



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PGMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



SUPERFÍCIES COMPLETAS DE CURVATURA MÉDIA
CONSTANTE EM ESPAÇOS HOMOGÊNEOS

RENIVALDO SODRÉ DE SENA

Salvador-Bahia

Março de 2011

SUPERFÍCIES COMPLETAS DE CURVATURA MÉDIA
CONSTANTE EM ESPAÇOS HOMOGÊNEOS

RENIVALDO SODRÉ DE SENA

Orientadora: Prof. Dr^a Ana Lucia Pinheiro Lima.

Salvador-Bahia

Março de 2011

Sena, Renivaldo Sodré de.

Superfícies Completas de Curvatura Média Constante em Espaços Homogêneos / Renivaldo Sodré de Sena. – Salvador: UFBA, 2011.

92 f. : il.

Orientador: Prof. Dr^a Ana Lucia Pinheiro Lima.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2011.

Referências bibliográficas.

1. Espaços Homogêneos. 2. Superfícies. 3. Geometria. I. Lima, Ana Lucia Pinheiro . II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 510.22

: 515.122

SUPERFÍCIES COMPLETAS DE CURVATURA MÉDIA CONSTANTE EM ESPAÇOS HOMOGÊNEOS

RENIVALDO SODRÉ DE SENA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 14 de março de 2011.

Banca examinadora:

Prof^a. Dr^a.Ana Lucia Pinheiro Lima (Orientadora)
UFBA

Prof. Dr. Isaac Costa Lázaro
UFBA

Prof. Dr. Marco Antônio Nogueira Fernandes
UFBA

*À minha mãe Glória, meus
irmãos e meus amigos.*

Agradecimentos

Primeiramente agradeço ao Deus eterno “Porque Dele, e por Ele, e para Ele são todas as coisas”. Razão da minha existência. Dele vem a força e a coragem para enfrentar os grandes desafios da vida.

À minha mãe Glória pelo seu amor incondicional e seu incansável cuidado e a meus irmãos, em especial, minha irmã Jane pelo seu apoio e amizade.

À Igreja Batista Nacional Lírio dos Vales que estave em constante oração por mim, em especial, os irmãos Ednelson, Suely, Luiza, Regina e Rubens pelo incentivo e apoio. Também um agradecimento especial a Itana pelo grande carinho, apoio e incentivo em todos momentos.

À Professora Ana Lucia Pinheiro pela orientação, pelos conselhos, apoio, pelo exemplo de pessoa e profissionalismo a ser seguido. Tenho um enorme respeito e admiração por esta profissional. Obrigado por acreditar em mim e me fazer olhar a vida com os olhos de Falcão. Não aprendi só Matemática. Suas orientações levarei para vida. As palavras não são suficientes para expressar a minha gratidão.

Ao Professor Isaac Costa Lázaro por participar da minha banca e também pela ajuda e orientação, desde a minha graduação, que contribuíram para concluir o mestrado.

Ao Professor Marco Antônio por aceitar a participar da minha banca e pelo apoio e disposição em ajudar durante todos esses anos em que estive no Instituto de Matemática da UFBA.

As Professores do Departamento de Matemática da UFBA, em especial, aos professores José Nelson, Enaldo Vergasta, Elinalva Vergasta, Cristiana Valente, Graça Luzia, Rita de Cássia, Samuel Gomes, Eliana Prates, Silvia Veloso, Jodália, Glória e José Fernandes. Agradeço também as professoras aposentadas Célia, Verlane Cabral, Miriam e Christina. Os quais contribuíram não somente para minha formação como matemático, mas também como ser humano.

À toda equipe do Laboratório de Ensino de Matemática e Estatística da UFBA - LEMA, onde tanto eu aprendi, cresci e sonhei. Um agradecimento especial a professora Elinalva pelo apoio, incentivo e cuidado. Grande exemplo de dedicação e amor a profissão. À professora Cristiana Valente minha “mãe” matemática, o professor Antônio dos Santos

Filho e a Fabiana Laranjeiras. Essas pessoas estão guardadas do lado esquerdo do meu peito.

Aos colegas de graduação Diego Magalhães, Vitor Rios e Robério Batista. Apreendi muito com vocês.

À todos colegas da Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, em especial a minha turma de mestrado, amigos de jornada, Kátia, Caio e Francisleide. Vocês estarão sempre no meu coração. Agradeço também Felipe Antônio pela força e amizade em todos os momentos, Roberto Sant'Anna, Rodrigo von Flach, Ângela Soldatelli, Ana Paula, Hivanna Nascimento e Felipe Moscozo e Emanuelle Romero, pessoas que sempre pude contar.

À todos os funcionários do Instituto de Matemática, em especial, D. Zéze e Tânia. Agradeço também a Alan, Douglas, Neide e Denis os quais sempre estavam dispostos a me ajudar.

Às minhas professoras do colegial Eliana Moreira, Rosemeire, Maria de Lourdes que tanto me incentivaram e aguçaram meus sonhos.

À CAPES pelo auxílio financeiro concedido a mim durante todo o meu mestrado. Finalmente, agradeço a todos aqueles que contribuíram para esta conquista.

Todas as vossas coisas sejam feitas com amor.

I Coríntios 16.14

“Bendize, ó minha alma, ao SENHOR, e tudo o que há em mim bendiga o seu santo nome. Bendize, ó minha alma, ao SENHOR, e não te esqueças de nenhum de seus benefícios”

Salmos 103:1-2.

Resumo

Neste trabalho descreveremos os espaços homogêneos Riemannianos de dimensão três. Enunciaremos o Teorema de Classificação de Thurston, o qual afirma que em dimensão três existem exatamente oito geometrias, a saber, \mathbb{S}^3 , \mathbb{R}^3 , \mathbb{H}^3 , $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, Nil_3 , Sol_3 e $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$. Apresentaremos a diferencial quadrática de Abresch-Rosenberg, que é holomorfa em toda superfície de curvatura média constante, bem como as equações fundamentais para uma imersão isométrica de uma superfície em um espaço homogêneo tridimensional com grupo de isometria de dimensão quatro. Usando estas ferramentas estudamos dois teoremas demonstrados por J. Espinar e H. Rosenberg que classificam as superfícies de curvatura média constante cuja curvatura Gaussiana K não muda de sinal em espaços homogêneos de dimensão três com grupo de isometrias de dimensão quatro.

Palavras-chave: Espaços homogêneos, Diferencial quadrática holomorfa, Imersão isométrica, Curvatura média constante, Curvatura Gaussiana.

Abstract

In this work we describe the Riemannian homogeneous spaces of dimension three. We present the Thurston's Classification Theorem, which states that in three dimensions there are exactly eight geometries, namely, $\mathbb{S}^3, \mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, Nil_3, Sol_3$ e $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$. We present the quadratic differential of Abresch-Rosenberg, which is holomorphic on every constant mean curvature surface, and the fundamental equations for an isometric immersed surface in a homogeneous space 3-dimensional with isometry group of dimension four. Using these tools, we study two theorem demonstrated by J. Espinar and H. Rosenberg, who classify the constant mean curvature surfaces whose Gaussian curvature K does not change sign on homogeneous spaces of dimension three with a group of isometries of dimension four.

Keywords: Homogeneous spaces, Holomorphic quadratic differential, Isometric immersion, constant mean curvature, Gaussian curvature.

Sumário

Introdução	1
1 Espaços Homogêneos Riemannianos de Dimensão Três	4
1.1 As Formas Espaciais	11
1.1.1 O Espaço \mathbb{R}^3	11
1.1.2 O Espaço \mathbb{H}^3	12
1.1.3 O Espaço \mathbb{S}^3	19
1.2 Os Espaços Homogêneos com grupo de isometria 4-dimensional	20
1.2.1 O Espaço $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$	31
1.2.2 O Espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	32
1.2.3 O Espaço de Heisenberg Nil_3	33
1.2.4 O Espaço $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$	35
1.2.5 As Esferas de Berger	41
1.3 O espaço Sol_3	45
2 Superfícies em Espaços Homogêneos	50
2.1 As Equações de Compatibilidade	51
2.2 A Diferencial de Abresch-Rosenberg	62
3 Classificações de H-superfícies completas em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$	70
3.1 Funções q e ν constantes	70
3.2 Curvatura de Gauss K limitada	83
Referências	89

Introdução

Um problema clássico em Geometria Diferencial é o estudo de superfícies de curvatura média constante imersas no espaço Euclidiano. Uma questão fundamental neste tópico é a classificação dessas superfícies sob hipóteses globais como compacidade e completude. Muitos dos resultados obtidos para o espaço Euclidiano foram generalizados com maior ou menor dificuldade para imersões cujo espaço ambiente é a esfera \mathbb{S}^3 ou o espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 . Nestes casos, as variedades ambientes, chamadas de formas espaciais, tem curvatura seccional constante e uma grande quantidade de isometrias, fato este que é fundamental para a demonstração dos resultados.

Os espaços homogêneos são uma generalização natural das formas espaciais. Uma variedade Riemanniana se diz homogênea se seu grupo de isometrias age transitivamente, isto é, para cada par de pontos do espaço existe uma isometria que leva um ponto no outro. Geometricamente, uma variedade homogênea tem a mesma aparência em todos os seus pontos.

Os espaços homogêneos Riemannianos de dimensão três que são simplesmente conexos estão classificados. Estes espaços tem grupo de isometrias de dimensão seis, quatro ou três.

Os espaços com grupo de isometrias de dimensão seis são as formas espaciais: o espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 , o plano hiperbólico \mathbb{H}^3 e a esfera canônica \mathbb{S}^3 .

Os espaços homogêneos com grupo de isometrias de dimensão quatro são fibrações sobre uma forma espacial bidimensional, as fibras são geodésicas e existe uma família a um parâmetro de translações ao longo das fibras, geradas por um campo de Killing unitário, também chamado de campo vertical. Tais variedades são classificadas, a menos de isometrias, pela curvatura κ da superfície base da fibração e a curvatura fibrado τ , onde κ e τ são números satisfazendo $\kappa \neq 4\tau^2$. Quando a curvatura fibrado τ é zero, temos os espaços produtos $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$, se $\kappa < 0$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, se $\kappa > 0$, cujo o grupo de isometrias tem quatro componentes conexas. Quando τ é diferente de zero o grupo de isometrias tem duas componentes conexas. Estas variedades são de três tipos: As esferas de Berger, para $\kappa > 0$, o espaço de Heisenberg Nil_3 , para $\kappa = 0$ e o $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$, para $\kappa < 0$.

Os espaços homogêneos Riemannianos de dimensão três, simplesmente conexo, com grupo de isometrias de dimensão três são certas classes de grupos de Lie; dentre eles destacamos especialmente o espaço Sol_3 . O grupo de isometrias do Sol_3 tem oito componentes conexas.

Estes espaços, exceto as esferas de Berger, são chamados Geometrias de Thurston. Em seus trabalhos, na década de 70, Thurston mostrou que em dimensão três existem exatamente oito geometrias maximais: \mathbb{R}^3 , \mathbb{S}^3 , \mathbb{H}^3 , $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, Nil_3 , $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$ e Sol_3 . Além disso, William Thurston conjecturou que toda variedade tridimensional compacta pode ser decomposta em pedaços que podem ser modelados pelas oitos geometrias acima. Esta é a chamada Conjectura de Geometrização de Thurston. Tal Conjectura foi provada recentemente por Perelman e tem como caso particular a Conjectura de Poincaré, que afirma que a única variedade tridimensional compacta, simplesmente conexa de dimensão três é a esfera \mathbb{S}^3 . No Capítulo 1 do presente trabalho, descrevemos os espaços homogêneos Riemannianos de dimensão três e enunciamos precisamente o Teorema e a Conjectura de Geometrização de Thurston.

Em 2004, inspirado no resultado de Heinz Hopf, Uwe Abresch e Harold Rosenberg provaram em [2] que, para superfícies de curvatura média constante nos espaços produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, existe uma certa variação da diferencial de Hopf, que é holomorfa. Esta diferencial, chamada de diferencial de Abresch-Rosenberg, deve ser vista como a diferencial de Hopf usual para superfícies mais um certo termo de correção. No trabalho supracitado, os autores classificaram as superfícies cuja diferencial quadrática é nula, e em particular, obtiveram que qualquer imersão de uma esfera de curvatura média constante é a esfera de distância canônica, generalizando o resultado do Hopf.

Um ano mais tarde os mesmos autores anunciaram a existência de uma diferencial quadrática holomorfa para superfícies de curvatura média constante em qualquer espaço homogêneo Riemanniano de dimensão três com grupo de isometria de dimensão quatro e provaram o problema de Hopf equivalente para estes espaços. Enquanto que a diferencial de Hopf ser holomorfa é equivalente a superfície ter curvatura média constante, o mesmo não acontece com a diferencial de Abresch-Rosenberg. Existem exemplos de superfícies com curvatura média não constante e diferencial de Abresch-Rosenberg holomorfa. No Capítulo 2, trataremos de tal diferencial, além das equações fundamentais de uma imersão de uma superfície em um espaço homogêneo 3-dimensional, simplesmente conexo, com grupo de isometria de dimensão quatro. Estas equações foram obtidas por Daniel Benoît em [9] e a forma complexa destas equações foram obtidas por Isabel Fernández e Pablo Mira em [18]. Tais ferramentas são usadas para mostrar os resultados principais desse trabalho, os quais serão apresentados no Capítulo 3.

Teorema (Espinar-Rosenberg, 2009). *Seja $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ uma superfície de curvatura média constante H com $K \geq 0$. Então, Σ é ou uma esfera rotacional (em particular, $4H^2 + \kappa > 0$), ou um cilindro vertical sobre uma curva completa de curvatura geodésica $2H$ em $\mathbb{M}^2(\kappa)$.*

Teorema (Espinar-Rosenberg, 2009). *Seja $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ uma superfície de curvatura média constante H com $K \leq 0$ e $H^2 + \tau^2 - |\kappa - 4\tau^2| > 0$. Então, Σ é um cilindro vertical completo sobre uma curva completa de curvatura geodésica $2H$ em $\mathbb{M}^2(\kappa)$.*

Esses resultados classificam as superfícies de curvatura média constante, cuja curvatura Gaussiana K não muda de sinal, nos espaços homogêneos com grupo de isometria de dimensão quatro estendendo assim a estes espaços o Teorema de Klotz e Ossermann que afirma que uma superfície de curvatura média constante em \mathbb{R}^3 , cuja curvatura Gaussiana K não muda de sinal é uma esfera, uma superfície mínima, ou um cilindro circular reto.

Capítulo 1

Espaços Homogêneos Riemannianos de Dimensão Três

Neste capítulo descreveremos os espaços homogêneos Riemannianos de dimensão três e apresentaremos o Teorema de Classificação de Thurston. Iniciaremos citando alguns resultados envolvendo ações de Grupos de Lie. Boas referências para os tais resultados encontrados neste capítulo são [7], [24] e [25].

Um *grupo de Lie* G é uma variedade diferenciável que admite uma estrutura de grupo tal que a aplicação $\varphi : G \times G \rightarrow G$ dada por

$$(x, y) \mapsto xy^{-1}, x, y \in G,$$

é diferenciável.

Sejam G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável. Uma *ação* de G sobre M é uma aplicação diferenciável

$$\begin{aligned} \psi : G \times M &\longrightarrow M \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x, \end{aligned}$$

tal que, para todos $g_1, g_2 \in G$ e para todo $x \in M$, temos $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$ e $e_G \cdot x = x$, onde e_G é o elemento neutro do grupo G .

A ação é dita *transitiva* se, dados dois pontos de M , existe um elemento de G que leva um ponto no outro e a ação é *propriamente descontínua* se todo $p \in M$ possui uma vizinhança $U \subset M$ tal que $U \cap \psi(g, U) = \emptyset$, para todo $g \in G$, com $g \neq e_G$.

No caso de G ser grupo de homeomorfismo de M e da ação ser propriamente descontínua a projeção $\pi : M \rightarrow M/G$, onde M/G é munido com a topologia quociente, é uma aplicação de recobrimento. (Ver [25], pg 165).

O *estabilizador* ou *grupo de isotropia* de um ponto $x \in M$ é o grupo $G_x = \{g \in G; g \cdot x = x\}$. Se todos os estabilizadores são triviais, dizemos que G *age livremente sobre* M .

Supondo agora que M é uma variedade Riemanniana e Γ é um subgrupo do grupo das isometrias de M que opera de modo propriamente descontínuo, então é verdade que M/Γ tem uma estrutura de variedade diferenciável na qual $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$ é um difeomorfismo local. Além disso, podemos munir M/Γ com uma métrica Riemanniana de modo que π seja uma isometria local.

O próximo resultado é fundamental para o que se segue.

Teorema 1.0.1. *O conjunto de isometrias de uma variedade Riemanniana é um grupo de Lie de dimensão finita que age diferenciavelmente em M .*

Se Γ é um subgrupo do grupo de isometrias de M , dizemos que Γ age sobre M por isometrias. A partir do grupo de isometrias de uma variedade define-se importantes conceitos como homogeneidade e isotropicidade. Assim, dizemos que M é uma *variedade Riemanniana homogênea* se existe um grupo de Lie Γ agindo diferenciavelmente e transitivamente por isometrias sobre M . Isto é, dados quaisquer $x, y \in M$, existe uma isometria $f \in \Gamma$ tal que $f(x) = y$. Além disso, M é dita *isotrópica em p* se existe um grupo de Lie Γ agindo diferenciavelmente em M por isometrias, tal que o subgrupo de isotropia $\Gamma_p \subset \Gamma$, age transitivamente sobre o conjunto de vetores unitários em T_pM , através da diferencial.

Uma variedade homogênea isotrópica em um ponto é isotrópica em todos os pontos. Neste caso, dizemos que M é *homogênea e isotrópica* e uma consequência disso é que as isometrias transformam um referencial ortonormal em um espaço tangente a um ponto, em um referencial ortonormal em outro ponto qualquer. Intuitivamente, podemos dizer que uma variedade homogênea tem a mesma aparência na vizinhança de qualquer ponto, enquanto uma variedade isotrópica tem a mesma aparência em qualquer direção.

Homogeneidade e isotropia juntas são condições muito fortes. Em particular, tais condições implicam que as curvaturas seccionais são as mesmas em todo ponto da variedade e em todo subespaço de dimensão dois do espaço tangente. Essencialmente, existem apenas três geometrias homogênea e isotrópica simplesmente conexas : com curvatura seccional zero, com curvatura seccional constante positiva e com curvatura seccional constante negativa. Estas geometrias são chamadas de Euclidiana, esférica e hiperbólica, respectivamente. Ou seja, são as formas espaciais \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n e \mathbb{H}^n . Veja [35].

O Teorema a seguir pode ser encontrado em [32] e [38]. Ele determina completamente as variedades Riemannianas homogêneas, simplesmente conexas, de dimensão três que são, salvo alguns exemplos excepcionais, grupos de Lie munidos com métrica invariante à esquerda.

Teorema 1.0.2 (V. Patrangenaru). *Um espaço homogêneo Riemanniano, de dimensão três, simplesmente conexo é um dos espaços a seguir.*

1. *O produto Riemanniano de uma 2-esfera por uma reta Euclidiana.*
2. *O produto Riemanniano de um plano hiperbólico real por uma reta Euclidiana.*
3. *Um grupo de Lie não unimodular com uma família 2-paramétrica de métricas invariantes à esquerda.*
4. *$SU(2)$ com uma família 3-paramétrica de métricas invariantes à esquerda.*
5. *$\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$, o recobrimento universal de $PSL_2(\mathbb{R})$, com uma família 2-paramétrica de métricas invariantes à esquerda.*
6. *Nil_3 , o grupo de Heisenberg, com uma família 1-paramétrica de métricas invariantes à esquerda.*
7. *Sol_3 , o recobrimento universal do grupo de transformações do plano de Minkowski que preservam a orientação temporal, com uma família 2-paramétrica de métricas invariantes à esquerda.*
8. *$\widetilde{E}(2)$, o recobrimento universal do grupo de isometrias do plano Euclidiano, com uma família 2-paramétrica de métricas invariantes à esquerda.*

A seguir são citadas algumas propriedades e casos particulares importantes, e mais conhecidos, que aparecem no Teorema acima. Estas observações podem ser encontradas originalmente em [32] e novamente foram listadas em [38].

- Todos os espaços, exceto $SU(2)$ e $S^2 \times \mathbb{R}$ são difeomorfos a \mathbb{R}^3 .
- O espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 é um exemplo excepcional de 8, enquanto que o espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 é um caso limite de 3.
- Os espaços 1 e 2 são os únicos que não são grupos de Lie e seus grupos de isometrias tem dimensão quatro.
- Os grupos de Lie não unimodulares, simplesmente conexos, de dimensão três estão parametrizados por \mathbb{R} . Cada um deles tem uma família 2-paramétrica de métricas invariante à esquerda e seus grupos de isometrias são de dimensão três.
- As métricas sobre $SU(2)$ incluem uma família 1-paramétrica de métricas canônicas cujos grupos de isometrias são de dimensão seis, e uma família 2-paramétrica de métricas de Berger, cujos grupos de isometrias são de dimensão quatro. As demais métricas tem grupo de isometrias de dimensão três.

- As métricas sobre $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$ incluem uma família 2-paramétrica de métricas com grupo de isometrias de dimensão quatro e as demais tem grupos de isometrias de dimensão três.
- As métricas de Nil_3 são homotéticas e com grupo de isometrias de dimensão quatro.

Em particular, do Teorema acima e das observações anteriores, inferimos que para uma variedade Riemanniana homogênea M , simplesmente conexa, as possíveis dimensões do grupo de isometrias, são 3, 4 e 6.

Se M tem grupo de isometrias de dimensão seis, então M é uma das variedades de curvatura seccional constante, isto é, as formas espaciais \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n e \mathbb{H}^n .

Se M tem grupo de isometrias de dimensão três, então M tem a geometria do grupo de Lie Sol_3 . Isso por que o Sol_3 é um grupo de Lie unimodular e John Milnor classificou em [27] todos os grupos de Lie unimodular, simplesmente conexos.

Finalmente, consideramos o caso em que M tem grupo de isometria de dimensão quatro. Tal variedade é uma fibração Riemanniana sobre uma forma espacial de dimensão dois, as fibras são geodésicas e existe uma família a um parâmetro de translações ao longo das fibras, gerada por um campo de Killing unitário ξ , também chamado de campo vertical. Estas variedades são classificadas, a menos de isometrias, pela curvatura κ da superfície que é base da fibração e a curvatura fibrado τ , onde κ e τ são números reais satisfazendo $\kappa \neq 4\tau^2$. A curvatura fibrado τ é um número tal que $\bar{\nabla}_X \xi = \tau X \wedge \xi$, para todo campo tangente a variedade, onde $\bar{\nabla}$ é a conexão Riemanniana da variedade. Veja Proposição 1.2.2 a seguir, para demonstração deste fato. Quando a curvatura fibrado τ é zero e κ é não nulo, temos os espaços produtos $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{M}^2(\kappa)$ é \mathbb{S}^2 , se $\kappa > 0$ e \mathbb{H}^2 , se $\kappa < 0$. O grupo de isometrias desses espaços tem quatro componentes conexas. O vetor vertical ξ é simplesmente a direção correspondente a \mathbb{R} . Quando τ é não nulo, o grupo de isometria tem duas componentes conexas: as isometrias que preservam a orientação da fibra e da base de fibração, e as que revertem ambas as orientações. Estas variedades são de três tipos: elas tem o grupo de isometrias das esferas de Berger para $\kappa > 0$, do grupo de Heisenberg Nil_3 para $\kappa = 0$, e $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$ para $\kappa < 0$. Em resumo, temos a tabela abaixo. Os artigos [9] e [10] tratam destes dois tipos de variedades.

	$\kappa > 0$	$\kappa = 0$	$\kappa < 0$
$\tau = 0$	$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$	-	$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$
$\tau \neq 0$	\mathbb{S}_b^3	Nil_3	$\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$

De fato, os números κ e τ classificam as variedades Riemannianas homogêneas, simplesmente conexas, com grupo de isometrias de dimensão quatro. Já a classificação dos espaços homogêneos Riemannianos de dimensão três que não são simplesmente conexos é

um problema complexo. Embora estas variedades sejam quociente de espaços homogêneos, simplesmente conexos, nem todo subgrupo do grupo de isometrias deste quociente, que atue de forma própria e descontínua, origina um novo espaço homogêneo, e ainda que resulte em um espaço homogêneo a dimensão do grupo de isometrias pode diminuir.

Entretanto, entre os quocientes dos exemplos da tabela acima existem alguns espaços homogêneos interessantes, pois continuam tendo grupo de isometrias de dimensão quatro e, portanto, admitem também submersão Riemanniana sobre $\mathbb{M}^2(\kappa)$ com curvatura fibrado τ . Estes são $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{S}^1$, o espaço projetivo real $\mathbb{R}\mathbb{P}^3 = \mathbb{S}_b^3/\mathbb{Z}_2$, mais geralmente os espaços lente $\mathbb{S}_b^3/\mathbb{Z}_n$, $n \geq 3$, $PSL_2(\mathbb{R})$ e mais geralmente $PSL_2(\mathbb{R})/\mathbb{Z}_n$, $n \geq 2$. Ver [38] para mais informações a respeito de tais espaços.

O interesse pelas variedades homogêneas simplesmente conexas também se relaciona com o trabalho de W. Thurston, feito nas décadas de 60 e 70, quando ele define e classifica as chamadas “geometrias” de dimensão três. Para enunciar precisamente o resultado do Thurston precisamos de algumas definições preliminares.

Sejam X uma variedade diferenciável G e um grupo de Lie de difeomorfismos de X . Um *atlas* (X, G) de uma variedade M é um conjunto de difeomorfismos, ditos *cartas*,

$$\phi_i : U_i \longrightarrow X, i \in I,$$

do aberto U_i em M , tal que $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura de M e, sempre que $U_i \cup U_j \neq \emptyset$, as funções $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ são localmente dadas por elementos de G . Dizemos que uma variedade M é *modelada por* (X, G) , ou que admite uma *estrutura* (X, G) , ou que é uma *variedade* (X, G) , se M admite um atlas (X, G) . A definição fundamental para o trabalho de Thurston é a seguinte: uma *geometria modelo* é um par (X, G) consistindo de uma variedade suave conexa X e um grupo de Lie G de difeomorfismos de X tais que:

- (i) X é simplesmente conexa;
- (ii) G atua transitivamente em X e seus estabilizadores, com respeito a qualquer ponto, são compactos;
- (iii) G é maximal para a propriedade (ii) acima, ou seja, G não está estritamente contido em nenhum grupo de difeomorfismos de X com estabilizadores compactos;
- (iv) (X, G) modela alguma variedade compacta.

Podemos dizer que a condição (i) é natural já que qualquer variedade sempre é recoberta por uma simplesmente conexa.

A condição (ii) implica que X possui uma métrica completa, homogênea e G -invariante. (Ver [35], páginas 144-145)

Já a condição (iii) diz que nenhuma métrica G -invariante pode ser invariante por um grupo maior, ou seja, X não admite um grupo maior de isometrias. Essa é uma propriedade necessária para qualquer resultado de classificação.

Finalmente, a condição (iv) elimina as geometrias que não servem como modelo para qualquer variedade compacta.

Dizemos que uma variedade M representa uma geometria modelo (X, G) se existem $f : M \rightarrow X$ difeomorfismo e $\varphi : Isom(M) \rightarrow G$ isomorfismo tal que para todo $g \in Isom(M)$ e todo $x \in M$, $f(g(x)) = \varphi(g)(f(x))$. Observe que se M é uma variedade Riemanniana completa, homogênea, simplesmente conexa, então $(Isom(M), M)$ é uma geometria modelo representada por M , se $Isom(M)$ não está propriamente contido em um grupo de isometrias de M com a outra métrica.

É possível mostrar que se (X, G) é uma geometria modelo, X admite uma métrica invariante pela ação de G tal que G é o grupo de todas as isometrias. Logo, se M é modelada por uma geometria modelo (X, G) , então M admite uma métrica localmente homogênea induzida pelo atlas (X, G) . Neste caso, dizemos que M admite uma estrutura geométrica modelada por (X, G) . Também é possível mostrar que se M é uma variedade compacta modelada por (X, G) , então M é o quociente de X por um grupo discreto de isometrias. Então, para uma variedade compacta, ser modelada por uma geometria modelo (X, G) é equivalente a ser escrita como quociente de X por um grupo discreto de isometrias.

Neste ponto, podemos enunciar o Teorema de Classificação de Thurston das geometrias tridimensionais:

Teorema 1.0.3 (Thurston). *Em dimensão três, existem exatamente oito geometrias (X, G) .*

- (i) *Se os G estabilizadores dos pontos de M são tridimensionais, então M é \mathbb{S}^3 , \mathbb{R}^3 ou \mathbb{H}^3 , ou seja as variedades simplesmente conexas de curvatura seccional constante.*
- (ii) *Se os estabilizadores são unidimensionais, então M fibra sobre uma das três geometrias bidimensionais de maneira G -invariante; mais precisamente, existe uma métrica Riemanniana G -invariante em M tal que a conexão ortogonal às fibras tem curvatura 0 ou 1:*
 - *caso a curvatura seja zero, então M é $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$;*
 - *caso a curvatura seja 1, M é a nil-geometria (a qual fibra sobre \mathbb{R}^2) ou a geometria do recobrimento universal $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$ (a qual fibra sobre \mathbb{H}^2).*
- (iii) *A única geometria com estabilizadores de dimensão zero é a solv-geometria (a qual fibra sobre \mathbb{R}).*

O Teorema acima constitui base para a Conjectura de Geometrização de Thurston, provada recentemente por Grigori Perelman. Esta conjectura afirma que toda 3-variedade compacta pode ser decomposta em pedaços que podem ser modelados pelas oito geometrias citadas no Teorema de Thurston. Em outras palavras, entendendo toda a topologia e a geometria de variedades localmente homogêneas, as quais são modeladas pelas variedades homogêneas do Teorema de Thurston, compreenderemos qualquer 3-variedade. Para precisar o enunciado desta conjectura precisamos dos seguintes conceitos. Ver [26].

Dadas duas variedades compactas X, Y de dimensão n , podemos construir uma variedade $X \# Y$ dita *soma conexa* de X e Y da seguinte maneira: destacamos de X e Y pequenas bolas compactas de dimensão n . Como resultado, obtemos duas variedades com bordo difeomorfos a esfera $(n - 1)$ -dimensional. Colando estes dois objetos pelos seu bordo comum, obtemos $X \# Y$.

