Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Dissertação de Mestrado

Variedades com Conexão Afim e Estruturas Geométricas Não-associativas

Rodrigo Aguiar von Flach

Salvador-Bahia

Fevereiro de 2012

Variedades com Conexão Afim e Estruturas Geométricas Não-associativas

Rodrigo Aguiar von Flach

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Luís Godinho Mandolesi.
Co-orientador: Prof. Dr. Thierry Corrêa Petit Lobão.

Salvador-Bahia
Fevereiro de 2012

von Flach, Rodrigo Aguiar.

Variedades com Conexão Afim e Estruturas Geométricas Não-associativas / Rodrigo Aguiar von Flach. – Salvador: UFBA, 2011.

75 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. André Luís Godinho Mandolesi.

Co-orientador:Prof. Dr. Thierry Corrêa Petit Lobão.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2011.

Referências bibliográficas.

1. Álgebra não-associativa. 2. Geometria Diferencial. 3. Geometria Riemanniana. I. Mandolesi, André Luís Godinho. II. Lobão, Thierry Corrêa Petit. III. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. IV. Título.

CDU : 512.554

:

514.764.2

Variedades com Conexão Afim e Estruturas Geométricas Não-associativas

Rodrigo Aguiar von Flach

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 24 de fevereiro de 2012.

Banca examinadora:

Prof. Dr. André Luís Godinho Mandolesi (Orientador)
Universidade Federal da Bahia

Prof. Dr. Marco Antonio Nogueira Fernandes
Universidade Federal da Bahia

Prof. Dr. Alexandre José Santana
Universidade Estadual de Maringá

A todos os cúmplices envolvidos.

Agradecimentos

Agradeço a todos os que contribuíram para que este trabalho pudesse ser concluído. Mais precisamente agradeço à toda minha família, aos professores envolvidos e aos amigos. Sou grato à minha família por ter me dado força e por acreditar em mim durante estes dois longos anos de duração do mestrado em matemática. Sem eles não teria realizado várias conquistas, este trabalho é uma delas.

Agradeço imensamente ao professor André Mandolesi por ter dedicado muitas tardes durante estes anos para me ensinar matemática, direcionar meus estudos e muitas vezes aprender junto comigo sobre novos temas. Me orgulho em dizer que um pôster apresentado em dois eventos nacionais e esta dissertação são frutos destas tarde de estudo e de sua dedicação e responsabilidade como orientador. Agradeço também aos professores Thierry Lobão, Samuel da Silva por terem tornado possível a realização este trabalho de algum modo. Agradeço também aos professores que lecionaram nas turmas que eu cursei neste período. Graças a eles, me adaptei a um ritmo de estudo mais intenso. Pude a partir deste aprendizado obter muitos bons resultados.

Agradeço também aos amigos, especialmente àqueles com quem eu compartilhei muitas alegrias, sofrimentos e meu cotidiano neste período. Explicitando alguns, agradeço aos ingressantes no mestrado em matemática da UFBA de 2009, 2010 e 2011 e à primeira turma de doutorado em matemática da UFBA. Graças a turma de 2009 e a primeira turma do doutorado, tive a quem recorrer para me socorrer quando o professor estava ausente. Na turma de 2010, encontrei nove grandes amigos. Fico muito feliz por ter participado de uma turma tão unida e por saber que juntos entramos e alcançamos nossos objetivos. Agradeço à turma de 2011 pois o convívio com a perseverança de quem está começando me dá forças para perseverar.

Agradeço também aos amigos não-matemáticos que por vezes me perguntaram sobre o que eu estava escrevendo na dissertação. Tentar explicar para um leigo foi um bom exercício até chegar a um texto escrito definitivo. Ademais, agradeço à Pedro Fernandes por sempre ter sido presente neste período e por me chamar atenção mais do que qualquer orientador que eu já tive.

"But to live outside the law, you must be honest."

Bob Dylan

Resumo

Este trabalho tem como principal objetivo apresentar a teoria algébrica não-associativa que pode ser dada às variedades dotadas de uma conexão afim. Nesta teoria, denominada Geometria Não-associativa, podemos destacar os nomes de Lev V. Sabinin, e Alexander I. Nesterov. Apresentaremos este estudo tanto no caso suave quanto discreto realizando pequenas alterações com o objetivo de simplificar a compreensão e a intuição geométrica do objeto em questão.

Palavras-chave: Álgebra Não-associativa; Geometria Diferencial; Geometria Não-Associativa.

Abstract

This work has as main objective to present the non-associative algebraic theory that can be given to a manifold endowed with an affine connection. In this theory, called the Non-associative geometry, we can mention the names of Lev V. Sabinin and Alexander I. Nesterov. We will present this study both in discrete and smooth case. Performing small changes in order to simplify the understanding and the geometric intuition of the object in question.

Keywords: Nonassociative Algebra; Nonassociative Geometry; Differential Geometry.

Sumário

Introdução

Seja G um conjunto dotado de uma operação $\cdot$. Dizemos que $(G, \cdot)$ é um loop se para cada a, $b \in G$ existem e são únicos x, $y \in G$ tais que $a \cdot x = y \cdot a = b$, e $(G, \cdot)$ possui um elemento neutro. Quando G é uma variedade diferenciável M e a operação é uma função suave de x e y, chamamos de loop suave.

Um exemplo que ocorre naturalmente em Geometria é o chamado loop geodésico ou loop suave, definido e estudado de forma independente por Michihiko Kikkawa [Kik64] e Lev Vasil'evich Sabinin [Sab72] em 1964 e 1972, respectivamente. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim, exp_p a aplicação exponencial em um ponto $p \in M$ e $\tau_x^p v$ o transporte paralelo do vetor $v \in T_pM$ do ponto p até o ponto x ao longo da geodésica liga p a x (desde que essa geodésica exista e seja única). Em alguma vizinhança aberta U de $p \in M$ é possível definir um loop dado pela operação parcial $x \cdot y = exp_x \tau_x^p exp_p^{-1} y$. Assim obtemos sobre a variedade M uma família de loops geodésicos, cada qual tendo um diferente ponto p como elemento neutro, gerando o que é chamado de estrutura loopuscular. A estrutura loopuscular de M é unicamente determinada pela conexão dada, porém a recíproca não é verdadeira.

Em 1977, Sabinin [Sab77] enriqueceu o conceito de loops suaves introduzido por Kikkawa fundamentando os conceitos de ódulos e diódulos suaves. Ódulo geodésico é uma estrutura que além da operação $\cdot$ definida acima, possui a operação $*$ dada por $t * x := exp_p t exp_p^{-1} x$, em que x é um elemento do ódulo e t é um escalar. Esta operação satisfaz a seguinte propriedade denominada monoassociatividade, isto é, $(t * x) \cdot (u * x) = (t + u) * x$. Um ódulo suave é dito diódulo suave quando nele definimos uma terceira operação $+$ que essencialmente trata-se de uma outra forma de operar segmentos geodésicos. Posteriormente Sabinin trabalhou com estas estruturas de forma puramente algébrica chamando-as simplesmente de ódulo ou diódulo.

Quando é possível definir um loop/ódulo/diódulo suave em todos os pontos de uma variedade M, dizemos que a variedade tem estrutura loopuscular/odular/diodular respectivamente. Quando M é uma variedade com uma conexão e os objetos em questão são geodésicos, dizemos que M tem estrutura loopuscular/odular/diodular suave.

Ainda em [Sab77], obtemos que as estruturas odulares/diodulares geodésicas possuem propriedades denominadas identidades geoodulares, que relacionam diferentes pontos da estrutura. Quando um ódulo (diódulo) satisfaz tais propriedades, este é chamado de geoódulo (geodiódulo). Portanto, toda variedade com uma conexão gera uma estrutura geoodular/geodiodular. Além disso, a partir de uma estrutura geoodular suave (não necessariamente obtida de uma conexão afim), podemos gerar unicamente uma conexão afim. Essas duas construções permitem estabelecer uma correspondência biunívoca entre variedades com conexão afim e variedades com estruturas geoodulares, possibilitando assim uma descrição algébrica da geometria da variedade (ver [Sab77] e [Sab81]).

Como exemplo de estrutura geoodular, podemos citar os espaços girovetoriais que fornecem uma estrutura algébrica ao espaço hiperbólico. No final da década de 1980, Abraham Albert Ungar deu início aos estudos dos girogrupos e dos espaços girovetoriais, ver [Ung88], [Ung89] e [Ung94]. Tais objetos são estruturas algébricas com menos propriedades do que os grupos e espaços vetoriais, respectivamente, que utilizando-se de um automorfismo chamado de girador, obtêm propriedades semelhantes às propriedades que definem um grupo e um espaço vetorial. Sabinin, em 1995 publicou um artigo, ver [Sab95], demonstrando que os objetos definidos por Ungar eram casos particulares de loops e ódulos.

Apesar da ressalva de Sabinin, Ungar continuou a desenvolver sua pesquisa na mesma linha. Em seu trabalho, Ungar define no disco unitário $\mathbb{D}$ em $\mathbb{C}$ centrado na origem (o raio e o centro do disco podem variar, tomamos estes valores por conveniência) a operação $\oplus$ de adição de elementos de $\mathbb{D}$, a multiplicação $\otimes$ por um escalar real e um automorfismo baseado nas transformações de Möebius, de modo que $(\mathbb{D}, \oplus)$ e $(\mathbb{D}, \oplus, \otimes)$ têm estrutura de girogrupo e espaço girovetorial, respectivamente [Ung09].

Tendo em mãos a equivalência entre estruturas geoodulares e variedades afins, Sabinin e Alexander I. Nesterov em 2000 utilizaram conceitos da geometria não-associativa geoodular como base para a descrição de uma possível estrutura discreta do espaço-tempo ver [NSa00]. Ainda com interesse em aplicar a teoria de estruturas geoodulares na física, Nesterov no artigo [Nes06] substitui o corpo dos reais na definição de geoódulo por um corpo finito (e portanto discreto) qualquer. A partir deste geoódulo, ele consegue definir uma conexão afim em um conjunto discreto de modo puramente algébrico, podendo então definir nesta estrutura conceitos como curvatura e torção algebricamente.

No presente trabalho, apresentamos as estruturas não-associativas de forma puramente algébrica conforme encontrado comumente na literatura, ver [Sab99]. Enquanto que para tratar dos objetos suaves, fizemos uma ligeira alteração nas definições, possibilitando uma maior compreensão e intuição geométrica do objeto de estudo em questão. Após esta abordagem, apresentamos os conceitos necessários para estabelecermos a relação biunívoca que existe entre a categoria das variedades diferenciáveis dotadas de uma conexão afim e os germes das variedades geoodulares. Tendo feito tal correspondência, apresentamos como pode-se trabalhar de forma puramente algébrica com variedades diferenciáveis discretas, apresentamos por fim a descrição da geometria não-associativa (no caso suave e no caso discreto) da esfera de raio r, S^2_r.

As variedades geoodulares e geodiodulares mostram-se como uma outra alternativa para o estudo de variedades dotadas de uma conexão afim. Apesar de ser complicado chegar a uma boa definição, obter tal objeto não é algo complicado. Visto que um loop suave e sua transformação de holonomia elementar determinam unicamente uma variedade geodiodular, como apresentamos no capítulo 3.

A teoria apresentada das variedades geodiodulares é extremamente similar à teoria das variedades geodulares. A relevância deste estudo vem do fato desta estrutura obter um equivalente algébrico aos espaços tangentes estritamente ligada à essa estrutura não-associativa. Assim, em se tratado de variedades discretas, as variedades geodiodulares mostram-se como uma ferramenta algébrica para trabalhar com conceitos geométricos, como curvatura e torção, mesmo sem termos diferenciabilidade nestas estruturas geométricas. Elemento essencial para trabalharmos de forma clássica com estes conceitos.

Ademais, o estudo de geometrias não-associativas torna-se relevante, independente da equivalência entre as estruturas algébricas e geométricas supracitadas, devido ao fato de os loops suaves serem uma generalização da Teoria de Lie, Ver [NSa97], páginas 220-226. Apesar de tal resultado ser bastante interessante, não o abordamos neste trabalho. Nos limitando apenas a apresentar a teoria e a dar exemplos de variedades dotadas de uma estrutura não-associativa suaves e discretas.

Dividimos o trabalho em três capítulos e dois apêndices:

Capítulo 1: Preliminares Neste capítulo apresentamos os conceitos algébricos não-associativos básicos para a compreensão deste trabalho, tais como as definições de loops, ódulos, estruturas loopusculares, estruturas odulares, variedades geoodulares, etc.

Capítulo 2: Conexões Afim e Estruturas Loopusculares Neste capítulo apresentamos uma estrutura não-associativa que pode ser dada à uma variedade ditada de uma conexão afim (M, ∇), a tal estrutura chamamos de Variedade Geoodular Natural. Posteriormente, apresentamos a demonstração de que dada (M, ∇), existe uma variedade geoodular que coincide com a variedade geoodular natural.

Capítulo 3: Estruturas Diodulares e Estruturas Holonomiais Neste capítulo apresentamos conceitos para o entendimento da construção da geometria não-associativa de uma variedade geoodular discreta. Posteriormente, apresentamos a geometria não-associativa que pode ser dada à esfera de raio r e dimensão 2, S^2_r.

Apêndice A: Variedades Geoodulares Discretas Neste apêndice apresentamos a proposta de Alexander Nesterov e Lev Sabinin para trabalhar de forma algébrica as variedades discretas utilizando-se das estruturas geodiodulares. Posteriormente, apresentamos como exemplo a Geometria Não-associativa Discreta de S_r^2.

Apêndice B: Girogrupos versus Loops Neste apêndice apresentamos brevemente a estrutura algébrica sugerida por Ungar e comparamos esta estrutura com os loops. Posteriormente apresentamos rapidamente uma estrutura de girogrupo que pode ser dada ao espaço hiperbólico.

Capítulo 1

Preliminares

No presente capítulo, apresentaremos os conceitos algébricos fundamentais para o entendimento dos assuntos que serão abordados nos demais capítulos. As principais referências utilizadas neste capítulo foram os livros [Sab99] e [Pfl90].

1.1 Quasigrupos e Loops

Na presente seção, são apresentados os conceitos de quasigrupos e loops. Ademais, apresentamos algumas definições equivalentes a estes conceitos. Inicialmente, devemos definir alguns objetos.

Seja A um conjunto. Dizemos que $f : A \times A \to A$ é uma **operação total** , se todos os pontos de $A \times A$ possuem uma imagem. Caso exista algum ponto de $A \times A$ que não possua uma imagem, dizemos que f é uma **operação parcial** .

Definição 1.1.1 (Magma)**.** *Seja G um conjunto não vazio. Dizemos que $(G, \cdot)$ é um **magma** quando $\cdot : G \times G \to G$ é uma operação total. Caso $\cdot$ seja uma operação parcial, diremos que $(G, \cdot)$ é um **magma parcial**.*

Nesta sessão, a menos quando for mencionado o contrário, as operações sempre serão totais.

Definição 1.1.2 (Translação à esquerda (à direita))**.** *Seja $(G, \cdot)$ um magma e seja $a \in G$ fixado. Uma **translação à esquerda** $L_a : G \to G$ (**translação à direita** $R_a : G \to G$) é definida por:*

$$L_a x = a \cdot x \quad (R_a x = x \cdot a)$$

para todo x pertencente a G.

Definição 1.1.3 (Quasigrupo)**.** *Um magma $(G, \cdot)$ é dito **quasigrupo** se as aplicações $L_a : G \to G$ e $R_a : G \to G$ são bijeções para todo $a \in G$.*

Decorre de imediato da definição de quasigrupo o seguinte

Teorema 1.1.4. *Um magma $(G, \cdot)$ é um quasigrupo se, e somente se, para todo par ordenado $(a, b) \in G \times G$, existe, e é único, par ordenado $(x, y) \in G \times G$ tal que*

$$a \cdot x = y \cdot a = b.$$

Demonstração:

De fato, suponha inicialmente que $(G, \cdot)$ é um quasigrupo. Fixe $(a, b) \in G \times G$ arbitrário. Como $L_a : G \to G$ e $R_a : G \to G$ são sobrejetivas, obtemos que existe $(x, y) \in G \times G$ tal que $a \cdot x = y \cdot a = b$. A unicidade do par (x, y) decorre da injetividade das translações.

Reciprocamente, suponha que $\forall (a, b) \in G \times G$, $\exists ! (x, y) \in G \times G$ tal que $a \cdot x = y \cdot a = b$. Logo, $L_a x = R_a y = b$. A existência de $(x, y) \in G \times G$ que satisfaz tais equações nos garante que L_a e R_a são sobrejetivas. Como $(x, y) \in G$ é único, temos que L_a e R_a são injetivas. Como tal propriedade é válida para todo $(a, b) \in G \times G$, concluímos que L_a e R_a são bijetivas para todo a pertencente a G. Portanto $(G, \cdot)$ é um quasigrupo. Ademais, dados dois elementos x, y de um magma $(G, \cdot)$, os elementos $z = x \cdot y$ e $w = y \cdot x$ estão unicamente determinados. ■

Chamamos atenção que ao longo do trabalho utilizaremos a Definição (1.1.3) para verificar se um magma é um quasigrupo. Quasigrupos satisfazem a lei do cancelamento, i.e.,

Teorema 1.1.5. *Seja $(G, \cdot)$ um quasigrupo. Então:*

(i) Para todo $a, x, y \in G$ tais que $a \cdot x = a \cdot y$, temos que $x = y$ (cancelamento à esquerda);

(ii) Para todo $a, x, y \in G$ tais que $x \cdot a = y \cdot a$, temos que $x = y$ (cancelamento à direita).

Demonstração:

De fato,

$$\begin{cases} a \cdot x = a \cdot y \\ x \cdot a = y \cdot a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_a x = L_a y \\ R_a x = R_a y \end{cases}$$

Como L_a e R_a são injetivas, concluímos que

$$\begin{cases} a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y & \text{(cancelamento à esquerda)} \\ x \cdot a = y \cdot a \Rightarrow x = y & \text{(cancelamento à direita).} \end{cases}$$

O que conclui a demonstração. ■

Do Teorema 1.1.4, obtemos que para cada $a \in G$, $(G, \cdot)$ um quasigrupo, existem l_a e r_a tais que

$$l_a \cdot a = a \quad \text{e} \quad a \cdot r_a = a.$$

l_a e r_a são chamados de **identidade local à esquerda** e **identidade local à direita** ou **neutro local à esquerda** e **neutro local à direita** , respectivamente. Em quasigrupos, dados a, $b \in G$ distintos, não necessariamente valem as seguintes identidades: $l_a = l_b$, $r_a = r_b$, $l_a = r_a$. Ver Exemplo 1.1.7, página 7.

Teorema 1.1.6. *Seja $(G, \cdot)$ um magma finito. Então as seguintes sentenças são equivalentes:*

(i) *$(G, \cdot)$ é um quasigrupo;*

(ii) *$L_a : G \to G$ e $R_a : G \to G$ são injetivas $\forall a \in G$;*

(iii) *$L_a : G \to G$ e $R_a : G \to G$ são sobrejetivas $\forall a \in G$;*

(iv) *$(G, \cdot)$ satisfaz os cancelamentos à esquerda e à direita;*

(v) *cada elemento de G aparece apenas uma única vez em cada linha e cada coluna da tabela de Cayley de $(G, .)$*

Demonstração:

$[(i)] \Rightarrow [(ii)]$ e $[(i)] \Rightarrow [(iii)]$ decorrem da definição de quasigrupo. Como em domínios finitos injetividade e sobrejetividade são conceitos equivalentes, obtemos que $[(ii)] \Leftrightarrow [(iii)]$. Ademais, como $[(i)] \Leftrightarrow [(ii)$ e $(iii)]$, obtemos que $[(i)] \Leftrightarrow [(ii)] \Leftrightarrow [(iii)]$.

$[(i)] \Rightarrow [(iv)]$ é sempre válido. Vamos mostrar que $[(i)] \Leftarrow [(iv)]$. Suponha que $(G, \cdot)$ satisfaz o cancelamento à esquerda e à direita, i.e., para todo a, x, $y \in G$ $[a \cdot x = a \cdot y] \Rightarrow [x = y]$ e $[x \cdot a = y \cdot a] \Rightarrow [x = y]$. Assim, $[L_a x = L_a y] \Rightarrow [x = y]$ e $[R_a x = R_a y] \Rightarrow [x = y]$, i.e., $L_a : G \to G$ e $R_a : G \to G$ são injetivas para todo $a \in G$, e consequentemente é um quasigrupo. $[(i)] \Leftrightarrow [(v)]$ é imediato. ■

Utilizando a tabela de Cayley, podemos dar exemplos de quasigrupos que possuem neutros locais à esquerda l_a, l_b distintos e o neutro local à direita r_a é distinto do neutro local à esquerda l_a.

Exemplo 1.1.7. *Sejam $G = \{a, b, c, d, e\}$, $\cdot$ uma operação em G dada pela tabela de Cayley abaixo.*

$\cdot$	a	b	c	d	e
a	b	d	c	e	a
b	e	c	b	a	d
c	a	e	d	c	b
d	c	b	a	d	e
e	d	a	e	b	c

Observe que $l_a = c$, $l_b = d$ *e* $r_a = e$, *com* $c \neq d$ *e* $c \neq e$.

A partir das translações à esquerda e à direita, podemos definir comutatividade, associatividade e elemento neutro.

Definição 1.1.8. *Seja* $(G, \cdot)$ *um magma.* $(G, \cdot)$ *é dito* ***comutativo*** *se, e somente se,* $L_a = R_a$, $\forall\ a \in G$. $(G, \cdot)$ *é dito* ***associativo*** *se, e somente se,* $R_{a \cdot b} = R_b R_a$, $\forall a,\ b \in G$. *Um elemento* $e \in G$ *é chamado de* ***elemento identidade à esquerda*** *(**à direita**) ou* ***elemento neutro à esquerda*** *(**à direita**) de* $(G, \cdot)$ *se, e somente se,* $L_e : G \to G$ $(R_e : G \to G)$ *é a aplicação identidade. Quando* e *é um neutro à esquerda e um neutro à direita,* e *é chamado de* ***elemento identidade*** *ou* ***elemento neutro****.*

Decorre de imediato da definição de magma comutativo e translação à esquerda e à direita que um magma $(G, \cdot)$ é comutativo se, e somente se, $x \cdot y = y \cdot x$, $\forall x,\ y \in G$. Também decorre da definição que e é elemento neutro de um magma $(G, \cdot)$ se, e somente se, $x \cdot e = e \cdot x = x$, $\forall x \in G$. A associatividade foi definida através de translações à direita, mas o mesmo conceito poderia ter sido definido utilizando translações à esquerda.

