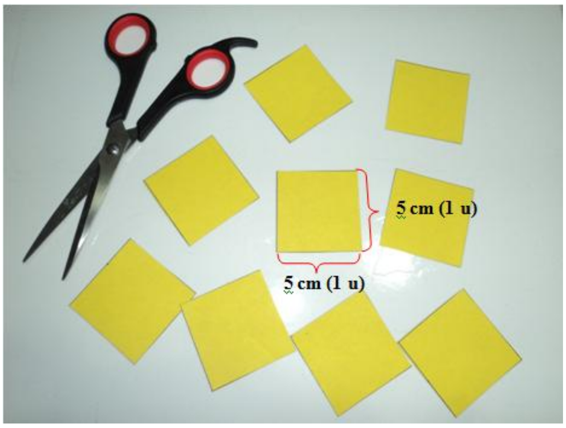


Figura 11 – Unidades quadradas de 5 cm de lado

Na linha (O14), há indícios de que os estudantes compreenderam que a área dos quadrados menores era igual à área do quadrado maior, interpretação oriunda da sobreposição das áreas menores na maior. Mesmo que os estudantes não tenham mencionado somar as duas áreas menores, em suas falas e nas ações foi possível perceber que entenderam que era necessário juntar as duas áreas, linha (O14).

Entre as linhas (O13) e (O14), há várias ações dos estudantes sem palavras intermediando-as, mas que dizem claramente o que eles querem uns aos outros, ou seja, o olhar de um estudante para o outro como se dissesse que precisava de mais alguma coisa para compreender ou um balançar de cabeça sinalizando um *sim* para alguma compreensão alcançada por meio da manipulação.

Os estudantes partiram de uma visualização e manipulação dos quadrados recortados, perpassaram pelos quadrados remontados, remeteram-se à sobreposição das duas áreas menores (área do quadrado amarelo e do vermelho) na maior área (do quadrado azul). Finalmente, eles concluíram que a soma das duas áreas menores é igual à área maior, ou em termos dos lados do triângulo, que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Isso demonstrou um amadurecimento em relação a como eles começaram (ainda conhecendo o material, sem saber o que seria feito...) para a etapa de conclusão (Ver figura 12).

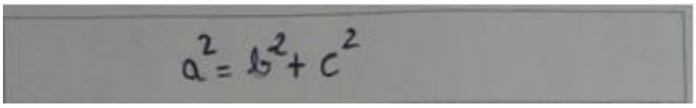


Figura 12 – Registro dos estudantes

Diante disso, podemos notar que os estudantes compreenderam cada área em função dos lados do triângulo, ou seja, área do quadrado amarelo igual a a^2, do vermelho igual a b^2 e do azul igual a c^2. As concepções dos estudantes foram ficando socialmente incisivas na obtenção da expressão do teorema. Além disso, como vimos na figura 8, os participantes nem sempre expressam com escrita o que estão pensando, isto é, eles podem se expressar em termos de *área do quadrado do cateto menor*, mas querendo afirmar *área do quadrado amarelo* ou até mesmo *quadrado do cateto menor* (c^2). Isso é aceitável, tendo em vista a conclusão que eles tiveram: $c^2 + b^2 = a^2$. A professora não entrou no mérito da ordem dos membros da igualdade, mas isso poderia ter sido discutido para reforçar que a ordem não importa, mas sim que a equivalência seja preservada.

Deste modo, os estudantes compartilham dos recursos físicos, como o kit do material manipulável, para perseguir um objetivo comum, a expressão do teorema e mesmo que divirjam em alguns aspectos, estes fazem parte da prática social e, assim, estão disponíveis aos membros. Nesse cenário, os estudantes compartilharam, portanto, o repertório nas **tentativas de ajustar a fórmula do teorema de Pitágoras**.

3.6 DISCUSSÃO DOS DADOS E CONCLUSÕES

O presente artigo teve como objetivo esboçar algumas formas de compartilhamento de repertório. Entretanto, como já foi mencionado anteriormente, a participação foi analisada em termos do repertório compartilhado de dois grupos de estudantes fazendo uso de materiais manipuláveis. O olhar sobre o repertório sugere a busca de compreender a manipulação de materiais manipuláveis como uma tarefa conjunta e intensa, na qual os participantes criam e utilizam o recurso da prática, isto é, o repertório de experiências, histórias e artefatos (os elementos físicos auxiliadores da prática) que reforçam o compromisso dos participantes com o grupo e que diferem esses membros de outras pessoas que não pertencem ao grupo (FRADE, 2003; LAVE;WENGER, 1991).

Nesse sentido, focamos nos modos de fazer as coisas, nas interpretações, nas ferramentas utilizadas pelos participantes, nos procedimentos, nas formas de linguagem/comunicação compartilhadas por um determinado grupo em plena participação em uma prática social (WENGER, 1998). Conforme entendemos, esses vários elementos, que são parte integrante da prática dos grupos observados, compõem o repertório da prática. Assim, o termo compartilhado é uma característica que sugere que esse repertório é de conhecimento de todos os participantes. Ser do conhecimento deles, entretanto, é apenas um condicionante. É preciso que os participantes se envolvam, por completo, em cada uma das situações nas quais é percebido o compartilhamento do repertório.

De acordo com o que foi apresentado na seção anterior, podemos perceber que os participantes compartilharam o repertório da prática. Apesar de algumas situações terem sido elencadas, isso não quer dizer que todo o repertório da prática dos participantes tenha sido contemplado neste artigo, isto é, outros inúmeros elementos, como gestos ou outras formas de linguagem não apresentados.

Durante o desenvolvimento da tarefa e desenrolar da prática do grupo, algumas ações, gestos, falas, histórias, modo de contá-las, experiências e outros são compartilhados entre os membros do grupo. Nesse artigo, quatro categorias foram destacadas: *o uso compartilhado de ferramentas e termos*; *interpretações compartilhadas sobre o ângulo de 180 graus*; *compartilhamento de símbolos, expressões e termos geométricos*; *tentativas compartilhadas de ajustar a fórmula do teorema de Pitágoras*.

Conforme já discutido, na situação em que os *estudantes utilizam as ferramentas e alguns termos criados ou seu significado renegociado, eles fazem de modo compartilhado* (LAVE; WENGER, 1991). Isso não quer dizer que há consenso em todas as instâncias, mas a perseguição do objetivo de determinar a medida do ângulo correspondente àquela abertura, impulsionou os participantes a desenvolverem ou utilizarem recursos, sejam os materiais manipuláveis, suas partes, termos utilizados ou as ações desenvolvidas, que são definidores de uma prática exclusiva e pertinente àquele grupo. Assim, as ferramentas e os termos utilizados em função da situação que se encontrava no material manipulável configuram-se como recursos partilhados entre os membros (SANTOS, 2004).

A *linguagem* e *manipulação* são dois elementos inter-relacionados nessa prática. Sobre isso, Santos (2005) argumenta que a linguagem falada tem valor indiscutível, em detrimento da linguagem escrita ou mesmos dos símbolos. Todavia, isso sugere uma generalização que não cabe nesse contexto. Os símbolos e os termos têm papel fundamental na constituição do repertório da prática. A manipulação, nesse caso, torna-se elemento de conexão entre as interpretações e a linguagem falada.

Além disso, os materiais manipuláveis configuram-se como ferramentas que auxiliam na estruturação da prática, os afazeres dos membros incidirão direta ou indiretamente neles. Assim, essa prática torna-se única, diferente de outras que não se valem desses materiais. Por outro lado, essa prática depende de outros fatores sociais e, por isso, pode se diferenciar de outras práticas que porventura utilizem algum desses materiais apresentados. As ferramentas ganham função particular e possuem finalidades até então não pensadas. Quando os participantes falam "*metade e metade*", "bola", eles estão transformando a ação de ligar o que eles dizem ao material manipulável, o que indica que eles utilizam isso como uma ferramenta comum.

