Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT

Dissertação de Mestrado

# Superfícies mínimas em $\mathbb{R}^4$ e um teorema tipo Bernstein

Ana Paula Cruz de Freitas

**Salvador-Bahia**

Fevereiro de 2012

ANA PAULA CRUZ DE FREITAS

# Superfícies mínimas em $\mathbb{R}^4$ e um teorema tipo Bernstein

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal da Bahia , como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Geometria

Orientador: Prof. Dr. José Nelson Bastos Barbosa

Salvador
2012

Freitas, Ana Paula Cruz de.

Superfícies mínimas em $\mathbb{R}^4$ e um teorema tipo Bernstein / Ana Paula Cruz de Freitas. – Salvador: UFBA, 2012.

73 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. José Nelson Bastos Barbosa.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2012.

Referências bibliográficas.

1. Superfícies mínimas. 2. Curvas analíticas complexas. 3. Invariantes geométricos. I. Barbosa, José Nelson Bastos. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 514.7

# Superfícies mínimas em $\mathbb{R}^4$ e um teorema tipo Bernstein

Ana Paula Cruz de Freitas

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 24 de fevereiro de 2012.

**Banca examinadora:**

---

Prof. Dr. José Nelson Bastos Barbosa (Orientador)
UFBA

---

Prof. Dr. André Luís Godinho Mandolesi
UFBA

---

Profa. Dra. Marco Antonio Nogueira Fernandes
UFBA

Aos meus pais; Ana Lucia e Jorge,

“A tarefa nem é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar

o que ninguém ainda pensou sobre aquilo

que todo mundo vê. ”

Arthur Schopenhauer.

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me dar condições para concluir mais uma etapa na minha vida.

Aos meus pais, Ana Lucia e jorge, por acreditarem em mim e por fazerem o impossível para realização de um grande sonho. À toda minha família pelo apoio, amor e força. Às minhas amigas, Roselene, Eliete, Emanuele e Andrêssa.

A todos os meus amigos, em especial, aos meus companheiros de turma: Roberto, Thiago, Marcus, Luiz, Fellipe, Felipe Moscozo e Ângela. Ao meu orientador José Nelson pelos esclarecimentos, paciência, atenção e disponibilidade para me atender. A todos os meus professores, em particular, aos professores (e funcionários também!) do departamento de matemática da UFBA.

À Capes, pelo apoio financeiro. E, também, a todas as pessoas que não mencionei, mas que de uma forma ou de outra contribuíram para a conclusão desse trabalho.

# Resumo

Apresentaremos neste trabalho dois teoremas que caracterizam as curvas analíticas complexas, isto é, os gráficos de funções holomorfas ou anti-holomorfas, que mostraremos serem superfícies mínimas em $\mathbb{R}^4$. O primeiro resultado, que é um Teorema tipo Bernstein para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^4$, caracteriza as curvas analíticas complexas através do Jacobiano. Este teorema é de grande importância, uma vez que alguns resultados tipo Bernstein para superfícies em $\mathbb{R}^4$, obtidos anteriormente, seguem como corolário deste. O segundo teorema caracteriza as curvas analíticas complexas a partir de dois invariantes geométricos, as curvaturas Gaussiana e Normal.

**Palavras-chave:** Superfícies mínimas; Curvas analíticas complexas; Invariantes geométricos.

# Abstract

In this work we present two theorems that characterize the complex analytic curves, that is, the graphs of holomorphic or anti-holomorphic functions; we show that they are minimal surfaces in $\mathbb{R}^4$. The first result, which is a Bernstein type theorem for minimal surfaces in $\mathbb{R}^4$, characterizes the complex analytic curves through the Jacobian. This theorem has great importance, since some Bernstein type results for surfaces in $\mathbb{R}^4$, obtained earlier, follow as corollaries of it. The second theorem characterizes the complex analytic curves from geometric invariants; Gaussian and normal curvatures.

**Keywords:** Minimal surfaces; Complex analytic curves; Geometric invariants.

# Sumário

# Introdução

Uma superfície que tem curvatura média zero em todos os seus pontos é chamada uma *superfície mínima*.

Achar exemplos de superfícies com curvatura média zero em todos os pontos não é, em princípio, uma tarefa fácil. Mesmo para o caso mais simples de superfícies que são gráficos $z = f(x, y)$ de funções diferenciáveis.

Em 1916, S. Bernstein demonstrou o seguinte resultado extraordinário: se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função inteira e suave, cujo gráfico, $G_f$, de $f$ é uma superfície mínima, então $f$ é uma função afim e $G_f$ é um plano.

Foi conjecturado por um longo tempo que o teorema de Bernstein era válido para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ , sendo $n$ um número natural qualquer. Para $n = 3$ sua veracidade foi comprovada por E. De Giorge [6], para $n = 4$ por F. Almgren [1] e para $n = 5, 6, 7$ por Simons [15]. Por outro lado, Bombieri, De Giorge e Giuste [3] provaram que, para $n \geq 8$, existiam soluções da equação de superfícies mínimas que não eram afins.

Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa ou anti-holomorfa, então o gráfico $G_f$ de $f$ em $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ é uma superfície mínima e é chamado de *curva analítica complexa*. Porém, existem gráficos mínimos em $\mathbb{R}^4$ que não são curvas analíticas complexas. Por exemplo, o gráfico da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(e^x - 3e^{-x}) \left( cos\frac{y}{2}, -sin\frac{y}{2} \right).$$

É interessante notar que a imagem do Jacobiano de $f$, dado por $J_f = \frac{1}{8}(e^{2x} - 9e^{-2x})$, é toda a reta real.

O objetivo principal deste trabalho é encontrar sob quais condições geométricas o gráfico de uma aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$, é uma curva analítica complexa. O primeiro resultado foi obtido por Chen e Osserman [4], onde eles provaram que se a diferencial $df$ de $f$ é limitada, então o gráfico de $f$ é um plano. Posteriormente, Simon [14] obteve um resultado mais geral, impondo a condição de limitação do Jacobiano de $f_1$ ou de $f_2$. Supondo $f$ um difeomorfismo, Shoen [13] obteve o mesmo resultado. Além disso, Ni [10] obteve um resultado tipo Bernstein assumindo que $f$ era uma aplicação que preservava área, ou seja, uma aplicação cujo Jacobiano, $J_f$, satisfaz a relação $J_f = 1$. Este resultado foi generalizado por Hasanis, Savas-Halilaj e Vlachos em [8], assumindo apenas que o Jacobiano era limitado.

O primeiro resultado a ser apresentado nesta dissertação é o seguinte Teorema tipo Bernstein, que se encontra em outro trabalho de Hasanis, Savas-Halilaj e Vlachos, em [9].

**Teorema 0.1.** *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função inteira, tal que o gráfico $G_f$ de $f$ é uma superfície mínima em $\mathbb{R}^4$. Assuma que $G_f$ não é um plano. Então, o gráfico de $f$ é uma curva analítica complexa se, e somente se, $J_f(\mathbb{R}^2) \subsetneq \mathbb{R}$. Em particular, se $G_f$ é uma curva analítica complexa, então $J_f(\mathbb{R}^2) = [0, +\infty)$ ou $J_f(\mathbb{R}^2) = (0, +\infty)$ se $f$ é holomorfa, ou $J_f(\mathbb{R}^2) = (-\infty, 0)$ ou $J_f(\mathbb{R}^2) = (-\infty, 0]$ se $f$ é anti-holomorfa.*

Este Teorema tem uma grande importância, visto que resultados tipo Bernstein conhecidos e provados por R. Schoen [13], L. Fu [7], L. Ni [10], e os próprios autores em [8] seguem como consequência deste.

Por outro lado, as curvas analíticas complexas são superfícies caracterizadas, localmente, pela relação $|K| = |K_N|$, onde K e $K_N$ representam a curvatura de Gauss e a curvatura normal, respectivamente. Apresentaremos também uma caracterização de curvas analíticas complexas através destes invariantes geométricos que se encontra em [8].

**Teorema 0.2.** *Seja $G_f$ o gráfico de uma função inteira e suave $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com curvatura Gaussiana $K$ e curvatura normal $K_N$. Se $K_N = cK$, onde $c$ é uma constante, então $G_f$ é uma curva analítica complexa. Mais precisamente, $K_N = K = 0$ e $G_f$ é um plano ou $|c| = 1$ e $G_f$ é uma curva analítica complexa não trivial.*

Iremos mostrar neste trabalho alguns resultados que serão imprescindíveis na demonstração dos teoremas citados anteriormente. No primeiro capítulo, de preliminares em superfícies regulares, daremos os principais conceitos que serão usados nesse trabalho. Além disso, apresentaremos a demonstrar o Teorema de Osserman, peça fundamental na obtenção dos resultados referidos, o qual garante a existência de parâmetros isotérmicos globais para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^n$. No capítulo 2, exibiremos a prova do resultado tipo Bernstein no espaço euclidiano de dimensão 4 e algumas aplicações. Finalmente, no capítulo 3, apresentaremos a demonstração do resultado que caracteriza as curvas analíticas complexas através das curvaturas Gaussiana e Normal.

Capítulo 1

# Superfícies Paramétricas: Teoria Local

## 1.1 Prolegômenos

Seja $(x_1, ..., x_n)$ um ponto em $\mathbb{R}^n$. Uma *superfície* em $\mathbb{R}^n$ é uma transformação diferenciável $X : D \to \mathbb{R}^n$, onde $D$ é um domínio em $\mathbb{R}^2$. Sejam $M$ a matriz Jacobiana associada à diferencial de X em $q \in D$, $dX_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$, e $S$ o subconjunto de $\mathbb{R}^n$ formado pelos pontos $X(u, v)$.

Para dois vetores $v = (v_1, ..., v_n)$ , $w = (w_1, ..., w_n)$, denotaremos o produto interno por

$$\langle v, w\rangle = \sum_{k=1}^{n} v_k w_k,$$

e o produto exterior por

$$v \wedge w;\ v \wedge w \in E^N,\ N = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$$

onde as componentes de $v \wedge w$ são os determinantes

$$\begin{vmatrix} v_i & v_j \\ w_i & w_j \end{vmatrix},\ i < j\ ,$$

dispostos em uma ordem fixa.

Demostraremos uma identidade que será muito útil para nós ao longo do trabalho.

***Identidade de Lagrange***. Para dois vetores $v = (v_1, ..., v_n)$, $w = (w_1, ..., w_n)$ em $\mathbb{R}^n$ obtemos

$$\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} w_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} v_i w_i\right)^2 = \sum_{i<j} (v_i w_j - v_j w_i)^2.$$

**Prova:** Sabemos que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i<j} x_i y_j + \sum_{j<i} x_i y_j.\end{aligned}$$

Particularizando, para $x_i = v_i^2$ e $y_j = w_j^2$, obtemos

$$\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} w_j^2\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 w_i^2 + \sum_{i<j} v_i^2 w_j^2 + \sum_{j<i} v_i^2 w_j^2$$

e para $x_i = v_i w_i = y_i$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i w_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} v_i w_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i w_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i^2 w_i^2 + \sum_{i<j} v_i w_i v_j w_j + \sum_{j<i}^{n} v_i w_i v_j w_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i^2 w_i^2 + \sum_{i<j} v_i w_i v_j w_j + \sum_{i<j}^{n} v_i w_i v_j w_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i^2 w_i^2 + \sum_{i<j} 2 v_i w_i v_j w_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i^2 w_i^2 + \sum_{i<j} \left(v_i^2 w_j^2 + v_j^2 w_i^2 - (v_i w_j - v_j w_i)^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i^2 w_i^2 + \sum_{i<j} v_i^2 w_j^2 + \sum_{i<j} v_j^2 w_i^2 - \sum_{i<j} (v_i w_j - v_j w_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i^2 w_i^2 + \sum_{i<j} v_i^2 w_j^2 + \sum_{j<i} v_i^2 w_j^2 - \sum_{i<j} (v_i w_j - v_j w_i)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} w_j^2\right) - \sum_{i<j} (v_i w_j - v_j w_i)^2.\end{aligned}$$

□

Finalmente, introduziremos a matriz

$$G = (g_{ij}) = M^T M;\ g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_k}{\partial u}\frac{\partial X_k}{\partial u_j} = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_i}, \frac{\partial X}{\partial u_j} \right\rangle, \tag{1.1}$$

e usando a identidade de Lagrange:

$$
\begin{aligned}
det\, G &= g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial X_i}{\partial u_1}\right)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial X_i}{\partial u_2}\right)^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial u_1}\frac{\partial X_i}{\partial u_1}\right)^2 \\
&= \sum_{i<j}\left(\frac{\partial X_i}{\partial u_1}\frac{\partial X_j}{\partial u_2} - \frac{\partial X_j}{\partial u_1}\frac{\partial X_i}{\partial u_2}\right)^2 \\
&= \sum_{i<j}\left(\frac{\partial(X_i, X_j)}{\partial(u,v)}\right)^2 \\
&= \left|\frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2}\right|^2 . \qquad (1.2)
\end{aligned}
$$

**Definição 1.1.** *Uma superfície parametrizada regular $S$ é uma aplicação $X : D \to \mathbb{R}^n$, onde $D$ é um subdomínio de $\mathbb{R}^2$, tal que*

1. *$X$ é diferenciável ;*
2. *Para todo $q = (u, v) \in D$, a diferencial de $X$ em $q$, $dX_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$, é injetora.*

As variáveis $u$, $v$ são os parâmetros da superfície. O subconjunto $S$ de $\mathbb{R}^n$ obtido pela imagem da aplicação $X$, é denominado o traço de $X$.

A condição 2 da definição acima, vai garantir a existência de um plano tangente em cada ponto da superfície. Vejamos abaixo algumas formas de expressar esta condição.

**Lema 1.2.** *Seja $X : D \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável. Para cada ponto em $D$, as seguintes condições são equivalentes:*

1. $dX_q$ é injetora;
2. Os vetores $\frac{\partial X}{\partial u_1}$ , $\frac{\partial X}{\partial u_2}$ são linearmente independentes,
3. A matriz Jacobiana tem posto 2;
4. $\exists$ i , j ; $1 \le i \le j \le n$, tais que $\dfrac{\partial(X_i, X_j)}{\partial(u,v)} \neq 0$, ;
5. $\frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} \neq 0$;
6. det $G > 0$.

Duas superfícies parametrizadas podem ter o mesmo traço. Sendo assim, se $X$ é uma superfície regular podemos obter várias superfícies que têm o mesmo traço de $X$, da seguinte forma:

**Proposição 1.3.** *Seja $X : D \to \mathbb{R}^n$ uma superfície parametrizada regular. Se $h : \tilde{D} \to D$ é uma aplicação diferenciável cujo determinante da matriz Jacobiana não se anula e $h(\tilde{D}) = D$, então $Y = X \circ h$ é uma superfície parametrizada regular que tem o mesmo traço de $X$.*

**Prova:** A aplicação $Y$ é diferenciável pois é uma composição de funções diferenciáveis. Mostremos então, que det $\tilde{G} > 0$, onde $\tilde{G} = \tilde{M}^T\tilde{M}$, sendo $\tilde{M}$ a matriz Jacobiana associada a diferencial de $Y$ em $q \in \tilde{D}$. Seja $U$ a matriz Jacobiana associada a diferencial de $h$ em $q$. Como $h$ é um difeomorfismo temos que det $h \neq 0$. Observe que $\tilde{M} = MU$. Sendo assim,

$$det\, \tilde{G} = det\, (U^T M^T MU) = det\, (U^T GU) = det\, G(det\, U)^2 > 0.$$

$\square$

Seja $X(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, uma superfície parametrizada regular. Se considerarmos $u_1$ e $u_2$ como funções diferenciáveis de um parâmetro $t$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, obtemos uma curva diferenciável $\alpha(t) = X(u_1(t), u_2(t))$ cujo traço está contido na superfície descrita por $X$. Dizemos que $\alpha$ é uma curva da superfície e definiremos um vetor tangente à superfície como sendo o vetor tangente a uma curva da superfície. Mais precisamente,

**Definição 1.4.** *Se $X(u, v)$ é uma superfície parametrizada regular, dizemos que um vetor $w$ de $\mathbb{R}^n$ é um vetor tangente a $X$ em $q = (u_1(t_0), u_2(t_0))$ se $w = \alpha'(t_0)$, onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva da superfície.*

**Definição 1.5.** *O plano tangente a $X$ em $q$ é o conjunto de todos os vetores tangentes a $X$ em $q$, que denotamos por $\Pi$ ou $\Pi(q)$.*

Observamos que os conceitos de vetor tangente e plano tangente são definidos em um ponto $q$ do domínio de $X$ e não no ponto $X(q)$, já que a superfície $X$ pode ter auto-interseção.

**Corolário 1.6.** *O plano tangente, $\Pi(q)$, é o plano de $\mathbb{R}^n$ gerado pelos vetores $\frac{\partial X}{\partial u}$ e $\frac{\partial X}{\partial v}$.*

**Prova:** Se $w \in \Pi(q)$, então $w = \alpha'(t_0)$ onde $\alpha(t) = X(u_1(t), u_2(t))$. Portanto,

$$\begin{aligned} w &= \alpha'(t_0) \\ &= \frac{d}{dt}(X(u(t), v(t)))|_{t=t_0} \\ &= \frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0)u'(t_0) + \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0)v'(t_0), \end{aligned}$$

isto é, $w$ é uma combinação linear dos vetores $\frac{\partial X}{\partial u_1}$ e $\frac{\partial X}{\partial u_2}$ em $(u_0, v_0)$.

Reciprocamente, suponhamos que $w = a\frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) + b\frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0)$, então existe uma curva $\alpha(t)$ da superfície, tal que $(u_0, v_0) = (u_1(0), u_2(0))$ e $\alpha'(0) = w$. De fato, basta considerar

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t)),$$

onde $u(t) = u_0 + at$ e $v(t) = v_0 + bt$. $\square$

Para desenvolver a teoria local das superfícies vamos introduzir duas formas quadráticas. A primeira, que veremos a seguir, está relacionada com o comprimento de curvas em uma superfície, ângulo entre vetores e área de subdomínios da superfície.