Lema 1.1.9. *As sentenças abaixo são equivalentes:*

1. $(G, \cdot)$ *é associativo;*
2. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, $\forall x,\ y,\ z \in G$*;*
3. $L_{a \cdot b} = L_a L_b$, $\forall a,\ b \in G$*.*

Demonstração:

$$\begin{aligned}
[R_{y \cdot z} = R_z R_y, \forall y, z \in G] &\Leftrightarrow [R_{y \cdot z} x = R_z R_y x, \forall x, y, z \in G] \\
&\Leftrightarrow [x \cdot (y \cdot z) = R_z x \cdot y = (x \cdot y) \cdot z, \forall x, y, z \in G] \\
&\Leftrightarrow [L_x y \cdot z = L_{x \cdot y} z, \forall x, y, z \in G] \\
&\Leftrightarrow [L_x L_y z = L_{x \cdot y} z, \forall x, y, z \in G]
\end{aligned}$$

■

Chamamos atenção que, neste trabalho, será é mais viável verificar se as funções satisfazem tais propriedades do que trabalhar de forma elementar. Isto é, caso seja necessário verificar se $(G, \cdot)$ possui elemento neutro (por exemplo), analisaremos se existe

$e \in G$ tal que $L_e = R_e = Id$ (Id a função identidade) em vez de analisarmos se $e \cdot x = x \cdot e = x$.

Lema 1.1.10. *Se e e f são elementos neutros à direita e à esquerda respectivamente de um magma $(G, \cdot)$, então $e = f$*

Demonstração:

Como e é neutro à direita, $R_e : G \to G$ é dada por $R_e x = x \cdot e = x$, $\forall x \in G$. Como f é neutro à esquerda, $L_f : G \to G$ é dada por $L_f x = f \cdot x = x$, $\forall x \in G$. Em particular, temos que

$$\begin{cases} f \cdot e = e, \text{ pois } f \text{ é neutro à esquerda de } (G, \cdot) \\ f \cdot e = f, \text{ pois } e \text{ é neutro à direita de } (G, \cdot) \end{cases} \Rightarrow e = f$$

O que implica que $e = f$, pois $f \cdot e$ está unicamente determinado visto que $L_f e = f \cdot e$ possui única imagem. ∎

Decorre da proposição acima o seguinte resultado.

Corolário 1.1.11. *Um magma $(G, \cdot)$ tem no máximo um elemento neutro.*

Demonstração: Suponha que existam dois elementos neutros e_1 e e_1. Em particular, e_1 é uma identidade à esquerda e e_2 é uma identidade à direita. Portanto,

$$e_1 = e_1 \cdot e_2 = e_2.$$

∎

Teorema 1.1.12. *Se $(G, \cdot)$ é um quasigrupo associativo, então $(G \cdot)$ possui um único elemento neutro.*

Demonstração:

Como $G \neq \varnothing$, existe $a \in G$. Decorre do Teorema 1.1.4 que existe $e \in G$ tal que $a \cdot e = a$. Seja $b \in G$ qualquer. Também decorre do Teorema 1.1.4 que existe $y \in G$ tal que $y \cdot a = b$. Portanto,

$$\begin{aligned} R_e b &= b \cdot e &&= (y \cdot a) \cdot e \\ &= y \cdot (a \cdot e) &&= y \cdot a \\ &= b \end{aligned}$$

De modo que $R_e : G \to G$ é a função identidade. O que implica que e é um elemento neutro à direita. Seja $b \in G$ qualquer.

$$\begin{aligned} b \cdot b &= (b \cdot e) \cdot b \\ &= b \cdot (e \cdot b) \end{aligned}$$

Portanto, decorre da lei do cancelamento à esquerda que

$$b \cdot b \;=\; b \cdot (e \cdot b) \;\Rightarrow\; b = e \cdot b \;\Rightarrow\; b = L_e b,$$

i.e., $L_e : G \to G$ é a função identidade. Logo, e é um elemento neutro à esquerda. Como e é elemento neutro à esquerda e à direita, e é neutro. Visto que magmas têm no máximo um elemento neutro, concluímos que e é o único elemento neutro de G. ■

A recíproca do Teorema 1.1.12 não é verdadeira. Veja o exemplo abaixo.

Exemplo 1.1.13. *Sejam $G = \{1, a, b, c, d\}$ e $\cdot$ uma operação em G dada pela tabela de Cayley abaixo.*

$\cdot$	1	a	b	c	d
1	1	a	b	c	d
a	a	c	d	1	b
b	b	d	c	a	1
c	c	b	1	d	a
d	d	1	a	b	c

Observe que $1 \in G$ é o único elemento neutro de $(G, \cdot)$, porém

$$\begin{cases} (a \cdot b) \cdot c = d \cdot c = b \\ a \cdot (b \cdot c) = a \cdot a = c \end{cases}.$$

Como $b \neq c$, $(a \cdot b) \cdot c \neq a \cdot (b \cdot c)$. Portanto $(G\cdot)$ é um quasigrupo que possui um único elemento neutro, porém é não-associativo.

A existência de estruturas com tal propriedade, torna pertinente as seguintes definições:

Definição 1.1.14 (Grupo)**.** *Seja $(G, \cdot)$ um magma. $(G, \cdot)$ é um* ***grupo*** *se, e somente se, $(G, \cdot)$ é um quasigrupo associativo.*

Definição 1.1.15 (Loop)**.** *Seja $(G, \cdot)$ um magma. $(G, \cdot)$ é um* ***loop*** *se, e somente se, $(G, \cdot)$ é um quasigrupo e possui um elemento neutro.*

Como as translações em um quasigrupo são bijeções, podemos definir duas operações denominadas divisão à esquerda e divisão à direita. Tais operações estão associadas às funções inversas das translações. Formalmente temos:

Definição 1.1.16 (Divisão à esquerda (à direita))**.** *Seja $(G, \cdot)$ um quasigrupo. Entende-se por **divisão à esquerda** (**à direita**) a seguinte operação binária:*

$$\begin{array}{rccc} \backslash : & G \times G & \to & G \\ & (x,y) & \mapsto & (L_x)^{-1}y \end{array} \quad \left(\begin{array}{rccc} / : & G \times G & \to & G \\ & (x,y) & \mapsto & (R_y)^{-1}x \end{array} \right)$$

para todo x, $y \in G$.

Observe que dados x, y, $z \in G$. Obtemos que

$$\begin{cases} x\backslash y = z \Leftrightarrow x \cdot z = y \\ x/y = z \Leftrightarrow z \cdot y = x. \end{cases}$$

Notamos que é possível definir de forma alternativa um loop como sendo um conjunto com três operações binárias apropriadamente relacionadas.

Definição 1.1.17 (Loop)**.** *Um **loop** $(G, \cdot, \backslash, /)$ é um conjunto G não vazio dotado de três operações binárias $\cdot$, $\backslash$ e $/$ tais que:*

1. *$a \cdot (a\backslash b) = b$, $a\backslash(a \cdot b) = b$, $\forall a$, $b \in G$;*
2. *$(b/a) \cdot a = b$, $(b \cdot a)/a = b$, $\forall a$, $b \in G$;*
3. *$a\backslash a = b/b$, $\forall a$, $b \in G$.*

Encerramos aqui esta primeira seção com a seguinte equivalência:

Proposição 1.1.18. *A Definição 1.1.15 e a Definição 1.1.17 são equivalentes.*

Demonstração: $(\Leftarrow)$: Para todo $a \in G$ defina $L_a : G \to G$ e $R_a : G \to G$ dadas por $L_a x = a \cdot x$ e $R_a x = x \cdot a$. L_a é bijetiva para todo $a \in G$. Isto é, para todo par $(a, b) \in G \times G$, existe um único $x \in G$ tal que $a \cdot x = b$.

De fato, façamos $x = a\backslash b$. Como $a \cdot (a\backslash b) = b$, por hipótese, obtemos que $a \cdot x = b$. O que prova a existência. Suponha que exista um elemento $x_1 \in G$ tal que $x_1 \neq x$ e $a \cdot x_1 = b$. Note que

$$a \cdot x_1 = b \Rightarrow a\backslash(a \cdot x_1) = a\backslash b.$$

Como por hipótese $a\backslash(a \cdot x_1) = x_1$ e $a\backslash b = x$, obtemos que $x_1 = x$. Absurdo. O que demonstra a unicidade e portanto a bijetividade da translação à esquerda L_a. Como

$a \in G$ foi tomado arbitrariamente, obtemos que L_a é bijetiva para todo $a \in G$. Para mostrar que R_a é bijetiva para todo $a \in G$, o procedimento é análogo.

Visto que para todo $a \in G$, L_a e R_a são funções bijetivas, existem L_a^{-1} e R_a^{-1} que são as funções inversas de L_a e R_a, respectivamente. Observe que $L_a^{-1}b = a\backslash b$ para todo $a,\, b \in G$. De fato, L_a^{-1} satisfaz as condições do item *1* da Definição 1.1.17, i.e.,

$$\begin{cases} a \cdot (L_a^{-1}b) = L_a L_a^{-1} b = b \\ L_a^{-1}(a \cdot b) = L_a^{-1}(L_a b) = b \end{cases} \quad \forall a,\, b \in G.$$

Analogamente, podemos mostrar que para todo $a \in G$, $(R_a)^{-1}$ satisfaz as condições do item *2* da Definição 1.1.17 e, portanto, $R_a^{-1}b = b/a$, para todo $a,\, b \in G$.

Seja $e = a\backslash a = b/b$ para todo $a,\, b \in G$. Seja x um elemento qualquer de G, obtemos que

$$\begin{cases} x \cdot e = x \cdot (x\backslash x) = x \\ e \cdot x = (x/x) \cdot x = x \end{cases}$$

O que implica que e é um elemento neutro que, consequentemente, é único (ver Corolário 1.1.11). Portanto $(G, \cdot)$ é um quasigrupo que possui elemento neutro, i.e., $(G, \cdot)$ é um loop.

$(\Rightarrow)$: Sejam $\backslash$ e $/$ como na Definição 1.1.16. Mostraremos item por item. Sejam $a,\, b \in G$ arbitrários

1. $a \cdot (a\backslash b) = a \cdot ((L_a)^{-1}b) = L_a(L_a)^{-1}b = b,\ \forall a,\ b \in G;$
   $a\backslash(a \cdot b) = a\backslash(L_a b) = (L_a)^{-1}L_a b = b,\ \forall a,\ b \in G.$

2. $(b/a) \cdot a = ((R_a)^{-1}b) \cdot a = R_a(R_a)^{-1}b = b,\ \forall a,\ b \in G;$
   $(b \cdot a)/a = (R_a b)/a = R_a^{-1}(R_a)b = b,\ \forall a,\ b \in G.$

3. Seja e o elemento neutro de $(G, \cdot)$. Portanto, $R_e = L_e = Id$, em que Id é a função identidade. Portanto,

   $$\begin{cases} e/e = R_e^{-1}e = e \\ e\backslash e = L_e^{-1}e = e \end{cases} \quad \Rightarrow e = e/e = e\backslash e.$$

   Sejam $a,\, b \in G$ quaisquer, temos

   $$\begin{cases} a = a \cdot e \\ b = e \cdot b \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a\backslash a = a\backslash(a \cdot e) = L_a^{-1}L_a e = e \\ b/b = (e \cdot b)/b = R_b^{-1}R_b e = e \end{cases}$$

   Decorre das equações acima que

$$e = a\backslash a = b/b,\ \forall a,\ b \in G.$$

■

A Definição 1.1.17 e a Proposição 1.1.18 tem grande relevância. Ao longo do trabalho utilizaremos as propriedades *1.*, *2.* e *3.* desta definição devido à sua forma compacta para obter certos resultados.

1.2 Ódulos e Estruturas Geoodulares

Na presente seção, apresentamos as estruturas algébricas principais do trabalho que são os ódulos e as estruturas geoodulares. Estas estruturas podem ser dadas a variedades diferenciáveis, ver próxima seção. Neste contexto possuem propriedades que serão essenciais para a demonstração de diversos resultados (como a monoassociatividade) ou possuem uma interperteção geométrica forte (como as identidades geoodulares).

Definição 1.2.1 (K-Ódulo)**.** *Sejam G um conjunto não vazio e K um anel com unidade. Dizemos que $(G, \cdot, *)$ é um K-**ódulo** (ou apenas **ódulo** quando K estiver subentendido) se $(G, \cdot)$ é um loop, cujo elemento neutro é e, com uma aplicação*

$$\begin{array}{rccc} *: & G \times K & \to & G \\ & (x, t) & \mapsto & tx = t * x \end{array}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $tx \cdot ux = (t+u)x$, $\forall x \in G$, $\forall t,\ u \in K$ *(monoassociatividade);*
2. $t(ux) = (tu)x$, $\forall x \in G$, $\forall t,\ u \in K$ *(pseudoassociatividade);*
3. $1x = x$, $\forall x \in M$, *em que* $1 \in K$ *é a unidade do anel;*
4. $te = e$, $\forall t \in K$.

Observação 1.2.2. *Se $K = \mathbb{Z}$, então tx é a potência x^t de um elemento $x \in G$. Mais precisamente,*

$$\begin{array}{rcl} x^t & = & \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{t \text{ vezes}},\ \text{se } t > 0 \\ x^0 & = & e \\ x^t & = & \underbrace{x^{-1} \cdot \ldots \cdot x^{-1}}_{|t| \text{ vezes}},\ \text{se } t < 0 \end{array}$$

Pelo item 1 da definição de ódulo, obtemos $x^t \cdot x^u = x^{t+u}$.

Observação 1.2.3. *Se em particular* $(G,\cdot)$ *é um grupo abeliano e* $(G,\cdot,*)$ *satisfaz adicionalmente* $t(x\cdot y) = tx\cdot ty$, $\forall\ t\in K$, $\forall\ x,\ y\in G$, *então* $(G,\cdot,*)$ *é um* K*-módulo. O que justifica o uso do termo "ódulo".*

Proposição 1.2.4. *Seja* $(G,\cdot,*)$ *um* K*-ódulo cujo elemento neutro é* e*, temos que* $0x = e$*, para todo* $x\in G$*, em que* $0\in K$ *é o elemento neutro do grupo abeliano* $(K,+)$*.*

Demonstração:

Da propriedade *1* da Definição 1.2.1 temos que

$$tx\cdot ux = (t+u)x,\ \forall x\in G,\ \forall t,\ u\in K.$$

Em particular, para $t=0$ e $u=1$, obtemos

$$\begin{aligned} 0x\cdot 1x = 1x \ \Rightarrow\ 0x\cdot x &= e\cdot x \\ \Rightarrow\quad 0x &= e. \end{aligned}$$

Nas duas últimas igualdades utilizamos a condição *2* da Definição 1.2.1 e a lei do cancelamento, respectivamente. ■

Definição 1.2.5 (Estrutura Loopuscular)**.** *Sejam* M *um conjunto não vazio,* L *operação ternária definida em* M *que denotaremos por:*

$$L(x,y,z) = L_x^y z = x\cdot_y z,\ \forall x,\ y,\ z\in M.$$

$\mathcal{M} = (M,L)$ *é uma* ***estrutura loopuscular*** *se, e somente se, para todo* $a\in M$, $\mathcal{M}^a = (M,\cdot_a)$ *é um loop cujo elemento neutro é* a*.*

Lema 1.2.6. *Seja* $\mathcal{M} = (M,L)$ *uma estrutura loopuscular. Para todo* $a,\ b\in M$*, temos que* $L_a^a = Id$ *e* $L_b^a a = b$*.*

Demonstração:

Facilmente verificamos que

$$\begin{cases} L_a^a x = a\cdot_a x = x\ \forall x\in M \\ L_b^a a = b\cdot_a a = b \end{cases},$$

pois, a é o elemento neutro de $\mathcal{M}^a$. ■

Definição 1.2.7 (Estrutura Odular)**.** *Sejam* K *um anel com unidade,* (M,L) *uma estrutura loopuscular* ω_t *uma operação binária para todo* $t\in K$*, que denotaremos por:*

$$\omega_t(a,x) = t *_a x = t_a x \qquad \forall a,\ x\in M,\ \forall t\in K.$$

$\mathcal{M} = (M,L,\omega_t)$ *é uma* ***estrutura odular*** *se, e somente se, para todo* $a\in M$, $\mathcal{M}^a = (M,\cdot_a,*_a)$ *é um* K*-ódulo cujo elemento neutro é* a*.*

Definição 1.2.8 (Estrutura Geoodular). *Uma estrutura odular $\mathcal{M}$ é uma* ***estrutura geoodular*** *se para cada a, b, $x \in M$, $t \in K$ as seguintes identidades*

$$\begin{aligned} L^{t_a b}_{u_a b} L^{a}_{t_a b} x &= L^{a}_{u_a b} x \text{ (Primeira Identidade Geoodular)} \\ L^{a}_{b} t_a x &= t_b L^{a}_{b} x \text{ (Segunda Identidade Geoodular)} \end{aligned}$$

são satisfeitas.

1.3 Estruturas Suaves

Como foi comentado na seção anterior, nesta seção apresentaremos como as estruturas algébricas apresentadas naquela seção podem ser dadas a uma variedade diferenciável. Tais estruturas são estruturas suaves (ver Definição 1.3.4) que satisfazem propriedades adequadas para que possamos definir uma operação suave em uma vizinhança de um determinado ponto. Veremos posteriormente que tal operação está fortemente ligada às geodésicas e aos transportes paralelos. Comecemos dando a seguinte

Definição 1.3.1 (Quasigrupo Suave). *Um* ***quasigrupo suave*** *é uma tripla $(M, U, \cdot)$ em que U é um aberto de uma variedade diferenciável M e*

$$\cdot : U \times U \to M$$

é uma aplicação diferenciável tal que

$$\begin{array}{rccc} L_x : & U & \to & L_x(U) \\ & y & \mapsto & x \cdot y \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} R_x : & U & \to & R_x(U) \\ & y & \mapsto & y \cdot x \end{array}$$

são difeomorfismos para todo $x \in U$.

Observação 1.3.2. *Alguns autores, como o L. V. Sabinin, ver* [Sab99] *página 47, usam uma definição um pouco mais geral, na qual*

$$\cdot : M \times M \to M$$

é uma operação parcial. Essa abordagem requer que condições extras sejam acrescentadas à definição a fim de especificar quais elementos de M operam entre si.

Em um quasigrupo suave $(M, U, \cdot)$, dizemos que $e \in U$ é **elemento neutro** se, e somente se,

$$a \cdot e = e \cdot a = a, \forall a \in U.$$

Observe que se existe elemento neutro em um quasigrupo suave, então ele é único. De fato, se existirem e_1, $e_2 \in U$ elementos neutros de um quasigrupo suave $(M, U, \cdot)$, então

$$e_1 = e_1 \cdot e_2 = e_2.$$

Definição 1.3.3 (Loop Suave). *Dizemos que* $\mathcal{M} = (M, U, \cdot)$ *é um* ***loop suave*** *se, e somente se,* $\mathcal{M}$ *é um quasigrupo suave com elemento neutro.*

Definição 1.3.4 (Estrutura Suave). *Uma variedade suave* M *dotada de uma família de operações diferenciáveis parciais é chamada de* ***estrutura suave****.*

Definição 1.3.5 (Ódulo Suave). *Dizemos que* $\mathcal{M} = (M, U, \cdot, I, *)$ *é um* ***ódulo suave*** *se* $(M, U, \cdot)$ *é um loop suave (cujo elemento neutro denotaremos por* e*),* I *é um intervalo aberto contendo* $[0, 1]$*, e*

$$\begin{array}{rccl} *: & I \times U & \to & M \\ & (t, a) & \mapsto & ta = t * a \end{array}$$

é uma aplicação diferenciável satisfazendo:

1. $tx \cdot ux = (t + u)x$*, com* t*,* $u \in I$*,* $x \in U$*, tais que os dois lados da igualdade façam sentido;*

2. $t(ux) = (tu)x$*, com* t*,* $u \in I$*,* $x \in U$*; tais que os dois lados da igualdade façam sentido;*

3. $1x = x$*,* $\forall x \in U$*;*

4. $te = e$*,* $\forall t \in I$*;*

5. $\gamma_a : I \to M$*,* $\gamma_a(t) = ta$*, é um mergulho* $\forall a \in U$;

6. *Se* $\Gamma_a = \{ta, t \in I\}$*, então* $\Gamma_a \cap \Gamma_b \neq \{e\}$ *implica que* $\Gamma_a \subset \Gamma_b$ *ou* $\Gamma_a \supset \Gamma_b$*.*

Uma definição de ódulo puramente algébrica foi dada na página 13, ver Definição 1.2.1. As novas condições, *5* e *6*, que surgem na definição de ódulo suave tem um propósito geométrico. Veremos adiante que curva $\{tb\}_{t \in [0,1]}$ é a "geodésica" que liga e ao ponto b em um ódulo, e a condição *6* servirá para garantir a unicidade dessa geodésica.

Observação 1.3.6. *Podemos generalizar a definição acima substituindo* $\mathbb{R}$ *por uma álgebra* $\mathbb{R}$*-linear* K*. Ao fazer isto, em vez de tomarmos um intervalo aberto* $I \supset [0, 1]$*, tomamos abertos do tipo estrela* $K_a \subset K$ *tais que* 0*,* $1 \in K_a \subset K$*. Além disso, substituímos o item 5 pelo item*

- *5'.* $\gamma_a : K_a \to M$*,* $\gamma_a = ta$*, é um mergulho,* $\forall a \in U$

- *6'. Se* $\Gamma_a = \{ta, t \in K_a\}$ *e* $\Gamma_b = \{tb, t \in K_a\}$ *são subvariedades imersas abertas de* M*, então* $\Gamma_a \cap \Gamma_b \neq \{e\}$ *implica que* $\Gamma_a \subset \Gamma_b$ *ou* $\Gamma_a \supset \Gamma_b$*.*

Neste caso, dizemos que tal estrutura é um K*-ódulo suave. Ver* [Sab99]*, página 51.*

Seja K um anel com unidade. Quando podemos definir para cada ponto da variedade M um K-ódulo suave cujo elemento neutro é este ponto, podemos definir uma estrutura que chamamos de variedade odular (ou variedade k-odular). Mais precisamente, temos a seguinte

Definição 1.3.7 (Operação Diferenciável Parcial (Global))**.** *Seja $\varphi : M \times M \times \ldots \times M :\to M$ uma operação parcial em uma variedade diferenciável M. Se para todo $(a_1, \ldots, a_n)$ no qual φ estiver definida existirem vizinhanças abertas $U_1, \ldots ,U_n$ de $a_1, \ldots ,a_n$ respectivamente tal que*

$$\varphi|_{U_1 \times \ldots \times U_n} : U_1 \times \ldots \times U_n \to M$$

*é uma aplicação diferenciável, então φ é dita uma **operação diferenciável parcial**. Se além disso φ está definida em toda $M \times \ldots \times M$, dizemos que φ é uma **operação diferenciável global**.*

Definição 1.3.8 (Variedade Loopuscular)**.** *Uma estrutura suave $\mathcal{M} = (M, L)$ é dita uma **variedade loopuscular** se*

$$L : M \times M \times M \to M$$

é uma operação diferenciável parcial e para todo $a \in M$, $\mathcal{M}^a = (M, U_a, \cdot_a)$, com $x \cdot_a y = L(x, a, y)$ $\forall x,\ y \in U_a$, é um loop suave cujo elemento neutro é a.