Além disso, os participantes partilham do uso das mãos como ferramenta quando eles representam um L com o polegar e o indicador, fazendo referência ao ângulo de 90 graus. Assim, o uso das mãos tornou-se útil para representar o ângulo de 90 graus e foi validado pelos outros membros. A partir disso, tornou-se um movimento reconhecido integralmente e compartilhado pelos membros.

No intuito de determinar a medida do ângulo correspondente à abertura de 180 graus, os participantes conceberem variadas formas de caracterizá-lo. São formas diferentes de nomeá-lo, mas que expressam o mesmo significado referente ao *ângulo de 180 graus*. Assim, as formas "180º", "meia volta" e "ângulo raso", foram reconhecidas pelo grupo como representante desse ângulo. Todas as formas de representá-lo, aliás, convergiam para a mesma abertura entre os palitos, isto é, abertura de 180 graus. São formas autênticas, por terem sido validadas pelo grupo e reconhecidas por todos e tornaram-se parte do repertório compartilhado da prática, no momento em que foram validados. Nem sempre esse reconhecimento é explicito, há casos em que apenas o fato de permitir que sejam utilizadas já caracteriza a sua validação. A essa situação, denominamos de *Interpretações compartilhadas sobre o ângulo de 180 graus*.

Assim, pensar na *posição inicial* dos palitos como sobrepostos indicou uma forma de pensar até então inusitada. Tal elemento serviu de base para os participantes discutirem sobre o ângulo raso. No desenvolvimento da tarefa, os estudantes usaram o termo *volta* para indicar um giro de 360 graus. Esse elemento comum sugere que a prática não é fechada em si, ou seja, ela pode ser condicionada por elementos de outras práticas, de outros contextos.

O *compartilhamento de simbologia, termos e expressões*, referentes aos elementos geométricos, diz respeito aos símbolos, expressões e palavras que são necessárias para representar os elementos geométricos. Esses símbolos carregam significados que são negociados pelos membros do grupo (LAVE; WENGER, 1991). Nesse sentido, há modos de ver a prática por parte dos participantes que são partilhados e que implicam na convergência de significados. Assim, os símbolos possuem significados para os membros, mas são elementos que já possuem significados históricos e culturalmente estabelecidos.

Nesse sentido, o símbolo c^2 tem inúmeras interpretações em vários contextos, mas, no contexto dessa prática, c^2 refere-se à área do quadrado amarelo ou ao cateto menor (do triângulo) ao quadrado. Assim como os símbolos, as expressões utilizadas também têm significados que são negociados no contato social dos participantes com tais expressões. Utilizar, por exemplo, os termos *quadrado, triângulo retângulo ou área,* indica o modo de pensar o quadrado como, no mínimo, relacionado com aquela representação do quadrado; pensar no triângulo retângulo indica pensá-lo relacionado com a sua representação e análogo às outras. Esses termos vão se configurando comuns aos membros, indicando o compartilhamento desses elementos.

A negociação de significados para cada uma das expressões, dos símbolos, das relações estabelecidas se faz presente. Assim, compartilhar esses elementos sugere significados comuns aos membros. Dessa maneira, os participantes fizeram a exposição, uns aos outros, da maneira de ver ou compreender determinadas situações ou elementos. Esse movimento é necessário para que se possa argumentar na sala de aula, valendo-se da linguagem que é oriunda da junção da linguagem matemática escolar e do discurso externo à matemática, que Santos (2005) denomina de linguagem própria. Nessa vertente, os materiais manipuláveis possibilitam que o estudante tenha acesso a um repertório diferenciado, que é oriundo da fusão entre discursos também diferenciados.

As *tentativas de ajustar a fórmula do teorema de Pitágoras* sugerem uma busca conjunta da expressão que fosse adequada àquela disposição das áreas menores na maior. Assim, as generalizações feitas sofreram avaliação do grupo no sentido de serem ou não validadas. Em outras palavras, os participantes queriam expressar o que haviam compreendido a partir daquela manipulação.

Assim, houve várias tentativas, muitas próximas da fórmula, outras nem tanto, mas que faziam algum sentido para quem lançava. Todavia, as que não se adequavam eram rejeitadas pelo grupo e sofriam modificações. Mesmo sendo rejeitadas, elas marcaram a história do grupo como ideias que não foram aceitas. Os estudantes procedem tentando se aproximar ao máximo da fórmula, sempre fazendo referência e retornando aos materiais manipuláveis. Dessa forma, essas tentativas, sendo reconhecidas ou não, constituíram o repertório da prática e foram partilhadas pelos membros.

Apesar de terem concluído coerentemente, eles escreveram com certas incongruências como podemos ver no registro. Cada uma das tentativas não reconhecidas fazia sentido apenas para eles e no momento em que se deu à tentativa. Nesse momento, a negociação de significado se mostrou mais implícita, pelo fato de vários elementos usados já terem seu significado negociado anteriormente. Isso sugere, por exemplo, que o termo *área do quadrado do cateto menor* poderia estar se referindo ao termo *área do quadrado amarelo* ou mesmo *quadrado do cateto menor* ou simplesmente c^2.

Diante disso, pode ser observado que os participantes podem compartilhar o repertório de sua prática em pelo menos quatro situações. Paralelamente a isso, ocorre a negociação de significado em todas as relações estabelecidas entre os participantes e entre estes e os materiais manipuláveis. Como já argumentamos, o repertório dessa prática está longe de ter sido esgotado, além de serem possíveis outros olhares sobre os mesmos destaques.

Além disso, notamos que compartilhar o repertório da prática à qual se vincula é essencial para que haja, na íntegra, a participação de todos e estes tenham acesso aos afazeres oriundos da prática. Ter acesso a esses afazeres, então, diz respeito ao processo de compartilhar os modos de comunicação (termos, expressões, símbolos compartilhados), de agir (tentativas compartilhadas), as ferramentas da prática (materiais manipuláveis, suas partes, mãos, tesouras, etc) e outros elementos que a compõe.

Concluímos, portanto, que os indivíduos participaram criando e utilizando o repertório da prática de modo compartilhado, tornando comuns os elementos integrantes desse repertório, conforme consta na perspectiva da aprendizagem situada por Lave e Wenger (1991). Esse movimento é essencial ao processo de tornar-se um participante, pois é vital ao participante envolver-se na rotina da prática (LAVE; WENGER, 1991). Nesse sentido, os membros ajustaram as diferentes interpretações das suas ações (SANTOS, 2004) e interrelacionaram os significados sobre os mesmos aspectos. Essa interrelação propiciou uma compreensão partilhada dos constituintes do repertório da prática.

Além disso, em consonância com os resultados do estudo e dos trabalhos presentes na literatura, acreditamos estar trazendo subsídios para estudos que foquem em outros contextos, que não de salas de aula de matemática, ou mesmo para estudos que objetivem caracterizar outros modos de compartilhamento. Em relação à prática pedagógica dos professores de Matemática, este estudo pode apoiá-los no sentido de permitir olhar a sala de aula como campo de ações compartilhadas e desenvolvidas na prática, isto é, o repertório compartilhado.

3.7 REFERÊNCIAS

ALVES-MAZZOTTI, A. J. **O método nas ciências sociais**. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWAMDSZNADJDER, F. *O método nas ciências naturais e sociais*: pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Pioneira, 2002. p. 147-178.

BRUM-DE-PAULA, M. R.; ESPINAR, G. S. Coleta, transcrição e análise de produções orais. In: BRUM-DE-PAULA, M. R.; SCHERER, A. E.; PARAENSE, S. C. L. (Orgs.). **Letras**, nº 21. Santa Maria: PPGL Editores, 2002. p. 1-13.

CHARMAZ, K. Constructing Grounded Theory: a practical guide through qualitative analysis. London: Sage, 2009.

