Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Dissertação de Mestrado

Invariantes cardinais definidos a partir dos ideais clássicos da reta, com aplicações

Harlen Wenderson Garcia da Silva

Salvador-Bahia

Abril de 2015

Invariantes cardinais definidos a partir dos ideais clássicos da reta, com aplicações

HARLEN WENDERSON GARCIA DA SILVA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Samuel Gomes da Silva.

Salvador-Bahia

Abril de 2015

Silva, Harlen Wenderson Garcia .

Aplicações de Princípios Combinatórios em Topologia Geral / Harlen Wenderson Garcia da Silva. – Salvador: UFBA, 2015.

166 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Samuel Gomes da Silva.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2015.

Referências bibliográficas.

1. Teoria dos conjuntos. 2. Teoria combinatória de conjuntos. 3. Topologia. I. Silva, Samuel Gomes da. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 510.22

: 515.122

Invariantes cardinais definidos a partir dos ideais clássicos da reta, com aplicações

Harlen Wenderson Garcia da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 30 de Abril de 2015.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Samuel Gomes da Silva (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Marcelo Dias Passos
UFBA

Prof. Dr. Santi Domenico Spadaro
USP

Resumo

Dado qualquer ideal fechado para uniões enumeráveis, podem ser definidos os invariantes cardinais não-enumeráveis aditividade (add), número de cobertura (cov), uniformidade (non) e cofinalidade (cof). Neste trabalho, investigamos os cardinais do diagrama de Cichon - que são invariantes cardinais como os acima descritos, obtidos quando consideramos os ideais clássicos $\mathcal{M}$ e $\mathcal{L}$ (respectivamente, o ideal dos subconjuntos magros da reta e o ideal dos subconjuntos Lebesgue nulos da reta). Apresentamos demonstrações para várias desigualdades entre esses cardinais, usando argumentos conjuntísticos e/ou topológicos ou via morfismos na categoria $\mathrm{Dial}_2(Sets)^{op}$ (por exemplo, $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ é menor ou igual a $\mathrm{non}(\mathcal{L})$, $\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{cov}(\mathcal{M})\}$, bem como as desigualdades duais). Aplicações desses cardinais em Topologia e Análise também são investigadas, apresentando demonstrações. Por exemplo, espaços de Lindelöf de tamanho menor do que $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ (ou, mais geralmente, que podem ser escritos como união de menos do que $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ subespaços compactos) são D-espaços. Vários resultados envolvendo cardinais do diagrama de Cichoń e variações seletivas de separabilidade são apresentados; algumas demonstrações utilizam argumentos baseados em jogos topológicos e conjuntísticos.

Palavras-chave: : Topologia geral, Combinatória Infinitária, Teoria dos Conjuntos, Filtros e Ideais, Hipótese do Contínuum, Axioma de Martin e Invariantes cardinais.

Abstract

Given any ideal closed for countable unions, the cardinal invariants can be defined non-countable additivity (add), covering number (cov), uniformity (non) and cofinality (cof). In this work, we investigate the cardinals of Cichoń's diagram - which are cardinal invariants as described above, obtained when we consider the classical ideals $\mathcal{M}$ e $\mathcal{L}$ (respectively, the ideal of the Meager subsets of the line and the ideal of Lebesgue Null subset of real line). We present proof for various inequalities between these cardinal, using set theorical and / or topological or via morphisms arguments in the category $\mathrm{Dial}_2(Sets)^{op}$ (e.g $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ is less than or equal to $\mathrm{non}(\mathcal{L})$, $\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{cov}(\mathcal{M})\}$ as well as the dual inequalities). Applications of these cardinals in topology and analysis are also investigated, presenting proofs. For example, Lindelöf spaces smaller than $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$(or, more generally, that can be written as a union of less than $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ compact subspaces) are D-spaces. Several results involving the cardinals of Cichoń's diagram and selective variations of separability are presented; some proofs use arguments based on topological and set theorical games.

Keywords: General Topology, Infinitary Combinatorics, Set Theory, Filters and Ideals, Continuum Hypothesis, Martin's Axiom and Cardinal Invariant.

Sumário

Introdução

O conceito de ideal é a base desse trabalho, pois promove um estudo de questões relativas a famílias de subconjuntos da reta real que tem certas qualidades que os tornam "pequenos", a saber os ideais $\mathcal{M}$ e $\mathcal{L}$, onde são, respectivamente, ideal dos conjuntos magros e ideal dos conjuntos Lebesgue nulos, os quais satisfazem essa noção. As questões que aparecem no trabalho têm por semente de motivação: conceitos da Análise, Teoria da Medida e Topologia, onde possíveis respostas, no sentido de serem *consistentes*, podem ser dadas com métodos envolvendo Teoria dos Conjuntos. As respostas, em geral, de maior interesse aparecem quando assumimos a negação da Hipótese do Continuum(**CH**). Propriedades envolvendo medida e categoria sobre a reta, como por exemplo, sob o Axioma de Martin todo subconjunto da reta com cardinalidade menor que o continuum tem medida nula; uma união enumerável de conjuntos raros não cobre a reta(O teorema de Baire), entre outras, são tratadas em contextos mais gerais que correspondem ao estudo dos invariantes cardinais $\mathrm{add}(\mathcal{I}), \mathrm{cov}(\mathcal{I}), \mathrm{non}(\mathcal{I})$ e $\mathrm{cof}(\mathcal{I})$, onde $\mathcal{I} = \mathcal{L}$ ou $\mathcal{I} = \mathcal{M}$. Assumir a existência, por exemplo, de conjuntos de Luzin implica que $\mathrm{non}(\mathcal{M}) = \aleph_1$. Consequências do Axioma de Martin(**MA**) estão naturalmente associadas ao estudo dos invariantes cardinais apresentados: sob $\mathbf{MA} + \neg\mathbf{CH}$, o valor de todos esses invariantes cardinais citados até este momento é igual a cardinalidade do continuum. Aplicações relacionadas a **MA** e **CH**, envolvendo os ideias $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$, que faz parte dos escopo do trabalho, consiste no estudo relacionado ao *Diagrama de Cichoń*.

O corpo da presente dissertação está dividido em três capítulos e três apêndices. No primeiro capítulo são apresentados alguns fatos básicos para leitores que não tenham tanto conhecimento em Teoria dos Conjuntos ou em Topologia Geral, possam ter o mínimo de definições elementares para seguir com uma leitura desse trabalho. Alguns resultados um pouco mais avançados também são apresentados nesses dois capítulos iniciais, por serem usados em teoremas do capítulo três e no apêndice.

No capítulo dois, apresentamos algumas desigualdades envolvendo os invariantes cardinais definidos a partir dos ideias da reta já citados, demonstradas tanto pelo uso ferramentas puramente conjustísticas, juntamente com alguns fatos de caráter topológico, quanto via morfismos da categoria $\mathrm{Dial}_2(Set)^{op}$, já que os invariantes cardinais de interesse podem ser expressos como *norma* de objetos. Mais ainda, é demonstrado que para a noção de objeto dual na Categoria Dialética existe a desigualdade dual entre as normas dos objetos envolvidos. No capítulo três, apresentamos uma construção de cunho combinatório e topológico, com intuito de relacionar os conceitos de ona (*open neighbourhood assignment*) e espaços que são Lindelöf, a fim de mostrarmos que um espaços topológicos de Lindelof de tamanho estritamente menor que $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ são necessariamente D-espaços. Destacamos resultados que mesclam propriedades de separabilidade seletiva. Também demonstramos que se $\kappa = \pi\mathrm{w}(X) < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ e todo conjunto denso é separável, então X é R-separável. Se X for um espaço enumerável sem pontos isolados com $\pi w(X)$ estritamente menor que $\mathrm{add}(\mathcal{M})$, o espaço X é ω-resolvível, obtendo como corolário disso que qualquer espaço X com π-peso estritamente menor que $\mathrm{add}(\mathcal{M})$ também é ω-resolvível. Apresentamos um caracterização para $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ que está ligada ao jogo de Galvin. Também damos uma caracterização do invariante cardinal $\mathrm{add}(\mathcal{M})$ via jogos conjustísticos. No apêndice, mostrarmos caracterizações de alguns invariantes cardinais que podem ser descritos via argumentos que envolvem uma combinatória de coberturas abertas de um espaço topológico. Propriedades que traduzem tal combinatória são conhecidas como: propriedade de Rothberger, Menger e Hurewicz. Também apresentamos resultados que estão relacionados com conjuntos que são fortemente nulos (SMZ), omitindo algumas demonstrações.

Por fim, devido a extensão deste trabalho, omitiremos ou apenas esboçaremos algumas poucas demonstrações. Porém, deixamos claro ao leitor o desejo de inclui-lás em trabalhos futuros, por exemplo, em seminários. Destacamos que no último apêndice apresentamos a Conjectura de Borel e o ideal dos conjuntos fortemente nulos, que têm uma ampla relação com os invariantes cardinais que aparecem no diagrama de Cichoń.

Diagrama de Cichoń

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{cov}(\mathcal{L}) \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{L}) \arrow[r] & 2^{\aleph_0} \\
& & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\aleph_1 \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathcal{L}) \arrow[r] \arrow[uu] & \mathrm{add}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{non}(\mathcal{L}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

Capítulo 1

Preliminares

Naturalmente, este primeiro capítulo e as seções que se sucedem, tem por objetivo dar algumas noções consideradas básicas para o desenvolvimento do trabalho, tal como estabelecer algumas nomenclaturas e notações. Também provaremos algumas asserções que serão úteis para demonstrarmos alguns dos teoremas apresentados nos capítulos posteriores. No presente capítulo, várias noções serão supostas conhecidas e sobre as quais daremos alguma referência. Vamos fazer uso da axiomática de Zermelo-Fraenkel (**ZF**), porém, na maior parte do trabalho estaremos fazendo uso de **ZFC** := **ZF** + **AC**, onde **AC** denota o Axioma da Escolha.