Note que, da definição anterior segue-se que a soma conexa de qualquer n -variedade X com a esfera \mathbb{S}^n é difeomorfa a X . Em outras palavras, a esfera \mathbb{S}^n funciona como um *elemento neutro* para a operação $\#$. Baseado nesta observação, e por analogia com a aritmética dos números inteiros, dizemos que uma variedade compacta tridimensional X é *prima* se X não é difeomorfa a \mathbb{S}^3 e toda decomposição de X como soma conexa de duas variedades possui um dos fatores igual a \mathbb{S}^3 . Acerca deste último conceito, temos o seguinte teorema de “fatoração única”:

Teorema 1.0.4 (Kneser, 1929). *Toda 3-variedade compacta possui uma decomposição como soma conexa de 3-variedades primas (ditas fatores primos). Mais ainda, esta decomposição é única a menos de permutação dos fatores primos. Finalmente, existem apenas uma quantidade enumerável de 3-variedades primas (módulo difeomorfismo).*

Em outras palavras, o Teorema nos diz que para entender 3-variedades compactas basta compreender bem as 3-variedades primas. Diz que a quantidade de tais variedades é enumerável, mas nada afirma sobre quais são elas. Neste sentido, Thurston propôs a seguinte conjectura recentemente provada por G. Perelman

Teorema 1.0.5 (Perelman). *Toda 3-variedade compacta prima possui uma coleção disjunta de toros e garrafas de Klein (bidimensionais) tal que toda componente conexa do seu complementar é modelada por alguma das geometrias de Thurston.*

Uma consequência famosa deste Teorema é a *Conjectura de Poincaré* segundo a qual a única 3-variedade compacta simplesmente conexa é \mathbb{S}^3 .

Na última parte deste capítulo, trataremos das geometrias citadas pelo Teorema de Thurston e mais as esferas de Berger. As esferas de Berger não entram na classificação feita por Thurston, pois não são geometrias maximais. De fato, o grupo de isometrias das

esferas de Berger está contido no grupo de isometrias da esfera canônica \mathbb{S}^3 . Tais esferas são deformações da métrica canônica de \mathbb{S}^3 .

1.1 As Formas Espaciais

As variedades Riemannianas de curvatura seccional constante são as mais simples. A propriedade importante deses espaços é que eles possuem um número suficientemente grande de isometrias. As variedades \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n e \mathbb{H}^n são completas e simplesmente conexas. Mostra-se em [6] que estas são essencialmente as únicas variedades Riemannianas completas, simplesmente conexas, com curvatura seccional constante. Tais variedades são chamadas de *formas espaciais*.

1.1.1 O Espaço \mathbb{R}^3

Definimos o *espaço Euclidiano* \mathbb{R}^3 com a métrica dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

dita *métrica Euclidiana*. Com respeito as coordenadas canônicas de \mathbb{R}^3 , qualquer isometria α de \mathbb{R}^3 pode ser expressa como

$$\alpha(v) = Av + b,$$

onde v é um vetor de \mathbb{R}^3 e $A \in O(3)$, onde $O(3)$ é o grupo dos isomorfismos lineares ortogonais de \mathbb{R}^3 . Se $A \in O(3)$, é a identidade I de \mathbb{R}^3 , a isometria acima é uma translação pura. Mudando a origem de \mathbb{R}^3 , se necessário, podemos escrever cada elemento do grupo de isometrias de \mathbb{R}^3 , $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$, que fixa algum ponto de \mathbb{R}^3 como $v \mapsto Av$. O grupo $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ age transitivamente em \mathbb{R}^3 e com estabilizador de ponto $O(3)$, cuja componente conexa da identidade é $SO(3) = \{A \in O(3) : \det A = 1\} = O(3)^+$, o subgrupo dos elementos que preservam orientação.

Uma variedade de dimensão três é dita *Euclidiana* se é escrita como \mathbb{R}^3/G , onde G é um subgrupo do grupo $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ discreto e age livremente em \mathbb{R}^3 . É interessante, então, descrever as isometrias de \mathbb{R}^3 sem pontos fixos. Se φ é uma tal isometria, temos três possibilidades:

- φ é uma translação pura;
- φ é uma translação seguida de uma reflexão por um plano paralelo à direção de translação;
- φ é uma translação seguida de uma rotação em um eixo paralelo à direção de translação.

As únicas variedades Euclidianas compactas de dimensão dois são o toro e a garrafa de Klein (vide [34], p. 410). Já a classificação das variedades Euclidianas de dimensão três é bem mais difícil e é feito em [35], p. 231-242 e em [34] p. 443-448.

Os símbolos de Christoffel e a conexão de Levi-Civita em \mathbb{R}^3 são identicamente nulos. Consequentemente, a curvatura seccional de \mathbb{R}^3 é constante e igual a zero.

1.1.2 O Espaço \mathbb{H}^3

O espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 representa a mais rica das oito geometrias. A maioria das variedades de dimensão três que admite uma estrutura geométrica modelada por uma geometria modelo são hiperbólicas, ou seja são escritas como quociente de \mathbb{H}^3 por um grupo discreto de isometrias. Nesta seção trataremos de alguns fatos básicos da geometria hiperbólica. Para mais detalhes vide [40]. Começamos nosso estudo por \mathbb{H}^2 , o plano hiperbólico. Existem três modelos para o plano hiperbólico: o modelo do semi-plano, o modelo do disco e o modelo do hiperbolóide. Estes três modelos são isométricos, veja [24]. A depender do contexto usamos um ou outro modelo. Por exemplo, as simetrias de \mathbb{H}^2 são facilmente vista no modelo do hiperbolóide; enquanto que a expressão da métrica no modelo do disco e do semi-plano deixa claro que o espaço hiperbólico é conformemente localmente flat. A seguir, descreveremos o modelo do semi-plano e do disco de Poincaré.

O modelo do semi-plano. Considere o conjunto

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im}(z) > 0\},$$

munido da métrica

$$ds_{\mathbb{H}^2}^2 = \frac{|dz|^2}{\text{Im}^2(z)},$$

onde $|dz|^2$ denota a métrica Euclidiana em \mathbb{C} .

O conjunto \mathbb{H}^2 com a métrica $ds_{\mathbb{H}^2}^2$ é uma variedade Riemanniana chamada *modelo do semi-plano para o plano Hiperbólico*. O eixo real junto com o ponto infinito é chamado de *bordo assintótico* de \mathbb{H}^2 e denotaremos por $\partial_{\infty}\mathbb{H}^2$. Isto é,

$$\partial_{\infty}\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}.$$

Existem três tipos de curvas especiais em \mathbb{H}^2 : as geodésicas, os círculos e os horociclos. Os horociclos são linhas horizontais ou círculos tangentes ao bordo assintótico. É possível mostrar que todo horociclo é levado em outro horociclo por uma isometria de \mathbb{H}^2 .

As geodésicas de \mathbb{H}^2 são os semi-círculos ortogonais ao $\partial_{\infty}\mathbb{H}^2$ e as semi-retas verticais partindo de $\partial_{\infty}\mathbb{H}^2$.

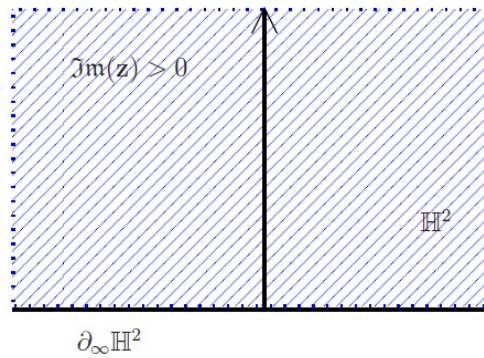


Figura 1.1: O plano hiperbólico \mathbb{H}^2 .

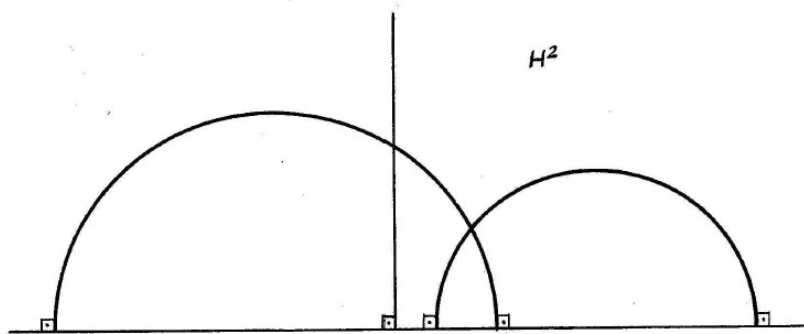


Figura 1.2: As geodésicas de \mathbb{H}^2 .

Denotaremos por $Isom(\mathbb{H}^2)$ o grupo de isometrias do espaço hiperbólico. A proposição a seguir pode ser encontrada em ([40], Capítulo 2) e descreve os elementos de $Isom(\mathbb{H}^2)$.

Proposição 1.1.1. *O grupo de isometrias $Isom(\mathbb{H}^2)$ do espaço hiperbólico \mathbb{H}^2 é dado por*

$$Isom(\mathbb{H}^2) = \left\{ z \longrightarrow \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc = 1 \right\} \cup \left\{ z \longrightarrow \frac{-a\bar{z} - b}{c\bar{z} + b}, ad - bc = 1 \right\},$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

A seguir, vamos descrever o comportamento das isometrias positivas de \mathbb{H}^2 , isto é, que preservam a orientação de \mathbb{H}^2 .

Seja T uma isometria de \mathbb{H}^2 diferente da identidade, ou seja,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$. Um ponto $z \in \mathbb{H}^2 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2$ é fixado por T se, e somente

se, $T(z) = z$. Então

$$\begin{aligned} T(z) = z &\iff \frac{az + b}{cz + d} = z \\ &\iff cz^2 + (d - a)z - b = 0 \\ &\iff z = \frac{-(d - a \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4bc})}{2c}. \end{aligned}$$

Tendo em conta que $ad - bc = 1$, temos que $4bc = 4ad - 4$ e

$$T(z) = z \iff z = \frac{a - d \pm \sqrt{(a + d)^2 + 4bc}}{2c}.$$

Logo, T tem no máximo dois pontos fixos.

Observe que se $c = 0$, então $T(z) = az + b$ e ∞ é um ponto fixo para T . Se além disso $a = 1$, então temos $a = d = 1$, pois $ad - bc = 1$. Logo,

$$z = \frac{\pm \sqrt{(a + d)^2 + 4bc}}{2c}$$

e não existe outro ponto fixo diferente do infinito. Se $a \neq 1$, então o outro ponto é um número real. Isto motiva a seguinte classificação.

Existem três tipos de isometrias positivas de \mathbb{H}^2 .

1. Se $c \neq 0$ e $(a + d)^2 - 4 > 0$, então T possui dois pontos fixos distintos, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Se $T(z) = az + b$, com $a \neq 1$, T tem um ponto fixo real e o outro ponto fixo é ∞ . Em ambos os casos T possui dois pontos fixos distintos em $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. Neste caso, dizemos que T é uma *isometria hiperbólica*.
2. Se $c \neq 0$ e $(a + d)^2 - 4 = 0$, T tem um ponto fixo real duplo. Se $T(z) = z + b$, $b \neq 0$, ∞ é o único ponto fixo de T em $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. Assim, T tem um único ponto fixo em $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. Neste caso, dizemos que T é uma *isometria parabólica*.
3. Se $c \neq 0$ e $(a + d)^2 - 4 < 0$, T tem dois pontos fixos em \mathbb{C} , e um único ponto fixo em \mathbb{H}^2 . Neste caso, dizemos que T é uma *isometria elíptica*.

Agora, vamos descrever brevemente o comportamento de cada uma das isometrias de \mathbb{H}^2 .

A isometria Hiperbólica. Sejam $z_1, z_2 \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$ os dois pontos fixos de T . Denote por γ a geodésica completa em \mathbb{H}^2 ligando o ponto z_1 ao ponto z_2 . Então γ é fixada por T . Além disso, T age por translação ao longo de γ . Observe que γ divide \mathbb{H}^2 em duas componentes conexas. Seja $z \in \mathbb{H}^2$ e seja β a geodésica completa passando por z e ortogonal a γ . Seja $\omega_1 = \gamma \cap \beta$, e denote $\beta_1 = T(\beta)$, então β_1 é uma geodésica completa, passando por $T(\omega_1)$ e ortogonal a γ no ponto $T(\omega_1)$. A imagem $T(z)$ permanece em β_1 e na mesma componente

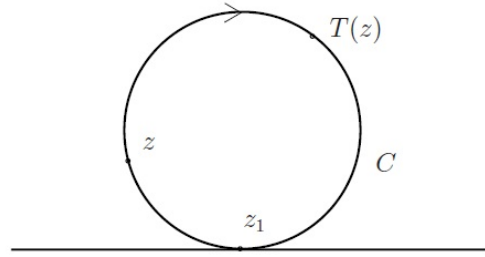


Figura 1.3: Uma isometria hiperbólica em \mathbb{H}^2 .

conexa que contém z . Como T é uma isometria, temos $d(z, z_1) = d(T(z), T(z_1))$, onde $d(., .)$ denota a distância em \mathbb{H}^2 .

Isometria Parabólica. Sejam $z_1 \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$ e $z \in \mathbb{H}^2$. Denote por C o horociclo que contém z e passa por z_1 . Então C é fixado por T e, portanto, $T(z) \in C$.

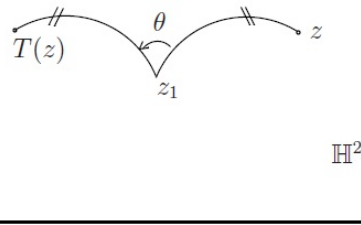


Figura 1.4: Uma isometria parabólica em \mathbb{H}^2 .

Isometria Elíptica. Seja $z_1 \in \mathbb{H}^2$ o único ponto fixo de T em \mathbb{H}^2 . Denotamos por γ a única geodésica completa conectando os pontos z_1, z , e denote por $\beta = T(\gamma)$ a geodésica completa conectando os pontos $T(z)$ e $T(z_1) = z_1$, isto é, T age como uma rotação em torno de z_1 .

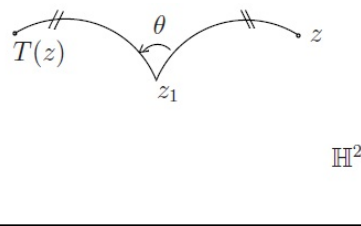


Figura 1.5: Uma isometria elíptica em \mathbb{H}^2 .

O modelo do Disco de Poincaré . Um outro modelo para \mathbb{H}^2 é o *disco de Poincaré* que é o disco unitário

$$\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C}; |w| < 1\}$$

munido com a métrica

$$ds_{\mathbb{D}}^2 = \frac{4}{(1 - |w|^2)^2} |dw|^2.$$

O bordo assintótico de \mathbb{D} é denotado e definido por

$$\partial_\infty \mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C}; |w| = 1\}.$$

Denotando por $Isom(\mathbb{D})$ o grupo de isometrias de \mathbb{D} , temos a seguinte proposição que pode ser encontrada em ([40]).

Proposição 1.1.2. *O grupo de isometrias $Isom(\mathbb{D})$ do disco de Poincaré é dado por*

$$Isom(\mathbb{D}) = \left\{ w \longrightarrow \frac{aw + \bar{c}}{cw + \bar{a}}; a, c \in \mathbb{C}, a\bar{a} - c\bar{c} = 1 \right\}.$$

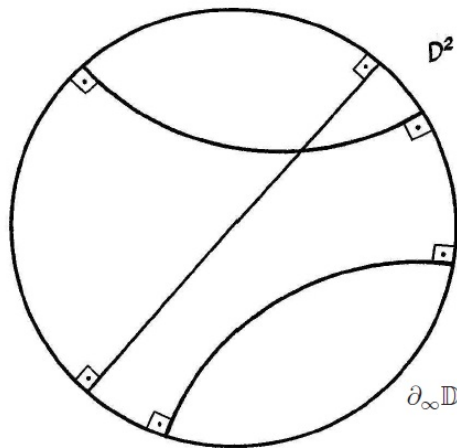


Figura 1.6: O disco de Poincaré de dimensão dois com sua geodésicas.

Uma observação importante é que o mapa

$$\varphi : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{D}$$

definido por

$$\varphi(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

é uma isometria. Ou seja, \mathbb{H}^2 e \mathbb{D} são isométricos. Assim, as propriedades de \mathbb{H}^2 são levadas em \mathbb{D} por esta isometria. Em particular, a classificação das isometrias é a mesma. Baseado nas informações sobre \mathbb{H}^2 trataremos agora de \mathbb{H}^3 .

De forma geral definimos \mathbb{H}^n por

$$\mathbb{H} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\},$$

munido com a métrica

$$g_{\mathbb{H}} = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{x_n^2}.$$

Assim como no caso de dimensão dois, a curvatura seccional é constante igual a -1 . Uma observação importante é que qualquer plano vertical de dimensão dois em \mathbb{H}^n é

isométrico a \mathbb{H}^2 . Assim, as geodésicas de \mathbb{H}^3 são os semicírculos que interceptam $\partial\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n = 0\}$ ortogonalmente, e as semirretas verticais partindo de $\partial\mathbb{R}_+^n$. Veja [6], p. 180.

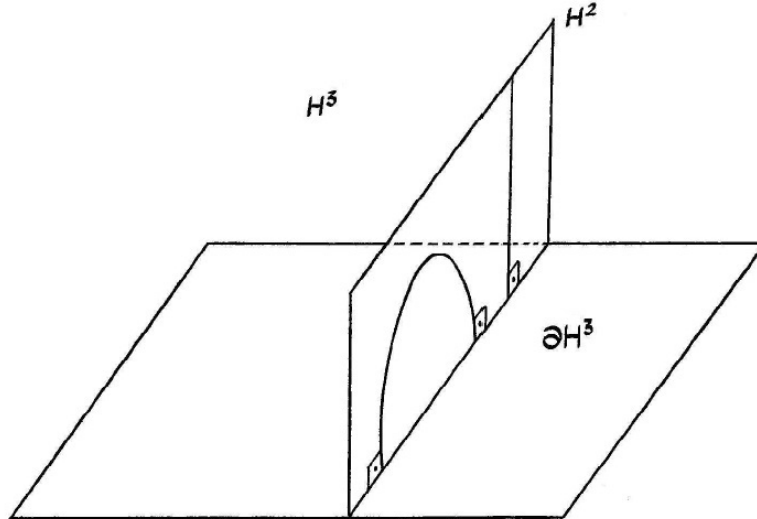


Figura 1.7: As geodésicas de \mathbb{H}^3 .

O grupo $Isom(\mathbb{H}^3)$ é gerado por reflexões em semi-esferas com centro em $z_1 \in \partial_\infty\mathbb{H}^3$, onde os planos verticais são pensados como esferas. É a generalização do caso bidimensional. Um eixo de $g \in Isom(\mathbb{H}^3)$ é uma geodésica preservada por g . Lembrando que $PSL_2(\mathbb{C}) = SL_2(\mathbb{C})/\{I, -I\}$, onde $SL_2(\mathbb{C})$ é o grupo das matrizes complexas 2×2 com determinante um, e I é a matriz identidade. Como no caso bidimensional as isometrias podem ser *elípticas*, *hiperbólicas* ou *parabólicas*. Temos a seguinte proposição.

Proposição 1.1.3. *O grupo das isometrias positivas de \mathbb{H}^3 é isomorfo a $PSL(2, \mathbb{C})$. Se g é uma isometria positiva de \mathbb{H}^3 , temos as seguintes possibilidades:*

- *g tem um único eixo γ , fixo ponto a ponto, e nenhum ponto fixo fora de γ . Nesse caso, g é dita uma isometria elíptica ou uma rotação em γ ;*
- *g tem um único eixo γ e age em γ por translação. Os únicos pontos fixos de g são os dois pontos de $\gamma \cap \partial_\infty\mathbb{H}^3$. Nesse caso, g é dita uma isometria hiperbólica;*
- *g não tem eixo e tem somente um ponto fixo, que pertence a $\partial_\infty\mathbb{H}^3$. Nesse caso, g é dita uma isometria parabólica.*

Para uma demonstração dessa proposição vide [34], p. 448-449 ou [35], p. 86-87, 98-99.

Vamos dar uma descrição das isometrias elípticas, hiperbólicas e parabólicas em termos de compostas de reflexões. Sejam g_1 e g_2 reflexões em semi-esferas S_1 e S_2 , respectivamente.

- Se S_1 e S_2 interceptam-se em \mathbb{H}^3 , $g_1 \circ g_2$ é uma *rotação* no eixo $\gamma = S_1 \cap S_2$.

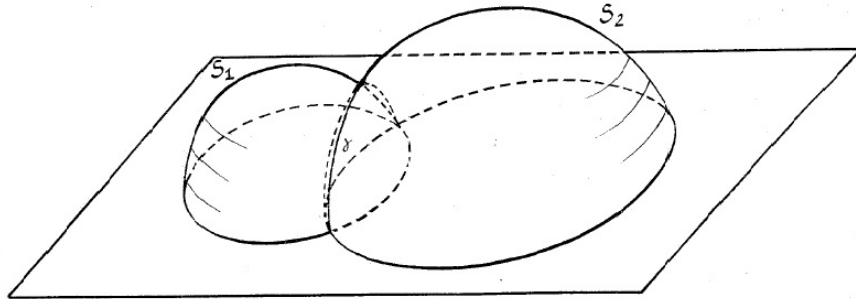


Figura 1.8: Uma isometria elíptica em \mathbb{H}^3 .

- Se S_1 e S_2 interceptam-se em um único ponto de $\partial_\infty \mathbb{H}^3$, $g_1 \circ g_2$ é *parabólica*.

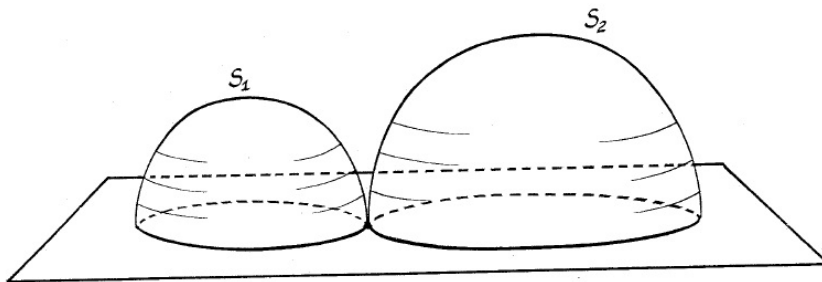


Figura 1.9: Uma isometria parabólica em \mathbb{H}^3 .

- Se S_1 e S_2 não se interceptam em $\mathbb{H}^3 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^3$, $g_1 \circ g_2$ preserva a única geodésica γ' perpendicular a S_1 e S_2 simultaneamente e age em γ' por translação. Então $g_1 \circ g_2$ é *hiperbólica*. Se compusermos $g_1 \circ g_2$ com uma rotação em γ' , ainda temos uma isometria hiperbólica.

Pode-se verificar que todas as isometrias elípticas, parabólicas e hiperbólicas podem ser obtidas como acima. Além disso, todas as isometrias positivas de \mathbb{H}^3 são compostas de tais isometrias. Veja [40], p. 192-193.

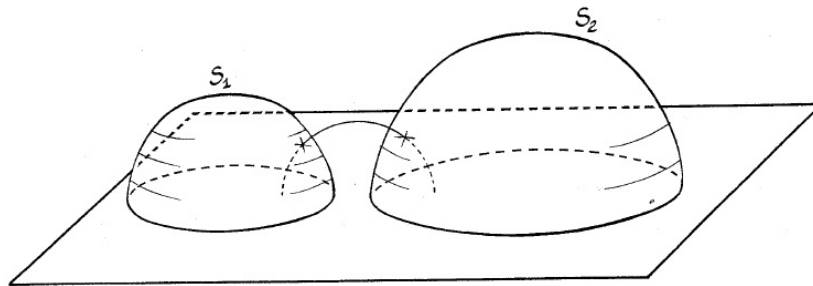


Figura 1.10: Uma isometria hiperbólica em \mathbb{H}^3 .

1.1.3 O Espaço \mathbb{S}^3

Definimos \mathbb{S}^3 como a esfera unitária com centro na origem de \mathbb{R}^4 , isto é,

$$\mathbb{S}^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\},$$

com a métrica induzida

$$g = \frac{4R^4}{(|u|^2 + R^2)^2} \bar{g},$$

onde $u \in \mathbb{R}^4$ e $\bar{g} = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$ é a métrica canônica de \mathbb{R}^4 . A curvatura seccional de \mathbb{S}^3 é constante igual a 1 e $\text{Isom}(\mathbb{S}^3)$ é isomorfo a $O(4)$. As geodésicas completas de \mathbb{S}^3 são os grandes círculos com centro na origem de \mathbb{R}^4 , determinados pela intersecção de \mathbb{S}^3 com um plano de \mathbb{R}^4 que passa pela origem.

A reflexão em relação a um subespaço tridimensional π de dimensão três que passa pela origem induz uma isometria de \mathbb{S}^3 , dita uma reflexão na esfera $\pi \cap \mathbb{S}^3$ de dimensão dois que, por sua vez, é dita *esfera geodésica*. Tais reflexões geram $O(4)$. Uma isometria importante de \mathbb{S}^3 é a aplicação antípoda

$$A : x \longmapsto -x.$$

Esta isometria preserva orientação de \mathbb{S}^3 . A variedade quociente $\mathbb{S}^3 / \langle A \rangle$, é chamado *espaço projetivo* de dimensão três.

Topologicamente, \mathbb{S}^3 é equivalente a $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ através do homeomorfismo chamado *projeção estereográfica* que descreveremos no que se segue. Assim, consideremos \mathbb{R}^4 e a base ortonormal canônica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Seja π o hiperplano gerado por e_1, e_2, e_3 que denotaremos por \mathbb{R}^3 .

Seja $x \in \mathbb{S}^3$. Definiremos o homeomorfismo

$$P : \mathbb{S}^3 \longrightarrow \pi \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$$

da seguinte forma. Se $x \neq e_4$, consideremos a reta r_x em \mathbb{R}^4 passando por x e e_4 e definimos $P(x) = r_x \cap \pi$. Para que P seja, de fato, um homeomorfismo definimos $P(e_4) = \infty$.

Uma observação importante sobre \mathbb{S}^3 é que identificando \mathbb{R}^4 com \mathbb{C}^2 , a equação que define uma esfera unitária em \mathbb{R}^4 torna-se $|z|^2 + |w|^2 = 1$, onde $z, w \in \mathbb{C}$. Neste caso, cada linha complexa (subespaço de dimensão um) pode ser visto como sendo \mathbb{C} intersectando \mathbb{S}^3 em um grande círculo \mathbb{S}^2 , chamado *círculo de Hopf*. Assim, a família de círculos de Hopf cobrem \mathbb{S}^3 e existe uma correspondência um a um com as linhas complexas de \mathbb{C}^2 , isto é, um feixe fibrado $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$, com fibra \mathbb{S}^1 . Esta estrutura é a chamada fibração de Hopf. Para mais detalhes sobre \mathbb{S}^3 vide [35], p. 103-108 e [34], p. 449-457.

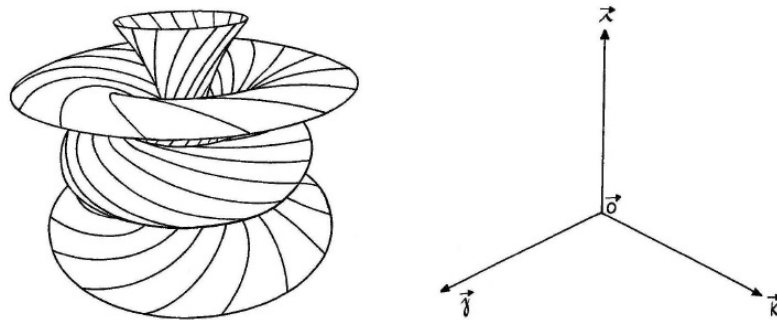


Figura 1.11: O fibrado de Hopf sobre a projeção estereográfica.

1.2 Os Espaços Homogêneos com grupo de isometria 4-dimensional

Nesta seção vamos considerar as variedades homogêneas Riemannianas de dimensão três, cujo grupo de isometrias tem dimensão 4, denotadas por $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Tais variedades são fibrações Riemannianas sobre uma forma espacial bidimensional $\mathbb{M}^2(\kappa)$ tendo curvatura Gaussiana κ . Isto é, existe uma submersão Riemanniana

$$\pi : \mathbb{E}(\kappa, \tau) \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$$

a qual também é uma *submersão de Killing*. Se $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ não é compacta, então $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ é topologicamente $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, onde cada fibra é difeomorfa a \mathbb{R} , e a curvatura fibrado da submersão é τ . Se $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ é compacto, com $\kappa > 0$ e $\tau \neq 0$, então $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ são as *esferas de Berger*, com cada fibra difeomorfa a \mathbb{S}^1 .

O campo unitário de vetores tangentes as fibras é um campo de vetores de Killing o qual denotaremos por ξ . Este campo será chamado de *campo vertical*. Estas variedades são classificadas, a menos de isometrias, pela curvatura κ da superfície base da submersão e da curvatura fibrado τ , onde κ e τ podem ser qualquer número real satisfazendo $\kappa \neq 4\tau^2$ e $\bar{\nabla}_X \xi = \tau X \wedge \xi$ (ver Proposição 1.2.2). Estas variedades são:

- $\mathbb{E}(\kappa, \tau) = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, se $\kappa < 0$ e $\tau = 0$;
- $\mathbb{E}(\kappa, \tau) = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, se $\kappa > 0$ e $\tau = 0$;
- $\mathbb{E}(\kappa, \tau) = Nil_3$ (espaço de Heisenberg), se $\kappa = 0$ e $\tau \neq 0$;
- $\mathbb{E}(\kappa, \tau) = \widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$, se $\kappa < 0$ e $\tau \neq 0$;
- $\mathbb{E}(\kappa, \tau) = \mathbb{S}_\tau^3$ (esferas de Berger), se $\kappa > 0$ e $\tau \neq 0$.

Antes de começar a estudar a geometria dos espaços $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ vamos fazer uma breve discussão sobre fibração e submersão Riemanniana. Para maiores detalhes ver [17],[6] e [29].

Sejam E, B, F espaços topológicos. Uma *fibração localmente trivial*, com espaço total E , base B e fibra típica F é uma aplicação contínua $P : E \rightarrow B$ com a seguinte propriedade: para todo $x \in B$ existe uma vizinhança $U \ni x$ e um homeomorfismo

$$\varphi_U : U \times F \rightarrow p^{-1}(U),$$

tal que $p \circ \varphi_U = P_U$, onde $P_U : U \times F \rightarrow U$ é a projeção na primeira coordenada. A igualdade $P(\varphi_U(x, y)) = x$ significa que, para cada $x \in U$, φ_U leva $\{x\} \times F$ homeomorficamente sobre $P^{-1}(x)$. Assim, a imagem inversa $P^{-1}(x)$ de cada ponto de B é homeomorfa à fibra típica F . Desse modo comuta o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\varphi_U} & P^{-1}(U) \\ & \searrow P_U & \downarrow P \\ & & U \end{array}$$

Cada uma das vizinhanças U acima chama-se uma *vizinhança distinguida* e o homeomorfismo φ_U diz-se uma *trivialização local*. Para cada $x \in B$, defini-se $E_x := P^{-1}(x) \subset E$ a *fibra* sobre x e assim $E_x \simeq F$, para todo $x \in B$.