Definição 1.3.9 (Variedade Odular)**.** *Seja $\mathcal{M} = (M, L, (\omega_t)_{t\in\mathbb{R}})$ uma estrutura suave em que $L : M \times M \times M \to M$ é uma operação parcial e $\omega_t : M \times M \to M$ $(t \in \mathbb{R})$ é uma família de operações diferenciáveis parciais. $\mathcal{M}$ é dito uma **variedade odular**, se para todo ponto fixado $a \in M$, existem vizinhança aberta U_a de a e um intervalo aberto $I_a \supset [0, 1]$, tais que $\mathcal{M}_a = (M, U_a, \cdot_a, I_a, *_a)$ é um $\mathbb{R}$-ódulo suave cujo elemento neutro é a e as operações $\cdot_a$ e $*_a$ são dadas por:*

$$\begin{cases} x \cdot_a y = L^a_x y = L(x, a, y) \\ t *_a x = \omega_t(a, x) \end{cases}$$

para todo $x,\ y \in U_a$, $t \in I_a$.

Observamos que a Definição 1.3.9 pode ser generalizada tomando os escalares em uma álgebra $\mathbb{R}$-linear K. Deste modo, para que a definição faça sentido, exigimos que I_a seja um aberto do tipo estrela que contem os elementos 0 e 1.

Definição 1.3.10 (Variedade Geoodular)**.** *Uma variedade odular $\mathcal{M} = (M, L, (\omega_t)_{t\in\mathbb{R}})$ é dita **geoodular** se adicionalmente as seguintes igualdades são satisfeitas:*

$$\begin{array}{lcll} L^{t_a b}_{u_a b} L^a_{t_a b} x & = & L^a_{u_a b} x & \textit{(Primeira Identidade Geoodular)} \\ L^a_b t_a x & = & t_b L^a_b x & \textit{(Segunda Identidade Geoodular)} \end{array},$$

para todos $t,\ u \in \mathbb{R}$, $a,\ b,\ x \in M$ tais que as operações façam sentido.

As identidades geoodulares têm as seguintes interpretações geométricas. A segunda identidade mostra que "geodésicas" $\{t *_a x\}_{t\in\mathbb{R}}$ são levadas em "geodésicas" pela translação à esquerda definida em a, i.e., $L_b^a\{t *_a x\}_{t\in\mathbb{R}} = \{t *_b (L_b^a x)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Ademais, o parâmetro t é preservado. Chamamos atenção que $\{t *_a x\}_{t\in[0,1]}$ é a "geodésica" que liga a a x. Enquanto que a primeira identidade geoodular nos garante que dados a, $t *_a b$, $u *_a b$ pontos da "geodésica" $\{t *_a b\}_{t\in\mathbb{R}}$, então o gráfico abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "L^a_{t_a b}"] \arrow[dr, "L^a_{u_a b}"'] & M \arrow[d, "L^{t_a b}_{u_a b}"] \arrow[dl, phantom, "\bigcirc", near start] \\ & M \end{tikzcd}$$

Além disto, posteriormente veremos que $L_b^a x$ corresponde a um "transporte paralelo" da "geodésica" que liga a e x ao longo da "geodésica" que liga a e b. Assim, a Primeira Identidade Geodular diz que dados os pontos a, $c = t_a b$, $d = u_a b$ pertencentes a uma mesma "geodésica", o transporte paralelo de a para c seguido de outro transporte de c para d é igual ao transporte paralelo de a para d .

Lema 1.3.11. *Seja $\mathcal{M} = (M, L, \omega_t)$ uma variedade geoodular, $(L_b^a)^{-1} = L_a^b$.*

Demonstração:

Como $\mathcal{M}$ é uma variedade geoodular, esta satisfaz a primeira identidade geoodular

$$L^{t_a b}_{u_a b} L^a_{t_a b} x = L^a_{u_a b} x.$$

Em particular, para $t = 1$ e $u = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} L^{1_a b}_{0_a b} L^a_{1_a b} x &= L^b_{0_a b} x &\Rightarrow \quad L_a^b L_b^a &= L_a^a \\ & &\Rightarrow \quad L_a^b \circ L_b^a &= Id. \end{aligned}$$

Para concluir que $(L_b^a)^{-1} = L_a^b$ resta verificar que L_a^b é inversa à direita de L_b^a. Para isto, basta repetir o raciocínio trocando a por b. O que conclui a demonstração. ■

1.4 Campos de Vetores Fundamentais e Ódulos Canônicos

A priori, as variedades diferenciáveis não estão dotadas de uma conexão afim. Portanto, ficamos impossibilitados de definirmos um mapa exponencial nesta estrutura de forma usual. Nesta seção apresentamos o conceito de campos de vetores fundamentais. Ferramenta necessária para definirmos o que vem a ser mapas exponenciais sobre loops suaves. No capítulo seguinte, veremos que sob determinadas condições, este mapa coincide com o mapa exponencial usual encontrado na geometria diferencial.

Definição 1.4.1 (Campos de Vetores Fundamentais)**.** *Seja $\mathcal{M} = (M, U, \cdot)$ um loop suave definido em uma variedade suave M de dimensão n. Um campo de vetores A em U é **fundamental** se*

$$A(x) = (L_x)_{*,e} A(e)$$

para todo $x \in U$, em que $(L_x)_{*,e}$ representa o pushforward de L_x no ponto e (elemento neutro de $\mathcal{M}$).
Em um sistema de coordenadas local $x = (x^1, \ldots, x^n)$, escrevendo $A = A^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ essa equação se torna

$$A^j(x) = \left.\frac{\partial (x \cdot y)^j}{\partial y^i}\right|_{y=e} \cdot A^i(e)$$

Observação 1.4.2. *Os campos fundamentais correspondem aos campos invariantes à esquerda dos grupos de Lie. Porém, a não-associatividade dos loops não nos permite que tenhamos*

$$A(x \cdot y) = (L_x)_{*,y} A(y)$$

para todo x, $y \in M$.

Como a operação $\cdot$ do loop é uma aplicação diferenciável, os campos de vetores fundamentais são diferenciáveis. Analogamente, poderíamos ter definido os campos de vetores fundamentais a partir das translações à direita, obtendo campos B. Restringiremos nosso estudo aos campos A.

Observe que cada $X \in T_eM$ determina um único campo fundamental $X(x)$ em U tal que $X(e) = X$.

Sejam $\mathcal{M} = (M, U, \cdot)$ um loop suave, $X \in T_eM$ e $X(x)$ o campo fundamental tal que $X(e) = X$. Considere a seguinte equação diferencial ordinária

$$\frac{d\varphi}{dt} = X(\varphi(t)), \qquad \varphi(0) = e. \tag{1.1}$$

Obteremos a solução única $\varphi = \varphi(t, X)$, para t em um intervalo aberto (cujo tamanho depende de X)
Afirmação: $\varphi(t, uX) = \varphi(ut, X)$. De fato, seja

$$\varphi : (-\delta, \delta) \to M$$

solução da EDO (1.1) e defina

$$\begin{array}{rccl} h: & (-\frac{\delta}{u}, \frac{\delta}{u}) & \to & M \\ & t & \mapsto & \varphi(ut, X) \end{array}.$$

Note que

$$\begin{cases} h(0) = \varphi(0, X) = \varphi(0) = e \\ \left.\dfrac{dh}{dt}\right|_{t=0} = uX \end{cases},$$

Defina agora

$$\begin{array}{rccc} g: & (-\frac{\delta}{u}, \frac{\delta}{u}) & \to & M \\ & t & \mapsto & \varphi(t, uX) \end{array}.$$

Assim,

$$\begin{cases} g(0) = \varphi(0, X) = \varphi(0) = e \\ \left.\dfrac{dg}{dt}\right|_{t=0} = uX(\varphi(0)) = uX(e) = uX \end{cases}.$$

Pelo teorema de existência e unicidade de EDO, decorre o desejado.

Então, para $t = 1$, obtemos que $\varphi(u, X) = \varphi(1, uX)$.

Definição 1.4.3 (Mapa Exponencial)**.** *Seja* $\varphi = \varphi(t, X)$ *solução da EDO (1.1). Fazendo* $\varphi(u, X) = \varphi(1, uX) = Exp(uX)$*, obtemos uma função exponencial* $u \mapsto Exp(uX)$ *e um* ***mapa exponencial***

$$\begin{array}{rccc} Exp: & T_eM & \to & M \\ & X & \mapsto & ExpX \end{array}$$

Decorre de imediato das definições anteriores que

$$\frac{d(Exp(tX))}{dt} = (L_{Exp(tX)})_{*,e}X, \quad Exp(0) = e. \tag{1.2}$$

De acordo com a propriedade de diferenciabilidade dos loops suaves e do teorema de dependência de soluções para a equação (1.2), as aplicações

$$(t, X) \mapsto Exp(tX), \quad X \mapsto ExpX$$

são suaves. Então,

$$\begin{aligned} X^i &= [(L_e)_{*,e}X]^i \\ &= [(L_{Exp(tX)})_{*,e}X]^i_{t=0} \\ &= \left[\frac{dExp(tX)^i}{dt}\right]_{t=0} \\ &= \sum_j \left[\frac{\partial Exp(tX)^i}{\partial (tX)^j}\right]_{t=0} \left[\frac{d(tX)^j}{dt}\right]_{t=0} \\ &= \sum_j \left[\frac{\partial (Exp\eta)^i}{\partial (\eta)^j}\right]_{\eta=0} X^j. \end{aligned}$$

Como X foi escolhido arbitrariamente, obtemos que

$$\left[\frac{\partial(Exp\eta)^i}{\partial(\eta)^j}\right]_{\eta=0} = \delta_{ij}.$$

O que implica que $(dExp)_0 = Id$. Portanto, decorre do teorema da função inversa que Exp é localmente um difeomorfismo, em particular existe $(Exp)^{-1}$ em uma vizinhança de e.

Se $\mathcal{M} = (M, U, \cdot)$ é um loop suave, então podemos definir em uma vizinhança $U' \subset U$ de e e um intervalo aberto $I \supset [0,1]$ a seguinte operação:

$$t * x = tx = Exp(tExp^{-1}x),\ t \in I,\ x \in U'.$$

tal operação é denominada **operação canônica** de $\mathcal{M}$.

Definição 1.4.4 (Ódulo Canônico)**.** *Seja $(M, U, \cdot)$ um loop suave. Dizemos que $\mathcal{M} = (M, U', \cdot, *)$ é o* ***ódulo canônico*** *do loop suave se $*$ é a operação canônica de $(M, U, \cdot)$.*

Lema 1.4.5. *Seja $Exp : T_eM \to M$ o mapa exponencial definido em e. Então*

$$\left.\frac{d(t*b)}{dt}\right|_{t=0} = (Exp)^{-1}b,$$

em que $t * b = Exp(t(Exp)^{-1}b)$

Demonstração:

Denotando $X = (Exp^{-1}b)$, temos

$$\begin{aligned}\left.\frac{d(t*b)}{dt}\right|_{t=0} &= \left.\frac{d}{dt}(Exp(tX))\right|_{t=0} \\ &= (L_{Exp(tX)})_{*,e}X\Big|_{t=0} \\ &= X\end{aligned}$$

■

Proposição 1.4.6. *Seja $\mathcal{M} = (M, U, \cdot, I, \omega_t)$ um ódulo suave. Então o ódulo canônico do seu loop $(M, U, \cdot)$ coincide com $\mathcal{M}$*

Demonstração:

Denotaremos por $tb = \omega_t(b)$ o produto por escalar vindo do ódulo e por $t * b = Exp(tExp^{-1}b)$ o produto por escalar vindo do ódulo canônico do loop. Pela definição da aplicação Exp, temos:

$$\frac{d(Exp(tExp^{-1}b))}{dt} = (L_{Exp(tExp^{-1}b)})_{*,e}Exp^{-1}b \ \Rightarrow\ \frac{d(t*b)}{dt} = (L_{t*b})_{*,e}Exp^{-1}b.$$

Decorre do Lema 1.4.5 que

$$Exp^{-1}b = \left.\frac{d(t*b)}{dt}\right|_{t=0}$$

assim,

$$\frac{d(t*b)}{dt} = (L_{t*b})_{*,e}\left.\frac{d(t*b)}{dt}\right|_{t=0}. \tag{1.3}$$

Ademais, $0*b = e$. Portanto, $\varphi(t) = t*b$ é solução da EDO

$$\frac{d(\varphi(t))}{dt} = (L_{\varphi(t)})_{*,e}\left.\frac{d(\varphi(t))}{dt}\right|_{t=0}, \qquad \varphi(0) = e \tag{1.4}$$

Seja $\xi = \left.\frac{d(tb)}{dt}\right|_{t=0}$. Pela definição de ódulo, temos:

$$tb \cdot ub = (t+u)b,$$

portanto,

$$\left.\frac{d(tb \cdot ub)}{du}\right|_{u=0} = \left.\frac{d(t+u)b}{du}\right|_{u=0}. \tag{1.5}$$

Note que

$$\begin{aligned} \left.\frac{d(tb \cdot ub)}{du}\right|_{u=0} &= \left.\frac{dL_{tb}ub}{du}\right|_{u=0} \\ &= (L_{tb})_{*,e}\left.\frac{d(ub)}{du}\right|_{u=0} \\ &= (L_{tb})_{*,e}\xi \\ &= (L_{tb})_{*,e}\left.\frac{d(tb)}{dt}\right|_{t=0}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left.\frac{d(t+u)b}{du}\right|_{u=0} &= \left.\frac{d(t+u)b}{d(t+u)}\right|_{t+u=t} \cdot \left.\frac{d(t+u)}{du}\right|_{u=0} \\ &= \left.\frac{(\tilde{t}b)}{d\tilde{t}}\right|_{\tilde{t}=t} \cdot 1 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Decorre das equações (1.5), (1.6) e (1.7) que

$$\frac{d(tb)}{dt} = (L_{tb})_{*,e}\left.\frac{d(tb)}{dt}\right|_{t=0}$$

Decorre da Proposição 1.2.4 que $0b = e$. Portanto, $\varphi(t) = tb$ é solução da EDO (1.4). Pelo teorema de existência e unicidade, temos que $t*b = tb$. ■

Em uma variedade loopuscular $\mathcal{M} = (M, L)$, para cada $a \in M$ nós temos as seguintes equações definidas nos loops suaves $\mathcal{M}^a = (M, U_a, \cdot_a)$:

$$\frac{d(Exp_a(tX))}{dt} = (L^a_{Exp_a(tX)})_{*,a}X, \quad Exp_a(0) = a.$$

Além disso, podemos definir a aplicação exponencial

$$Exp_a : T_aM \to M.$$

Tal aplicação é invertível em uma vizinhança de 0. Ademais, Exp_a é diferenciável e $(Exp_a)_{*,0}$=Id, em que Id é a aplicação identidade.

Adicionalmente, para todo $a \in M$ podemos definir a seguinte operação diferenciável parcial:

$$t_ax = Exp_a(tExp_a^{-1}x),\ \forall x \in M,\ t \in \mathbb{R} \text{ de modo que } t_ax \text{ faça sentido.}$$

Capítulo 2

Conexões Afins e Estruturas Loopusculares

No presente capítulo, dentre os conceitos apresentados podemos destacar os seguintes: Conexão Tangente Afim de uma Variedade Geoodular e a Estrutura Geoodular Natural de (M, ∇), em que (M, ∇) denota uma variedade M dotada de uma conexão afim ∇. Posteriormente, apresentaremos a demonstração de que dada (M, ∇), a conexão tangente afim $\overline{\nabla}$ da estrutura geoodular natural de (M, ∇) coincide com a conexão afim ∇ de M. Ademais, a Variedade Geoodular $\mathcal{M} = (M, L, (\omega_t)_{t\in\mathbb{R}})$ e a Estrutura Geoodular Natural de (M, ∇) coincidem, i.e., estes dois conceitos são equivalentes.

A principal referência utilizada na elaboração deste capítulo foi o livro [Sab99].

2.1 Conexões Tangentes Afins de Estruturas Loopusculares

Na presente seção, podemos destacar os seguintes conceitos que são apresentados: conexões tangentes afins e transformações de holonomia elementar de uma estrutura loopuscular (M, L). A partir destes, apresentamos propriedades que as variedades loopusculares suaves herdam naturalmente de uma estrutura loopuscular.

Proposição 2.1.1. *Seja $\mathcal{M} = (M, L)$ uma estrutura loopuscular definida em uma variedade diferenciável M. Então para cada curva suave $\gamma(t)$, com $\gamma(0) = a$, $\gamma'(t) = X_a$, $X_a \in T_aM$ e para todo campo diferenciável de vetores Y em uma vizinhança de a, temos*

$$\frac{d}{dt}(L^a_{\gamma(t)})^{-1}_{*,a}Y_{\gamma(t)}\bigg|_{t=0} = \nabla_{X_a}Y,$$

*em que ∇ é uma conexão afim. Tal conexão afim é chamada de **conexão tangente afim**.*

Demonstração:

Para tal, vamos mostrar que $\left.\dfrac{d}{dt}(L^a_{\gamma(t)})^{-1}_{*,a}Y_{\gamma(t)}\right|_{t=0}$ satisfaz todas as condições suficientes para que um operador binário atuando no conjunto dos campos diferenciáveis em M, $\mathfrak{X}(M)$, seja uma conexão afim.

Sejam X, $Z \in \mathfrak{X}(M)$, $x(t)$, $z(t)$ curvas suaves com $x(0) = z(0) = a$ e $x'(t) = X$, $z'(t) = Z$, respectivamente.

Denotando $F(x, z) = x \cdot_a z = L^a_x(z) = R^a_z(x)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(x(t) \cdot_a z(t)) &= \frac{d}{dt}F(x(t), z(t)) \\
&= F_x(x(t), z(t))x'(t) + F_z(x(t), z(t))z'(t) \\
&= dR^a_z(x'(t)) + dL^a_x(z'(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}(x(t) \cdot_a z(t))\right|_{t=0} &= dR^a_a(x'(0)) + dL^a_a(z'(0)) \\
&= x'(0) + z'(0) \\
&= X_a + Z_a
\end{aligned}$$

Além disso,

$$x(0) \cdot_a z(0) = a \cdot_a a = a.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
[\nabla_{X+Z}Y]_a &= [\nabla_{X_a+Z_a}Y] \\
&= \left.\frac{d}{dt}(L^a_{x(t)\cdot_a z(t)})^{-1}_{*,a}Y_{x(t)\cdot_a z(t)}\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{d}{dt}(L^a_{x(t)\cdot_a a})^{-1}_{*,a}Y_{x(t)\cdot_a a}\right|_{t=0} + \left.\frac{d}{dt}(L^a_{a\cdot_a z(t)})^{-1}_{*,a}Y_{a\cdot_a z(t)}\right|_{t=0} \\
&= [\nabla_X Y]_a + [\nabla_Z Y]_a\,.
\end{aligned}$$

Seja $f \in C^\infty(M)$, a curva

$$\varphi(t) = x\underbrace{\left(\int_0^t f(x(t))\right)}_{\tilde{t}(t)}$$

é tal que $\varphi(0) = a$ e $\varphi'(t) = fX$. Logo,

$$
\begin{aligned}
[\nabla_{fX}Y]_a &= [\nabla_{fX_a}Y] \\
&= \frac{d}{dt}(L^a_{\varphi(t)})^{-1}_{*,a}Y_{\varphi(t)}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(L^a_{x(\tilde{t})})^{-1}_{*,a}Y_{x(\tilde{t})}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{d\tilde{t}}(L^a_{x(\tilde{t})})^{-1}_{*,a}Y_{x(\tilde{t})} \cdot \frac{d\tilde{t}}{dt}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{d\tilde{t}}(L^a_{x(\tilde{t})})^{-1}_{*,a}Y_{x(\tilde{t})} \cdot f(x(t))\Big|_{t=0} \\
&= [f(\nabla_X Y)]_a
\end{aligned}
$$

O que mostra a linearidade de $\nabla_X Y$ em X. Ademais,

$$
\begin{aligned}
[\nabla_X(Y+Z)]_a &= [\nabla_{X_a}(Y+Z)] \\
&= \frac{d}{dt}(L^a_{x(t)})^{-1}_{*,a}(Y_{x(t)}+Z_{x(t)})\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(L^a_{x(t)})^{-1}_{*,a}(Y_{x(t)})\Big|_{t=0} + \frac{d}{dt}(L^a_{x(t)})^{-1}_{*,a}(Z_{x(t)})\Big|_{t=0} \\
&= \nabla_{X_a}Y + \nabla_{X_a}Z \\
&= [\nabla_X Y]_a + [\nabla_X Z]_a .
\end{aligned}
$$

Por fim,

$$
\begin{aligned}
[\nabla_X(fY)]_a &= \nabla_{X_a}(fY) \\
&= \frac{d}{dt}(L^a_{x(t)})^{-1}_{*,a}f(x(t))Y_{x(t)}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}f(x(t))(L^a_{x(t)})^{-1}_{*,a}Y_{x(t)}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}f(x(t))\Big|_{t=0} Y_a + f(a)\,\frac{d}{dt}(L^a_{x(t)})^{-1}_{*,a}Y_{x(t)}\Big|_{t=0} \\
&= X_a f Y_a + f(a)(\nabla_{X_a}Y) \\
&= [(Xf)Y]_a + [f(\nabla_X Y)]_a
\end{aligned}
$$

■

Proposição 2.1.2. *Introduzindo coordenadas locais $x^1, \ldots, x^n$ em uma vizinhança de $a \in M$, nós obtemos as componentes dos símbolos de Christoffel Γ da conexão ∇.*

$$
\nabla_{(\partial_i)_a}(\partial_j) = \Gamma^l_{ij}(a)(\partial_l)_a, \quad \Gamma^l_{ij}(a) = -\left[\frac{\partial^2(x \cdot_a y)^l}{\partial x^i \partial y^j}\right]_{x=y=a}
$$

em que $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demonstração:

De fato, trabalhando em coordenadas locais, temos $x = (x^1, \ldots, x^n)$, com $a = 0 = (0, \ldots, 0)$. Sejam

$$\begin{cases} \gamma(t) = (0, \ldots, 0, \underbrace{t}_{i}, 0, \ldots, 0,) \\ \psi(s) = (0, \ldots, 0, \underbrace{s}_{j}, 0, \ldots, 0,) \end{cases}$$

temos que

$$\begin{cases} \gamma(0) = 0 = a, & \gamma'(0) = \partial_i \\ \psi(0) = 0 = a, & \psi'(0) = \partial_j \end{cases}.$$

Ora,

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^2(x \cdot y)}{\partial x^i \partial y^j}\right|_{x=y=a} &= \left.\frac{\partial^2(\gamma(t) \cdot \psi(s))}{\partial t \partial s}\right|_{t=s=0} \\ &= \left.\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} L^a_{\gamma(t)} \varphi(s)\right|_{t=s=0} \\ &= \left.\frac{d}{dt}(L^a_{\gamma(t)})_{*,a}\partial_j\right|_{t=s=0} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Note que,

$$(L^a_{\gamma(t)})^{-1}_{*,a}(L^a_{\gamma(t)})_{*,a}\partial_j = \partial_j \Rightarrow \frac{d}{dt}\left((L^a_{\gamma(t)})^{-1}_{*,a}(L^a_{\gamma(t)})_{*,a}\partial_j\right)\Big|_{t=0} = 0$$

portanto,

$$\frac{d}{dt}\,(L^a_{\gamma(t)})^{-1}_{*,a} \cdot (L^a_a)_{*,a}\partial_j\big|_{t=0} + (L^a_a)^{-1}_{*,a} \cdot \frac{d}{dt}\,(L^a_{\gamma(t)})_{*,a}\partial_j\big|_{t=0} = 0.$$

Assim

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j\big|_a = \left.\frac{d}{dt}(L^a_{\gamma(t)})^{-1}_{*,a}\partial_j\right|_{t=0} = -\left.\frac{d}{dt}(L^a_{\gamma(t)})_{*,a}\partial_j\right|_{t=0} \tag{2.2}$$

Decorre então das equações (2.1) e (2.2) que

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j\big|_a = -\left.\frac{\partial^2(x \cdot y)}{\partial x^i \partial y^j}\right|_{x=y=a}$$

■

A seguir, apresentamos o conceito de holonomia que vem a ser uma ferramenta poderosa para obtermos variedades geodulares.