1.1 Noções de Teoria dos Conjuntos

Dados conjuntos X e Y, um subconjunto R do produto cartesiano $X \times Y$ é chamado de *relação* (binária). Para uma relação R do cartesiano $X \times Y$, usualmente denotaremos por aRb, em vez de $(a, b) \in R$. Diremos que o conjunto $R^{-1} := \{(y, x) : (x, y) \in R\}$ é a relação inversa de R.

O domínio de uma relação R é definido como sendo o conjunto de todos os $x \in X$ tal que $(x, y) \in R$ para algum $y \in Y$, isto é, $\mathrm{dom}(R) = \{x \in X : \exists y \in Y((x, y) \in R)\}$. A imagem $\mathrm{im}(R)$ da relação R é definido como o conjunto de todos os $y \in Y$ tal que $(x, y) \in R$ para algum $x \in X$, dito de outro modo, $\mathrm{im}(R) := \{y \in Y : \exists x \in X((x, y) \in R)\}$. O conjunto $F = \mathrm{dom}(R) \cup \mathrm{im}(R)$ é chamado *corpo* de R. Uma relação $R \subseteq X \times Y$ é chamada de *função* se

$$(\forall x \in X,\ y_1, y_2 \in Y)(xRy_1 \wedge xRy_2 \to y_1 = y_2)$$

O conjunto das funções de X em Y será denotado por ${}^{X}Y$. Dada $f \in {}^{X}Y$, denotaremos por dom(f) e im(f), respectivamente, o *domínio* de f e a *imagem* de f. Sejam $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$, definimos a *restrição* de f a A como sendo a função $f \upharpoonright A : A \to Y$ definida como $(f \upharpoonright A)(a) = f(a)$ para todo $a \in A$; a *imagem* de A por f como sendo o conjunto $f[A] = \{f(a) : a \in A\}$ e a *imagem inversa* de B por $f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$. Vamos assumir conhecida a definição de composição entre relações.

Proposição 1.1. *Se $f : A \to B$ é uma função, A é não-vazio:*
(i) *Existe uma função $G : B \to A$ tal que $g \circ f : A \to A$ é a identidade se, e somente se, f é injetora.*
(ii) *Analogamente, existe uma função $h : B \to A$ tal que $f \circ h : B \to B$ é a função identidade se, e somente se, $f : A \to B$ é sobrejetora.* ■

As funções g e h, do teorema acima, são chamadas de *Inversa a esquerda* e *Inversa a direita*, respectivamente.

Definição 1.2. Dados X e A conjuntos. Uma indexação de X por A é uma função $x : A \longrightarrow X$ sobrejetora. Neste caso, diz-se que A é um *conjunto de índices* para X, ou que X *pode ser indexado* por A. Para cada $i \in A$, diz-se que x_i é a $i-$*ésima coordenada* de x e denota-se por x_i.

Na maioria das vezes cometeremos um abuso de linguagem escrevendo : "$X = \{x_i : i \in A\}$" como indexação de X por A. No caso em que x é uma indexação injetora, diz-se que x é uma *enumeração* de X por A e, novamente, por vezes diremos que $\{x_i : i \in A\}$ é uma enumeração de X por A.

Sejam $\mathbb{P}$ um conjunto e $\leq$ uma relação binária sobre $\mathbb{P}$. O par $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ é chamado de *pré-ordem* quando $\leq$ é :

(i) reflexiva, i.e, se $p \in \mathbb{P}$ então $p \leq p$;

(ii) transitiva, i.e, se $p, q, r \in \mathbb{P}$, e $p \leq q$, $q \leq r$, então $p \leq r$.

No caso em que $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ é uma pré-ordem e satisfaz a seguinte propriedade:

(iv) $\leq$ é antissimétrica, isto é, sempre que $x, y \in \mathbb{P}$, vale $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$.

Diz-se que $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ é uma *ordem parcial.* Agora, sendo $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ uma ordem parcial, diz-se que $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ é *ordem total*[1] se $\leqslant$ é tricotômica, i.e :

(v) para todo $x, y \in \mathbb{P}$, $x = y$ ou $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

[1]Alguns autores usam: *ordem linear* ao invés de ordem total. No caso que $\mathbb{P}$ é uma ordem linear, também é dito que o conjunto $\mathbb{P}$ é linearmente ordenado.

Na maioria das vezes escreveremos, por comodidade, " $\mathbb{P}$ " ao invés de "$\langle\mathbb{P},\leq\rangle$", quando a relação estiver clara no contexto.

Faremos um breve destaque ao conceito de *boa ordem*, ideia que fará parte de todo este trabalho no momento de definirmos os pequenos cardinais na seção 1.8. Sejam r uma relação e a um elemento no domínio de r, então a é um $r-$*minimal* se não existe b, distinto de a, tal que $\langle b,a\rangle \in r$. Uma relação r é dita *bem-fundada*, se qualquer subconjunto X não-vazio do corpo de r, possui elemento $r-$minimal.

Diremos que $\langle\mathbb{P},\leqslant\rangle$ é uma *boa ordem* (resp., que $<$ é uma *boa ordem estrita*) quando $\leqslant$ for uma ordem parcial bem-fundada. Em outras palavras, uma ordem parcial $\langle\mathbb{P},\leqslant\rangle$ é boa ordem se todo subconjunto não-vazio A, existe um "menor elemento" $a \in A$, que será denotado por $\min A$. Note que, "toda boa ordem é uma ordem total". De fato: dados uma boa ordem $\langle\mathbb{P},\leqslant\rangle$ e $x,y \in \mathbb{P}$, tem-se que o conjunto não vazio $\{x,y\}$ tem elemento mínimo segundo $\leqslant$, o que implica que $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

Sejam $\langle\mathbb{P},<\rangle$ uma boa-ordem estrita e $f:\mathbb{P}\to\mathbb{P}$ uma função estritamente crescente, podemos afirmar: $x \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{P}$. Se o conjunto $A := \{x \in \mathbb{P} : f(x) < x\}$ não fosse vazio, pela boa-ordem de $\mathbb{P}$, tomamos $z := \min A$ para a propriedade $f(z) < z$, como f é estritamente crescente, temos $f(f(z)) < f(z) < z$, mas isso implica que $f(z) \in A$ o que contradiz a minimalidade de z. ■

Um subconjunto $C \subseteq \mathbb{P}$ será uma *cadeia* na ordem parcial $\langle\mathbb{P},\leq\rangle$ se C for totalmente ordenado por $\leq$, i.e., se a ordem parcial $\langle C,\leq \cap (C\times C)\rangle$ for uma ordem total. Uma cadeia C é dita *maximal* se qualquer subconjunto $D \subseteq \mathbb{P}$ que contenha propriamente C não é cadeia.

Vamos assumir conhecido o conceito limitante superior em uma ordem parcial. Aproveitamos tal contexto para enunciar o conhecido "Lema de Kuratowski-Zorn":

Lema 1.3 (Kuratowski-Zorn). *Se toda cadeia numa ordem parcial $\mathbb{P}$ possui limitante superior, então $\mathbb{P}$ possui elemento maximal.*

Um fato também conhecido, e que destacamos aqui, é que o Lema de Kuratowski-Zorn é equivalente ao Axioma da Escolha, o qual é enunciado abaixo:

(**AC**): Se $\mathcal{F}$ é uma família de conjuntos não-vazios, existe uma função $f:\mathcal{F}\to\bigcup\mathcal{F}$, chamada função escolha, que a cada $A\in\mathcal{F}$ que satisfaz $f(A)\in A$[2].

Dois pontos que também devemos citar é que: **AC** é indecidível em **ZF** e equivale a todo conjunto ser bem-ordenado. Essa é sem dúvida a equivalência mais importante no

[2]Outra formulação clássica, e imediata, para **AC**: Dada uma família $\mathcal{F}$ de conjuntos não-vazios, dois-a-dois disjuntos, existe um conjunto C tal que C contém somente um elemento de cada elemento de $\mathcal{F}$.

que diz respeito a cardinalidade, pois no contexto de cardinalidade, que apresentaremos posteriormente, todo conjunto admite cardinalidade. Um fato conhecido é que sob Axioma da Escolha: o Axioma da Fundação[3](“$\in$” é uma relação bem-fundada no universo), acaba sendo equivalente a não existência de sequências $\in -$decrescentes infinitas.

O conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto A será denotado por $\mathcal{P}(A)$. Um conjunto A é dito *transitivo* se $A \subseteq \mathcal{P}(A)$ ou, equivalentemente, A é transitivo se para todo $x \in A$ e todo $y \in x$, temos que $y \in A$. Essa é uma noção muito importante para os fundamentos da Teoria dos Conjuntos e, essencial, para definição dos “números ordinais”. Um número *ordinal*, ou, por simplicidade, um ordinal, é um conjunto transitivo e bem-ordenado por “$\in$”. Usaremos as letras gregas: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta$ e ξ, para designar ordinais.

Para ordinais, é comum escrevermos “$<$” ao invés de “$\in$”. Sendo α um ordinal, pode-se demonstrar facilmente da definição que $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$, isto é, um ordinal α é o conjunto de ordinais menores que ele. Dada uma boa ordem $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ tal que $\langle \alpha, \in \rangle$ é isomorfa a $\langle \mathbb{P}, < \rangle$, diremos, por abuso de linguagem, que α é isomorfo a $\langle \mathbb{P}, < \rangle$. Um ordinal é um *representante das boas ordens*, no seguinte sentido: dada uma boa ordem $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ existe precisamente um único ordinal α que é isomorfo a $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ e a esse ordinal denominamos o *tipo de ordem* de $\langle \mathbb{P}, < \rangle$, ademais, denotaremos α por t.o$\langle \mathbb{P}, < \rangle$.