**Definição 1.7.** *Seja $X : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ uma superfície parametrizada regular, $\forall\ q \in D$ a aplicação*

$$\begin{aligned} I_q : \Pi(q) &\to \mathbb{R} \\ w &\to \langle w, w \rangle \end{aligned}$$

*é denominada a primeira forma quadrática de $X$ em $q$.*

Consideremos uma superfície dada por $X(u_1(t), u_2(t))$ e um ponto $q = (u_0, v_0)$. Então um vetor $w \in \Pi(q)$ é da forma

$$w = a\frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) + b\frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0),$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$I_q(w) = a^2 \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle + 2ab \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + b^2 \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle.$$

Usando a notação

$$E(u_0,v_0) = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle (u_0,v_0) = g_{11},$$
$$F(u_0,v_0) = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle (u_0,v_0) = g_{12},$$
$$G(u_0,v_0) = \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle (u_0,v_0) = g_{22},$$

segue que

$$I_q(w) = a^2E(u_0,v_0) + 2abF(u_0,v_0) + b^2G(u_0,v_0),$$

ou

$$I_q(w) = a^2g_{11} + 2abg_{12} + b^2g_{22}.$$

Variando $(u(t),v(t))$ temos funções $E(u_1(t),u_2(t))$, e $F(u_i(t),u_j(t))$ e $G(u_i(t),u_j(t))$ diferenciáveis, que são denominadas os *coeficientes da primeira forma quadrática.* As funções $E, F\, e\, G$ satisfazem as seguintes propriedades:

1. $E(u,v) > 0$ e $G(u,v) > 0$ para todo $(u,v)$, pois os vetores $X_u$ e $X_v$ são não nulos;

2. $E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v) > 0$. De fato, $E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v) = det\ G > 0$.

**Definição 1.8.** *Seja $X : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ uma superfície parametrizada regular. Fixado $q = (u_0,v_0) \in U$ e $N \in \Pi^{\perp}$, a segunda forma quadrática de $X$ em $q$, segundo o vetor normal $N$, é uma aplicação $\Pi_q : T_qX \to \mathbb{R}$, que para cada vetor $w \in T_qX$ associa $\Pi_q$ da seguinte forma: se $\alpha(t) = X(u(t),v(t))$ é uma curva diferenciável da superfície, tal que $(u(t_0),v(t_0)) = q$ e $\alpha'(t) = w$, então definimos $\Pi_q(w) = \langle \alpha''(t_0), N(u_0,v_0)\rangle$.*

Vamos verificar que $\Pi_q(w)$ não depende da curva escolhida. Seja $w = aX_u(u_0,v_0) + bX_v(u_0,v_0)$, consideremos uma curva $\alpha(t) = X(u(t),v(t))$ tal que $(u(t_0),v(t_0)) = q$ e $\alpha'(t_0) = w$, isto é, $(u(t_0),v(t_0)) = (u_0,v_0)$, $(u'(t_0),v'(t_0)) = (a,b)$. Como

$$\alpha'(t) = u'(t)X_u(u(t),v(t)) + v'(t)X_v(u(t),v(t))$$

e

$$\begin{aligned} \alpha''(t) \;&=\; u''(t)X_u(u(t),v(t)) + (u'(t))^2X_{uu}(u(t),v(t)) + \\ &\quad\; 2u'(t)v'(t)X_{uv}(u(t),v(t)) + (v'(t))^2X_{vv}(u(t),v(t)) + \\ &\quad\; v''(t)X_v(u(t),v(t)), \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\Pi_q(w) &= \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0)\rangle \\
&= (u'(t))^2\langle X_{uu}, N\rangle(u_0, v_0) + 2u'(t)v'(t)\langle X_{uv}, N\rangle(u_0, v_0) + v'(t))^2\langle X_{vv}, N\rangle(u_0, v_0) \\
&= a^2\langle X_{uu}, N\rangle(u_0, v_0) + 2ab\langle X_{uv}, N\rangle(u_0, v_0) + b^2\langle X_{vv}, N\rangle(u_0, v_0),
\end{aligned}$$

onde a última expressão não depende da curva $\alpha$. Usando a notação

$$e(u_0, v_0) = \langle X_{uu}, N\rangle(u_0, v_0) = b_{11}(N),$$

$$f(u_0, v_0) = \langle X_{uv}, N\rangle(u_0, v_0) = b_{12}(N),$$

$$g(u_0, v_0) = \langle X_{uu}, N\rangle(u_0, v_0) = b_{22}(N),$$

teremos

$$\Pi_q(w) = a^2 e(u_0, v_0) + 2abf(u_0, v_0) + b^2 g(u_0, v_0).$$

Variando $(u, v)$ temos funções diferenciáveis $e(u, v)$, $f(u, v)$, $g(u, v)$, que são denominadas *coeficientes da segunda forma quadrática* da superfície parametrizada $X$.

**Definição 1.9.** *Sejam $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular, $N \in \Pi^{\perp}$ arbitrário e $q = (u_0, v_0)$. A função curvatura normal em $q$ segundo o vetor normal $N$ é uma aplicação $k_n^N : T_qX - \{0\} \to \mathbb{R}$ que para cada vetor $w \in T_qX$ não nulo, associa*

$$k_n^N(w) = \frac{\Pi_q(w)}{I_q(w)}.$$

**Observação:** Se $w \in T_qX$, $w \neq 0$, então $k_n^N(\lambda w) = k_n^N(w)$ para todo número real $\lambda \neq 0$. De fato, seja $w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0)$ onde $(a, b) \neq (0, 0)$. Denotando por $e_0$, $f_0$, $g_0$ os coeficientes da segunda forma fundamental em $(u_0, v_0)$, então

$$\begin{aligned}
k_n^N(\lambda w) &= \frac{\Pi_q(\lambda w)}{I_q(\lambda w)} \\
&= \frac{\lambda^2 a^2 e_0 + 2\lambda^2 abf_0 + \lambda^2 b^2 g_0}{\lambda^2\langle w, w\rangle} \\
&= \frac{a^2 e_0 + 2abf_0 + b^2 g_0}{\langle w, w\rangle} \\
&= k_n^N(w).
\end{aligned}$$

Como consequência deste fato, podemos falar na curvatura normal em $q$, $k_n^N$, segundo uma direção tangente à superfície .

**Proposição 1.10.** *Sejam $X(u,v)$ uma superfície parametrizada regular e $k_n^N$ a função curvatura normal de $X$ em $q=(u_0,v_0)$, segundo o vetor normal $N$. Então existem vetores $w_1, w_2 \in T_qX$ tais que $k_1 = k_n^N(w_1)$ e $k_2 = k_n^N(w_2)$ são os valores mínimo e máximo da função $k_n^N$.*

**Prova:** Se $k_n^N$ é uma função constante, então quaisquer dois vetores de $T_qX$ satisfazem as condições da proposição. Suponhamos que $k_n^N$ não é constante. Consideremos a função $\tilde{k}_n^N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{k}_n^N(a,b) = k_n^N(aX_u(q) + bX_v(q)), \quad (a,b) \neq (0,0),$$

isto é,

$$\tilde{k}_n^N(a,b) = \frac{a^2 b_{11}(N) + 2ab b_{12}(N) + b^2 b_{22}(N)}{a^2 g_{11} + 2ab g_{12} + b^2 g_{22}}.$$

Esta função é diferenciável já que $(a,b) \neq (0,0)$. Além disso, para todo $\lambda \neq 0$, $\tilde{k}_n^N(\lambda a, \lambda b) = \tilde{k}_n^N(a,b)$. Portanto, para obter os valores mínimo e máximo da função $\tilde{k}_n^N$, basta restringir $\tilde{k}_n^N$ a uma circunferência $C$ de $\mathbb{R}^2$ dada por $a^2 + b^2 = 1$. Como $\tilde{k}_n^N$ é contínua, existem pontos $(a_1, b_1)$ e $(a_2, b_2)$ de $C$ tais que

$$k_1(N) = \tilde{k}_n^N(a_1, b_1) \quad e \quad k_2(N) = \tilde{k}_n^N(a_2, b_2)$$

são, respectivamente, o mínimo e o máximo da função $\tilde{k}_n^N$ restrita a $C$. Portanto,

$$k_1 \leq \tilde{k}_n^N(a,b) \leq k_2,$$

para todo $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Além disso, como $k_n^N$ não é constante, $k_1 < k_2$. Consideremos agora os vetores de $T_qX$

$$w_1 = a_1 X_u(q) + b_1 X_v(q),$$

$$w_2 = a_2 X_u(q) + b_2 X_v(q).$$

Pela própria definição de $\tilde{k}_n^N$, temos que para todo $w \in T_qX \setminus \{0\}$,

$$k_1 = k_n^N(w_1) \leq k_n^N(w) \leq k_n^N(w_2) = k_2.$$

□

Com a notação da proposição anterior, os vetores $w_1$ e $w_2$ são chamados *vetores principais* de $X$ em $q$ e as curvaturas $k_1(N) = max\ k_n^N$ e $k_2(N) = min\ k_n^N$ são denominadas *curvaturas principais* de $X$ em $q$ com respeito a normal $N$. A semissoma de $k_1(N)$ e $k_2(N)$,

$$H(N) = \frac{k_1(N) + k_2(N)}{2},$$

é chamada *curvatura média* de $X$ em $q$.

Note que $k_1(N)$ e $k_2(N)$ são as raízes da equação

$$det(b_{ij}(N) - \lambda g_{ij}) = 0.$$

De fato, se $k_0$ é uma curvatura principal em $q$, na direção de $w = a_0 X_u(q) + b_0 X_v(q)$ com respeito à normal $N$, então $\frac{\partial \tilde{k}_n^N}{\partial a_0} = \frac{\partial \tilde{k}_n^N}{\partial b_0} = 0$. Isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{k}_n^N}{\partial a_0} &= (2a_0 b_{11}(N) + 2b_0 b_{12}(N)) I_q(w) - \Pi_q(w)(2a_0 g_{11} + 2b_0 g_{12}) \\ &= (2a_0 b_{11}(N) + 2b_0 b_{12}(N)) I_q(w) - k_0 I_q(w)(2a_0 g_{11} + 2b_0 g_{12}) \\ &= 2I_q(w)((a_0 b_{11}(N) + b_0 b_{12}(N)) - k_0(a_0 g_{11} + b_0 g_{12})) \\ &= 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{k}_n^N}{\partial b_0} &= (2b_0 b_{22}(N) + 2a_0 b_{12}(N)) I_q(w) - \Pi_q(w)(2b_0 g_{22} + 2a_0 g_{12}) \\ &= (2b_0 b_{22}(N) + 2a_0 b_{12}(N)) I_q(w) - k_0 I_q(w)(2b_0 g_{22} + 2a_0 g_{12}) \\ &= 2I_q(w)((a_0 b_{12}(N) + b_0 b_{22}(N) - k_0(a_0 g_{12} + b_0 g_{22})) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (b_{11}(N) - k_0 g_{11}) a_0 + (b_{12}(N) - k_0 g_{12}) b_0 &= 0, \\ (b_{12}(N) - k_0 g_{12}) a_0 + (b_{22}(N) - k_0 g_{22}) b_0 &= 0. \end{aligned}$$

Segue-se do fato de que $(a_0, b_0)$ é uma solução não trivial do sistema acima, que o determinante

$$\begin{vmatrix} b_{11}(N) - k_0 g_{11} & b_{12}(N) - k_0 g_{12} \\ \\ b_{12}(N) - k_0 g_{12} & b_{22}(N) - k_0 g_{22} \end{vmatrix} = 0$$

isto é, $k_0$ satisfaz a equação

$$\lambda^2 - \frac{b_{11}(N)g_{11} - 2b_{12}(N)g_{12} + b_{22}(N)g_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\lambda + \frac{b_{11}(N)b_{22}(N) - b_{12}(N)^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = 0.$$

Pela relação entre os coeficientes de uma equação do segundo grau e as raízes da equação concluímos que

$$H(N) = \frac{b_{11}(N)g_{11} - 2b_{12}(N)g_{12} + b_{22}(N)g_{22}}{2det(g_{ij})}. \tag{1.3}$$

Considere o funcional $H : \Pi^{\perp} \to \mathbb{R}$ definido em (1.3). Como os $b_{ij}(N)$ são lineares em $N$, temos que esse funcional é linear em $N$ para $N \in \Pi^{\perp}$. Pelo Teorema de Representação de Riesz, existe um único vetor $H \in \Pi^{\perp}$ tal que

$$H(N) = \langle H, N \rangle. \tag{1.4}$$

O vetor $H$ assim definido é chamado o *vetor curvatura média* de $X$ em $q$. Se $\{e_1, ..., e_{n-2}\}$ é uma base ortonormal de $\Pi^{\perp}$ , o vetor curvatura média $H$ pode ser expresso por

$$H = \sum_{k=1}^{n-2} H(e_k)e_k. \tag{1.5}$$

**Definição 1.11.** *A superfície $S$ é uma superfície mínima se o vetor curvatura média é nulo em todo ponto.*

Em virtude de (1.4) e (1.5), $H = 0$ se e somente se $H(N) = 0$ para todo $N \in \Pi^{\perp}$. Portanto, usando (1.3), superfícies mínimas são caracterizadas em termos da primeira e segunda forma fundamental pela equação

$$b_{11}(N)g_{11} - 2b_{12}(N)g_{12} + b_{22}(N)g_{22} = 0, \ \forall N \in \Pi^{\perp}. \tag{1.6}$$

## 1.2 Superfícies não-paramétricas

Nesta seção, iremos considerar uma escolha especial de parâmetros que serão de grande utilidade. Diremos que uma superfícíe $S$, definida por $X(u,v)$, está na *forma não-paramétrica* se :

$$X(u,v) = (u, v, f_3(u,v), ..., f_n(u,v)).$$

Note que uma superfície não paramétrica é automaticamente regular. De fato, basta notar que $\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)} = 1$.

Para o restante da seção, iremos calcular os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental, com o objetivo de encontrarmos a equação de superfícies mínimas para superfícies na forma não-paramétrica em $\mathbb{R}^n$.

Se $S$ é uma superfície na forma não-paramétrica, então

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{\partial f_3}{\partial u}, ..., \frac{\partial f_n}{\partial u}\right), \quad \frac{\partial X}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{\partial f_3}{\partial v}, ..., \frac{\partial f_n}{\partial v}\right), \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \left(0, 0, \frac{\partial^2 f_3}{\partial u \partial v}, ..., \frac{\partial^2 f_n}{\partial u \partial v}\right).$$

Assim,

$$g_{11} = 1 + \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{\partial f_k}{\partial u}\right)^2, \quad g_{12} = \sum_{k=3}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial u}\frac{\partial f_k}{\partial v}, \quad g_{22} = 1 + \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{\partial f_k}{\partial v}\right)^2.$$

Usando (1.7), deduzimos que

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = \left(0, 0, \frac{\partial^2 f_3}{\partial u^2}, ..., \frac{\partial^2 f_n}{\partial u^2}\right), \quad \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = \left(0, 0, \frac{\partial^2 f_3}{\partial v^2}, ..., \frac{\partial^2 f_n}{\partial v^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \left(0, 0, \frac{\partial^2 f_3}{\partial u \partial v}, ..., \frac{\partial^2 f_n}{\partial u \partial v}\right).$$

Portanto, para um vetor normal arbitrário $N = (N_1, ..., N_n)$, temos

$$b_{11} = \sum_{k=3}^{n} N_k \frac{\partial^2 f_k}{\partial u^2}, \quad b_{12} = \sum_{k=3}^{n} N_k \frac{\partial^2 f_k}{\partial u \partial v}, \quad b_{22} = \sum_{k=3}^{n} N_k \frac{\partial^2 f_k}{\partial v^2}.$$

A equação (1.6) para superfícies mínimas fica na forma

$$\left(1+\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{\partial f_k}{\partial v}\right)^2\right)\left(\sum_{k=3}^{n}N_k\frac{\partial^2 f_k}{\partial u^2}\right)-2\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial u}\frac{\partial f_k}{\partial v}\right)\left(\sum_{k=3}^{n}N_k\frac{\partial^2 f_k}{\partial u\partial v}\right)$$
$$+\left(1+\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{\partial f_k}{\partial u}\right)^2\right)\left(\sum_{k=3}^{n}N_k\frac{\partial^2 f_k}{\partial v^2}\right)=0.$$

Logo,

$$\sum_{k=3}^{n}\Bigg[\left(1+\sum_{m=3}^{n}\left(\frac{\partial f_m}{\partial v}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f_k}{\partial u^2}-2\left(\sum_{m=3}^{n}\frac{\partial f_m}{\partial u}\frac{\partial f_m}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 f_k}{\partial u\partial v}$$
$$+\left(1+\sum_{m=3}^{n}\left(\frac{\partial f_m}{\partial u}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f_k}{\partial v^2}\Bigg]N_k=0.$$

para todo vetor normal $N$.

Escolhendo $N_3,...,N_n$ arbitrários, tais que $N_k\neq 0$ para $k\in\{3,...,n\}$, temos

$$\left(1+\sum_{m=3}^{n}\left(\frac{\partial f_m}{\partial v}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f_k}{\partial u^2}-2\left(\sum_{m=3}^{n}\frac{\partial f_m}{\partial u}\frac{\partial f_m}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 f_k}{\partial u\partial v}+\left(1+\sum_{m=3}^{n}\left(\frac{\partial f_m}{\partial u}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f_k}{\partial v^2}=0,$$

$k=3,...,n$.

Introduzindo a notação

$$f(u,v)=(f_3,...,f_n),\quad p=\frac{\partial f}{\partial u},\quad q=\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$r=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2},\quad s=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v},\quad t=\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \tag{1.8}$$

teremos

$$\left(1+\left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|^2\right)\frac{\partial^2 f_k}{\partial u^2}-2\left\langle\frac{\partial f}{\partial u},\frac{\partial f}{\partial v}\right\rangle\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\left(1+\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=0, \tag{1.9}$$

ou

$$\left(1+|q|^2\right)r-2\langle p,q\rangle s+\left(1+|p|^2\right)t=0. \tag{1.10}$$

Essa é a *equação de superfícies mínimas* para superfícies na forma não-paramétrica em $\mathbb{R}^n$. Com a segunda notação vetorial utilizada, os coeficientes da primeira forma fundamental ficam na forma

$$g_{11} = 1 + |p|^2, \quad g_{12} = \langle p, q \rangle, \quad g_{22} = 1 + |q|^2. \tag{1.11}$$

Portanto,

$$det g_{ij} = 1 + |p|^2 + |q|^2 + |p|^2|q|^2 - \langle p, q \rangle^2. \tag{1.12}$$

Denotaremos por $W$ a raiz quadrada do determinante da matriz $G$, isto é,

$$W = \sqrt{det\ g_{ij}}. \tag{1.13}$$

Segundo o resultado abaixo, toda superfície regular é, localmente, solução da equação de superfícies mínimas.