CLEMENTS, D. H. ‘Concrete’ manipulatives, concrete ideas. **Contemporary Issues in Early Childhood**, v. 1, n. 1, p 1-16, 1999.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. Introduction: the discipline and practice of qualitative research. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Ed.) **Handbook of qualitative research**. 3. ed. Thousand Oaks: Sage, 2005, p. 1-32.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Uma Reflexão Sobre o Uso de Materiais Concretos e Jogos no Ensino de Matemática. **Boletim da SBEM**, São Paulo, v. 4, n. 7, 1993.

FRADE, C. **Componentes Tácitos e Explícitos do Conhecimento Matemático de Áreas e Medidas**. 2003. 251 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2003.

GRANDO, R. C.; NACARATO, A. M.; GONÇALVES, L. M. G. Compartilhando saberes em geometria: investigando e aprendendo com nossos estudantes. **Cadernos do CEDES (UNICAMP)**, Campinas, v. 74, p. 39-56, 2008

LAMBERTY, K. K.; KOLODNER, J. L. Exploring Digital Quilt Design Using Manipulatives as a Math Learning Tool. In BELL, P.; STEVENS, R.; SATWICZ, T. (Eds.). **Keeping Learning Complex: The proceedings of the Fifth International Conference of the Learning Sciences (ICLS)**. Mahwah: Erlbaum, 2002. p. 552–553.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa pedagógica: do projeto a implementação**. Porto Alegre: Artmed, 2008.

LAVE, J.; WENGER, E. **Situated learning: Legitimate peripheral participation**. New York: Cambridge University Press, 1991.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. (Org.) **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores Associados, 2006. p. 3-38.

MATOS, J. F. L. Aprendizagem e prática social: contributos para a construção de ferramentas de análise da aprendizagem matemática escolar. In: PONTE, J. P.; SERRAZINA, L. Educação Matemática em Portugal, Espanha e Itália. **Atas da Escola de Verão** – 1999 (Eds.). Lisboa: SEM-SPCE, 2000. p. 65-94.

MOYER, P.S. Are We Having Fun Yet? How Teachers Use Manipulatives to Teach Mathematics. **Journal Educational Studies in Mathematics**, v. 47, p. 175-197, 2001.

NACARATO, A. M.; GRANDO, R. C. ; COSTA, J. L. . Um Contexto de Trabalho Colaborativo Possibilitando a Emergência dos Processos de Argumentação e Validação em Geometria. **Acta Scientiae (ULBRA)**, Canoas, v. 11, p. 69-85, 2009.

PAIS, L. C. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria. **ANPED**, Caxambu, 23ª reunião, p. 1-16 , 24-28 set. 2000. Disponível em: <http://www.anped.org.br/reunioes/23/textos/1919t.pdf>. Acesso em: 16 mai. 2008.

PASSOS, C. L. B.; GAMA, R. P.; COELHO, M. A. Laboratório de ensino de matemática na atuação e na formação inicial de professores de matemática. In: 16º COLE-CONGRESO BRASILEIRO DE LEITURA, 2007, Campinas, SP. **Anais**... Campinas: ALB, 2007.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, S. (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores Associados, 2006. p. 77-92.

PASSOS, C. L. B. Recursos Didáticos na Formação de Professores de Matemática. In: VII ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: MATEMÁTICA NA ESCOLA: CONTEÚDOS E CONTEXTOS, 2004, São Paulo. **Anais**... São Paulo: SBEM, 2004. p. 01-11.

SANTOS, M. P. **Encontros e esperas com os Ardinas de Cabo Verde: aprendizagem e participação numa prática social.** Tese (Doutorado em Educação e Didática da Matemática) _ Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências, Departamento de Educação, 2004.

SANTOS, V. de M. Linguagens e comunicação na aula de Matemática. In: NACARATO, A. M.; CELI, E. L. (Org.). **Escrituras e leituras na Educação**

SILVA, M. C. F. Pausas em textos orais e espontâneos e em textos falados**. Linguagem em discurso**, Tubarão, v.3, n. 1, p.111- 133, 2002.

WENGER, E. Comunities of Pratices Learning, Meaning, and Indentity. Cambridge: University Press, 1998.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, retomamos o problema de pesquisa e discutimos alguns conceitos norteadores utilizados nesta pesquisa como *participação*, *prática social*[1] (prática da matemática escolar), *negociação de significados* e dois conceitos auxiliares na compreensão da participação, tais como: o *engajamento mútuo* e o *repertório compartilhado*, segundo a perspectiva da aprendizagem situada por Lave e Wenger (1991). Esses dois constructos teóricos foram utilizados pelos autores para esboçar práticas em contextos sociais. De acordo com Silva (2006), esses constructos teóricos são dimensões interrelacionadas, sendo preciso observar a interação entre elas.

Neste sentido, pensar em *participação* em determinados contextos sugere relações entre os membros e estas decorrem necessariamente das relações de engajamento como destacado por Caldeira (2010). Assim, compreender como ocorre o engajamento mútuo no decorrer da prática apresentada nesta pesquisa mostrou-se imprescindível, pois as relações de engajamento mútuo traduzem situações de participação nas quais os participantes devem lidar com dificuldades e inquietações derivadas da prática.

Analogamente, compreender participação implica entender como ocorre o compartilhamento do repertório nas práticas que os estudantes participam. Ao participar, os membros que a compuseram desenvolveram recursos físicos e simbólicos que delinearam tal prática. O repertório da prática sugere a utilização de conteúdo que é utilizado pelos membros para alcançar determinados objetivos. Assim, estudá-lo suscita a possibilidade de compreender como estudantes utilizam tais recursos na consecução de sua participação no grupo.

Por fim, apresentamos algumas implicações dos resultados da pesquisa para a área de Educação Matemática e Ensino de Ciências, indicando algumas contribuições para futuras pesquisas. Além disso, trazemos as possíveis implicações para a prática pedagógica que professores de Matemática participam.

4.1 INTERCALANDO COMPREENSÕES

[1] A prática social a qual nos referimos é a prática da matemática escolar. Por vezes, utilizaremos apenas o termo prática para evitar repetições desnecessárias.

Nesta seção, sintetizamos algumas compreensões acerca do que extraímos dos dados analisados, em interface com o referencial da perspectiva da aprendizagem situada, segundo Lave e Wenger (1991). Assim, partimos da seguinte pergunta norteadora: *Como estudantes participam de aulas de Matemática que abordam tópicos de geometria ao utilizar materiais manipuláveis?* Pertinentemente à perspectiva da aprendizagem situada, *prática* e *participação* são constructos teóricos imbricados. Nesse sentido, conforme os autores, a participação, nesta pesquisa, configurou-se em função do engajamento das pessoas em ações com significados comuns a elas.

Por outro ângulo, a participação vincula-se ao repertório compartilhado pelo fato deste possibilitar o reconhecimento e definição de práticas compartilhadas, como frisa Beline (2012). Por assim dizer, a participação passa a ser delineada em função dessas práticas que são reconhecidas e definidas. Deste modo, compreender o repertório compartilhado no espaço onde ocorreu a prática da matemática escolar nos possibilita reconhecer e definir a participação em termos das ações que são partilhadas e que dão corpo à prática do grupo.

Nessa direção, demarcamos duas perguntas auxiliares para responder a pergunta norteadora:

Como estudantes se engajam em aulas de Matemática ao utilizarem materiais manipuláveis?

Como estudantes usam o repertório compartilhado em aulas de Matemática ao utilizarem materiais manipuláveis?