Se α é um ordinal, vale que o conjunto $\alpha \cup \{\alpha\}$ também é um ordinal. Note que se β for um ordinal tal que $\alpha < \beta$, então $\alpha \cup \{\alpha\} \leqslant \beta$. Logo, $\alpha \cup \{\alpha\}$ é o menor ordinal dentre os ordinais maiores que α. Assim, definimos $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$ como o *sucessor* de α. Se um ordinal α não é sucessor então dizemos que é um *ordinal limite*. Em qualquer caso, dado um ordinal α sempre vale a igualdade: $\alpha = \sup\{\beta + 1 : \beta < \alpha\}$. Outros resultados, considerados de rotina, são:

(i) Se α, β são ordinais, vale uma e apenas uma entre: $\alpha = \beta$ ou $\beta \in \alpha$ ou $\alpha \in \beta$;

(ii) Se α, β, ξ são ordinais, $\alpha \in \beta$ e $\beta \in \xi$, então $\alpha \in \xi$;

(iii) Se C é um conjunto não-vazio de ordinais , então $\bigcap C$ é um ordinal, $\bigcap C \in C$ e $\bigcap C = \min C$

(iv) Se X é conjunto de ordinais, então $\bigcup X$ é um ordinal e, mais ainda, $\bigcup X = \sup X$.

Uma consequência direta de $(i), (ii)$ e (iii) é que todo conjunto de ordinais que seja transitivo também é um ordinal.

Para provarmos a existência de ordinais limites, nós necessitamos do Axioma do Infinito, que declara que : “existe um conjunto x, tal que $0 \in x$ e para todo $y \in x, y \cup \{y\} \in x$”. Tal x é dito *conjunto indutivo*. Nós definimos:

[3]No Brasil, é tradicional dizer “Axioma da Regularidade”, ao invés de Axioma da Fundação.

$$\omega := \bigcap\{x : x \text{ é indutivo }\}$$

Não é difícil checar que ω é um ordinal e que, de fato, é o menor ordinal limite. Os elementos de ω são ditos *números naturais*.

Um fato importante é que não existe um conjunto contendo todos os ordinais. Isso pode ser resumido no seguinte:

$$(\neg\exists z\,[\forall x\,(x \text{ é ordinal} \rightarrow x \in z)])$$

Se existisse tal z, aplicando o Axioma da Separação em z, obteríamos o conjunto $On = \{x : x \text{ é ordinal}\}$. Como $\in$ é tricotômico, bem-fundado em On e, além disso, sendo On transitivo, i.e., todo elemento de um ordinal é também um ordinal, segue que o conjunto On é um ordinal. Diante disso, temos que $On \in On$, mas isso contradiz a tricotomia de $\in$. Deduzimos daqui que, de fato, não existe o conjunto de todos os números ordinais.

Se A e B são conjuntos, dizemos que A e B são *equipotentes*(denotamos por $A \approx B$) se existir $f : A \to B$ bijetora. Passamos agora a definição que diz respeito ao conceito de *número cardinal* ou, por simplicidade, *cardinal*.

Definição 1.4. Diz-se que um ordinal α é um cardinal se todo ordinal $\beta < \alpha$ não pode ser colocado em bijeção com α.

Sob Axioma da Escolha, todo conjunto X pode ser bem ordenado, logo existe ordinal α que é isomorfo a uma certa boa ordem sobre X. Assim, o conjunto $\{\alpha : X \approx \alpha\}$, que a priori é uma classe, mas se demonstra ser um conjunto, conforme se verificará mais adiante, é não vazio, e isso justifica a seguinte definição: dado um conjunto X, a *cardinalidade* ou *tamanho* de X é definida como sendo

$$|X| := \min\{\alpha : X \approx \alpha\}.$$

Assim, α é um cardinal se e só se $\alpha = |\alpha|$. Considerando **AC**, uma consequência da definição de cardinal é a seguinte: dados X e Y conjuntos, sempre é possível comparar suas cardinalidades. Quanto a notação, é tradicional usar as letras gregras $\kappa, \lambda, \mu, \theta$ para cardinais.

Sejam A e B conjuntos, diz-se que A é *dominado* por B, e denota-se por $A \preceq B$, se existir uma função injetora $f : A \longrightarrow B$. Obviamente, se $X \subseteq Y$, então $X \preceq Y$. Também temos uma dominação estrita, que definimos por $X \prec Y$ se $X \preceq Y$ e $Y \npreceq X$.

Seja X um conjunto. Diz-se que X é *finito* se existir um $n < \omega$ tal que $X \approx n$. Caso contrário, diz-se que X é *infinito*. Definimos agora dois conceitos comumente citados em outras áreas da matemática: um conjunto X é *enumerável* se X for finito ou $X \approx \omega$.

Caso contrário, diz-se que X é *não enumerável*. Se X for infinito e enumerável, diz-se que X é *infinito enumerável*.

O seguinte resultado é importante e básico para a Teoria de Cardinais e introduz o argumento diagonal de Cantor.

Teorema 1.5 (Cantor)**.** *Se X é um conjunto, então $|X| < |\mathcal{P}(X)|$. Dito de outro modo, não existe $f : X \to \mathcal{P}(X)$ que seja sobrejetora.*

Uma consequência imediata e muito conhecida: é a não existência de um conjunto universo, i.e, não existe o conjunto de todos os conjuntos. Do Teorema de Cantor, também podemos concluir que todo ordinal α existe um cardinal maior que α. Assim, temos uma maneira de " fabricar" cardinais não enumeráveis, como exemplo: $|\mathcal{P}(\omega)|$. Sem o axioma da escolha não podemos ordenar $\mathcal{P}(\omega)$ daí não podemos construir $|\mathcal{P}(\omega)|$ na definição dada. Entretanto, podemos usar o seguinte resultado para obter cardinais maiores que ω sem fazer uso de **AC**:

Teorema 1.6 (Hartogs)**.** *Seja X um conjunto, então $\{\alpha : \alpha \preceq X\}$ é um conjunto que também é um ordinal. Mais ainda, $\{\alpha : \alpha \preceq X\} \npreceq X$ é o menor ordinal com essa propriedade.*

Demonstração:

Usando Axioma das Partes e Separação, definimos o conjunto

$$h(X) := \{r \in \mathcal{P}(X \times X) : r \text{ é boa ordem sobre o corpo}(r) \subseteq X\}.$$

Do Axioma da Substituição, definimos o conjunto

$$H(X) := \{ \text{ t.o}(\langle \text{ corpo}(r), r\rangle) : r \in h(X)\}.$$

Disso, segue que é imediato a verificação de $H(X) = \{\alpha : \alpha \preceq x\}$. Para mostrarmos que $H(X)$ é um ordinal, basta ver que $H(X)$ é transitivo: de fato, considere $\beta \in \alpha, \alpha \in H(X)$. Logo, $\alpha \preceq X$, e como $\beta \in \alpha$, obtemos $\beta \preceq X$. Portanto, $\beta \in H(X)$, segue que $H(X)$ é ordinal. Além disso, $H(X)$ também é um cardinal. Do contrário, suponha que exista $\beta < H(X)$, com $\beta \approx H(X)$. Concluimos que $\beta \preceq X$, então $H(X) \preceq X$, logo $H(X) \in H(X)$ e isto contradiz a tricotomia em On.

Para a justificativa de que $H(X)$ é o menor ordinal que não é dominado por X, note que $H(X) \npreceq X$ vale ou, do contrário, teríamos contradição da tricotomia em On. Daí, todo ordinal $\xi < H(X)$ é dominado por X. O que nós diz que $H(X)$ é o menor ordinal que $H(X) \npreceq X$. ∎

O conjunto $H(X) = \{\alpha \in On : \alpha \preceq X\}$ é chamado de *função de Hartogs* de X.

Do que já foi verificado em 1.6, dado um cardinal κ, podemos definir $\kappa^+ = H(X)$ e, pode ser verificado que $\kappa^+ = \min\{\lambda : \lambda \text{ é cardinal}, \lambda > \kappa\}$. Sob **AC** a cardinalidade de X está sempre bem definida e $H(X)$ coincide com $|X|^+$.

Definição 1.7. Seja κ um cardinal. Dizemos que κ é cardinal sucessor, se existe λ tal que $\kappa = \lambda^+ = H(\lambda)$. Se κ não é cardinal sucessor, então é dito cardinal limite.

Apresentamos alguns fatos:

(i) Todo cardinal $\kappa \geq \omega$ é um ordinal limite;

(ii) ω é o menor cardinal infinito;

(iii) Se A é um conjunto de cardinais, então $\sup(A)$ é um cardinal.