**Proposição 1.12.** *Se $S$ é uma superfície regular dada por $X(u_1, u_2) = (x_1, ..., x_n)$, então existe uma vizinhança $V$ de cada ponto de $S$, tal que a superfície $\Sigma$ obtida pela restrição de $X$ a $V$ tem uma reparametrização $\tilde{\Sigma}$ na forma não-paramétrica.*

**Prova:**

Seja $a$ um ponto de $S$. Como $S$ é regular, $\exists$ i , j ; $1 \leq i \leq j \leq n$, tais que $\dfrac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u, v)} \neq 0$. Suponha, sem perda de generalidade, $i = 1$ e $j = 2$. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, existe uma vizinhança $V$ de $a$, tal que a aplicação $h : (u_1, u_2) \to (x_1, x_2)$ é um difeomorfismo. A reparametrização $\tilde{X} = X \circ h^{-1}$ está na forma não-paramétrica e define $\tilde{\Sigma}$. $\square$

## 1.3 Parâmetros isotérmicos

Ao estudarmos propriedades que são independentes de parâmetros, é conveniente escolher parâmetros de modo que as propriedades geométricas da superfície sejam refletidas no plano. Um exemplo pode ser dado por uma aplicação conforme, de modo que ângulos entre curvas na superfície são iguais a ângulos entre as correspondentes curvas no plano. Analiticamente, essa condição é expressa em termos da primeira forma fundamental por

$$g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}, \quad \lambda = \lambda(u, v) > 0. \tag{1.14}$$

Os parâmetros $u, v$ satisfazendo essas condições são chamados *parâmetros isotérmicos.*

Muitas das expressões obtidas na teoria de superfície simplificam-se consideravelmente quando se refere a parâmetros isotérmicos. Por exemplo,

$$det(g_{ij}) = \lambda^4 \tag{1.15}$$

e a fórmula (1.6), para curvatura média, torna-se

$$H(N) = \frac{b_{11}(N) + b_{22}(N)}{2\lambda^2}. \tag{1.16}$$

Temos a seguinte fórmula usual para o Laplaciano do vetor coordenada de uma superfície arbitrária.

**Lema 1.13.** *Se $S$ é uma superfície regular definida por $X(u, v)$ onde $u, v$ são parâmetros isotérmicos. Então*

$$\Delta X = 2\lambda H \tag{1.17}$$

*onde $H$ é o vetor curvatura média.*

**Prova:** Uma vez que $u, v$ são parâmetros isotérmicos, temos

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle, \quad \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle = 0.$$

Diferenciando a primeira equação com respeito a $u$, e a segunda com respeito a $v$, obtemos

$$\left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle.$$

Assim,

$$\left\langle \Delta X, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle = 0, \;\; para \;\; u = u, v.$$

Por conseguinte, $\Delta X$ é um vetor perpendicular ao plano tangente a $S$. Mas se $N$ é um vetor normal arbitrário de $S$, temos

$$\begin{aligned} \langle \Delta X, N \rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}, N \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}, N \right\rangle \\ &= b_{11}(N) + b_{22}(N) \\ &= 2\lambda^2 H(N) \\ &= 2\lambda^2 \langle H, N \rangle \end{aligned}$$

por (1.16). $\square$

O lema a seguir é consequência imediata do resultado que acabamos de demonstrar.

**Lema 1.14.** *Se $X(u,v)$ define uma superfície regular $S$ em parâmetros isotérmicos, então $S$ é uma superfície mínima se, e somente se, $x_k(u_i,u_j)$ são funções harmônicas.*

Assim, superfícies mínimas surgem naturalmente em um contexto diferente daquele de minimizar área. Desejamos prosseguir ainda mais com a conexão entre superfícies mínimas e funções harmônicas.

Introduzimos a seguinte notação. Dada uma superfície $X(u_i,u_j)$, consideremos a função complexa

$$\phi_k(\zeta) = \frac{\partial x_k}{\partial u} - i\frac{\partial x_k}{\partial v}; \quad \zeta = u + iv. \tag{1.18}$$

Notamos as identidades:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \phi_k^2(\zeta) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial x_k}{\partial u}\right)^2 - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial x_k}{\partial v}\right)^2 - 2i\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v} \\
&= \left|\frac{\partial X}{\partial u}\right|^2 - \left|\frac{\partial X}{\partial v}\right|^2 - 2i\left\langle\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}\right\rangle \\
&= g_{11} - g_{22} - 2ig_{12}.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\phi_k(\zeta)|^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial x_k}{\partial u}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial x_k}{\partial v}\right)^2 = g_{11} + g_{22}. \tag{1.20}$$

Podemos inferir diretamente as seguintes propriedades das funções $\phi_k(\zeta)$:

**(i)** $\phi_k(\zeta)$ é analítica em $(\zeta) \Longleftrightarrow x_k$ são harmônicas em $u,v$;

**(ii)** $u,v$ são parâmetros isotérmicos $\Longleftrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n} \phi_k^2(\zeta) \neq 0. \tag{1.21}$$

**(iii)** Se $u, v$ são parâmertros isotérmicos, então $S$ é regular $\Longleftrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n} |\phi_k(\zeta)|^2 \neq 0. \tag{1.22}$$

**Lema 1.15.** *Se $X(u,v)$ define uma superfície regular mínima, sendo $u_i, u_j$ parâmetros isotérmicos, então as funções $\phi_k(\zeta)$ definidas por (1.18) são analíticas e satisfazem as equações (1.21) e (1.22).*

Os resultados anteriores são baseados na suposição que a superfície pode ser representada localmente em termos de parâmetros isotérmicos. Contudo, a existência de tais parâmetros não é óbvia, e no caso de superfícies $C^1$ nem sempre é verdade. Para superfícies $C^2$ existe um teorema geral garantindo a existência, mas no caso de superfícies mínimas podemos dar uma prova elementar.

**Lema 1.16.** *Para todo ponto regular de uma superfície mínima $S$, existe uma vizinhança em que existe uma reparametrização de $S$ em termos de parâmetros isotérmicos.*

**Prova:** Pela proposição (1.12), podemos encontrar uma vizinhança de um ponto regular de $S$ que pode ser representada na forma não-paramétrica. Temos então a equação

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1+|q|^2}{W}\right) &= \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\langle p,q\rangle}{W}\right),\\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\langle p,q\rangle}{W}\right) &= \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1+|p|^2}{W}\right),\end{aligned} \tag{1.23}$$

satisfeita em algum disco $(u-a_1)^2 + (v-a_2)^2 < R^2$ (Ver Osserman [11]). Essas equações implicam a existência de funções $F(u,v)$, $G(u,v)$ no disco, satisfazendo

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{1+|p|^2}{W}, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\langle p,q\rangle}{W},\\ \frac{\partial G}{\partial u} &= \frac{\langle p,q\rangle}{W}, \quad \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{1+|q|^2}{W}.\end{aligned} \tag{1.24}$$

Sejam

$$\xi_1 = u + F(u,v), \qquad \xi_2 = v + G(u,v). \tag{1.25}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi_1}{\partial u} &= 1+\frac{1+|p|^2}{W}, \qquad \frac{\partial \xi_1}{\partial v}=\frac{\langle p,q\rangle}{W},\\ \frac{\partial \xi_2}{\partial u} &= \frac{\langle p,q\rangle}{W}, \qquad \frac{\partial \xi_2}{\partial v}=1+\frac{1+|q|^2}{W}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}J=\frac{\partial(\xi_1,\xi_2)}{\partial(u,v)} &= \left(1+\frac{1+|p|^2}{W}\right)\left(1+\frac{1+|q|^2}{W}\right)-\left(\frac{\langle p,q\rangle}{W}\right)^2\\ &= 1+\frac{1+|q|^2}{W}+\frac{1+|p|^2}{W}+\left(\frac{1+|p|^2}{W}\right)\left(\frac{1+|q|^2}{W}\right)-\left(\frac{\langle p,q\rangle}{W}\right)^2\\ &= 1+\frac{1+|q|^2}{W}+\frac{1+|p|^2}{W}+\frac{(1+|p|^2)(1+|q|^2)}{W^2}-\frac{(\langle p,q\rangle)^2}{W^2}\\ &= 1+\frac{1+|q|^2}{W}+\frac{1+|p|^2}{W}+\frac{(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)}{W^2}\\ &= 2+\frac{2+|q|^2+|p|^2}{W}>0.\end{aligned}$$

Consequentemente, a transformação (1.25) tem uma inversa local $(\xi_1,\xi_2)\to(u_i,u_j)$ e funções $x_x = f_k(u_i,u_j)$ para $k=3,...,n,$. Podemos então representar a superfície em termos de parâmetros $\xi_1,\xi_2$. Seja $A$ a matriz jacobiana da aplicação $(u_i,u_j)\to(\xi_1,\xi_2)$. Então,

$$A=\frac{1}{J}\begin{pmatrix}\frac{\partial \xi_2}{\partial v} & -\frac{\partial \xi_1}{\partial v}\\ & \\ -\frac{\partial \xi_2}{\partial u} & \frac{\partial \xi_1}{\partial u}\end{pmatrix}.$$

Segue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \xi_1} &= \frac{W+1+|q|^2}{JW}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \xi_1}=-\frac{\langle p,q\rangle}{JW},\\ \frac{\partial u}{\partial \xi_2} &= -\frac{\langle p,q\rangle}{JW}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \xi_2}=\frac{W+1+|p|^2}{JW},\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_k}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial f_k}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{\partial f_k}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \xi_1} \\
&= \frac{W+1+|p|^2}{JW}\frac{\partial f_k}{\partial u} - \frac{\langle p,q\rangle}{JW}\frac{\partial f_k}{\partial v} \\
&= \frac{W+1+|p|^2}{JW}p_k - \frac{\langle p,q\rangle}{JW}q_k, \qquad k=3,...,n;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_k}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial f_k}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \xi_2} + \frac{\partial f_k}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \xi_2} \\
&= -\frac{\langle p,q\rangle}{JW}\frac{\partial f_k}{\partial u} + \frac{W+1+|q|^2}{JW}\frac{\partial f_k}{\partial v} \\
&= \frac{W+1+|q|^2}{JW}q_k - \frac{\langle p,q\rangle}{JW}p_k, \qquad k=3,...,n.
\end{aligned}$$

Com respeito aos parâmetros $\xi_1, \xi_2$, temos

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}_{11} &= \left\langle \frac{\partial x}{\partial \xi_1}, \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{W+1+|q|^2}{JW} p_k - \frac{\langle p, q\rangle}{JW} q_k \right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left( \left( \frac{W+1+|q|^2}{JW} \right)^2 p_k^2 - 2\frac{(W+1+|q|^2)\langle p, q\rangle}{(JW)^2} p_k q_k + \left( \frac{\langle p, q\rangle}{JW} \right)^2 q_k^2 \right) \\
&= \left( \frac{W+1+|q|^2}{JW} \right)^2 \sum_{k=1}^{n} p_k^2 - 2\frac{(W+1+|q|^2)\langle p, q\rangle}{(JW)^2} \sum_{k=1}^{n} p_k q_k + \left( \frac{\langle p, q\rangle}{JW} \right)^2 \sum_{k=1}^{n} q_k^2 \\
&= \left( \frac{W+1+|q|^2}{JW} \right)^2 (1+|p|^2) - 2\frac{(W+1+|q|^2)\langle p, q\rangle^2}{(JW)^2} + \left( \frac{\langle p, q\rangle}{JW} \right)^2 (1+|q|^2) \\
&= \frac{(W+1+|q|^2)^2(1+|p|^2) - 2(W+1+|q|^2)\langle p, q\rangle^2 + \langle p, q\rangle^2(1+|q|^2)}{(JW)^2} \\
&= \frac{(W+1+|q|^2)(W+W^2+W|p|^2) - W\langle p, q\rangle^2}{(JW)^2} \\
&= \frac{(W+1+|q|^2)(1+W+|p|^2) - \langle p, q\rangle^2}{J^2 W} \\
&= \frac{2+2W+|p|^2+|q|^2}{J^2} \\
&= \frac{W}{J},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{22} &= \left\langle \frac{\partial x}{\partial \xi_2}, \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{W+1+|p|^2}{JW} q_k - \frac{\langle p,q\rangle}{JW} p_k \right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left( \left( \frac{W+1+|p|^2}{JW} \right)^2 q_k^2 - 2\frac{(W+1+|p|^2)\langle p,q\rangle}{(JW)^2} p_k q_k + \left( \frac{\langle p,q\rangle}{JW} \right)^2 p_k^2 \right) \\
&= \left( \frac{W+1+|p|^2}{JW} \right)^2 \sum_{k=1}^{n} q_k^2 - 2\frac{(W+1+|p|^2)\langle p,q\rangle}{(JW)^2} \sum_{k=1}^{n} p_k q_k + \left( \frac{\langle p,q\rangle}{JW} \right)^2 \sum_{k=1}^{n} p_k^2 \\
&= \left( \frac{W+1+|p|^2}{JW} \right)^2 (1+|q|^2) - 2\frac{(W+1+|p|^2)\langle p,q\rangle^2}{(JW)^2} + \left( \frac{\langle p,q\rangle}{JW} \right)^2 (1+|p|^2) \\
&= \frac{(W+1+|p|^2)^2(1+|q|^2) - 2(W+1+|p|^2)\langle p,q\rangle^2 + \langle p,q\rangle^2(1+|p|^2)}{(JW)^2} \\
&= \frac{(W+1+|p|^2)(W+W^2+W|q|^2) - W\langle p,q\rangle^2}{(JW)^2} \\
&= \frac{(W+1+|p|^2)(1+W+|q|^2) - \langle p,q\rangle^2}{J^2 W} \\
&= \frac{2+2W+|q|^2+|p|^2}{J^2} \\
&= \frac{W}{J}
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}_{12} &= \left\langle \frac{\partial x}{\partial \xi_1}, \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{W+1+|q|^2}{JW} p_k - \frac{\langle p,q\rangle}{JW} q_k \right) \left( \frac{W+1+|p|^2}{JW} q_k - \frac{\langle p,q\rangle}{JW} p_k \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{(W+1+|p|^2)(W+1+|q|^2)+\langle p,q\rangle^2}{(JW)^2} p_k q_k - \frac{(W+1+|q|^2)\langle p,q\rangle}{(JW)^2} p_k^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{(W+1+|p|^2)\langle p,q\rangle}{(JW)^2} q_k^2 \right) \\
&= \left( \frac{(W+1+|p|^2)(W+1+|q|^2)+\langle p,q\rangle^2}{(JW)^2} \langle p,q\rangle - \frac{(W+1+|q|^2)\langle p,q\rangle}{(JW)^2} (1+|p|^2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(W+1+|p|^2)\langle p,q\rangle}{(JW)^2} (1+|q|^2) \right) \\
&= \frac{\langle p,q\rangle}{(JW)^2} ((W+1+|p|^2)(W+1+|q|^2)+\langle p,q\rangle^2 - (W+1+|q|^2)(1+|p|^2) \\
&\quad -(W+1+|p|^2)(1+|q|^2) \\
&= \frac{\langle p,q\rangle}{(JW)^2} \big( W^2+2W+W|q|^2+1+|q|^2+W|p|^2+|p|^2+|p|^2|q|^2+\langle p,q\rangle^2-2W \\
&\quad -W|p|^2-1-|p|^2-|q|^2-|p|^2|q|^2-W|q|^2-1-|q|^2-|p|^2-|p|^2|q|^2 \big) \\
&= \frac{\langle p,q\rangle}{(JW)^2} (W^2-1-|q|^2-|p|^2-|p|^2|q|^2+\langle p,q\rangle^2) \\
&= \frac{\langle p,q\rangle}{(JW)^2} (W^2-W^2) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Isto é,

$$\tilde{g}_{11} = \tilde{g}_{22} = \frac{W}{J}; \quad \tilde{g}_{12} = 0, \tag{1.26}$$

de modo que $\xi_1$ e $\xi_2$ são parâmetros isotérmicos. $\square$

**Corolário 1.17.** *Se $x_k(u,v)$, $k = 3, ..., n$, define uma superfície mínima na forma não-paramétrica, então $f_k$ são funções analíticas reais de $u, v$.*

Concluiremos a seção com o seguinte lema elementar.

**Lema 1.18.** *Seja $S$ uma superfície definida por $X(u,v)$, onde $u_i, u_j$ são parâmetros isotérmicos, e seja $\tilde{S}$ uma reparametrização de $S$ definida pelo difeomorfismo $(u(\tilde{u},\tilde{v}), v(\tilde{u},\tilde{v})$. Então $\tilde{u}, \tilde{v}$ são parâmetros isotérmicos se, e somente se, a aplicação $(u_i(\tilde{u},\tilde{v}), v(\tilde{u},\tilde{v}))$ é confome ou anti-conforme.*

## 1.4 Teorema de Bernstein

**Lema 1.19.** *Seja $E(x_1, x_2) \in C^2$ em um domínio convexo $D$, e suponha que a matriz Hessiana*

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

*é positiva definida. Defina a aplicação*

$$(x_1, x_2) \to (u_1, u_2), onde\ u_i = \frac{\partial E}{\partial x_i}. \tag{1.27}$$

*Então se $x$ e $y$ são dois pontos distintos de $D$, e se $u$, $v$ são suas respectivas imagens pela aplicação 1.27, os vetores $y - x$ e $v - u$ satisfazem a equação*

$$\langle v - u, y - x \rangle > 0. \tag{1.28}$$

**Prova:**

Seja $G(t) = E(ty + (1-t)x) = E(ty_1 + (1-t)x_1, ty_2 + (1-t)x_2) = E(\tilde{x_1}, \tilde{x_2})$, $0 \leq t \leq 1$. Então

$$G'(t) \;=\; \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial E}{\partial \tilde{x}_i}(ty + (1-t)x)(y_i - x_i)$$

e

$$G''(t) = \sum_{i,j=1}^{2} \left[ \frac{\partial^2 E}{\partial \tilde{x}_i \partial \tilde{x}_j}(ty + (1-t)x) \right] (y_i - x_i)(y_j - x_j) > 0$$

para $0 \leq t \leq 1$, uma vez que a matriz Hessiana da aplicação $E$ é positiva definida. Assim, $G'(1) > G'(0)$, ou $\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial E}{\partial x_i}(y)(y_i - x_i) > \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial E}{\partial x_i}(x)(y_i - x_i)$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{2} (v_i - u_i)(y_i - x_i) > 0.$$

□

**Lema 1.20.** *Com as hipóteses do Lema (1.19), se definimos a aplicação*

$$(x_1, x_2) \to (\xi_1, \xi_2), \text{ por } \xi_i(x_1, x_2) = x_i + u_i(x_1, x_2), \tag{1.29}$$

*onde $u_i(x_1, x_2)$ é definido por 1.27, então para quaisquer dois pontos distintos $x$ e $y$ em $D$, suas imagens $\xi$ e $\eta$ satisfazem*

$$\langle \eta - \xi, y - x \rangle > |y - x|^2. \tag{1.30}$$

**Prova:**

Temos que $\eta - \xi = (y - x) + (v - u)$. Daí,

$$\begin{aligned} \langle \eta - \xi, y - x \rangle &= \langle (y - x) + (v - u), y - x \rangle \\ &= \langle v - u, y - x \rangle + |y - x|^2 > |y - x|^2, \end{aligned}$$

uma vez que, pelo lema anterior, $\langle v - u, y - x \rangle > 0$. □

**Corolário 1.21.** *Com as mesmas hipóteses, temos*

$$|\eta - \xi| > |y - x|. \tag{1.31}$$

**Prova:** Pela inequação de Cauchy- Schwarz,

$$|\langle \eta - \xi, y - x\rangle| \leq |\eta - \xi||y - x|.$$

Usando o lema anterior e a inequação de Cauchy- Schwarz, teremos

$$|y - x|^2 < \langle \eta - \xi, y - x\rangle \leq |\langle \eta - \xi, y - x\rangle| \leq |\eta - \xi||y - x|.$$