Uma aplicação diferenciável entre variedades \overline{M} e M

$$\pi : \overline{M}^{n+k} \rightarrow M^n$$

é uma *submersão* se π é sobrejetiva, e, para todo $\bar{p} \in \overline{M}$, $d\pi_{\bar{p}} : T_{\bar{p}}\overline{M} \rightarrow T_{\pi(\bar{p})}M$ tem posto n . Neste caso, para todo $p \in M$, a fibra $\pi^{-1}(p) = F_p$ é uma subvariedade de \overline{M} . Um vetor tangente de \overline{M} é chamado *vertical* se é tangente a alguma fibra F_p , $p \in M$. Denotemos por H e V os subespaços formado pelos vetores horizontais e verticais de \overline{M} , respectivamente e X^h e X^v as projeções nos subespaços horizontal e vertical, respectivamente. Assim, qualquer vetor v tangente a \overline{M} pode ser decomposto em parte vertical e horizontal, ou seja, podemos escrever $v = v^v + v^h$.

A submersão π diz-se *Riemanniana* se, para todo $p \in \overline{M}$, $d\pi : T_p\overline{M} \longrightarrow T_{\pi(p)}M$ preserva comprimento de vetores horizontais, isto é,

$$d\pi|_H : T_p\overline{M} \longrightarrow T_{\pi(p)}M$$

é uma isometria.

Usaremos a notação \bar{p} e p , bem como \overline{X} e X , para pontos e campo de vetores que são π -relacionados, isto é, tais que

$$\pi(\bar{p}) = p \quad \text{e} \quad d(\pi\overline{X}) = X.$$

Se X é um campo de vetores em M , então existe um único campo de vetores \overline{X} em \overline{M} tal que $\overline{X} \in H$ e $d\pi(\overline{X}) = X$. Chamamos \overline{X} o *levantamento horizontal de X* . Além disso, temos a seguinte Proposição que pode ser encontrada em [29].

Proposição 1.2.1. *Seja T um campo de vetores em \overline{M} vertical e X, Y, Z campos de vetores em M com levantamentos horizontais $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$, respectivamente. Então*

1. $[T, \overline{X}]$ é vertical;
2. $\langle [\overline{X}, \overline{Y}], \overline{Z} \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle$;
3. $\langle [\overline{X}, \overline{Y}], T \rangle = 2\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, T \rangle$;
4. $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = \overline{\nabla}_X Y + \frac{1}{2}[\overline{X}, \overline{Y}]^v$, onde $[\overline{X}, \overline{Y}]^v$ é a componente vertical de $[\overline{X}, \overline{Y}]$;
5. $[\overline{X}, \overline{Y}]$ é π -relacionado a $[X, Y]$;
6. $K(X, Y) = \overline{K}(\overline{X}, \overline{Y}) + \frac{3}{4}\|[\overline{X}, \overline{Y}]^v\|^2$, onde \overline{K} e K denotam a curvatura seccional de \overline{M} e M , respectivamente.

A seguir descreveremos dois tensores que aparecem naturalmente quando trabalhamos com uma submersão. Para mais detalhes ver [31]. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ definimos

$$T_X Y = (\overline{\nabla}_{X^v} Y^v)^h + (\overline{\nabla}_{X^v} Y^h)^v,$$

$$A_X Y = (\overline{\nabla}_{X^h} Y^h)^v + (\overline{\nabla}_{X^h} Y^v)^h,$$

onde $\overline{\nabla}$ denota a conexão em \overline{M} . Algumas propriedades dos tensores T e A são:

- T é vertical, isto é, $T_X = T_{X^v}$;
- A é horizontal, isto é, $A_X = A_{X^h}$;
- $T_Z W = T_W Z$, para todo campo Z, W vertical;

- $A_X Y = -A_Y X$, para todo campo X, Y horizontal.

A seguir definiremos submersão de Killing, veja [33], e apresentaremos alguns resultados relacionados com este tipo de submersão. A importância de tal submersão para nosso estudo vem do fato que os espaços homogêneos com grupo de isometria de dimensão quatro é um caso particular das submersões de Killing.

Consideremos M uma variedade Riemanniana de dimensão três tal que $\pi : M \rightarrow \mathbb{M}^2$ é uma submersão Riemanniana sobre uma superfície (\mathbb{M}^2, g) com curvatura de Gauss κ , e as fibras, isto é, a imagem inversa de um ponto em \mathbb{M}^2 por π , são trajetórias de um campo de vetores Killing unitário ξ e, portanto, geodésicas. Denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle, \bar{\nabla}, \wedge, \bar{R}$ e $[\]$ a métrica, a conexão de Levi-Civita, o produto exterior, o tensor curvatura e o colchete de Lie em M , respectivamente. Além disso, associado a ξ consideraremos o operador

$$J : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

dado por

$$JX := X \wedge \xi,$$

onde $X \in \mathfrak{X}(M)$.

A Proposição a seguir nos mostra como é possível associar uma função real a variedade ambiente M . Este resultado, bem como o posterior, podem ser encontrados em [13].

Proposição 1.2.2. *Seja M como descrita acima. Então existe uma função $\tau : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\bar{\nabla}_X \xi = \tau X \wedge \xi.$$

Prova. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. Como ξ é um campo de Killing, temos da equação de Killing

$$\langle \bar{\nabla}_X \xi, X \rangle + \langle \bar{\nabla}_X \xi, X \rangle = 0.$$

Ou seja,

$$2\langle \bar{\nabla}_X \xi, X \rangle = 0$$

e

$$\langle \bar{\nabla}_X \xi, X \rangle = 0.$$

Como ξ é unitário, temos

$$\begin{aligned} 0 = X \langle \xi, \xi \rangle &= \langle \bar{\nabla}_X \xi, \xi \rangle + \langle \xi, \bar{\nabla}_X \xi \rangle \\ &= 2\langle \bar{\nabla}_X \xi, \xi \rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$\langle \bar{\nabla}_X \xi, X \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \bar{\nabla}_X \xi, \xi \rangle = 0$$

e o campo $\bar{\nabla}_X \xi$ é ortogonal a X e a ξ . Como M tem dimensão três, concluímos que para todo campo horizontal $X \in \mathfrak{X}(M)$, existe $\tau_X : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\bar{\nabla}_X \xi = \tau_X X \wedge \xi.$$

Vamos mostrar que a função τ_X não depende do campo X . De fato, seja $\{X, Y\} \in \mathfrak{X}(M)$ uma base ortonormal de vetores horizontais tal que $\det(X, Y, \xi) = 1$. Temos

$$\bar{\nabla}_X \xi = \tau_X X \wedge \xi \tag{1.1}$$

$$\bar{\nabla}_Y \xi = \tau_Y Y \wedge \xi. \tag{1.2}$$

Logo, basta provar que $\tau_X = \tau_Y$. Tomando o produto escalar de (1.1) e Y , e o produto escalar de (1.2) e X , temos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_X \xi, Y \rangle &= \tau_X \langle X \wedge \xi, Y \rangle = \tau_X \det(X, \xi, Y) \\ &= -\tau_X \det(X, Y, \xi) \\ &= -\tau_X, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_Y \xi, X \rangle &= \tau_Y \langle Y \wedge \xi, X \rangle = \tau_Y \det(Y, \xi, X) \\ &= \tau_Y \det(X, Y, \xi) \\ &= \tau_Y. \end{aligned}$$

Como ξ é um campo de Killing, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \bar{\nabla}_X \xi, Y \rangle + \langle \bar{\nabla}_Y \xi, X \rangle \\ &= -\tau_X + \tau_Y, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\tau_X = \tau_Y.$$

■

A Proposição anterior torna natural a seguinte definição. Uma submersão Riemanniana sobre uma superfície \mathbb{M}^2 , cujas fibras são trajetórias de um campo de vetores de Killing unitário ξ é chamada de *Submersão de Killing* e denotaremos por $M(\kappa, \tau)$, onde κ é a curvatura de Gauss de $\mathbb{M}(\kappa)$ e τ é dado na Proposição 1.2.2.

Nosso objetivo agora é calcular a curvatura seccional $\bar{K}(X, Y)$ de qualquer plano gerado por $X, Y \in \mathfrak{X}(M(\kappa, \tau))$.

Proposição 1.2.3. *Seja $M(\kappa, \tau)$ uma submersão Riemanniana com campo de Killing unitário ξ . Seja $\{X, Y\} \in TM(\kappa, \tau)$ uma base ortonormal de vetores horizontais tal que $\{X, Y, \xi\}$ é orientada positivamente. Então*

$$\begin{aligned} \bar{K}(X, Y) &= \kappa - 3\tau^2, \\ \bar{K}(X, \xi) &= \tau^2. \end{aligned}$$

Prova. A curvatura seccional de $M(\kappa, \tau)$ é dado por

$$\bar{K}(X, Y) = K(X, Y) - \frac{3\|A_X Y\|^2}{\|X \wedge Y\|^2},$$

onde $K(X, Y)$ é a curvatura da base de fibração \mathbb{M}^2 veja [31]. Como X, Y são ortonormais, temos

$$\bar{K}(X, Y) = \kappa - 3\|A_X Y\|^2.$$

Usando que $A_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]^v$ (vide [31], Lema 2), temos que

$$\begin{aligned} \langle A_X Y, \xi \rangle &= \left\langle \frac{1}{2}[X, Y]^v, \xi \right\rangle = \frac{1}{2} \langle [X, Y]^v, \xi \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle [X, Y], \xi \rangle = \frac{1}{2} \langle \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X, \xi \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \bar{\nabla}_X Y, \xi \rangle - \frac{1}{2} \langle \bar{\nabla}_Y X, \xi \rangle. \end{aligned}$$

Tendo em conta que

$$0 = X \langle X, Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y, \xi \rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_X \xi \rangle,$$

e

$$0 = Y \langle X, \xi \rangle = \langle \bar{\nabla}_Y X, \xi \rangle + \langle X, \bar{\nabla}_Y \xi \rangle,$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_X Y, \xi \rangle &= -\langle Y, \bar{\nabla}_X \xi \rangle, \\ \langle \bar{\nabla}_Y X, \xi \rangle &= -\langle X, \bar{\nabla}_Y \xi \rangle. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \langle A_X Y, \xi \rangle &= \frac{1}{2} \langle \bar{\nabla}_X Y, \xi \rangle - \frac{1}{2} \langle \bar{\nabla}_Y X, \xi \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \langle Y, \bar{\nabla}_X \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle X, \bar{\nabla}_Y \xi \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \langle Y, \tau X \wedge \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle X, \tau Y \wedge \xi \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \tau \langle Y, X \wedge \xi \rangle + \frac{1}{2} \tau \langle X, Y \wedge \xi \rangle \\ &= \frac{1}{2} \tau \det(X, Y, \xi) + \frac{1}{2} \tau \det(X, Y, \xi) \\ &= \frac{1}{2} \tau + \frac{1}{2} \tau = \tau, \end{aligned}$$

onde usamos que a base $\{X, Y, \xi\}$ é orientada positivamente. Logo,

$$A_X Y = \tau \xi,$$

e $A_X Y$ é vertical. Portanto,

$$\begin{aligned} \bar{K}(X, Y) &= \kappa - 3\|A_X Y\|^2 \\ &= \kappa - 3\|\tau \xi\|^2 \\ &= \kappa - 3\tau\|\xi\|^2 = \kappa - 3\tau^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\overline{K}(X, Y) = \kappa - 3\tau^2.$$

Agora, novamente usando o Corolário 1 de [31], temos que a curvatura seccional de um plano gerado por um vetor horizontal X e um vetor vertical V é

$$K(X, V)\|X\|^2\|V\|^2 = \langle (\overline{\nabla}_X \tau)_V V, X \rangle + \|A_X V\|^2 - \|T_V X\|^2.$$

Então,

$$K(X, \xi) = \langle (\overline{\nabla}_X \tau)_\xi \xi, X \rangle + \|A_X \xi\|^2 - \|T_\xi X\|^2.$$

Por outro lado,

$$A_X \xi = (\overline{\nabla}_{X^h} \xi^h)^v + (\overline{\nabla}_{X^h} \xi^v)^h = (\overline{\nabla}_X \xi)^h,$$

ou seja, $A_X \xi$ é um campo horizontal. Então,

$$\begin{aligned} \langle A_X \xi, X \rangle &= \langle (\overline{\nabla}_X \xi)^h, X \rangle = \langle \overline{\nabla}_X \xi, X \rangle \\ &= \langle \tau X \wedge \xi, X \rangle = -\tau \langle Y, X \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle A_X \xi, Y \rangle &= \langle (\overline{\nabla}_X \xi)^h, Y \rangle = \langle \overline{\nabla}_X \xi, Y \rangle \\ &= \langle \tau X \wedge \xi, Y \rangle = -\tau \langle Y, Y \rangle \\ &= -\tau, \end{aligned}$$

ou seja,

$$A_X \xi = -\tau.$$

Assim,

$$\|A_X \xi\| = \|-\tau Y\| = \tau^2 \|Y\| = \tau^2.$$

Por outro lado,

$$T_\xi X = (\overline{\nabla}_{\xi^v} X^v)^h + (\overline{\nabla}_{\xi^v} X^h)^v = (\overline{\nabla}_\xi X)^v,$$

ou seja, $T_\xi X$ é vertical. Então

$$\begin{aligned} \langle T_\xi X, \xi \rangle &= \langle (\overline{\nabla}_\xi X)^v, \xi \rangle \\ &= \langle (\overline{\nabla}_\xi X), \xi \rangle. \end{aligned}$$

Além disso,

$$0 = \xi \langle X, \xi \rangle = \langle \overline{\nabla}_\xi X, \xi + \overline{X}, \overline{\nabla}_\xi \xi \rangle,$$

logo

$$\langle \bar{\nabla}_\xi X, \xi \rangle = -\langle X, \bar{\nabla}_\xi \xi \rangle.$$

Como as fibras são geodésica, $\bar{\nabla}_\xi \xi = 0$ e concluímos que

$$\langle T_\xi X, \xi \rangle = -\langle X, \bar{\nabla}_\xi \xi \rangle = 0,$$

o que implica que

$$T_\xi X = 0 \quad \text{e} \quad \|T_\xi X\|^2 = 0.$$

Finalmente, usando a definição de derivada covariante de um tensor temos que $\bar{\nabla}_Z T$ é

$$(\bar{\nabla}_Z T)_X Y = \bar{\nabla}_Z(T_X Y) - T_{\bar{\nabla}_Z X} Y - T_X(\bar{\nabla}_Z Y).$$

Tendo em conta que $\bar{\nabla}_\xi \xi = 0$, $T_\xi X = 0$, $T_\xi \xi = (\bar{\nabla}_\xi \xi)^h$, $\bar{\nabla}_X \xi = -\tau Y$ e $\xi(\tau) = 0$, temos

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X T)_\xi \xi &= \bar{\nabla}_X(T_\xi \xi) - T_{\bar{\nabla}_X \xi} \xi - T_\xi(\bar{\nabla}_X \xi) \\ &= \bar{\nabla}_X(\bar{\nabla}_\xi \xi)^h + \tau T_Y \xi + T_\xi(\tau Y) \\ &= T_\xi(\tau Y) = (\bar{\nabla}_\xi(\tau Y))^v \\ &= (\xi(\tau)Y + \tau \bar{\nabla}_\xi Y)^v \\ &= (\tau \bar{\nabla}_\xi Y)^v. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle (\bar{\nabla}_X T)_\xi \xi, X \rangle = \langle (\tau \bar{\nabla}_\xi Y)^v, X \rangle = 0.$$

Em resumo,

$$\|A_X \xi\|^2 = \tau^2, \|T_\xi X\|^2 = 0 \quad \text{e} \quad \langle (\bar{\nabla}_X \tau)_\xi \xi, \xi \rangle = 0.$$

Temos, então

$$\bar{K}(X, Y) = \tau^2. \quad \blacksquare$$

Agora, vamos apresentar um referencial ortonormal para o espaço $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, com $\tau \neq 0$. Para mais detalhes veja [9].

Suponha que $\tau \neq 0$. A variedade $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ possui localmente um referencial ortonormal (E_1, E_2, E_3) com

$$E_3 = \xi.$$

Uma vez que

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_j, E_k \rangle,$$

podemos calcular os símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana $\bar{\nabla}$. Como, para todo campo de vetores X , vale

$$\bar{\nabla}_X E_3 = \tau X \wedge E_3$$

e para quaisquer campos de vetores X, Y, Z ,

$$\langle X \wedge Y, Z \rangle = \det_{(E_1, E_2, E_3)} (X, Y, Z),$$

temos

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{23}^1 &= \langle \bar{\nabla}_{E_2} E_3, E_1 \rangle \\ &= \langle \tau(E_2 \wedge E_3), E_1 \rangle \\ &= \tau \langle E_2 \wedge E_3, E_1 \rangle \\ &= \tau \det(E_2, E_3, E_1) \\ &= \tau \det(E_1, E_2, E_3) \\ &= \tau. \end{aligned}$$

Usando o fato de que a derivada covariante é compatível com a métrica, concluímos que

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = -\bar{\Gamma}_{ik}^j.$$

Logo,

$$\bar{\Gamma}_{21}^3 = -\tau.$$

Analogamente, obtemos os outros símbolos de Christoffel:

$$\bar{\Gamma}_{12}^3 = \bar{\Gamma}_{23}^1 = -\bar{\Gamma}_{21}^3 = -\bar{\Gamma}_{13}^2 = \tau,$$

$$\bar{\Gamma}_{32}^1 = -\bar{\Gamma}_{31}^2 = \tau - \sigma,$$

onde $\tau \in \mathbb{R}$ e σ é um número real que determinaremos a seguir. Os outros símbolos de Christoffel $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ são identicamente nulos.

Como a conexão Riemanniana $\bar{\nabla}$ é simétrica, temos

$$[E_1, E_2] = \bar{\nabla}_{E_1} E_2 - \bar{\nabla}_{E_2} E_1.$$

Além disso, sendo (E_1, E_2, E_3) um referencial ortonormal, então valem,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{E_1} E_2 &= \bar{\Gamma}_{12}^1 E_1 + \bar{\Gamma}_{12}^2 E_2 + \bar{\Gamma}_{12}^3 E_3 \\ &= \tau E_3, \\ \bar{\nabla}_{E_2} E_1 &= \bar{\Gamma}_{21}^1 E_1 + \bar{\Gamma}_{21}^2 E_2 + \bar{\Gamma}_{21}^3 E_3 \\ &= -\tau E_3. \end{aligned}$$

Logo,

$$[E_1, E_2] = \tau E_3 + \tau E_3 = 2\tau E_3.$$

Procedendo de forma análoga, obtemos

$$[E_1, E_2] = 2\tau E_3, \quad [E_2, E_3] = \sigma E_1, \quad [E_3, E_1] = \sigma E_2.$$

Das propriedades de simetria do tensor curvatura \bar{R} vemos que \bar{R} de fato define uma aplicação bilinear simétrica $\bar{R} : \Lambda^2 M \times \Lambda^2 M \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\bar{R}(X \wedge Y, Z \wedge W) := \bar{R}(X, Y, W, Z),$$

onde $\Lambda^2 M$ é o espaço dos bivectores. A relação

$$\langle \mathfrak{R}(X \wedge Y), Z \wedge W \rangle = \bar{R}(X \wedge Y, Z \wedge W)$$

define um operador autoadjunto $\mathfrak{R} : \Lambda^2 M \times \Lambda^2 M$. Este operador é chamado de *operador curvatura*. Para mais detalhes veja [29]. Calculando \bar{R} na base $(E_2 \wedge E_3, E_3 \wedge E_1, E_1 \wedge E_2)$ temos

$$\bar{R}_{ij} = \langle \bar{R}(e_i), e_j \rangle, \quad \bar{R}_{ii} = \langle \bar{R}(e_i), e_i \rangle = \bar{K}(E_j, E_k),$$

se $e_i = E_j \wedge E_k$. Isto significa que a diagonal da matriz \bar{R} nos dá a curvatura seccional com respeito ao plano gerado por E_j e E_k . Usando os símbolos de Christoffel acima podemos calcular a matriz de \bar{R} :

$$\begin{aligned} \bar{R}_{33} &= \langle \bar{R}(E_1, E_2)E_2, E_1 \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{E_1} \bar{\nabla}_{E_2} E_2 - \bar{\nabla}_{E_2} \bar{\nabla}_{E_1} E_2 - \bar{\nabla}_{[E_1, E_2]} E_2, E_1 \rangle \\ &= \langle -\bar{\nabla}_{E_2}(\tau E_3) - \bar{\nabla}_{2\tau E_3} E_2, E_1 \rangle \\ &= \langle -\tau \tau E_1 - 2\tau(\tau - \sigma)E_1, E_1 \rangle \\ &= 2\tau\sigma - 3\tau^2. \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos

$$\bar{R}_{11} = \bar{R}_{22} = \tau^2 \quad e \quad \bar{R}_{ij} = 0, i \neq j.$$

Assim, para a variedade homogênea $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, o tensor curvatura na base $(E_2 \wedge E_3, E_3 \wedge E_1, E_1 \wedge E_2)$ é diagonal, isto é,

$$\bar{R} = \text{diag}(a, a, b)$$

com

$$a = \tau^2, \quad b = -3\tau^2 + 2\sigma\tau.$$

Pela Proposição 1.2.3,

$$\bar{K}(E_1, E_2) = \kappa - 3\tau^2.$$

Então,

$$\kappa = \bar{K}(E_1, E_2) + 3\tau^2 = b + 3\tau^2.$$

Logo, temos que

$$b = \kappa - 3\tau^2,$$

e, portanto,

$$\sigma = \frac{\kappa}{2\tau}.$$

A próxima Proposição nos diz como se escreve o tensor curvatura de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

Proposição 1.2.4. *Para quais quer campos de vetores X, Y, Z, W em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, temos*

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = (\kappa - 3\tau^2)\langle R_o(X, Y)Z, W \rangle + (\kappa - 4\tau^2)\langle R_1(\xi; X, Y)Z, W \rangle,$$

com

$$R_0(X, Y)Z = \langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X, \quad (1.3)$$

$$R_1(V, X, Y)Z = \langle Y, V \rangle \langle Z, V \rangle X + \langle Y, Z \rangle \langle X, V \rangle V - \langle X, Z \rangle \langle Y, V \rangle V - \langle X, V \rangle \langle Z, V \rangle Y. \quad (1.4)$$

Prova. Vamos decompor os campos nas partes horizontais vertical com respeito a ξ , isto é, $X = \tilde{X} + \xi x$, $Y = \tilde{Y} + \xi y$, $Z = \tilde{Z} + \xi z$, onde $x = \langle X, \xi \rangle$, $y = \langle Y, \xi \rangle$, $z = \langle Z, \xi \rangle$. Usando a multilinearidade do tensor curvatura, obtemos uma soma de 16 termos:

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle \bar{R}(\tilde{X} + \xi x, \tilde{Y} + \xi y)\tilde{Z} + \xi z, \tilde{W} + \xi w \rangle \\ &= \langle \bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}, \tilde{W} \rangle + \langle \bar{R}(\xi x, \tilde{Y})\tilde{Z}, \tilde{W} \rangle \\ &\quad + \langle \bar{R}(\tilde{X}, \xi y)\tilde{Z}, \tilde{W} \rangle + \langle \bar{R}(\xi x, \xi y)\tilde{Z}, \tilde{W} \rangle \\ &\quad + \langle \bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\xi z, \tilde{W} \rangle + \langle \bar{R}(\xi x, \tilde{Y})\xi z, \tilde{W} \rangle \\ &\quad + \langle \bar{R}(\tilde{X}, \xi y)\xi z, \tilde{W} \rangle + \langle \bar{R}(\xi x, \xi y)\xi z, \tilde{W} \rangle \\ &\quad + \langle \bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}, \xi w \rangle + \langle \bar{R}(\xi x, \tilde{Y})\tilde{Z}, \xi z \rangle \\ &\quad + \langle \bar{R}(\tilde{X}, \xi y)\tilde{Z}, \xi w \rangle + \langle \bar{R}(\xi x, \xi y)\tilde{Z}, \xi w \rangle \\ &\quad + \langle \bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\xi z, \xi w \rangle + \langle \bar{R}(\xi x, \tilde{Y})\xi z, \xi w \rangle \\ &\quad + \langle \bar{R}(\tilde{X}, \xi y)\xi z, \xi w \rangle + \langle \bar{R}(\xi x, \xi y)\xi z, \xi w \rangle. \end{aligned}$$

Os termos onde ξ aparece três ou quatro vezes, ou duas vezes nas posições 1, 2 ou 3, 4 são nulos por anti-simetria. Além disso, os termos onde ξ aparece uma vez desaparecem por

que a matrix de \bar{R} na base $(E_2 \wedge E_3, E_3 \wedge E_1, E_1 \wedge E_2)$ é diagonal. Assim, temos

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle \bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}, \tilde{W} \rangle + \langle \bar{R}(\xi x, \tilde{Y})\xi z, \tilde{W} \rangle \\
&\quad + \langle \bar{R}(\tilde{X}, \xi y)\xi z, \tilde{W} \rangle + \langle \bar{R}(\xi x, \tilde{Y})\tilde{Z}, \xi w \rangle \\
&\quad + \langle \bar{R}(\tilde{X}, \xi y)\tilde{Z}, \xi w \rangle \\
&= (\kappa - 3\tau^2)(\langle \tilde{X}, \tilde{W} \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle - \langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{W} \rangle) \\
&\quad + \tau^2(-xz \langle \tilde{Y}, \tilde{W} \rangle + yz \langle \tilde{X}, \tilde{W} \rangle + xw \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle - yw \langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle) \\
&= (\kappa - 3\tau^2)(\langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle) \\
&\quad - (\kappa - 4\tau^2)(\langle X, Z \rangle \langle Y, \xi \rangle \langle W, \xi \rangle + \langle Y, W \rangle \langle X, \xi \rangle \langle Z, \xi \rangle \\
&\quad - \langle X, W \rangle \langle Y, \xi \rangle \langle Z, \xi \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, \xi \rangle \langle W, \xi \rangle).
\end{aligned}$$

■

A seguir descrevemos cada um dos espaços homogêneos Riemannianos, com grupo de isometria de dimensão quatro.

1.2.1 O Espaço $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

Esta é provavelmente a menos interessante e também a mais simples das oito geometrias. Existem somente sete variedades tridimensionais sem bordo, incluindo $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, com estrutura geométrica modelada por $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Para mais detalhes ver [34]. Inicialmente vamos tratar da esfera \mathbb{S}^2 .

A esfera Euclidiana é o conjunto,

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Com a métrica induzida do espaço Euclidiano 3-dimensional. Neste caso $\kappa \equiv 1$ e $\mathbb{M}(\kappa) = \mathbb{M}(1) \equiv \mathbb{S}^2$.

Considerando a projeção estereográfica, podemos escrever \mathbb{S}^2 de forma intrínseca, isto é, sem mencionar o espaço ambiente, como:

$$\mathbb{R}^2 \cup \infty,$$

com a métrica:

$$ds_{\mathbb{S}^2}^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2), \quad \frac{2}{1 + \kappa(x^2 + y^2)}.$$

Um referencial natural é dado por $\{\partial_x, \partial_y\}$ e referencial ortonormal dado por $\{e_1 = \lambda^{-1}\partial_x, e_2 = \lambda^{-1}\partial_y\}$.

Denotando o grupo de isometrias de \mathbb{S}^2 por $Isom(\mathbb{S}^2)$, temos o seguinte resultado (ver [29]).

Proposição 1.2.5. *O grupo de isometrias da Esfera Euclidiana é dado por,*

$$Isom(\mathbb{S}^2) = O(3),$$

onde $O(3)$ é o grupo de matrizes ortogonais de ordem 3×3 .

O espaço $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ é o produto da esfera \mathbb{S}^2 pela reta Euclidiana com a métrica produto

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad \lambda = \frac{2}{1 + \kappa(x^2 + y^2)}.$$

Assim, o grupo de isometrias de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ pode ser identificado com $Isom(\mathbb{S}^2) \times Isom(\mathbb{R})$.

1.2.2 O Espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Ao contrário de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, existem infinitas 3-variedades com estrutura geométrica modelada por $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Por exemplo, o produto de qualquer superfície hiperbólica com \mathbb{R} ou \mathbb{S}^1 tem uma estrutura deste tipo. As referências usadas nesta seção são [28] e [34].

Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ o modelo do disco para \mathbb{H}^2 , com a métrica

$$g_D = 4 \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

Sejam $(x, y) \in D$ e $z \in \mathbb{R}$. A métrica em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é a métrica produto dada por

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{F} + dz^2,$$

onde

$$F = \left(\frac{1 - x^2 - y^2}{2} \right)^2.$$

A matriz da métrica ds^2 é

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{F} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{F} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{F} \end{pmatrix},$$

e a sua inversa é

$$\begin{pmatrix} F & 0 & 0 \\ F & F & 0 \\ F & 0 & F \end{pmatrix}.$$

Tendo em conta que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) g^{km},$$

podemos calcular os símbolos de Christoffel para a métrica ds^2 . Encontramos

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{11}^1 &= \bar{\Gamma}_{12}^2 = \bar{\Gamma}_{21}^2 = \frac{x}{\sqrt{F}}, \\ \bar{\Gamma}_{22}^2 &= \bar{\Gamma}_{12}^1 = \bar{\Gamma}_{21}^1 = \frac{y}{\sqrt{F}}, \\ \bar{\Gamma}_{11}^2 &= -\frac{y}{\sqrt{F}}, \quad \bar{\Gamma}_{22}^1 = -\frac{x}{\sqrt{F}}\end{aligned}$$

e os outros símbolos de Christoffel são identicamente nulos.

Agora, sejam e_1, e_2, e_3 uma base canônica de \mathbb{R}^3 e sejam $E_1 = \sqrt{F}e_1, E_2 = \sqrt{F}e_2, E_3 = \sqrt{F}e_3$ tais que (E_1, E_2, E_3) é uma base ortonormal para $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Ver [28].

O grupo de isometrias de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é naturalmente isomorfo a $\text{Isom}(\mathbb{H}^2) \times \text{Isom}(\mathbb{R})$. Logo, as isometrias de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ são as isometrias de \mathbb{H}^2 , que descrevemos na seção anterior, mais as translações ao longo das fibras.