Se A é um conjunto e $\lambda \leq |A|$, definimos os seguintes conjuntos:

(i) $[A]^\lambda = \{Y \subseteq A : |Y| = \lambda\}$

(ii) $[A]^{<\lambda} = \{Y \subseteq A : |Y| < \lambda\}$

(iii) $[A]^{\leq\lambda} = \{Y \subseteq A : |Y| \leq \lambda\}$

(iv) ${}^{<\lambda}A = \bigcup\limits_{\xi<\lambda} {}^{\xi}A.$

Sendo X um conjunto e α um ordinal, dizemos que ${}^{\alpha}X$ é o conjunto de todas as *sequências* de elementos de X que tem comprimento α. Um caso particular dos conjuntos que acabamos de definir são: ${}^{<\omega}A$ e $[A]^{<\omega}$, conjunto das sequências finitas de elementos de A e os subconjuntos finitos de A, respectivamente. Outra definição, se $s \in {}^{<\omega}A$, com $\mathrm{dom}(s) = n$, denotamos $s := \langle s(0)s(1)...s(n-1)\rangle$, e para $a \in A$ denote $s^\frown a := s \cup \{\langle n, a\rangle\}$. Dados $s, t \in {}^{<\omega}A$, onde $s \in {}^{n}A, t \in {}^{k}A$, denotamos por $s^\frown t \in {}^{n+k}A$ a concatenação de s e t, i.e., $s^\frown t := \langle s(0)s(1)...s(n-1)t(0)t(1)...t(k-1)\rangle$.

Um resultado elementar da Teoria dos Conjuntos, porém, importante para esse trabalho, é descrito a seguir:

Proposição 1.8. ${}^{\omega}2 \approx {}^{\omega}\omega \approx \mathcal{P}(\omega) \approx \mathbb{R}$. ■

De posse do conceito de cardinalidade, observamos um fato em **ZFC** : dada $f : A \to B$ uma sobrejeção, existe função h inversa a direita de f, logo $|B| \approx |\operatorname{im}(h)| \leq |A|$. Segue disso que $|B| \leq |A|$. Então deduzimos que se uma família $\{A_x : x \in I\}$ tem tamanho κ, então existe $J \subseteq I$, $|J| = \kappa$, com $\{A_x : x \in J\}$ uma enumeração.

Enunciaremos dois teoremas clássicos e fundamentais em matemática:

Teorema 1.9 (Indução Transfinita)**.** *Seja X uma classe de ordinais:*
(i) assuma que $0 \in X$;
(ii) sempre que $\alpha \in X$, então $\alpha + 1 \in X$;
(iii) se α é um ordinal limite e $\beta \in X$ para todo $\beta < \alpha$, então $\alpha \in X$.
Então X é a classe de todos os ordinais.

Apresentaremos o teorema de Recursão para ordinais.

Teorema 1.10 (Recursão Transfinita)**.** *Sejam ξ um ordinal X um conjunto não-vazio. Seja $a \in X, f : X \to X$ e $g : \bigcup_{\zeta<\xi} {}^{\zeta}X \to X$. Então existe única função $F : \xi \to X$ tal que*
(i) $F(0) = a$;
(ii) $F(\zeta + 1) = f(F(\zeta))$ para todo $\zeta < \xi$;
(iii) $F(\zeta) = g(F \restriction \zeta)$ para qualquer $\zeta < \xi$, ζ ordinal limite.

Um fato proveitoso, segue da seguinte propriedade: Se $\mathcal{C}$ é uma família de cardinais então $\bigcup \mathcal{C}$ também é um cardinal. Com isso e usando recursão transfinita, nós podemos construir para todo ordinal α um cardinal ω_α:

(i) $\aleph_0 = \omega$;

(ii) $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+ = \omega_\alpha^+$;

(iii) $\aleph_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \aleph_\alpha = \bigcup_{\alpha<\beta} \omega_\alpha$, para β ordinal limite.

Vamos destacar algumas propriedades da aritmética cardinal. Seja κ e λ cardinais, definimos:

(i) $\kappa + \lambda = |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|$

(ii) $\kappa.\lambda = |\kappa \times \lambda|$

(iii) $\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa|$

Proposição 1.11. *Dado um conjunto X infinito e $\kappa \leq |X|$, então*

$$|[X]^\kappa| = |[X]^{\leq\kappa}| = |X|^\kappa.$$

■

A próxima proposição será usada de maneira muito natural nessa dissertação:

Proposição 1.12. *Dada uma família $\{X_i : i \in I\}$ de conjuntos indexados por um conjunto I. Vale a desigualdade:*

$$\left|\bigcup_{i\in I} X_i\right| \leq |I|. \sup\{|X_i| : i \in I\}.$$

Seja D um subconjunto de um ordinal α. Tal conjunto D é dito *cofinal* em α se para todo $\lambda \in \alpha$ existe $\xi \in D$, tal que $\lambda \leq \xi$. Se α é um ordinal, a *cofinalidade* de α é definida por $\mathrm{cf}(\alpha)$, como sendo o menor ordinal, tal que existe uma função $f : \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ com $\mathrm{im}(f)$ sendo um conjunto cofinal em α, também dizemos que f nessas condições é *cofinal* em α. Em símbolos, temos

$$\mathrm{cf}(\alpha) := \min\{\beta : \beta \,\text{é ordinal e existe}\, f : \beta \to \alpha \,\text{cofinal em }\, \alpha\}.$$

Pode ser demonstrado que dado um ordinal α, temos:

$$\mathrm{cf}(\alpha) = \min\{|D| : D \,\text{é um subconjunto cofinal em}\, \alpha\}.$$

Diz-se que um ordinal α é *regular* se $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$. Um ordinal α é dito *ordinal singular* se $\mathrm{cf}(\alpha) < \alpha$. Vale destacar que um ordinal sucessor nunca é regular, ou seja, a noção de ordinal regular só faz sentido para ordinais limites, pois dado um ordinal sucessor sua cofinalidade sempre é 1. Outro ponto simples a ser observado é que em certas situações para demonstrar se um cardinal κ é regular, basta checar que κ é a cofinalidade de algum ordinal α.

Algumas propriedades referentes a cofinalidade são dadas abaixo:

(i) κ^+ é cardinal regular para todo cardinal κ infinito.

(ii) Se $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, então ${}^{\lambda}\kappa = \displaystyle\bigcup_{\alpha<\kappa} {}^{\lambda}\alpha$.

(iii) Se κ é cardinal infinito $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} > \kappa$.

(iv) Se λ é cardinal regular, $A \subset \lambda$, e $|A| < \lambda$ então existe $\alpha < \lambda$ tal que $A \subset \alpha$.

(v) Se κ é regular, $\lambda < \kappa$ e $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ e $|X_\alpha| < \kappa$, para todo $\alpha < \lambda$, então $\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha \neq \kappa$, e mais ainda, $|\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha| < \kappa$.

Vamos justificar apenas o item (iv), pois bem: Seja $\beta = \mathrm{t.o}\langle A, \in\rangle$, onde A está com a ordem induzida por λ, e seja $f : \beta \to A \subset \lambda$ um isomorfismo de ordem. Como λ é regular, temos $\beta < \mathrm{cf}(\lambda)$. Por conseguinte, A não é cofinal em λ, i.e, existe $\alpha < \lambda$ tal que $\xi < \alpha$ para todo $\xi \in A$. Segue o desejado.

A cofinalidade é um conceito que pode ser pensando em contextos mais gerais de ordens parcias. Seja $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ uma ordem parcial. Diz-se que $B \subseteq \mathbb{P}$ *ilimitado* se para todo $x \in \mathbb{P}$, existe $y \in B$, tal que $y \nleq x$. Um conjunto $D \subseteq \mathbb{P}$ é dito *dominante* (ou *cofinal*) se para todo $x \in \mathbb{P}$, existe $y \in D, x \leq y$. Se $\leq$ é uma ordem total sem máximo um conjunto $B \subseteq \mathbb{P}$ é ilimitado se, e somente se, é dominante. Definimos a cofinalidade de uma ordem parcial $\mathbb{P}$, como $\text{cof}(\mathbb{P}, \leq) := \min\{|D| : D \subseteq \mathbb{P} \text{ é cofinal}\}$. Se α é um ordinal, vale que $\text{cof}(\alpha, \leq) = \text{cf}(\alpha)$.

O seguinte resultado é muito útil no sentido que podemos limitar alguns argumentos a famílias de conjuntos com índices em um subconjunto cofinal de um dado número ordinal.

Proposição 1.13. *Sejam uma família crescente $\{X_\alpha : \alpha < \xi\}, \xi$ um ordinal limite e $A \subseteq \xi$ cofinal, então $\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in \xi} X_\alpha$.* ■

Abaixo uma propriedade bastante conhecida em cursos básicos de Teoria dos Conjuntos:

Proposição 1.14. *Se $\kappa \geq \omega$, $\text{cf}(\kappa) = \min\{\lambda : \exists\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ família de subconjuntos de κ, com $|X_\alpha| < \kappa, \forall \alpha < \lambda$ e $\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha = \kappa\}$.* ■

O próximo teorema é usualmente chamado na literatura como *princípio da casa dos pombos* ou *princípio das gavetas*:

Teorema 1.15. *Sejam κ um cardinal infinito, A um conjunto de tamanho κ, e $A = \bigcup\limits_{\xi<\lambda} A_\xi$, onde $\lambda < \text{cf}(\kappa)$. Então existe $\xi < \lambda$ tal que $|A_\xi| = \kappa$.* ■

Agora, daremos um resultado básico, porém, que traz um importante "mecanismo" para provarmos que um certo cardinal é o menor que atende uma certa propriedade ou que um dado cardinal não pode satisfazer uma propriedade.

Proposição 1.16. *São equivalentes para θ e κ cardinais fixados:*

(i) $\theta \leq \kappa$.

(ii) $\forall \lambda(\lambda < \theta \Rightarrow \lambda < \kappa)$.

Demonstração:

$(i) \Rightarrow (ii)$: É óbvia.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Se tivéssemos $\theta > \kappa$, por hipótese teríamos $\kappa < \kappa$, absurdo.

■

Também podemos concluir:

Proposição 1.17. *São equivalentes para θ e κ cardinais fixados:*

(i) $\theta = \kappa$;

(ii) $\forall \lambda(\lambda < \theta \Leftrightarrow \lambda < \kappa)$.