Portanto, $|\eta - \xi| > |y - x|$. $\square$

**Lema 1.22.** *Na notação dos lemas anteriores, se $D$ é o disco $x_1^2 + x_2^2 < R^2$, então a aplicação 1.29 é um difeomorfismo de $D$ em um domínio $\Delta$ que inclui um disco de raio $R$ sobre $\xi(0)$.*

**Prova:** A aplicação 1.29 é diferenciável, uma vez que $E(x_1, x_2) \in C^2$. Se $x(t)$ é uma curva diferenciável em $D$, e $\xi(x(t))$ sua imagem, então segue de (1.31) que $|d\xi(x(t))x'(t)| > |x'(t)|$. Assim, $\left|d\xi(x(t))\frac{x'(t)}{|x'(t)|}\right| > 1$ para $x'(t) \neq 0$. Portanto, a aplicação 3.2 é um difeomorfismo local. Mostremos que (1.29) é injetiva. De fato, caso contrário teríamos dois pontos distintos em $D$, $x$ e $y$, cujas imagens $\xi$ e $\eta$ seriam iguais. Por (1.31) obtemos que $0 > |y - x|$, o que é um absurdo. Dessa forma, concluímos que a aplicação 1.29 é um difeomorfismo global sobre o domínio $\Delta$. Resta mostrar que $\Delta$ inclui todos os pontos $\xi(x(t))$ tais que $|\xi(x(t)) - \xi(0)| < R$. Se $\Delta$ for todo plano, não temos o que fazer. Caso contrário, suponhamos que exista um ponto $\xi(x(t))$ na fronteira de $\Delta$ tal que $|\xi(x(t)) - \xi(0)| < R$. Sejam $(\xi_k)$ uma sequência de pontos em $\Delta$ que tendem a $\xi$ e $(x_k)$ seus correspondentes pontos em $D$. Note que a $(x_k)$ não tem nenhum ponto de acumulação em $D$, uma vez que $\xi \notin \Delta$. Assim, $|x_k| \xrightarrow[k\to\infty]{} R$ e, por (1.31), temos que $|\xi_k - \xi(0)| > |k_k|$. Segue que $|\xi - \xi(0)| \geq R$, o que prova o lema. $\square$

**Lema 1.23.** *Seja $f(x_1, x_2)$ uma solução da equação de superfície mínima para $x_1^2 + x_2^2 < R^2$. Então usando a notação (1.8), (1.24), a aplicação $(x_1, x_2) \to (\xi_1, \xi_2)$ definida por (1.25) é um difeomorfismo sobre o domínio $\Delta$ que inclui o disco de raio $R$ sobre o ponto $\xi(0)$.*

**Prova:** Segue das equações (1.24) que existe uma função $E(x_1, x_2)$ em $x_1^2 + x_2^2 < R^2$ satisfazendo

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} = F, \qquad \frac{\partial E}{\partial x_2} = G. \tag{1.32}$$

Então $E(x_1,x_2) \in C^2$, e $\frac{\partial^2 E}{\partial x_1^2} = \frac{1+|p|^2}{W} > 0$. Note que $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x_1,x_2)} = det\ \frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j} = 1$. De fato,

$$\begin{aligned} det\ \frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial(F,G)}{\partial(x_1,x_2)} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial G}{\partial x_2} - \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial G}{\partial x_1} \\ &= \left(\frac{1+|p|^2}{W}\right)\left(\frac{1+|q|^2}{W}\right) - \left(\frac{\langle p,q\rangle}{W}\right)^2 \\ &= \frac{1+|p|^2+|q|^2+|q|^2|q|^2-\langle p,q\rangle^2}{W^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial^2 E}{\partial x_1^2} > 0$ e $det\ \frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j} = 1$ obtemos que a função $E(x_1,x_2)$ tem uma matriz Hessiana positiva definida e podemos apelar para os Lema (1.19) e (1.22). Por (1.32), a aplicação (1.25) é justamente a aplicação (1.22) aplicado a essa função. Portanto o lema 1.23 segue imediatamente do Lema (1.22). □

**Lema 1.24.** *Seja $f(x_1,x_2) \in C^1$ uma função real em um domínio $D$. A superfície $S : x_3 = f(x_1,x_2)$ está em um plano se, e somente se, existe uma transformação linear não-singular $(u_1,u_2) \to (x_1,x_2)$ tal que $u_1,u_2$ são parâmetros isotérmicos em $S$.*

**Prova:** Suponha que existam tais parâmetros $u,v$. Introduza as funções $\phi_k(\zeta)$ por (1.18), $k = 1,2,3$. Por hipótese, $(x_1,x_2)$ são funções lineares de $u_1,u_2$ e, por conseguinte, $\phi_1$ e $\phi_2$ são constantes. Uma vez que $u_1,u_2$ são parâmetros isotérmicos temos que

$$\sum_{k=1}^{3} \phi_k^2(\zeta) \equiv 0.$$

Daí,

$$\phi_3(\zeta) = -\sum_{k=1}^{2} \phi_k(\zeta)$$

e, portanto, $\phi_3$ também é constante. Visto que $\phi_3 = \frac{\partial x_3}{\partial u} - i\frac{\partial x_3}{\partial u}$, concluímos que $x_3$ tem gradiente constante com respeito a $u_1,u_2$. Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_3}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u} \\
&= a_i\frac{\partial f}{\partial x_1} + b_i\frac{\partial f}{\partial x_2},
\end{aligned}$$

implicando que $f$ tem gradiente constante com respeito a $x_1, x_2$. Portanto, $f(x_1, x_2) = Ax_1 + Bx_2 + C$. Reciprocamente, se $f$ é dessa forma, é fácil obter uma transformação linear explícita produzindo coordenadas isotérmicas; por exemplo, $x_1 = \lambda Au + Bv$, $x_2 = \lambda Bu - Av$, onde $\lambda^2 = \frac{1}{1+A^2+B^2}$. Temos,

$$\begin{aligned}
\phi_1(\zeta) &= \frac{\partial x_1}{\partial u} - i\frac{\partial x_1}{\partial v} \\
&= \lambda A - iB,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2(\zeta) &= \frac{\partial x_2}{\partial u} - i\frac{\partial x_2}{\partial v} \\
&= \lambda B - iA,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\phi_3(\zeta) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u} \\
&= \lambda(A^2 + B^2).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3}\phi_k^2(\zeta) &= \lambda^2(A^2+B^2) - (A^2+B^2) + \lambda^2(A^2+B^2)^2 \\
&= \lambda^2(A^2+B^2)(1+A^2+B^2) - (A^2+B^2) \\
&= 0, \ \ \forall\zeta \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Segue que $u, v$ são parâmetros isotérmicos. □

**Teorema 1.25** (Osserman)**.** *Seja $f(x_1, x_2)$ uma solução da equação de superfície mínima no plano $x_1, x_2$. Então existe uma transformação linear não-singular*

$$\begin{aligned}
x_1 &= u \\
x_2 &= au + bv, \ b > 0
\end{aligned} \tag{1.33}$$

*tal que* $(u, v)$ *são parâmetros isotérmicos (globais) para superfície definida por* $x_k = f_k(x_1, x_2),\ k = 3, ..., n.$

**Prova:** Introduzimos a aplicação (1.25), que agora definimos em todo plano $x_1, x_2$. Segue do Lema (1.23) que essa aplicação é um difeomorfismo do plano $x_1, x_2$ no plano $\xi_1, \xi_2$. Sabemos de (1.26) que $(\xi_1, \xi_2)$ são parâmetros isotérmicos sobre a superfície $S$ definida por $x_k = f_k(x_1, x_2) \quad , k = 3, ..., n$. Pelo lema (1.15), as funções

$$\phi_k(\zeta) = \frac{\partial x_k}{\partial \xi_1} - i\frac{\partial x_k}{\partial \xi_2}, \quad k = 1, ..., n$$

são funções analíticas de $\zeta$. Note que

$$\begin{aligned} \bar{\phi_1}\phi_2 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} - i\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} - i\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\right) \\ &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\right) - i\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\right). \end{aligned}$$

Sendo assim, temos

$$Im\ \{\bar{\phi_1}\phi_2\} = -\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)}$$

e uma vez que $\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(\xi_1,\xi_2)} > 0$, deduzimos primeiro que $\phi_1 \neq 0$ e $\phi_2 \neq 0$, $\forall\ \zeta \in \mathbb{C}$, e depois que

$$Im\ \left\{\frac{\phi_2}{\phi_1}\right\} = Im\ \left\{\frac{\phi_2\bar{\phi_1}}{\phi_1\bar{\phi_1}}\right\} = \frac{1}{|\phi_1|^2}Im\ \left\{\phi_2\bar{\phi_1}\right\} < 0.$$

Temos uma função analítica, $\frac{\phi_2}{\phi_1}$, cuja parte imaginária é negativa. Pelo teorema de Picard, $\frac{\phi_2}{\phi_1}$ é uma função constante. Segue que existe $c = a - ib,\ b{>}0$, tal que

$$\phi_2 = c\phi_1; \qquad c = a - ib\ \ e\ \ b{>}0. \tag{1.34}$$

Isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} - i\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} &= (a - ib)\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} - i\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\right) \\ &= a\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} - b\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} - i\left(b\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + a\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} = a\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} - b\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \quad e \quad \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} = b\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + a\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}. \tag{1.35}$$

Pela aplicação (1.33), temos

$$\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} = a\frac{\partial u}{\partial \xi_1} + b\frac{\partial v}{\partial \xi_1} \quad e \quad \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} = a\frac{\partial u}{\partial \xi_2} + b\frac{\partial v}{\partial \xi_2}.$$

Comparando essas equações com as equações em (1.35), obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_1} = \frac{\partial v}{\partial \xi_2} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial \xi_2} = -\frac{\partial v}{\partial \xi_1};$$

implicando que $u + iv$ é uma função holomorfa de $\xi_1 + i\xi_2$. Mas isso significa, pelo lema (1.18), que $(u_1, u_2)$ são também parâmetros isotérmicos, provando assim o teorema. $\square$

**Corolário 1.26** (Bernstein)**.** *No caso onde $n = 3$, se $f$ é uma solução da equação de superfície mínima em todo $x_1, x_2$-plano , então $f$ é uma função linear de $x_1, x_2$.*

**Prova:** Pelo teorema de Osserman, existe uma transformação linear não-singular tal que $u_1, u_2$ são parâmetros isotérmicos para a superfície definida por $x_3 = f_3(x_1, x_2)$. Aplicando o Lema (1.24), obtemos que $f$ é uma função linear de $x_1, x_2$. $\square$

Capítulo 2

# Resultado tipo Bernstein em $\mathbb{R}^4$

Neste capítulo veremos uma caracterização de uma curva analítica complexa por meio do Jacobiano. Como corolário, obtemos um resultado tipo Bernstein para funções suaves, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, impondo a condição de limitação para o Jacobiano de tais funções.

## 2.1 Noções básicas

Uma superfície $S$ num espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é representada, localmente, por uma transformação $X : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de posto 2, dada por

$$X(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y), ..., f_n(x,y)), \quad (x,y) \in D,$$

onde D é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ e $f_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, ..., n\}$, são funções suaves. Denotaremos por $\langle , \rangle$ o produto interno euclidiano em $\mathbb{R}^n$ e por $E$, $F$, $G$ os coeficientes da primeira forma fundamental, que são dados por

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)^2, \quad F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x}\frac{\partial f_i}{\partial y}, \quad G = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)^2.$$

Os parâmetros $(x,y)$ são chamados *isotérmicos* se, e somente se, $E = G$ e $F = 0$, $\forall\,(x,y) \in D$.

Considere a base local ortonormal $\{e_1, e_2, \xi_3, ..., \xi_n\}$ em $\mathbb{R}^n$ tal que, restrita a $S$, os vetores $e_1$, $e_2$ são tangentes a $S$ e, consequentemente, $\xi_3, ..., \xi_n$ são normais a $S$. Denotaremos por $\overline{\nabla}$ a usual conexão linear em $\mathbb{R}^n$ e

$$h_{ij}^{\alpha} = \langle \overline{\nabla}_{e_i}\xi_\alpha, e_j \rangle, \quad i,j \in \{1,2\}, \quad \alpha \in \{3, ..., n\},$$

são os *coeficientes da segunda forma fundamental.* O *vetor curvatura média* $H$ e a *curvatura Gaussiana* $K$ de $S$ são dados, respectivamente, por

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=3}^{n}\left(h_{11}^{\alpha} + h_{22}^{\alpha}\right)\xi_{\alpha},$$

$$K = \sum_{\alpha=3}^{n}\left(h_{11}^{\alpha}h_{22}^{\alpha} - (h_{12}^{\alpha})^2\right).$$

Além disso, se

$$|h|^2 = \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\alpha=3}^{n}\left(h_{ij}^{\alpha}\right)^2$$

é o quadrado do comprimento da segunda forma fundamental $h$, então a equação de Gauss implica

$$2K = 4H^2 - |h|^2.$$

No caso onde $S$ é mínima, isto é, $H = 0$, teremos

$$K = -\sum_{\alpha=3}^{n}\{(h_{11}^{\alpha})^2 + (h_{12}^{\alpha})^2\}, \tag{2.1}$$

$$2K = -|h|^2. \tag{2.2}$$

Outro invariante que desempenha um papel importante na teoria de superfície em $\mathbb{R}^4$ é a *curvatura Normal* $K_N$ de $S$ que é dada por

$$K_N = \sum_{i=1}^{2}\left(h_{1i}^{3}h_{2i}^{4} - h_{2i}^{3}h_{1i}^{4}\right).$$

Em particular, para superfícies mínimas temos

$$K_N = 2\left(h_{11}^{3}h_{12}^{4} - h_{12}^{3}h_{11}^{4}\right). \tag{2.3}$$

O gráfico $G_f$ de $f$ é mínimo se, e somente se, satisfaz a seguinte equação,

$$\left(1 + |f_y|^2\right)f_{xx} - 2\langle f_x, f_y\rangle f_{xy} + \left(1 + |f_x|^2\right)f_{yy} = 0. \tag{2.4}$$

Essa é a clássica equação não paramétrica de uma superfície mínima, como vimos no capítulo anterior.

## 2.2 Gráficos mínimos em $\mathbb{R}^4$

Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função suave cujo gráfico é uma superfície mínima em $\mathbb{R}^4$. Tendo em vista uma obtenção de um resultado tipo Bernstein, surge a seguinte questão: o gráfico de $f$ é um plano em $\mathbb{R}^4$? Em geral, a resposta é negativa. Um contra-exemplo simples é dado pela função $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. De fato, note que $(0, 0, 0, 0,\ p = (1, 0, 1, 0)$ e $q = (0, 1, -1, 0) \in G_f = \{(x, y, x^2 - y^2, 2xy); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, e no entanto, $p + q = (1, 1, 0, 0)$ não pertence a $G_f$. Mostremos que $G_f$ é uma superfície mínima. Pela expressão de $f$, temos

$$\begin{aligned} f_x &= (2x, 2y), \quad f_{xx} = (2, 0), \quad f_{xy} = (0, 2), \quad f_y = (-2y, 2x), \\ f_{yy} &= (-2, 0), \quad |f_y|^2 = |f_x|^2 = 4(x^2 + y^2) \quad e \quad \langle f_x, f_y \rangle = 0. \end{aligned}$$

Assim, a equação de superfície mínima fica na forma

$$\left(1 + |f_y|^2\right) f_{xx} - 2\langle f_x, f_y \rangle f_{xy} + \left(1 + |f_x|^2\right) f_{yy} = (1 + 4(x^2 + y^2))(2 - 2, 0) = (0, 0),$$

isto é, o gráfico de $f$ é uma superfície mínima em $\mathbb{R}^4$.

Existe uma infinidade de gráficos mínimos em $\mathbb{R}^4$ que não são planos, os chamados curvas analíticas complexas. O gráfico de uma função holomorfa ou anti-holomorfa é uma superfície mínima, como será mostrado logo abaixo, e é chamado de *curva analítica complexa.*

**Proposição 2.1.** *O gráfico de uma função holomorfa ou anti-holomorfa , $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, é uma superfície mínima.*

**Prova:** Seja $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa com $\varphi(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$. Como $f$ é holomorfa, as funções $f$ e $g$ são harmônicas e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, isto é, $f_x = g_y$ e $f_y = -g_x$. Assim,

$$|\varphi_x|^2 = |\varphi_y|^2, \quad \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle = 0 \quad e \quad \varphi_{xx} = -\varphi_{yy}.$$

Portanto,

$$\left(1 + |\varphi_y|^2\right) \varphi_{xx} - 2\langle \varphi_x, \varphi_y \rangle \varphi_{xy} + \left(1 + |\varphi_x|^2\right) \varphi_{yy} = \left(1 + |\varphi_y|^2\right) (\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) = 0,$$

e o gráfico de $\varphi$ é uma superfície mínima em $\mathbb{R}^4$. $\square$

Não é verdade que gráficos mínimos em $\mathbb{R}^4$ são apenas planos ou curvas analíticas complexas. De fato, Osserman [11] construiu exemplos de gráficos mínimos em $\mathbb{R}^4$ que não são planos e nem curvas analíticas complexas. Por exemplo, o gráfico da aplicação $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(e^x - 3e^{-x})\left(cos\frac{y}{2}, -sen\frac{y}{2}\right).$$

É interessante notar que a imagem do Jacobiano de $f$ que é dado por $J_f = -\frac{1}{8}\left(e^{2x} - 9e^{-2x}\right)$, assume todos os valores reais.