1.2.3 O Espaço de Heisenberg Nil_3

O grupo de Heisenberg Nil_3 é o grupo de Lie, formado pelas matrizes nilpotentes da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R},$$

munido com uma família a 1-parâmetro de métricas invariantes à esquerda. Nil_3 é um espaço homogêneo Riemanniano com grupo de isometria de dimensão quatro. Este grupo é difeomorfo ao \mathbb{R}^3 e à família de métricas, que denotaremos por g_τ e se expressa, em termos da curvatura da fibra τ , como

$$g_\tau = dx^2 + dy^2 + (\tau(xdy - ydx) + dz)^2,$$

sendo (x, y, z) as coordenadas usuais de \mathbb{R}^3 . Assim, denotaremos \mathbb{R}^3 com a métrica g_τ por Nil_3 . Algumas referências sobre o espaço de Heisenberg são [4], [20], [30] e [34].

Dadas duas constantes τ e $\hat{\tau}$ e os correspondentes grupos de Heisenberg com as métricas associadas g_τ e $g_{\hat{\tau}}$, a aplicação

$$\begin{aligned}\lambda : \left(\mathbb{R}^3, \frac{\tau^2}{\hat{\tau}} g_\tau \right) &\rightarrow (\mathbb{R}^3, g_{\hat{\tau}}) \\ (x, y, z) &\mapsto \frac{\tau}{\hat{\tau}}(x, y, z)\end{aligned}$$

é uma isometria. Assim, a menos de homotetia e uma isometria, podemos fixar uma constante τ . Geralmente usa-se a normalização $\tau = \frac{1}{2}$.

A aplicação $\pi : Nil_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ é uma submersão Riemanniana de Killing cujas fibras são dadas por $\{x = x_0, y = y_0\}$, ou seja, as fibras são

linhas retas. O campo vertical da submersão, denotado por ξ , é um campo de Killing. Isto é, as fibras são trajetórias de um campo de Killing e, portanto, são geodésicas.

Agora, seja $\{e_1, e_2\}$ o referencial ortonormal em \mathbb{R}^2 , com $e_1 = \partial_x$ e $e_2 = \partial_y$ e seja $E_3 = \xi$. Denote por E_1 e E_2 os levantamentos horizontais em Nil_3 de e_1 e e_2 , isto é,

$$d\pi(E_i) = e_i \quad e \quad \langle E_i, E_3 \rangle = 0, \quad 1i = 1, 2.$$

Observando que $d\pi(\partial_x) = \partial_x$ e $d\pi(\partial_y) = \partial_y$ e usando a métrica g acima, obtemos a expressão de E_i em coordenadas,

$$E_1 = \partial_x - \tau y \partial_z, \quad E_2 = \partial_y - \tau x \partial_z \quad e \quad E_3 = \partial_z.$$

Note que

$$\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle E_j, E_3 \rangle = 0, \quad i, j = 1, 2 \quad e \quad |E_3|^2 = 1,$$

ou seja, (E_1, E_2, E_3) é um referencial ortonormal em Nil_3 . Considerando $\mathbb{M}^2(\kappa) = \mathbb{R}^2$, temos que $\kappa = 0$. Logo, $\sigma = \frac{\kappa}{2\tau} = 0$ e os símbolos de Christoffel em Nil_3 são:

$$\bar{\Gamma}_{12}^3 = \bar{\Gamma}_{23}^1 = -\bar{\Gamma}_{21}^3 = -\bar{\Gamma}_{13}^2 = \tau,$$

$$\bar{\Gamma}_{32}^1 = -\bar{\Gamma}_{31}^2 = \tau.$$

Assim podemos calcular a conexão Riemanniana de Nil_3 . Temos que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{E_1} E_2 &= \bar{\Gamma}_{12}^1 E_1 + \bar{\Gamma}_{12}^2 E_2 + \bar{\Gamma}_{12}^3 E_3 \\ &= 0E_1 - \tau E_2 + 0E_3 \\ &= -\tau E_3. \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos $\bar{\nabla}_{E_j} E_j = 0$, $1 \leq j \leq 3$ e

$$\bar{\nabla}_{E_1} E_3 = \bar{\nabla}_{E_3} E_1 = -\tau E_2, \quad \bar{\nabla}_{E_2} E_3 = \bar{\nabla}_{E_3} E_2 = \tau E_1,$$

$$\bar{\nabla}_{E_1} E_2 = \bar{\nabla}_{E_2} E_1 = \tau E_3.$$

Em particular,

$$[E_1, E_2] = 2\tau E_3, \quad [E_1, E_3] = 0 \quad e \quad [E_2, E_3] = 0.$$

Observação 1.2.6. Note que $[E_1, E_2] = 2\tau E_3$ não é horizontal. Isto implica que os planos horizontais gerados pelos campos E_1 e E_2 não são integráveis, o que significa que não existem superfícies horizontais em Nil_3 .

As isometrias do Nil_3 são as translações geradas pelos campos de Killing

$$F_1 = \partial_x + \tau y \partial_z, \quad F_2 = \partial_y + \tau x \partial_z, \quad F_3 = \partial_z,$$

e as rotações em torno do eixo z correspondente a

$$F_4 = -y\partial_x + x\partial_y.$$

As translações correspondentes a F_1 , F_2 e F_3 são, respectivamente,

$$(x, y, z) \mapsto (x + t, y, z + \tau ty),$$

$$(x, y, z) \mapsto (x, y + t, z - \tau tx),$$

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, z + t),$$

onde $t \in \mathbb{R}$. Assim, as isometrias levam planos verticais em planos verticais e linhas Euclidianas em linhas Euclidianas.

Usando a Proposição 1.2.3 podemos ver que as curvaturas seccionais dos planos determinados por (E_1, E_2) , (E_1, E_3) e (E_2, E_3) em Nil_3 são

$$\overline{K}(E_1, E_2) = -3\tau^2, \quad \overline{K}(E_1, E_3) = \tau^2, \quad \overline{K}(E_2, E_3) = \tau^2.$$

As curvaturas de Ricci na direção dos campos E_1, E_2, E_3 são, respectivamente,

$$\overline{Ric}(E_1) = -2\tau^2, \quad \overline{Ric}(E_2) = -2\tau^2, \quad \overline{Ric}(E_3) = 2\tau^2.$$

E curvatura escalar em um ponto $p \in Nil_3$ é

$$\overline{\rho}(p) = -2\tau^2.$$

1.2.4 O Espaço $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$

O grupo de Lie das matrizes 2×2 com entradas reais cujo determinante é 1, é denotado por $SL_2(\mathbb{R})$, isto é, $SL_2\mathbb{R} = \{A \in GL_2(\mathbb{R}); \det A = 1\}$. Podemos escrever $SL_2(\mathbb{R})$ da seguinte maneira.

$$\begin{aligned} SL_2\mathbb{R} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d, \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc = 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1+bc}{d} & b \\ c & d \end{pmatrix}, b, c, d, \in \mathbb{R} \text{ e } d \neq 0 \right\} \end{aligned}$$

$SL_2(\mathbb{R})$ é um grupo de Lie de dimensão três. O quociente $SL_2(\mathbb{R})/\{-Id, Id\}$ também é um grupo Lie denotado por $PSL_2(\mathbb{R})$ e seu recobrimento universal é denotado por $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$. Podemos definir um produto no recobrimento universal de $PSL_2(\mathbb{R})$ pelo levantamento, através da aplicação de recobrimento, do produto de $PSL_2(\mathbb{R})$. Como $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$ é grupo de Lie temos que $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$ é um grupo de Lie e admite uma métrica invariante à esquerda.

A seguir, apresentaremos um modelo para $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$ e escreveremos uma métrica nesse espaço. De fato, iremos mostrar que $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$ é uma fibração Riemanniana sobre o plano hiperbólico \mathbb{H}^2 .

Um modelo para $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$. As isometrias de \mathbb{H}^2 são as restrições a $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^2$ das transformações conformes de \mathbb{R}^2 que levam \mathbb{H}^2 sobre si mesmo. No \mathbb{R}^2 tais transformações são dadas pelas transformações de Möbius que são aplicações de \mathbb{C} em \mathbb{C} dadas por $f(x) = \frac{az + b}{cz + d}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Toda transformação de Möbius é uma composição de translação, rotação, homotetia e inversão. Essas são as isometrias de \mathbb{H}^2 . O conjunto das transformações de Möbius,

$$M = \{f : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2; f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc = 1\}$$

forma um grupo com a operação de composição de funções. O elemento neutro é a identidade $f(z) = z$. M é o grupo das isometrias de \mathbb{H}^2 que preservam orientação.

Para cada matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ podemos associar a uma transformação de Möbius $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$. Isso define um homomorfismo de grupos

$$H : (SL_2(\mathbb{R}), \cdot) \longrightarrow (M, \circ); \quad H \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{az + b}{cz + d}.$$

De fato, sejam $A, B \in SL_2(\mathbb{R})$, com $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$. Temos que

$$H(A.B) = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + a_1b_2 + b_1d_2}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + c_1b_2 + d_1d_2} = H(A) \circ H(B)$$

e, portanto, H é um homomorfismo de grupos.

O núcleo de H é conjunto $\ker H = \{A \in SL_2(\mathbb{R}); H(A) = e \in M\} = \{-Id, Id\}$. Pelo Teorema do isomorfismo, temos que $M \simeq SL_2(\mathbb{R})/\{-Id, Id\} = PSL_2(\mathbb{R})$, ou seja, $PSL_2(\mathbb{R})$ é isomorfo ao grupo das isometrias de \mathbb{H}^2 que preservam orientação.

Seja $U\mathbb{H}^2 := \{(p, v) \in T\mathbb{H}^2; |v| = 1\}$ o fibrado tangente unitário de \mathbb{H}^2 , isto é, $U\mathbb{H}^2$ é uma subvariedade de $T\mathbb{H}^2$ consistindo de vetores tangentes de comprimento unitário. O grupo $PSL_2(\mathbb{R})$ age transitivamente em $U\mathbb{H}^2$ e o estabilizador de cada ponto sob esta ação é trivial. Isso nos permite identificar $PSL_2(\mathbb{R})$ com $U\mathbb{H}^2$ e, conseqüentemente, $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$ com $\widetilde{U\mathbb{H}^2}$. A subvariedade $U\mathbb{H}^2$ é difeomorficamente um fibrado circular trivial sobre \mathbb{H}^2 , logo $U\mathbb{H}^2 \simeq \mathbb{H}^2 \times \mathbb{S}^1$ e, portanto, $\widetilde{U\mathbb{H}^2} \simeq \widetilde{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{S}^1}$. Como o recobrimento de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{S}^1$ é $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})} \simeq \widetilde{U\mathbb{H}^2}$ concluímos que $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})} \simeq \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ do ponto de vista de difeomorfismo e não métrico.

Métrica em $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$. Através da projeção natural $\pi : TM \longrightarrow M$ a métrica em uma variedade Riemanniana induz uma métrica no fibrado tangente TM da seguinte forma.

Seja $(p, v) \in TM$ e V um vetor tangente a TM em (p, v) . Escolha uma curva $\alpha : t \rightarrow (p(t), v(t))$ em TM , com $p(0) = p, v(0) = v$ e $V = \alpha'(0)$. Defina

$$\|V\|_{(p,v)}^2 = \|d\pi(V)\|_p^2 + \left\| \frac{Dv}{dt} \right\|_p^2,$$

onde $\frac{Dv}{dt}$ é a derivada covariante ao longo da curva $t \rightarrow p(t)$.

Lembrando que um vetor em $(p, v) \in TM$ que é ortogonal a fibra $\pi^{-1}(p) \simeq T_pM$ é dito ser horizontal e um vetor tangente a uma fibra é dito ser vertical. Podemos identificar o espaço tangente a fibra $\pi^{-1}(p)$ com o espaço tangente em $p \in M$. Além disso, se V é horizontal $v(t)$ é um campo paralelo ao longo da curva $p(t)$. Assim, temos que

- $\|V\|_{(p,v)} = \|V\|_p$, se V é vertical.
- $\|V\|_{(p,v)} = \|d\pi(V)\|_p$, se V é horizontal.

O espaço tangente horizontal tem a mesma dimensão do espaço tangente a M . Como $\|V\|_{(p,v)} = \|d\pi(V)\|_p$, $d\pi$ induz uma isometria entre o espaço tangente horizontal e o espaço tangente a M . Logo $d\pi : TM \rightarrow M$ é uma submersão Riemanniana.

A métrica em \mathbb{H}^2 induz uma métrica em $T\mathbb{H}^2$ que pode ser restrita a subvariedade $U\mathbb{H}^2$. Como estamos identificando $PSL_2(\mathbb{R})$ com $U\mathbb{H}^2$, temos uma métrica em $PSL_2(\mathbb{R})$. Essa métrica induz uma métrica no recobrimento universal $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$. Como $PSL_2(\mathbb{R})$ age em $U\mathbb{H}^2$ por isometrias, temos que a métrica induzida em $PSL_2(\mathbb{R})$ é invariante à esquerda e é levantada em uma métrica invariante à esquerda em $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$.

Fato 1.2.7. $\pi : \widetilde{PSL_2(\mathbb{R})} \rightarrow \mathbb{H}^2$ é uma fibração Riemanniana.

De fato, temos que $U\mathbb{H}^2 \simeq \mathbb{H}^2 \times \mathbb{S}$, ou seja, as fibras típicas de $U\mathbb{H}^2$ são círculos, e portanto, são 1-dimensionais. Assim o espaço tangente horizontal a $U\mathbb{H}^2$ coincide com o espaço tangente horizontal de $T\mathbb{H}^2$. Logo podemos restringir π uma submersão Riemanniana de $\widetilde{U\mathbb{H}^2}$ em \mathbb{H}^2 . Como $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})} \simeq \widetilde{U\mathbb{H}^2}$ concluímos que $\pi : \widetilde{PSL_2(\mathbb{R})} \rightarrow \mathbb{H}^2$ é uma fibração Riemanniana.

Como métrica em $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$ é invariante à esquerda, temos que $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$ é uma variedade Riemanniana homogênea completa simplesmente conexa. Vamos expressar essa métrica em $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$ em coordenadas.

Seja φ uma parametrização conforme de \mathbb{H}^2 e seja $\lambda : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ o fator de conformidade. A métrica em \mathbb{H}^2 nessas coordenadas é $\lambda^2(dx^2 + dy^2)$. Identificando $v \in U\mathbb{H}^2$ com seu ponto de base em \mathbb{H}^2 e sendo θ o ângulo que v faz com ∂_x , temos a seguinte parametrização para $U\mathbb{H}^2$.

$$(x, y, \theta) \rightarrow (\varphi(x, y), \frac{1}{\lambda}(\cos \theta \partial_x + \sin \theta \partial_y)).$$

Sejam V um vetor tangente a $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$ no ponto (p, v) , $\alpha : t \longrightarrow (p(t), v(t))$ uma curva passando por (p, v) em $t = 0$ e $\alpha'(0) = V$. Escrevendo $p(t) = (x(t), y(t))$ e $v(t) = \frac{1}{\lambda}(\cos \theta \partial_x + \sin \theta \partial_y)$, vamos Calcular a derivada covariante de v ao longo da curva $p(t)$.

Para calcular a derivada covariante em termos dos símbolos de Christoffel podemos usar a fórmula

$$\frac{Dv}{dt} = \sum_{k=1}^2 \left(\frac{dv_k}{dt} + \sum \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

que é a expressão clássica da derivada covariante em termos dos símbolos de Christoffel. Precisamos, então calcular os símbolos de Christoffel para a métrica $ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2)$ em \mathbb{H}^2 . Eles são dados em termos da métrica Riemanniana pela seguinte expressão.

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right) g^{km}.$$

Como $g_{ij} = \lambda^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \lambda^2 \delta_{ij}$, temos que a matriz (g_{ij}) é dada por

$$\begin{aligned} (g_{km}) &= \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e a sua inversa é a matriz

$$\begin{aligned} (g^{km}) &= \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, temos,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{k1}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_k} \right) g^{k1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x} g_{11} \right) g^{11} + \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial x} g_{12} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x} - \frac{\partial g_{11}}{\partial y} \right) g^{21} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial x} g^{11} \\ &= \frac{\lambda_x}{\lambda}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial y} g_{2k} + \frac{\partial}{\partial y} g_{k2} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{22} \right) g^{k1} \\
&= \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial y} g_{21} + \frac{\partial}{\partial y} g_{12} - \frac{\partial}{\partial x} g_{22} \right) g^{11} + \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial y} g_{22} + \frac{\partial}{\partial y} g_{22} - \frac{\partial}{\partial y} g_{22} \right) g^{21} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x} g^{11} \\
&= -\frac{\lambda_x}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Com cálculos análogos, obtemos os outros símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda_x}{\lambda}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{\lambda_x}{\lambda}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{\lambda_y}{\lambda}, \\
\Gamma_{21}^1 &= \frac{\lambda_y}{\lambda}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{\lambda_x}{\lambda}, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{\lambda_y}{\lambda}, \\
\Gamma_{22}^2 &= -\frac{\lambda_y}{\lambda}, & \Gamma_{21}^2 &= \frac{\lambda_x}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Agora, vamos calcular a derivada covariante ao longo da curva $p(t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{Dv}{dt} &= \sum_{k=1}^2 \left(\frac{dv_k}{dt} + \sum_{ij} \Gamma_{i,j}^k v_j \frac{dx_i}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \\
&= \left[\frac{dv_1}{dt} + \sum_i \left(\Gamma_{11}^1 v_1 \frac{dx_i}{dt} + \Gamma_{i2}^1 v_2 \frac{dx_i}{dt} \right) \right] \partial x + \left[\frac{dv_2}{dt} + \sum_i \left(\Gamma_{i2}^2 v_1 \frac{dx_i}{dt} + \Gamma_{i2}^2 v_2 \frac{dx_i}{dt} \right) \right] \partial y \\
&= \left[\frac{dv_1}{dt} + (\Gamma_{11}^1 v_1 x' + \Gamma_{12}^1 v_2 x') + (\Gamma_{21}^1 v_1 y' + \Gamma_{22}^1 v_2 y') \right] \partial x \\
&\quad + \left[\frac{dv_2}{dt} + (\Gamma_{11}^2 v_1 x' + \Gamma_{12}^2 v_2 x') + (\Gamma_{21}^2 v_1 y' + \Gamma_{22}^2 v_2 y') \right] \partial y.
\end{aligned}$$

Como

$$v(t) = \frac{1}{\lambda} (\cos \theta \partial_x + \sin \theta \partial_y) = \frac{1}{\lambda} (\cos \theta, \sin \theta),$$

temos que

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{-\sin \theta(t) \theta'(t) \lambda - \cos \theta(t) \lambda'}{\lambda^2} \quad \text{e} \quad \frac{dv_2}{dt} = \frac{\cos \theta(t) \theta'(t) \lambda - \sin \theta(t) \lambda'}{\lambda^2}.$$

Substituindo $\frac{dv_1}{dt}$ e $\frac{dv_2}{dt}$, v_1 e v_2 e os símbolos de Christoffel na expressão acima, obtemos que

$$\frac{Dv}{dt} = \frac{1}{\lambda^2} (-\lambda \theta' \sin \theta - \lambda_x y' \sin \theta + \lambda_y \sin \theta) \partial x + \frac{1}{\lambda^2} (\lambda \theta' \cos \theta - \lambda_y x' \cos \theta + \lambda_x y' \cos \theta) \partial y,$$

ou seja,

$$\frac{Dv}{dt} = \frac{1}{\lambda^2} (\lambda \theta' + y' \lambda_x - x' \lambda_y) (\cos \theta \partial y - \sin \theta \partial x).$$

Tendo em conta que

$$V = \alpha'(0) = (p'(0), \frac{Dv}{dt}(0)),$$

concluimos que

$$\|d\pi(V)\|_p^2 = \|p'(0)\|_p^2 = \|(x', y')\|_p^2 = \lambda^2(x'^2 + y'^2).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|V\|_{p,v}^2 &= \|d\pi(V)\|_p^2 + \left\| \frac{Dv}{dt} \right\|_p^2 \\ &= \lambda^2(x'^2 + y'^2) + \left\| \frac{1}{\lambda^2}(\lambda\theta' + y'\lambda_x - x'\lambda_y)(-\text{sen}\theta, \cos\theta) \right\|_p^2 \\ &= \lambda^2(x'^2 + y'^2) + \frac{1}{\lambda^4}(\lambda\theta' + y'\lambda_x - x'\lambda_y)^2 \|(-\text{sen}\theta, \cos\theta)\|_p^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|V\|_{(p,v)}^2 = \lambda^2(x'^2 + y'^2) + \frac{1}{\lambda^2}(\lambda\theta' + y'\lambda_x - x'\lambda_y)^2.$$

Fazendo $z = \theta$ no recobrimento universal, obtemos a seguinte expressão para a métrica em $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$:

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + \left(-\frac{\lambda_y}{\lambda}dx + \frac{\lambda_x}{\lambda}dy + dz \right)^2.$$

Referencial canônico. Um referencial canônico em $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$ é (E_1, E_2, E_3) (ver [9]) onde

$$\begin{aligned} E_1 &= \lambda^{-1}(\cos(\sigma z)\partial_x + \sin(\sigma z)\partial_y) + \tau(x \sin(\sigma z) - y \cos(\sigma z))\partial_z, \\ E_2 &= \lambda^{-1}(-\sin(\sigma z)\partial_x + \cos(\sigma z)\partial_y) + \tau(x \cos(\sigma z) - y \sin(\sigma z))\partial_z, \\ E_3 &= \partial_z \end{aligned}$$

e

$$\sigma = \frac{\kappa}{2\tau},$$

que satisfaz

$$[E_1, E_2] = 2\tau E_3, \quad [E_2, E_3] = \frac{\kappa}{2\tau} E_1, \quad [E_3, E_1] = \frac{\kappa}{2\tau} E_2.$$

Observação 1.2.8. O fato de $[E_1, E_2]$ não ser horizontal implica que o plano horizontal gerado por E_1 e E_2 não é integrável, significando que não existe superfície horizontal em $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Isometrias de $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$. A métrica induzida no fibrado tangente TM de uma variedade Riemanniana M é intrínseca o bastante para preservar o levantamento das isometria de M a TM . Em particular, o grupo de isometrias de $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$ contém os levantamentos das isometrias de \mathbb{H}^2 . Notamos também que as translações ao longo das fibras verticais são isometrias de $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$. Estas isometrias, em coordenadas, são dadas por $(x, y, z) \rightarrow (x, y, z + a)$. Então o grupo de isometrias de $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$ contém o grupo G gerado pelos levantamentos das isometrias de \mathbb{H}^2 e as translações verticais. Ver [42], para mais detalhes. De fato, temos o seguinte resultado

Proposição 1.2.9. *O grupo de isometrias de $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$ é gerado por levantamento de isometrias de \mathbb{H}^2 junto com as translações verticais ao longo das fibras.*

Observação. Seja F uma isometria de $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$. Como

$$\pi : \widetilde{PSL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}^2$$

é uma submersão Riemanniana, podemos escrever F na forma $F(z, t) = (f(z), h(z, t))$, onde

$$f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$$

é uma isometria do espaço hiperbólico \mathbb{H}^2 . Veja [15]. A seguinte proposição pode ser encontrada em [15].

Proposição 1.2.10. *As isometrias de $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$ no modelo do semi-plano, são dadas por,*

$$F(z, t) = (f(z), t - 2\tau \arg f' + c)$$

ou

$$G(z, t) = (-\bar{f}(z), -t + 2\tau \arg f' + c),$$

onde f é uma isometria positiva de \mathbb{H}^2 e c é um número real. No modelo do disco, temos

$$F(z, t) = (f(z), t - 2\tau \arg f' + c)$$

ou

$$G(z, t) = (\bar{f}(z), -t + 2\tau \arg f' + c),$$

onde f é uma isometria positiva de \mathbb{D}^2 e c é um número real.

1.2.5 As Esferas de Berger

Nesta seção descreveremos as esferas de Berger. Antes, falaremos sobre o espaço projetivo complexo e a fibração de Hopf, os quais estão intimamente relacionados com as esferas de Berger.

O Espaço Projetivo Complexo

A esfera unitária \mathbb{S}^{2n+1} pode ser considerada como o conjunto das $(n+1)$ -listas de números complexos $z = (z_1, z_2, \dots, z_{n+1})$ tais que

$$|z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2 = 1.$$

O grupo multiplicativo \mathbb{S}^1 dos números complexos de módulo 1 age sobre \mathbb{S}^{2n+1} por isometrias, de modo natural; para cada $u \in \mathbb{S}^1$ e cada $z \in \mathbb{S}^{2n+1}$, fazemos

$$u.z = (u.z_1, \dots, u.z_{n+1}) \in \mathbb{S}^{2n+1}.$$

O espaço *Projetivo Complexo* $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é definido como o espaço quociente da esfera \mathbb{S}^{2n+1} pela relação de equivalência segundo a qual dois pontos $w, z \in \mathbb{S}^{2n+1}$ são equivalentes se, e somente se, existe $u \in \mathbb{S}^1$ tal que $w = u.z$, isto é, $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$. Dado $z \in \mathbb{S}^{2n+1}$, sua classe de equivalência por esta relação de equivalência é portanto a órbita $\{u.z; u \in \mathbb{S}^1\}$ de z com respeito à ação de \mathbb{S}^1 definida acima. Cada uma dessas classes de equivalência é homeomorfa ao círculo \mathbb{S}^1 . Esta relação de equivalência decompõe a esfera \mathbb{S}^{2n+1} como reunião de círculos dois a dois disjuntos, cada um dos quais é um ponto do espaço projetivo complexo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Indicaremos $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ a projeção natural que associa a cada $z \in \mathbb{S}^{2n+1}$ sua classe de equivalência $\pi(z) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Muniremos $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ com a topologia quociente, de acordo com a qual um subconjunto $A \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é aberto se, e somente se, $\pi^{-1}(A)$ é aberto em \mathbb{S}^{2n+1} . Isto torna π contínua. Como \mathbb{S}^{2n+1} é compacto, concluímos que $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é compacto. Além disso, como a ação de \mathbb{S}^1 sobre \mathbb{S}^{2n+1} é por isometrias e $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$, podemos induzir uma métrica em $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ tal que $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é uma submersão Riemanniana. Esta métrica é chamada *métrica de Fubini-Study*. Quando $n = 1$, a fibração $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1 = S^2(1/2)$, é chamada *fibrção de Hopf* que pode ser dada por

$$(z, w) \rightarrow \left(\frac{1}{2}(|w|^2 - |z|^2), z\bar{w} \right),$$

onde $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$ e $S^2(1/2) \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

Falaremos agora das esferas de Berger. Quando $\tau \neq 0$ e $\kappa > 0$, os espaços $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ são fibrações sobre a esfera \mathbb{S}^2 . Estas variedades são obtidas deformando a métrica da esfera redonda de maneira que a fibração de Hopf seja preservada, mas modifique o comprimento das fibras.

A esfera \mathbb{S}^3 é o recobrimento universal de $SO_3(\mathbb{R})$, o qual pode ser identificado com o fibrado tangente unitário US^2 da esfera \mathbb{S}^2 . De fato, o grupo de isometria $SO_3(\mathbb{R})$ age transitivamente em US^2 e o estabilizador de qualquer ponto em US^2 é o trivial. O fibrado tangente unitário US^2 pode ser dotado com a métrica canônica induzida no fibrado TS^2 . Vamos dar uma expressão para esta métrica.

Seja $(x, y) \longrightarrow \phi(x, y)$ uma parametrização conforme de um domínio D em \mathbb{S}^2 e seja λ um fator conforme, isto é, a métrica de D é dada por $\lambda^2(dx^2 + dy^2)$. Então procedendo como na Seção 1.2.4, obtemos a seguinte expressão para a métrica de \widetilde{UD} :

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + \left(-\frac{\lambda_y}{\lambda} dx + \frac{\lambda_x}{\lambda} dy + dz \right)^2.$$

Agora, escolhamos $D = \mathbb{S}^2 \setminus \{\infty\}$ com a métrica de curvatura 4, isto é, a métrica da esfera redonda de raio $\frac{1}{2}$, dada pela projeção estereográfica, isto é,

$$\lambda = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}.$$

Obtemos então,

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + (2\lambda(ydx - xdy) + dz)^2.$$

Mais geralmente, \mathbb{R}^3 dotado com a métrica

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + (\tau\lambda(ydx - xdy) + dz)^2,$$

onde

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{\kappa}{4}x^2 + y^2}$$

é o recobrimento universal da variedade homogênea $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ com $\kappa > 0$ menos a fibra correspondente ao ponto $\infty \in \mathbb{S}^2$. As fibras são dadas por $\{x - x_0, y + y_0\}$ nessas coordenadas. o referencial canônico (E_1, E_2, E_3) é dado por

$$\begin{aligned} E_1 &= \lambda^{-1}(\cos(\sigma z)\partial_x + \sin(\sigma z)\partial_y) + \tau(x \sin(\sigma z) - y \cos(\sigma z))\partial_z, \\ E_2 &= \lambda^{-1}(-\sin(\sigma z)\partial_x + \cos(\sigma z)\partial_y) + \tau(x \cos(\sigma z) - y \sin(\sigma z))\partial_z, \\ E_3 &= \partial_z \end{aligned}$$

com

$$\sigma = \frac{\kappa}{2\tau}.$$

Os colchetes do referencial acima são

$$[E_1, E_2] = 2\tau E_3, \quad [E_2, E_3] = \frac{\kappa}{2\tau} E_1, \quad [E_3, E_1] = \frac{\kappa}{2\tau} E_2.$$

Este referencial é definido em um conjunto aberto \mathbb{E} o qual é $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ menos a fibra correspondente ao ponto $\infty \in \mathbb{S}^2$.

As variedades (\mathbb{S}^3, ds^2) são um espaço homogêneo Riemanniano e são chamadas de *esferas de Berger*. Tais variedades serão denotadas por \mathbb{S}_b^3 . Estas variedades são modelos para os espaços homogêneos $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ quando $\kappa > 0$ e $\tau \neq 0$. A aplicação $\pi : (\mathbb{S}^3, ds^2) \longrightarrow \mathbb{S}^2(\kappa)$ dada por

$$\pi(z, w) = \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \left(z\bar{w}, \frac{1}{2}(|z|^2 - |w|^2) \right)$$

é uma submersão Riemanniana.

Observações.

1. As esferas de Berger, no sentido estrito, são as variedades tais que $\kappa = 4$. Note que neste caso a aplicação π é a fibração de Hopf:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{S}^3(1) &\longrightarrow \mathbb{S}^2(1/2) \\ (z, w) &\mapsto \pi \left(z\bar{w}, \frac{1}{2}(|z|^2 - |w|^2) \right). \end{aligned}$$

As variedades descritas acima têm o mesmo grupo de isometrias das esferas de Berger.