Miles e Huberman (1994) sugerem uma estrutura de dissertação na qual foca-se em questões de pesquisa, no caso a ser estudado, nos dados coletados e em como estes dados deveriam ser manuseados e analisados. Assim, procedemos em convergência com tal estrutura, partindo de duas questões de pesquisa, desmembradas da pergunta principal de pesquisa. Além disso, os participantes desta pesquisa, estudantes e professores, experimentaram uma situação que se configurou como aulas de Matemática envolvendo tópicos de geometria abordados por meio de materiais manipuláveis. O contato e interação desses participantes destinados a desenvolver tarefas de geometria no espaço da sala de aula configuraram uma estrutura social demarcada por Wenger (1998) como *prática social*[2].

---

[2] A prática social, a qual nos referimos, diz respeito à prática social da matemática escolar, isto é, a prática decorrente de interações entre membros em um ambiente escolar destinado a desenvolver algum conceito matemático.

Esta pesquisa, como já salientado, configurou-se no estudo de dois aspectos teóricos pertencentes à perspectiva da aprendizagem situada. A utilização dos conceitos *engajamento mútuo* e *repertório compartilhado* subsidiou o entendimento de como estudantes participaram de aulas de matemática, nas quais se fez uso de materiais manipuláveis, no sentido de que foi possível perceber a configuração da prática por meio dos elementos que a constituem. De forma mais simples, essa abordagem foi pensada acreditando ser necessário entender como estudantes se envolvem e como eles utilizam o que está disponível no desenvolvimento da prática.

Ao analisar os dados deste estudo, foi possível observar algumas formas particulares de participar na prática social com os materiais manipuláveis, caracterizadas pela diversidade dos membros, de elementos do contexto da prática social e dos materiais manipuláveis utilizados. Essas formas diferenciadas e particulares de se envolver em algo passou a ser entendida como formas de engajamento[3]. Além disso, o conhecimento[4] que é produzido a partir das experiências oriundas dessa prática mostrou-se mutável, conforme as mudanças ocorridas nessas formas de engajamento. As formas de engajamento não se expressavam por si só, por vezes, caracterizaram outros engajamentos mais amplos. Esse conceito configurou-se, por assim dizer, em níveis, talvez não no sentido hierárquico, mas no sentido de demarcar etapas diferentes de engajar-se. Assim, engajar-se em determinada situação poderia favorecer o engajamento em outra situação.

Durante o processo em que os membros se engajam em algo, alguns critérios de atuação na prática social são estabelecidos naturalmente e outros são mais visivelmente negociados. Não só a forma de agir na prática, mas os significados atrelados a tudo que é feito, produzido e reproduzido é negociado. A tomada de decisão é uma ação dos membros que não se separou da negociação de significados[5]. As decisões dependem da configuração da prática que eles estabelecem a partir dessa negociação.

Das situações de engajamento percebidas nos dados e discutidas no capítulo II desta dissertação, vislumbramos o *engajamento dos estudantes no contato preliminar com os elementos do material manipulável*, o *envolvimento dos estudantes no recorte dos quadrados conforme as regras*, o *engajamento na associação do ângulo nulo à posição inicial dos*

---

[3] As formas de engajamento referem-se as situações pertencentes à prática social do grupo, nas quais os estudantes envolviam-se a finco com as nuanças da situação.
[4] Wenger (1998) assume conhecimento como uma questão de competência com o empreendimento. Em outras palavras, conhecimento está relacionado a ser competente no que se dedica a fazer.
[5] Negociação de significados é um constructo teórico apresentado por Wenger (1998) e discutido na seção Breve Fundamentação Teórica apresentada no capítulo I desta dissertação.

palitos e o *envolvimento na associação dos lados dos quadrados com os lados do triângulo*. As situações nas quais houve compartilhamento de repertório foram: o *uso compartilhado de ferramentas e termos*, *interpretações compartilhadas sobre o ângulo de 180º*, *compartilhamento de símbolos, expressões e termos geométricos*, *tentativas compartilhadas de ajustar a fórmula do teorema de Pitágoras*.

Apesar de essa não ser a discussão central, a negociação de significados se interrelaciona com o engajamento mútuo. A seguir, veremos as categoriais separadamente, mas nos serve como exemplo a discussão sobre *círculo e sua representação* que se refere à negociação de significados destinada a decidir o que seria o elemento do material (recorte de papel em forma circular). Como nomeá-lo, dependeria de como os estudantes iriam conceber tal elemento. Nesse caso, os estudantes participaram mutuamente no que se refere à compreensão do que era aquela figura. De maneira similar, Passos (2000) argumenta que estudantes possuem dificuldades em ler as representações bidimensionais de objetos tridimensionais. Isso ocorre por conta da dificuldade em identificar os diferentes elementos que compõem esses objetos. Por conta disso, os membros participaram de uma situação cuja experiência desprendida não possibilitou de imediato extrair determinadas propriedades tanto do círculo quanto da sua representação que são fundamentais para distingui-las ou associá-las.

O que se consolidou como produto da experiência nessa prática esteve atrelado à capacidade de abstrair a tridimensionalidade da representação do círculo por meio do material manipulável. Nesse sentido, a prática social desenvolvida propiciou aos estudantes rever e analisar elementos em situações específicas, ou seja, os manipuláveis favoreceram a visualização de elementos já vistos no dia-a-dia deles. Assim, conforme a argumentação de Passos (2000), a abstração necessária ao estudante quanto a diferentes tipos de visualização diz respeito ao criar e ler imagens, ou seja, criar imagens que dêem conta de representar objetos do espaço, além de interpretar as informações espaciais.

A seguir, mostramos as categorias extraídas da análise dos dados, apresentando primeiramente, as de engajamento mútuo e, em seguida, as categorias relacionadas ao repertório compartilhado. Em seguida, faremos as relações possíveis entre as categorias que se referem a engajamento mútuo e as que se referem ao repertório compartilhado.

4.2 AS RELAÇÕES ENTRE AS FORMAS DE ENGAJAMENTO

O engajamento no reconhecimento do material manipulável

O *engajamento dos estudantes no contato preliminar com os elementos do material manipulável* e o *envolvimento dos estudantes no recorte dos quadrados conforme as regras* sugerem o comprometimento dos participantes em reconhecer o material manipulável em sua totalidade por meio de suas partes. Nessa situação, os estudantes precisam se dedicar a reconhecer as características dos materiais apresentados, a função de cada peça deste e como eles poderiam manuseá-las.

Algumas regras são estabelecidas no contato dos participantes com os manipuláveis e estas devem ser respeitadas a fim de que os objetivos da tarefa possam ser alcançados. Nesse sentido, por exemplo, a tesoura pode servir para cortar os quadrados, nessa tarefa, e em outros contextos servir para fazer outros tipos de recortes. Diante disso, os estudantes precisam também estabelecer um compromisso de se envolver na situação juntamente com outros membros. Para dar conta desse envolvimento, os participantes precisam reconhecer as partes do material para conhecê-lo em sua totalidade e passar a dar validade aos procedimentos em consonância com as indicações da tarefa.

Assim, cortar os quadrados envolve não só a tesoura como uma ferramenta e exigir determinadas instruções de como fazer, mas também reconhecer o produto da ação de cortar e reconhecer a importância de tal ação. A ação de cortar mereceu negociação de significados, isto é, passou a ter um significado comum. Essa negociação ocorreu reciprocamente. Notemos, porém, que o significado não foi negociado com a ação propriamente dita, mas com os membros para que o significado fosse socializado. Por mais que nem todos tenham cortado os quadrados, todos os membros acompanharam a ação. De certo modo, as situações em que eles precisaram cortar, justapor e sobrepor, por exemplo, configuraram-se como situações de dificuldades ou inquietação[6].

Nesse sentido, envolver-se no *reconhecimento do material manipulável* configura o envolvimento dos estudantes na ação de reconhecer as partes do material, suas características e sua funcionalidade. Assim, o reconhecimento é pautado no toque, na visualização, no corte, justaposição, sobreposição e posicionamento, no caso dos palitos no centro do círculo.