Demonstração:

$(i) \Rightarrow (ii)$: É óbvia.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Pela proposição 1.16, temos $\theta \leq \kappa$. Se tivéssemos $\theta < \kappa$, por hipótese, teríamos $\theta < \theta$, e isso é absurdo. Portanto, vale a igualdade $\theta = \kappa$. ■

Proposição 1.18. *São equivalentes para θ, κ, λ cardinais fixados.*

(i) $\theta \leq \min\{\kappa, \lambda\}$;

(ii) $\forall \mu(\mu < \theta \Rightarrow \mu < \kappa$ *e* $\mu < \lambda)$.

Demonstração:

$(i) \Rightarrow (ii)$: É imediata.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sem perda de generalidade, suponha $\kappa \leq \lambda$. Se ocorresse $\kappa < \theta$, por hipótese teríamos que $\kappa < \kappa$, o que é um absurdo. Disso segue que $\theta \leq \kappa = \min\{\kappa, \lambda\}$. ■

Proposição 1.19. *São equivalentes para θ, κ, λ cardinais fixados.*

(i) $\min\{\kappa, \lambda\} \leq \theta$;

(ii) $\forall \mu(\mu < \kappa$ *e* $\mu < \lambda \Rightarrow \mu < \theta)$

Demonstração:

$(ii) \Rightarrow (i)$: É imediata.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Sem perda de generalidade, suponha $\lambda \leq \kappa$. Se ocorresse $\theta < \lambda$, por hipótese deduzimos que $\theta < \theta$, o que é um absurdo. Disso segue que $\min\{\kappa, \lambda\} \leq \theta$. ■

Como corolário das duas últimas proposições, podemos deduzir que:

Proposição 1.20. *Sejam κ, λ e θ cardinais fixados. Considere as seguintes afirmações sobre esses cardinais:*

(A) $\min\{\kappa, \lambda\} = \theta$;

(B) *Para todo cardinal μ, tem-se que vale a equivalência:* $\mu < \kappa$ *e* $\mu < \lambda \Leftrightarrow \mu < \theta$.

Vale que : $(A) \Leftrightarrow (B)$ ■

Vejamos outro resultado básico para demonstrações que envolvem igualdades entre números cardinais que estão submetidos a certas propriedades. Em geral é mais prático "checar" que um invariante cardinal sendo o mínimo tamanho para um conjunto que atende uma dada propriedade, também é o máximo tamanho para o qual todos os cardinais anteriores a ele a propriedade não é verificada. Abaixo, daremos a formalização do que acabamos de dizer:

Fato 1.21. *Se temos uma afirmação φ sobre cardinais, defina:*

$$\theta_1 := \min\{\kappa : \varphi(\kappa) \text{ é verdadeiro}\}$$

$$\theta_2 := \max\{\lambda : \forall \mu < \lambda, \varphi(\mu) \text{ é falso}\}$$

vale que $\theta_1 = \theta_2$.

Demonstração:

De fato, para a desigualdade $\theta_2 \leq \theta_1$, se tivéssemos $\theta_1 < \theta_2$, por definição de θ_2 a propriedade φ é falsa para o cardinal θ_1, contradizendo o fato que $\varphi(\theta_1)$ é verdadeiro. Para desigualdade $\theta_1 \leq \theta_2$, tome $\mu < \theta_1$. Segue da minimalidade de θ_1 que $\varphi(\mu)$ é falso, assim obtemos $\theta_1 \leq \theta_2$. Com isso fica mostrado que $\theta_1 = \theta_2$. ■

Uma propriedade elementar para uma dada sequência de conjuntos finitos de ω é dada abaixo:

Proposição 1.22. *Seja $(M_i)_{i \in \omega}$ uma sequência de conjuntos finitos de ω tal que cada $n \in \omega$ pertence somente a um número finito de conjuntos M_i's. Então podemos construir uma sequência $(i_j)_{j \in \omega}$ estritamente crescente tal que M_{i_j} e M_{i_l} são disjuntos.*

Demonstração:

Suponha $i_0 := 0$. Tome $A_0 := \displaystyle\bigcup_{n \in M_{i_0}} \{i : n \in M_i\}$, como M_{i_0} é finito, então A_0 é finito. Portanto, tome $i_1 > \max A_0$. Agora assuma contruída a sequência $i_0, i_2, ..., i_j$ estritamente crescentes. Defina $A_j := \displaystyle\bigcup_{n \in \bigcup_{k \leq j} M_{i_k}} \{i : n \in M_i\}$, como cada M_i é finito, então A_j é finito. Portanto, tome $i_{j+1} > \max A_j$, disso segue o resultado. ■

Fato 1.23. *Seja $\{A_n : n \in \omega\}$ uma partição de ω em intervalos contíguos, não-vazios, indexados na forma natural, i.e., $m < n$ se, e somente se, todos os elementos de A_m são* *menores do que todos os elementos de A_n. Então, dado $i \in \omega$, $i \in A_n$ temos que $n \leq i$.*

Demonstração:

Para isso, tome $h \in {}^\omega\omega$ estritamente crescente, dada por $h(n) := \min(A_n)$. Então $n \leq h(n)$ e note que se $i \in A_n$, podemos concluir que $n \leq h(n) \leq i$. ■

O seguinte teorema nos fornece mais uma equivalência com o Axioma da Escolha:

Teorema 1.24 (**ZF**). *São equivalentes:*

(i) **AC**.

(ii) Para toda família $\{A_i : i \in I\}$ existe uma família $\{B_i : i \in I\}$ de conjuntos dois-a-dois disjuntos tal que $B_i \subseteq A_i$ para todo $i \in I$ e $\bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} A_i$.

■

Como consequência imediata do teorema acima: dada uma família $\{A_n : n \in \omega\}$ de conjuntos indexados por ω, existe uma família $\{B_n : n \in \omega\}$ tal que $B_n \subseteq A_n$ para todo $n \in \omega$, os conjuntos B_n's são dois-a-dois disjuntos, e $\bigcup_{n \in \omega} B_n = \bigcup_{n \in \omega} A_n$. Tal consequência será útil na seção 3.5.2.

Como é tradicional, denotaremos $2^{\aleph_0}$ por $\mathfrak{c}$, comumente chamado de *continuum*. Pelo Teorema de Cantor, $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$ e, mais geral, $\aleph_{\alpha+1} \leq 2^{\aleph_\alpha}$ para todo $\alpha \in \mathrm{On}$. A Hipótese do Continuum (**CH**) é a asserção que diz: " $\aleph_1 = \mathfrak{c}$". De maneira geral, podemos destacar a *Hipótese Generalizada do Continuum* (**GCH**), onde se assume que: "$\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$" para todo $\alpha \in On$.

Vários resultados apresentados nessa dissertação têm correspondência com resultados de consistência. Portanto, é necessário introduzirmos noções básicas de conceitos provenientes da Teoria de Modelos. Seja $\mathcal{K}$ um conjunto de fórmulas. Dizemos que $\mathcal{K}$ prova ϕ, denotamos por $\mathcal{K} \vdash \phi$, se houver uma dedução formal (sintática) de ϕ a partir de $\mathcal{K}$, ou seja, se existir uma sequência finita $\phi_0, ..., \phi_j$ de fórmulas tais que $\phi_n = \phi$ e cada ϕ_i, $0 \leq i \leq j$, ou está em $\mathcal{K}$ ou é axioma lógico ou segue de $\phi_0, ..., \phi_{j-1}$ por axiomas lógicos e/ou regras de inferências válidas. No caso em que $\mathcal{K}$ prova ϕ, ϕ é dito Teorema de $\mathcal{K}$ (ou seja, ϕ é consequência sintática de $\mathcal{K}$). Dizemos que $\mathcal{K}$ é *consistenteConsistente* se $\mathcal{K}$ não prova contradições, i.e., não existe ϕ tal que $\mathcal{K} \vdash \phi$ e $\mathcal{K} \vdash \neg\phi$. Dizemos que ϕ é consistente com $\mathcal{K}$ se $\mathcal{K} \cup \{\phi\}$ for consistente. Se M é um modelo de $\mathcal{K}$ no qual ϕ é válida, denotaremos por $M \models \phi$. Se ϕ é válida em todos os modelos de $\mathcal{K}$, ϕ é dita consequência semântica de $\mathcal{K}$. O Teorema da Correção diz que: se ϕ é uma consequência sintática de $\mathcal{K}$, então ϕ é consequência semântica de $\mathcal{K}$.

Teorema da Correção. *Se $\mathcal{K} \vdash \phi$, então $\mathcal{K} \models \phi$*

Dizer que ϕ é consistente com $\mathcal{K}$, equivale a dizer que existe algum modelo de $\mathcal{K}$ no qual ϕ seja verdadeira. Isso é justificado pelo teorema:

Teorema da Completude. *Seja $\mathcal{K}$ um conjunto de sentenças de uma linguagem da lógica de primeira ordem. Então $\mathcal{K}$ é consistente se, e somente se, $\mathcal{K}$ tem um modelo.*[4]

Dizemos que ϕ é independente de $\mathcal{K}$ se tanto φ como $\neg\phi$ forem consistentes com $\mathcal{K}$.

No presente trabalho, em geral, estaremos com teoremas de **ZFC**, então φ será dita consistente se for consistente com **ZFC** e, também, se φ for independente será em relação a **ZFC**. Faremos uso da seguinte equivalência: φ é independente de **ZFC** se, e somente se, **ZFC** $+ \varphi$ e **ZFC** $+ \varphi$ são consistentes.