2. Como comentamos acima, as esferas de Berger são obtidas deformando a métrica usual da esfera \mathbb{S}^3 de maneira que a fibração de Hopf continue sendo uma submersão Riemanniana, mas modifique o comprimento das fibras. Isso pode ser visto melhor definindo sobre $\mathbb{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}; |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ a métrica de Berger da seguinte maneira:

$$g_b(X, Y) = \frac{4}{\kappa} \left[g(X, Y) + \left(\frac{4\tau^2}{\kappa} - 1 \right) g(X, V)g(Y, V) \right],$$

onde $X, Y \in T\mathbb{S}^3$, $V = (iz, iw)$, $\kappa > 0$ e $\tau \neq 0$ e g é a métrica canônica da esfera \mathbb{S}^3 . Veja [38].

3. Se $\kappa = 4\tau^2$ a métrica g_b coincide com a métrica canônica da esfera \mathbb{S}^3 . Como estamos considerando grupo de isometria de dimensão quatro, temos que ter $\kappa \neq 4\tau^2$.
4. A família das métricas de Berger é uma família a 2-parâmetros, mas a menos de homotetia, esta família é reduzida a uma família a um parâmetro.

As Isometrias de \mathbb{S}_b^3

Seja $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$. Denotaremos por A^T a transposta de $A = [a_{ij}]$ e por $A^* = (\bar{A})^T = \overline{(A^T)}$ o conjugado hermitiano de A , isto é, $(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$. O grupo unitário $n \times n$ é o subgrupo

$$U(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : A^*A = I\}.$$

O grupo especial unitário é o grupo

$$SU(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : A^*A = I \quad e \quad \det A = 1\}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} SU(n) &= \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : A^*A = I \quad e \quad \det A = 1\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} : |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\} \\ &= \mathbb{S}^3. \end{aligned}$$

O grupo de isometrias de \mathbb{S}_b^3 é $U(2)$. O próximo resultado pode ser encontrado em [38] e classifica, a menos de conjugação, os grupos a 1-parâmetro de $U(2)$ em dois tipos.

Proposição 1.2.11. *Um grupo a 1-parâmetro de $U(2)$, a menos de conjugação e representação, deve ser um dos seguintes tipos:*

$$(i) \left\{ \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & e^{it} \end{array} \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(ii) \left\{ \left(\begin{array}{cc} e^{i\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{array} \right) : t \in \mathbb{R} \right\}, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

As isometrias de (i) são as rotações em torno dos grandes círculos $l = \{(z, 0) \in \mathbb{S}^3\}$, enquanto que as isometrias do tipo (ii) são as translações ao longo das fibras, se $\alpha = 1$ e composição de rotações e translações ao longo das fibras, se $\alpha \neq 1$.

Vamos ver outro tipo de isometria das esferas de Berger. Dizemos que uma geodésia é *horizontal* se o vetor tangente é ortogonal a E_3 e *vertical* se o vetor tangente é colinear com E_3 . Observe que as geodésicas horizontais e verticais são grandes círculos.

Uma *reflexão geodésica* através de uma geodésica γ de \mathbb{S}_b^3 é uma aplicação que envia cada ponto p em seu oposto em uma geodésica que passa por p e encontra γ ortogonalmente. Mais precisamente, se α é uma geodésica que encontra ortogonalmente γ em $s = 0$ e $\alpha(s_0) = p$ então a reflexão geodésica de p com respeito a γ é o ponto $\alpha(-s_0)$. O seguinte resultado pode ser encontrado em [39] e nos dá outro tipo de isometria nas esferas de Berger.

Proposição 1.2.12. *A reflexão geodésica através de uma geodésica horizontal ou vertical é uma isometria de \mathbb{S}_b^3 .*

Observação 1.2.13. *As esferas de Berger podem ser vistas como hipersuperfícies dos espaços projetivo complexo e hiperbólico complexo. As esferas de Berger \mathbb{S}_b^3 com $\kappa - 4\tau^2 > 0$ são as esferas do plano projetivo complexo, enquanto que as esferas com $\kappa - 4\tau^2 < 0$ são esferas do plano hiperbólico complexo. Em alguns textos são chamadas de as esferas de Berger de primeiro e segundo tipo, respectivamente (ver [38]).*

1.3 O espaço Sol_3

O Sol não tem grupo de isometrias de dimensão quatro, mas tem uma estrutura interessante e será colocado aqui por completude do texto.

O Sol_3 é um grupo de Lie isomorfo ao subgrupo de $GL_3(\mathbb{R}^3)$ formado pelas matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} e^z & 0 & x \\ 0 & e^{-z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $x, y, z \in \mathbb{R}$. Este grupo é solúvel, unimodular e não nilpotente. O Sol_3 pode ser visto como \mathbb{R}^3 dotado com a métrica Riemanniana invariante à esquerda

$$ds^2 = e^{2z}dx^2 + e^{-2z} + dy^2 + dz^2,$$

onde (x, y, z) são as coordenadas canônicas de \mathbb{R}^3 . A estrutura de grupo de Lie é dada pela multiplicação

$$(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + e^{-z_1}x_2, y_1 + e^{z_1}y_2, z_1 + z_2).$$

Referencial Ortonormal

Definimos em Sol_3 um referencial ortonormal invariante à esquerda (E_1, E_2, E_3) , dado por

$$E_1 = e^{-z} \frac{\partial}{\partial x}, \quad E_2 = e^z \frac{\partial}{\partial y}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Este referencial é chamado de *referencial canônico*. Os colchetes são

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= E_1 E_2 - E_2 E_1 \\ &= e^{-z} \frac{\partial}{\partial x} (e^z \frac{\partial}{\partial y}) - e^z \frac{\partial}{\partial x} (e^{-z} \frac{\partial}{\partial y}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [E_3, E_1] &= E_3 E_1 - E_1 E_3 \\ &= \frac{\partial}{\partial z} (e^{-z} \frac{\partial}{\partial x}) - e^{-z} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial}{\partial z}) \\ &= -e^{-z} \frac{\partial}{\partial x} \\ &= -E_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [E_3, E_2] &= E_3 E_2 - E_2 E_3 \\ &= \frac{\partial}{\partial z} (e^z \frac{\partial}{\partial y}) - e^z \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\partial}{\partial z}) \\ &= e^z \frac{\partial}{\partial y} \\ &= E_2. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$[E_1, E_2] = 0, \quad [E_3, E_1] = -E_1, \quad [E_3, E_2] = E_2 .$$

Agora, usando a fórmula de Coszul,

$$2\langle X, \bar{\nabla}_Z Y \rangle = Z\langle X, Y \rangle + Y\langle X, Z \rangle - X\langle Y, Z \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle,$$

podemos calcular a conexão Riemanniana $\bar{\nabla}$ de Sol_3 com respeito ao referencial canônico:

$$\begin{aligned} 2\langle E_1, \bar{\nabla}_{E_1} E_1 \rangle &= \langle E_1, [E_1, E_1] \rangle + \langle E_1, [E_1, E_1] \rangle - \langle E_1, [E_1, E_1] \rangle = 0, \\ 2\langle E_2, \bar{\nabla}_{E_1} E_1 \rangle &= \langle E_1, [E_2, E_1] \rangle + \langle E_1, [E_2, E_1] \rangle - \langle E_2, [E_1, E_1] \rangle = 0, \\ 2\langle E_3, \bar{\nabla}_{E_1} E_1 \rangle &= \langle E_1, [E_3, E_1] \rangle + \langle E_1, [E_3, E_1] \rangle - \langle E_3, [E_1, E_1] \rangle = -2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \langle E_1, \bar{\nabla}_{E_1} E_1 \rangle &= 0, \\ \langle E_2, \bar{\nabla}_{E_1} E_1 \rangle &= 0, \\ \langle E_3, \bar{\nabla}_{E_1} E_1 \rangle &= 1, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\bar{\nabla}_{E_1} E_1 = -E_3.$$

Analogamente, calculamos os demais $\bar{\nabla}_{E_i} E_j$ e encontramos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{E_1} E_1 &= -E_3, \quad \bar{\nabla}_{E_2} E_1 = 0, \quad \bar{\nabla}_{E_3} E_1 = 0, \\ \bar{\nabla}_{E_1} E_2 &= 0, \quad \bar{\nabla}_{E_2} E_2 = E_3, \quad \bar{\nabla}_{E_3} E_2 = 0, \\ \bar{\nabla}_{E_1} E_3 &= E_1, \quad \bar{\nabla}_{E_2} E_3 = -E_2, \quad \bar{\nabla}_{E_3} E_3 = 0. \end{aligned}$$

Vamos calcular a curvatura seccional dos planos (E_2, E_3) , (E_1, E_3) e (E_1, E_2) .

$$\begin{aligned} R(E_2, E_3)E_2 &= \bar{\nabla}_{E_2} \bar{\nabla}_{E_3} E_2 - \bar{\nabla}_{E_3} \bar{\nabla}_{E_2} E_2 + \bar{\nabla}_{[E_2, E_3]} E_2 \\ &= \bar{\nabla}_{E_3} E_3 + \bar{\nabla}_{E_2} E_2 \\ &= -E_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(E_1, E_3)E_1 &= \bar{\nabla}_{E_1} \bar{\nabla}_{E_3} E_1 - \bar{\nabla}_{E_3} \bar{\nabla}_{E_1} E_1 + \bar{\nabla}_{[E_1, E_3]} E_1 \\ &= -\bar{\nabla}_{E_3} (-E_3) + \bar{\nabla}_{E_1} E_1 \\ &= \bar{\nabla}_{E_3} E_3 + \bar{\nabla}_{E_1} E_1 \\ &= E_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(E_1, E_2)E_1 &= \bar{\nabla}_{E_1}\bar{\nabla}_{E_2}E_1 - \bar{\nabla}_{E_2}\bar{\nabla}_{E_1}E_1 - \bar{\nabla}_{[E_1, E_2]}E_1 \\
&= -\bar{\nabla}_{E_3}(-E_3) + \bar{\nabla}_{E_1}E_1 \\
&= \bar{\nabla}_{E_2}E_3 \\
&= -E_2,
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
K(E_2, E_3) &= \langle R(E_2, E_3)E_2, E_3 \rangle \\
&= \langle -E_3, E_3 \rangle \\
&= -1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(E_1, E_3) &= \langle R(E_1, E_3)E_1, E_3 \rangle \\
&= \langle E_3, E_3 \rangle \\
&= 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(E_1, E_2) &= \langle R(E_1, E_2)E_1, E_2 \rangle \\
&= \langle -E_2, E_2 \rangle \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Isometrias do Sol_3

O grupo de isometrias do Sol_3 tem dimensão três. A componente conexa da identidade é gerada pelas seguintes famílias de isometrias:

$$\begin{aligned}
(x, y, z) &\longrightarrow (x + c, y, z) \\
(x, y, z) &\longrightarrow (x, y + c, z) \\
(x, y, z) &\longrightarrow (e^{-c}x, e^c y, z + c).
\end{aligned}$$

Estas isometrias são apenas translações à esquerda no Sol_3 com respeito a estrutura de grupo de Lie acima, isto é, a multiplicação por elementos em Sol_3 . Observe que as translações à direita não são isometrias.

Os campos de Killing correspondentes a estas famílias de isometrias são

$$F_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad F_3 = -x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Estes campos são invariantes à direita.

Uma outra propriedade importante do Sol_3 é que ele admite reflexões. De fato, reflexões Euclidianas nas coordenadas (x, y, z) com respeito ao plano $x = const.$ e $y =$

const. são isometrias do Sol_3 que revertem a orientação. a consequência mais importante disto é que podemos utilizar o Princípio de reflexão de Alexandrov nas direções x e y .

Mais especificamente, o grupo de isotropia na origem $(0, 0, 0)$ é isomorfo ao grupo diedral D_4 e é gerado pelas seguintes isometrias:

$$\sigma : (x, y, z) \mapsto (y, -x, -z),$$

$$\sigma : (x, y, z) \mapsto (-x, y, z).$$

Estas duas isometrias revertem a orientação do Sol_3 ; σ tem ordem 4 e τ tem ordem 2. As reflexões com respeito ao plano $y = 0$ é dado por $\sigma^2\tau$. Para mais detalhes veja [11] e [41].

Finalmente, podemos observar que a aplicação

$$\begin{aligned} Sol_3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto z \end{aligned}$$

é uma fibração Riemanniana.

Capítulo 2

Superfícies em Espaços Homogêneos

Um problema clássico em Geometria Diferencial é determinar quando uma variedade Riemanniana M^n pode ser imersa isometricamente em outra variedade Riemanniana \bar{M}^{n+p} . No caso em que $p = 1$, as equações de Gauss e Codazzi são condições necessárias para existência de tal imersão, relacionando o tensor curvatura R de M , o tensor curvatura \bar{R} de \bar{M} e o operador de forma S de M . Denotando por ∇ a conexão Riemanniana de M essas equações são, respectivamente, as seguintes:

$$\begin{aligned}\langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle SX, Z \rangle \langle SY, W \rangle - \langle SY, Z \rangle \langle SX, W \rangle, \\ \nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y] &= \bar{R}(X, Y)N,\end{aligned}$$

para quaisquer campos de vetores X, Y, Z e W em M .

No caso em que \bar{M}^{n+1} é uma forma espacial, isto é, $\mathbb{S}^{n+1}, \mathbb{H}^{n+1}$ ou \mathbb{R}^{n+1} , as equações de Gauss e Codazzi são condições necessárias e suficientes para M ser localmente imersa isometricamente em \bar{M} . Neste caso, as equações de Gauss e Codazzi envolvem a métrica e a segunda forma fundamental de M . No caso dos espaços homogêneos, essas equações não são suficientes para descrever completamente o comportamento das superfícies imersas em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

Em [9] Benoît Daniel obteve uma condição necessária e suficiente para uma superfície Σ ser localmente imersa isometricamente em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. As equações de Gauss e Codazzi, neste caso, envolvem a segunda forma fundamental, a projeção T do campo de Killing ξ sobre o espaço tangente de Σ e a componente normal ν do campo vertical ξ e podem ser escritas, respectivamente, como

$$\begin{aligned}K &= \det S + \tau + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2, \\ \nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y] &= (\kappa - 4\tau^2)\nu(\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y).\end{aligned}$$

Além delas aparecem duas outras equações que são consequência do fato do campo ξ ser paralelo. Tais equações juntas com as equações de Gauss e Codazzi são as chamadas *equações de compatibilidade* da superfície Σ em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

Na primeira parte deste Capítulo, enunciaremos o Teorema que explicita as equações de compatibilidade e provaremos que são, de fato, condições necessárias a existência da imersão. Em seguida, reescreveremos estas equações para o caso em que temos um parâmetro conforme para a primeira forma fundamental. Essas equações podem ser encontradas em [18]. Também neste capítulo apresentaremos a definição da diferencial de Abresch-Rosenberg Q , que generaliza a diferencial de Hopf em \mathbb{R}^3 , e apresentamos algumas fórmulas relacionando Q , a função ângulo ν , e a curvatura Gaussiana. As equações de compatibilidade e a diferencial de Abresch-Rosenberg são as principais ferramentas usadas na prova dos teoremas principais deste trabalho.

2.1 As Equações de Compatibilidade

Na presente seção, apresentaremos as equações fundamentais de uma imersão de uma superfície nos espaços $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. As principais referências são os trabalhos de B. Daniel [9] e [10] e o trabalho de I. Fernández e P. Mira [18].

No que se segue, dada Σ uma superfície completa, imersa em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ e sejam ds^2 a métrica induzida pela imersão, ∇ a conexão Riemanniana, R o tensor curvatura, K a curvatura Gaussiana e S o operador de forma de Σ . Sejam T um campo de vetores em Σ tal que $\|T\| \leq 1$ e ν uma função real suave em Σ tal que $\nu \leq 1$. Passando para o recobrimento duplo orientável, se necessário, podemos supor que Σ é orientável. Logo, podemos definir sobre Σ uma *estrutura complexa*, que denotaremos por J , da seguinte forma: dada uma base ortonormal positiva $\{e_1, e_2\} \subset T_p\Sigma$, definimos

$$J(e_1) = e_2 \quad e \quad J(e_2) = -e_1.$$

Geometricamente, J representa uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ em $T\Sigma$ no sentido anti-horário.

Dizemos que a upla (ds^2, S, T, ν) *satisfaz as equações de compatibilidade para* $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, se

$$\|T\|^2 + \nu^2 = 1$$

e, além disso, as igualdades

- (i) $K = \det S + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2$;
- (ii) $\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y] = (\kappa - 4\tau^2)\nu(\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y)$;
- (iii) $\nabla_X T = \nu(SX - \tau JX)$;
- (iv) $d\nu(X) + \langle SX - \tau JX, T \rangle = 0$;

são válidas, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Observação 2.1.1. Note que quando $\nu \neq 0$, (iii) implica (iv). De fato, diferenciando a identidade $\langle T, T \rangle + \nu^2 = 1$ e usando (iii), obtemos

$$\langle \nu(SX - \tau JX), T \rangle + d\nu(x)\nu = 0.$$

Logo, se $\nu \neq 0$, obtemos a equação (iv).

É interessante, para o que se segue, escrevermos o tensor curvatura de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ em termos da projeção T do campo de Killing ξ sobre o espaço tangente de Σ . A proposição seguinte é uma consequência da Proposição 1.2.4 e pode ser encontrada em [9].

Proposição 2.1.2. Para $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, temos

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = (\kappa - 3\tau^2)\langle R_0(X, Y)Z, W \rangle + (\kappa - 4\tau^2)\langle R_1(T; X, Y)Z, W \rangle$$

$$\bar{R}(X, Y)N = (\kappa - 4\tau^2)\nu(\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y),$$

onde

$$\nu = \langle N, \xi \rangle,$$

T é a projeção de ξ em $T\Sigma$, isto é,

$$T = \xi - \nu N,$$

e R_0 e R_1 são definidos pelas igualdades (1.3) e (1.4) da Proposição 1.2.4.

Prova. A primeira equação segue diretamente da Proposição 1.2.4 e do fato de que $\langle N, X \rangle = 0$ e $\langle X, T \rangle = \langle X, \xi \rangle$ para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Para a segunda equação, usando novamente o fato acima, temos

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)N &= (\kappa - 3\tau^2)R_o(X, Y)N + (\kappa - 4\tau^2)R_1(\xi; X, Y)N \\ &= (\kappa - 3\tau^2)(\langle X, N \rangle Y - \langle Y, N \rangle X) \\ &\quad + (\kappa - 4\tau^2)(\langle Y, \xi \rangle \langle N, \xi \rangle X + \langle Y, N \rangle \langle X, \xi \rangle \xi \\ &\quad - \langle X, N \rangle \langle Y, \xi \rangle \xi - \langle X, \xi \rangle \langle N, \xi \rangle Y) \\ &= (\kappa - 4\tau^2)(\langle Y, \xi \rangle \langle N, \xi \rangle X - \langle X, \xi \rangle \langle N, \xi \rangle Y) \\ &= (\kappa - 4\tau^2)\nu(\langle Y, \xi \rangle X - \langle X, \xi \rangle Y). \end{aligned}$$

Agora, usando que $\xi = T + \nu N$, obtemos

$$\bar{R}(X, Y)N = (\kappa - 4\tau^2)\nu(\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y),$$

o que conclui a prova. ■

O Teorema a seguir, foi obtido por Benoît Daniel em [9]. Ele afirma que, para garantir a existência de uma imersão isométrica de uma superfície Σ no espaço homogêneo 3-dimensional $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, é necessário e suficiente que Σ satisfaça as equações de compatibilidade para $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

Teorema 2.1.3 (Benoît Daniel, 2007). *Sejam Σ uma variedade Riemanniana orientada, simplesmente conexa, de dimensão dois, ds^2 sua métrica Riemanniana e ∇ sua conexão Riemanniana. Sejam S um campo de operadores simétricos $S_y : T_y\Sigma \rightarrow T_y\Sigma$, T um campo de vetores em Σ e ν uma função suave em Σ tal que $\|T\|^2 + \nu^2 = 1$.*

Sejam ξ um campo vertical em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, onde κ é a curvatura da base da fibração e τ a curvatura fibrado. Então existe uma imersão isométrica $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ tal que o operador de forma com respeito ao normal N associado a f é

$$df \circ S \circ df^{-1}$$

e tal que

$$\xi = df(T) + \nu N$$

se, e somente se, (ds^2, S, T, ν) satisfaz as equações de compatibilidade para $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Neste caso, a imersão é única a menos de isometrias globais de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ que preservam a orientação da fibra e da base da fibração.

A prova de que as equações de compatibilidade são necessárias é feita nos Lemas 2.1.4 e 2.1.5 abaixo. A prova da recíproca é baseada no método do referencial móvel e pode ser encontrada em [9] e [10].

Lema 2.1.4 (Equações de Gauss e Codazzi em uma variedade homogênea). *Para Σ imersa isometricamente em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, temos*

$$K = K_e + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu$$

e

$$\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y] = (\kappa - 4\tau^2)\nu(\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y),$$

onde K é a curvatura de Gauss de Σ e $K_e = \det S$ é a curvatura extrínseca de Σ .

Prova. Sabemos que as equações de Gauss e Codazzi para uma hipersuperfície Riemanniana são

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle - \langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle SX, Z \rangle \langle SY, W \rangle - \langle SX, W \rangle \langle SY, Z \rangle, \quad (2.1)$$

$$\bar{R}(X, Y)N = \nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y]. \quad (2.2)$$

Pela Proposição 2.1.2, temos que

$$\begin{aligned} (\kappa - 3\tau^2)\langle R_0(X, Y)Z, W \rangle + (\kappa - 4\tau^2)\langle R_1(T; X, Y)Z, W \rangle \\ = \langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle SX, Z \rangle \langle SY, W \rangle - \langle SX, W \rangle \langle SY, Z \rangle. \end{aligned}$$

Escolhendo X, Y tais que $\|X\| = \|Y\| = 1$, $\langle X, Y \rangle = 0$ e fazendo $X = Z$, $Y = W$, obtemos as igualdades

$$R_0(X, Y)X = \langle X, X \rangle Y - \langle Y, X \rangle X = \|X\|^2 Y = Y$$

e

$$R_1(T; X, Y)X = \langle Y, T \rangle \langle X, T \rangle X - \langle Y, T \rangle T - \langle X, T \rangle \langle X, T \rangle Y.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle R_0(X, Y)X, Y \rangle &= \langle Y, Y \rangle = 1, \\ \langle R_1(T; X, Y)X, Y \rangle &= -\|T\|^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, uma vez que $T = \xi - \nu N$, temos

$$\begin{aligned} \|T\|^2 &= \langle \xi - \nu N, \xi - \nu N \rangle \\ &= \langle \xi, \xi \rangle - 2\nu \langle \xi, N \rangle + \nu^2 \langle N, N \rangle \\ &= 1 - \nu^2. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\det S = \langle SX, X \rangle \langle SY, Y \rangle - \langle SY, X \rangle \langle SY, X \rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned} K &= \det S + \kappa - 3\tau^2 - (\kappa - 4\tau^2)\|T\|^2 \\ &= \det S + \kappa - 3\tau^2 - (\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2) \\ &= \det S + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$K = \det S + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2,$$

que é a equação de Gauss em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

Finalmente, juntando a Proposição 2.1.2 e a equação (2.2), obtemos a equação de Codazzi

$$\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y] = (\kappa - 4\tau^2)\nu(\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y).$$

■

Pela Proposição 1.2.2, a curvatura fibrado τ nos espaços homogêneos $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ deve satisfazer $\bar{\nabla}_X \xi = \tau X \wedge \xi$. Conseqüentemente, temos que uma imersão em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ satisfaz o seguinte resultado.

Lema 2.1.5. *Para $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, temos*

$$\nabla_X T = \nu(SX - \tau JX) \quad e \quad d\nu(X) + \langle SX - \tau JX, T \rangle = 0.$$

Prova. Como $\xi = T + \nu N$, temos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \xi &= \bar{\nabla}_X (T + \nu N) \\ &= \bar{\nabla}_X T + d\nu N + \nu \bar{\nabla}_X N. \end{aligned}$$

Usando que

$$\bar{\nabla}_X T = \nabla_X T + \langle SX, T \rangle N \quad \text{e} \quad \bar{\nabla}_X N = -SX,$$

obtemos

$$\bar{\nabla}_X \xi = \nabla_X T + \langle SX, T \rangle N + d\nu(X)N - \nu SX.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \xi &= \tau X \wedge \xi \\ &= \tau X \wedge (T + \nu N) \\ &= \tau(X \wedge T + \nu X \wedge N) \\ &= \tau(\langle JX, T \rangle N - \nu JX). \end{aligned}$$

Igualando as expressões, encontramos

$$\langle SX, T \rangle N - \tau \langle JX, T \rangle N + d\nu(X)N + \nabla_X T = \nu(SX - \tau JX),$$

ou seja,

$$(\langle SX - \tau JX, T \rangle + d\nu(X))N + \nabla_X T = \nu(SX - \tau JX).$$

Concluimos então que

$$\nabla_X T = \nu(SX - \tau JX)$$

e

$$d\nu(X) + \langle SX - \tau JX, T \rangle = 0,$$

como afirmado. ■

Agora, vamos reescrever as equações fundamentais para uma imersão $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ em termos de um parâmetro conforme z . Identificaremos $\psi(\Sigma)$ com Σ . Vamos considerar, então, Σ uma superfície de Riemann com estrutura complexa dada pela métrica induzida e z denotará o parâmetro conforme de Σ . Associado a $z = u + iv$, consideraremos os operadores $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_u - i\partial_v)$ e $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_u + i\partial_v)$.

Sejam N um vetor normal unitário de Σ e ξ o campo de Killing unitário vertical de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Chamaremos de *dados fundamentais* de Σ a upla

$$(\lambda, \nu, H, p, A) \in \mathbb{R}^+ \times [-1, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C},$$

onde λ é o fator de conformidade da métrica induzida em Σ , isto é, $\lambda = 2\langle \partial_z, \partial_{\bar{z}} \rangle$, $\nu = \langle N, \xi \rangle$ é a componente normal do campo vertical ξ ; H é a curvatura média de Σ , p é a diferencial de Hopf de Σ , ou seja, $p = \langle -\nabla_{\partial_z} N, \partial_z \rangle dz^2$, e, sendo $T \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ a componente tangente do campo vertical ξ , isto é, $T = \xi - \nu N$, temos $A := \langle \xi, \partial_z \rangle = \langle T, \partial_z \rangle$.

Em termos do parâmetro conforme complexo z , a primeira e a segunda formas fundamentais de Σ são dadas por

$$I = \lambda|dz|^2,$$

$$II = pdz^2 + \lambda H|dz|^2 + \bar{p}d\bar{z}^2,$$

respectivamente. Assim, temos

$$II(\partial_z, \partial_z) = \langle S(\partial_z), \partial_z \rangle = p, \quad II(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) = \langle S(\partial_z), \partial_{\bar{z}} \rangle = \frac{\lambda H}{2}. \quad (2.3)$$

Além disso, como $A = \langle T, \partial_z \rangle$ e $I = \lambda|dz|^2 = \frac{\lambda}{2}(dzd\bar{z} + d\bar{z}dz)$, temos que

$$A = \langle T, \partial_z \rangle = I(T, \partial_z) = \frac{\lambda}{2}d\bar{z}(T)$$

e

$$\bar{A} = \langle T, \partial_{\bar{z}} \rangle = I(T, \partial_{\bar{z}}) = \frac{\lambda}{2}dz(T).$$

Como $T \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, podemos escrever

$$T = a\partial_z + b\partial_{\bar{z}}.$$

Então

$$dz(T) = dz(a\partial_z + b\partial_{\bar{z}}) = a \quad e \quad d\bar{z}(T) = d\bar{z}(a\partial_z + b\partial_{\bar{z}}) = b.$$

Logo,

$$T = \frac{2}{\lambda}(\bar{A}\partial_z + A\partial_{\bar{z}}). \quad (2.4)$$

Lema 2.1.6. *As seguintes relações intrínsecas em Σ são satisfeitas:*

- 1) $\langle \partial_z, \partial_z \rangle = 0;$
- 2) $\langle \partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}} \rangle = 0;$
- 3) $\langle \partial_z, \partial_{\bar{z}} \rangle = \frac{\lambda}{2};$
- 4) $K = \frac{-2(\log \lambda)_{z\bar{z}}}{\lambda};$
- 5) $\nabla_{\partial_z} \partial_z = \frac{\lambda_z}{\lambda} \partial_z;$
- 6) $\nabla_{\partial_z} \partial_{\bar{z}} = \nabla_{\partial_{\bar{z}}} \partial_z = 0;$
- 7) $J(\partial_z) = i\partial_z.$

Prova. Como $I = \langle ., . \rangle = \lambda |dz^2|$, temos as igualdades 1), 2) e 3).

$$\langle \partial_z, \partial_z \rangle = I(\partial_z, \partial_z) = 0, \quad \langle \partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}} \rangle = I(\partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}}) = 0 \quad \text{e} \quad \langle \partial_z, \partial_{\bar{z}} \rangle = I(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) = \frac{\lambda}{2}.$$

Agora, tendo em conta que (ver [7], pg 283)

$$K = -\frac{1}{2\lambda} \Delta \log \lambda$$

e

$$\Delta(\log \lambda) = 4(\log \lambda)_{z\bar{z}},$$

encontramos 4)

$$K = \frac{-2(\log \lambda)_{z\bar{z}}}{\lambda}.$$

Para provar as demais igualdades, expressamos os coeficientes da conexão ∇ associados a z e \bar{z} como

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_z} \partial_z &= \mathbb{C}\Gamma_{11}^1 \partial_z + \mathbb{C}\Gamma_{11}^2 \partial_{\bar{z}}, \\ \nabla_{\partial_z} \partial_{\bar{z}} &= \mathbb{C}\Gamma_{12}^1 \partial_z + \mathbb{C}\Gamma_{12}^2 \partial_{\bar{z}}, \\ \nabla_{\partial_{\bar{z}}} \partial_z &= \mathbb{C}\Gamma_{22}^1 \partial_z + \mathbb{C}\Gamma_{22}^2 \partial_{\bar{z}}, \end{aligned}$$

onde $\mathbb{C}\Gamma_{ij}^k$ são os símbolos de Chistoffel da conexão associados a parametrização (z, \bar{z}) .