Definição 2.1.3 (Holonomia)**.** *Seja $\mathcal{M}$ uma estrutura loopuscular. A operação*

$$h(a, b, c; x) = h^a(b, c)x = (L^a_c)^{-1} L^b_c L^a_b x$$

é denominada ***operação de holonomia elementar****. A transformação*

$$h^a(b, c) = (L^a_c)^{-1} L^b_c L^a_b$$

é chamada de ***transformação de holonomia elementar****.*

Definição 2.1.4 (Curvatura Nula). *Seja $\mathcal{M} = (M, L)$ uma estrutura loopuscular. Dizemos que $\mathcal{M}$ tem curvatura nula se, e somente se,*

$$L_c^a = L_c^b \circ L_b^a.$$

Decorre da Definição (2.1.3) e da Definição (2.1.4) que $\mathcal{M}$ tem curvatura nula se, e somente se, $h^a(b, c) = Id$.

Proposição 2.1.5. *Seja $\mathcal{M} = (M, L)$ uma estrutura loopuscular. $\mathcal{M}$ tem curvatura nula se, e somente se, $x \cdot_y (L_z^y)^{-1} w = x \cdot_z w \ \forall x,\ y,\ z,\ w \in M$.*

Demonstração:

De fato,

$$\begin{array}{rclcrcl} L_x^y & = & L_x^z \circ L_z^y & \Leftrightarrow & L_x^y \circ (L_z^y)^{-1} & = & L_x^z \\ & & & \Leftrightarrow & L_x^y \circ (L_z^y)^{-1} w & = & L_x^z w \\ & & & \Leftrightarrow & x \cdot_y (L_z^y)^{-1} w & = & x \cdot_z w \end{array}$$

■

O próximo resultado nos garante que todo loop suave gera de forma única uma variedade loopuscular de curvatura nula.

Teorema 2.1.6. *Todo loop suave $(M, U, \cdot)$, cujo elemento neutro denotaremos por e, gera de maneira única uma variedade loopuscular de curvatura nula, $\mathcal{U} = (U, L)$, tal que $L(x, e, y) = x \cdot y$.*

Demonstração:

Seja U como acima e defina a operação parcial

$$\begin{array}{rrcl} L: & U \times U \times U & \to & U \\ & (x, a, y) & \mapsto & x \cdot (L_a)^{-1} y \end{array}.$$

Afirmamos que $\mathcal{U} = (U, L)$ é uma variedade loopuscular. De fato, seja $a \in U$ qualquer, vamos mostrar que $\mathcal{U}^a = (U, U_a, \cdot_a)$ é um loop suave cujo elemento neutro é a, em que $x \cdot_a y = L_x^a y = L(x, a, y)$ e $U_a = U \cap L_a(U)$.

L^a_x é bijetiva, $\forall x \in U_a$. De fato, $(L^a_x)^{-1} = (L^x_a)$:

$$\begin{aligned}
L^x_a L^a_x y &= L^x_a(x \cdot (L_a^{-1}))y \\
&= a \cdot (L_x)^{-1}[x \cdot (L_a)^{-1}]y \\
&= a \cdot (L_x)^{-1} L_x (L_a)^{-1} y \\
&= L_a (L_x)^{-1} L_x (L_a)^{-1} y \\
&= L_a L_a^{-1} y \\
&= y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L^a_x L^x_a y &= L^a_x(a \cdot (L_x)^{-1})y \\
&= x \cdot (L_a)^{-1}[L_a (L_x)^{-1}]y \\
&= L_x (L_a)^{-1}[L_a (L_x)^{-1}]y \\
&= L_x L_x^{-1} y \\
&= y.
\end{aligned}$$

Naturalmente, definimos translação à direita $R^a_y x = L^a_x y = x \cdot (L_a)^{-1} y$, para todo x, $y \in U_a$. Note que $R^a_y = R_{a\backslash y}$ é uma bijeção. Concluímos então que L^a_x e R^a_y são bijeções para todo x, $y \in U_a$. Resta mostrar que a é elemento neutro de $\mathcal{U}^a$. De fato,

$$\begin{aligned}
L(a, a, x) &= a \cdot (L_a)^{-1} x \\
&= L_a (L_a)^{-1} x \\
&= x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(x, a, a) &= x \cdot (L_a)^{-1} a \\
&= x \cdot e \\
&= x
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{U}^a$ é um loop. Como tomamos $a \in U$ arbitrariamente, obtemos que $\mathcal{U}^a$ é um loop $\forall a \in U$, i.e., $\mathcal{U}$ é uma estrutura loopuscular. $\mathcal{U}$ tem curvatura nula. Afinal, $L^y_x a = L^z_x \circ L^y_z a$, $\forall$ x, y, z $a \in U$, tal que as operações façam sentido. De fato,

$$\begin{aligned}
L^z_x \circ L^y_z a &= L^z_x(z \cdot (L_y)^{-1} a) \\
&= x \cdot (z \cdot (L_z)^{-1} (L_y)^{-1} a)) \\
&= x \cdot (L_z (L_z)^{-1} (L_y)^{-1} a)) \\
&= x \cdot (L_y)^{-1} a \\
&= L^y_x a
\end{aligned}$$

Mostremos agora que $\mathcal{U}$ é a única variedade loopuscular de curvatura nula gerada pelo loop $(M, U, \cdot)$. Suponha que $\mathcal{U}' = (U, L')$ seja uma variedade loopuscular com curvatura nula gerada por $(M, U, \cdot)$ tal que $L'(x, e, y) = x \cdot y$. Isto é,

$$\begin{array}{rccl} L': & U \times U \times U & \to & U \\ & (x, a, y) & \mapsto & L'(x, a, y) = L'^{a}_{x} y = x \cdot_a y \end{array}$$

é uma operação parcial que satisfaz $x \cdot_a y = x \cdot_z (L'^{z}_{a})^{-1} y$, ver Proposição 2.1.5, para todo x, y, z, $a \in U$ tais que a operação faça sentido. Em particular, para $z = e$, temos:

$$L'(x, a, y) = x \cdot_a y = x \cdot (L'_a)^{-1} y = x \cdot (L_a)^{-1} y = L(x, a, y),$$

pois $L(x, e, y) = L'(x, e, y)$, para todo x, $y \in U$ tal que $x \cdot y$ está bem definido. Portanto, $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$. O que conclui a demonstração. ∎

2.2 Estrutura Geoodular Natural de uma Variedade com Conexão Afim

Na presente seção, apresentamos o conceito denominado Estrutura Geoodular Natural. Além disso, apresentamos a demonstração de que tal estrutura coincide com a variedade geoodular cujo todos os ódulos são canônicos. Iniciamos o nosso estudo, definindo duas operações diferenciáveis parciais em M que dará a esta variedade uma estrutura de variedade geoodular.

Seja ∇ uma conexão afim de uma variedade suave M. Definimos em (M, ∇) as seguintes operações parciais.

$$\begin{aligned} L(x, y, z) &= L^y_x z = x \cdot_y z := exp_x \circ \tau^y_x \circ (exp_y)^{-1} z \\ \omega_t(y, z) &= t_y z := exp_y(t(exp_y)^{-1} z) \end{aligned} \tag{2.3}$$

em que exp_x é o mapa exponencial em x, $\tau^y_x : T_y M \to T_x M$ denota o transporte paralelo ao longo de uma geodésica que liga y a x. Note que podemos tomar uma vizinhança de y tal que esta geodésica seja única. Ademais, decorre do teorema de dependência diferenciável com respeito às condições iniciais que as as operações definidas acima são diferenciáveis.

Observação 2.2.1. *Chamamos atenção que as exp_x e Exp_x denotam funções distintas. O mapa exponencial da variedade (M, ∇) será denotado por exp_x. Enquanto que o mapa exponencial de um loop suave $(M, U, \cdot)$ dado como na Definição 1.4.3, página 20, será denotado por Exp_x. Sob determinadas hipóteses, veremos que estes mapas coincidem. Ver Teorema 2.2.4, página 35.*

Lema 2.2.2. *Sejam (M, ∇) uma variedade com uma conexão afim, x, $y \in M$ e τ^y_x o transporte paralelo ao longo da geodésica que liga y a x. Obtemos que $(L^y_x)_{*,y} = \tau^y_x$.*

Demonstração:

De acordo com nossas hipóteses,

$$L(x,y,z) = exp_x \tau_x^y (exp_y)^{-1} z$$

é diferenciável. Além disso, decorre da linearidade de τ_x^y, que

$$(L_x^y)_{*,y} = (exp_x)_{*,0} \circ \tau_x^y \circ (exp_y^{-1})_{*,y}.$$

Visto que

$$(exp_x)_{*,0} = Id \quad \text{e} \quad (exp_y)_{*,y}^{-1} = Id$$

obtemos, $(L_x^y)_{*,y} = \tau_x^y$. ■

Teorema 2.2.3. *Sejam (M,∇) uma variedade diferenciável com conexão afim, L, ω_t operações diferenciais parciais dadas por:*

$$\begin{array}{lllll} L(x,y,z) & = & x \cdot_y z & = & exp_x \circ \tau_x^y \circ (exp_y)^{-1} z \\ \omega_t(y,z) & = & t_y z & = & exp_y(t(exp_y)^{-1} z). \end{array} \tag{2.4}$$

*Então, $\mathcal{M} = (M, L, (\omega_t)_{t\in\mathbb{R}})$ é uma variedade geoodular. Tal variedade é chamada de **estrutura geoodular natural** de (M,∇).*

Demonstração:

Para demonstrar o desejado, devemos mostrar que $\mathcal{M}$ é uma variedade odular que satisfaz as identidades geoodulares. Assim, seguiremos o seguinte roteiro:

- Fixado um $a \in M$, mostraremos que $\mathcal{M}^a$ é um loop suave, i.e, $\mathcal{M}$ é uma variedade loopuscular;
- Fixado um $a \in M$, mostraremos que $\mathcal{M}^a$ é um ódulo suave, ver Definição 1.3.5, concluindo que $\mathcal{M}$ é uma variedado odular;
- Por fim, mostraremos que $\mathcal{M}$ satisfaz as identidades geoodulares.

Mostremos que para qualquer $a \in M$ fixado, existe U_a tal que $(M, U_a, \cdot_a)$ é um loop suave cujo é elemento neutro é a. De fato, defina o mapa

$$\begin{array}{rlcl} f: & U \times U \subset M \times M & \to & M \\ & (x,y) & \mapsto & L_x^a y \end{array}$$

em que U é uma vizinhança de a tal que exp_x é um difeomorfismo local para todo $x \in U$. Note que escrevendo x e y em coordenadas locais $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, \ldots, y^n)$ obtemos:

$$\begin{array}{rcl} df(x,y) & = & \left(\dfrac{\partial}{\partial x^j}(exp_x \tau_x^0 (exp_0)^{-1} y)^i \middle| \dfrac{\partial}{\partial y^j}(exp_x \tau_x^0 (exp_0)^{-1} y)^i \right) \\ df(0,0) & = & \left(\dfrac{\partial}{\partial x^j}(exp_x \tau_x^0 (exp_0)^{-1} 0)^i \middle| \dfrac{\partial}{\partial y^j}(exp_0 \tau_0^0 (exp_0)^{-1} y)^i \right), \\ & = & (I_n | I_n) \end{array}$$

em que I_n é a matriz identidade de ordem n. Fixado $x \in M$, defina

$$f_x = f|_{\{x\}\times\mathbb{R}^n} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & M \\ y & \mapsto & L_x^a y \end{array}.$$

Ora, $df(0,y) = ([*]|I_n)$ em que $[*]$ é uma matriz invertível para y em uma vizinhança de 0, portanto $df(0,y)$ é sobrejetiva. Decorre do teorema da função inversa que $df_x(y)$ é um isomorfismo. Consequentemente, existe vizinhança aberta $\widetilde{V_a}$ de 0 tal que $f_x|_{\widetilde{V_a}} : \widetilde{V_a} \to f_x(\widetilde{V_a})$ é um difeomorfismo. Portanto, $L_x^a : V_a \to L_x^a(V_a)$ é um difeomorfismo, em que $\varphi(\widetilde{V_a}) = V_a$ e φ é uma carta de M com $\varphi(0) = a$.

Analogamente, fixando y defina

$$g_y = f|_{\mathbb{R}^n\times\{y\}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & M \\ x & \mapsto & R_y^a x = L_x^a y \end{array}.$$

Ora, $df(x,0) = (I_n|*)$ em que $[*]$ é uma matriz invertível em uma vizinhança de 0, portanto $df(x,0)$ é sobrejetiva. Decorre do teorema da função inversa que $dg_y(x)$ é um isomorfismo. Consequentemente, existe vizinhança aberta $\widetilde{W_a}$ de 0 tal que $g_y|_{\widetilde{W_a}} : \widetilde{W_a} \to g_y(\widetilde{W_a})$ é um difeomorfismo. Portanto, $R_y^a : W_a \to R_y^a(W_a)$ é um difeomorfismo, em que $\varphi(\widetilde{W_a}) = W_a$.

Assim, $U_a = V_a \cap W_a$ é uma vizinhança aberta de $a \in M$ tal que

$$\begin{cases} L_x^a : U_a \to L_x^a(U_a) \\ R_x^a : U_a \to R_x^a(U_a) \end{cases}$$

são difeomorfismos.

Facilmente verificamos que $a \in M$ é elemento neutro de $(M, U_a, \cdot_a)$. De fato,

$$\begin{aligned} L(x,a,a) &= x \cdot_a a \\ &= exp_x \circ \tau_x^a \circ (exp_a)^{-1} a \\ &= exp \circ \tau_x^a(0_a), \quad 0_a \in T_aM \\ &= exp_x(0_x), \quad 0_x \in T_xM \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(a,a,y) &= a \cdot_a y \\ &= exp_a \circ \tau_a^a \circ (exp_a)^{-1} y \\ &= exp_a \circ (exp_a)^{-1} y \\ &= y. \end{aligned}$$

Portanto, $(M, U_a, \cdot_a)$ é um loop suave.

Mostremos agora que fixado $a \in M$, $\mathcal{M}^a = (M, U_a, \cdot_a, \mathcal{I}_a, *_a)$ é um ódulo suave.

A operação $\omega_t(a,x) = t *_a x = t_a x$ é diferenciável pois é composta de funções diferenciáveis.

Mostremos agora que existe $\mathcal{I}_a \supset [0,1]$, tal que se $x \in U_a$, então $\omega_t(a,x)$ está definida para todo $t \in \mathcal{I}_a$. Note que

$$\begin{aligned}
\omega_0(a,x) &= exp_a(0(exp_a)^{-1}x) \\
&= exp_a(0) \\
&= a \\
\\
\omega_1(a,x) &= exp_a(1(exp_a)^{-1}x) \\
&= exp_a((exp_a)^{-1}x) \\
&= x
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Como U_a é vizinhança normal de a, visto que exp_a^{-1} está bem definido em U_a, e $\{\omega_t(a,x)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é a geodésica que passa por a e x, então $\omega_t(a,x)$ está bem definida $\forall x \in U_a$, $\forall x \in U_a$, $\forall t \in [0,1]$. Tomando uma vizinhança aberta $U'_a \subset U_a$, se necessário, podemos extender $\omega_t(a,x)$ a um aberto $\mathcal{I}_a$ de modo que esta aplicação esteja definida para todo $x \in U'_a$, para todo $t \in \mathcal{I}_a$. Verifiquemos item por item da Definição 1.3.5 (ver página 16):

1. $t_a x \cdot u_a x = (t+u)_a x$, com t, $u \in \mathcal{I}_a$, $x \in U_a$.
   De fato, definindo $\varphi(u) = t_a x \cdot u_a x$, temos

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= t_a x \cdot u_a x \\
&= exp_{t_a x} \circ \tau^a_{t_a x} \circ (exp_a)^{-1} u_a x \\
&= exp_{t_a x} \circ \tau^a_{t_a x} \circ (exp_a)^{-1} exp_a(u(exp_a)^{-1}x) \\
&= exp_{t_a x}(u\tau^a_{t_a x}(exp_a)^{-1}x)
\end{aligned}$$

   Deste modo, $\varphi'(u) = (L^a_{\varphi(u)})_{*,a}(exp_a)^{-1}x)$. Portanto, decorre do Lema (2.2.2)

$$\begin{cases} \varphi(0) = t_a x \\ \varphi'(0) = (L^a_{t_a x})_{*,a}(exp_a)^{-1} = \tau^a_{t_a x}(exp_a)^{-1} \end{cases}$$

   Por outro lado, definindo $\psi(u) = (t+u)_a x$, obtemos

$$\psi(u) = exp_a((t+u)(exp_a)^{-1}x).$$

   Assim, $\psi'(u) = (L^a_{\varphi(u)})_{*,a}(exp^a)^{-1}x$. Decorre também do Lema (2.2.2) que

$$\begin{cases} \psi(0) = exp_a(t(exp_a)^{-1}x) = t_a x \\ \psi'(0) = (L^a_{\varphi(0)})_{*,a}(exp^a)^{-1}x = \tau^a_{t_a x}(exp_a)^{-1}x \end{cases}$$

   Assim, $\varphi(0) = \psi(0)$ e $\varphi'(0) = \psi'(0)$ o que implica que $\varphi(u) = \psi(u)$ (pois $\varphi(u)$ e $\varphi(u)$ descrevem geodésicas), i.e. $t_a x \cdot u_a x = (t+u)_a x$

2. $t_a(u_a x) = (tu)_a x$, com t, $u \in \mathcal{I}_a$, $x \in U_a$. De fato,

$$\begin{aligned} t_a(u_a x) &= t_a(exp_a(u(exp_a)^{-1})x) \\ &= exp_a(t(exp_a)^{-1}exp_a(u(exp_a)^{-1})x) \\ &= exp_a(tu(exp_a)^{-1}x) \\ &= (tu)_a x \end{aligned}$$

3. $1 *_a x = x$, $\forall x \in U_a$. De fato,

$$\begin{aligned} 1 *_a x &= exp_a(1(exp_a)^{-1})x \\ &= exp_a((exp_a)^{-1})x \\ &= x. \end{aligned}$$

4. $t_a a = a$ $\forall t \in \mathcal{I}_a$. De fato,

$$\begin{aligned} t_a a &= exp_a(t(exp_a)^{-1}a) \\ &= exp_a(t0) \\ &= exp_a(0) \\ &= a. \end{aligned}$$

5. Fixe $x \in U_a$ e seja $\gamma_x : \mathcal{I}_a \to M$, $\gamma_x(t) = \omega_t(a, x)$. Note que $\gamma_x(t)$ é uma geodésica que passa por a e x (ver equações (2.5)). Consequentemente, γ_x é um merguho para todo $x \in U_a$.

6. Sejam $\gamma_x(t)$ e $\gamma_{\widehat{x}}(t)$ geodésicas dadas por:

$$\begin{cases} \gamma_x(t) = \omega_t(a, x),\ t \in \mathcal{I}_a,\ x \in U_a \\ \gamma_{\widehat{x}}(t) = \omega_t(a, \widehat{x}),\ t \in \mathcal{I}_a,\ \widehat{x} \in U_a \end{cases}.$$

Defina $\Gamma_x = \{\gamma_x(t); t \in \mathcal{I}_a\}$ e $\Gamma_{\widehat{x}} = \{\gamma_{\widehat{x}}(t); t \in \mathcal{I}_a\}$. Tais curvas, $\gamma_x(t)$ e $\gamma_{\widehat{x}}(t)$, são geodésicas que passam por a e x, e a e $\widehat{x}$, respectivamente. Suponha que $\Gamma_x \cap \Gamma_{\widehat{x}} \neq \{a\}$, i.e., que existe $z \in \Gamma_x \cap \Gamma_{\widehat{x}}$, com $z \neq a$.
Digamos que $z = \gamma_x(t_0) = \gamma_{\widehat{x}}(\widehat{t_0})$, para algum $t_0 \in \mathcal{I}_a$ e $\widehat{t_0} \in \mathcal{I}_a$. Como x, y, $z \in U_a$, U_a vizinhança normal de a, temos que

$$\Gamma_{x_{t_0}} = \Gamma_{\widehat{x}_{\widehat{t_0}}}, \tag{2.6}$$

em que

$$\begin{cases} \Gamma_{x_{t_0}} = \{\gamma_x(t); t \in \mathcal{I}_a \text{ e } t \leq t_0\} \\ \Gamma_{\widehat{x}_{\widehat{t_0}}} = \{\gamma_{\widehat{x}} \in \mathcal{I}_a \text{ e } t \leq \widehat{t_0}\}. \end{cases}$$

Caso contrário, teríamos dois segmentos geodésicos distintos contidos em uma vizinhança normal de a ligando a a z.

Decorre da equação (2.6) que $\gamma_x(t)$ e $\gamma_{\widehat{x}}(t)$ são geodésicas que partem do mesmo ponto e possuem a mesma direção no instante $t = 0$. Portanto, $\Gamma_x \subset \Gamma_{\widehat{x}}$ ou $\Gamma_x \supset \Gamma_{\widehat{x}}$. Caso contrário, teríamos duas soluções distintas para a equação diferencial ordinária

$$\frac{d\varphi}{dt} = t(exp_a)^{-1}z, \quad \varphi(0) = a.$$

Absurdo.

Até então mostramos que para todo $a \in M$, $\mathcal{M}^a = (M, L^a, (\omega_{t_a})_{t_a \in \mathbb{R}})$ é um $\mathbb{R}$-ódulo, i.e., $\mathcal{M}$ é uma variedade $\mathbb{R}$-odular. Para concluir que $\mathcal{M} = (\mathcal{M}, L, (\omega_t)_{t \in \mathbb{R}})$ é uma variedade geoodular, resta mostrar que $\mathcal{M}$ satisfaz as identidades geoodulares.