## 2.3 Resultado principal

Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f\,(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))\,, (x,y) \in \mathbb{R}^2$ uma solução inteira da equação de superfície mínima. Então, o gráfico de $f$ é uma superfície mínima em $\mathbb{R}^4$. Em virtude do teorema de Osserman (ver Teorema 1.25), podemos introduzir parâmetros isotérmicos globais $(u,v)$, via uma transformação não singular $x = u$, $y = au + bv$, onde $a$, $b$ são constantes reais com $b > 0$. Agora, a superfície mínima $G_f$ é parametrizada via a aplicação

$$X\,(u,v) = (u, au + bv, \varphi(u,v), \psi(u,v))\,,$$

onde $\varphi(u,v) := f_1(u, au+bv)$ e $\psi(u,v) := f_2(u, au+bv)$. Uma vez que $(u,v)$ são parâmetros isotérmicos, os vetores

$$X_u = (1, a, \varphi_u, \psi_u)\,,\ X_v = (0, b, \varphi_v, \psi_v) \tag{2.5}$$

são ortogonais e de mesmo comprimento. Portanto,

$$\begin{aligned} \varphi_u\varphi_v + \psi_u\psi_v &= -ab \\ E = 1 + a^2 + \varphi_u^2 + \psi_u^2 &= b^2 + \varphi_v^2 + \psi_v^2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Além disso, sendo $G_f$ uma superfície mínima, garantimos que as funções $\varphi$ e $\psi$ são harmônicas, isto é,

$$\varphi_{uu} + \varphi_{vv} = 0 \quad e \quad \psi_{uu} + \psi_{vv} = 0.$$

Apelando para a Identidade de Lagrange e tendo em conta a relação (2.6) , obtemos

$$\begin{aligned}
E^2 &= (1+a^2+\varphi_u^2+\psi_u^2)(b^2+\varphi_v^2+\psi_v^2) \\
&= b^2+\varphi_v^2+\psi_v^2+a^2b^2+a^2\varphi_v^2+a^2\psi_v^2+b^2\varphi_u^2+\varphi_u^2\psi_v^2+b^2\psi_u^2+\varphi_v^2\psi_u^2+\psi_u^2\psi_v^2 \\
&= b^2+\varphi_v^2+\psi_v^2+a^2b^2+(a\varphi_v-b\varphi_u)^2+2ab\varphi_u\varphi_v+(a\psi_v-b\psi_u)^2+2ab\psi_u\psi_v \\
&\quad +(\varphi_v\varphi_v+\psi_u\psi_v)^2-2\varphi_u\varphi_v\psi_u\psi_v+(\varphi_u\psi_v-\varphi_v\psi_u)^2+2\varphi_u\varphi_v\psi_u\psi_v \\
&= b^2+\varphi_v^2+\psi_v^2+a^2b^2+(a\varphi_v-b\varphi_u)^2+2ab(\varphi_u\varphi_v+\psi_u\psi_v)+(a\psi_v-b\psi_u)^2 \\
&\quad +(\varphi_u\varphi_v+\psi_u\psi_v)^2+(\varphi_u\psi_v-\varphi_v\psi_u)^2 \\
&= b^2+\varphi_v^2+\psi_v^2+a^2b^2+(a\varphi_v-b\varphi_u)^2-2a^2b^2+(a\psi_v-b\psi_u)^2 \\
&\quad +a^2b^2+(\varphi_u\psi_v-\varphi_v\psi_u)^2 \\
&= b^2+\varphi_v^2+\psi_v^2+(a\varphi_v-b\varphi_u)^2+(a\psi_v-b\psi_u)^2+(\varphi_u\psi_v-\varphi_v\psi_u)^2 .
\end{aligned}$$

Ou equivalentemente,

$$\begin{aligned}
E^2 &= E+a^2\varphi_v^2-2ab\varphi_u\varphi_v+b^2\varphi_u^2+a^2\psi_v^2-2ab\psi_u\psi_v+b^2\varphi_u^2+(\varphi_u\psi_v-\varphi_v\psi_u)^2 \\
&= E+a^2\left(\varphi_v^2+\psi_v^2\right)+b^2\left(\varphi_u^2+\psi_u^2\right)-2ab\left(\varphi_u\varphi_v+\psi_u\psi_v\right)+(\varphi_u\psi_v-\varphi_v\psi_u)^2 \\
&= E+2a^2b^2+a^2\left(\varphi_v^2+\psi_v^2\right)+b^2\left(\varphi_u^2+\psi_u^2\right)+(\varphi_u\psi_v-\varphi_v\psi_u)^2 \\
&= E+a^2b^2+a^2\left(\varphi_v^2+\psi_v^2\right)+a^2b^2+b^2\left(\varphi_u^2+\psi_u^2\right)+(\varphi_u\psi_v-\varphi_v\psi_u)^2 \\
&= E+a^2\left(b^2+\varphi_v^2+\psi_v^2\right)+b^2\left(a^2+\varphi_u^2+\psi_u^2\right)+(\varphi_u\psi_v-\varphi_v\psi_u)^2 \\
&= E+a^2E+b^2\left(E-1\right)+(\varphi_u\psi_v-\varphi_v\psi_u)^2 \\
&= E\left(1+a^2+b^2\right)-b^2+(\varphi_u\psi_v-\varphi_v\psi_u)^2 . \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Definamos a aplicação $\Phi(u,v)=(\varphi(u,v),\psi(u,v))$. Assim,

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}=\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$J_\Phi = bJ_f,$$

onde $J_f$, $J_\Phi$ são os Jacobianos de $f$ e $\Phi$, respectivamente. Assim (2.7) torna-se

$$J_\Phi^2 = E^2 - (1 + a^2 + b^2)E + b^2, \tag{2.8}$$

que será uma identidade muito útil para nós.

**Teorema 2.2.** *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função inteira, tal que o gráfico $G_f$ de $f$ é uma superfície mínima em $\mathbb{R}^4$. Assuma que $G_f$ não é um plano. Então, o gráfico de $f$ é uma curva analítica complexa se, e somente se, $J_f(\mathbb{R}^2) \subsetneq \mathbb{R}$. Em particular, se $G_f$ é uma curva analítica complexa, então $J_f(\mathbb{R}^2) = [0, +\infty)$ ou $J_f(\mathbb{R}^2) = (0, +\infty)$ se $f$ é holomorfa, ou $J_f(\mathbb{R}^2) = (-\infty, 0)$ ou $J_f(\mathbb{R}^2) = (-\infty, 0]$ se $f$ é anti-holomorfa.*

**Prova:** Em virtude do Teorema (1.25), podemos introduzir parâmetros isotérmicos globais $(u, v)$, via uma transformação não singular $x = u$, $y = au + bv$, onde $a$, $b$ são constantes reais com $b > 0$. Agora, a superfície mínima $G_f$ é parametrizada via a aplicação

$$X(u, v) = (u, au + bv, \varphi(u, v), \psi(u, v)),$$

onde $\varphi(u, v) := f_1(u, au + bv)$ e $\psi(u, v) := f_2(u, au + bv)$.

Definamos a aplicação $\Phi(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$. Pela observação acima, temos

$$J_\Phi = bJ_f.$$

Uma vez que $(u, v)$ são parâmetros isotérmicos e $G_f$ é uma superfície mínima, segue que as funções $\varphi$ e $\psi$ são harmônicas, isto é,

$$x_{uu} + x_{vv} = 0 = y_{uu} + y_{vv},$$

$$\varphi_{uu} + \varphi_{vv} = 0 = \psi_{uu} + \psi_{vv}.$$

Então, as funções complexas $\phi_k : U \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, 2, 3, 4$, dadas por

$$\begin{cases} \phi_1 = 1, & \phi_2 = a - bi \\ \phi_3 = \varphi_u - i\varphi_v, & \phi_4 = \psi_u - i\psi_v \end{cases} \tag{2.9}$$

são holomorfas e satisfazem

$$\begin{aligned} \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 &= 1 + a^2 - b^2 - 2abi + \varphi_u^2 - \varphi_v^2 - 2\varphi_u\varphi_v i + \psi_u^2 - \psi_v^2 - 2\psi_u\psi_v i \\ &= \left(1 + a^2 + \varphi_u^2 + \psi_u^2\right) + \left(b^2 + \varphi_v^2 + \psi_v^2\right) - 2\left(ab + \varphi_u\varphi_v + \psi_u\psi_v\right) i \\ &= g_{11} + g_{22} - 2g_{12}i \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Assuma que o gráfico $G_f$ de f é uma superfície mínima que não é um plano, e suponha que $J_f$ não tome todos os valores reais. Em virtude de (2.10), podemos escrever

$$\begin{aligned}(\phi_3 - i\phi_4)(\phi_3 + i\phi_4) &= \phi_3^2 + \phi_4^2 \\ &= -\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) \\ &= -\left(1 + (a - bi)^2\right) \\ &= -d. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Afirmamos que $d = 0$. Assuma o oposto, isto é, que $d \neq 0$. Sendo assim, as funções $(\phi_3 - i\phi_4)$, $(\phi_3 + i\phi_4)$ são funções inteiras holomorfas não identicamente nulas. Defina a função complexa $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$h = (\phi_3 - i\phi_4). \tag{2.12}$$

Ressaltamos que $h$ é holomorfa, não constante e não identicamente nula. Combinando (2.10) com (2.12), obtemos

$$\begin{aligned}\phi_3 &= \frac{(\phi_3 - i\phi_4) + (\phi_3 + i\phi_4)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(h - \frac{d}{h}\right),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\phi_4 &= \frac{(\phi_3 - i\phi_4) - (\phi_3 + i\phi_4)}{2} \\ &= \frac{i}{2}\left(h + \frac{d}{h}\right).\end{aligned}$$

calculando a parte imaginária de $\phi_3\bar{\phi_4}$, temos

$$\begin{aligned}Im(\phi_3\bar{\phi_4}) &= Im((\varphi_u - i\varphi_v)(\psi_u + i\psi_v)) \\ &= Im(\varphi_u\psi_u + \varphi_v\psi_v + i(\varphi_u\psi_v - \varphi_v\psi_u)) \\ &= \varphi_u\psi_v - \varphi_v\psi_u \\ &= J_\Phi.\end{aligned}$$

Por outro lado, de (2.11) obtemos

$$\begin{aligned}
\phi_3\bar{\phi_4} &= -\frac{i}{4}\left(\bar{h}+\frac{\bar{d}h}{|h|^2}\right)\left(h-\frac{d}{h}\right)\\
&= -\frac{i}{4}\left(h\bar{h}+\frac{\bar{d}h^2}{|h|^2}-\frac{d\bar{h}}{h}-\frac{d\bar{d}h}{h|h|^2}\right)\\
&= -\frac{i}{4}\left(|h|^2+\frac{\bar{d}h^2}{|h|^2}-\frac{d\bar{h}}{h}-\frac{|d|^2}{|h|^2}\right),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\bar{\phi_3}\phi_4 &= \frac{i}{4}\left(h+\frac{d}{h}\right)\left(\bar{h}-\frac{\bar{d}h}{|h|^2}\right)\\
&= \frac{i}{4}\left(h\bar{h}-\frac{\bar{d}h^2}{|h|^2}+\frac{d\bar{h}}{h}-\frac{d\bar{d}h}{h|h|^2}\right)\\
&= \frac{i}{4}\left(|h|^2-\frac{\bar{d}h^2}{|h|^2}+\frac{d\bar{h}}{h}-\frac{|d|^2}{|h|^2}\right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
Im(\phi_3\bar{\phi_4}) &= \frac{-i}{2}\left(\phi_3\bar{\phi_4}-\bar{\phi_3}\phi_4\right)\\
&= \frac{i^2}{8}\left(|h|^2+\frac{\bar{d}h^2}{|h|^2}-\frac{d\bar{h}}{h}-\frac{|d|^2}{|h|^2}+|h|^2-\frac{\bar{d}h^2}{|h|^2}+\frac{d\bar{h}}{h}-\frac{|d|^2}{|h|^2}\right)\\
&= -\frac{1}{8}\left(2|h|^2-2\frac{|d|^2}{|h|^2}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(-|h|^2+\frac{|d|^2}{|h|^2}\right).
\end{aligned}$$

Assim, tendo em vista a relação $J_\Phi = bJ_f$, temos que

$$\begin{aligned}
J_f &= \frac{J_\Phi}{b}\\
&= \frac{1}{b}Im(\phi_3\bar{\phi_4})\\
&= \frac{1}{4b}\left(-|h|^2+\frac{|d|^2}{|h|^2}\right).
\end{aligned}$$

Uma vez que $h$ é uma função inteira e não constante, pelo teorema de Picard, existem sequências $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números complexos tais que $|h(z_n)| \to \infty$ e $|h(w_n)| \to 0$. Consequentemente, $J_f(z_n) \to -\infty$ e $J_f(w_n) \to \infty$. Assim, $J_\Phi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$, contradizendo a nossa suposição. Portanto, $d = 0$, $a = 0$, $b = 1$ e, consequentemente $x$ e $y$ são parâmetros isotérmicos. Além disso, de (2.11) obtemos que $\phi_3 = \pm i\phi_4$, ou equivalentemente,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} - i\frac{\partial f_1}{\partial y} = \pm i\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - i\frac{\partial f_2}{\partial y}\right). \tag{2.13}$$

De (2.13) deduzimos que $f = f_1 + if_2$ é holomorfa ou anti-holomorfa. Por conseguinte, $G_f$ é uma curva analítica complexa.

Reciprocamente, assuma que $G_f$ é uma curva analítica complexa que não é o plano. Assim, a função complexa $f = f_1+if_2$ é holomorfa ou anti-holomorfa. Então, para $z = x+iy$, teremos

$$
\begin{aligned}
f_z &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\right) + i\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\right)\\
&= \left(\frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) + i\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
f_{\bar z} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar z} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar z}\right) + i\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar z} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar z}\right)\\
&= \left(\frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) + i\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\right).
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
|f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2 &= \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2\right\}\\
&= \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial x}.
\end{aligned}
$$

Isto é,

$$
J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2. \tag{2.14}
$$

Consequentemente, $J_f \geq 0$ se f é holomorfa e $J_f \leq 0$ se f é anti-holomorfa. Em ambos os casos, $J_f$ não assume todos os valores reais.

Se $f$ é uma função holomorfa, então

$$
J_f = |f_z|^2.
$$

Como o gráfico $G_f$ de $f$ é uma superfície mínima, via parâmetros isotérmicos, as funções $f_1$ e $f_2$ são harmônicas. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right).$$

Isto é, as partes real e imaginária de $f_z$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann e, portanto, $f_z$ é holomorfa. Além disso, $f_z$ não é constante, pois, caso contrário $f$ é afim e $G_f$ é um plano. Pelo teorema de Picard, $f_z(\mathbb{C})=\mathbb{C}$ ou $f_z(\mathbb{C})=\mathbb{C}-\{a\}$. Dessa forma, ou $J_f(\mathbb{R}^2)=[0,+\infty)$ ou $J_f(\mathbb{R}^2)=(0,+\infty)$.

Se $f$ é uma função anti-holomorfa, então

$$J_f=-|f_{\bar{z}}|^2$$

e $f_{\bar{z}}$ é uma função anti-holomorfa. De fato,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}-\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}-\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\right).$$

Dessa forma, a função $\bar{f}_{\bar{z}}$ é holomorfa. Novamente pelo teorema de Picard obtemos que $\bar{f}_{\bar{z}}(\mathbb{C})=\mathbb{C}$ ou $\bar{f}_{\bar{z}}(\mathbb{C})=\mathbb{C}-\{a\}$. Como

$$J_f=-|f_{\bar{z}}|^2=-|\bar{f}_{\bar{z}}|^2,$$

temos que $J_f(\mathbb{R}^2)=(-\infty,0)$ ou $J_f(\mathbb{R}^2)=(-\infty,0]$. $\square$

## 2.4 Aplicações

Nesta seção, obteremos alguns conhecidos teoremas tipo Bernstein para funções inteiras $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ usando o método desenvolvido aqui. O seguinte resultado foi obtido primeiramente por Simon [14].

**Corolário 2.3.** *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$ uma solução inteira da equação de superfície mínima, tal que $f_1$ ou $f_2$ tem gradiente limitado. Então $f$ é uma função afim.*

**Prova:** Sem perda de generalidade, assumiremos que $f_1$ tem gradiente limitado. Em virtude do Teorema (1.25), podemos introduzir parâmetros isotérmicos globais $(u, v)$, via uma transformação não singular $x = u$, $y = au + bv$, onde $a$, $b$ são constantes reais com $b > 0$. Agora, a superfície mínima $G_f$ é parametrizada via a aplicação

$$X\left(u,v\right) = \left(u, au + bv, \varphi(u,v), \psi(u,v)\right),$$

onde $\varphi(u,v) := f_1(u, au + bv)$ e $\psi(u,v) := f_2(u, au + bv)$.

Uma vez que $(u, v)$ são parâmetros isotérmicos, $\varphi$ e $\psi$ são funções harmônicas. Além disso, as funções $\Phi_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $k = 1, 2, 3, 4$, dadas pelo sistema (2.9) são holomorfas e satisfazem a equação (2.10). Observe que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + a\frac{\partial f_1}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = b\frac{\partial f_1}{\partial y}.$$

Visto que $f_1$ tem gradiente limitado, obtemos que $\varphi$ também tem gradiente limitado. Note que as funções $\varphi_u$ e $\varphi_v$ são funções harmônicas, já que $\varphi$ é uma função harmônica. De fato,

$$\varphi_{uuu} + \varphi_{uvv} = -\varphi_{vvu} + \varphi_{uvv} = 0 \quad e \quad \varphi_{vuu} + \varphi_{vvv} = \varphi_{vuu} - \varphi_{uuv} = 0.$$

Temos então que $\varphi_u$ e $\varphi_v$ são funções harmônicas e limitadas, visto que o gradiente de $\varphi$ é limitado. Pelo teorema de Liouville, tem-se que as funções $\varphi_u$ e $\varphi_v$ são constantes. Por isso, $\phi_3$ é uma função constante. Em virtude de (2.10), obtemos que $\phi_4$ também é constante. Portanto, $G_f$ é um plano e $f$ é uma função afim. $\square$

Uma classe interessante de superfícies mínimas em $\mathbb{R}^4$ pode ser obtida considerando gráficos de aplicações da forma $f = grad\ u$ , onde $u : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função suave. Pode-se mostrar que o gráfico de $f = grad\ u : U \to \mathbb{R}$ é uma superfície mínima se, e somente se, a função $u$ satisfaz a chamada equação especial de Lagrange

$$cos\theta\Delta u = sin\theta(det\ Hess\ u - 1),$$

para alguma constante real $\theta$. Fu [7] provou que as únicas soluções inteiras da equação especial de Lagrange são funções harmônicas ou polinômios quadráticos, o que significa que o gráfico inteiro mínimo do $grad\ u$ é uma curva analítica complexa ou um plano. Esse resultado segue como corolário do resultado principal mostrado neste capítulo.

**Corolário 2.4.** *Seja $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma solução inteira da equação especial de Lagrange*

$$cos\theta\Delta u = sin\theta\left(det\ Hessu - 1\right),$$

*onde $\theta$ é uma constante real. Então $u$ é uma função harmônica ou um polinômio quadrático.*

**Prova:** Considere a função inteira $f = grad\ u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Uma vez que $u$ satisfaz a equação especial de Lagrange , o gráfico de $f$ é uma superfície mínima em $\mathbb{R}^4$. Note que o Jacobiano de $f = (u_x, u_y)$ é dado por

$$J_f = \begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{vmatrix}.$$

Assim, $J_f = det\ Hess\ u = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2$. Se existe um ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $J_f(x_0, y_0) = 1$, então nesse ponto o Laplaciano de $u$ satisfaz

$$\Delta u(x_0, y_0) = u_{xx}(x_0, y_0) + u_{yy}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Consequentemente, $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $J_f \equiv 1$. Pelo Teorema 2.2, $f$ é uma função afim e, portanto, $u$ é polinômio quadrático. Se $J_f > 1$, então pelo Teorema 2.2 $f$ é uma função afim e $u$ um polinômio quadrático. Se $J_f < 1$, então pelo Teorema 2.2 deduzimos que $J_f \leq 0$ e $f$ é uma função anti-holomorfa. Sendo assim,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{\partial f_2}{\partial y}.$$

Isto é,

$$u_{xx} = -u_{yy},$$

implicando que $u$ é uma função harmônica. $\square$

Finalmente notamos que [8. Teorema 1.1], apresentado abaixo, segue imediatamente do Teorema 2.2.