De fato, escrevendo $z = u + iv$, temos

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_z} \partial_z &= \frac{1}{4} \nabla_{\partial_{u-iv}} (\partial_{u-iv}) \\ &= \frac{1}{4} ((\Gamma_{11}^1 - 2i\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^1) \partial_u + (\Gamma_{11}^2 - 2i\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^2) \partial_v), \\ &= \frac{1}{4} ((\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 + 2\Gamma_{12}^2) + i(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1)) \partial_z \\ &\quad + \frac{1}{4} ((\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 - 2\Gamma_{12}^2) - i(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 + 2\Gamma_{12}^1)) \partial_{\bar{z}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{4} ((\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 + 2\Gamma_{12}^2) + i(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1)), \\ \mathbb{C}\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{4} ((\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 - 2\Gamma_{12}^2) - i(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 + 2\Gamma_{12}^1)). \end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{4} (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 + i(\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2)); \\ \mathbb{C}\Gamma_{11}^1 &= \overline{\mathbb{C}\Gamma_{22}^2}; \\ \mathbb{C}\Gamma_{11}^2 &= \overline{\mathbb{C}\Gamma_{22}^1}; \\ \mathbb{C}\Gamma_{12}^1 &= \overline{\mathbb{C}\Gamma_{12}^2}; \end{aligned}$$

Então, podemos determinar $\nabla_{\partial_z} \partial_z, \nabla_{\partial_z} \partial_{\bar{z}}, \nabla_{\partial_{\bar{z}}} \partial_z$ e $\nabla_{\partial_{\bar{z}}} \partial_{\bar{z}}$. Como a parametrização é isotérmica, os símbolos de Christoffel são dados pelas igualdade.

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^1 &= \frac{E_v}{2E}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{G_u}{2E}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{E_u}{2E}, \\ \Gamma_{22}^2 &= -\frac{E_v}{2G}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{G_u}{G}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{G_v}{2G}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{G_u}{2G},\end{aligned}$$

e, como $\mathbb{C}\Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda_z}{\lambda}$ e $\mathbb{C}\Gamma_{11}^2 = 0$, temos que

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_z} \partial_z &= \mathbb{C}\Gamma_{11}^1 \partial_z + \mathbb{C}\Gamma_{11}^2 \partial_{\bar{z}} \\ &= \frac{\lambda_z}{\lambda} \partial_z.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\nabla_{\partial_z} \partial_{\bar{z}} = \nabla_{\partial_{\bar{z}}} \partial_z = 0 \quad e \quad \nabla_{\partial_{\bar{z}}} \partial_{\bar{z}} = \frac{\lambda_{\bar{z}}}{\lambda}.$$

■

O Teorema a seguir, foi obtido em [18]. Ele apresenta as equações de compatibilidade para o caso em que temos um parâmetro conforme para a primeira forma fundamental.

Teorema 2.1.7 (I.Fernández e P. Mira). *Os dados fundamentais de uma imersão $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ satisfazem as seguintes condições de integrabilidade*

$$K = K_e + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2; \quad (2.5)$$

$$p_{\bar{z}} = \frac{\lambda}{2}(H_z + \nu A(\kappa - 4\tau^2)); \quad (2.6)$$

$$A_{\bar{z}} = \frac{\nu\lambda}{2}(H + i\tau); \quad (2.7)$$

$$\nu_z = -(H - i\tau)A - \frac{2p\bar{A}}{\lambda}; \quad (2.8)$$

$$|A|^2 = \frac{1}{4}\lambda(1 - \nu^2). \quad (2.9)$$

Reciprocamente, se escolhermos funções $\lambda, \nu, H : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$, com $\lambda > 0$, $-1 \leq \nu \leq 1$ e $p, A : \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ em uma superfície de Riemann, simplesmente conexa, Σ satisfazendo as condições de integrabilidade acima para constantes κ, τ , com $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$, então, a menos de congruência, existe uma única superfície $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ cujos dados fundamentais são (λ, ν, H, p, A) .

Prova. O Teorema 2.1.3, afirma que uma condição necessária e suficiente para a existência de uma imersão isométrica é dada em termos das equações de compatibilidade. Assim, para provar este teorema verificaremos que as equações fundamentais (2.5) à (2.8) são equivalentes as equações de compatibilidade.

Sejam, então (λ, ν, H, p, A) os dados fundamentais da superfície Σ . Vamos mostrar que (λ, ν, H, p, A) satisfaz as equações (2.5) à (2.8) se e, somente se, $(S, T, \nabla, \nu, J, K)$ verifica as equações de compatibilidade.

Primeiramente, vamos verificar que $\|T\|^2 + \nu^2 = 1$ é equivalente à (2.9). Como, por (2.4),

$$T = \frac{2}{\lambda}(\bar{A}\partial_z + A\partial_{\bar{z}}),$$

temos que

$$\left\| \frac{2}{\lambda}(\bar{A}\partial_z + A\partial_{\bar{z}}) \right\|^2 = \lambda|A|^2,$$

e portanto,

$$\|T\|^2 + \nu^2 = 1 \iff \left\| \frac{2}{\lambda}(\bar{A}\partial_z + A\partial_{\bar{z}}) \right\|^2 = 1 - \nu^2 \iff \frac{4|A|^2}{\lambda} = 1 - \nu^2.$$

Agora, vamos verificar que (iv) é equivalente à (2.7). Como (iv) é uma expressão linear em X , é suficiente mostrar que essa igualdade vale para $X = \partial_z$. Então, fazendo $X = \partial_z$ em (iv), temos

$$d\nu(\partial_z) + \langle S(\partial_z) - \tau J(\partial_z), T \rangle = 0. \quad (2.10)$$

Como $d\nu = \nu_z dz + \nu_{\bar{z}} d\bar{z}$, encontramos que $d\nu(\partial_z) = \nu_z$. Substituindo $d\nu(\partial_z) = \nu_z$, $J(\partial_z) = i\partial_z$ e $T = \frac{2}{\lambda}(\bar{A}\partial_z + A\partial_{\bar{z}})$ na expressão (2.10) acima, temos

$$\begin{aligned} \nu_z &= -\langle S(\partial_z) - \tau J(\partial_z), \frac{2}{\lambda}(\bar{A}\partial_z + A\partial_{\bar{z}}) \rangle - \langle i\tau\partial_z, \frac{2}{\lambda}(\bar{A}\partial_z + A\partial_{\bar{z}}) \rangle \\ &= -\frac{2}{\lambda}\bar{A}\langle S(\partial_z), \partial_z - \frac{2}{\lambda}A \rangle S(\partial_z), \partial_{\bar{z}} - i\tau A \\ &= -\frac{2}{\lambda}\bar{A}p - \frac{2}{\lambda}A\frac{\lambda}{2}H + i\tau A \\ &= -(H - i\tau)A - \frac{2}{\lambda}p\bar{A}. \end{aligned}$$

Ou seja, (iv) é equivalente à (2.7).

Analogamente, como (iii) é linear em X , é suficiente mostrar que (iii) é válido para $X = \partial_z$. Isto é equivalente a mostrar que

$$\langle \nabla_{\partial_z} T, \partial_{\bar{z}} \rangle = \frac{\nu\lambda}{2}(H - i\tau) \quad \text{e} \quad \langle \nabla_{\partial_z} T, \partial_z \rangle = \nu p.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\partial_z} T, \partial_{\bar{z}} \rangle &= \langle \nu(S(\partial_z) - \tau J(\partial_z)), \partial_{\bar{z}} \rangle \\ &= \nu \langle S(\partial_z) - i\tau\partial_z, \partial_{\bar{z}} \rangle \\ &= \nu \langle S(\partial_z), \partial_{\bar{z}} \rangle - \nu i\tau \langle p\partial_z, \partial_{\bar{z}} \rangle \\ &= \nu \frac{\lambda H}{2} - \nu i\tau \frac{\lambda}{2} \\ &= \frac{\nu\lambda}{2}(H - i\tau) \end{aligned} \quad (2.11)$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{\partial_z} T, \partial_z \rangle &= \langle \nu(S(\partial_z) - \tau J(\partial_z)), \partial_z \rangle \\
&= \nu \langle S(\partial_z), \partial_z \rangle - i\tau \langle \partial_z, \partial_z \rangle \\
&= \nu p.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Observe que (2.11) é precisamente o conjugado da expressão (2.6). Além disso, como a conexão é compatível com a métrica, temos

$$\begin{aligned}
\partial_z \langle T, \partial_z \rangle &= \langle \nabla_{\partial_z} T, \partial_z \rangle + \langle T, \nabla_{\partial_z} \partial_z \rangle \\
\partial_z A &= \langle \nabla_{\partial_z} T, \partial_z \rangle + \langle T, \frac{\lambda_z}{\lambda} \partial_z \rangle \\
&= \langle \nabla_{\partial_z} T, \partial_z \rangle + \frac{\lambda_z}{\lambda} \langle T, \partial_z \rangle.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \nabla_{\partial_z} T, \partial_z \rangle = A_z - \frac{\lambda_z}{\lambda} \langle T, \partial_z \rangle,$$

e podemos reescrever (2.12) como

$$A_z - \frac{\lambda_z}{\lambda} \langle T, \partial_z \rangle = \nu p. \tag{2.13}$$

Agora, derivando (2.8) com respeito a z , obtemos

$$\frac{(A_z \bar{z} + A \bar{A}_z) \lambda - A \bar{A} \lambda_z}{\lambda^2} = -\frac{\nu \nu_z}{2}.$$

Substituindo (2.6) e (2.7) na expressão acima obtemos (2.13). Ou seja, (iii) é obtida a partir de (2.6), (2.7) e (2.8).

A seguir, vamos mostrar que (ii) é equivalente à (2.5). Como (2.8) é uma expressão bilinear e anti-simétrica nas variáveis X e Y é suficiente verificar (2.8) para $X = \partial_z$ e $Y = \partial_{\bar{z}}$. Assim, temos

$$\nabla_{\partial_z} S(\partial_{\bar{z}}) - \nabla_{\partial_{\bar{z}}} S(\partial_z) - S([\partial_z, \partial_{\bar{z}}]) = (\kappa - 4\tau^2) \nu (\langle \partial_{\bar{z}}, T \rangle \partial_z - \langle \partial_z, T \rangle \partial_{\bar{z}}).$$

Uma vez que vale

$$S([\partial_z, \partial_{\bar{z}}]) = \nabla_{\partial_{\bar{z}}} \partial_z - \nabla_{\partial_z} \partial_{\bar{z}} = 0,$$

encontramos que

$$\nabla_{\partial_z} S(\partial_{\bar{z}}) - \nabla_{\partial_{\bar{z}}} S(\partial_z) = (\kappa - 4\tau^2) \nu (\langle \partial_{\bar{z}}, T \rangle \partial_z - \langle \partial_z, T \rangle \partial_{\bar{z}}).$$

Agora, tomando o produto interno dessa expressão por ∂_z , e usando que

$$\langle \partial_z, \partial_z \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \partial_{\bar{z}}, \partial_z \rangle = \frac{\lambda}{2},$$

obtemos

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{\partial_z} S(\partial_{\bar{z}}) - \nabla_{\partial_{\bar{z}}} S(\partial_z), \partial_z \rangle &= (\kappa - 4\tau^2)\nu \langle \langle \partial_{\bar{z}}, T \rangle \partial_z, \partial_z \rangle - \langle \langle \partial_z, T \rangle \partial_{\bar{z}}, \partial_z \rangle \\ \langle \nabla_{\partial_z} S(\partial_{\bar{z}}), \partial_z \rangle - \langle \nabla_{\partial_{\bar{z}}} S(\partial_z), \partial_z \rangle &= (\kappa - 4\tau^2)\nu \langle \partial_z, T \rangle \frac{\lambda}{2}.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Como

$$p = \langle S(\partial_z), \partial_z \rangle \quad \text{e} \quad \nabla_{\partial_{\bar{z}}} \partial_z = 0,$$

temos

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{z}} \langle S(\partial_z), \partial_z \rangle &= \langle \nabla_{\partial_{\bar{z}}} S(\partial_z), \partial_z \rangle + \langle S(\partial_z), \nabla_{\partial_{\bar{z}}} \partial_z \rangle, \\ p_{\bar{z}} &= \langle \nabla_{\partial_{\bar{z}}} S(\partial_z), \partial_z \rangle.\end{aligned}$$

Além disso, como

$$\langle S(\partial_{\bar{z}}), \partial_z \rangle = I(\partial_{\bar{z}}, \partial_z) = -\frac{\lambda H}{2}$$

e

$$\begin{aligned}\partial_z \langle S(\partial_{\bar{z}}), \partial_z \rangle &= \langle \nabla_{\partial_z} S(\partial_{\bar{z}}), \partial_z \rangle + \langle S(\partial_{\bar{z}}), \nabla_{\partial_z} \partial_z \rangle \\ &= \langle \nabla_{\partial_z} S(\partial_{\bar{z}}), \partial_z \rangle + \left\langle S(\partial_{\bar{z}}), \frac{\lambda_z}{\lambda} \partial_z \right\rangle,\end{aligned}$$

concluimos que

$$\langle \nabla_{\partial_z} S(\partial_{\bar{z}}), \partial_z \rangle = -\frac{\lambda H_z}{2}.$$

Substituindo esta expressão em (2.14) obtemos (2.5).

Finalmente, como

$$E = G = 0, \quad F = \frac{\lambda}{2}, \quad e = p, \quad g = \bar{p}, \quad e \quad f = \frac{\lambda H}{2},$$

obtemos

$$\det S = K(I, II) \quad (2.15)$$

$$= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{p\bar{p} - \frac{\lambda^2 H^2}{4}}{\lambda^2 - \frac{4|P|^2}{\lambda^2}} = H^2 - \frac{4|P|^2}{\lambda^2}.$$

mais ainda, tendo em conta que

$$K = \frac{-2(\log \lambda)_{z\bar{z}}}{\lambda},$$

podemos escrever a equação de Gauss (i) como

$$(\log \lambda)_{z\bar{z}} = \frac{2|p|^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{2}\nu^2(\kappa - 4\tau^2) - \frac{\lambda}{2}(H^2 + \tau^2). \quad (2.17)$$

Derivando (2.13) com respeito a \bar{z} , obtemos

$$A_{z\bar{z}} - \left[\frac{(\lambda_{z\bar{z}}A + \lambda_z A_{\bar{z}}) - \lambda_z A \lambda_{\bar{z}}}{\lambda^2} \right] = \nu_{\bar{z}} p + \nu p_{\bar{z}}.$$

substituindo (2.5), (2.6) e (2.7) na expressão acima, obtemos exatamente a expressão (2.17). Ou seja, (i) é obtido a partir das equações (2.5), (2.6) e (2.7).

Portanto as equações (2.5) à (2.8) são equivalentes às equações compatibilidade, e o resultado segue do Teorema 2.1.3. ■

2.2 A Diferencial de Abresch-Rosenberg

Em 1955, H. Hopf construiu uma diferencial quadrática definida sobre superfícies de \mathbb{R}^3 que, aliado ao fato de ser holomorfa quando a curvatura média da superfície é constante, é a principal ferramenta para demonstrar o seguinte importante resultado.

Teorema(Heinz Hopf). *Seja M uma superfície compacta de gênero zero imersa em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante. Então M é isométrica à esfera redonda.*

Este resultado foi estendido para esferas \mathbb{S}^2 de curvatura média constante na esfera \mathbb{S}^3 e no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 .

Em 2004, U. Abresch e H. Rosenberg em [AR1] e [AR2] generalizaram a definição da diferencial de Hopf para superfícies de curvatura média constante nos espaços produtos $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e, mais geralmente, para espaços homogêneos tridimensional com grupo de isometrias de dimensão quatro e, conseqüentemente, estabeleceram uma generalização do Teorema de Hopf. Em verdade, eles provaram o

Teorema(Abresch-Rosenberg). *Qualquer imersão de uma esfera \mathbb{S}^2 de curvatura média constante, em um espaço homogêneo simplesmente conexo, (M^3, g) com grupo de isometrias no mínimo de dimensão quatro, é de fato uma esfera de curvatura média constante, mergulhada e rotacionalmente invariante.*

A diferencial de Abresch-Rosenberg para uma imersão $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ é a diferencial quadrática globalmente definida por

$$Qdz^2 = (2(H + i\tau)p - (\kappa - 4\tau^2)A^2)dz^2. \quad (2.18)$$

Ao contrário do que acontece em \mathbb{R}^3 , onde a diferencial de Hopf ser holomorfa implica necessariamente que a superfície tem curvatura média constante, existem superfícies em alguns espaços homogêneos $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, com diferencial de Abresch-Rosenberg holomorfa e curvatura média não constante. Para mais detalhes ver [18]. Em verdade, para a diferencial de Abresch-Rosenberg, temos o seguinte.

Teorema 2.2.1 ([12]). Qdz^2 é uma diferencial quadrática holomorfa em qualquer superfície de curvatura média constante em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

Prova. Derivando Q em relação a \bar{z} , encontramos

$$Q_{\bar{z}} = 2H_{\bar{z}}p + 2(H + i\tau)p_{\bar{z}} - (\kappa - 4\tau^2)2AA_{\bar{z}}.$$

Substituindo as equações (2.6) e (2.7), obtemos

$$Q_{\bar{z}} = \lambda H_z(H + i\tau) + 2H_{\bar{z}}p.$$

Como Σ tem curvatura média constante, temos que

$$H_z = H_{\bar{z}} = 0$$

e, portanto,

$$Q_{\bar{z}} = 0.$$

Ou seja, Q é holomorfa. ■

Associada a diferencial de Abresch-Rosenberg, definimos sobre uma superfície de curvatura média constante Σ , uma função suave $q : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por

$$q = \frac{4|Q|^2}{\lambda^2}.$$

Como Q é holomorfa em qualquer superfície de curvatura média constante, temos que q também é holomorfa. Logo, q é identicamente nula ou os zeros de q são isolados. Note que q não depende do parâmetro conforme z . Assim, q é definida globalmente em Σ .

Para o resultado que se segue vamos redefinir a diferencial de Abresch-Rosenberg para a imersão de uma superfície $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ como sendo a diferencial quadrática

$$Qdz^2 = \left(2p - \frac{\kappa - 4\tau^2}{H + i\tau} A^2 \right) dz^2,$$

definida longe dos pontos com $H = 0$ se $\tau = 0$. Assim, para a Proposição que se segue, assumiremos que as superfícies tem curvatura média não nula se $\tau = 0$. Note que não há perda de generalidade com isso, pois nosso estudo é basicamente local. Estamos apenas excluindo as superfícies mínimas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, que são melhores estudadas por outros métodos.

Observe ainda que, definir a diferencial de Abresch-Rosenberg como acima, deixa claro que tal diferencial é uma perturbação da diferencial de Hopf. Com esta definição a equação de Codazzi pode ser reescrita da seguinte maneira.

$$Q_{\bar{z}} = \lambda H_z + (\kappa - 4\tau^2) \frac{H_{\bar{z}} A^2}{(H + i\tau)^2}. \quad (2.19)$$

Como comentamos acima, em geral, não é verdade que a diferencial de Abresch-Rosenberg em uma superfície $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ ser holomorfa implica que a curvatura média é constante. Entretanto, para alguns casos particulares o fato acima é verdadeira. Por exemplo para esferas de Berger que satisfazem $\kappa - 8\tau^2 < 0$. Veja [18]. O fato acima também é verdade para as superfícies com diferencial de Abresch-Rosenberg identicamente nula. Isto é o que afirma a proposição a seguir.

Proposição 2.2.2. *Qualquer superfície em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ com diferencial de Abresch-Rosenberg nula é uma superfície de curvatura média constante.*

Prova. Suponha que H não é constante em um aberto $U \subset \Sigma$. Então podemos supor, sem perda de generalidade que $H_z \neq 0$ e $A \neq 0$, do contrário teríamos $\nu^2 = 1$ e $H = \tau = 0$. Por hipótese $Q \equiv 0$, então

$$2p = \frac{\kappa - 4\tau^2}{H + i\tau} A^2 \quad (2.20)$$

e a equação de Codazzi (2.19) fica

$$\lambda H_z = -(\kappa - 4\tau^2) \frac{H_{\bar{z}} A^2}{(H + i\tau)^2},$$

o que implica com

$$\frac{A^2}{\lambda} H_z = \frac{(H + i\tau)^2}{\kappa - 4\tau^2} H_z.$$

Como $H_z \neq 0$, ficamos

$$\frac{A^2}{\lambda} = \frac{(H + i\tau)^2}{\kappa - 4\tau^2}.$$

Tomando o módulo na expressão acima, obtemos

$$\frac{|A|^2}{\lambda} = \frac{H^2 + \tau^2}{|\kappa - 4\tau^2|}. \quad (2.21)$$

Agora, substituindo as equações (2.20) e (2.21) na equação (2.8) e usando o fato que $\frac{|w|^2}{w} = \bar{w}$ para todo número complexo w , temos

$$\begin{aligned} -\nu_z &= (H - i\tau)A + \frac{2p\bar{A}}{\lambda} \\ &= (H - i\tau)A + \frac{\kappa - 4\tau^2}{H + i\tau} A^2 \frac{\bar{A}}{\lambda} \\ &= (H - i\tau)A + \frac{\kappa - 4\tau^2}{H + i\tau} A \frac{|A|^2}{\lambda} \\ &= (H - i\tau)A + A \frac{\kappa - 4\tau^2}{|\kappa - 4\tau^2|} \cdot \frac{H^2 + \tau^2}{H + i\tau} \\ &= (H - i\tau)A \left(1 + \frac{\kappa - 4\tau^2}{|\kappa - 4\tau^2|} \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$-\nu_z = (H - i\tau)A \left(1 + \frac{\kappa - 4\tau^2}{|\kappa - 4\tau^2|} \right). \quad (2.22)$$

Consequentemente, se $\kappa - 4\tau^2 < 0$, inferimos que $\nu_z \equiv 0$, ou seja, ν é constante. Por outro lado, juntando as equações (2.21) e (2.9), concluímos que

$$1 - \nu^2 = \frac{4(H^2 + \tau^2)}{|\kappa - 4\tau^2|}. \quad (2.23)$$

Como ν é constante, por (2.23), H deve ser constante, o que não é possível, pois estamos supondo H não constante.

Se $\kappa - 4\tau^2 > 0$, usando as expressões (2.19) e (2.21), encontramos

$$\begin{aligned} H_z(H + i\tau)\bar{A} &= -\frac{\kappa - 4\tau^2}{H + i\tau} H_{\bar{z}}A \frac{|A|^2}{\lambda} \\ &= -\frac{\kappa - 4\tau^2}{H + i\tau} H_{\bar{z}}A \frac{H^2 + \tau^2}{\kappa - 4\tau^2} \\ &= -\frac{H^2 + \tau^2}{H + i\tau} H_{\bar{z}}A \\ &= -H_{\bar{z}}(H - i\tau)A. \end{aligned}$$

Isto é,

$$H_z(H + i\tau)\bar{A} = -\overline{H_z(H + i\tau)\bar{A}}.$$

Logo, $H_z(H + i\tau)\bar{A} \in i\mathbb{R}$.

Agora, diferenciando (2.23), encontramos que

$$\nu_z = \frac{4HH_z}{(\kappa - 4\tau^2)\nu}.$$

Logo,

$$\nu_z(H + i\tau\bar{A}) = \frac{4H}{(\kappa - 4\tau^2)}\nu \cdot H_z(H + \tau)\bar{A} \in i\mathbb{R}.$$

Por outro lado, usando a expressão (2.22), obtemos

$$\nu_z(H + i\tau)\bar{A} = -(H^2 + \tau^2)|A|^2 \left(1 + \frac{\kappa - 4\tau^2}{|\kappa - 4\tau^2|} \right) \in \mathbb{R} - \{0\}$$

o que é uma contradição. Portanto H é constante. ■

O próximo Lema dá as expressões para o Laplaciano e para norma do gradiente da função ângulo ν , bem como relaciona a função q com a curvatura Gaussiana K . Antes, vamos ver como ficam as expressões do gradiente e do Laplaciano em termos da métrica $\langle \cdot \rangle = \lambda|dz|^2$. A matriz dos coeficientes da métrica $\langle \cdot \rangle$ é dada por

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda}{2} \\ \frac{\lambda}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

e a sua matriz inversa é

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\lambda} \\ \frac{2}{\lambda} & 0 \end{pmatrix}.$$

Tendo em conta que as expressões do gradiente e do Laplaciano de uma função f sobre uma variedade Riemanianna (M, g) , em termos da métrica g , são dadas por (ver [8]):

$$\nabla f = \sum_{k,l} (g^{kl} \partial_l f) \partial_k$$

e

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j,k=1}^2 \partial_j (g^{jk} \sqrt{g} \partial_k f),$$

temos

$$\begin{aligned} \nabla f &= \sum_{k,l} (g^{kl} \partial_l f) \partial_k \\ &= (g^{11} \partial_1 f + g^{12} \partial_2 f) \partial_1 + (g^{21} \partial_1 f + g^{22} \partial_2 f) \partial_2 \\ &= (g^{11} \partial_z f + g^{12} \partial_{\bar{z}} f) \partial_z + (g^{21} \partial_z f + g^{22} \partial_{\bar{z}} f) \partial_{\bar{z}} \\ &= \frac{1}{\lambda} f_{\bar{z}} \partial_z + \frac{1}{\lambda} f_z \partial_{\bar{z}}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\nabla f = \frac{1}{\lambda} f_{\bar{z}} \partial_z + \frac{1}{\lambda} f_z \partial_{\bar{z}}.$$

E, para o Laplaciano de f , ficamos com

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j,k=1}^2 \partial_j (g^{jk} \sqrt{g} \partial_k f) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\lambda^2/4}} \sum_{j=1}^2 \left(\partial_j (g^{j1} \frac{\lambda}{2} i \partial_1 f) + \partial_j (g^{j2} \frac{\lambda}{2} i \partial_2 f) \right) \\ &= \frac{2}{\lambda i} (i \partial_z (f_{\bar{z}}) + i \partial_z (f_z)) \\ &= \frac{2}{\lambda} (f_{\bar{z}z} + f_{z\bar{z}}) \\ &= \frac{4}{\lambda} f_{z\bar{z}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta f = \frac{4}{\lambda} f_{z\bar{z}}.$$

Com isso podemos apresentar a prova do seguinte lema.

Lema 2.2.3. *Seja Σ uma superfície imersa em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Então as seguintes equações são satisfeitas:*

$$\|\nabla\nu\|^2 = \frac{4H^2 + \kappa - (\kappa - \tau^2)\nu^2}{4(\kappa - \tau^2)} (4(H^2 - H_e) + (\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2)) - \frac{q}{\kappa - 4\tau^2}; \quad (2.24)$$

$$\Delta\nu = -(4H^2 + 2\tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2) - 2K_e)\nu. \quad (2.25)$$

Além disso, longe dos zeros isolados de q , temos

$$\Delta \ln q = 4K. \quad (2.26)$$

Prova. Usando a equação (2.8) e a igualdade $\bar{\nu}_z = -(H - i\tau)\bar{A} - \frac{2}{\lambda}\bar{p}A$, obtemos

$$\begin{aligned} |\nu_z|^2 &= \nu_z \bar{\nu}_z \\ &= \frac{4}{\lambda^2} |p|^2 |A|^2 + (H^2 + \tau^2) |A|^2 + \frac{2}{\lambda} (H + i\tau) p \bar{A}^2 + \frac{2}{\lambda} (H - i\tau) \bar{p} A. \end{aligned}$$

Como

$$Q = 2(H - i\tau)p - (\kappa - 4\tau^2)A^2,$$

temos que

$$\begin{aligned} |Q|^2 &= Q\bar{Q} \\ &= 4(H^2 + \tau^2)|p|^2 + (\kappa - 4\tau^2)^2 |A|^4 \\ &\quad - (\kappa - 4\tau^2) (2(H + i\tau)p\bar{A}^2 + 2(H - i\tau)\bar{p}A^2). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Mas, como $(\kappa - 4\tau^2) \neq 0$, podemos escrever a expressão acima da seguinte forma

$$2(H + i\tau)p\bar{A}^2 + 2(H - i\tau)\bar{p}A^2 = \frac{4(H^2 + \tau^2)|p|^2}{(\kappa - 4\tau^2)} + \frac{(\kappa - 4\tau^2)^2 |A|^4}{(\kappa - 4\tau^2)} - \frac{|Q|^2}{(\kappa - 4\tau^2)}.$$

Multiplicando esta expressão por $\frac{1}{\lambda}$ e substituindo em $|\nu_z|$, obtemos

$$\begin{aligned} |\nu_z| &= \frac{4}{\lambda^2} |p|^2 |A|^2 + (H^2 + \tau^2) |A|^2 + \frac{(H^2 + \tau^2) 4|p|^2}{(\kappa - 4\tau^2) \lambda} \\ &\quad + \frac{(\kappa - 4\tau^2)^2 |A|^4}{(\kappa - 4\tau^2) \lambda} - \frac{|Q|^2}{\lambda(\kappa - 4\tau^2)}. \end{aligned}$$

Substituindo (2.9) e $4|p|^2 = \lambda(H^2 - K_e)$, temos que

$$\begin{aligned} |\nu_z|^2 &= (H^2 - K_e) \frac{(1 - \nu^2)}{4} \lambda + (H^2 + \tau^2) \frac{(1 - \nu^2)}{4} + (H^2 - K_e) \frac{H^2 + \tau^2}{\kappa - 4\tau^2} \lambda \\ &\quad + (\kappa - 4\tau^2) \frac{(1 - \nu^2)^2}{16} \lambda - \frac{|Q|^2}{\lambda(\kappa - 4\tau^2)}. \end{aligned}$$

Usando que $\|\nabla\nu\|^2 = \frac{4}{\lambda}|\nu_z|^2$ e substituindo $q = \frac{4|Q|^2}{\lambda^2}$, encontramos

$$\begin{aligned} \|\nabla\nu\|^2 = \frac{4}{\lambda}|\nu_z|^2 &= (H^2 - K_e)(1 - \nu^2) + (H^2 + \tau^2)(1 - \nu^2) + 4\left(\frac{H^2 + \tau^2}{\kappa - 4\tau^2}\right)(H^2 - K_e) \\ &\quad + (\kappa - 4\tau^2)\frac{(1 - \nu^2)^2}{4} - \frac{q}{(\kappa - 4\tau^2)} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} &= (H^2 - K_e)\left((1 - \nu^2) + 4\frac{H^2 + \tau^2}{\kappa - 4\tau^2}\right) \\ &\quad + (1 - \nu^2)(\kappa - 4\tau^2)\left(\frac{1 - \nu^2}{4} + \frac{H^2 + \tau^2}{\kappa - 4\tau^2}\right) - \frac{q}{\kappa - 4\tau^2} \\ &= \left(\frac{1 - \nu^2}{4} + \frac{H^2 + \tau^2}{\kappa - 4\tau^2}\right)\left(4(H^2 - K_e) + (\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2) - \frac{q}{\kappa - 4\tau^2}\right) \\ &= \frac{4H^2 + \kappa - (\kappa - 4\tau^2)\nu^2}{4(\kappa - 4\tau^2)}\left(4(H^2 - K_e) + (\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2) - \frac{q}{\kappa - 4\tau^2}\right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|\nabla\nu\|^2 &= \frac{4H^2 + \kappa - (\kappa - 4\tau^2)\nu^2}{4(\kappa - 4\tau^2)}(4(H^2 - K_e) + (\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2)) \\ &\quad - \frac{q}{\kappa - 4\tau^2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Por outro lado, derivando a equação $\nu_z = -(H - i\tau)A - \frac{2}{\lambda}p\bar{A}$ com respeito a \bar{z} , obtemos

$$\nu_{z\bar{z}} = -(H - i\tau)A_{\bar{z}} - \frac{2}{\lambda}p_{\bar{z}}\bar{A} - \frac{2}{\lambda}p\bar{A}_{\bar{z}} + \frac{2}{\lambda^2}p\bar{A}\lambda_{\bar{z}}.$$

Observando que $\bar{A}_{\bar{z}} = \bar{A}_z$, temos

$$\bar{A}_{\bar{z}} = \bar{A}_z = \frac{\lambda_{\bar{z}}}{\lambda}\bar{A} + \bar{p}\nu.$$

Usando as equações (2.6), (2.7) e que H é constante, temos

$$\nu_{z\bar{z}} = -\frac{(H^2 + \tau^2)}{2}\lambda\nu - (\kappa - 4\tau^2)\nu|A|^2 + \frac{2}{\lambda}|p|^2\nu.$$

E, substituindo (2.9), obtemos

$$\begin{aligned} \nu_{z\bar{z}} &= -\frac{(H^2 + \tau^2)}{2}\lambda\nu - \frac{\lambda\nu}{4}(\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2) + \frac{2}{\lambda}|p|^2\nu \\ &= -\frac{\lambda\nu}{4}\left((\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2) + \frac{8|p|^2}{\lambda^2} + 2(H^2 + \tau^2)\right). \end{aligned}$$

Como $\Delta\nu = \frac{4}{\lambda}\nu_{z\bar{z}}$ e $H^2 - K_e = \frac{4|p|^2}{\lambda^2}$, obtemos

$$\nabla\nu = -((\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2) + 2(H^2 - K_e) + 2(H^2 + \tau^2))\nu.$$

Finalmente, seja $p \in \Sigma$ tal que $Q(p) \neq 0$. Então

$$\begin{aligned}\Delta \ln q &= \Delta \ln \frac{4|Q|^2}{\lambda^2} \\ &= \Delta 4|Q|^2 - \Delta \ln \lambda^2 \\ &= \Delta 4|Q|^2 - 2 \ln \lambda.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Delta \ln |Q|^2 &= (\ln |Q|^2)_{z\bar{z}} \\ &= (\ln(Q\bar{Q}))_{z\bar{z}} \\ &= \left(\frac{Q_z \bar{Q} + Q \bar{Q}_z}{|Q|^2} \right)_{\bar{z}} \\ &= \left(\frac{Q_z \bar{Q}}{Q\bar{Q}} + \frac{Q \bar{Q}_z}{Q\bar{Q}} \right)_{\bar{z}} \\ &= \left(\frac{Q_z}{Q} \right)_{\bar{z}} = 0.\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\Delta \ln q = -2\Delta \ln \lambda.$$

Sabendo que

$$K = -\frac{2(\ln f)_{z\bar{z}}}{\lambda} \quad e \quad \Delta f = \frac{4}{\lambda}(\ln f)_{z\bar{z}},$$

temos que

$$2K(I) = -\Delta(\ln \lambda), \tag{2.31}$$

e, assim,

$$\Delta \ln q = 4K(I),$$

como afirmado. ■

Capítulo 3

Classificações de H-superfícies completas em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$

Em 1966, Tilla Klotz e Robert Ossermann classificaram, em [16], as superfícies de curvatura média constante imersas em \mathbb{R}^3 , cuja curvatura Gaussiana não muda de sinal. Mais precisamente, eles demonstraram o seguinte resultado.