O engajamento nas conexões entre materiais manipuláveis e ideias matemáticas ou conceitos matemáticos

---

[6] A inquietação, à qual nos referimos, diz respeito até mesmo à mudança de estado atual. Isso significa que os membros precisam agir em grupo, mutuamente, para conseguir superar a situação.

Algumas categorias[7] são próximas umas das outras e mantêm uma ideia ou um conceito matemático comum. Dentro do mesmo contexto, elas mantêm conexões por se constituírem ferramentas comuns que integram a situação. O *engajamento na associação do ângulo nulo à posição inicial dos palitos* e o *envolvimento na associação dos lados dos quadrados com os lados do triângulo* referem-se às discussões sobre ângulos e sobre figuras planas que se referem a elementos diferentes na Matemática. Todavia, elas mantêm o foco em ideias matemáticas ou conceitos matemáticos.

O estudo de Murari (2011) traz uma contribuição importante no que se refere às características dos materiais manipuláveis. Para o autor, os materiais manipuláveis devem proporcionar verdadeira personificação do conceito matemático. Nesse sentido, os elementos do material manipulável mostraram-se como representações de retas, ângulos, círculos, ponto, quadrado, triângulo etc., mas puderam também representar o conceito matemático. Nesse caso, a percepção do conceito matemático depende da abordagem do professor. Deste modo, confirmam-se argumentos de Moyer (2001) e Clements (1999) no sentido de que os materiais por si só não garantem aprendizagem, aliás, isto tem a ver como o material é concebido em sala de aula.

Alguns elementos geométricos podem ser representados pelos materiais manipuláveis e observados pelos participantes. Com isso, até determinarem *área*, *cateto*, *lado*, etc., eles vivenciaram situações de experiência conjuntamente. A consolidação, do que foi observado por meio da experiência de reconhecer e compreender os elementos geométricos, está vinculada ao compromisso dos membros com a situação. Todos contribuíram de modos diferentes, mas puderam associar os lados correspondentes do triângulo e quadrado e o ângulo nulo à posição inicial.

A visualização das relações entre os lados do quadrado e do triângulo retângulo da tarefa foi possível a partir da compreensão de ideias matemáticas relacionadas ao material manipulável, isto é, da ideia de área, de lado, hipotenusa e cateto. Assim, reconhecer, por exemplo, que a área de um quadrado pode ser dada em função de um dos lados do triângulo é, sobremaneira, dependente dos direcionamentos da professora, ou seja, manipular ou visualizar o material manipulável não garantiria que os participantes conseguissem alcançar as relações desejadas, conforme salientam Pais (2000) e Clements (1999).

Os participantes agem em grupo e solidariamente, seja conhecendo as ferramentas e contribuindo com o aprendizado do outro sobre a função dela, seja com observações do tipo

---

[7] As categorias são partículas textuais que sintetizam variais ideias numa só, observando o que elas têm em comum.

“esse lado é igual a esse”. Alguns participantes mostraram-se mais desenvoltos que outros em determinados procedimentos e a experiência no grupo possibilitou que essa desenvoltura permitisse passos além desses procedimentos. Quando um participante, por exemplo, visualiza que um lado é igual ao outro e coloca figuras lado a lado para verificar tal conclusão, esse procedimento pode suscitar a visualização de outras relações.

Desse modo, os participantes se apresentaram num processo dinâmico e social, no qual se comprometeram e se dedicaram reciprocamente. Isto significa que o envolvimento mútuo dos participantes foi imprescindível para alcançar-se o objetivo da tarefa, tendo em vista que as relações entre lado e área, a para a^2, b para b^2 e c para c^2, são essenciais para a compreensão final do teorema de Pitágoras.

Podemos concluir, portanto, que se engajar nessa situação de *determinar, reconhecer e associar* o ângulo à posição inicial e associar os lados do quadrado aos do triângulo correspondentemente, pressupõe mais do que apenas reconhecer a existência do ângulo, determinar sua medida, posicionar os palitos desta forma e reconhecer medidas iguais nos lados do triângulo e quadrado, refere-se ao processo de reconhecer os elementos que caracterizam a situação, compreender a função desses elementos e comprometer-se em experimentar tudo isso. Em outras palavras, o participante precisa engajar-se por inteiro na situação, dar conta de todos os detalhes atrelados a ela. O compromisso em reconhecer os ângulos ou mesmo determiná-los é recíproco para os membros, pois a partir do momento em que a situação de reconhecimento e determinação se instaurou, os membros se dispuseram a fazê-lo.

4.3 AS RELAÇÕES ENTRE AS FORMAS DE COMPARTILHAMENTO DE REPERTÓRIO

O uso compartilhado de recursos da prática para alcançar os objetivos

Os recursos concretos da prática referem-se aos elementos físicos disponíveis aos participantes. Assim, eles estão contidos no repertório da prática figurando como recursos físicos, palpáveis, materiais. Diante disso, compartilhar esse tipo de recurso mostrou-se imprescindível para configurar a prática social do grupo e conceber como plena e legítima a participação de cada membro do grupo. Em algumas situações, umas mais visíveis que outras, a situação vivenciada pelos membros possibilitou o envolvimento de todos os participantes e estes puderam partilhar não só falas, desenhos, materiais, ações dos membros, mas também os elementos concretos para alcançar os objetivos da tarefa ou cumprir com as indicações da tarefa.

A relação entre as categorias *uso compartilhado de ferramentas e termos* e *tentativas compartilhadas de ajustar a fórmula do teorema de Pitágoras* remete a pensar em qual a finalidade do uso dessas ferramentas. Ao usar tesouras, palitos, taxinhas, círculo, termos como área, volta, meia volta, etc., os participantes desenvolvem habilidades por meio da experiência com esses objetos. Essas habilidades, mesmo que adquiridas individualmente, são oferecidas aos outros membros em forma de truques, macetes, jeitos, etc. Além disso, a habilidade em manusear ou utilizar determinado elemento do repertório permite que os membros desenvolvam novas estratégias. Nesse sentido, salienta Beline (2012), essas ferramentas constituem o repertório compartilhado da prática.

Os participantes transcenderam o fato de compartilharem o repertório da prática e o fazem com alguns objetivos em mente. Nas tentativas de enquadrar suas compreensões a uma expressão textual para dar conta do teorema de Pitágoras, eles compartilharam, inúmeras vezes, as ferramentas disponíveis. Assim, usaram os manipuláveis, sobrepondo, justapondo, remontando o quadrado e associando os lados para extrair as relações como “lado menor ao quadrado mais lado maior ao quadrado é igual à hipotenusa”.

O que demarca essa situação é o fato de os recursos concretos permitirem a conexão entre a manipulação, interpretações e o teorema de Pitágoras.

Interpretações compartilhadas de ideias matemáticas

Interpretações compartilhadas sobre o ângulo de 180º e c*ompartilhamento de símbolos, expressões e termos geométricos* são categorias que apontam para ideias e conceitos que possuem significados negociados e compartilhados. O modo como os estudantes interpretam a angulação de 180º, como meia volta ou metade, são interpretações oriundas da experiência partilhada da situação. A *interpretação* ou o *modo como se concebe tal ângulo* pode ser visto como uma ação compartilhada. Cada estudante contribui de forma diferente, uns em menor grau que outros. O entendimento de determinado aspecto por um estudante é apropriado pelos outros. Essas ações de interpretação são, de certo modo, marcas características da prática em questão.

Os participantes envolvem-se em situações dentro da própria prática e fazem uso compartilhado do que a prática dispõe para eles. Os símbolos como a^2 são intrinsecamente ligados à tarefa e aos seus objetivos e eles possuem significados comumente negociados entre os participantes.