1^a identidade geoodular:

Sejam c, a, $x \in U_a$; t, $u \in \mathbb{R}$ tais que as operações façam sentido. Então,

$$\begin{aligned}
L^{u_c a}_{t_c a}(L^c_{u_c a})x &= L^{u_c a}_{t_c a}(exp_{u_c a} \circ \tau^c_{u_c a} \circ (exp_c)^{-1}(x)) \\
&= exp_{t_c a} \circ \tau^{u_c a}_{t_c a} \circ (exp_{u_c a})^{-1} \circ exp_{u_c a} \circ \tau^c_{u_c a} \circ (exp_c)^{-1}(x) \\
&= exp_{t_c a} \circ \tau^{u_c a}_{t_c a} \circ \tau^c_{u_c a} \circ (exp_c)^{-1}(x) \\
&= exp_{t_c a} \circ \tau^c_{t_c a} \circ (exp_c)^{-1}(x) \\
&= L^c_{t_c a} x
\end{aligned}$$

2^a identidade geoodular:

Sejam c, a, $x \in U_a$; t, $u \in \mathbb{R}$ tais que as operações façam sentido. Então,

$$\begin{aligned}
L^c_a(t_c x) &= L^c_a(exp_c(t(exp_c)^{-1})x) \\
&= exp_a \circ \tau^c_a \circ (exp_c)^{-1}(exp_c(t(exp_c)^{-1})x \\
&= exp_a \circ t\tau^c_a \circ (exp_c)^{-1}(x) \\
&= exp_a(t(exp_a)^{-1}) \circ exp_a \circ \tau^c_a \circ (exp_c)^{-1}(x) \\
&= t_a(L^c_a(c)).
\end{aligned}$$

O que conclui a demonstração. ■

A próxima proposição é essencial para a demonstração do resultado central deste capítulo, a saber, que existe uma variedade geoodular que coincide com a estrutura geoodular natural de uma variedade dotada de uma conexão afim.

Teorema 2.2.4. *Seja (M, ∇) uma variedade com uma conexão afim. A conexão tangente afim $\overline{\nabla}$ da estrutura geoodular natural de (M, ∇) existe e coincide com a conexão afim ∇. Além disso, o mapa exponencial em $a \in M$ com respeito a ∇ coincide com o mapa exponencial com respeito ao loop $(M, U_a, \cdot_a)$ da estrutura geoodular natural para todo $a \in M$, i.e., $exp_a = Exp_a$ $\forall a \in M$.*

Demonstração:

Decorre do fato de $(L^a_x)_{*,a} = \tau^a_x$ (ver Lema 2.2.2, página 30) que, caso exista a conexão tangente afim da estrutura geoodular natural, esta é definida por:

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{X_a}Y &= \left\{\frac{d}{dt}[(L^a_{\gamma(t)})^{-1}_{*,a}Y_{\gamma(t)}]\right\}_{t=0} \\
&= \left\{\frac{d}{dt}[(\tau^a_{\gamma(t)})^{-1}Y_{\gamma(t)}]\right\}_{t=0} \\
&= \left\{\frac{d}{dt}[(\tau_a^{\gamma(t)})Y_{\gamma(t)}]\right\}_{t=0} \\
&= \nabla_{X_a}Y
\end{aligned}$$

Mostremos agora que o mapa exponencial Exp de $(M, U_a, \cdot_a)$ (ver Definição 1.4.3, página 20) coincide com o mapa exponencial de (M, ∇) em $a \in M$. Visto que $t_a x = exp_a(t(exp_a)^{-1}x)$ (ver (2.3), página 30) temos,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(t_a x) &= \frac{d}{dt}(exp_a(t(exp_a)^{-1})x) \\
&= \tau^a_{t_a x}(exp_a^{-1}x) \\
&= (L^a_{t_a x})_{*,a}((exp_a)^{-1}x)
\end{aligned}$$

Fazendo $(exp_a)^{-1}x = X$, temos que $t_a x = exp_a(tX)$, logo

$$\frac{d}{dt}(exp_a(tX)) = (L^a_{exp_a(tX)})_{*,a}X \ , \quad exp_a(0) = a.$$

O que implica que exp_a é a aplicação exponencial Exp_a definida em $\mathcal{M}^a = (M, U_a, \cdot_a)$. ■

Para podermos enunciar o próximo Teorema, antes devemos fazer algumas definições.

Definição 2.2.5 (Variedades Geoodulares Coincidentes)**.** *Sejam $\mathcal{M} = (M, L, \omega_t)$ e $\widetilde{\mathcal{M}} = (M, \widetilde{L}, \widetilde{\omega_t})$ duas variedades geoodulares. Diremos que $\mathcal{M}$ e $\widetilde{\mathcal{M}}$* ***coincidem*** *se para todo $a \in M$ existe uma vizinhança aberta V_a de a na qual as operações de ambos sejam iguais, i.e.,*

$$\begin{cases} L|_{V_a} = \widetilde{L}\Big|_{V_a} \\ \omega_t|_{V_a} = \widetilde{\omega_t}|_{V_a} \end{cases} .$$

Facilmente verificamos que coincidir é uma relação de equivalência. Chamaremos de **germe** da variedade geoodular (M, L, ω_t) a classe de equivalência $[(M, L, \omega_t)]$. Observe que se duas estruturas (M, L, ω_t), $(M, \widetilde{L}, \widetilde{\omega_t})$ estão no mesmo germe, então suas conexões tangentes afins são iguais, i.e., $\nabla = \widetilde{\nabla}$. Afinal, tais conexões foram definidas por uma derivada que é uma operação local.

Teorema 2.2.6. *Sejam $\mathcal{M} = (M, L, (\omega_t)_{t\in\mathbb{R}})$ uma variedade geoodular e $\widetilde{\mathcal{M}} = (M, \widetilde{L}, (\widetilde{\omega_t})_{t\in\mathbb{R}})$ a estrutura geoodular natural de (M, ∇), ∇ a conexão tangente afim de $\mathcal{M}$. Então $\mathcal{M}$ coincide com $\widetilde{\mathcal{M}}$.*

Demonstração:

Mostremos que $\tau_x^y = (L_x^y)_{*,y}$ é o transporte paralelo relativo a ∇ ao longo da curva $t_y x$ $(0 \leq t \leq 1)$ que liga y a x. Decorre da primeira identidade geoodular, que

$$L_{(t+u)_y x}^{u_y x} \circ L_{u_y x}^{y} = L_{(t+u)_y x}^{y}$$

o que nos garante que

$$(L_{(t+u)_y x}^{u_y x})_{*,y} \circ (L_{u_y x}^{y})_{*,y} = (L_{(t+u)_y x}^{y})_{*,y},$$

i.e.,

$$\tau_{(t+u)_y x}^{u_u x} \circ \tau_{u_y x}^{y} = \tau_{(t+u)_y x}^{y}. \tag{2.7}$$

Em particular,

$$\tau_p^q = (\tau_q^p)^{-1}. \tag{2.8}$$

Tome um campo de vetores Y paralelo ao longo da curva $t_y x$ $(0 \leq t \leq 1)$. Assim,

$$\nabla_{\frac{d}{dt}(t_y x)} Y = \frac{d}{dt} (\tau_{(t+u)_y x}^{t_y x})^{-1} Y_{(t+u)_y x}\bigg|_{u=0} = 0.$$

Ora, para $\varphi(u) = (t+u)_y x$, temos que

$$\begin{cases} \varphi(0) = t_y x \\ \dfrac{d}{du}\varphi(u)\bigg|_{u=0} = \dfrac{d}{dt}(t_y x) \end{cases}$$

Portanto, usando as equações (2.7) e (2.8) temos:

$$\begin{aligned} 0 &= (\tau_{t_y x}^{y})^{-1} \frac{d}{du} (\tau_{(t+u)_y x}^{t_y x})^{-1} Y_{(t+u)_y x}\bigg|_{u=0} \\ &= \frac{d}{du} (\tau_{t_y x}^{y})^{-1} \circ (\tau_{(t+u)_y x}^{t_y x})^{-1} Y_{(t+u)_y x}\bigg|_{u=0} \\ &= \frac{d}{du} (\tau_{(t+u)_y x}^{y})^{-1} Y_{(t+u)_y x}\bigg|_{u=0} \\ &= \frac{d}{dt} (\tau_{t_y x}^{y})^{-1} Y_{t_y x}\ . \end{aligned}$$

Consequentemente, $(\tau_{t_y x}^{y})^{-1} Y_{t_y x} = C = Y_y$, para $t = 0$ (C uma constante). Pondo $t = 1$, temos $\tau_x^y Y_y = Y_x$, afinal

$$\begin{aligned} \tau_x^y Y_y &= \tau_x^y (\tau_{t_y x}^{y})^{-1} Y_{t_y x} \\ &= \tau_x^y (\tau_y^{t_y x}) Y_{t_y x} \\ &= \tau_x^{t_y x} Y_{t_y x} \\ &= (\tau_{t_y x}^{x})^{-1} Y_{t_y x} \\ &= Y_x, \text{ para } t = 1. \end{aligned}$$

Isto significa que τ_x^y é o transporte paralelo ao longo de $t_y x$ $(0 \leq t \leq 1)$, curva que liga y a x.

Vamos agora mostrar que as curvas $t_y x$ $(0 \leq t \leq 1)$, e apenas estas, são localmente geodésicas para a conexão tangente ∇. Derivando a equação dada pela monoassociatividade por u, temos.

$$\frac{d}{du}((t+u)_y x) = (L^y_{(t+u)_y x})_{*,y} \frac{d}{du}(u_y x)$$

para $u = 0$ temos,

$$\frac{d}{dt}(t_y x) = \tau^y_{t_y x} \frac{d}{du}(u_y x)\Big|_{u=0} \Rightarrow (\tau^y_{t_y x})^{-1} \frac{d}{dt}(t_y x) = \frac{d}{du}(u_y x)\Big|_{u=0}.$$

Portanto, o campo de vetores $\frac{d}{dt}(t_y x)$ é paralelo ao longo da curva $t_y x$ $(0 \leq t \leq 1)$. Consequentemente, $t_y x$ $(0 \leq t \leq 1)$ é uma geodésica e em uma vizinhança de y temos

$$t_y x = exp_y(tX) \ (0 \leq t \leq 1) \text{ com } X = \frac{d}{dt}(t_y x).$$

Em particular, decorre do fato de exp_y ser invertível, que se $x = exp_y X$, então existe uma geodésica da forma $t_y x$, partindo de y na direção X.

Portando, qualquer geodésica em alguma vizinhança de um ponto arbitrário y é da forma

$$t_y x, \quad (0 \leq t \leq 1)$$

e

$$\omega_t(y,x) = t_y x = exp_y(t(exp_y)^{-1} x) = \widetilde{\omega_t}(y,x). \tag{2.9}$$

Diferenciando a segunda identidade geoodular

$$L_x^y t_y z = t_x L_x^y z,$$

em relação a t, temos

$$(L_x^y)_{*,t_y z}(t_y z)^{\cdot} = (t_x L_x^y z)^{\cdot}.$$

Para $t = 0$, temos

$$\begin{aligned}(L_x^y)_{*,y}(exp_y)^{-1} z &= (t_x L_x^y z)^{\cdot}_{t=0} \\ &= exp_x^{-1} L_x^y z\end{aligned}$$

portanto

$$L_x^y z = (exp_x \circ \tau_x^y \circ (exp_y)^{-1}) z = \widetilde{L}(x,y,z). \tag{2.10}$$

As equações (2.9) e (2.10) mostram que a variedade geoodular coincide (ao menos localmente) com a estrutura geoodular natural de (M, ∇). Portanto, as curvas $\gamma_a(t) = t_c a$ são geodésicas para ∇, assim, a estrutura geoodular é uma restrição da estrutura geoodular natural. Logo, a variedade geoodular maximal coincide com a estrutura geoodular natural dada por (M, ∇). ■

O Teorema 2.2.4 e o Teorema 2.2.6 estabelecem uma correspondência biunívoca entre as categorias da variedades diferenciáveis dotadas de uma conexão afim (M, ∇) e os germes de variedades geoodulares $[(M, L, \omega_t)]$.

Observação 2.2.7. *Alterando a definição de loop suave de modo que* $\cdot : M \times M \to M$ *seja parcial, realizando os ajustes necessários na teoria, é possível selecionar para cada germe uma estrutura geoodular maximal, levando assim à uma correspondência entre as categorias das variedades diferenciáveis dotadas de uma conexão afim e as variedades geoodulares maximais. Ver* [Sab99], *páginas 50-51 e 137-139.*

Capítulo 3

Estruturas Diodulares e Estruturas Holonomiais

No presente capítulo, apresentaremos a teoria que resta para abordar variedades discretas utilizando-se de estruturas algébricas. Devido a falta de um espaço tangente que seja localmente difeomorfo com a variedade em questão, introduziremos um conceito algébrico denominado Variedade Geodiodular que nos permite calcular propriedades geométricas, tais como curvatura e torção.

As principas referências utilizadas neste capítulo foram o livro [Sab99] e o artigo [NSa00].

3.1 Estruturas Geodiodulares

Dada uma variedade diferenciável dotada de uma conexão afim, (M, ∇), podemos definir uma operação diferenciável parcial ternária

$$\begin{array}{rccl} N: & M \times M \times M & \to & M \\ & (x, y, z) & \mapsto & exp_y[(exp_y)^{-1}x + (exp_y)^{-1}z] \end{array}.$$

Para simplificar a notação, denoratemos $N(x, y, z) = x{+_y}z$. Verifica-se que se $(M, L, (\omega_t)_{t\in\mathbb{R}})$ for a estrutura geodular natural de (M, ∇), $\mathcal{M} = (M, L, N, (\omega_t)_{t\in\mathbb{R}})$ possui as seguintes propriedades:

1. $(M, N, (\omega_t)_{t\in\mathbb{R}})$ é uma variedade geodular;

2. $t_a N(x, a, y) = N(t_a x, a, t_a y)$.

Ver [Sab99], página 135. A demonstração da validade dessas propriedades é análoga a demonstração do Teorema 2.2.3, página 31.

Ora, a operação $+_a$ trata-se da imagem do mapa exponencial da soma de dois vetores em T_aM, i.e., $+_a$ associa a pontos da variedade uma adição que está definida em T_aM. Deste modo, obtemos que o loop suave $(M, U_a, +_a)$ é associativo e comutativo. Devido às observações acima, podemos definir as seguintes estruturas algébricas.

Definição 3.1.1 (Diódulo)**.** *Sejam G um conjunto não vazio e K um anel com unidade. Sejam $\cdot$ e $+$ operações binárias em G e $*$ uma multiplicação por escalar, cujo escalares são tomados em K. Dizemos que $\mathcal{G} = (G, \cdot, +, *)$ é um **K-diódulo** se, e somente se, $(G, \cdot, *)$ e $(G, +, *)$ são K-ódulos. Quando K estiver subentendido, diremos apenas que $\mathcal{G}$ é um **diódulo**. Se $(G, +, *)$ em particular for um K-módulo (espaço vetorial caso K seja um corpo), $\mathcal{G}$ é denominado **diódulo linear**.*

Definição 3.1.2 (Estrutura Diodular)**.** *Sejam K um anel, M um conjunto não vazio, L, N e ω_t operações que denotaremos por:*

$$\begin{cases} L(x,y,z) = L_x^y z = x \cdot_y z, \ \forall x,\ y,\ z \in M \\ N(x,y,z) = N_x^y z = x +_y z, \ \forall x,\ y,\ z \in M \\ \omega_t(a,x) = t *_a x = t_a x, \ \forall a,\ x \in M, \ \forall t \in K \end{cases} .$$

*$\mathcal{M} = (M, L, N, \omega_t)$ é uma **estrutura diodular** se, e somente se, para todo $a \in M$, $\mathcal{M}^a = (M, \cdot_a, +_a, *_a)$ é um K-diódulo tal que a é elemento neutro de $(M, \cdot_a)$ e $(M, +_a)$. Quando $\mathcal{M}^a$ for um K-diódulo linear para todo $a \in M$, diremos que $\mathcal{M}$ é uma **estrutura diodular linear***

Definição 3.1.3 (Estrutura Geodiodular)**.** *Uma estrutura diodular (linear) $\mathcal{M}$ é dita **estrutura geodiodular (linear)** se para cada $a,\ b,\ x,\ y \in M$, $t,\ u \in K$ as seguintes identidades*

$$\begin{array}{lcll} L_{u_a b}^{t_a b} L_{t_a b}^{a} x & = & L_{u_a b}^{a} x & (\textit{Primeira Identidade Geoodular}) \\ L_b^a t_a b & = & t_b L_b^a x & (\textit{Segunda Identidade Geoodular}) \\ t_a(N(x,a,y)) & = & N(t_a x, a, t_a y) & (\textit{Terceira Identidade Geoodular}) \end{array}$$

são satisfeitas.

As definições seguintes são estruturas algébricas definidas em uma variedade diferenciável.

Definição 3.1.4 (Diódulo Suave)**.** *Seja M uma variedade diferenciável. Dizemos que $\mathcal{M} = (M, U, \cdot, +, *)$ é um **diódulo suave** quando $(M, U, \cdot, *)$ e $(M, U, +, *)$ são ódulos suaves cujo neutro das duas estruturas coincidem e será denotado por e.*

Definição 3.1.5 (Variedade Diodular)**.** *Seja $\mathcal{M} = (M, L, N, \omega_t)$ uma estrutura suave em que L e N são operações diferenciáveis parciais ternárias e $\omega_t : M \times M \to M$*

($t \in \mathbb{R}$) é uma família de operações diferenciáveis parciais. $\mathcal{M}$ é dito uma ***variedade $\mathbb{R}$-diodular*** *(ou apenas* ***variedade diodular****), se para todo ponto fixado $a \in M$, $\mathcal{M}_a = (M, U_a, \cdot_a, +_a, *_a)$ é um K-diódulo suave cujo elemento neutro é a e as operações $\cdot_a$, $+_a$ e $*_a$ são dadas por:*

$$\begin{cases} x \cdot_a y = L_x^a y = L(x,a,y) \\ x +_a y = N_x^a y = N(x,a,y) \\ t *_a x = \omega_t(a,x) \end{cases}$$

para todo x, $y \in U_a$, $t \in \mathbb{R}$ tais que as operações L^a, N^a e ω_t façam sentido. Se $\mathcal{M}^a$ for um diódulo linear para todo $a \in M$, $\mathcal{M}$ é dita uma ***variedade diodular linear****.*

Observação 3.1.6. *A definição acima pode ser generalizada substituindo $\mathbb{R}$ por uma álgebra $\mathbb{R}$-linear K.*

Uma variedade K-diodular $\mathcal{M} = (M, L, N, (\omega_t)_{t\in K})$ é dita **geodiodular** se adicionalmente $\mathcal{M}$ satisfaz as identidades geoodulares, ver Definição 3.1.3 página 41.

Teorema 3.1.7. *Sejam (M, ∇) uma variedade diferenciável com conexão afim, L, N e ω_t operações diferenciais parciais dadas por:*

$$\begin{array}{lclcl} L(x,y,z) & = & x \cdot_y z & = & exp_x \circ \tau_x^y \circ (exp_y)^{-1} z \\ N(x,y,z) & = & x +_y z & = & exp_y[(exp_y)^{-1}x + (exp_y)^{-1}z] \\ \omega_t(y,z) & = & t_y z & = & exp_y(t(exp_y)^{-1}z) \end{array} \quad . \tag{3.1}$$

Então, $\mathcal{M} = (M, L, (\omega_t)_{t\in\mathbb{R}})$ é uma variedade geodiodular. Tal variedade é chamada de ***estrutura geodiodular natural*** *de (M, ∇).*

A demonstração do teorema acima é análoga à demonstração do Teorema 2.2.3.

Teorema 3.1.8. *Sejam $\mathcal{M} = (M, L, N, (\omega_t)_{t\in\mathbb{R}})$ uma variedade geoodular, ∇ a conexão tangente afim de $\mathcal{M}$ e $\widetilde{\mathcal{M}} = (M, \widetilde{L}, \widetilde{N}, (\widetilde{\omega_t})_{t\in\mathbb{R}})$ a estrutura geoodular natural de (M, ∇). Então $\mathcal{M}$ coincide com $\widetilde{\mathcal{M}}$.*

Demonstração:

Na demonstração do Teorema 2.2.6, página 36, demonstramos todas as condições suficientes para verificar o desejado, exceto que

$$N(x,y,z) = exp_y(exp_y^{-1}x + exp_y^{-1}z) = \widetilde{N}(x,y,z).$$

A terceira identidade geoodular nos garante que

$$t_y N(x,y,z) = N(t_y x, y, t_y z).$$

Aqui utilizaremos a seguinte notação:

$$N^y_{\cdot,z}x = N^y_x z, \quad N^y_{x,\cdot}z = N^y_x z.$$

Derivando, obtemos

$$\frac{d}{dt}(t_y N(x,y,z)) = (N^y_{\cdot,t_y z})_{*,t_y x}\frac{d}{dt}(t_y x) + (N^y_{t_y x,\cdot})_{*,t_y z}\frac{d}{dt}(t_y z)$$

em $t = 0$, temos

$$exp_y^{-1}N(x,y,z) = (N^y_{\cdot,y})_{*,y}exp_y^{-1}x + (N^y_{y,\cdot})_{*,y}exp_y^{-1}z.$$

Afinal,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(t_y N(x,y,z))\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}(exp_y(t(exp_y)^{-1}N(x,y,z))\Big|_{t=0} \\ &= (exp_y)^{-1}N(x,y,z) \end{aligned}$$

Levando em consideração que $N^y_{\cdot,y}w = w$ e $N^y_{y,\cdot}w = w$, obtemos

$$(N^y_{\cdot,y})_{*,y} = (N^y_{y,\cdot})_{*,y} = Id.$$

Finalmente,

$$N(x,y,z) = exp_y(exp_y^{-1}x + exp_y^{-1}z).$$

O que conclui a demonstração. ■

O teorema acima nos permite trabalhar de forma puramente algébrica as variedades com conexão afim e alguns objetos a elas associados. No caso do espaço tangente em $a \in M$, T_aM, de (M, ∇) temos que o ódulo suave $(M, U_a, +_a, *_a)$ é o equivalente algébrico do espaço tangente T_aM. Ainda neste capítulo, apresentaremos outros conceitos geométricos de forma puramente algébrica, permitindo deste modo trabalhar com variedades discretas.