**Corolário 2.5.** *Seja* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *uma função inteira e suave, tal que o gráfico* $G_f$ *é uma superfície mínima em* $\mathbb{R}^4$. *Se o Jacobiano* $J_f$ *de* $f$ *é limitado, então* $G_f$ *é um plano.*

Capítulo 3

# Curvas Analíticas Complexas e Invariantes Geométricos

Neste capítulo, caracterizaremos curvas analíticas complexas a partir de dois inverigantes geométricos, as curvaturas Gaussiana e normal.

## 3.1 Resultado Principal

Para a prova do próximo teorema, precisaremos do seguinte resultado auxiliar.

**Lema 3.1.** *Se $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\Phi(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$, é uma aplicação onde $\varphi$ e $\psi$ são funções harmônicas em $\mathbb{R}^2$, isto é, uma aplicação harmônica. Então $inf|J_\Phi| = 0$, a menos que $\Phi$ seja uma função afim.*

Suponha, por absurdo, que $\Phi$ não é uma função afim e $inf|J_\Phi| = c > 0$. Consequentemente $|J_\Phi| \geq c > 0$. Assuma em princípio que $J_\Phi \geq c > 0$. Vejamos $\Phi$ como uma função complexa $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\Phi = \varphi + i\psi$. Então, para $z = u + iv$, teremos

$$
\begin{aligned}
\Phi_z &= \left(\varphi_u \frac{\partial u}{\partial z} + \varphi_v \frac{\partial v}{\partial z}\right) + i\left(\psi_u \frac{\partial u}{\partial z} + \psi_v \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\varphi_u + \frac{1}{2i}\varphi_v\right) + i\left(\frac{1}{2}\psi_u + \frac{1}{2i}\psi_v\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\varphi_u + \psi_v\right) + \frac{i}{2}\left(\psi_u - \varphi_v\right)
\end{aligned}
$$

e

$$\begin{aligned}
\Phi_{\bar{z}} &= \left(\varphi_u \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + \varphi_v \frac{\partial v}{\partial \bar{z}}\right) + i\left(\psi_u \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + \psi_v \frac{\partial v}{\partial \bar{z}}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\varphi_u - \frac{1}{2i}\varphi_v\right) + i\left(\frac{1}{2}\psi_u - \frac{1}{2i}\psi_v\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\varphi_u - \psi_v\right) + \frac{i}{2}\left(\varphi_v + \psi_u\right).
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
|\Phi_z|^2 - |\Phi_{\bar{z}}|^2 &= \frac{1}{4}\{(\varphi_u + \psi_v)^2 + (\psi_u - \varphi_v)^2 - (\varphi_u - \psi_v)^2 - (\psi_u + \varphi_v)^2\} \\
&= \varphi_u\psi_v - \varphi_v\psi_u.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$|\Phi_z|^2 - |\Phi_{\bar{z}}|^2 = J_\Phi. \tag{3.1}$$

Uma vez que $\varphi$ e $\psi$ são funções harmônicas, obtemos

$$(\varphi_u + \psi_v)_u = \varphi_{uu} + \psi_{uv} = -\varphi_{vv} + \psi_{uv} = (\psi_u - \varphi_v)_v$$

e

$$(\varphi_u + \psi_v)_v = \varphi_{uv} + \psi_{vv} = \varphi_{uv} - \psi_{uu} = -(\psi_u - \varphi_v)_u$$

Ou seja, as partes real e imaginária de $\Phi_z$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. Mais precisamente, $\Phi_z$ é uma função holomorfa. De nossa suposição e usando (3.1) temos,

$$|\Phi_z|^2 \geq |\Phi_{\bar{z}}|^2 + c \geq c > 0. \tag{3.2}$$

Observe também que $\Phi_z$ não pode assumir o valor $c$. De fato, se $\Phi_z = c$ então $c^2 - c - |\Phi_{\bar{z}}|^2 > 0$, implicando que $\Delta = 1 + 4|\Phi_{\bar{z}}|^2 \geq 0$, o que é um absurdo. Como $\Phi_z$ omite os valore 0 e $c$ concluímos, pelo Teorema de Picard, que $\Phi_z$ é constante. Portanto, existem constantes reais $\kappa$ e $\lambda$ tais que

$$\varphi_u + \psi_v = 2\kappa \quad e \quad \psi_u - \varphi_v = 2\lambda.$$

De (3.2) deduzimos que

$$(\kappa - \psi_v)^2 + (\psi_u - \lambda)^2 \leq \kappa^2 + \lambda^2 - c.$$

As funções $\kappa - \psi_v = \varphi_u - \kappa$ e $\psi_u - \lambda = \varphi_v + \lambda$ são harmônicas, uma vez que $\varphi$ é uma função harmônica. Sendo assim, a função $\Psi = -\varphi_u + i\varphi_v$ é holomorfa e limitada. Pelo Teorema de Liouville, $\Psi$ é uma função constante. Logo, $\varphi$ e $\psi$ são funções afins, contradizendo a suposição feita inicialmente.

Se $J_\Phi \leq -c < 0$, basta considerar a função $\tilde{\Phi} = \psi + i\varphi$. Assim, $J_{\tilde{\Phi}} = -J_\Phi \geq c > 0$. Pelo resultado acima, $\tilde{\Phi}$ é uma função afim e, portanto, $\Phi$ também o é. Novamente obtemos uma contradição. Portanto, $inf|J_\Phi| = 0$, e a prova está concluída. □

**Teorema 3.2.** *Seja $G_f$ o gráfico de uma função inteira $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com curvatura Gaussiana $K$ e curvatura normal $K_N$. Assuma que $G_f$ é mínimo em $\mathbb{R}^4$. Então,*

$$\inf_{K<0} \frac{|K_N|}{|K|} = 0,$$

*a menos que $G_f$ seja uma curva analítica complexa.*

**Prova:** Assuma que $G_f$ não é um plano e que $\inf_{K<0} \frac{|K_N|}{|K|} > 0$. Introduzimos parâmetros globais isotérmicos $(u, v)$ tais que $G_f$ seja uma superfície mínima parametrizada via a aplicação

$$X(u, v) = (u, au + bv, \varphi(u, v), \psi(u, v)),$$

onde $a$,$b$ são constantes reais com $b > 0$.

Afirmamos que $(a, b) = (0, 1)$. Suponha, por absurdo, que $(a, b) \neq (0, 1)$. Iremos derivar a expressão (2.6) em relação às variáveis $u$ e $v$ e usaremos o fato de $\varphi$ ser uma função harmônica para obtermos as equações abaixo.

$$\begin{aligned} \varphi_{uu}\varphi_v + \varphi_u\varphi_{uv} + \psi_{uu}\psi_v + \psi_u\psi_{uv} &= 0 \\ \Rightarrow \varphi_{uu}\varphi_v + \varphi_u\varphi_{uv} &= -\psi_{uu}\psi_v - \psi_u\psi_{uv} \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{uv}\varphi_v + \varphi_u\varphi_{vv} + \psi_{uv}\psi_v + \psi_u\psi_{vv} &= 0 \\ \Rightarrow \varphi_{uv}\varphi_v + \varphi_u\varphi_{vv} &= -\psi_{uv}\psi_v - \psi_u\psi_{vv} \\ \Rightarrow \varphi_{uu}\varphi_u - \varphi_v\varphi_{uv} &= \psi_{uv}\psi_v - \psi_u\psi_{uu}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Elevando ao quadrado os dois membros das equações (3.4) e (3.3), obtemos

$$\begin{aligned} (\varphi_{uu}\varphi_v + \varphi_u\varphi_{uv})^2 &= (\psi_{uu}\psi_v + \psi_u\psi_{uv})^2 \\ \varphi_{uu}^2\varphi_v^2 + 2\varphi_{uu}\varphi_v\varphi_u\varphi_{uv} + \varphi_u^2\varphi_{uv}^2 &= \psi_{uu}^2\psi_v^2 + 2\psi_{uu}\psi_v\psi_u\psi_{uv} + \psi_u^2\psi_{uv}^2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

e

$$\begin{aligned}(\varphi_{uu}\varphi_u - \varphi_v\varphi_{uv})^2 &= (\psi_{uv}\psi_v - \psi_u\psi_{uu})^2\\ \varphi_{uu}^2\varphi_u^2 - 2\varphi_{uu}\varphi_u\varphi_v\varphi_{uv} + \varphi_v^2\varphi_{uv}^2 &= \psi_{uu}^2\psi_u^2 - 2\psi_{uu}\psi_v\psi_u\psi_{uv} + \psi_v^2\psi_{uv}^2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Somando (3.5) e (3.6), temos

$$\begin{aligned}\varphi_{uu}^2\varphi_v^2 + \varphi_u^2\varphi_{uv}^2 + \varphi_{uu}^2\varphi_u^2 + \varphi_v^2\varphi_{uv}^2 &= \psi_{uu}^2\psi_v^2 + \psi_u^2\psi_{uv}^2 + \psi_{uu}^2\psi_u^2 + \psi_v^2\psi_{uv}^2\\ \varphi_{uu}^2\left(\varphi_v^2 + \varphi_u^2\right) + \varphi_{uv}^2\left(\varphi_v^2 + \varphi_u^2\right) &= \psi_{uu}^2\left(\psi_v^2 + \psi_u^2\right) + \psi_{uv}^2\left(\psi_v^2 + \psi_u^2\right)\\ \left(\varphi_{uu}^2 + \varphi_{uv}^2\right)\left(\varphi_v^2 + \varphi_u^2\right) &= \left(\psi_{uu}^2 + \psi_{uv}^2\right)\left(\psi_v^2 + \psi_u^2\right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^2$

$$M_0 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2; w(u,v) = 0\},$$

onde

$$w(u,v) = \left(\varphi_{uu}^2 + \varphi_{uv}^2\right)\left(\varphi_v^2 + \varphi_u^2\right),$$

ou, equivalentemente, como vimos em (3.7)

$$w(u,v) = \left(\psi_{uu}^2 + \psi_{uv}^2\right)\left(\psi_v^2 + \psi_u^2\right).$$

Afirmamos que o complementar $M_1 = \mathbb{R}^2 - M_0$ é denso em $\mathbb{R}^2$. Para este feito , é suficiente mostrar que o interior, $int(M_0)$, de $M_0$ é vazio. Suponha, por absurdo, que $int(M_0) \neq \emptyset$ e seja $U$ uma componente conexa de $int(M_0)$ que contenha o ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $w(x,y) = 0$. Isto é,

$$w(x,y) = \left(\varphi_{xx}^2 + \varphi_{xy}^2\right)\left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2\right) = 0.$$

Usando este fato e a continuidade da função $\varphi$, garantimos a existência de uma vizinhança $V \subset U$ de $(x,y)$ tal que, $\varphi_u = \varphi_v = 0$ ou $\varphi_{uu} = \varphi_{vv} = 0$ , para $(u,v) \in V$. Nos dois casos, a função analítica $\phi_3 = \varphi_u - i\varphi_v$ fica na forma $\phi_3 = c_1 - ic_2$ em $V$ e, pelo Teorema da Identidade, $\phi_3 = c_1 - ic_2$ para $(u,v) \in U$. Isto é, $\varphi$ é uma função afim. Usando os mesmos argumentos, garantimos que $\psi$ também é uma função afim. Dessa maneira o gráfico de $f$ é um plano em $\mathbb{R}^4$, o que contradiz a nossa suposição. Portanto, $int(M_0) = \emptyset$ e $M_1$ é denso em $\mathbb{R}^2$.

Multiplicando a equação (3.3) por $\varphi_u$ e a equação (3.4) por $-\varphi_v$, obtemos

$$\varphi_{uu}\varphi_v\varphi_u + \varphi_u^2\varphi_{uv} = -\psi_{uu}\psi_v\varphi_u - \psi_u\psi_{uv}\varphi_u, \tag{3.8}$$

$$\varphi_{uv}\varphi_v^2 - \varphi_u\varphi_{uu}\varphi_v = \psi_{uu}\psi_u\varphi_v - \psi_v\psi_{uv}\varphi_v. \tag{3.9}$$

Somando as equações (3.8) e (3.9), teremos

$$\begin{aligned}
\varphi_{uv}\varphi_v^2 + \varphi_u^2\varphi_{uv} &= -\psi_{uu}\psi_v\varphi_u - \psi_u\psi_{uv}\varphi_u + \psi_{uu}\psi_u\varphi_v - \psi_v\psi_{uv}\varphi_v \\
\varphi_{uv}\left(\varphi_v^2 + \varphi_u^2\right) &= \psi_{uu}\left(\psi_u\varphi_v - \psi_v\varphi_u\right) - \psi_{uv}\left(\psi_u\varphi_u + \psi_v\varphi_v\right) \\
\varphi_{uv}\left(\varphi_v^2 + \varphi_u^2\right) &= -J_\Phi\psi_{uu} - \psi_{uv}\left(\psi_u\varphi_u + \psi_v\varphi_v\right) \\
\varphi_{uv} &= \frac{-J_\Phi\psi_{uu} - \psi_{uv}\left(\psi_u\varphi_u + \psi_v\varphi_v\right)}{\varphi_u^2 + \varphi_v^2}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Multiplicando a equação (3.3) por $\varphi_v$ e a equação (3.4) por $\varphi_u$, obtemos

$$\varphi_v^2\varphi_{uu} + \varphi_v\varphi_u\varphi_{uv} = -\psi_{uu}\psi_v\varphi_v - \psi_u\varphi_v\psi_{uv}, \tag{3.11}$$

$$\varphi_u^2\varphi_{uu} - \varphi_u\varphi_v\varphi_{uv} = \psi_{uv}\psi_v\varphi_u - \psi_u\psi_{uu}\varphi_u. \tag{3.12}$$

Somando as equações (3.11) e (3.12), teremos

$$\begin{aligned}
\varphi_{uu}\varphi_v^2 + \varphi_u^2\varphi_{uu} &= -\psi_{uu}\psi_u\varphi_u - \psi_u\psi_{uv}\varphi_v - \psi_{uu}\psi_v\varphi_v + \psi_v\psi_{uv}\varphi_u \\
\varphi_{uu}\left(\varphi_v^2 + \varphi_u^2\right) &= \psi_{uv}\left(\psi_v\varphi_u - \psi_u\varphi_v\right) - \psi_{uu}\left(\psi_u\varphi_u - \psi_v\varphi_v\right) \\
\varphi_{uu}\left(\varphi_v^2 + \varphi_u^2\right) &= J_\Phi\psi_{uv} - \psi_{uu}\left(\psi_u\varphi_u + \psi_v\varphi_v\right) \\
\varphi_{uu} &= \frac{J_\Phi\psi_{uv} - \psi_{uu}\left(\psi_u\varphi_u + \psi_v\varphi_v\right)}{\varphi_u^2 + \varphi_v^2}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Nosso objetivo agora é encontrar dois vetores $\eta$ e $\xi$, normais a $G_f$. Seja $\eta_1 \in \mathbb{R}^4$, $\eta_1 = (x, y, z, w)$, tal que $\langle \eta_1, X_u \rangle = 0 = \langle \eta_1, X_v \rangle$. Então,

$$\begin{cases} x + ay + \varphi_u z + \psi_u w = 0 \\ \qquad by + \varphi_v z + \psi_v w = 0 \end{cases}$$

e $\eta_1 = \left(\frac{a}{b}(\varphi_v z + \psi_v w) - \varphi_u z - \psi_u w, \frac{1}{b}(-\varphi_v z - \psi_v w), z, w\right)$. Assim,

$$\begin{aligned}
b\eta_1 &= (a(\varphi_v z + \psi_v w) - b\varphi_u z - b\psi_u w, (-\varphi_v z - \psi_v w), bz, bw) \\
&= z\left(a\varphi_v - b\varphi_u, -\varphi_v, b.0\right) + w\left(a\psi_v - b\psi_u, -\psi_v, 0, b\right).
\end{aligned}$$

Sejam $\xi = (a\varphi_v - b\varphi_u, -\varphi_v, b, 0)$ e $\eta = (a\psi_v - b\psi_u, -\psi_v, 0, b)$. Esses vetores são normais a $G_f$ e satisfazem

$$|\xi|^2|\eta|^2 - \langle \xi, \eta \rangle^2 = b^2E^2.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
|\xi|^2|\eta|^2 - \langle \xi, \eta \rangle^2 &= \left((a\varphi_v - b\varphi_u)^2 + \varphi_v^2 + b^2\right)\left((a\psi_v - b\psi_u)^2 + \psi_v + b^2\right) \\
&\quad - \left((a\varphi_v - b\varphi_u)(a\psi_v - b\psi_u) + \psi_u\varphi_v\right)^2 \\
&= (a\varphi_v - b\varphi_u)^2(a\psi_v - b\psi_u)^2 + \psi_v^2(a\varphi_v - b\varphi_u)^2 \\
&\quad + b^2(a\varphi_v - b\varphi_u)^2 + \varphi_v^2(a\psi_v - b\psi_u)^2 + \varphi_v^2\psi_v^2 + b^2\varphi_v^2 + b^2\psi_v^2 \\
&\quad + b^2(a\psi_v - b\psi_u)^2 + b^4 - (a\varphi_v - b\varphi_u)^2(a\psi_v - b\psi_u)^2 - \varphi_v^2\psi_v^2 \\
&\quad - 2(a\varphi_v - b\varphi_u)(a\psi_v - b\psi_u)\varphi_v\psi_v \\
&= b^2((a\varphi_v - b\varphi_u)^2 + \varphi_v^2 + \psi_v^2 + (a\psi_v - b\psi_u)^2 + b^2) \\
&\quad + \varphi_v^2(a^2\psi_v^2 - 2ab\psi_u\psi_v + b^2\psi_u^2) + \psi_v^2(a^2\varphi_v^2 - 2ab\varphi_u\varphi_v + b^2\varphi_u^2) \\
&\quad - 2(a^2\varphi_v\psi_v - ab\varphi_v\psi_u - ab\varphi_u\psi_v + b^2\varphi_u\psi_u)\varphi_v\psi_v \\
&= b^2((a\varphi_v - b\varphi_u)^2 + \varphi_v^2 + \psi_v^2 + (a\psi_v - b\psi_u)^2 + b^2) \\
&\quad + a^2\varphi_v^2\psi_v^2 - 2ab\varphi_v^2\psi_u\psi_v + b^2\varphi_v^2\psi_u^2 + a^2\varphi_v^2\psi_v^2 \\
&\quad - 2ab\varphi_u\varphi_v\psi_v^2 + b^2\psi_v^2\varphi_u^2 - 2a^2\varphi_v^2\psi_v^2 - 2b^2\varphi_u\psi_u\varphi_v\psi_v \\
&\quad + 2ab\varphi_v^2\psi_u\psi_v + 2ab\varphi_u\varphi_v\psi_v^2 \\
&= b^2((a\varphi_v - b\varphi_u)^2 + \varphi_v^2 + \psi_v^2 + (a\psi_v - b\psi_u)^2 + b^2 + \psi_v^2\varphi_u^2 + \varphi_v^2\psi_u^2 \\
&\quad - 2\varphi_u\psi_u\varphi_v\psi_v) \\
&= b^2((a\varphi_v - b\varphi_u)^2 + \varphi_v^2 + \psi_v^2 + (a\psi_v - b\psi_u)^2 + b^2 + (\varphi_u\psi_v - \varphi_v\psi_u)^2) \\
&= b^2E^2.
\end{aligned}$$