De modo análogo, os termos são partilhados mesmo que de maneira indireta. Nesse caso, os integrantes do grupo tomam conhecimento dos termos, por mais que não tenham falado, e participam da negociação de significados e da validação desse termo na prática comum que participam. É preciso frisar a característica comum da prática, pois ela envolve todos os membros e todos têm a responsabilidade de julgar pertinente ou não um símbolo, termo ou expressão dentro do grupo. Com isso, queremos salientar que mesmo que não haja manifestação mais enfática de algum membro, este também está exercendo seu poder de decisão.

Desse modo, todos os termos, expressões e símbolos utilizados sofrem modificações ou interferências dos integrantes do grupo. Assim, a participação dos sujeitos se configura, em boa parte, no compartilhamento do produto final, isto é, do significado de algo, do que foi validado. Portanto, para que haja negociação de significados, os membros precisam estabelecer o modo como utilizarão as ferramentas disponíveis na prática. Todavia, não se pode garantir que todos utilizarão igualmente.

Como apresentado por Murari (2011, p. 194), "os materiais devem formar uma base para a abstração". Nesse sentido, a abstração fez-se necessária para a construção da fórmula do teorema de Pitágoras. Por meio dos manipuláveis, os participantes tentaram esboçar uma fórmula que sintetizasse a sobreposição das áreas. Assim, o uso do material pelos estudantes mostrou-se capaz de possibilitar a reflexão deles quanto às áreas, quantos às relações entre os lados. Para eles, foi uma tarefa difícil, na qual eles fugiram da situação demarcada no material. Teles e Bellemain (2009) argumentam, por exemplo, que estudantes confundem área e perímetro e isso se assemelham ao ocorrido nesse estudo quando os participantes deduziram que a soma dos catetos menores do triângulo é igual ao maior ao quadrado.

Tanto as interpretações sobre o ângulo de 180º quanto os significados negociados para os termos, expressões e símbolos passaram pelo julgamento dos integrantes do grupo. Aquelas interpretações ou significados que não eram validados pelos participantes, eram descartados ou sofriam modificações. Por assim dizer, esses significados associados a esses elementos, mesmo não sendo reconhecidos, remontaram o repertório da prática e puderam ser compartilhadas. Assim, percebemos que compartilhar o repertório da prática é fundamental para haver participação dos membros. Ter acesso aos afazeres, ao que se foi estabelecido pela configuração da prática, diz respeito ao compartilhamento de modos de comunicação, sejam termos, símbolos e expressões e modos de agir.

No estudo de Pavanello e Franco (2007), por exemplo, não houve preocupação maior da professora nem dos estudantes em questionar sobre o porquê de tal termo ser utilizado no lugar de outro, como aresta no lugar de vértice, por exemplo. Análogo ao observado nesse estudo, as tentativas sobrepuseram outras, mas não ganharam espaço de discussão bem demarcado. Quando os participantes partiram de *"soma dos catetos ao quadrado é igual à medida da hipotenusa..."* para "*a área do quadrado maior é igual à área dos quadros menores*", eles estavam exercendo o *compartilhamento convergente*. Além de compartilharem, por exemplo, os significados atrelados aos símbolos – a^2, b^2, c^2, à ideia de área, à conexão entre lado do triângulo e lado do retângulo, etc. – eles estavam demonstrando *convergência* para a uma ideia comum.

Como já mencionado, os membros ajustaram diferentes interpretações das suas ações (SANTOS, 2004), dos termos, expressões, símbolos e conceitos matemáticos. Esses elementos preenchem o reservatório de recursos utilizados e disponíveis na prática pelos membros. Assim, podemos dizer que os estudantes compartilharam ideias matemáticas ao ajustarem as interpretações sobre ângulo e os termos, expressões e símbolos matemáticos.

4.4 AS RELAÇÕES ENTRE AS FORMAS DE ENGAJAMENTO E COMPARTILHAMENTO DE REPERTÓRIO

Do coletivo ao individual

As relações entre as formas de engajamento e compartilhamento de repertório se configuram tendo como base duas dimensões que se desprenderam da prática social do grupo observado. O repertório compartilhado e o engajamento mútuo se unem de modo a dar consistência à prática dos estudantes. Quando os participantes se *envolveram estabelecendo conexões entre os manipuláveis e ideias matemáticas ou conceitos matemáticos*, eles agendaram compreensões sobre ângulos, lados, área e outros de modo socialmente compartilhado. As *interpretações sobre o ângulo de 180º* é um exemplo de uma ideia matemática desenvolvida em grupo e compartilhada pelos membros deste grupo. A partir dessa ideia desenvolvida na prática social, alguns membros puderam compartilhar a experiência sobre essa ideia matemática e a situação na qual ela foi desenvolvida. Diante disso, eles adquiriram notável desenvoltura que os permitiram transportar o que experimentaram para outros contextos e possivelmente, individualmente.

Ao pensarmos em relações entre lados de triângulos e quadrados, a ideia é análoga, pois os estudantes desenvolveram inúmeros processos em grupo, tais como: cortar, sobrepor, justapor, elevar ao quadrado, etc., para desenvolver a ideia de somar quadrados como a^2, b^2 e c^2 e estabelecer a igualdade correta. As compreensões acerca dessas ideias foram compartilhadas e puderam ser desenvolvidas pelos estudantes individualmente.

Assim, podemos dizer que os sujeitos partem do coletivo para ações individuais e se valem do que já foi experimentado no grupo para gerar novas compreensões.

O compartilhamento de ferramentas no engajamento para estabelecer conexões entre os materiais manipuláveis e ideias matemáticas ou conceitos matemáticos

As ferramentas representam recursos disponíveis durante a prática dos participantes. Estas ferramentas possuem funcionalidades específicas dentro do contexto associado a tal prática social e os membros agendam significados para elas que são comuns a eles. Além de compartilhar os significados das ferramentas e da função de cada uma delas, eles compartilham o uso destas ferramentas. Deste modo, um dos constituintes do repertório compartilhado intermedeia os manipuláveis e as ideias matemáticas ou conceitos matemáticos.

O uso destes elementos do repertório permitiu estabelecer conexões entre os manipuláveis que foram utilizados e ideias matemáticas ou conceitos matemáticos. A ideia de área, por exemplo, foi contemplada a partir das unidades quadradas[8], provenientes da ação de cortar os quadrados, postas lado a lado para preencher a “superfície” do quadrado, além da tesoura para obter tais unidades. A ideia de ângulo, no entanto, foi contemplada a partir do uso de palitos, taxinhas e círculo. Estas ferramentas contribuíram com utilidades específicas para demarcar aberturas entre os palitos. Assim, o caráter compartilhado, permite-nos afirmar que a tesoura não seria utilizada para recortar o quadrado como um círculo, ou mesmo utilizar as lâminas para representar segmentos e ângulos, visto que o modo de utilização de tais ferramentas foi instaurado pelas regras da tarefa e validado pelos participantes.

Desse modo, tesouras, hidrocor, taxinhas, partes do manipulável ou os próprios manipuláveis foram utilizados como ferramentas de modo compartilhado para alcançar relações como *lado ao quadrado*, *hipotenusa ao quadrado*, *lado igual à hipotenusa*, etc. Assim, os participantes utilizam elementos do repertório da prática se envolvendo nas conexões entre os manipuláveis e as ideias ou conceitos matemáticos.

[8] Essas unidades quadradas de 5 cm x 5 cm foram recortados nos três quadrados entregues aos estudantes.

5 CONCLUSÕES

Como é apresentado na literatura concernente ao ensino de geometria e a utilização de materiais manipuláveis, o uso destes materiais nem sempre culmina no aprendizado de estudantes de forma satisfatória (MOYER, 2001; CLEMENTS, 1999). Nacarato (2005) argumenta que deve haver uma interpretação das relações com os conceitos envolvidos além da interação. Em outras palavras, o uso de materiais manipuláveis configura-se favorável numa prática social quando estes permitem que estudantes associem os materiais manipuláveis a conceitos matemáticos.