3.2 Ódulos e Diódulos Holonomiais

Definição 3.2.1 (Ódulo Holonomial). *Seja $\mathcal{G} = (G, \cdot, *)$ um K-ódulo e*

$$\begin{aligned} h: \ G \times G \times G &\to G \\ (a,b,x) &\mapsto h(a,b)x \end{aligned}$$

uma operação ternária tal que $h(a,b)$ é uma função bijetiva. $(\mathcal{G}, h)$ é um ***ódulo holonomial*** *se $h(a,b)$ satisfaz:*

1. *$h(a,b)tx = th(a,b)x$;*

2. *$h(a, a \cdot ub)tb = l(a, ub)tb$;*

3. $h(a\cdot tb, a\cdot ub)h(a, a\cdot tb)x = h(a, a\cdot ub)x$*;*

4. $h(e, b)x = x$*.*

Em que a*,* b*,* e*,* $x \in G$ *(*e *elemento neutro de* $\mathcal{G}$*) e* t*,* $u \in K$*. Ademais,*

$$l(x, y) = (L_{x\cdot y})^{-1} \circ L_x \circ L_y$$

é dito o ***associador*** *de* $\mathcal{G}$*.*

Lema 3.2.2. *Seja* $\mathcal{G} = (G, h)$ *um ódulo holonomial. Então*

$$h(a, a) = Id.$$

Demonstração:

Sejam a, $b \in G$ arbitrários. Do item *2* da Definição 3.2.1, temos que:

$$\begin{aligned} h(a,a)b &= h(a, a\cdot 0b)1b \\ &= l(a, 0b)1b \\ &= l(a, e)b \\ &= (L_{a\cdot e})^{-1}L_aL_eb \\ &= (L_a)^{-1}L_ab \\ &= b, \end{aligned}$$

i.e., $h(a, a)b = b$, para todo a, $b \in G$. Ou seja, $h(a, a) = Id$, $\forall a \in G$. ■

Proposição 3.2.3. *Um ódulo holonomial* $(\mathcal{M}, h)$ *define uma estrutura geoodular dada por*

$$\begin{cases} L(x, a, y) = x \cdot_a y = L_xh(a, x)(L_a)^{-1}y \\ \omega_t(a, y) = t_ay = L_at(L_a)^{-1}y \end{cases}.$$

Reciprocamente, dada uma estrutura geoodular $\mathcal{M} = (M, L, \omega_t)$ *dotada da holonomia elementar*

$$h(a, b)x = h^e(a, b)x = (L^e_b)^{-1}L^a_bL^e_ax$$

$(\mathcal{M}, h)$ *é um ódulo holonomial.*

Demonstração:

Seja a priori $(\mathcal{M}, h)$ um ódulo holonomial com $\mathcal{M} = (M, \cdot, *)$ cujo elemento neutro é e. Ora,

$$\begin{cases} L(x, e, y) = x \cdot y = L_xh(e, x)(L_e)^{-1}y = L_xy \\ \omega_t(e, y) = L_et(L_e)^{-1}y = t * y. \end{cases}$$

Mostremos que $\mathcal{M}_a = (M, \cdot_a, *_a)$ é um ódulo para cada $a \in M$.

Fixe um $a \in M$ arbitrário. Denotemos $L_x^a y = L(x, a, y)$ e $R_y^a x = L_x^a y$. Como as funções L_x, L_a e $h(a, x)$ são bijetivas, $L_x^a = L_x h(a, x)(L_a)^{-1}$ é bijetiva.

Mostremos agora que R_x^a é uma bijeção para todo $x \in M$. Note que

$$R_x^a y = L_y h(a, y) a \backslash x.$$

Seja $c \in M$ o único tal que $a \cdot c = y$, então

$$\begin{aligned} R_x^a y &= L_y h(a, a \cdot c) a \backslash x \\ &= L_y (l(a, c) a \backslash x) \\ &= L_y (L_{a \cdot c})^{-1} L_a L_c a \backslash x \\ &= L_a L_c a \backslash x. \end{aligned}$$

Logo, sejam y_1, y_2, c_1, c_2 tais que

$$\begin{cases} a \cdot c_1 = y_1 \\ a \cdot c_2 = y_2 \end{cases} \quad \text{e} \quad L_{y_1} h(a, y_1) a \backslash x = L_{y_2} h(a, y_2) a \backslash x,$$

para um $x \in M$ fixado, temos que

$$L_a L_{c_1} a \backslash x = L_a L_{c_2} a \backslash x.$$

Portanto,

$$L_{c_1} a \backslash x = L_{c_2} a \backslash x \Rightarrow R_{a \backslash x} c_1 = R_{a \backslash x} c_2 \Rightarrow c_1 = c_2$$

e, consequentemente,

$$y_1 = y_2.$$

Ou seja, R_x^a é injetiva para todo $x \in M$.

Mostremos agora que R_x^a é sobrejetiva para todo $x \in M$. Seja $y \in M$, existe $c \in M$ tal que

$$y = a \cdot c.$$

Tomes $d \in M$ tal que

$$c = d \cdot a \backslash x,$$

e seja

$$f = a \cdot d,$$

temos

$$\begin{aligned} R_x^a f &= L_a L_d a \backslash x \\ &= L_a (d \cdot a \backslash x) \\ &= L_a c \\ &= a \cdot c \\ &= y. \end{aligned}$$

Portanto, R_x^a é sobrejetiva para todo $x \in M$.

Note que a é elemento neutro de $(M, \cdot)$. De fato, seja $b \in M$ tal que $a \cdot b = x$ temos:

$$\begin{aligned} L(x,a,a) &= L_x h(a,x) L_a^{-1} a \\ &= L_x h(a,x) e \\ &= L_{a\cdot b} h(a, a\cdot b) 0b \\ &= L_{a\cdot b} L_{a\cdot b}^{-1} L_a L_b e \\ &= L_a(b \cdot e) \\ &= L_a b \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(a,a,x) &= L_a h(a,a) L_a^{-1} x \\ &= L_a Id L_a^{-1} x \\ &= L_a L_a^{-1} x \\ &= x \end{aligned}$$

Portanto $(M, \cdot_a)$ é um loop. Para concluir que $\mathcal{M}_a$ é um ódulo, resta mostrar os itens *1*, *2*, *3*, e *4* da Definição 1.2.1, página 13.

1. $t_a x \cdot_a u_a x = (t+u)_a x$. De fato,

$$\begin{aligned} t_a x \cdot_a u_a x &= L_{t_a x} h(a, t_a x)(L_a)^{-1} u_a x \\ &= L_{L_a t(L_a)^{-1} x} h(a, L_a t(L_a)^{-1} x)(L_a)^{-1} L_a u (L_a)^{-1} x \\ &= L_{L_a t(L_a)^{-1} x} h(a, a \cdot t(L_a)^{-1} x) u (L_a)^{-1} x \\ &= L_{L_a t(L_a)^{-1} x} l(a, t(L_a)^{-1}) u (L_a)^{-1} x \\ &= L_{a \cdot t(L_a)^{-1} x} (L_{a \cdot t(L_a)^{-1} x})^{-1} L_a L_{t(L_a)^{-1} x} u (L_a)^{-1} x \\ &= L_a((t(L_a)^{-1} x) \cdot (u(L_a)^{-1}) x) \\ &= L_a((t+u)(L_a)^{-1} x) \\ &= (t+u)_a x \end{aligned}$$

2. $t_a(u_a x) = (tu)_a x$. De fato,

$$\begin{aligned} t_a(u_a) &= t_a(L_a u (L_a)^{-1} x) \\ &= L_a t (L_a)^{-1} L_a u (L_a)^{-1} x \\ &= L_a t u (L_a)^{-1} x \\ &= (tu)_a x. \end{aligned}$$

3. $1_a x = x$. De fato,

$$\begin{aligned} 1_a x &= L_a 1 (L_a)^{-1} x \\ &= L_a (L_a)^{-1} x \\ &= x. \end{aligned}$$

4. $t_a a = a$, $\forall t \in \mathbb{R}$. De fato,

$$\begin{aligned} t_a a &= L_a t (L_a)^{-1} a \\ &= L_a(te) \\ &= L_a e \\ &= a \end{aligned}$$

Portanto, (M, L, ω_t) é uma estrutura odular. Para que (M, L, ω_t) seja uma estrutura geoodular, basta mostrar que satisfaz a primeira e a segunda identidade geoodular.

1^a Identidade Geodular:

$$\begin{aligned} L^{t_a b}_{u_a b} L^{a}_{t_a b} x &= L^{t_a b}_{u_a b}(t_a b \cdot h(a, t_a b)(L_a)^{-1} x) \\ &= u_a b \cdot h(t_a b, u_a b)(L_{t_a b})^{-1}(t_a b \cdot h(a, t_a b)(L_a)^{-1} x) \\ &= u_a b \cdot h(t_a b, u_a b)(L_{t_a b})^{-1}(L_{t_a b} h(a, t_a b)(L_a)^{-1} x) \\ &= u_a b \cdot h(t_a b, u_a b) h(a, t_a b)(L_a)^{-1} x \\ &= u_a b \cdot h(a, u_a b)(L_a)^{-1} x \\ &= L_{u_a b} h(a, u_a b)(L_a)^{-1} x \\ &= L^{a}_{u_a b} x. \end{aligned}$$

2^a Identidade Geodular:

$$\begin{aligned} L^a_b \omega_t(a, b) &= L^a_b(L_a t (L_a)^{-1} x) \\ &= L_b h(a, b)(L_a)^{-1} L_a t (L_a)^{-1} x \\ &= L_b t (L_b)^{-1} L_b h(a, b)(L_a)^{-1} x \\ &= L_b t (L_b)^{-1} L^a_b x \\ &= \omega_t(b, L^a_b x). \end{aligned}$$

Portanto, (M, L, ω_t) é uma estrutura geoodular.

Reciprocamente, sejam $\mathcal{M} = (M, L, \omega_t)$ uma estrutura geoodular e

$$h(a, b) = h^e(a, b)x = (L^e_b)^{-1} L^a_b L^e_a x$$

mostremos que $(\mathcal{M}^e, h)$ é um ódulo holonomial. Como $\mathcal{M}$ é uma estrutura geoodular, em particular $\mathcal{M}^e$ é um ódulo. Basta mostrar que $(\mathcal{M}^e, h)$ satisfaz os itens *1*, *2*, *3* e *4* da Definição 3.2.1, página 43. Nas equações abaixo utilizaremos as seguintes notações: $x \cdot y = x \cdot_e y$ e $t_e x = tx$.

1. $h(a, b)tx = th(a, b)x$. De fato, decorre da 2^a Identidade Geoodular que

$$\begin{aligned} h(a, b)tx &= (L^e_b)^{-1} L^a_b L^e_a \omega_t(e, x) \\ &= (L^e_b)^{-1} L^a_b \omega_t(a, L^e_a x) \\ &= (L^a_b)^{-1} \omega_t(b, L^a_b L^e_a x) \\ &= \omega_t(e, (L^e_a)^{-1} L^a_b L^e_a x) \\ &= \omega_t(e, h(a, b)x) \\ &= th(a, b)x \end{aligned}$$

2. $h(a, a \cdot ub)tb = l(a, ub)tb$. De fato, decorre da Segunda Identidade Geoodular e da monoassociatividade que

$$\begin{aligned} l(a, ub)tb &= (L^e_{a\cdot ub})^{-1} L^e_a L^e_{ub} tb \\ &= (L^e_{a\cdot ub})^{-1} L^e_a (ub \cdot tb) \\ &= (L^e_{a\cdot ub})^{-1} L^e_a ((u+t)b) \\ &= (L^e_{a\cdot ub})^{-1} (u+t)_a L^e_a b. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} h(a, a\cdot ub)tb &= (L^e_{a\cdot ub})^{-1} L^a_{a\cdot ub} L^e_a tb \\ &= (L^e_{a\cdot ub})^{-1} L^a_{a\cdot ub} a \cdot tb \\ &= (L^e_{a\cdot ub})^{-1} (a \cdot ub \cdot_a a \cdot tb) \\ &= (L^e_{a\cdot ub})^{-1} (L_a ub \cdot_a L_a tb) \\ &= (L^e_{a\cdot ub})^{-1} (u_a L^e_a b \cdot_a t_a L^e_a b) \\ &= (L^e_{a\cdot ub})^{-1} (u+t)_a L^e_a b. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Decorre então das equações (3.2) (3.3) que $h(a, a \cdot ub)tb = l(a, ub)tb$.

3. $h(c\cdot ta, c\cdot ua)h(c, c\cdot ta)x = h(c, c\cdot ua)x$. De fato, decorre da 1^a Identidade Geoodualr

$$\begin{aligned} h(c\cdot ta, c\cdot ua)h(c, c\cdot ta)x &= (L^e_{c\cdot ua})^{-1} L^{c\cdot ta}_{c\cdot ua} L^e_{c\cdot ta} (L^e_{c\cdot ta})^{-1} L^c_{c\cdot ta} L^e_c x \\ &= (L^e_{c\cdot ua})^{-1} L^{c\cdot ta}_{c\cdot ua} L^c_{c\cdot ta} L^e_c x \\ &= (L^e_{c\cdot ua})^{-1} L^c_{c\cdot ua} L^e_c x \\ &= h(c, c\cdot ua)x \end{aligned}$$

4. $h(e, q)x = x$. De fato,

$$\begin{aligned} h(e, q)x &= (L^e_q)^{-1} L^e_q L^e_e x \\ &= x. \end{aligned}$$

O que conclui a demonstração. ■

Em se tratando de diódulos, temos a seguinte

Definição 3.2.4 (Diódulo Holonomial)**.** *Sejam $\mathcal{G} = (G, \cdot, +, *)$ um diódulo e h uma operação ternária em G tal que $(G, \cdot, *, h)$ seja um ódulo holonomial. Dizemos que $(\mathcal{G}, h)$ é um* ***diódulo holonomial*** *se $(\mathcal{G}, h)$ satisfaz a seguinte equação:*

$$h(a, b)(x + y) = h(a, b)x + h(a, b)y.$$

Proposição 3.2.5. *Um diódulo holonomial define uma estrutura geodiodular dada por*

$$\begin{cases} L(x, a, y) = x \cdot_a y = L_x h(a, x)(L_a)^{-1} y \\ \omega_t(a, y) = t_a y = L_a t (L_a)^{-1} y \\ N(x, a, y) = x +_a y = L^e_a((L^e_a)^{-1} x + (L^e_a)^{-1} y) \end{cases}.$$

Reciprocamente, dada uma estrutura geodiodular $\mathcal{M} = (M, L, N, \omega_t)$ *dotada da holonomia elementar*

$$h(a,b)x = h^e(a,b)x = (L_b^e)^{-1} L_b^a L_a^e x$$

$(\mathcal{M}, h)$ *é um diódulo holonomial.*

Demonstração:

Seja $(\mathcal{M}, h)$ um diódulo holonomial. Na Proposição 3.2.3, página 44, mostramos que (M, L, ω_t) é uma estrutura geoodular. Para que (M, L, N, ω_t) seja uma estrutura gediodular, resta mostrar que (M, N, ω_t) é uma estrutura odular e que (M, L, N, ω_t) satisfaz a terceira identidade geodular.

Fixado $a \in M$ arbitrários vamos mostrar que $(M, +_a, *_a)$ é um ódulo. Seja $x \in M$ fixado temos,

$$\begin{aligned} N_x^a y &= L_a^e(a\backslash x + (L_a^e)^{-1} y) \\ &= L_a^e N_{a\backslash x}^e (L_a^e)^{-1} y, \quad \forall y \in M. \end{aligned}$$

Portanto,

$$N_x^a = L_a^e N_{a\backslash x}^e (L_a^e)^{-1}.$$

Como L_a^e e $N_{a\backslash x}^e$ são bijeções, N_x^a é uma bijeção.

Seja P_y^a a translação à direita de $(M, +)$, i.e., P_y^a é uma função tal que $P_y^a x = N_x^a y = x +_a y$. Temos que

$$\begin{aligned} P_y^a x &= L_a^e((L_a^e)^{-1} x + a\backslash y) \\ &= L_a^e N_{(L_a^e)^{-1} x}^e a\backslash y, \quad \forall x \in M. \end{aligned}$$

Como L_a^e e N_k^e são bijeções para todo $k \in M$, temos que P_y^a é uma bijeção.
Para que $(M, +_a)$ seja um ódulo, resta verificar que $a \in M$ é elemento neutro de $(M, +_a)$.

$$\begin{aligned} N(a,a,y) &= L_a^e((L_a^e)^{-1} a + (L_a^e)^{-1} y) \\ &= L_a^e(e + a\backslash y) \\ &= a \cdot (a\backslash y) \\ &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(x,a,a) &= L_a^e((L_a^e)^{-1} x + (L_a^e)^{-1} a) \\ &= L_a^e(a\backslash x + e) \\ &= a \cdot (a\backslash x) \\ &= x. \end{aligned}$$

Logo, $(M, +_a)$ é um loop. Vamos agora verificar as quatro propriedades da Definição 1.2.1, página 13.

1. $t_a x +_a u_a x = (t+u)_a x$. De fato,

$$\begin{aligned}
t_a x +_a u_a x &= L_a^e t(L_a^e)^{-1}x +_a L_a^e u(L_a^e)^{-1}x \\
&= L_a^e[(L_a^e)^{-1}L_a^e t(L_a^e)^{-1}x + (L_a^e)^{-1}L_a^e u(L_a^e)^{-1}x] \\
&= L_a^e[t(L_a^e)^{-1}x + u(L_a^e)^{-1}x] \\
&= L_a^e[t\cdot(a\backslash x) + u\cdot(a\backslash x)] \\
&= L_a^e[(t+u)a\backslash x] \\
&= L_a^e[(t+u)(L_a^e)^{-1}x] \\
&= (t+u)_a x.
\end{aligned}$$

2. $t_a(u_a x) = (tu)_a x$. De fato,

$$\begin{aligned}
t_a(u_a x) &= t_a((L_a^e)u(L_a^e)^{-1}x) \\
&= (L_a^e[t(L_a^e)^{-1}L_a^e u(L_a^e)^{-1}x]) \\
&= (L_a^e(tu)(L_a^e)^{-1x}) \\
&= (tu)_a x.
\end{aligned}$$

3. $1_a x = x$.
   Demonstração idêntica ao item 3. da demonstração Proposição 3.2.3.

4. Por fim, temos que $t_a a = a$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
   Demonstração idêntica ao item 4. da demonstração Proposição 3.2.3.

Portanto, como $a \in M$ foi tomado arbitrariamente, $(M, +_a, *_a)$ é um ódulo para todo $a \in M$. Ou seja, (M, N, ω_t) é uma estrutura odular. Para concluir que (M, L, N, ω_t) é uma estrutura geodiodular, resta mostrar a

3^a Identidade Geoodular:

$$\begin{aligned}
L_x^a(N(y,a,z)) &= L_x^a(L_a^e((L_a^e)^{-1}y + (L_a^e)^{-1}z)) \\
&= L_x^e h(a,x)(L_a^e)^{-1}L_a^e((L_a^e)^{-1}y + (L_a^e)^{-1}z) \\
&= L_x^e h(a,x)((L_a^e)^{-1}y + (L_a^e)^{-1}z) \\
&= L_x^e(h(a,x)(L_a^e)^{-1}y + h(a,x)(L_a^e)^{-1}z) \\
&= L_x^e((L_x^e)^{-1}L_x^e h(a,x)(L_a^e)^{-1}y + (L_x^e)^{-1}L_x^e h(a,x)(L_a^e)^{-1}z) \\
&= L_x^e((L_x^e)^{-1}L_x^a y + (L_x^e)^{-1}L_x^a z) \\
&= N(L_x^a y, x L_x^a z).
\end{aligned}$$

Reciprocamente, seja $\mathcal{M} = (M, L, N, \omega_t)$ uma estrutura geodiodular dotada da holonomia elementar

$$h(a,b)x = h^e(a,b)x = (L_b^e)^{-1}L_b^a L_a^e x.$$

Em particular, $\mathcal{M}^e = (M, \cdot_e, +_e, *_e) = (M, \cdot, +, *)$ é um diódulo. Na Proposição 3.2.3, página 44, mostramos que $(M, \cdot, *, h)$ é um ódulo holonomial. Para mostrar que $(\mathcal{M}, h)$ é um diódulo holonomial, resta verificar que

$$h(a,b)(x+y) = h(a,b)x + h(a,b)y.$$

Ora, decorre da 3ª Identidade Geoodular que

$$\begin{aligned}
h(a,b)(x+y) &= (L_b^e)^{-1} L_b^a L_a^e N(x,e,y) \\
&= (L_b^e)^{-1} L_b^a N(L_a^e x, a, L_a^e y) \\
&= (L_b^e)^{-1} N(L_b^a L_a^e x, b, L_b^a L_a^e y) \\
&= N((L_b^e)^{-1} L_b^a L_a^e x, e, (L_b^e)^{-1} L_b^a L_a^e y) \\
&= N(h(a,b)x, e, h(a,b)y) \\
&= h(a,b)x + h(a,b)y.
\end{aligned}$$

O que conclui a demonstração. ■

Teorema 3.2.6. *Sejam $\mathcal{M} = (M, L, N, \omega_t)$ uma estrutura geodiodular e*

$$h(a,b) = h^e(a,b) = (L_b^e)^{-1} L_b^a L_a^e$$

a transformação de holonomia elementar em e. Então, a estrutura geodiodular $\widetilde{\mathcal{M}} = (M, \tilde{L}, \tilde{N}, \tilde{\omega}_t)$ coincide com $\mathcal{M}$, em que

$$\begin{cases}
\tilde{L}(x,a,y) = L_x^e h(a,x)(L_a^e) y \\
\tilde{N}(x,a,y) = L_a^e((L_a^e)^{-1} +_e (L_a^e)^{-1} y) \\
\tilde{\omega}_t(a,y) = L_a^e t_e (L_a^e)^{-1} y
\end{cases} .$$

Demonstração:

Note que

$$\begin{aligned}\tilde{L}(x,a,y) &= L_a^e h(a,x)(L_a^e)^{-1}y\\ &= L_a^e(L_x^e)^{-1}L_x^a L_a^e(L_a^e)^{-1}y\\ &= L_x^a y\\ &= L(x,a,y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{N}(x,a,y) &= L_a^e((L_a^e)^{-1}x +_e (L_a^e)^{-1}y)\\ &= L_a^e(N((L_a^e)^{-1}x, e, (L_a^e)^{-1}y))\\ &= N(L_a^e(L_a^e)^{-1}x, a, L_a^e(L_a^e)^{-1}y)\\ &= N(x,a,y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_t(a,y) &= L_a^e t_e (L_a^e)^{-1}\\ &= L_a^e \omega_t(e,(L_a^e)^{-1}y)\\ &= L_a^e(L_a^e)^{-1}\omega_t(a,y)\\ &= \omega_t(a,y).\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{M} = \widetilde{\mathcal{M}}$. ■

Deste modo, dado um ódulo (diódulo) holonomial cuja operação ternária envolve a transformação holonomial elementar, existe uma única estrutura geoodular (geodiodular) associada a este ódulo. Assim sendo, utilizaremos das variedades ódulares (diódulares) holonomiais para trabalhar com as variedades diferenciáveis dotadas de uma conexão afim de forma puramente algébrica.

Identificando o espaço tangente T_aM de (M,∇) com o ódulo $(M,+_a,*_a)$, para todo $a \in M$, temos que a holonomia elementar corresponde ao transporte paralelo ao longo de triângulos geodésicos. No caso diferencial, temos o tensor de curvatura dado por

$$R^i_{jkl}(a) = 2\left[\frac{\partial^3(h^a(x,y)z)^i}{\partial x^l \partial y^k \partial z^j}\right]_{x=y=z=a}.$$

Ver [NSa00].

Proposição 3.2.7. *Seja (G,h) um ódulo holonomial tal que h^a é a transformação de holonomia elementar (ver Definição 2.1.3, página 27). Então h^a satisfaz as identidades odulares de Bianchi:*

$$h^a(z,x)\circ h^a(y,z)\circ h^a(x,y) = (L_x^a)^{-1}\circ h^y(y,z)\circ L_x^a.$$

Demonstração:

Note que

$$\begin{aligned}h^a(z,x)\circ h^a(y,z)\circ h^a(x,y) &= (L_x^a)^{-1}\circ L_x^z\circ L_z^a\circ(L_z^a)^{-1}\circ L_z^y\circ L_y^a\circ(L_y^a)^{-1}\circ L_y^x\circ L_x^a\\ &= (L_x^a)^{-1}\circ L_x^z\circ L_z^y\circ L_y^x\circ L_x^a\\ &= (L_x^a)^{-1}h^x(y,z)L_x^a.\end{aligned}$$

■

Segue abaixo uma tabela que compara objetos da Geometria Diferencial e da Geometria Não-associativa.