Note que $\{X_u, X_v, \xi, \eta\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ ao longo do gráfico de $f$. Estamos interessados em uma base ortonormal $\{e_1, e_2, \xi_3, \xi_4\}$ de $\mathbb{R}^4$, tal que $\xi_3$ e $\xi_4$ sejam normais a $G_f$. Sejam $e_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}X_u$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{E}}X_v$ e $\xi_3 = \frac{1}{|\xi|}\xi$. O vetor $\xi_4$ será obtido pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

$$\begin{aligned}
\zeta &= \eta - \frac{\langle X_u, \eta\rangle X_u}{|X_u|^2} - \frac{\langle X_v, \eta\rangle X_v}{|X_v|^2} - \frac{\langle \xi, \eta\rangle \xi}{|\xi|^2} \\
&= \eta - \frac{\langle \xi, \eta\rangle \xi}{|\xi|^2} \\
&= \frac{\eta|\xi|^2 - \langle \xi, \eta\rangle \xi}{|\xi|^2}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|\zeta|^2 &= \left\langle \frac{\eta|\xi|^2 - \langle \xi, \eta\rangle \xi}{|\xi|^2}, \frac{\eta|\xi|^2 - \langle \xi, \eta\rangle \xi}{|\xi|^2} \right\rangle \\
&= \frac{|\xi|^4\langle \eta, \eta\rangle - 2|\xi|^2\langle \xi, \eta\rangle^2 + \langle \xi, \eta\rangle^2\langle \xi, \xi\rangle}{|\xi|^4} \\
&= \frac{|\xi|^4|\eta|^2 - 2|\xi|^2\langle \xi, \eta\rangle^2 + |\xi|^2\langle \xi, \eta\rangle^2}{|\xi|^4} \\
&= \frac{|\xi|^4|\eta|^2 - |\xi|^2\langle \xi, \eta\rangle^2}{|\xi|^4} \\
&= \frac{|\xi|^2|\eta|^2 - \langle \xi, \eta\rangle^2}{|\xi|^2} \\
&= \frac{b^2E^2}{|\xi|^2}.
\end{aligned}$$

Seja $\xi_4 = \frac{\zeta}{|\zeta|}$, isto é, $\xi_4 = \frac{1}{b|\xi|E}(\eta|\xi|^2 - \langle \xi, \eta\rangle \xi)$. Com o objetivo de encontrar a expressão das curvaturas Gaussiana e normal, calcularemos alguns coeficientes da segunda forma fundamental.

$$\begin{aligned}
h_{11}^3 &= \langle \overline{\nabla}_{e_1}\xi_3, e_1\rangle \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{X_u}{\sqrt{E}}}\xi_3, \frac{X_u}{\sqrt{E}} \right\rangle \\
&= \frac{1}{E}\langle (\xi_3)_u, X_u\rangle \\
&= \frac{1}{E}\left\langle \frac{\xi_u|\xi| - \xi|\xi|_u}{|\xi|^2}, X_u \right\rangle \\
&= \frac{1}{E|\xi|}\langle \xi_u, X_u\rangle \\
&= \frac{1}{E|\xi|}\langle (a\varphi_{uv} - b\varphi uu, -\varphi uv, 0, 0), (1, a, \varphi_u, \psi_u)\rangle \\
&= \frac{-b\varphi_{uu}}{E|\xi|},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
h_{12}^3 &= \langle \overline{\nabla}_{e_1}\xi_3, e_2\rangle \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{X_u}{\sqrt{E}}}\xi_3, \frac{X_v}{\sqrt{E}} \right\rangle \\
&= \frac{1}{E}\langle (\xi_3)_u, X_v\rangle \\
&= \frac{1}{E}\left\langle \frac{\xi_u|\xi| - \xi|\xi|_u}{|\xi|^2}, X_v \right\rangle \\
&= \frac{1}{E|\xi|}\langle \xi_u, X_v\rangle \\
&= \frac{1}{E|\xi|}\langle (a\varphi_{uv} - b\varphi uu, -\varphi uv, 0, 0), (0, b, \varphi_v, \psi_v)\rangle \\
&= \frac{-b\varphi_{uv}}{E|\xi|},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_{11}^4 &= \langle \overline{\nabla}_{e_1}\xi_4, e_1\rangle \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{X_u}{\sqrt{E}}}\xi_4, \frac{X_u}{\sqrt{E}} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{(\xi_4)_u}{E}, X_u \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{(|\xi|^2\eta - \langle \xi, \eta\rangle \xi)_u Eb|\xi| + (|\xi|^2\eta - \langle \xi, \eta\rangle\xi)(bE|\xi|)_u}{E^3 b^2 |\xi|^2}, X_u \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{(|\xi|^2\eta - \langle \xi, \eta\rangle \xi)_u}{E^2 b|\xi|}, X_u \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{(|\xi|^2)_u\eta + |\xi|^2\eta_u - \langle \xi, \eta\rangle_u \xi - \langle \xi, \eta\rangle \xi_u}{E^2 b|\xi|}, X_u \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{(|\xi|^2\eta_u - \langle \xi, \eta\rangle \xi_u}{E^2 b|\xi|}, X_u \right\rangle \\
&= \frac{|\xi|^2\langle \eta_u, X_u\rangle - \langle \xi, \eta\rangle\langle \xi_u, X_u\rangle}{E^2 b|\xi|} \\
&= \frac{-|\xi|^2 b\psi_{uu} + \langle \xi, \eta\rangle b\varphi_{uu}}{E^2 b|\xi|} \\
&= \frac{\langle \xi, \eta\rangle \varphi_{uu} - |\xi|^2\psi_{uu}}{E^2|\xi|},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_{12}^4 &= \left\langle \overline{\nabla}_{e_1}\xi_4, e_2 \right\rangle \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{X_u}{\sqrt{E}}}\xi_4, \frac{X_v}{\sqrt{E}} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{(\xi_4)_u}{E}, X_v \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{(|\xi|^2\eta - \langle \xi, \eta\rangle\xi)_u Eb|\xi| + (|\xi|^2\eta - \langle \xi,\eta\rangle\xi)(bE|\xi|)_u}{E^3b^2|\xi|^2}, X_v \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{(|\xi|^2\eta - \langle \xi, \eta\rangle\xi)_u}{E^2b|\xi|}, X_v \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{(|\xi|^2)_u\eta + |\xi|^2\eta_u - \langle \xi, \eta\rangle_u\xi - \langle \xi, \eta\rangle\xi_u}{E^2b|\xi|}, X_v \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{(|\xi|^2\eta_u - \langle \xi, \eta\rangle\xi_u}{E^2b|\xi|}, X_v \right\rangle \\
&= \frac{|\xi|^2\langle \eta_u, X_v\rangle - \langle \xi, \eta\rangle\langle \xi_u, X_v\rangle}{E^2b|\xi|} \\
&= \frac{-|\xi|^2b\psi_{uv} + \langle \xi, \eta\rangle b\varphi_{uv}}{E^2b|\xi|} \\
&= \frac{\langle \xi, \eta\rangle\varphi_{uv} - |\xi|^2\psi_{uv}}{E^2|\xi|}.
\end{aligned}
$$

Calculemos algumas expressões abaixo com a finalidade de chegar a uma representação escrita razoável para curvatura Gaussiana.

Usando as equações (3.10) e (3.13)

$$
\begin{aligned}
\varphi_{uu}\psi_{uu} + \varphi_{uv}\psi_{uv} &= \frac{J_\Phi\psi_{uu}\psi_{uv} - (\varphi_u\psi_u + \varphi_v\psi_v)\psi_{uu}^2 - (\varphi_u\psi_u + \varphi_v\psi_v)\psi_{uv}^2 - J_\Phi\psi_{uu}\psi_{uv}}{\varphi_u^2 + \varphi_v^2} \\
&= \frac{-(\varphi_u\psi_u + \varphi_v\psi_v)(\psi_{uu}^2 + \psi_{uv}^2)}{\varphi_u^2 + \varphi_v^2}.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
|\xi|^2 &= b^2+\varphi_v^2+(a\varphi_v-b\varphi_u)^2\\
&= b^2+\varphi_v^2+a^2\varphi_v^2-2ab\varphi_u\varphi_v+b^2\varphi_u^2\\
&= b^2+\varphi_v^2+a^2\varphi_v^2+2(\varphi_u\varphi_v+\psi_u\psi_v)\varphi_u\varphi_v+b^2\varphi_u^2\\
&= b^2+\varphi_v^2+a^2\varphi_v^2+2\varphi_u^2\varphi_v^2+2\psi_u\psi_v\varphi_u\varphi_v+b^2\varphi_u^2\\
&= b^2+\varphi_v^2+a^2\varphi_v^2+2\varphi_u^2\varphi_v^2+(a^2b^2-\varphi_u^2\varphi_v^2-\psi_u^2\psi_v^2)+b^2\varphi_u^2\\
&= b^2+\varphi_v^2+a^2\varphi_v^2+\varphi_u^2\varphi_v^2+a^2b^2-\psi_u^2\psi_v^2+b^2\varphi_u^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\eta|^2 &= b^2+\psi_v^2+(a\psi_v-b\psi_u)^2\\
&= b^2+\psi_v^2+a^2\psi_v^2-2ab\psi_u\psi_v+b^2\psi_u^2\\
&= b^2+\psi_v^2+a^2\psi_v^2+2(\psi_u\psi_v+\varphi_u\varphi_v)\psi_u\psi_v+b^2\psi_u^2\\
&= b^2+\psi_v^2+a^2\psi_v^2+2\psi_u^2\psi_v^2+2\varphi_u\varphi_v\psi_u\psi_v+b^2\psi_u^2\\
&= b^2+\psi_v^2+a^2\psi_v^2+2\psi_u^2\psi_v^2+(a^2b^2-\psi_u^2\psi_v^2-\varphi_u^2\varphi_v^2)+b^2\psi_u^2\\
&= b^2+\psi_v^2+a^2\psi_v^2+\psi_u^2\psi_v^2+a^2b^2-\varphi_u^2\varphi_v^2+b^2\psi_u^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle\xi,\eta\rangle &= (a\varphi_v-b\varphi_u)(a\psi_v-b\psi_u)+\varphi_v\psi_v\\
&= a^2\varphi_v\psi_v-ab\varphi_v\psi_u-ab\varphi_u\psi_v+b^2\varphi_u\psi_u+\varphi_v\psi_v\\
&= a^2\varphi_v\psi_v-ab(\varphi_v\psi_u+\varphi_u\psi_v)+b^2\varphi_u\psi_u+\varphi_v\psi_v\\
&= a^2\varphi_v\psi_v+(\psi_u\psi_v+\varphi_u\varphi_v)(\varphi_v\psi_u+\varphi_u\psi_v)+b^2\varphi_u\psi_u+\varphi_v\psi_v\\
&= a^2\varphi_v\psi_v+\varphi_u\psi_u\psi_v^2+\varphi_v\psi_v\varphi_u^2+\varphi_v\psi_v\psi_u^2+\varphi_u\psi_u\varphi_v^2+b^2\varphi_u\psi_u+\varphi_v\psi_v\\
&= \varphi_v\psi_v(1+a^2+\varphi_u^2+\psi_u^2)+\varphi_u\psi_u(b^2+\varphi_v^2+\psi_v^2)\\
&= \varphi_v\psi_vE+\varphi_u\psi_uE\\
&= (\varphi_v\psi_v+\varphi_u\psi_u)E,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A=(\psi_u^2+\psi_v^2)|\eta|^2 &= b^2\psi_u^2+\psi_u^2\psi_v^2+a^2\psi_u^2\psi_v^2+\psi_u^4\psi_v^2+a^2b^2\psi_u^2-\psi_u^2\varphi_u^2\varphi_v^2+b^2\psi_u^4\\
&\quad +b^2\psi_v^2+\psi_v^4+a^2\psi_v^4+\psi_u^2\psi_v^4+a^2b^2\psi_v^2-\varphi_u^2\varphi_v^2\psi_v^2+b^2\psi_u^2\psi_v^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B=(\varphi_u^2+\varphi_v^2)|\xi|^2 &= b^2\varphi_u^2+\varphi_u^2\varphi_v^2+a^2\varphi_u^2\varphi_v^2+\varphi_u^4\varphi_v^2+a^2b^2\varphi_u^2-\varphi_u^2\psi_u^2\psi_v^2+b^2\varphi_u^4\\
&\quad +b^2\varphi_v^2+\varphi_v^4+a^2\varphi_v^4+\varphi_u^2\varphi_v^4+a^2b^2\varphi_v^2-\varphi_v^2\psi_u^2\psi_v^2+b^2\varphi_u^2\varphi_v^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C &= 2E(\varphi_v\psi_v+\varphi_u\psi_u)^2\\
&= 2E(\varphi_v^2\psi_v^2+2\varphi_u\psi_u\varphi_v\psi_v+\varphi_u^2\psi_u^2)\\
&= 2E(\varphi_v^2\psi_v^2+a^2b^2-\varphi_u^2\varphi_v^2-\psi_u^2\psi_v^2+\varphi_u^2\psi_u^2)\\
&= (E+E)(\varphi_v^2\psi_v^2+a^2b^2-\varphi_u^2\varphi_v^2-\psi_u^2\psi_v^2+\varphi_u^2\psi_u^2)\\
&= (1+a^2+\varphi_u^2+\psi_u^2)(\varphi_v^2\psi_v^2+a^2b^2-\varphi_u^2\varphi_v^2-\psi_u^2\psi_v^2+\varphi_u^2\psi_u^2)\\
&\quad +(b^2+\varphi_v^2+\psi_v^2)(\varphi_v^2\psi_v^2+a^2b^2-\varphi_u^2\varphi_v^2-\psi_u^2\psi_v^2+\varphi_u^2\psi_u^2)\\
&= \varphi_v^2\psi_v^2+a^2b^2-\varphi_u^2\varphi_v^2-\psi_u^2\psi_v^2+\varphi_u^2\psi_u^2+a^2\varphi_v^2\psi_v^2+a^4b^2-a^2\varphi_u^2\varphi_v^2-a^2\psi_u^2\psi_v^2\\
&\quad +a^2\varphi_u^2\psi_u^2+\varphi_u^2\varphi_v^2\psi_v^2+a^2b^2\varphi_u^2-\varphi_u^4\varphi_v^2-\varphi_u^2\psi_u^2\psi_v^2+\varphi_u^4\psi_u^2+\varphi_v^2\psi_u^2\psi_v^2+a^2b^2\psi_u^2\\
&\quad -\varphi_u^2\varphi_v^2\psi_u^2-\psi_u^4\psi_v^2+\varphi_u^2\psi_u^4+b^2\varphi_v^2\psi_v^2+a^2b^4-b^2\varphi_u^2\varphi_v^2-b^2\psi_u^2\psi_v^2+b^2\varphi_u^2\psi_u^2\\
&\quad +\varphi_v^4\psi_v^2+a^2b^2\varphi_v^2-\varphi_u^2\varphi_v^4-\varphi_v^2\psi_u^2\psi_v^2+\varphi_u^2\varphi_v^2\psi_u^2+\varphi_v^2\psi_v^4+a^2b^2\psi_v^2-\varphi_u^2\varphi_v^2\psi_v^2\\
&\quad -\psi_u^2\psi_v^4+\varphi_u^2\psi_u^2\psi_v^2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A+B+C &= b^2\psi_u^2+a^2b^2\psi_u^2+b^2\psi_u^4+b^2\psi_v^2+\psi_v^4+a^2\psi_v^4+a^2b^2\psi_v^2+b^2\varphi_u^2\\
&\quad +a^2b^2\varphi_u^2+b^2\varphi_u^4+b^2\varphi_v^2+\varphi_v^4+a^2\varphi_v^4+a^2b^2\varphi_v^2+\varphi_v^2\psi_v^2+a^2b^2\\
&\quad +\varphi_u^2\psi_u^2+a^2\varphi_v^2\psi_v^2+a^4b^2+a^2\varphi_u^2\psi_u+a^2b^2\varphi_u^2-\varphi_u^2\psi_u^2\psi_v^2\\
&\quad +\varphi_u^4\psi_u^2+a^2b^2\psi_u^2-\varphi_u^2\varphi_v^2\psi_u^2+\varphi_u^2\psi_u^4+b^2\varphi_v^2\psi_v^2+a^2b^4\\
&\quad +b^2\varphi_u^2\psi_u^2+\varphi_v^4\psi_v^2+a^2b^2\varphi_v^2-\varphi_v^2\psi_u^2\psi_v^2+\varphi_v^2\psi_v^4+a^2b^2\psi_v^2-\varphi_u^2\varphi_v^2\psi_v^2\\
&= a^2b^2(1+a^2+\varphi_u^2+\psi_u^2)+a^2b^2(b^2+\varphi_v^2+\psi_v^2)+\varphi_v^2\psi_v^2(b^2+\varphi_v^2+\psi_v^2)\\
&\quad +b^2\psi_u^2(1+a^2+\varphi_u^2+\psi_u^2)+\psi_v^2(b^2+\varphi_v^2+\psi_v^2)+a^2\varphi_v^2(b^2+\varphi_v^2+\psi_v^2)\\
&\quad +\varphi_u^2\psi_u^2(1+a^2+\varphi_u^2+\psi_u^2)+\varphi_v^2(b^2+\varphi_v^2)+a^2\psi_v^2(b^2+\psi_v^2)\\
&\quad +b^2\varphi_u^2(1+a^2+\varphi_u^2)-\varphi_u^2\psi_u^2(\varphi_v^2+\psi_v^2)-\varphi_v^2\psi_v^2(\varphi_u^2+\psi_u^2)\\
&= a^2b^2E+a^2b^2E+\varphi_v^2\psi_v^2E+b^2\psi_u^2E+\psi_v^2E+a^2\varphi_v^2E+\varphi_u^2\psi_u^2E+\varphi_v^2(E-\psi_v^2)\\
&\quad +a^2\psi_v^2(E-\varphi_v^2)+b^2\varphi_u^2(E-\psi_u^2)-\varphi_u^2\psi_u^2(E-b^2)-\varphi_v^2\psi_v^2(E-1-a^2)\\
&= (2a^2b^2+\varphi_v^2\psi_v^2+b^2\psi_u^2+\psi_v^2+a^2\varphi_v^2+\varphi_u^2\psi_u^2+\varphi_v^2+a^2\psi_v^2+b^2\varphi_u^2-\varphi_u^2\psi_u^2\\
&\quad -\varphi_v^2\psi_v^2)E-(\varphi_v^2\psi_v^2+a^2\psi_v^2\varphi_v^2+b^2\varphi_u^2\psi_u^2-b^2\varphi_u^2\psi_u^2-\varphi_v^2\psi_v^2-a^2\psi_v^2\varphi_v^2)\\
&= (2a^2b^2+b^2\psi_u^2+\psi_v^2+a^2\varphi_v^2+\varphi_v^2+a^2\psi_v^2+b^2\varphi_u^2)E\\
&= ((a\varphi_v-b\varphi_u)^2+(a\psi_v-b\psi_u)^2+2ab\varphi_u\varphi_v+2ab\psi_u\psi_v+2a^2b^2+\varphi_v^2+\psi_v^2)E\\
&= ((a\varphi_v-b\varphi_u)^2+(a\psi_v-b\psi_u)^2+2ab(\varphi_u\varphi_v+\psi_u\psi_v)+2a^2b^2+\varphi_v^2+\psi_v^2)E\\
&= ((a\varphi_v-b\varphi_u)^2+(a\psi_v-b\psi_u)^2+2ab(-ab)+2a^2b^2+\varphi_v^2+\psi_v^2)E\\
&= ((a\varphi_v-b\varphi_u)^2+(a\psi_v-b\psi_u)^2+\varphi_v^2+\psi_v^2)E\\
&= (E^2-J_\Phi^2-b^2)E\\
&= ((1+a^2+b^2)E-2b^2)E.
\end{aligned}
$$