Nesse sentido, Passos (2000) apresenta um exemplo com o cubo e frisa que o estudante volta à atenção para os elementos que esquematizam a sua forma, isto é, deixando de lado outras características como cor, textura e densidade. Na prática de sala de aula apresentada nesse estudo, os estudantes abstraíram o volume da representação do círculo, as cores, mas se permitiram a percepção de outras características quando transcenderam o campo apenas visual. A manipulação associada ao engajamento mútuo e configurando o uso compartilhado do repertório, favorece a percepção de outros elementos, tais como: relações, conceitos e fórmulas, por exemplo.

Em certa medida, os participantes atingiram a formalização devido à experiência oportunizada pela prática. Isso possibilitou que os estudantes se envolvessem em situações direcionadas ao estudo de ângulos e do teorema de Pitágoras. Segundo Passos (2000), representar um conceito de área, de ângulo, de ponto, de lado ou cateto é possível quando o sujeito chega a esse ponto de abstração, isto é, passa a associar tais conceitos aos materiais manipuláveis.

Além disso, outro ponto a ser destacado refere-se ao fato do trabalho conjunto, por vezes, culminar no trabalho individual. Murari (2011) exemplifica a passagem do trabalho grupal para o individual com o uso de espelhos e caleidoscópio, no qual estudantes operam individualmente o espelho após terem compreendido no grupo. Neste estudo, quando os estudantes se propuseram a cortar os quadrados do kit do manipulável, por exemplo, alguns passaram bom tempo cortando sem dar uma palavra, como se não houvesse mais grupo e fosse apenas ele e a ação de cortar. Os participantes compreenderam como rotacionar os palitos no círculo em grupo e em seguida foram requisitados a realizar o mesmo procedimento e extrair a medida do ângulo logo após tal ação. Assim, queremos chamar atenção para a capacidade dos participantes usarem as experiências oriundas da prática individualmente e em outros contextos.

Com isso, estudar *participação* com foco no engajamento mútuo e no repertório compartilhado nos dá subsídios para delinear melhor uma prática social da matemática escolar, na qual se faz uso de recursos como materiais manipuláveis. Assim, a participação está atrelada aos modos como estudantes se envolvem em situações dentro da mesma prática social e como eles fazem uso de reservatório de elementos disponíveis para dar conta dos afazeres de tal prática, além de contribuir para a compreensão de como se delineia o engajamento e o repertório da prática da matemática escolar. Portanto, entender como ocorre a dinâmica da prática social em termos desses constructos teóricos nos ajuda a compreender a participação e, consequentemente, como ocorre a consolidação do que é observado por meio da experiência, na prática. Assim, este estudo concebe elementos teóricos para compreender aprendizagem, em termos das experiências num contexto social, conforme a perspectiva da aprendizagem situada segundo Lave e Wenger (1991). A seguir, podemos ver no diagrama uma síntese deste estudo:

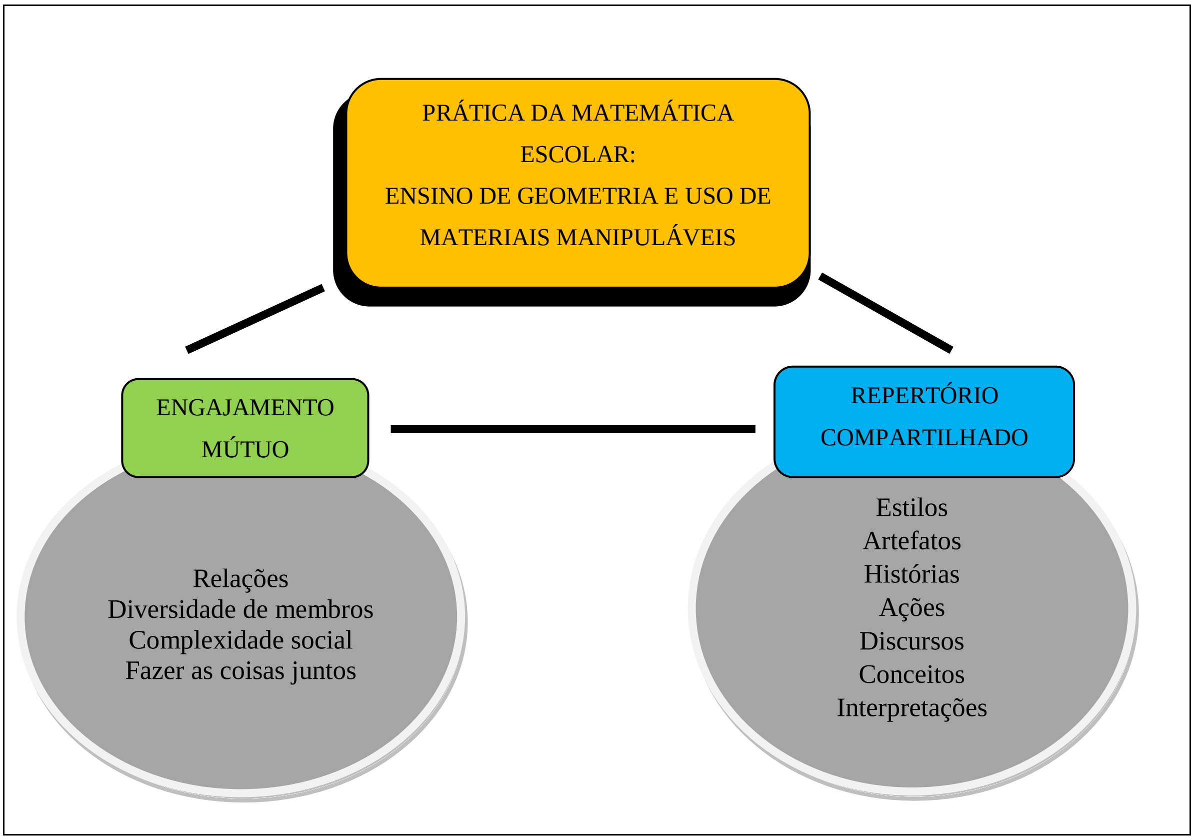


Figura 1: Quadro síntese adaptado de Wenger (1998, p. 73)

Nesse diagrama, engajamento mútuo e repertório compartilhado são dimensões vinculadas à prática da matemática escolar, no caso, a prática da matemática escolar que envolve o ensino de geometria e materiais manipuláveis. No repertório compartilhado, encontramos um reservatório de recursos disponíveis aos participantes, os quais eles desenvolvem, utilizam e modificam. Os estilos, artefatos, interpretações, ferramentas são elementos construídos no desenvolvimento da prática e que passam a fazer parte da história da prática da matemática escolar voltada ao ensino de geometria com materiais manipuláveis. Os participantes estabelecem diversos meios de utilizar tais recursos para alcançar os objetivos da prática. Esses processos, pelos quais eles agem, demarcam as relações entre os membros, os modos de fazer as coisas, a diversidade de participantes dentre outros que fazem parte do engajamento mútuo.

6 IMPLICAÇÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

Esta pesquisa avança no sentido de demarcar situações de interação ocorridas no contexto escolar. Assim, lança luz sobre a participação em termos de como os estudantes utilizam os recursos da prática e de que modo e em quais situações eles se comprometem nos afazeres da prática. Em outras palavras, a contribuição aponta para a configuração do envolvimento dos estudantes e dos recursos da prática social desenvolvida. A partir disso, uma compreensão possível manifesta-se na configuração do fenômeno aprendizagem desses estudantes, no contexto social, em termos do engajamento mútuo e repertório compartilhado. Todavia, o que ainda dá margem a lacunas são os seguintes questionamentos: “como enquadrar a aprendizagem nessas situações?”, “Em que sentido o fazer coletivo gerou experiências necessárias para o individual?”.