Geometria Diferencial	Geometria Não-associativa
Variedade com Conexão afim (M, ∇)	Estrutura Geodiodular (M, L, N, ω_t)
Espaço Tangente T_aM	Espaço Osculador $(M, +_a, *_a)$
Fibrado Tangente TM	Estrutura Osculadora (M, N, ω_t)
Curvatura $R(X,Y)Z$	Holonomia Elementar $h^a(x,y)$z
Identidades de Bianchi	Identidades Odulares de Bianchi

Na próxima seção, apresentaremos uma estrutura de variedade geodiodular que pode ser dada à esfera bidimensional no apêndice trabalhamos com este objeto no caso discreto.

3.3 Exemplo: A Geometria Não-associativa da Esfera Bidimensional S^2_R

Apresentaremos nesta seção a estrutura não-associativa que pode ser dada à esfera bidimencional de raio r, $S^2_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 = r^2\}$, com $r \neq 0$. Devido a projeção estereográfica

$$\begin{array}{rcl} \varphi : S^2_r \backslash \{N\} & \to & \mathbb{C} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & \dfrac{x_1 + i x_2}{r - x_3} \end{array}$$

em que $N = (0,0,r)$, podemos realizar nosso estudo de S^2_r em $\mathbb{C}$. Sejam portanto ξ, $\eta \in \mathbb{C}$ e defina a seguinte operação parcial:

$$\begin{array}{rcl} \odot : \ \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ (\xi, \eta) & \mapsto & \odot(\xi,\eta) = \xi \odot \eta = \dfrac{\xi + \eta}{1 - \bar{\xi}\eta / r^2} \end{array}.$$

Lema 3.3.1. *Seja $\odot$ a operação acima, $(\mathbb{C}, U, \odot)$ é um loop suave, em que $U = B(0,r)$.*

Demonstração:

Fixe um $\xi \in \mathbb{C}$ arbitrário, temos que

$$\begin{array}{rcl} L_\xi : \ U & \to & \mathbb{C} \\ \eta & \mapsto & L_\xi \eta = \dfrac{\xi + \eta}{1 - \bar{\xi}\eta / r^2} \end{array}$$

é uma bijeção. De fato, note que $L_\xi \eta = \frac{a\eta + b}{c\eta + d}$ com $a = 1$, $b = \xi$, $c = -\frac{\bar{\xi}}{r^2}$ e $d = 1$.

Mostremos que L_ξ é uma transformação de Möebius. Ora,

$$\begin{array}{rcl} ad - bc & = & 1 \cdot 1 - \xi \cdot \left(-\overline{\xi}/r^2\right) \\ & = & 1 \cdot 1 + (|\xi|/r)^2 \\ & \geq & 1 \end{array} .$$

Como $ad - bc \neq 0$, segue o desejado e a inversa de L_ξ, $(L_\xi)^{-1}$, é dada por

$$\begin{array}{rcl} L_\xi^{-1} : \ L_\xi(U) & \to & U \\ \eta & \mapsto & L_\xi^{-1}\eta = \dfrac{d\eta - b}{-c\eta + a} = \dfrac{\eta - \xi}{\overline{\xi}\eta/r^2 + 1} \end{array} ,$$

ou seja, L_ξ é uma bijeção para todo $\xi \in \mathcal{U}$.

Mostremos agora que a função

$$\begin{array}{rcl} R_\xi : \ U & \to & \mathbb{C} \\ \eta & \mapsto & R_\xi \eta = \eta \odot \xi = \dfrac{\eta + \xi}{1 - \overline{\eta}\xi/r^2} \end{array}$$

é uma bijeção. De fato, R_ξ possui inversa e esta é dada por

$$(R_\xi)^{-1}\eta = \frac{\eta r^2(r^2 + |\xi|^2) - \xi r^2(r^2 + |\eta|^2)}{r^4 - |\xi|^2|\eta|^2},$$

afinal

$$\begin{array}{rcl} R_\xi(R_\xi)^{-1} & = & R_\xi\left(\dfrac{\eta r^2(r^2 + |\xi|^2) - \xi r^2(r^2 + |\eta|^2)}{r^4 - |\xi|^2|\eta|^2}\right) \\ & = & \dfrac{\frac{\eta r^2(r^2+|\xi|^2) - \xi r^2(r^2+|\eta|^2)}{r^4 - |\xi|^2|\eta|^2} + \xi}{1 - \frac{\overline{\eta} r^2(r^2+|\xi|^2) - \overline{\xi} r^2(r^2+|\eta|^2)}{r^4 - |\xi|^2|\eta|^2}\xi/r^2} \\ & = & \dfrac{\frac{\eta r^2(r^2+|\xi|^2) - \xi r^2(r^2+|\eta|^2) + \xi r^2(r^2 - |\xi|^2|\eta|^2)}{r^4 - |\xi|^2|\eta|^2}}{1 - \frac{\overline{\eta}\xi r^2(r^2+|\xi|^2) - |\xi|^2 r^2(r^2+|\eta|^2)}{r^2(r^4 - |\xi|^2|\eta|^2)}} \\ & = & \dfrac{\frac{\eta r^2(r^2+|\xi|^2) - \xi r^2(|\xi|^2|\eta|^2/r^2 + |\eta|^2)}{r^4 - |\xi|^2|\eta|^2}}{\frac{(r^4 - |\xi|^2|\eta|^2) - \overline{\eta}\xi(r^2+|\xi|^2) + |\xi|^2(r^2+|\eta|^2)}{r^4 - |\xi|^2|\eta|^2}} \\ & = & \dfrac{\eta r^2(r^2 + |\xi|^2) - \xi r^2(|\xi|^2|\eta|^2/r^2 + |\eta|^2)}{(r^4 - |\xi|^2|\eta|^2) - \overline{\eta}\xi(r^2 + |\xi|^2) + |\xi|^2(r^2 + |\eta|^2)} \\ & = & \dfrac{r^2(r^2 + |\xi|^2) - \xi\overline{\eta}(r^2/|\eta|^2)(|\xi|^2|\eta|^2/r^2 + |\eta|^2)}{r^4 - |\xi|^2|\eta|^2 + |\xi|^2|\eta|^2 - \overline{\eta}\xi r^2 - \overline{\eta}\xi|\xi|^2 + |\xi|^2 r^2}\eta \\ & = & \dfrac{r^4 + r^2|\xi| - \xi\overline{\eta}|\xi|^2 - \xi\overline{\eta}r^2}{r^4 + r^2|\xi| - \xi\overline{\eta}|\xi|^2 - \xi\overline{\eta}r^2}\eta \\ & = & \eta \end{array}$$

e, além disto, é possível demonstrar que

$$(R_\xi)^{-1}R_\xi\eta = \eta$$

Para concluir que $(\mathbb{C}, U, \odot)$ é um loop suave, resta mostrar que existe elemento neutro. Ora, $0 \in \mathcal{U}$ é elemento neutro de $(\mathbb{C}, U, \odot)$. De fato,

$$\begin{cases} L_\xi(0) = \dfrac{\xi + 0}{1 - \overline{\xi}0/r^2} = \xi \\ R_\xi(0) = \dfrac{0 + \xi}{1 - \overline{0}\xi/r^2} = \xi \end{cases},$$

para todo $\xi \in U$ ■

A partir do loop suave acima concluímos a construção da geometria não-associativa de S_r^2 do seguinte modo.

Proposição 3.3.2. *O associador do loop suave* $(\mathbb{C}, U, \odot)$ *é dado por*

$$l(\xi,\eta)\zeta = \frac{1 - (\xi\overline{\eta}/r^2)}{1 - (\overline{\xi}\eta/r^2)}\zeta.$$

Demonstração:

Visto que $l(\xi,\eta)\zeta = (L_{\xi\odot\eta})^{-1}L_\xi L_\eta\zeta$ mostremos que

$$L_\xi L_\eta \zeta = L_{\xi\odot\eta}\left(\frac{1 - (\xi\overline{\eta}/r^2)}{1 - (\overline{\xi}\eta/r^2)}\zeta\right). \tag{3.4}$$

Ora,

$$\begin{aligned} L_\xi L_\eta\zeta &= L_\xi\left(\frac{\eta+\zeta}{1-\overline{\eta}\zeta/r^2}\right) \\ &= \frac{a + \frac{\eta+\zeta}{1-\overline{\eta}\zeta/r^2}}{1 - \left(\overline{\xi}\frac{\eta+\zeta}{1-\overline{\eta}\zeta/r^2}\right)/r^2} \\ &= \frac{\frac{a(1-\overline{\eta}\zeta/r^2)+\eta+\zeta}{1-\overline{\eta}\zeta/r^2}}{1 - \frac{\overline{\xi}(b+c)}{r^2-\overline{\eta}\zeta}} \\ &= \frac{a(1-\overline{\eta}\zeta/r^2)+\eta+\zeta}{1-\overline{\eta}\zeta/r^2}\cdot\frac{1-\overline{\eta}\zeta/r^2}{r^2-\overline{\eta}\zeta-\overline{\xi}(\eta+\zeta)} \\ &= \frac{r^2(\xi+\eta+\zeta)-\xi\overline{\eta}\zeta}{r^2-\overline{\eta}\zeta-\overline{\xi}(\eta+\zeta)}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
L_{\xi\odot\eta}\left(\frac{1-(\xi\overline{\eta}/r^2)}{1-(\overline{\xi}\eta/r^2)}\zeta\right) &= \frac{\xi\cdot\eta+\frac{1-(\xi\overline{\eta}/r^2)}{1-(\overline{\xi}\eta/r^2)}\zeta}{1-\overline{\xi\cdot\eta}\frac{1-(\xi\overline{\eta}/r^2)}{1-(\overline{\xi}\eta/r^2)}\zeta/r^2}\\
&= \frac{\frac{\xi+\eta}{1-\overline{\xi}\eta/r^2}+\frac{1-(\xi\overline{\eta}/r^2)}{1-(\overline{\xi}\eta/r^2)}\zeta}{1-\frac{\overline{\xi+\eta}}{1-\xi\overline{\eta}/r^2}\cdot\frac{1-(\xi\overline{\eta}/r^2)}{1-(\overline{\xi}\eta/r^2)}\zeta/r^2}\\
&= \frac{\frac{\xi+\eta+(1-\xi\overline{\eta}/r^2)\zeta}{1-\overline{\xi}\eta/r^2}}{1-\frac{(\overline{\xi}+\overline{\eta})(1-\xi\overline{\eta}/r^2)\zeta}{r^2(1-\xi\overline{\eta}/r^2)(1-\overline{\xi}\eta/r^2)}}\\
&= \frac{\frac{\xi+\eta+(1-\xi\overline{\eta}/r^2)\zeta}{1-\overline{\xi}\eta/r^2}}{\frac{r^2(1-\xi\overline{\eta}/r^2)(1-\overline{\xi}\eta/r^2)-(\overline{\xi}+\overline{\eta})(1-\xi\overline{\eta}/r^2)\zeta}{r^2(1-\xi\overline{\eta}/r^2)(1-\overline{\xi}\eta/r^2)}}\\
&= \frac{\xi+\eta+\zeta-\xi\overline{\eta}\zeta/r^2}{\frac{(1-\xi\overline{\eta}/r^2)[r^2(1-\overline{\xi}\eta/r^2)-(\overline{\xi}+\overline{\eta})\zeta]}{(1-\xi\overline{\eta}/r^2)}}\\
&= \frac{r^2(\xi+\eta+\zeta)-\xi\overline{\eta}\zeta}{r^2-\overline{\xi}\eta-\overline{\xi}\zeta-\overline{\eta}\zeta}\\
&= \frac{r^2(\xi+\eta+\zeta)-\xi\overline{\eta}\zeta}{r^2-\overline{\eta}\zeta-\overline{\xi}(\eta+\zeta)}.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Decorre então das equações (3.5) e (3.6) a equação (3.4). Daí segue o resultado. ■

Como a esfera é um espaço simétrico, a transformação de holonomia elementar de $(\mathbb{C},U,\odot)$ é dada por $h(\xi,\eta)=l(\xi,L_\xi^{-1}\eta)$ ver [Sab99], página 157. Decorre deste fato a seguinte

Proposição 3.3.3. *No loop suave $(\mathbb{C},U,\odot)$, a transformação de holonomia elementar é dada por*

$$h(\xi,\eta)\zeta=\frac{1+\overline{\xi}\eta/r^2}{1+\xi\overline{\eta}/r^2}. \tag{3.7}$$

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
h(\xi,\eta)\zeta &= l(\xi, L_{\xi}^{-1}\eta)\zeta \\
&= \frac{1-(\xi\overline{L_{\xi}^{-1}}\eta/r^2)}{1-(\overline{\xi}(L_{\xi}^{-1}\eta)/r^2)}\zeta \\
&= \frac{1-\frac{(\overline{\eta}-\overline{\xi})\xi/r^2}{1+\xi\overline{\eta}/r^2}}{1-\frac{(\eta-\xi)\overline{\xi}/r^2}{1+(\overline{\xi}\eta/r^2)}}\zeta \\
&= \frac{\frac{1+\xi\overline{\eta}/r^2-(\xi\overline{\eta}-\overline{\xi}\xi)/r^2}{1+\xi\overline{\eta}/r^2}}{\frac{1+\overline{\xi}\eta/r^2-(\overline{\xi}\eta-\overline{\xi}\xi)/r^2}{1+(\overline{\xi}\eta/r^2)}} \\
&= \frac{1+\xi\overline{\eta}/r^2-\xi\overline{\eta}/r^2+\overline{\xi}\xi/r^2}{1+\xi\overline{\eta}/r^2}\cdot\frac{1+(\overline{\xi}\eta/r^2)}{1+\overline{\xi}\eta/r^2-\overline{\xi}\eta/r^2+\overline{\xi}\xi/r^2}\zeta \\
&= \frac{1+(\overline{\xi}\eta/r^2)}{1+(\xi\overline{\eta}/r^2)}\cdot\frac{1+\overline{\xi}\xi/r^2}{1+\overline{\xi}\xi/r^2}\zeta \\
&= \frac{1+(\overline{\xi}\eta/r^2)}{1+(\xi\overline{\eta}/r^2)}
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

■

A partir da holonomia elementar definida no ódulo canônico de $(\mathbb{C}, U, \odot)$, podemos então encontrar a variedade geodiodular natural S_r^2, ver Proposição 3.2.5 e Teorema 3.2.6, páginas 44 e 51, respectivamente. O que descreve bem a geometria não-associativa de S_r^2. Continuaremos o estudo de tal objeto calculando comprimentos de arcos em S_r^2 tendo o intuito de verificar que este comporta-se como esperado.

Defina em $(\mathbb{C}, U, \odot)$ seguinte métrica

$$g^{\zeta}(\xi,\eta) = g^0(L_{\zeta}^{-1}\xi, L_{\zeta}^{-1}\eta)$$

em que

$$g^0(a,b) = 2(\overline{a}b + a\overline{b}).$$

Facilmente verificamos que $g^0(a,b)$ é uma forma bilinear, simétrica, positiva definida. De fato, $g^0(a,b)$ satisfaz:

- bilinearidade:

$$
\begin{aligned}
g^0(a+b,c+d) &= 2((\overline{a+b})(c+d)+(a+b)(\overline{c+d})) \\
&= 2(\overline{ab}c + a\overline{ab}) + 2(\overline{ab}d + a\overline{ab}) + 2(\overline{ab}c + b\overline{ab}) + 2(\overline{ab}d + b + \overline{ab}) \\
&= g^0(a,c) + g^0(a,d) + g^0(b,c) + g^0(b,d).
\end{aligned}
$$

- simetria:

$$
\begin{aligned}
g^0(a,b) &= 2(\overline{a}b + a\overline{b}) \\
&= 2(\overline{b}a + b\overline{a}) \\
&= g^0(b,a).
\end{aligned}
$$

- e é positiva definida:
$$\begin{aligned} g^0(a,a) &= 2(\overline{a}\overline{b}a + a\overline{a}\overline{b}) \\ &= 4|a|^2 \geq 0 \end{aligned}$$
além disto,
$$g^0(a,a) = 4|a|^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

Como $g^0(a,b)$ é diferenciável e as translações à esquerda são difeomorfismos cujo diferencial é um transporte paralelo, temos que $g^\zeta(\xi,\eta)$ varia diferenciavelmente. Portanto esta define de fato uma métrica Riemanniana. Assim,

$$g^\zeta(\xi,\eta) = 2\left(\frac{(\xi-\zeta)(\overline{\eta-\zeta})}{(1+\overline{\zeta}\xi/r^2)(1+\overline{\eta}\zeta/r^2)} + \frac{(\overline{\xi-\zeta})(\eta-\zeta)}{(1+\zeta\overline{\xi})(1+\overline{\zeta}\eta/r^2)}\right)$$

Afinal,

$$\begin{aligned} g^\zeta(\xi,\eta) &= g^0(L_\zeta^{-1}\xi, L_\zeta^{-1}\eta) \\ &= g^0\left(\tfrac{\xi-\zeta}{1+\overline{\zeta}\xi/r^2}, \tfrac{\eta-\zeta}{1+\overline{\zeta}\eta/r^2}\right) \\ &= 2\left(\frac{(\xi-\zeta)(\overline{\eta-\zeta})}{(1+\overline{\zeta}\xi/r^2)(1+\overline{\eta}\zeta/r^2)} + \frac{(\overline{\xi-\zeta})(\eta-\zeta)}{(1+\zeta\overline{\xi})(1+\overline{\zeta}\eta/r^2)}\right). \end{aligned}$$

Em particular,
$$g^\zeta(\xi,\xi) = \frac{4|\xi-\zeta|^2}{|1+\overline{\zeta}\xi/r^2|^2}.$$
Seja $\xi = \zeta + d\zeta$, então temos que

$$g(d\zeta,d\zeta) = \frac{4d\zeta d\overline{\zeta}}{(1+|\zeta|^2/r^2)^2}.$$

que corresponde ao elemento de comprimento de arco em S_r^2.

Apêndice A

Variedades Geoodulares Discretas

No presente apêndice, apresentamos a proposta de Nesterov e Sabinin para trabalhar algebricamente com variedades discretas utilizando as estruturas geodiodulares. Apresentando como exemplo a geometria não-associativa discreta de S^2_r.

A principal referência utilizada neste apêndice foi o artigo [Nes06].

A.1 Geometria Discreta Não-associativa

Entende-se por geometria não-associativa o estudo das variedade geodiodulares com o intuito de trabalhar com variedades dotadas de uma conexão afim de forma algébrica. Apresentamos nesta seção o programa de pesquisa sugerido por Alexander I. Nesterov, ver [Nes06], no qual aponta para uma nova ferramenta de estudo de estruturas discretas. Apesar de não haver nenhum resultado físico proveniente desta abordagem ainda, todos os elementos de um novo formalismo estão presentes no programa supracitado.

Para que a geometria discreta seja útil em aplicações físicas, visto que a elaboração de uma Teoria da Gravitação Quântica venha a requerer o uso de um espaço-tempo discreto, esta deve suportar as principais características da geometria diferencial. Uma vez que é preciso omitir a estrutura suave, podemos recorrer apenas à estrutura algébrica. Portanto, é natural utilizar as variedades geodulares (geodiodulares) como um modelo algébrico adequado para o estudo de variedades diferenciáveis de uma conexão afim. Em se tratando de variedades discretas, tomaremos uma variedade geodiodular linear em que os escalares são tomados em um corpo finito. Mais precisamente, nosso objeto em questão é uma variedade geodiodular linear $\mathcal{M} = (M, L, N, (\omega_t)_{t\in\mathcal{F}})$, M variedade discreta, $\mathcal{F}$ corpo finito. Sobre $\mathcal{M}$, temos as seguintes observações a fazer:

1. Tomamos $\mathcal{F}$ um corpo por simplicidade, poderíamos ter tomado os escalares em um anel por exemplo. Os corpos finitos estão bem caracterizados. Tais objetos

são conhecidos na literatura como Corpos de Galois e são denotados por $\mathcal{F}G(p^m)$, em que p um número primo e $m \in \mathbb{N}$. Neste caso, $\mathcal{F}G(p^m)$ possui p^m elementos e $x^{p^m} = x$, $\forall x \in \mathcal{F}G(p^m)$. Ver [Jac80] p. 287-290;

2. O espaço vetorial $\mathcal{M}_a^+ = (M, +_a, *_a)$ atuará como o espaço tangente em $a \in M$, cada $b \in M$ pode ser considerado como um vetor em M_a^+, $\forall a \in M$;

3. Toda curva $(t_a b)_t \in \mathcal{F}$ pode ser considerada como a geodésica que liga $a, b \in M$. O mapa $y \mapsto b \cdot_a y$ significa que o vetor $b \cdot_a y \in \mathcal{M}_b^+$ é o transporte paralelo do vetor $y \in \mathcal{M}_a^+$ ao longo da geodésica $(t_a b)_{t \in \mathcal{F}}$;

4. A presença de curvatura na variedade resulta em uma transformação de holonomia elementar não trivial, i.e.,

$$h^a(x, y) = L_a^y L_y^x L_x^y \neq Id.$$

No nosso contexto, definimos uma "curva" γ em uma variedade discreta M como o conjunto de pontos ordenados de M, não necessariamente distintos

$$\gamma = (a_1, \ldots, a_s), \qquad a_i \in M, \qquad \forall i \in \{1, \ldots, s\}$$

e, além disso, definimos o vetor $y \in M_{a_s}^+$ paralelo ao vetor $x \in M_{a_1}^+$ ao longo de γ como

$$y = L_{a_s}^{a_{s-1}} \circ \ldots \circ L_{a_3}^{a_2} \circ L_{a_2}^{a_1} x \qquad (L_b^a x = b \cdot_a x)$$

Algo que ainda precisa ser ajustado nesta abordagem é o que diz respeito ao cálculo discreto em espaços discretos. Temos que toda função cujo domínio é um produto direto de corpos finitos

$$f : \mathcal{F} \times \ldots \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

é um polinômio. Lembramos que devemos representar os termos do polinômio no grau minimal. No caso do corpo $\mathcal{F}G(p^m)$, por exemplo, $x^{p^m} = x$, i.e., a representação minimal de x^{p^m} é x.

Seja $\mathcal{P}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$, podemos definir a derivada de $\mathcal{P}(x)$

$$\mathcal{P}'(x) = a_1 + \ldots + (a_n \cdot n) x^{n-1}.$$

Devemos ficar atento para a algumas propriedades destes cálculos. Por exemplo, em $\mathcal{F}G(p^m)$ temos $(x^p)' = p(x^{p-1}) = 0$ (sendo p a característica de $\mathcal{F}G(p^m)$).

O Teorema de existência e unicidade de soluções de EDO's com PVI não é válido, ver Exemplo A.1.1. O que significa que no nosso caso, não podemos trabalhar com objetos infinitesimais apenas, a estrutura algébrica de uma variedade geoodular deve sempre ser levada em conta.