O problema de saber se **CH** é válido ou não, foi, de certa forma, solucionado por Gödel e Paul Cohen. A resposta de Gödel a **CH**, foi que se **ZFC** é consistente, então **ZFC+CH** e **ZFC+GCH** são consistentes. Já Paul Cohen, provou se **ZFC** é consistente, então **ZFC** $+ \neg$**CH** e **ZFC** $+ \neg$**GCH** também são consistentes, i.e, um modelo pode ser construído assumindo-se ou não **CH** ou **GCH** . Isso diz que podemos usar **CH** como uma hipótese adicional para deduzir algumas propriedades interessantes que aparecerão no presente trabalho. A principal técnica para se provar que alguma afirmação é consistente ou que independe de **ZFC** é chamada de *forcing*.

1.2 Noções topológicas

Assumiremos conhecida a definição de topologia. Dizemos um espaço topológico é o par $\langle X, \tau \rangle$, onde X é o suporte para a topologia τ. Omitiremos a menção a topologia τ quando esta estiver clara no contexto. Vamos dizer que X é um espaço topológico *discreto* se τ é a topologia discreta, i.e, $\tau = \mathcal{P}(X)$. Dizemos que um subconjunto U é uma *vizinhança* de x se existe um aberto V tal que $x \in V \subseteq U$. Seja $\mathcal{V}_x$ uma coleção de subconjuntos de X, dizemos que $\mathcal{V}_x$ é um *sistema fundamental de vizinhanças* de x se todo elemento de $\mathcal{V}_x$ é vizinhança de x e cada vizinhança de x contém algum elemento de $\mathcal{V}_x$. Se todos os elementos de um sistema fundamental de vizinhanças de x são vizinhaças abertas, tal sistema fundamental de vizinhanças abertas é dito *base local* de x.

Seja X um espaço topológico. Uma família $\mathcal{B}$ de abertos de X é dita base da topologia de X se, e somente se, para todo aberto V e todo ponto $x \in V$, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq V$. Com isso, todo aberto pode ser escrito como união de uma subfamília de $\mathcal{B}$. Vamos supor conhecido a definição de fecho de um subconjunto de X. Dado $A \subseteq X$,

[4] Na verdade, o Teorema da Completude pode ser encarado como a recíproca do Teorema da Correção, i.e., "Se $\mathcal{K} \models \phi$, então $\mathcal{K} \vdash \phi$". O que ocorre é que: "$\mathcal{K} \models \phi \Leftrightarrow \mathcal{K} \vdash \phi$" se, e somente se, "A teoria $\mathcal{K}$ é consistente $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}$ tem modelo."

denotaremos por $\overline{A}$ o fecho do conjunto A. Um subconjunto D de X é *denso em* X se o fecho de D é igual a X, ou equivalentemente, D é denso em X se para todo aberto não-vazio U em X o conjunto $D \cap U$ é não-vazio.

Seja $\mathcal{S}$ uma família de abertos de X. Dizemos que $\mathcal{S}$ é uma *subbase* para X se a família das intersecções finitas de $\mathcal{S}$ é base.

Dado Y um subconjunto do espaço topológico $\langle X, \tau \rangle$, a *topologia de subespaço* para Y é a família $\tau_Y := \{Y \cap U : U \in \tau\}$. Assim, diremos que Y é um subespaço de X. Um subconjunto D de X é dito *discreto* se sua topologia de subespaço for a discreta. Diante disso, um subespaço D de X é discreto se, e somente se, existe uma família $\{U_x : x \in D\}$ de abertos de X, tal que $x \in U_x$, satisfazendo $U_x \cap D = \{x\}$, para todo $x \in D$.

Uma propriedade topológica é dita *hereditária*, se X é um espaço topológico com certa propriedade "$\mathcal{P}$" e qualquer subespaço $A \subseteq X$ satisfaz "$\mathcal{P}$". Um ponto $x \in X$ é dito *ponto aderente de* A se para todo aberto U de X, tal que $x \in U$ ocorre que $U \cap A \neq \emptyset$. Dado $x \in X$, diremos que x é *ponto de acumulação de* A se dado um aberto V de X tal que $x \in V$ tem-se $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Um espaço topológico X é dito:

(i) *Primeiro enumerável* ou que satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade ("first countable") se todo ponto do espaço possui um sistema fundamental de vizinhanças enumerável;

(ii) *segundo enumerável* ou que satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade ("second countable") se possui uma base de abertos que é enumerável;

(iii) *terceiro enumerável* ou separável se X possui um subconjunto enumerável denso.

Um fato simples que pode ser deduzido do que acabamos de definir: é que todo espaço segundo enumerável é separável. Como qualquer subespaço de um espaço que tem base enumerável, também possui base enumerável, temos como consequência que o segundo axioma de enumerabilidade implica que qualquer subespaço de um espaço que possui base enumerável, contém um denso enumerável. Em geral, um espaço separável pode não satisfazer o segundo axioma de enumerabilidade, mas no contexto de espaços métricos, um espaço separável sempre possui base enumerável[5]. Uma observação a ser feita é que a propriedade de um espaço ser separável não é hereditária.

Para alguns resultados iremos exigir algumas propriedades sobre a topologia. Por isso, damos os seguintes axiomas de separação:

[5] Também reforçamos o seguinte: um espaço métrico não precisa ter base enumeravél. Um exemplo trivial disso: seja X um conjunto não-enumerável com a métrica d, definida por $d(x, y) = 0$ se $x = y$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$. A topologia de X dada pela métrica d é discreta, o que implica que X não tem base enumerável.

Definição 1.25. Seja X um espaço topológico. Diz-se que:

(i) X é T_0 se para todo $x, y \in X$, se $x \neq y$, então existe um aberto U em X tal que $x \in U$ e $y \notin U$ ou existe um aberto V em X tal que $y \in V$ e $x \notin V$.

(ii) X é T_1 se valer a seguinte condição: para todo $x, y \in X$, se $x \neq y$, então existe um aberto U em X tal que $x \in U$ e $y \notin U$ e existe um aberto V em X tal que $y \in V$ e $x \notin V$.

(iii) X é T_2 (ou Hausdorff) se valer a seguinte condição: para todo $x, y \in X$, se $x \neq y$, então existem abertos U e V em X tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

(iv) X é T_3 se para todo $x \in X$ e todo F fechado em X, se $x \notin F$, então existem abertos U e V em X tais que $x \in U$, $F \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$, ou equivalentemente, para cada vizinhança aberta V de x existe uma vizinhança aberta U de x tal que $\overline{U} \subseteq V$.

(v) X é *regular* se X for T_1 e T_3.

(vi) X é $T_{3\frac{1}{2}}$ se valer a seguinte condição: para todo $x \in X$ e todo F fechado em X, se $x \notin F$, então existe uma função contínua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ e $f[F] \subseteq \{1\}$. Se X é T_1 e $T_{3\frac{1}{2}}$, dizemos que X é um espaço de *Tychonoff* ou *completamente regular*.

(vii) X é T_4 se para todos F, G fechados e disjuntos em X, existem V e U abertos disjuntos em X tais que $F \subseteq V$, $G \subseteq U$, ou equivalentemente, dado o conjunto fechado F e U um aberto com $F \subseteq U$, então existe aberto V tal que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

(viii) X é *normal* se X for T_1 e T_4.

Se X é um espaço T_1, um conjunto da forma $\{x\}$, com $x \in X$, é fechado. Como consequência disso, todo conjunto finito em de um espaço T_1 é fechado. No caso que $A \subseteq X$ finito se X for espaço T_1, obrigatoriamente, A é discreto, pois qualquer subconjunto de A é complemento de um fechado de A. Ainda com X um espaço topológico T_1, se A é um subconjunto de X: um ponto $x \in X$ é ponto de acumulação de A se, e somente se, qualquer vizinhança aberta de x contém infinitos pontos de A. Do que acabamos de falar segue que:

Proposição 1.26. *Seja $A \subseteq X$ um subconjunto fechado e discreto,i.e., não possui ponto de acumulação. O espaço X tem a propriedade T_1 se, e somente se, dado $x \in X$ existe vizinhança aberta de x onde sua intersecção com A é finita* ∎

Seja X um espaço topológico. Dizemos que um aberto U de X é *aberto regular* se $U = int(\overline{U})$. Denotamos por $RO(X)$ a família de todos os abertos regulares de X. Se tivermos que X é um espaço T_3, então $RO(X)$ é uma base para X. De fato, fixe $x \in X$ e tome uma vizinhança aberta V de x, por T_3, existe U aberto tal que $x \in \overline{U} \subseteq V$. Como $int(\overline{U})$ é aberto regular, e está contido em $\overline{U}$, temos que $RO(X)$ é uma base de X.

Dada uma família $\{A_i : i \in I\}$, definimos o *produto cartesiano* de $\{A_i : i \in I\}$, denotamos por $\prod_{i \in I} A_i$, o conjunto:

$$\prod_{i \in I} A_i := \left\{ x : I \to \bigcup_{i \in I} A_i : x(i) \in A_i, \forall i \in I \right\}.$$

Dado $t \in I$, definimos a função $\pi_t : \prod_{i \in I} X_i \to X_t$ tal que $\pi_t(f) := f(t)$ é dita *projeção* de $\prod_{i \in I} X_i$ na coordenada t.

Sejam $\{A_i : i \in I\}$ uma família de espaços topológicos, $X = \prod_{i \in I} A_i$ e $\pi_i : X \to A_i, i \in I$, a função projeção. Definimos a *topologia produto de Tychonoff* ou *topologia produto* a topologia gerada pela base:

$$\left\{ \prod_{i \in I} U_i : U_i \text{ é aberto em } X_i, \text{ para todo } i \in I \text{ e } \{i \in I : U_i \neq X_i\} \text{ é finito} \right\}.$$

O conjunto $\{i \in I : U_i \neq X_i\}$ é chamado de *coordenadas destacadas*. Por definição da base que gera a topologia de Tychonoff, a topologia de produto é a menor sobre X que faz cada π_i contínua. Sendo A um conjunto qualquer e X um espaço topológico, sempre vamos considerar o espaço ${}^{A}X$ com a topologia produto, e às vezes usaremos a notação X^A para esse espaço.