Teorema (Klotz-Ossermann). *Uma superfície completa, com curvatura média constante H em \mathbb{R}^3 , cuja curvatura Gaussiana K não muda de sinal é ou uma esfera, ou uma superfície mínima, ou um cilindro circular reto.*

Este resultado foi estendido para superfícies em \mathbb{S}^3 por D. Hoffman, em 1973, e por R. Tribuzy, em 1978, para o espaço ambiente \mathbb{H}^3 . Neste último caso, com a hipótese extra da curvatura Gaussiana K ser não positiva. Ver [23] e [36], respectivamente.

Em 2010, J. Espinar e H. Rosenberg estenderam o resultado acima para superfícies de curvatura média constante imersas em espaços homogêneos tridimensionais $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, com grupo de isometria de dimensão quatro, cuja curvatura Gaussiana não muda de sinal.

Na seção inicial deste capítulo apresentaremos mais dois resultados que também classificam as H-superfícies em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, isto é, superfícies de curvatura média constante H em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Tais classificações envolvem as funções q e ν definidas anteriormente, e são fundamentais para a demonstração dos teoremas principais que serão apresentados na seção 3.2.

3.1 Funções q e ν constantes

Nesta seção apresentaremos dois teoremas que classificam as superfícies completas de curvatura média constante em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ com funções q e ν constantes. Veja Capítulo 2, seção 2.1.

Sejam $q : \Sigma \rightarrow [0, +\infty)$ a função definida por

$$q = \frac{4|Q|^2}{\lambda^2},$$

onde Qdz^2 é a diferencial de Abresch-Rosenberg, e $\nu : \Sigma \rightarrow [-1, 1]$ a função ângulo definida por

$$\nu = \langle N, \xi \rangle,$$

onde N é um campo unitário normal a Σ e ξ é o campo vertical.

Dizemos que a superfície $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ é um *cilindro vertical sobre uma curva* α se $\Sigma = \pi^{-1}(\alpha)$, onde α é uma curva em $\mathbb{M}^2(\kappa)$ e π é projeção de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ sobre $\mathbb{M}^2(\kappa)$. Veja o Capítulo 1, seção 1.2.

O próximo resultado, que pode ser encontrado em [13], descreve a geometria dos cilindros verticais em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. De fato, esse resultado caracteriza tais cilindros como superfícies cuja função ângulo é identicamente nula.

Proposição 3.1.1. *Seja $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ um cilindro vertical sobre α . Então a curvatura média, Gaussiana e extrínseca são, respectivamente,*

$$H = \frac{\kappa_g}{2}, \quad K = 0, \quad K_e = -\tau^2,$$

onde κ_g é a curvatura geodésica da curva α com respeito a métrica g de $\mathbb{M}^2(\kappa)$. Além disso, estes cilindros são caracterizados por $\nu \equiv 0$. Em particular, um cilindro vertical completo em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ é isométrico a \mathbb{R}^2 . Também, quando $\tau \equiv 0$, um plano vertical em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ é totalmente geodésico.

Prova. Seja $\alpha \subset \mathbb{M}^2(\kappa)$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Sejam t, n campos de vetores tangentes e normais ao longo de α . Denote por T e N o único levantamentos horizontais em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ de t e n , respectivamente. Assim, T é tangente a $\Sigma = \pi^{-1}(\alpha)$. Como ξ também é tangente a Σ , então $\{T, \xi\} \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ é uma base ortonormal em Σ e N é um campo de vetores normais unitários ao longo de Σ , em particular, $\nu \equiv 0$.

Agora, escolha N tal que $\{T, N, \xi\}$ seja uma base positiva. A segunda forma fundamental aplicada aos vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ é dada por

$$II(X, Y) = \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle.$$

Vamos calcular a segunda forma de Σ na base $\{T, \xi\}$. Como ξ é um campo de Killing unitário, as fibras são geodésicas. Logo,

$$\bar{\nabla}_\xi \xi = 0.$$

Por outro lado, usando que $\{T, N, \xi\}$ é uma base positiva, e que $\bar{\nabla}_T \xi = \tau(T \wedge \xi)$, temos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_T \xi, N \rangle &= \tau \langle T \wedge \xi, N \rangle \\ &= \tau \det(T, \xi, N) \\ &= -\tau \det(T, N, \xi) \\ &= -\tau, \end{aligned}$$

ou seja,

$$II(T, \xi) = -\tau \quad \text{e} \quad II(\xi, T) = \tau.$$

Além disso,

$$\langle \bar{\nabla}_T T, N \rangle = \langle \nabla_t t, n \rangle_{\mathbb{M}^2} = k_g,$$

onde $\langle \cdot \rangle_{\mathbb{M}^2}$ e ∇ são a métrica e a conexão Riemanniana de $\mathbb{M}^2(\kappa)$, respectivamente.

Sejam $X := x_1 \xi + x_2 T$ e $Y := y_1 \xi + y_2 T$. Assim,

$$\begin{aligned} II(X, Y) &= \langle \bar{\nabla}_{x_1 \xi + x_2 T} (y_1 \xi + y_2 T), N \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{x_1 \xi} (y_1 \xi + y_2 T) + \bar{\nabla}_{x_2 T} (y_1 \xi + y_2 T), N \rangle \\ &= \langle x_1 y_1 \bar{\nabla}_\xi \xi + x_1 y_2 \bar{\nabla}_\xi T + x_2 y_1 \bar{\nabla}_T \xi + x_2 y_2 \bar{\nabla}_T T, N \rangle \\ &= \langle x_1 y_1 \bar{\nabla}_\xi \xi, N \rangle + x_1 y_2 \langle \bar{\nabla}_\xi T, N \rangle + x_2 y_1 \langle \bar{\nabla}_T \xi, N \rangle + x_2 y_2 \langle \bar{\nabla}_T T, N \rangle \\ &= x_1 y_2 \tau - x_2 y_1 \tau + x_2 y_2 k_g. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$II(X, Y) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 & -\tau \\ -\tau & k_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

e operador de forma é

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -\tau \\ -\tau & k_g \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$H = \frac{1}{2} \text{tr} S = \frac{1}{2} k_g$$

e a curvatura extrínseca

$$K_e = \det S = -\tau^2.$$

Usando a equação de Gauss (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} K &= K_e + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2 \\ &= -\tau^2 + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$k_g = 2H, \quad K = 0 \quad \text{e} \quad K_e = -\tau^2.$$

■

Antes de prosseguirmos precisamos do seguinte lema que será utilizado na demonstração do próximo resultado.

Lema 3.1.2. *Seja $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ uma superfície conexa tal que todos os seus dados fundamentais $(\langle, \rangle, S, T, \nu)$ dependem somente de um parâmetro real. Então Σ é invariante por um grupo a um parâmetro de isometrias.*

Prova. Suponha que todos os dados fundamentais de Σ dependem somente de s . Seja U um domínio simplesmente conexo em Σ e $V \subset \mathbb{R}^2$, um domínio simplesmente conexo de uma superfície S , tal que $\psi_0 : V \rightarrow U \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Parametrizamos V por parâmetros (s, t) obtidos acima. Usando o mesmo argumento usado na prova do Teorema 1.1 de [18] concluímos que os dados fundamentais $\{\lambda_0, p_0, H_0, T_0, \nu_0\}$ de ψ_0 são dados por

$$\begin{cases} \lambda_0(s, t) &= \lambda(s) \\ p_0(s, t) &= p(s) \\ H_0(s, t) &= H(s) \\ T_0(s, t) &= a(s)\partial_s \\ \nu_0(s, t) &= \nu(s), \end{cases}$$

onde $a(s)$ é uma função suave.

Sejam $\bar{t} \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{i}_{\bar{t}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo dado por

$$\mathbf{i}(s, t) := (s, t + \bar{t}),$$

e defina $\psi_{\bar{t}} := \psi_0 \circ \mathbf{i}_{\bar{t}}$. Os dados fundamentais $\{\lambda_{\bar{t}}, p_{\bar{t}}, H_{\bar{t}}, T_{\bar{t}}, \nu_{\bar{t}}\}$ de $\psi_{\bar{t}}$ são dados por

$$\begin{cases} \lambda_0(s, t) &= \lambda(s) \\ p_{\bar{t}}(s, t) &= p(s) \\ H_{\bar{t}}(s, t) &= H(s) \\ T_{\bar{t}}(s, t) &= a(s)\partial_s \\ \nu_{\bar{t}}(s, t) &= \nu(s), \end{cases}$$

isto é, os dados fundamentais de $\psi_{\bar{t}}$ e ψ_0 coincidem em qualquer ponto $(s, t) \in V$. Pelo Teorema [10], existe uma isometria ambiente $\mathcal{I}_{\bar{t}} : \mathbb{E}(\kappa, \tau) \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ tal que

$$\mathcal{I}_{\bar{t}} \circ \psi_0 = \psi_0 \circ \mathbf{i}_{\bar{t}},$$

para todo $\bar{t} \in \mathbb{R}$ e, portanto, S é uma superfície invariante por um grupo a um parâmetro de isometrias. ■

O próximo lema classifica as superfícies de curvatura média constante em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ com q identicamente nulo.

Lema 3.1.3 (Espinar-Rosenberg). *Seja $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ uma H -superfície sobre a qual a diferencial de Abresch-Rosenberg é nula. Então Σ é ou um slice em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ se $H = 0 = \tau$, ou Σ é invariante por um grupo a um parâmetro de isometrias de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.*

Além disso, sobre a curvatura de Gauss dessas superfícies podemos afirmar que:

- se $4H^2 + \kappa > 0$, então $K > 0$ e tais superfícies são esferas rotacionalmente invariantes;
- se $4H^2 + \kappa = 0$ e $\nu \equiv 0$, então $K \equiv 0$ e Σ é ou um plano vertical em Nil_3 , ou um cilindro vertical sobre um horociclo em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ou $PSL_2(\mathbb{C})$;
- existe um ponto com curvatura de Gauss negativa nos demais casos.

Prova. Sendo $H = 0 = \tau$, e tendo em conta que $Q := 2(H + i\tau)p - (\kappa - 4\tau^2)A^2$ é identicamente nula, por hipótese, concluímos que

$$(\kappa - 4\tau^2)A^2 = 0.$$

Como $(\kappa - 4\tau^2) \neq 0$, temos que $A \equiv 0$.

Por (2.9), vale $\frac{1}{4}\lambda(1 - \nu^2) = 0$, ou seja, $\nu = \pm 1$ e, portanto, Σ é um slice em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Agora, se $H \neq 0$ ou $\tau \neq 0$, temos

$$0 = 2(H + i\tau)p - (\kappa - 4\tau^2)A^2,$$

ou seja,

$$2(H + i\tau)p = (\kappa - 4\tau^2)A^2. \quad (3.1)$$

Tomando o módulo dos termos da igualdade acima, obtemos

$$4(H^2 + \tau^2)|p|^2 = (\kappa - 4\tau^2)^2|A|^4,$$

isto é,

$$4|p|^2 = \frac{(\kappa - 4\tau^2)^2}{H^2 + \tau^2}|A|^4.$$

Usando que $4|p|^2 = \lambda^2(H^2 - K_e)$ e a expressão (2.9), obtemos

$$H^2 - K_e = \frac{(\kappa - 4\tau^2)^2(1 - \nu^2)^2}{16(H^2 + \tau^2)}. \quad (3.2)$$

Multiplicando a igualdade 2.8 por $(H + i\tau)$, usando (3.1) e (2.9), encontramos

$$\begin{aligned}
(H + i\tau)\nu_z &= -(H^2 + \tau^2)A - \frac{2}{\lambda}(H + i\tau)p\bar{A} \\
&= -(H^2 + \tau^2)A - (\kappa - 4\tau^2)\frac{A}{\lambda}|A|^2 \\
&= -(H^2 + \tau^2)A - (\kappa - 4\tau^2)\frac{1}{4}A(1 - \nu^2) \\
&= -\frac{1}{4}(4H^2 + 4\tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2))A \\
&= -\frac{1}{4}(4H^2 + \kappa - (\kappa - 4\tau^2)\nu^2)A,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(H + i\tau)\nu_z = -\frac{1}{4}(4H^2 + \kappa - (\kappa - 4\tau^2)\nu^2)A.$$

Novamente, tomando o módulo da expressão acima,

$$(H^2 + \tau^2)|\nu_z|^2 = \frac{1}{16}(4H^2 + \kappa - (\kappa - 4\tau^2)\nu^2)^2|A|^2,$$

que implica

$$|\nu_z|^2 = \frac{(4H^2 + \kappa - (\kappa - 4\tau^2)\nu^2)^2}{16(H^2 + \tau^2)}|A|^2.$$

Escrevendo

$$g(\nu) = \frac{4H^2 + \kappa - (\kappa - 4\tau^2)\nu^2}{4\sqrt{H^2 + \tau^2}},$$

temos que

$$|\nu_z|^2 = g(\nu)^2|A|^2. \quad (3.3)$$

Suponha que ν é uma função não constante. Em particular, ν não é identicamente nulo e, portanto, existe $p \in \Sigma$ tal que $\nu_z(p) \neq 0$. Como ν_z é contínua, existe uma vizinhança U de p , onde $\nu_z \neq 0$.

Podemos assumir que $\nu^2 \neq 1$, pois, do contrário, teríamos, por (2.9), que $|A| \equiv 0$ e, conseqüentemente, por (3.3) teríamos $\nu_z = 0$, o que contradiz a hipótese de ν não ser constante. Em particular, de (3.3) inferimos que $g(\nu) \neq 0$ em U .

Agora, substituindo (2.9) em (3.3), encontramos

$$|\nu_z|^2 = g(\nu)^2\frac{1}{4}\lambda(1 - \nu^2)$$

e assim, obtemos que

$$\lambda = \frac{4|\nu_z|^2}{(1 - \nu^2)g(\nu)^2}. \quad (3.4)$$

Substituindo as expressões (3.1) e (3.4) na igualdade obtida no Lema 2.2.3 do Capítulo 2,

$$\Delta\nu = \frac{4}{\lambda}\nu_{z\bar{z}} = -((\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2) + 2(H^2 - K_e) + 2(H^2 + \tau^2))\nu,$$

encontramos

$$\begin{aligned}
\nu_{z\bar{z}} &= -\frac{\lambda}{4} \left((\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2 + 2(H^2 - K_e) + 2(H^2 + \tau^2)) \nu \right) \\
&= -\frac{4|\nu_z|^2}{4(1 - \nu^2)g(\nu)^2} \left((\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2) + 2 \left(\frac{(\kappa - 4\tau^2)^2(1 - \nu^2)^2}{16(H^2 + \tau^2)} \right) + 2(H^2 + \tau^2) \right) \\
&= -\frac{\nu|\nu_z|^2}{(1 - \nu^2)g(\nu)^2} \left(\frac{16(\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2)(H^2 + \tau^2) + 2(\kappa - 4\tau^2)^2(1 - \nu^2)^2 + 32(H^2 + \tau^2)}{16(H^2 + \tau^2)} \right) \\
&= -2\frac{\nu|\nu_z|^2}{(1 - \nu^2)g(\nu)^2} \left(\frac{(\kappa - 4\tau^2)^2(1 - \nu^2)^2 + 8(\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2)(H^2 + \tau^2) + 16(H^2 + \tau^2)}{16(H^2 + \tau^2)} \right) \\
&= -2\frac{\nu|\nu_z|^2}{(1 - \nu^2)g(\nu)^2} \left(\frac{(\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2) + 4(H^2 + \tau^2)}{4\sqrt{H^2 + \tau^2}} \right)^2 \\
&= -2\frac{\nu|\nu_z|^2}{(1 - \nu^2)g(\nu)^2} \left(\frac{4H^2 + \kappa - (\kappa - 4\tau^2)\nu^2}{4\sqrt{H^2 + \tau^2}} \right)^2 \\
&= -2\frac{\nu|\nu_z|^2}{(1 - \nu^2)g(\nu)^2} g(\nu)^2 \\
&= -2\frac{\nu|\nu_z|^2}{(1 - \nu^2)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\nu_{z\bar{z}} = -2\frac{\nu|\nu_z|^2}{1 - \nu^2}. \quad (3.5)$$

Defina $s := \operatorname{arctgh}(\nu)$ em U . Note que s é uma função real bem definida em U , já que $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ e $-1 < \nu < 1$. Além disso, temos que

$$s_z = \frac{\nu_z}{1 - \nu^2} \quad \text{e} \quad s_{z\bar{z}} = \frac{\nu_{z\bar{z}}(1 - \nu^2) + 2\nu|\nu_z|^2}{(1 - \nu^2)^2}.$$

Substituindo (3.5) em $s_{z\bar{z}}$ obtemos que $s_{z\bar{z}} = 0$, e, como $\Delta s = \frac{4}{\lambda} s_{z\bar{z}}$, concluímos que $\Delta s = 0$ e s é uma função harmônica. Logo s é parte real de uma função holomorfa. Assim, podemos considerar um novo parâmetro conforme w para a primeira forma fundamental de Σ tal que $w = s + it$, ou seja, $s = \operatorname{Re}(w)$.

Como $s := \operatorname{arctgh}(\nu)$, segue-se que $\nu = \operatorname{tgh}(s)$ e $\nu = \nu(s)$, isto é, ν só depende de s . Assim, por 3.4, temos $\lambda = \lambda(s)$ e, por 3.3 e 2.4, temos que $T = T(s)$, e $p = p(s)$ pela definição da diferencial de Abresch-Rosenberg. Isto é, todos os dados fundamentais de Σ dependem somente de s . Pelo Lema 3.1.2, Σ é uma superfície invariante por um grupo a um parâmetro de isometrias.

Agora, vamos provar as afirmações sobre a curvatura Gaussiana de Σ . Usando a equação de Gauss $K = K_e + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2$ e (3.2), obtemos que

$$H^2 + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2 - K = \frac{(\kappa - 4\tau^2)^2(1 - \nu^2)^2}{16(H^2 + \tau^2)}.$$

Fazendo

$$a := 4(H^2 + \tau^2) \quad e \quad b := (\kappa - 4\tau^2)$$

, escrevemos a expressão acima como

$$a + 4b\nu^2 - 4K = \frac{b^2(1 - \nu^2)^2}{a}$$

e, reordenando os termos, podemos escrever

$$4aK = a^2 + 4ab\nu^2 - b^2(1 - \nu^2)^2.$$

Somando e subtraindo b^2 , $4a^2$ e $4ab$, obtemos

$$4aK = a^2 - b^2 + (2a + b)^2 - (2a + b(1 - \nu^2))^2.$$

Vamos considerar os três possíveis casos para o valor da soma $4H^2 + \kappa$.

- Se $4H^2 + \kappa > 0$, temos:

$$a + b = 4H^2 + \kappa > 0,$$

o que implica que $b > -a$. Por outro lado,

$$a - b = 4H^2 + 8\tau^2 - \kappa > 0.$$

Como $4H^2 > -\kappa$, temos que $a - b > 0$ e $b < a$.

Assim, $-a < b < a$ e $a > |b| > 0$, já que $(\kappa - 4\tau^2) \neq 0$. Logo $a = 4(H^2 + \tau^2) > 0$, o que implica que $H \neq 0$ ou $\tau \neq 0$.

Além disso, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) > 0$ e, como $\nu^2 \leq 1$, também concluímos que $(2a + b)^2 \geq (2a + b(1 - \nu^2))^2$, logo

$$K = \frac{a^2 - b^2 + (2a + b)^2 - (2a + b(1 - \nu^2))^2}{4a} > 0.$$

Como Σ é completa, Σ é topologicamente uma esfera.

- Se $4H^2 + \kappa = 0$, temos

$$a + b = 4H^2 + \kappa = 0,$$

ou seja, $a = -b$ e a equação acima pode ser reescrita como

$$4aK = a^2(1 - (1 + \nu^2)^2).$$

Sendo $\nu \leq 1$ e $a > 0$, temos que $(1 - (1 + \nu^2)^2) \leq 0$, isto é, existem pontos de Σ que tem curvatura Gaussiana negativa, a menos que $\nu \equiv 0$. Neste caso, temos que $K \equiv 0$.

Note que $4H^2 + \kappa = 0$ implica que $\kappa = -4H^2 \leq 0$. Assim, consideramos dois casos.

Se $H \neq 0$, então $\kappa < 0$ e portanto $\mathbb{M}^2(\kappa) = \mathbb{H}^2$ e $\mathbb{E}(\kappa, \tau) = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, se $\tau = 0$, ou $\mathbb{E}(\kappa, \tau) = \widetilde{PSL_2(\mathbb{C})}$, se $\tau \neq 0$. Como estamos supondo $\nu \equiv 0$, temos que Σ é um cilindro sobre um horociclo em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ou $\widetilde{PSL_2(\mathbb{C})}$.

Se $H = 0$, temos que $\kappa = 0$ e $\tau \neq 0$. Logo $\mathbb{M}^2(\kappa) = \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{E}(\kappa, \tau) = Nil_3$. Como $\nu \equiv 0$ e $\kappa = 0$, Σ é um cilindro sobre uma linha reta em \mathbb{R}^2 , isto é, Σ é um plano vertical em Nil_3 .

- Se $4H^2 + \kappa < 0$, temos

$$a + b = 4H^2 + \kappa < 0$$

e

$$\begin{aligned} a - b &= 4H^2 + 4\tau^2 - \kappa + 4\tau^2 \\ &= 4H^2 - \kappa + 8\tau^2. \end{aligned}$$

Como $4H^2 + \kappa < 0$, temos que $0 \leq 4H^2 < -\kappa$, ou seja, $-\kappa > 0$. Logo $a - b > 0$. Portanto,

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) < 0.$$

Então, como $4aK = a^2 - b^2 + (2a + b)^2 - (2a + b(1 - \nu^2))^2$, temos que para $\nu = 0$, $4aK = a^2 - b^2 < 0$ e, portanto, existe pelo menos um ponto em Σ com curvatura gaussiana negativa. Isto é, para $4H^2 + \kappa \leq 0$ temos que existe pelo menos um ponto em Σ com curvatura gaussiana negativa.

Para finalizar este lema precisamos da seguinte afirmação.

Afirmação 3.1.4. *Não existe superfície completa com curvatura média constante $4H^2 + \kappa < 0$ em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, $\kappa < 0$, com $q \equiv 0$, $K \geq 0$ e $\inf_{\Sigma}\{\nu^2\} = c > 0$.*

De fato, suponha que tal superfície exista. Como estamos supondo que $K \geq 0$ e Σ é completa, então pelo Lema 5 de [16], Σ é uma esfera ou é uma superfície não compacta e parabólica. Como $\inf_{\Sigma}\{\nu^2\} = c > 0$ e $4H^2 + \kappa < 0$, Σ não pode ser uma esfera. Logo Σ é uma superfície não compacta e parabólica.

Como q é identicamente nulo em Σ e vimos acima que $\text{arctgh}(\nu)$ é uma função harmônica, temos que $\text{arctgh}(\nu)$ é uma função harmônica limitada em Σ . Pelo Princípio

do Máximo de Hopf, ν é constante. Isto implica que $K \equiv 0$ e $c < \nu^2 < 1$ é constante em Σ . Assim, a projeção

$$\pi : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$$

é um difeomorfismo global e uma quasi-isometria. Contradição, pois Σ é parabólica e $\mathbb{M}^2(\kappa)$, $\kappa < 0$, é hiperbólica e a afirmação é verdadeira e, portanto, o lema está provado. ■

O próximo Teorema é uma extensão do lema anterior e classifica as superfícies de curvatura média constante imersas em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ cuja função q é constante.

Teorema 3.1.5 (Espinar-Rosenberg). *Seja $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ uma H -superfície completa com função q constante.*

(i) *Seja $q = 0$ em Σ .*

- *Se $H = 0 = \tau$, então Σ é um slice em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.*
- *Se $4H^2 + \kappa > 0$, então Σ é uma esfera S_H mergulhada rotacional, o que também implica que $K > 0$.*
- *Se $4H^2 + \kappa = 0$ e $\nu = 0$ em Σ , então Σ é um cilindro vertical sobre uma curva completa de curvatura $|\kappa|$. Isto é, Σ é ou um cilindro vertical sobre uma linha reta em Nil_3 , ou um cilindro vertical sobre um horociclo em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ou $\widetilde{PSL_2(\mathbb{C})}$. Além disso, todos esses exemplos são planos.*
- *Se $4H^2 + \kappa \leq 0$ e ν não é constante, então Σ tem um ponto com curvatura de Gauss negativa.*

(ii) *Seja $q \neq 0$ em Σ , então Σ é um cilindro vertical sobre uma curva completa de curvatura geodésica $2H$ em $\mathbb{M}^2(\kappa)$.*

Prova. O Lema anterior nos dá a classificação para $q = 0$. Vamos então, analisar o caso $q \neq 0$.

Suponhamos, por contradição, que ν não é constante em Σ . Como $q > 0$, escrevemos $q = c^2 > 0$. Assim, podemos considerar uma parametrização conforme z sobre Σ tal que $\langle \cdot, \cdot \rangle = |dz|^2$ e $Qdz^2 = cdz^2$ em Σ . Portanto, por (2.18)

$$Q = c = 2(H + i\tau)p - (\kappa - 4\tau^2)A^2. \quad (3.6)$$

Podemos assumir que $H \neq 0$ ou $\tau \neq 0$, caso contrário, por (2.9), ν seria constante, o que contradiz a hipótese. Usando (2.8) e que $\lambda = 1$, temos

$$(H + i\tau)\nu_z = -(H^2 + \tau^2)A - 2p\bar{A}.$$

Como, por (3.6), $2(H + i\tau)p = (\kappa - 4\tau^2)A^2 + c$ e usando (2.9), obtemos

$$\begin{aligned} (H + i\tau)\nu_z &= -(H^2 + \tau^2)A - ((\kappa - 4\tau^2)A^2 + c)\bar{A} \\ &= -(H^2 + \tau^2)A - (\kappa - 4\tau^2)|A|^2 A - c\bar{A} \\ &= -(H^2 + \tau^2 + \frac{(\kappa - 4\tau^2)}{4}(1 - \nu^2))A - c\bar{A}, \end{aligned}$$

isto é,

$$(H + i\tau)\nu_z = H^2 + \tau^2 + \frac{(\kappa - 4\tau^2)}{4}(1 - \nu^2))A - c\bar{A}.$$

Tomando o módulo na expressão acima e usando que $\|\nabla\nu\|^2 = \frac{4}{\lambda}|\nu_z|$, do Lema 2.2.3, obtemos

$$4(H^2 + \tau^2)\|\nabla\nu\|^2 = (g(\nu) + 4c)^2(1 - \nu^2), \quad (3.7)$$

onde

$$g(\nu) := 4H^2 + \kappa - (\kappa - 4\tau^2)\nu^2.$$

Como q é constante, temos $\Delta \ln q = 0$, e, pela igualdade (2.26) do Lema 2.2.3, temos que $K \equiv 0$. Logo, pela equação de Gauss (2.5),

$$0 = K_e + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2,$$

e, portanto,

$$H^2 - K_e = H^2 + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2.$$

Usando a expressão acima e a igualdade (2.24) do Lema 2.2.3, temos que

$$\begin{aligned} \|\nabla\nu\|^2 &= \frac{4H^2 + \kappa - (\kappa - 4\tau^2)\nu^2}{4(\kappa - 4\tau^2)} (4(H^2 - K_e) + (\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2)) - \frac{q}{\kappa - 4\tau^2} \\ &= \frac{g(\nu)}{4(\kappa - 4\tau^2)} (4(H^2 + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2) + (\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2)) - \frac{c^2}{\kappa - 4\tau^2} \\ &= \frac{g(\nu)}{4(\kappa - 4\tau^2)} (4H^2 - \kappa - (\kappa - 4\tau^2)\nu^2 + 4(\kappa - 4\tau^2)\nu^2) - \frac{c^2}{\kappa - 4\tau^2} \\ &= \frac{g(\nu)}{4(\kappa - 4\tau^2)} (g(\nu) + 4(\kappa - 4\tau^2)\nu^2) - \frac{c^2}{\kappa - 4\tau^2} \\ &= \frac{g(\nu)^2}{4(\kappa - 4\tau^2)} + g(\nu)\nu^2 - \frac{c^2}{\kappa - 4\tau^2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\nabla\nu\|^2 = \frac{g(\nu)^2}{4(\kappa - 4\tau^2)} + g(\nu)\nu^2 - \frac{c^2}{\kappa - 4\tau^2}. \quad (3.8)$$

Agora, juntando as equações (3.7) e (3.8) obtemos a igualdade polinomial em ν^2 com coeficientes dependendo de $a := 4(H^2 + \tau^2)$, $b := \kappa - 4\tau^2$ e c , dada por

$$\frac{g(\nu)^2 a}{4b} + \nu^2 g(\nu) a - \frac{ac^2}{b} = (g(\nu) + 4c)^2 (1 - \nu^2).$$

Podemos escrever

$$P(\nu^2) := C(a, b, c)\nu^6 + \text{termos de ordem menor} = 0.$$

Observando que ν^6 aparece no termo $-4bg(\nu)^2\nu^2$, concluímos que o coeficiente do termo ν^6 é $C(a, b, c) = -4b^3$ que é não nulo. Isto gera uma contradição, e concluímos assim que a função ν é constante. Agora, resta provar que Σ é um cilindro vertical sobre uma curva completa de curvatura geodésica $2H$. Isto será feito no Teorema 3.1.6 a seguir. ■

Apresentamos agora a classificação das superfícies completas de curvatura média constante H em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ com função ângulo $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\nu = \langle N, \xi \rangle$ sendo constante. Antes, precisamos introduzir uma família de superfícies que aparece nesta classificação.