Com base nessas informações e usando o fato que $-K = \sum_{\alpha=3}^{n}(h_{11}^{\alpha})^2 + (h_{12}^{\alpha})^2$, obtemos

$$
\begin{aligned}
-K &= (h_{11}^3)^2 + (h_{12}^3)^2 + (h_{11}^4)^2 + (h_{12}^4)^2 \\
&= \frac{b^2\varphi_{uu}^2}{E^2|\xi|^2} + \frac{b^2\varphi_{uv}^2}{E^2|\xi|^2} + \frac{(\langle\xi,\eta\rangle\varphi_{uu} - |\xi|^2\psi_{uu})^2}{E^4|\xi|^2} + \frac{(\langle\xi,\eta\rangle\varphi_{uv} - |\xi|^2\psi_{uv})^2}{E^4|\xi|^2} \\
&= \frac{1}{E^4|\xi|^2}(b^2E^2 + \langle\xi,\eta\rangle^2)(\varphi_{uu}^2 + \varphi_{uv}^2) - 2\langle\xi,\eta\rangle|\xi|^2\left(\varphi_{uu}\psi_{uu} + \varphi_{uv}\psi_{uv}\right) + |\xi|^4(\psi_{uu}^2 + \psi_{uv}^2)\big) \\
&= \frac{1}{E^4|\xi|^2}(|\xi|^2|\eta|^2(\varphi_{uu}^2 + \varphi_{uv}^2) - 2\langle\xi,\eta\rangle|\xi|^2\left(\varphi_{uu}\psi_{uu} + \varphi_{uv}\psi_{uv}\right) + |\xi|^4(\psi_{uu}^2 + \psi_{uv}^2)\big) \\
&= \frac{1}{E^4}\left(\eta|^2(\varphi_{uu}^2 + \varphi_{uv}^2) - 2\langle\xi,\eta\rangle(\varphi_{uu}\psi_{uu} + \varphi_{uv}\psi_{uv}) + |\xi|^2(\psi_{uu}^2 + \psi_{uv}^2)\right). \\
&= \frac{1}{E^4}\frac{(\psi_{uu}^2 + \psi_{uv}^2)}{\varphi_u^2 + \varphi_v^2}\left(\eta|^2(\psi_u^2 + \psi_v^2) + 2\langle\xi,\eta\rangle(\varphi_u\psi_u + \varphi_v\psi_v) + |\xi|^2(\varphi_u^2 + \varphi_v^2)\right). \\
&= \frac{1}{E^4}\frac{(\psi_{uu}^2 + \psi_{uv}^2)}{\varphi_u^2 + \varphi_v^2}\left(\eta|^2(\psi_u^2 + \psi_v^2) + 2E(\varphi_u\psi_u + \varphi_v\psi_v)^2 + |\xi|^2(\varphi_u^2 + \varphi_v^2)\right). \\
&= \frac{1}{E^4}\frac{(\psi_{uu}^2 + \psi_{uv}^2)}{\varphi_u^2 + \varphi_v^2}(A + B + C). \\
&= \frac{1}{E^4}\frac{(\psi_{uu}^2 + \psi_{uv}^2)}{\varphi_u^2 + \varphi_v^2}((1 + a^2 + b^2)E - 2b^2)E. \\
&= \frac{1}{E^3}\frac{(\psi_{uu}^2 + \psi_{uv}^2)}{\varphi_u^2 + \varphi_v^2}((1 + a^2 + b^2)E - 2b^2).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$K = \frac{1}{E^3}\frac{(\psi_{uu}^2 + \psi_{uv}^2)}{\varphi_u^2 + \varphi_v^2}(2b^2 - (1 + a^2 + b^2)E). \tag{3.14}$$

De (2.3), (3.10) e (3.13), obtemos

$$\begin{aligned}
K_N &= 2\left(h_{11}^3 h_{12}^4 - h_{12}^3 h_{11}^4\right) \\
&= 2\left(\frac{-b\varphi_{uu}\left(\langle \xi,\eta\rangle \varphi_{uv} - |\xi|^2\psi_{uv}\right) + b\varphi_{uv}\left(\langle \xi,\eta\rangle\varphi_{uu} - |\xi|^2\psi_{uu}\right)}{E^3|\xi|^2}\right) \\
&= \frac{2\left(b|\xi|^2\varphi_{uu}\psi_{uv} - b|\xi|^2\varphi_{uv}\psi_{uu}\right)}{E^3|\xi|^2} \\
&= \frac{2b(\varphi_{uu}\psi_{uv} - \varphi_{uv}\psi_{uu})}{E^3} \\
&= \frac{2b(J_\Phi\psi_{uv}^2 - (\varphi_u\psi_u + \varphi_v\psi_v)\psi_{uu}\psi_{uv} + (\varphi_u\psi_u + \varphi_v\psi_v)\psi_{uu}\psi_{uv} + J_\Phi\psi_{uu}^2)}{E^3(\varphi_u^2 + \varphi_v^2)} \\
&= \frac{2b(J_\Phi\psi_{uv}^2 + J_\Phi\psi_{uu}^2)}{E^3(\varphi_u^2+\varphi_v^2)} \\
&= \frac{2b}{E^3}\frac{(\psi_{uv}^2 + \psi_{uu}^2)}{(\varphi_u^2+\varphi_v^2)} J_\Phi \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Uma vez que

$$E = 1 + a^2 + \varphi_u^2 + \psi_u^2 = b^2 + \varphi_v^2 + \psi_v^2,$$

temos

$$2E = 1 + a^2 + b^2 + \varphi_u^2 + \varphi_v^2 + \psi_u^2 + \psi_v^2.$$

Isto é,

$$E = \frac{1 + a^2 + b^2 + \varphi_u^2 + \varphi_v^2 + \psi_u^2 + \psi_v^2}{2} \geq \frac{1 + a^2 + b^2}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
2b^2 - (1 + a^2 + b^2)E &\leq 2b^2 - \frac{(1+a^2+b^2)^2}{2} \\
&= \frac{4b^2 - (1+a^2+b^2)^2}{2} \\
&= \frac{4b^2 - (1 + 2a^2 + 2b^2 + a^4 + 2a^2b^2 + b^4)}{2} \\
&= \frac{2b^2 - (1 + 2a^2 + a^4 + 2a^2b^2 + b^4)}{2} \\
&= -\frac{1}{2}(a^2 + (b-1)^2)(a^2 + (b+1)^2) \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Isso mostra que $M_1 \subset \{(u,v) \in \mathbb{R}^2; K(u,v) < 0\}$. Ademais,

$$\begin{aligned}
\frac{K_N}{K} &= \frac{2bE^3(\varphi_u^2 + \varphi_v^2)(\psi_{uv}^2 + \psi_{uu}^2)J_\Phi}{E^3(\varphi_u^2 + \varphi_v^2)(\psi_{uv}^2 + \psi_{uu}^2)(2b^2 - (1 + a^2 + b^2)E)} \\
&= \frac{2bJ_\Phi}{(2b^2 - (1 + a^2 + b^2)E)}.
\end{aligned}$$

Usando a expressão acima e a equação (2.8), temos

$$\begin{aligned}
\frac{K_N^2}{K^2} &= \frac{4b^2 J_\Phi^2}{(2b^2 - (1 + a^2 + b^2)E)^2} \\
&= \frac{4b^2(E^2 - (1 + a^2 + b^2)E + b^2)}{(2b^2 - (1 + a^2 + b^2)E)^2} \\
&= 4b^2 W(E),
\end{aligned}$$

onde

$$W(t) := \frac{t^2 - (1 + a^2 + b^2)t + b^2}{((1 + a^2 + b^2)t - 2b^2)^2}$$

é uma função crescente para $t > \frac{2b^2}{1+a^2+b^2}$. De fato,

$$\begin{aligned}
W'(t) &= \frac{(2t - (1 + a^2 + b^2))((1 + a^2 + b^2)t - 2b^2) - 2(t^2 - (1 + a^2 + b^2)t + b^2)(1 + a^2 + b^2)}{((1 + a^2 + b^2)t - 2b^2)^3} \\
&= \frac{(1 + a^2 + b^2)^2 t - 4tb^2}{((1 + a^2 + b^2)t - 2b^2)^3} \\
&= \frac{t(a^2 + (b - 1)^2)(a^2 + (b + 1)^2)}{((1 + a^2 + b^2)t - 2b^2)^3}.
\end{aligned}$$

Como $\frac{2b^2}{1+a^2+b^2} > 0$, temos $W'(t) > 0$ para $t < 0$ ou para $t > \frac{2b^2}{1+a^2+b^2}$. Uma vez que estamos supondo $\inf_{K<0} \frac{|K_N|}{|K|} = 0$, obtemos

$$\inf_{M_1} \frac{|K_N|}{|K|} > 0.$$

Sendo assim,

$$0 < \inf_{M_1} \frac{K_N^2}{K^2} = \inf_{M_1} 4b^2 W(E) = 4b^2 W(\inf_{M_1} E).$$

Isto é, $W(\inf_{M_1} E) > 0$ ou, equivalentemente,

$$\inf_{M_1} J_\Phi^2 = (\inf_{M_1} E)^2 - (1 + a^2 + b^2) \inf_{M_1} E + b^2 > 0.$$

Por (2.8) e pela expressão acima, obtemos

$$\inf_{M_1} |J_\Phi| > 0.$$

Afirmamos que $\inf_{\mathbb{R}^2} |J_\Phi| = \inf_{M_1} |J_\Phi| > 0$. De fato, como $M_1 \subset \mathbb{R}^2$ temos $\inf_{\mathbb{R}^2} |J_\Phi| \leq \inf_{M_1} |J_\Phi|$. Suponha, por absurdo, que $\inf_{\mathbb{R}^2} |J_\Phi| < \inf_{M_1} |J_\Phi|$. Seja $\epsilon > 0$ tal que $\inf_{\mathbb{R}^2} |J_\Phi| + \epsilon \leq \inf_{M_1} |J_\Phi|$. Sendo assim, existe $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $|J_\Phi(x)| < \inf_{\mathbb{R}^2} |J_\Phi| + \epsilon$. Como $M_1$ é denso em $\mathbb{R}^2$, garantimos a existência de uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos em $M_1$ com $x_n \to x$. Pela continuidade do Jacobiano, $|J_\Phi(x_n)| \to |J_\Phi(x)|$. O que é um absurdo, já que $|J_\Phi(x_n)| > \inf_{M_1} |J_\Phi|$. Assim, $\inf_{\mathbb{R}^2} |J_\Phi| = \inf_{M_1} |J_\Phi| > 0$, como havíamos afirmado. Por outro lado, $\Phi(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$ é uma aplicação harmônica. De acordo com o Lema (3.1), $\Phi$ é uma aplicação afim e, consequentemente, $G_f$ é um plano, fato esse que contradiz a nossa suposição. Logo $(a, b) = (0, 1)$.

Por (2.9) e (2.10), as funções complexas $\phi_k : U \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, 2, 3, 4$, dadas por

$$\begin{cases} \phi_1 = 1, & \phi_2 \;=\; a - bi \\ \phi_3 = \varphi_u - i\varphi_v, & \phi_3 \;=\; \psi_u - i\psi_v \end{cases}$$

são holomorfas e satisfazem a essas duas condições:

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2 \;=\; 0$$

e

$$(\phi_3 - i\phi_4)(\phi_3 + i\phi_4) \;=\; -\left(1 + (a - bi)^2\right).$$

Dessa forma,

$$(\phi_3 - i\phi_4)(\phi_3 + i\phi_4) \;=\; 0.$$

Portanto, $\phi_3 = \pm i\phi_4$. Isto é, $\varphi_u - i\varphi_v = \psi_v + i\psi_u$ e $\Phi$ é holomorfa ou $\varphi_u - i\varphi_v = -\psi_v - i\psi_u$ e $\Phi$ é anti-holomorfa. Nos dois casos obtemos que $G_f$ é uma curva analítica complexa. $\square$

## 3.2 Aplicação

As curvas analíticas complexas são superfícies caracterizadas, localmente, pela relação $|K| = |K_N|$, onde K e $K_N$ representam a curvatura de Gauss e a curvatura normal, respectivamente. O resultado seguinte é uma caracterização de curvas analíticas complexas a partir de dois invariantes geométricos, as curvaturas Gaussiana e Normal.

**Teorema 3.3.** *Seja $G_f$ o gráfico de uma função inteira $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com curvatura Gaussiana $K$ e curvatura normal $K_N$. Assuma que o gráfico de $f$ é uma superfície mínima em $\mathbb{R}^4$. Se $K_N = cK$, onde $c$ é uma constante, então $G_f$ é uma curva analítica complexa. Mais precisamente, $K_N = K = 0$ e $G_f$ é um plano ou $|c| = 1$ e $G_f$ é uma curva analítica não trivial.*

**Prova:** No caso onde $K \equiv 0$, $G_f$ é um plano. Considere agora o caso onde $K$ não é identicamente nula. Temos $\inf_{K<0} \frac{|K_N|}{K} = |c|$. Pelo teorema (3.2), $c = 0$ a menos que $G_f$ seja uma curva analítica complexa. Afirmamos que o caso $c = 0$ não pode ocorrer. De fato, argumentando indiretamente suponha que $c = 0$. Na prova do Teorema (3.2), o conjunto $M_1$ é denso em $\mathbb{R}^2$. De nossa suposição, $K_N = cK = 0$. Por (3.15)

$$K_N = \frac{2b}{E^3} \frac{(\psi_{uv}^2 + \psi_{uu}^2)}{(\varphi_u^2 + \varphi_v^2)} J_\Phi = 0.$$

Em $M_1$, $\psi_{uv}^2 + \psi_{uu}^2 \neq 0$. Temos assim que $J_\Phi \equiv 0$ em $M_1$ e, como $M_1$ é denso em $\mathbb{R}^2$ obtemos que $J_\Phi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^2$. Por (2.8) obtemos

$$E^2 - (1 + a^2 + b^2)E + b^2 = 0,$$

isto é, $E$ é constante e, consequentemente, $K \equiv 0$, contradizendo a nossa suposição. Portanto, $c \neq 0$ e $G_f$ é uma curva analítica complexa não trivial. $\square$

# Bibliografia


[1] F. ALMGREN, *Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem*, Annals of Math, v. **84** (1966) 277-292.

[2] S. BERNSTEIN, *Sur un theoreme de geómétrie et ses applications aux equations aux dérivées partielles du type elliptique*, Comm. Soc. Math. Kharkov, v. **15**, (1915-1917) 38-45.

[3] E. BOMBIERI, E. DE GIORGI and E. GIUSTI, *Minimal cones and the Bernstein conjecture*, Invent Math, v. **07**, (1969) 243-268.

[4] S. S. CHERN and R. OSSERMAN, *Complete minimal surfaces in Euclidean n-space*, J. Analls Math, v. **19**, (1967) 15-34.

[5] L.P. EISENHART, *Minimal surfaces in Euclidean four space*, Amer. J. Math , v. **34**, (1912) 215-236.

[6] E. DE GIORGI, *Una extensione del teorema di Bernstein*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, v. **19**, (1965) 79-85.

[7] L.FU, *An analogue of Bernstein's theorem*, Houston J. Math, v. **24**, (1998) 415-419.

[8] TH. HASANIS, A. SAVAS-HALILAJ, and TH. VLACHOS, *Minimal graphs in $\mathbb{R}^4$ with bounded Jacobians*, Proc Amer Math Soc. v. **137**, (2009) 3463-3471.

[9] TH. HASANIS, A. SAVAS-HALILAJ, and TH. VLACHOS, *On the Jacobian of minimal graphs in $\mathbb{R}^4$*, Bull London Math Soc. v. **43**,(2011) 321-327.

[10] L. NI, *A Bernstein type theorem for minimal volume preserving maps*, Invent Math, v. **07**, (1969) 243-268.

[11] R. OSSERMAN, *A survey of minimal surfaces*, Van Nostrand-Reinhold, New York, (1969).

[12] B. PALKA, *An introduction to complex function theory* (Springer, New York, 1995)

[13] R.SHOEN, *The role oh harmonic mappings in rigidity and deformation problems*, Complex geometry (Osaka 1990), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 143(Dekker, New York, 1993)179-200.

[14] L. SIMON, *A Holder estimate for quasiconformal maps between surfaces in euclidean space*, Acta Math, v. **139** (1977) 19-51.

[15] J. SIMONS, *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Annals of Math, (2)v. **88** (1968) 62-105.

[16] J. WOLFSON , *Minimal Lagrangian diffeomorphisms and the Monge-Ampere equation*, J. Differential Geom. v. **46** (1997) 335-373.