Dizemos que uma família $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X *cobertura* de X se $X = \bigcup \mathcal{U}$. A cobertura $\mathcal{U}$ diz-se *cobertura aberta* se os elementos de $\mathcal{U}$ forem abertos. Uma subfamília $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ é dita uma *subcobertura* de X se $X = \bigcup \mathcal{U}'$.

Definição 1.27. Diz-se que um espaço topológico X é *compacto* se toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finita.[6]

De posse da definição acima, podemos enunciar o seguinte teorema que é equivalente ao Axioma da Escolha:

Teorema 1.28 (**Teorema de Tychonoff**). *Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família de espaços topológicos compactos não-vazios. Então o produto de espaços de Tychonoff $\prod_{i \in I} X_i$ é compacto.*

[6]Obviamente, segue da definição de subespaço topológico que: Um espaço topológico $A \subseteq X$ é compacto se, e somente se, para cada família $\mathcal{U}$ de abertos de X tal que $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$, existe $\mathcal{U}'$ uma subfamília finita de $\mathcal{U}$, tal que $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$.

Sejam X um espaço topológico, $A \subseteq X$ e $x \in X$; x é dito um *ponto de acumulação completo* de A se para toda vizinhança aberta U de x vale $|U \cap A| = |A|$. Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos de um espaço topológico X. Uma família $\mathcal{F}$ tem a *propriedade da intersecção finita* (p.i.f) se a intersecção de toda subfamília finita de conjuntos não-vazios de $\mathcal{F}$ é não vazia. Disso, temos a seguinte propriedade: um espaço X é compacto se, e só se, toda família de conjuntos fechados com p.i.f tem intersecção não vazia. Diremos que uma família $\mathcal{F}$ é *localmente finita* se para cada $x \in X$ existe aberto U tal que $\{A \in \mathcal{F} : U \cap A \neq \emptyset\}$ é finito. No caso em que $\mathcal{F}$ é finita, obviamente, $\mathcal{F}$ é localmente finita e no caso que X é um espaço topológico compacto nenhuma família infinita de subconjuntos de X é localmente finita. Considerando X um espaço topológico T_1 e $A \subseteq X$ nas condições da proposição 1.26, é imediato concluir que a família $\{\{x\} : x \in A\}$ é localmente finita.

Definição 1.29. Sejam X um espaço topológico, $A \subset X$ e $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ família de subconjuntos de X . Diz-se que:

(i) $\mathcal{V}$ *refina* $\mathcal{U}$ se, para todo $V \in \mathcal{V}$, existir um $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U$.

(ii) $\mathcal{V}$ é um *refinamento aberto* de $\mathcal{U}$ se $\mathcal{U}$ é cobertura aberta de X e $\mathcal{V}$ for uma cobertura aberta de X que refina $\mathcal{U}$.

(iii) Um espaço topológico onde toda cobertura aberta admite um refinamento aberto localmente finito é chamado *paracompacto*

(iv) X é *Lindelöf* se para toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X, existir uma subcobertura enumerável $\mathcal{U}$' de $\mathcal{U}$.

(v) X é *enumeravelmente compacto* se para toda cobertura aberta enumerável $\mathcal{U}$ de X existir uma subcobertura finita $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{U}$.

Óbvio que todo espaço topológico compacto é paracompacto. Outra implicação simples é que: um espaço enumerávelmente compacto é pseudocompacto, e vale a equivalência se X for um espaço normal. Quando X é um espaço compacto T_2, ele também será um espaço normal. Evidenciamos que união finita de conjuntos compactos sempre é um conjunto compacto. Em geral, união infinita de compacto não é compacto. Aqui também vale destacar as duas propriedades equivalentes:

(a) X é compacto.

(b) Todo subconjunto infinito de X possui ponto de acumulação completo.

Quando X é um espaço T_1, ser enumeravelmente compacto é equivalente a todo subconjunto infinito de X possuir ponto de acumulação. Disso, podemos concluir que um fechado discreto de X enumeravelmente compacto é finito, pois não possui ponto de acumulação.

Um espaço X que tem base enumerável, necessariamente é um espaço de Lindelöf: de fato, seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X, então para um $x \in X$ fixado, existe $U_x \in \mathcal{U}$ onde $x \in U_x$. Sendo $\mathcal{B}$ uma base enumerável de X, existe $B_x \in \mathcal{B}$ com $x \in B_x \subseteq U_x$. Sendo $\mathcal{B}$ enumerável, concluímos que $\{B_x : x \in X\}$ é enumerável. Logo, existe $A \subseteq X$ enumerável(podendo ser finito) tal que $\{B_x : x \in A\} = \{B_x : x \in X\}$, sendo assim podemos concluir que $\bigcup\{B_x : x \in A\} = \bigcup\{B_x : x \in X\} = X$. Tome $\mathcal{U}'$ a subcobertura de $\mathcal{U}$ que é enumerável pondo $\{U_x : x \in A\}$.

Note que um espaço X Lindelöf não enumerável necessariamente tem ponto de acumulação completo. Do contrário, dado qualquer $x \in X$ ele não é ponto de acumulação completo, então existe um aberto U_x vizinhança de x tal que $U_x \cap X$ é enumerável. Ademais, claramente $\{U_x : x \in X\}$ é uma cobertura aberta de X, sendo X Lindelöf, existe subcobertura enumerável, logo X seria enumerável.

Existem relações entre os axiomas de separação e paracompacidade, destacamos: um espaço Lindelöf e regular é paracompacto; qualquer espaço paracompacto é normal.

(vi) Diz-se que X é *σ-compacto* se é união enumerável de compactos.

Se X é σ-compacto e fixada uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X, sempre obtemos uma subcobertura enumerável. Em outras palavras, espaço σ-compacto necessáriamente é Lindelöf.

(vii) Diz-se que X é *pseudo-compacto* se dado qualquer função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ sua imagem é limitada em $\mathbb{R}$.

Dizemos que um espaço topológico X é *localmente compacto* se todo ponto de X possui um sistema fundamental de vizinhanças compactas. Quando X é T_2, tal definição equivale a cada $x \in X$ e para cada U vizinhança aberta de x, existe uma vizinhança V de x tal que $\overline{V}$ é um subconjunto compacto de U.

A *topologia da ordem* sobre um ordinal $\gamma > 0$ é a topologia gerada pela base $\{\{0\}\} \cup \{]\alpha, \beta] : \alpha < \beta < \gamma\}$. Um fato que vale destacar é que todo ordinal com a topologia da ordem é um espaço normal. Um exemplo fundamental de ordinal com a topologia da ordem é ω_1. Tal espaço não é compacto, porém, é enumeravelmente compacto, haja vista que todo subconjunto infinito de ω_1 tem ponto de acumulação em ω_1. Como consequência, ω_1 não pode ser paracompacto, pois um espaço enumeravelmente compacto que seja paracompacto, obrigatoriamente, é compacto[7]. No caso, ver que ω_1 não é compacto vem que $\{[0,\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ é uma cobertura aberta de ω_1 sem subcobertura finita.

Dada uma família $\mathcal{U}$ de subconjuntos de um conjunto X e um subconjunto A de X, definimos a *estrela* de A com relação a $\mathcal{U}$ o seguinte conjunto:

$$St(A,\mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : A \cap U \neq \emptyset\}.$$

Se $A \subseteq X$ é tal que $St(A,\mathcal{U}) = X$, diz-se que A é *núcleo* estrela de $\mathcal{U}$. Observe que para $x \in X$ temos que $St(\{x\},\mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : U \cap \{x\} \neq \emptyset\} = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : x \in \mathcal{U}\}$. Por conveniência denotaremos $St(x,\mathcal{U})$ em vez de $St(\{x\},\mathcal{U})$.

Definimos a noção de *conjunto perfeito*. Dado um espaço topológico X, diz-se que $A \subseteq X$ é um conjunto *perfeito* se for fechado e não contém ponto isolado.

Um espaço topológico é chamado de *completamente metrizável* se sua topologia é induzida por uma métrica completa, i.e, se τ é uma topologia de X, existe uma métrica d sobre X, tal que (X, d) é uma espaço métrico completo e τ coincide com a topologia sobre X gerada pela métrica d. Note que existe uma sutil diferença entre: "espaço métrico completo" e "espaço completamente metrizável".

Um subconjunto de um espaço topológico X é dito G_δ se é escrito como intersecção enumerável de abertos. Também definimos o seu análogo, um subconjunto de X é dito F_σ se é uma união enumerável de abertos. Damos a seguir um resultado que pode ser útil para dizer se um subconjunto de um espaço métrico completo é completamente metrizável.

Teorema 1.30. *Um subconjunto A de um espaço métrico M é completamente metrizável se, e somente se, A é um G_δ*

Aqui devemos destacar que a noção de completitude é propriedade de espaço métrico, enquanto ser completamente metrizável é uma propriedade de caráter topológico. Isso se justifica no seguinte exemplo: O conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$ é metrizável, porém, não completamente metrizável, haja vista que não é G_δ.

Diz-se que um espaço topológico X é *espaço polonês* se é separável e completamente metrizável. Vamos dar algumas observações a respeito dessa definição:

(i) A reta real $\mathbb{R}$ com a topologia usual é um espaço polonês.

(ii) Todo subespaço fechado de um espaço polonês é polonês.