Portanto, investigar aprendizagem de estudantes não é uma tarefa simples, tendo em vista a diversidade das definições e da pluralidade de formas como esta se apresenta nas salas de aula em que materiais manipuláveis são utilizados. A perspectiva da aprendizagem situada segundo Lave e Wenger (1991) forneceu-nos elementos que permitiram caracterizar uma prática social e o modo como seus participantes interagem nela. A participação, nesse sentido, está associada ao modo como participantes vão estabelecendo contatos, conhecendo os afazeres da prática, as vivências dos outros membros, etc. Nessa direção, a pesquisa sugere a discussão de aprendizagem em termos das experiências ao se engajar e compartilhar o repertório da prática.

Desse modo, acreditamos estar ampliando a compreensão de como podem ser lidos alguns contextos sociais educacionais, em virtude de imbricar o contexto social educacional com os elementos teóricos apresentados na perspectiva da aprendizagem situada segundo Lave e Wenger (1991). Além disso, sustentamos que estamos ampliando os conceitos teóricos por estar analisando-os numa prática social distinta das discutidas na teoria. Essa discussão permite olhar como se aplica os conceitos teóricos da perspectiva da aprendizagem situada em outras situações. Por ora, estamos demarcando um território diferenciado, envolvendo escola, geometria e materiais manipuláveis e lançando um olhar para a dinâmica social deste território. Assim, o avanço para as pesquisas futuras se caracteriza em dar corpo ao engajamento mútuo e ao repertório compartilhado apresentados nesta pesquisa. Isto significa poder olhá-los como dimensões categóricas que expressam o que aconteceu na prática, no sentido de como eles lidam com os recursos e como eles se engajam nas situações dentro da prática.

Por fim, concluo esse capítulo salientando uma contribuição para a educação matemática no sentido de apresentar um dos modos de conceber a participação de estudantes e impulsionar discussões acerca da aprendizagem no âmbito da utilização de materiais manipuláveis no ensino de geometria.

7 IMPLICAÇÕES PARA A PRÁTICA PEDAGÓGICA

De acordo com resultados de estudos (PAIS, 2000; LORENZATO, 2006), os materiais manipuláveis[9] modificam o ambiente da sala de aula e possibilitam que estudantes estabeleçam relações com conceitos matemáticos. Nesse sentido, é imprescindível que professores agendem reflexões acerca da utilização desses materiais, pois o uso adequado depende da forma como concebem os materiais manipuláveis, ou seja, depende dos objetivos que o professor deseja cumprir com os manipuláveis (CLEMENTS, 1999; MOYER, 2001). Em contrapartida, o desenvolvimento de uma tarefa com materiais manipuláveis depende de como estudantes os concebem.

O estudo de Souza (2011), que focalizou a participação de estudantes fazendo uso de manipuláveis, deu os primeiros passos em direção à compreensão da configuração social da sala de aula na qual se utiliza manipuláveis. Podemos dizer, contudo, que estamos apontando elementos mais específicos e teóricos para, de certa forma, definir a prática da matemática

[9] Como já vimos, o termo manipuláveis será usado no mesmo sentido de materiais manipuláveis.

escolar conforme apresentada nessa pesquisa. Assim, focar em dimensões específicas como engajamento mútuo e repertório compartilhado suscita compreender outras situações de envolvimento dos estudantes, em situações ainda mais específicas e perceber como se desenvolve a utilização dos recursos disponibilizados pelo professor em sala de aula.

Os resultados dessa pesquisa sugerem, então, uma reflexão sobre a utilização dos materiais manipuláveis em aulas de matemática. Nesse sentido, os conceitos matemáticos da geometria podem ser trabalhados por meio do material manipulável de modo a estimular questionamentos por parte dos estudantes. Além disso, notamos que esses manipuláveis promovem um espaço de discussão e momentos em que estudantes precisam refletir individualmente e/ou em conjunto. A compreensão sobre como estudantes interagem ao participar de aulas de geometria envolvendo materiais manipuláveis pode dar suporte ao uso deles no ensino.

Um aspecto a ser ressaltado diz respeito ao trabalho em grupo na sala de aula que é importante para promover tal espaço de discussão entre os estudantes. Nessa dinâmica, o individuo pode exercitar a troca de experiências sociais e conhecimentos adquiridos. Além disso, é preciso atentar para o fundamental papel do professor desde a escolha e preparação da tarefa a ser desenvolvida e o modo como ele intervém e conduz o processo em sala de aula. O professor, como aquele que vincula os materiais, os estudantes e a tarefa em si, contribuem para que ocorra a experiência social.

Desse modo, compreender como estudantes se envolvem em situações nas quais experimentam ideias matemáticas a partir dos materiais manipuláveis e fazem uso do seu repertório de modo compartilhado, sugere permitir que estudantes validem as suas ações, suas falas, suas interpretações, etc. Além disso, o professor pode permitir que estudantes possam utilizar os materiais manipuláveis ou qualquer ferramenta para validar ou refutar qualquer afirmação a qualquer momento. Isso demarca um espaço importante onde eles podem construir e desconstruir interpretações que poderão se constituir em ideias matemáticas.

8 REFERÊNCIAS

BELINE, W. **Formação de professores de matemática em comunidades de prática: um estudo sobre identidades**. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 312 p., 2012.

CALDEIRA, J. S. **Um estudo sobre o pensamento algébrico em uma comunidade de prática de formação de professores de matemática.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 123p., 2010.

CLEMENTS, D. H. 'Concrete' manipulatives, concrete ideas. **Contemporary Issues in Early Childhood**, v. 1, n. 1, p 1-16, 1999.

LAVE, J.; WENGER, E. **Situated learning: Legitimate peripheral participation**. New York: Cambridge University Press, 1991.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. (Org.) **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores Associados, 2006. p. 3-38.

MILES, M. B.; HUBERMAN, A. M. **Qualitative data analysis: An expanded sourcebook**. Thousand Oaks: Sage. 1994.

MOYER, P.S. Are We Having Fun Yet? How Teachers Use Manipulatives to Teach Mathematics. **Journal Educational Studies in Mathematics**, v. 47, p. 175-197, 2001.

MURARI, C. Experienciando Materiais Manipulativos para o Ensino e a Aprendizagem da Matemática. **Bolema – Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, nº 41, p. 187-211, 2011.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 9, n. 9 e 10, p. 1- 6, 2004-2005.

PAIS, L. C. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria. **ANPED**, Caxambu, 23ª reunião, p. 1-16, 24-28 set. 2000. Disponível em: <http://www.anped.org.br/reunioes/23/textos/1919t.pdf>. Acesso em: 16 mai. 2008.

PASSOS, C. L. B. **Representações, interpretações e prática pedagógica:** a geometria na sala de aula. 2000, 210f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2000.

PAVANELLO, R. M.; FRANCO, V. S. **A Construção do Conhecimento Geométrico no Ensino Fundamental**: Análise de um Episódio de Ensino In: IX ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Belo Horizonte: SBEM, 2007.

SANTOS, M. P. **Encontros e esperas com os Ardinas de Cabo Verde: aprendizagem e participação numa prática social.** Tese (Doutorado em Educação e Didática da Matemática) – Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências, 2004.

SILVA, H. **Centro de Educação Matemática: fragmentos de identidade.** Tese (Doutorado em Educação Matemática) – UNESP, Rio Claro, 2006.

SOUZA, J. V. B. de. **Os materiais manipuláveis e a participação dos alunos na aula de Matemática.** Dissertação (Mestrado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Estadual da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 74p., 2011.

TELES, R. A. M.; BELLEMAIN, P. M. B. **O uso de fórmulas para calcular a área e o perímetro de figuras geométricas planas.** In: IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. **Anais...** TAGUATINGA - DF. SBEM, p. 1-12, 2009.

WENGER, E. **Comunities of Pratices Learning, Meaning, and Indentity**. Cambridge: University Press, 1998.