Exemplo A.1.1. *Sejam $f(x) = x$, $g(x) = x^p + x$ polinômios tais que $f(x)$,$g(x) \in \mathcal{F}G(p^m)[x]$. Então*

$$\begin{cases} f'(x) = 1 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} g'(x) = px^{(p-1)} + 1 = 1 \\ g(0) = 0 \end{cases} .$$

Logo, $f(x)$ e $g(x)$ são soluções da EDO

$$\varphi'(x) = 1, \quad \varphi(0) = 0.$$

Por fim, a noção de um espaço tangente, campos de vetores, dentre outros, pode ser introduzida. Bem como a noção da conexão afim

$$\nabla_{X_a} Y = \left\{ \frac{d}{dt} (L^a_{\gamma(t)})^{-1}_{*,a} Y_{\gamma(t)} \right\}_{t=0}$$

em que $\gamma(0) = a$, $\dot{\gamma}(0) = X_a$ e X, Y são campos de vetores. Além disto, podemos introduzir de modo canônico a noção de torção e curvatura:

$$\begin{aligned} T(X,Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \\ R(X,Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \end{aligned}$$

em que $[\quad , \quad]$ é o colchete de Lie.

A.2 Exemplo: A Geometria Não-associativa Discreta da Esfera Bidimensional S^2_R

Nesta seção apresentamos a construção da geometria não-associativa discreta de S^2_r. A cada ponto $p = (j,k)$, $j,k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ associamos ao par ordenado (θ_j, φ_k), assumindo $\theta_j = \pi j/n$, $\varphi_k = 2\pi k/n$. Com esta associação, obtemos uma triangulação definida por n^2 pontos alocados na superfície esférica

$$\zeta_p = r \tan(\theta_j/2) e^{i\varphi_k}.$$

A operação não-associativa definida na seção anterior, assume a seguinte forma

$$\zeta_{pq} = \frac{\zeta_p + \zeta_q}{1 - \overline{\zeta_p}\zeta_q/r^2}.$$

Sejam $p = (j,k)$, $q = (l,m)$, podemos escrever ζ_{pq} da seguinte forma

$$\zeta_{pq} = r \tan(\theta_{pq}/2) e^{i\varphi_{pq}}$$

em que

$$\begin{cases} \theta_{pq} = 2\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{r}\left|\dfrac{\zeta_p+\zeta_q}{1-\overline{\zeta_p}\zeta_q/r^2}\right|\right), \\ \varphi_{pq} = \arg(\zeta_p+\zeta_q) - \dfrac{i}{2}ln(l(\zeta_p,\zeta_q)), \\ l(\zeta_p,\zeta_q) = \dfrac{1-\zeta_p\overline{\zeta_q}/r^2}{1-\overline{\zeta_p}\zeta_q/r^2}. \end{cases}$$

A métrica diodular e a holonomia elementar são dadas por

$$g^{\zeta_p}(\zeta_q,\zeta_q) \;=\; \frac{4|\zeta_p-\zeta_q|^2}{|1+\overline{\zeta_p}\zeta_q/r^2|^2} \quad , \quad h(\zeta_p,\zeta_q)\zeta_m \;=\; \frac{1+\overline{\zeta_p}\zeta_q/r^2}{1+\zeta_p\overline{\zeta_q}/r^2}\zeta_m$$

respectivamente.

Até certo ponto, as informações relativas à geometria da esfera estão escondidas na estrutura do loop finito. A simetria esférica está determinada pela relação entre o associador e a holonomia elementar

$$h(\zeta_p,\zeta_q) = l(\zeta_p, L^{-1}_{\zeta_p}\zeta_q).$$

A esfera S^2_r diferenciável pode ser considerada como o resultado do “processo limite” da construção acima fazendo n tender ao infinito. De fato, quanto maior o parâmetro n, maior o número de pontos e as triangulações tornam-se mais finas. Tendo o intuito de obter este processo de forma correta, consideremos $q = p+\delta$, $|\delta| \ll n$. Seja $\delta = (l,m)$, então

$$g^{\zeta_p}(\zeta_q,\zeta_q) = \zeta_p + r\left(\frac{\zeta_p}{\overline{\zeta_p}}\right)^{1/2}\left(\left(1+\frac{|\zeta_p|^2}{r^2}\right)\frac{\pi l}{2n} + i\frac{|\zeta_p|}{r}\frac{2\pi m}{n}\right) + O\left(\left(\frac{\delta}{n}\right)^2\right)$$

e a métrica diodular fica da seguinte forma

$$g^{\zeta_p}(\zeta_q,\zeta_q) = r^2\left(\left(\frac{\pi l}{n}\right)^2 + \left(\frac{4|\zeta|^2}{(1+|\zeta|^2/r^2)^2}\right)\left(\frac{2\pi}{m}n\right)^2\right) + O\left(\left(\frac{|\delta|}{n}\right)^2\right)$$

simplificando, temos

$$g^{\zeta_p}(\zeta_q,\zeta_q) = r^2((\Delta\theta_q)^2 + \sin^2\theta_p(\Delta\varphi_q)^2 + O\left(\left(\frac{|\delta|}{n}\right)^2\right),$$

em que $\Delta\theta_q = \frac{\pi l}{n}$ e $\Delta\varphi_q = \frac{2\pi m}{n}$. Pondo n tendendo ao infinito, temos:

$$\begin{cases} \Delta\theta_q \to d\theta, \qquad \Delta\varphi_q \to d\varphi \\ g^{\zeta_p}(\zeta_q,\zeta_q) \to ds^2 = r^2((d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2) \end{cases}$$

Podemos trabalhar de forma similar para obter a seguinte expressão para a holonomia elementar

$$h(\zeta_p,\zeta_q)\zeta_m = \zeta_m\left(1 + i\frac{\Delta(\zeta_p,\zeta_q)}{r^2} + O\left(\left(\frac{|\delta|}{n}\right)^2\right)\right)$$

em que

$$\Delta(\zeta_p, \zeta_q) = \frac{2|\zeta_p|^2 \Delta_q}{1 + |\zeta_p|^2/r^2}.$$

Apêndice B

Girogrupos versus Loops

A estrutura algébrica proposta por Abraham A. Ungar, os girogrupos e os espaços girovetoriais, surgiu como uma ferramenta adequada para estudar de forma algébrica os espaço hiperbólico, ver [Ung09], e a Física Relativística, ver [Ung98] e [Ung08]. Historicamente, Ungar trabalhou de forma independente aos demais matemáticos que tinham uma afinidade com os loops e os loops suaves. E, da forma como ele apresentou os girogrupos, a primeira vista pareceu se tratar de uma nova estrutura algébrica.

Porém, no artigo [Sab95], Lev V. Sabinin mostrou que os girogrupos do Ungar trantam-se de loops que obedecem propriedades específicas que já foram bem estudadas. Mais precisamente, girogrupos são Bol Loops à esquerda que satisfazem a Identidade de Bruck. Além disto, Sabinin mostrou que algumas das condições postas por Ungar na estrutura que ele definiu, eram desnecessárias. Apesar da ressalva dos matemáticos russos, Ungar não aderiu à teoria dos Loops Suaves, fazendo algumas alterações e correções à sua estrutura algébrica.

Neste apêndice, apresentamos brevemente os girogrupos e como eles podem servir de ferramente para os espaços hiperbólicos, também apresentamos a definição de Bol Loops assim como a Identidade de Bruck. Posteriormente, apresentamos a demonstração da afirmação enunciada no parágrafo acima presente no artigo [SSS98].

As principais referências utilizadas neste apêndice são os artigos [Ung94], [SSS98] e o livro [Ung09].

B.1 Girogrupos e Loops

Em [Ung94], Ungar deu a seguinte

Definição B.1.1 (Girogrupo). *Seja G um conjunto não vazio,*

$$+ : G \times G \to G, \qquad \mathrm{gir}[x;y] : G \to G$$

operações em G, em que gir*é chamado de **girador**.* $(G,+)$ *é um **girogrupo** se satisfaz*

(G.2a)	$x+(y+z)=(x+y)+\text{gir}[x;y]z$	(Giroassociatividade à Direita);
(G.2b)	$(x+y)+z=x+(y+\text{gir}[y;x]z)$	(Giroassociatividade à Esquerda);
(G.3)	$x+y=\text{gir}[x;y](y+x)$	(Girocomutatividade)
(G.4)	$0+x=x+0=x$	(Existência de elemento neutro)
(G.5)	$x+(-x)=(-x)+x=0$	(Existência de um inverso)
(G.6)	$gir[0;y]=id;$	
(G.7)	$\text{gir}[x+y;y]=\text{gir}[x;y]$	(Loop à Esquerda)

Nas publicações mais recentes, Ungar define como um **girogrupo** o par $(G,+)$ que satisfaz as condições (G.2a), (G.4), (G.5), (G.7), e exige que

$$\text{(G.6')}\qquad \text{gir}[x;y](z+w)=\text{gir}[x;y]z+\text{gir}[x;y]w.$$

Enquanto que girogrupos que satisfazem (G.3) Ungar define como **girogrupo girocomutativo**.

No artigo [SSS98], p. 13-15, observa-se que a condição (G.2.b) é redundante e que caso $(G,+)$ satisfaça as condições (G.2a), (G.4), (G.5), (G.6), (G.7), obtemos a condição $(G.6')$. Em [Ung09], página 11, verifica-se que a condição (G.6) pode ser demonstrada na presença de (G.2a), (G.4), (G.5), (G.6') e (G.7). O que justifica a mudança da definição de girogrupo. Utilizando as definições atuais para girogrupos, obtemos que estes são Bol Loops e os girogrupos girocomutativos são Bol Loops que satisfazem a Identidade de Bruck. Definimos estes objetos abaixo.

Definição B.1.2 (Loop à esquerda)**.** *Seja $(G,+)$ um magma. Dizemos que $(G,+)$ é um **loop à esquerda** se L_x são bijeções para todo $x\in G$ e existe elemento neutro à direita.*

Definição B.1.3 (Bol Loop à Esquerda)**.** *Seja $(G,+)$ um loop à esquerda. Dizemos que $(G,+)$ é um Bol loop se satisfaz*

$$x+(y+(x+z))=(x+(y+x))+z \tag{B.1}$$

Definição B.1.4 (Identidade de Bruck)**.** *Dizemos que o magma $(G,+)$ satisfaz a Identidade de Bruck se*

$$x+(y+(y+x))=(x+y)+(x+y) \tag{B.2}$$

Lema B.1.5. *Em girogrupos, $(L_x^{-1})=L_{-x}$.*

Demonstração:

Observe que de (G.7), (G.6) e (G.5), nós temos:

$$\begin{cases} id=\text{gir}[0;y]=\text{gir}[-y;y] \\ id=\text{gir}[x+(-x);-x]=\text{gir}[x;-x] \end{cases}. \tag{B.3}$$

Portanto, decorre de (G.2a) juntamente com (G.5) e (B.3) que

$$\begin{aligned} L_x L_{-x} z &= L_x((-x)+z) \\ &= x+((-x)+z) \\ &= (x-x)+\mathrm{gir}[x;-x]z \\ &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{-y} L_y z &= L_{-y}(y+z) \\ &= (-y)+(y+z) \\ &= (-y+y)+\mathrm{gir}[-y;y]z \\ &= z, \end{aligned}$$

i.e., $(L_x)^{-1} = L_{-x}$. ■

Corolário B.1.6. *Girogrupos são loops à esquerda*

Demonstração:

Decorre do Lema B.1.5 que L_x é bijetiva para todo $x \in G$. Decorre de (G.4) que $0 \in G$ é elemento neutro (portanto elemento neutro à direita) do girogrupo. ■

Lema B.1.7. *Seja $(G,+)$ um girogrupo. Então*

$$\mathrm{gir}[x;y] = l(x,y).$$

Demonstração:

Decorre de (G.2a) que

$$\begin{aligned} L_x L_y z &= L_x(y+z) \\ &= x+(y+z) \\ &= (x+y)+\mathrm{gir}[x;y]z \\ &= L_{x+y}\mathrm{gir}[x;y]z. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathrm{gir}[x;y]z = (L_{x+y})^{-1} L_x L_y = l(x,y).$$

■

Corolário B.1.8. *Em girogrupos, a condição (G.6) é redundante.*

Demonstração:

De fato, decorre de (G.2a) que

$$\begin{aligned} \mathrm{gir}[0;x] &= l(0,x) \\ &= (L_{0+x})^{-1} L_0 L_x \\ &= (L_x)^{-1} L_x \\ &= Id. \end{aligned}$$

■

Lema B.1.9. *Girogrupos girocomutativos satisfazem a identidade de Bruck.*

Demonstração:

De fato, decorre de (G.3) que

$$\begin{aligned} x+y &= \mathrm{gir}[x;y](y+x) \\ &= (L_{x+y})^{-1}L_xL_y(y+x) \end{aligned}$$

i.e.,

$$L_{x+y}(x+y) = L_xL_y(y+x)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (x+y)+(x+y) &= L_x(y+(y+x)) \\ &= x+(y+(y+x)) \end{aligned}$$

que coincide com a identidade de Bruck. ■

Proposição B.1.10. *Seja* $(G,+)$ *um loop.* $(G,+)$ *é um Bol Loop se, e somente se,* $(G,+)$ *satisfaz* $(G.7)$*.*

Demonstração:

Decorre de (G.7) e do Lema (B.1.7) que

$$(L_{x+y}+y)^{-1}L_{x+y}L_y = (L_{x+y})^{-1}L_xL_y \Rightarrow L_{x+y}(L_{(x+y)+y})^{-1}L_{x+y} = L_x$$

Portanto,

$$L_{(x+y)+y} = L_{x+y}(L_x)^{-1}L_{x+y} = L_{x+y}L_{-x}L_{x+y}.$$

Em particular, pondo $y = (-x)+w$, temos

$$L_{w+[(-x)+w]} = L_wL_{-x}L_w$$

Para cada w, $x \in G$. Pondo $x = -q$, temos

$$L_wL_qL_w = L_{w+[(q)+w]},$$

i.e.

$$w+(q+(w+z)) = (w+(q+w))+z$$

que é um Bol Loop à esquerda.

A recíproca pode ser encontrada em [SSS98], página 13. ■

B.2 Girogrupos e o Espaço Hiperbólico

Segue abaixo a geometria não-associativa que pode ser dada ao espaço hiperbólico.

Tome no plano dos complexos $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ e em D defina a seguinte operação:

$$\begin{array}{rccl} + : & \mathbb{D} \times \mathbb{D} & \to & \mathbb{D} \\ & (a, z) & \mapsto & = a + x := \frac{a+z}{1+\bar{a}z} \end{array} . \tag{B.4}$$

Juntamente com o girador (associador)

$$\mathrm{gir}[a, b]z = l(a, b)z = \frac{1 + a\bar{b}}{1 + \bar{a}b}z,$$

Temos que $(\mathbb{D}, +)$ é um girogrupo girocomutativo (Bol Loop que satisfaz a Identidade de Bruck), ver [Ung09], p. 2-3. As figuras abaixo esboçam o papel do girador (associador) e dão um exemplo de que a operação definida acima não é comutativa nem associativa.

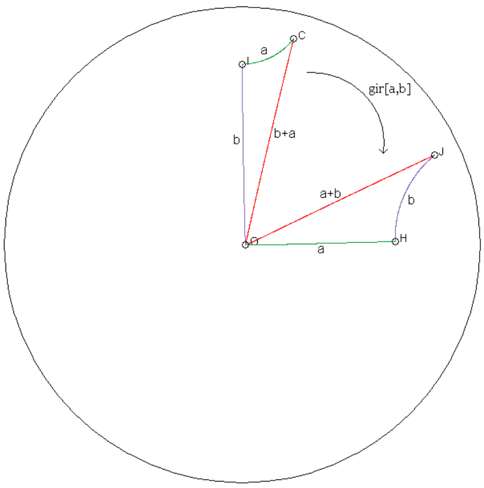

Figura B.1: Não Comutatividade

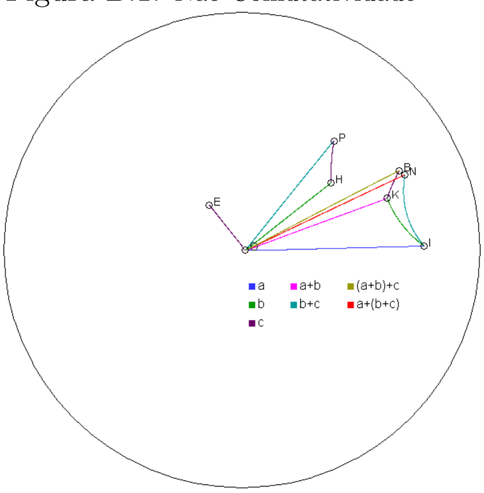

Figura B.2: Não Associatividade

Na figura acima, nos permite visualizar o significado da operação $a + b$:

1. sejam u, v $\in T_0\mathbb{D}$ tais que $\exp_0 u = a$ e $\exp_0 v = b$;

2. seja $v' \in T_a\mathbb{D}$ o transporte paralelo de v ao longo do segmento geodésico de O até a, i.e, $v' = \tau_a^0 v$ e $v = (exp_0)^{-1}b$;

3. então $a + b = \exp_a v' = \exp_a \tau_a^0 (exp_0)^{-1}b$ que corresponde à operação "$\cdot_0$" da estrutura geoodular natural de $\mathbb{D}$.

Podemos tomar a estrutura canônica de $(\mathbb{D}, +)$, $\mathcal{D}$, e a partir da transformação de holonomia elementar de $\mathcal{D}$, h, obter o ódulo holonomial $(\mathcal{D}, h)$. Assim, a partir deste ódulo holonomial, geramos a geometria não-associativa do espaço hiperbólico.

Conclusão

A partir deste trabalho concluímos que as variedades geoodulares e geodiodulares oferecem uma boa ferramenta para o estudo de variedades dotadas de uma conexão afim. Apesar desta estrutura obter tantas exigências em sua definição, obter tal objeto torna-se um trabalho simples. Afinal, visto que um ódulo holonomial está associado à uma única variedade geoodular, dado um loop suave podemos tomar a seu ódulo canônico (que é um ódulo suave) e a partir desta juntamente com a transformação de holonomia elementar obtemos um ódulo holonomial. Ou seja, um loop suave e sua transformação de holonomia elementar determinam unicamente uma variedade geodiodular.

Apesar da similaridade entre os resultados encontrados nas variedades geoodulares e às geodiodulares, justificamos o estudo das variedades geodiodulares apresentado neste trabalho devido à associação que há entre o Espaço Tangente e o Espaço Osculador, ver página 53. Desta forma, utilizando-se da estrutura algébrica não-associativa da variedade, pode-se apresentar alternativas para lidar com objetos presentes nas variedades discretas que não podem ter tratados como seus análogos nas variedades suaves devido à falta da diferenciabilidade desses objetos. Desta forma, as variedades geodiodulares apresentam-se como uma ferramenta que pode ser aplicada em teorias nas quais faz-se o uso de espaços discretos, como a Teoria da Gravitação Quântica.

Independente da equivalência entre as variedades geoodulares e as variedades com conexão afim, outro fato que torna o estudo da geometria não-associativa relevante é o fato de os loops suaves serem um generalização da Teoria de Lie. Para obter este resultado, é necessário realizar um estudo da teoria infinitesimal dos loops suaves, denominada ν-hiperálgebra. Ver [NSa97], páginas 220-226. Ademais, visto que os girogrupos tratam-se de Loops Suaves que satisfazem propriedades adicionais, temos que esta teoria também pode ser aplicada na física relativística.

Referências

[doC05] CARMO, Manfredo P. do. *Geometria Riemanniana*. 3 ed. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2005.

[Jac80] JACBSON, Nathan. *Basic Algebra I*. 2 ed. Nova Iorque, NY: W. H. Freeman, 1985

[Kik64] KIKKAWA, Michihiko. On local loops in affine manifolds, *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I Math.*, v. **28**, n. 2, p. 199-207.

[NSa97] NESTEROV, Alexander I.; SABININ, Lev V. Smooth Loops and Thomas Precessions *Hadronic Journal*, v. **20**, p. 219-237, 1997.

[NSa00] NESTEROV, Alexander I.; SABININ, Lev V. Non-associative geometry and discret structure of spacetime *Comment. Math. Univ. Carolin.*, v. **41**, n. 2, p. 347-357, 2000.

[Nes06] NESTEROV, Alexander I. Gravity with the framework of Nonassociative Geometry. SABININ, L.; SBITNEVA, L.; SHESTAKOV, I. (Ed.), *Nonassociative Algebra and Applications*, p. 299-311. Boca Raton: Capman and Hall/CRC, 2006. (Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics, **246**)

[Pfl90] PFLUGFELDER, Hala O. *Quasigroups and Loops: Introduction* Berlin: Heldermann, 1990. (Sigma Series in Pure Mathematics, **7**)

[Sab72] SABININ, Lev V. On the geometry of loops (Russian), *Abstracts of the 5-th Conference on contemporary problems in Differential Geometry* (Samarkand, 20-24 out. 1972), p. 192, 1972.

[Sab77] SABININ, Lev V. Odules as a new approach te a geometry with a connection, (Russian) *Reports of Ac. of Sci. of the USSR (Math.)*, v. **233**, n. 5, p. 800-803, 1977.

[Sab81] SABININ, Lev V. Methods of Nonassociative Algebra in Differential Geometry (Russian) *Supplement to Russian tranlations of S. Kobayashi and K. Nomizu "Foudations od Differential Geometry"* v. **1**, Nakau Press, Moskow, p.293-339, 1981.

[Sab95] SABININ, Lev V. On the gyrogroups of Hungar *Russ. Math. Surv*, v. **50**, n. 5, p. 1095-1096, 1995.

[SSS98] SABININ, Lev V.; SABININA, Ludmila, L.; SBITNEVA, Larissa V., On the notion of gyrogroup *Aequationes Math.*, v. **56**, p.11-17, 1998.

[Sab99] SABININ, Lev V. *Smooth quasigroups and loops.* Dordrecht, Boston: Kluwer Academic, 1999 (Mathematics and its applications **492**)

[Ung88] UNGAR, Abraham, A. Thomas rotation and the parametrization of the Lorentz transformation group, *Found Phys Lett*, v. **1**, n. 1, p.57-89, 1988.

[Ung89] UNGAR, Abraham, A. Axiomatic approach to the nonassociative group of relativistic velocities, *Found Phys Lett*, v. **2**, n. 2, p.199-203, 1989.

[Ung94] UNGAR, Abraham, A. The holomorphic automorphism group of the complex disk, *Aeq. Math*, v. **47**, n. 2-3, p.240-245, 1994.

[Ung98] UNGAR, Abraham A. From Pythagoras to Einstein: the hyperbolic Pythagorean theorem, *Found. Phys.*, v. **28**, no. 8, p. 1283-1321, 1998.

[Ung08] UNGAR, Abraham A. *Analytic Hyperbolic Geometry and Albert Einstein's Special Theory of Relativity.* Hackensack, NJ: World Scientific, 2008.

[Ung09] UNGAR, Abraham, A. *A gyrovector space approach to hyperbolic geometry.* San Rafael, CA: Morgan and Claypool, 2009 (Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics, **4**)

Índice Remissivo

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170 -110
<http://www.pgmat.ufba.br>