Seja $\mathcal{S}_{\kappa, \tau}$ uma família de superfícies completas com curvatura média constante H em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, $\kappa < 0$, satisfazendo para qualquer $\Sigma \in \mathcal{S}_{\kappa, \tau}$:

- $4H^2 + \kappa < 0$.
- q é identicamente nulo em $\Sigma \in \mathcal{S}_{\kappa, \tau}$.
- $0 < \nu^2 < 1$ é constante ao longo de σ .
- $K_e = -\tau^2$ e $K = (\kappa - 4\tau^2) < 0$ são constantes ao longo de Σ .

Teorema 3.1.6 (Espinar-Rosenberg). *Seja $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ uma superfície de curvatura média constante H com função ângulo constante. Então, Σ é ou um cilindro vertical sobre uma curva completa de curvatura geodésica $2H$ em $\mathbb{M}^2(\kappa)$, ou um slice em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, ou $\Sigma \in \mathcal{S}_{\kappa, \tau}$ com $\kappa < 0$.*

Prova. Podemos assumir que $\nu \leq 0$. O caso $\nu > 0$ é similar. Vamos dividir a prova em três casos:

1º Caso. $\nu = 0$. A prova desta afirmação foi feita no Lema 3.1.3.

Neste caso, Σ deve ser um cilindro vertical sobre uma curva completa de curvatura geodésica $2H$ em $\mathbb{M}^2(\kappa)$.

2º Caso. $\nu = -1$.

Pela equação (2.9), temos que $|A|^2 = 0$, o que implica que $A = 0$. Por (2.7) $H + i\tau = 0$. Portanto $H = \tau = 0$ e Σ é um slice em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

3º Caso. $-1 < \nu < 0$.

Mostraremos que este caso $\Sigma \in \mathcal{S}_{\kappa, \tau}$ com $\kappa < 0$. Como ν é constante, $\nu_z \equiv 0$. Por (2.8), temos

$$(H - i\tau)A = -\frac{2p}{\lambda}\bar{A}.$$

Tomando o módulo ao quadrado na igualdade acima, obtemos

$$(H + \tau^2)|A|^2 = \frac{4|p|^2}{\lambda^2}|A|^2.$$

Como $\nu \neq \pm 1$, por (2.9), $|A|^2 \neq 0$. Usando a expressão (2.15) $H^2 - K_e = \frac{4|p|^2}{\lambda^2}$, obtemos,

$$H^2 + \tau^2 = \frac{4|p|^2}{\lambda^2} = H^2 - K_e$$

e, portanto, $K_e = -\tau^2$ em Σ . Como ν é constante, $\Delta\nu = 0$ e por (2.25),

$$\begin{aligned} 0 &= (4H^2 + 2\tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2) - 2K_e)\nu \\ &= (4H^2 + 2\tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2)(-2(-\tau^2))) \\ &= 4H^2 + 4\tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2), \end{aligned}$$

ou seja,

$$4H^2 + 4\tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2) = 0. \quad (3.9)$$

Por definição, $q = \frac{4|Q|^2}{\lambda^2}$. Substituindo a expressão (2.27) para $|Q|^2$ nesta igualdade, temos

$$\begin{aligned} q &= 4(H^2 + \tau^2)\frac{4|p|^2}{\lambda^2} + (\kappa - 4\tau^2)^2\frac{4|A|^4}{\lambda^2} \\ &\quad - 4\frac{(\kappa - 4\tau^2)}{\lambda^2} (2(H + i\tau)p\bar{A}^2 + 2(H - i\tau)\bar{p}A^2) \end{aligned}$$

substituindo

$$H^2 + \tau^2 = \frac{4|p|^2}{\lambda^2} \quad \text{e} \quad |A|^2 = \frac{1}{4}\lambda(1 - \nu^2)$$

a expressão acima fica

$$\begin{aligned} q &= 4(H^2 + \tau^2)(H^2 - K_e) + (\kappa - 4\tau^2)^2\frac{(1 - \nu^2)^2}{4} \\ &\quad - 4\frac{(\kappa - 4\tau^2)}{\lambda^2} (2(H + i\tau)p\bar{A}^2 + 2(H - i\tau)\bar{p}A^2) \end{aligned}$$

e usando que

$$(H - i\tau)A = -\frac{2p}{\lambda}\bar{A} \quad \text{e} \quad (H + i\tau)\bar{A} = -\frac{2\bar{p}}{\lambda}A,$$

obtemos

$$\begin{aligned} q &= 4(H^2 + \tau^2)(H^2 - K_e) + (\kappa - 4\tau^2)^2\frac{(1 - \nu^2)^2}{4} \\ &\quad + 4\frac{(\kappa - 4\tau^2)}{\lambda^2} ((H^2 + \tau^2)|A|^2 + (H^2 + \tau^2)|A|^2). \end{aligned}$$

Novamente, substituindo $|A|^2 = \frac{1}{4}\lambda(1 - \nu^2)$, $K_e = -\tau^2$ e utilizando (3.9), temos

$$\begin{aligned}
q &= 4(H^2 + \tau^2)(H^2 - K_e) + (\kappa - 4\tau^2)^2 \frac{(1 - \nu^2)^2}{4} \\
&\quad + 4 \frac{(\kappa - 4\tau^2)}{\lambda^2} ((H^2 + \tau^2)|A|^2 + (H^2 + \tau^2)|A|^2) \\
&= 4(H^2 + \tau^2)(H^2 - K_e) + (\kappa - 4\tau^2)^2 \frac{(1 - \nu^2)^2}{4} \\
&\quad + 2((\kappa - 4\tau^2))(1 - \nu^2)(H^2 + \tau^2) \\
&= \frac{1}{4} ((\kappa - 4\tau^2)^2(1 - \nu^2)^2 + 8(\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2)(H^2 + \tau^2) + 16((H^2 + \tau^2)^2)) \\
&= \frac{1}{4} ((\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2 + 4(H^2 + \tau^2)))^2 \\
&= \frac{1}{4} (4H^2 + (\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2)4\tau^2)^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

isto é, $q = 0$ em Σ . Além disso, de (3.9) concluímos que $4H^2 + \kappa < 0$ o que implica que $\kappa < 0$. Portanto, $\Sigma \in \mathcal{S}_{\kappa, \tau}$, $\kappa < 0$. ■

3.2 Curvatura de Gauss K limitada

Aqui apresentamos a classificação das superfícies de curvatura média constante H em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, cuja curvatura Gaussiana K não muda de sinal.

Começaremos essa seção definindo funções subharmônicas e superfícies de Riemann parabólicas, bem como alguns fatos relacionados com tais superfícies que serão usados nas próximas demonstrações. Uma referência deste tópico é [3].

Dizemos que uma função v com valores reais é *subharmônica* em uma região plana Ω se satisfaz as seguintes condições:

- (i) v é semicontínua superior em Ω , isto é, $v(z) \geq \limsup_{z' \rightarrow z} v(z')$.
- (ii) Para qualquer função harmônica u em uma região $\Omega' \subset \Omega$, a diferença $v - u$ ou é constante ou não tem um máximo em Ω' .

Numa função semicontínua superior é convencionalmente permitido assumir o valor $-\infty$, mas não o valor $+\infty$.

Dizemos que v é *superharmônica* se $-v$ é subharmônica.

Uma superfície de Riemann W é dita ser *parabólica* se não existe funções subharmônicas negativa não constante em W . Um fato importante sobre superfícies de Riemann parabólicas é que vale o Princípio do Máximo clássico para tais superfícies. Veja [3], p. 204.

Teorema 3.2.1 (Espinar-Rosenberg). *Seja $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ uma H -superfície completa com $K \geq 0$. Então, Σ é ou uma esfera rotacional e neste caso, em particular, $4H^2 + \kappa > 0$, ou um cilindro vertical sobre uma curva completa de curvatura geodésica $2H$ em $\mathbb{M}^2(\kappa)$.*

Prova. Primeiro vamos provar que Σ é uma esfera topológica ou uma superfície parabólica não compacta. Depois mostramos que, quando a superfície é uma esfera topológica, então ela é uma esfera rotacional. Se Σ é uma superfície completa não compacta, parabólica, usaremos o Teorema 3.1.5 para provar que Σ é um cilindro vertical.

Então, seja Σ uma superfície completa, com $K \geq 0$. Usando o Lema 5 do artigo [16], concluímos que Σ é ou uma esfera ou uma superfície não compacta e parabólica.

Caso Σ seja uma esfera, o fato de a curvatura média ser constante nos permite concluir que Σ é uma esfera de curvatura média constante, rotacionalmente invariante em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ utilizando os teoremas de [2].

Consideremos, então Σ uma superfície parabólica não compacta. Podemos assumir q não identicamente nulo pois, caso contrário, como $K \geq 0$, pelo Teorema 3.1.5, temos que Σ é um cilindro vertical sobre uma linha reta em Nil_3 ou um cilindro vertical sobre um horociclo em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ou $\widetilde{PSL_2(\mathbb{C})}$.

Pela equação de Gauss 2.5, temos que

$$0 \leq K = K_e + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2 \leq K_e + \tau^2 + |\kappa - 4\tau^2|,$$

pois

$$(\kappa - 4\tau^2)\nu^2 \leq |(\kappa - 4\tau^2)\nu^2| \leq |\kappa - 4\tau^2||\nu^2| \leq |\kappa - 4\tau^2|.$$

Logo, $-K_e \leq \tau^2 + |\kappa - 4\tau^2|$, o que implica que

$$H^2 - K_e = H^2 + \tau^2 + |\kappa - 4\tau^2|. \quad (3.10)$$

Por outro lado, usando a definição de Qdz^2 em 2.18 e a desigualdade $|\alpha + \beta|^2 \leq 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{q}{2} &= \frac{2|Q|^2}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} |2(H + i\tau)p - (\kappa - 4\tau^2)A^2| \\ &\leq \frac{2}{\lambda^2} [2(|2(H + i\tau)p|^2 + |(\kappa - 4\tau^2)A^2|^2)] \\ &= \frac{4}{\lambda^2} (4(H^2 + \tau^2|p|^2 + (\kappa - 4\tau^2)^2|A|^2)) \\ &= 4(H^2 + \tau^2) \frac{4|p|^2}{\lambda^2} + (\kappa - 4\tau^2)^2 \frac{4|A|^2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Substituindo as expressões $H^2 - K_e = \frac{4|p|^2}{\lambda^2}$ e $|A|^2 = \frac{1}{4}\lambda(1 - \nu^2)$, na desigualdade anterior, temos

$$\frac{q}{2} \leq 4(H^2 + \tau^2)(H^2 - K_e) + \frac{(\kappa - 4\tau^2)^2}{4}(1 - \nu^2)^2$$

e, usando (3.10), obtemos

$$\frac{q}{2} \leq 4(H^2 + \tau^2)(H^2 - K_e) + (H^2 + \tau^2 + |\kappa - 2\tau^2|) + \frac{(\kappa - 4\tau^2)^2}{4},$$

isto é,

$$0 < q \leq 2c, \text{ onde } c = 4(H^2 + \tau^2)(H^2 - K_e) + (H^2 + \tau^2 + |\kappa - 2\tau^2|) + \frac{(\kappa - 4\tau^2)^2}{4}$$

Como $\Delta \ln q = 4K \geq 0$, temos que $\ln q$ é uma função subharmônica limitada por cima por $\ln c$, em uma superfície de Riemann parabólica Σ , considerando a estrutura complexa dada pela métrica induzida. Sendo $\ln q$ uma função subharmônica, o valor $-\infty$ é permitido em pontos isolados. Pelo princípio do Máximo ver ([22], p. 15), $\ln q$ e, portanto, q é constante. Como supomos q não identicamente nulo, concluímos que q é uma constante positiva. Pelo Teorema 3.1.5, Σ é um cilindro completo vertical sobre uma curva de curvatura geodésica $2H$ em $\mathbb{M}^2(\kappa)$. ■

Antes de enunciarmos e provarmos a classificação das superfícies completas em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ com $K < 0$, apresentamos o seguinte resultado que será necessário na prova do próximo teorema.

Lema 3.2.2 ([14]). *Seja (Σ, I) uma superfície de Riemann orientada e suponha que $Qdz^2 \neq 0$ é holomorfa. Então $\tilde{I} = \sqrt{q}I$ é uma métrica flat em $\Sigma - \{p_i\}$, onde $q(p_i) = 0$. Se I é completa e $q \geq c_0 > 0$, então \tilde{I} é completa e (Σ, I) é parabólica.*

Prova. Usando as expressões (2.31) e (2.26), temos

$$\begin{aligned} -2K(\tilde{I}) &= \Delta \ln \sqrt{q}\lambda \\ &= \frac{1}{2}\Delta \ln q + \Delta \ln \lambda \\ &= 2K(\tilde{I}) - 2K(\tilde{I}) = 0. \end{aligned}$$

Portanto $K(\tilde{I}) = 0$ e \tilde{I} é uma métrica flat. Mostremos que \tilde{I} é completa.

Suponha que I é uma métrica completa. Então, o comprimento de qualquer curva divergente, isto é, as curvas que saem de qualquer compacto de Σ , é infinito. Como $q \geq C_0 > 0$, vale a desigualdade

$$\tilde{I} = \sqrt{q}I \geq \sqrt{C_0}I,$$

isto é,

$$\tilde{I} \geq \sqrt{C_0}I.$$

Logo as curvas divergentes para \tilde{I} também tem comprimento infinito e, portanto, \tilde{I} é completa. Resta-nos provar que (Σ, I) é parabólica. Seja $u \in C^2(\Sigma)$ uma função subharmônica não positiva, isto é $\Delta u \geq 0$ e $u \leq 0$. Então,

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{2}{\lambda} u_{z\bar{z}} = \sqrt{q} \left(\frac{2}{\lambda \sqrt{q}} \right) u_{z\bar{z}} \\ &= \sqrt{q} \Delta^{\tilde{I}} u,\end{aligned}$$

onde $\Delta^{\tilde{I}}$ é o Laplaciano associado a métrica \tilde{I} . Assim, temos que $\Delta^{\tilde{I}} u \geq 0$ e $u \leq 0$. Pelo Princípio do Máximo, (ver [22] p.15), $u = cte$ e (Σ, I) é uma superfície de Riemann parabólica ((Σ, \tilde{I}) e, portanto (Σ, I) é parabólica). ■

Vejamos agora a classificação das H-superfícies em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ com curvatura Gaussiana negativa.

Teorema 3.2.3 (Espinar-Rosenberg). *Seja $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ uma superfície de curvatura média constante H com $K \leq 0$ e $H^2 + \tau^2 - |\kappa - 4\tau^2| > 0$. Então, Σ é um cilindro vertical completo sobre uma curva completa de curvatura geodésica $2H$ em $\mathbb{M}^2(\kappa)$.*

Prova. Vamos dividir a prova em dois casos, $\kappa - 4\tau^2 < 0$ e $\kappa - 4\tau^2 > 0$.

1º Caso. $\kappa - 4\tau^2 < 0$.

Como $K \leq 0$, pela equação de Gauss $K = K_e + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2$, temos que

$$\begin{aligned}0 \geq K &= K_e + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2 \\ -K_e &\geq \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2 \\ H^2 - K_e &\geq H^2 + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2 \\ &\geq H^2 + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2) = H^2 + \kappa - 3\tau^2,\end{aligned}$$

ou seja,

$$H^2 - K_e \geq H^2 + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2) = H^2 + \kappa - 3\tau^2.$$

Usando a expressão

$$0 \leq \|\nabla \nu\|^2 = (2H^2 - K_e + \tau^2)(1 - \nu^2) + \frac{(\kappa - 4\tau^2)}{4}(1 - \nu^2)^2 + 4 \left(\frac{H^2 + \tau^2}{\kappa - 4\tau^2} \right) (H^2 - K_e) - \frac{q}{\kappa - 4\tau^2}$$

e o fato que $\kappa - 4\tau^2 < 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{q}{\kappa - 4\tau^2} &\leq (2H^2 - K_e + \tau^2)(1 - \nu^2) + \frac{\kappa - \tau^2}{4}(1 - \nu^2)^2 4 \left(\frac{H^2 + \tau^2}{\kappa - 4\tau^2} \right) (H^2 - K_e) \\
q &\geq (2H^2 - K_e + \tau^2)(1 - \nu^2)(\kappa - 4\tau^2) \\
&\quad + \frac{\kappa - 4\tau^2}{4}(1 - \nu^2)^2 + 4(H^2 + \tau^2)(H^2 - K_e) \\
&\geq 4(H^2 + \tau^2)(H^2 - K_e) \\
&\quad + (\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2) \left(H^2 + \tau^2(H^2 - K_e) + \frac{\kappa - 4\tau^2}{4}(1 - \nu^2) \right) \\
&= (H^2 - K_e) (4H^2 + 4\tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2)) \\
&\quad + (H^2 + \tau^2)(\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2) + \frac{(\kappa - 4\tau^2)^2}{4}(1 - \nu^2)^2 \\
&\geq (H^2 + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2) (4H^2 + 4\tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2)) \\
&\quad + (H^2 + \tau^2)(\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2) + \frac{(\kappa - 4\tau^2)^2}{4}(1 - \nu^2)^2. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Esta última desigualdade vale pois

$$4H^2 + 4\tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2) > 0.$$

Mas, por hipótese,

$$0 < 4(H^2 + \tau^2) - |\kappa - 4\tau^2| = 4H^2 + 4\tau^2 + \kappa - 4\tau^2 = 4H^2 + \kappa.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
4H^2 + 4\tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2) &= 4H^2 + 4\tau^2 + \kappa - 4\tau^2 - (\kappa - 4\tau^2)\nu^2 \\
&= 4H^2 + \kappa - (\kappa - 4\tau^2)\nu^2 \\
&\geq 4H^2 + \kappa > 0.
\end{aligned}$$

Agora, seja $a := H^2 + \tau^2$ e $b := \kappa - 4\tau^2$. Defina uma função real suave $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = (a + bx^2)(4a + b(1 - x^2)) + ab(1 - x^2) + \frac{b^2}{4}(1 - x^2)^2.$$

Note que $f(\nu)$ é a desigualdade (3.11) e, portanto, $q \geq f(\nu)$ em Σ . Temos que $f'(x) = (4ab + b^2)x - 3b^2x^3$ e os pontos críticos de f são

$$x = 0, \quad x = \pm \sqrt{\frac{4a + b}{3|b|}}.$$

Observando que $\frac{4a + b}{3|b|} = \frac{4H^2 + \kappa}{3(\kappa - 4\tau^2)}$ e $4(H^2 + \kappa - 3\tau^2) > 0$, pois $H^2 + \tau^2 - |\kappa - 4\tau^2| > 0$ por hipótese, temos

$$0 < 4(H^2 + \kappa - 3\tau^2) = (4H^2 + \kappa) - 3|\kappa - 4\tau^2| = (4a + b) - 3|b|$$

e

$$\frac{4a + b}{3|b|} > 1.$$

Logo o único ponto crítico de f em $(-1, 1)$ é $x = 0$. Além disso,

$$f(0) = (4a + b)^2/4 > 0 \quad e \quad f(\pm 1) = 4a(a + b) > 0.$$

Sendo f uma função real contínua definida em um compacto, o máximo e o mínimo se realizam. Sabendo que o mínimo pode ser realizado em $x = 0$ ou em $x = \pm 1$ temos que se $c = \min\{f(0), f(\pm 1)\} > 0$, então

$$q \geq f(\nu) \geq c > 0.$$

Pelo Lema 3.2.2, a métrica $ds^2 = \sqrt{q}I$ é completa, plana em Σ e (Σ, ds^2) é uma superfície parabólica. Além disso,

$$\Delta^{ds^2} \ln q = \frac{1}{\sqrt{q}} \Delta \ln q = \frac{4K}{\sqrt{q}} \leq 0,$$

ou seja, $\ln q$ é uma função superharmônica limitada por cima pela constante positiva $\ln c$ em uma superfície parabólica. Pelo Princípio do Máximo (ver [22] p. 15), $\ln q$ é constante o que implica que q é constante. Como $q \geq c > 0$, temos q é uma constante positiva. Pelo Teorema 3.1.5 segue-se o resultado e o caso $\kappa - 4\tau^2 < 0$ está provado.

2º Caso $\kappa - 4\tau^2 > 0$.

Sejam $w_1 := 2(H + i\tau)\frac{p}{\lambda}$ e $w_2 = (\kappa - 4\tau^2)\frac{A^2}{\lambda}$. Então, usando a definição de Q temos $q = 4|w_1 + w_2|^2$. Assim,

$$\begin{aligned} |w_1|^2 &= w_1 \bar{w}_1 \\ &= (H^2 + \tau^2) \frac{4|p|^2}{\lambda^2} \\ &= (H^2 + \tau^2)(H^2 - K_e), \end{aligned}$$

visto que $H^2 - K_e = \frac{4|p|^2}{\lambda^2}$. Usando a equação de Gauss, $K = K_e + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2$, e que $K \leq 0$ e $\kappa - 4\tau^2 > 0$, obtemos

$$H^2 - K_e \geq H^2 + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2 \geq H^2 + \tau^2,$$

ou seja,

$$H^2 - K_e \geq H^2 + \tau^2.$$

Logo,

$$|w_1|^2 = (H^2 + \tau^2)(H^2 - K_e) \geq (H^2 + \tau^2)(H^2 + \tau^2) = (H^2 + \tau^2)^2.$$

Também,

$$\begin{aligned}
 |w_2|^2 &= w_2 \bar{w}_2 \\
 &= (\kappa - 4\tau^2)^2 \frac{|A|^4}{\lambda^2} \\
 &= \frac{(\kappa - 4\tau^2)^2}{16} (1 - \nu^2)^2 \\
 &\leq \frac{(\kappa - 4\tau^2)^2}{16} = \left(\frac{\kappa - 4\tau^2}{4} \right)^2,
 \end{aligned}$$

visto que $(1 - \nu^2)^2 \leq 1$, pois $\nu^2 \leq 1$.

Agora, usando a desigualdade para números complexos, $|\alpha + \beta|^2 \geq ||\alpha| - |\beta||^2$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e a hipótese, $H^2 + \tau^2 - |\kappa - 4\tau^2| > 0$, temos

$$\begin{aligned}
 \frac{q}{4} = |w_1 + w_2|^2 &\geq ||w_1| - |w_2||^2 \\
 &\geq \left| (H^2 + \tau^2) - \frac{|\kappa - 4\tau^2|}{4} \right|^2 \\
 &= \frac{1}{16} |4(H^2 + \tau^2) - |\kappa - 4\tau^2||^2 > 0,
 \end{aligned}$$

isto é,

$$q \geq cte > 0.$$

Assim, q é limitado por baixo por uma constante positiva. Procedendo como no caso anterior, concluímos que q é uma constante positiva. Como $q \neq 0$, segue-se do Teorema 3.1.5 que Σ é um cilindro vertical sobre uma curva de curvatura geodésica $2H$ em $\mathbb{M}^2(\kappa)$. ■

Referências

- [1] U. Abresch and H. Rosenberg, *A Hopf Differential for Constant Mean Curvature Surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Acta Math., **193** (2004), 141-174.MR213.
- [2] U. Abresch and H. Rosenberg, *Generalized Hopf Differentials*, Mat. Contemp., **28** (2005), 1-28 .MR2195187.
- [3] L. Ahlfors and L. Sario, *Riemann surfaces*, Princeton Mathematical Series 26, Princeton University Press, Princeton, N. J. 1960.
- [4] L. J. Alías, M. Dajczer and H. Rosenberg, *The Dirichlet problem for CMC surfaces in Heisenberg space*, Calc. Var. (2007) 30:513-522.
- [5] F. Bonahon, *Geometric structures on 3-manifolds. In Handbook of Geometric Topology*, North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [6] M. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, 4ª edição, 2008.
- [7] M. do Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Textos Universitários, Rio de Janeiro: SMB, 2ª edição, 2006.
- [8] I. Chavel, *Eigenvalue in Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1984.
- [9] B. Daniel, *Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds*, Comment. Math.Helv. **82**(2007), no. 1,87-131.MR2296059.
- [10] B. Daniel, *Isometric immersions into $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ and applications to minimal surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), no. 12, 6255-6282.
- [11] B. Daniel and P. Mira, *Existence and Uniqueness of constant mean curvature spheres in Sol_3* , preprint, arXiv: 0812.3059.
- [12] J. Espinar and H. Rosenberg, *Complete Constant Mean Curvature surfaces in homogeneous spaces*, Comment. Math. Helv., to appear.

- [13] J. Espinar and I. Oliveira, *Locally convex surfaces immersed in a Killing submersion*, preprint. arXiv: 1002.1329.
- [14] J. Espinar, *La ecuación de Codazzi en superficies*, Ph.D Thesis, Universidad de Granada, 2007.
- [15] C. Espinoza, *Surfaces of Constant Mean Curvature in Homogeneous Three Manifolds with Emphasis in $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R}, \tau)$* , Ph.D. Thesis, PUC - Rio, 2010 .
- [16] T. Klotz and R. Ossermann, *Complete Surfaces in E^3 with Constant Mean Curvature*, Commentarii Mathematici Helvetici, 41 (1966-67), 313-318. MR0211332.
- [17] E. Lages, *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, 1993.
- [18] I. Fernández and P. Mira, *A Characterization of Constant Mean Curvature Surfaces In Homogeneous 3-Manifolds*, Differential Geom. Appl. 25 (2007), no.3, 281-289. MR2330457.
- [19] M. H. Farkas and I. Kra, *Riemann Surface*, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [20] C. Figueroa, *Geometria das subvariedades do grupo de Heisenberg*, Ph.D. Tese, Unicamp (1996).
- [21] C. Figueroa, F. Mercuri and R. Pedrosa, *Invariant surfaces of the Heisenberg groups.*, Ann. Math. Pura Appl. 177, (1999) 173-194.
- [22] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 1983.
- [23] D. Hoffman, *Surfaces of constant mean curvature in manifolds of constant curvature*, J. Diff. Geom., 8 (1973), 161-176.
- [24] J. M. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction Curvature*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [25] W. S. Massey, *Algebraic Topologic: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [26] C. Matheus, *A Classificação de Thurston das Geometrias tridimensionais*, Notas de seminários, Impa, 2007.
- [27] J. Milnor, *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups*, Advances in Mathematics 21 (1976) 293-329.

- [28] B. Nelli and H. Rosenberg, *Minimal surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Bull. Braz. Math. Soc., New Series 33, 263-292 (2002).
- [29] P. Petersen, *Riemannian Geometry*, Graduate texts in Mathematics. Springer, New York, 2nd edition, 2006.
- [30] A. L. Pinheiro, *Minimal vertical graphs in Heisenberg space*, Preprint.
- [31] B. O'Neill, *The Fundamental equations of Submersion*, Michigan Math. J., 13(1969)459-469.
- [32] V. Patrangenaru, *Classifying 3 and 4 dimension homogeneous Riemannian manifolds by Caetan triples*, Pac. J. Math., 173(2): 511-532, 1996.
- [33] H. Rosenberg, R. Souam, E. Toubiana, *General curvature estimates for stable H-Surfaces in 3-manifold*. To appear in J. of Diff. Geom., 2010.
- [34] P. Scott, *The geometrie of 3-Manifolds*, Bull. London Math. Soc, 15 (1983), 401-487.
- [35] W. Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Vol. 1, Princeton University Press, 1997.
- [36] R. Tribuzy, *Hopf's method and deformations of surfaces preserving mean curvature*, An. Acad. Brasil. Ciênc., 4 (1978), 447-450.
- [37] F. Torralbo, *Rotationally Invariant Constant Mean Curvature Surfaces In Homogeneous 3-Manifolds*, Diff. Geom. Appl., to appear (2009), arXiv:0911.5128.
- [38] F. Torralbo, *Superficies de Curvatura Media Paralela en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ y $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ y Superficie de Curvatura Media constante en Espacios Homogéneos*, Ph.D. Thesis, Universidade de Granada (2010).
- [39] F. Torralbo, *Compact Minimal Surfaces in The Berger Spheres*, preprint, 2009, arXiv:0906.1439.
- [40] E. Toubiana e R. Sá Earp, *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann*. Ed. Cassini, Paris, 2009.
- [41] M. Troyanov, *L'horizon de SOL*, Math.1998 vol. 16 (5),441-479.
- [42] R. Younes, *Surfaces Minimales Dans des Variétés Homogènes*, Ph.D. Thesis, Université François Rabelais de Tours, 2009.

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA

CEP: 40170-110

<<http://www.pgmat.ufba.br>>