[7]Vamos justificar tal afirmativa do seguinte modo: **Fato.** Seja X é um espaço T_1. O espaço X é enumeravelmente compacto se, e somente se, toda família localmente finita de subconjuntos não-vazios de X é finita. Tome $\mathcal{U}$ cobertura aberta de X. Como X é paracompacto, existe $\mathcal{V}$ refinamento aberto localmente finito de $\mathcal{U}$. Sendo X um espaço enumeravelmente compacto, segue que $\mathcal{V}$ é finita, digamos que $\mathcal{V} := \{V_1, V_2, ..., V_n\}$. Por $\mathcal{V}$ ser um refinamento de $\mathcal{U}$, dado $V_i \in \mathcal{V}$ existe $U_i \in \mathcal{U}$ tal que $V_i \subseteq U_i$. Assim, existe uma subcobertura finita de $\mathcal{U}$ dada por $\mathcal{U}' := \{U_1, U_2, ..., U_n\}$.

Um espaço topólogico é chamado *zero-dimensional* se possui uma base que consiste de abertos e fechados, também chamados de *clopen* (do inglês "closed" e "open").

(iii) ω^ω é um espaço zero-dimensional e polonês.

Nosso objetivo é tratar de resultados sobre $\mathbb{R}$, porém, várias propriedades podem ser generalizadas para um espaço polonês arbitrário.

Vamos apresentar de maneira sucinta questões referentes ao assunto de funções cardinais. Nas últimas décadas vários resultados interessantes foram provados usando funções cardinais, Teoria dos Conjuntos e Topologia. Ademais, alguns destes resultados estarão presentes nessa dissertação.

Começamos denotando $\mathcal{T}$ e *Card*, respectivamente, a classe dos espaços topológicos e a classe dos cardinais. Uma *função cardinal* é uma função-classe $\phi : \mathcal{C} \to Card$ tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$; $\phi(X) \geq \omega$ para todo $X \in \mathcal{C}$; para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$ homeomorfos, tem-se que $\phi(X) = \phi(Y)$.

Seja X um espaço topológico:

(i) O *peso* de X é definido por

$$w(X) = \min\{|\mathcal{B} : \mathcal{B} \text{ é uma base de abertos para } X\} + \aleph_0$$

Dado um cardinal $\kappa \geq \omega$ e assumindo que topologia do conjunto $\{0,1\}$ é a discreta, pode ser demonstrado que $w(2^\kappa) = \kappa$. Tal espaço é chamado de Cubo de Cantor de peso κ.

(ii) O *densidade* de X é definido por

$$d(X) = \min\{|D| : D \subseteq X \text{ é denso em } X\} + \aleph_0$$

Um teorema clássico e que será justificativa de algumas passagens em alguns teoremas do capítulo 3 é:

Teorema 1.31 (Hewitt-Marczewsky-Pondiczery). *Se* $X = \prod_{t \in T} X_t$, *onde* $|T| \leq 2^\kappa$ *e* $d(X_t) \leq \kappa$, *para todo* $t \in T$, *então* $d(X) \leq \kappa$.

Demonstração:

Vide [H]. ■

(iii) O *spread* de X é definido por

$$s(X) = \sup\{|A| : A \subseteq X \text{ é discreto } X\} + \aleph_0$$

Dado X um espaço topológico e uma família $\mathcal{F}$ de abertos de X. Diz-se que $\mathcal{F}$ é uma família celular, se é uma família de abertos dois-a-dois disjuntos.

(iv) A *celularidade* de X é definido por

$$c(X) = \sup\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ é uma família celular em } X\} + \aleph_0$$

Quando um espaço X tem celularidade $c(X) = \aleph_0$, dizemos que X é um espaço com a propriedade *c.c.c*[8] Obviamente, vale que $c(X) \leq d(X)$. Um exemplo de espaço com a propriedade *c.c.c* é o próprio cubo de Cantor de peso κ, definido mais acima. No caso 2^κ com κ finito é imediato que tal espaço tenha a propriedade *c.c.c*[9]. Um espaço X infinito que seja Hausdorff, possui uma família celular infinita. Uma desigualdade conhecida, envolvendo c, s e w é dada abaixo:

$$c(X) \leq s(X) \leq \min\{|X|, w(X)\}.$$

(v) O *grau de Lindelöf* de X é definido por:

$$L(X) := \min\{\kappa : \text{dada uma cobertura aberta de } X, \text{ existe subcoleção de tamanho} \leq \kappa \text{ que cobre } X\} + \aleph_0$$

Se $L(X) = \aleph_0$, então o espaço X é Lindelöf. Em particular, todo espaço compacto tem grau de Lindelöf enumerável. Um fato trivial que pode ser demonstrado: se $L(X) = \kappa$, não existe um conjunto fechado e discreto de tamanho maior que κ. Uma desigualdade bastante conhecida é que:

$$L(X) \leq \min\{|X|, w(X)\}.$$

Considere $\mathcal{V}$ uma coleção de abertos não-vazios do espaço topológico X. Uma $\pi-$*base* para X é uma coleção $\mathcal{V}$ de X, tal que para todo U aberto não vazio de X, existe $V \in \mathcal{V}$ com $V \subseteq U$.

(vi) O $\pi-$*peso* de X é definido como:

$$\pi w(X) = \min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}\, \pi - \text{base para}\, X\} + \aleph_0$$

Como toda base de um espaço topológico X também é uma π-base, então é imediato concluir que $\pi w(X) \leq w(X)$. Também é imediato que $d(X) \leq \pi w(X)$, pois dada uma π-base $\mathcal{V}$ a cada $V \in \mathcal{V}$, podemos tomar $x_V \in V$ e, desse modo, a família $\{x_V : V \in \mathcal{V}\}$ é um conjunto denso em X.

Seja $p \in X$, $\mathcal{V}$ é $\pi-$*base local de* p se para todo aberto U, com $p \in U$, existe $V \in \mathcal{V}$, com $V \subseteq U$. Definimos o π-caráter local por:

[8] A propriedade *c.c.c* nesse contexto é de caráter topológico. Na seção 1.4 damos a noção da propriedade *c.c.c* no contexto de ordem parcial.

[9] Destacamos que o cubo de Cantor é o exemplo de espaço onde a propriedade *c.c.c* é mantida, independentemente do tamanho do espaço. O leitor pode conferir que, em geral, o cubo de Cantor perde a propriedade de ser separável se $\kappa > 2^\omega$.

(vii) $\pi\chi(p, X) = \min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}$ é $\pi-$base local em $p\} + \aleph_0$

Uma função cardinal $\phi : \mathcal{C} \to Card$ é dita *monótona* se, e só se, $\phi(Y) \leq \phi(X)$, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$ tais que $Y \subseteq X$.

As funções cardinais: peso e spread são, obviamente, exemplos de funções cardinais monótonas. Já as funções cardinais: c, d, L e πw são exemplos de funções não-monótonas. Um espaço topológico que testemunha que c e d são ambas não-monótonas é o *Plano de Niemytzki*[10], que será denotado por N. Tal espaço contém um subespaço discreto L (que também é fechado) tal que $c(L) = \mathfrak{c}$ e $d(L) = \mathfrak{c}$, enquanto, $d(N) = \aleph_0$. Como a celularidade de um espaço topológico é sempre menor ou igual a sua densidade, então vale que $c(N) \leq d(N) = \aleph_0$, logo $c(N) = \aleph_0$, desse modo fica justificado que c e d não são monótonas. Agora, vejamos que a função grau de Lindelöf não é monótona. Considere um espaço topológico discreto (X, τ) não-compacto e com tamanho $\kappa > \omega$. Denote por Y a compactificação por um ponto de X. Como a topologia de subespaço de X coincide com τ, então X é discreto em Y, logo $\kappa \leq L(X)$. Por outro lado, como Y é compacto, então $L(Y) = \aleph_0$. Com isso, a compactificação por um ponto de qualquer espaço discreto de tamanho $\kappa > \omega$ testemunha que L não é monótona. Um exemplo clássico de espaço que testemunha que a função πw é não-monótona é o espaço topológico $\beta\omega$[11], pois tal espaço possui um conjunto denso e enumerável de pontos isolados, e isso implica que $\pi w(\beta\omega) = d(\beta\omega) = \aleph_0$. Agora, como subespaço $\beta\omega \setminus \omega$ possui uma família celular de tamanho $\mathfrak{c}$[12], então $\mathfrak{c} \leq d(\beta\omega \setminus \omega) \leq \pi w(\beta\omega \setminus \omega)$. Portanto, acabamos de argumentar que, de fato, a função cardinal πw, também, é não-monótona.

Caso ϕ seja uma função cardinal que não é monótona, definimos a função[13]

$$h\phi(X) := \sup\{\phi(Y) : Y \subseteq X\}$$

Podemos entender, por exemplo, se $hd(X) = \kappa$, todo subespaço de X possui um denso de tamanho menor ou igual a κ. Se $hd(X) = \omega$, todo subespaço de X é separável, então o espaço X é dito hereditariamente separável. Para o trabalho, nosso interesse será $hL(X) := \sup\{L(Y) : Y \subseteq X\}$, onde L é o *grau de Lindelöf*. No caso $hL(X) = \omega$, dizemos que X é hereditariamente Lindelöf, pois todo subespaço de X tem grau de Lindelöf no

[10]Para o Leitor que não conheça, por cortesia, daremos a definição do Plano de Niemytzki: Seja N um conjunto de pontos do plano com segunda coordenada maior ou igual a zero, i.e., $N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Denote por L a reta $y = 0$ e seja $L' := N \setminus L$. Para cada $x \in L$ e $r > 0$, seja $U(x, r)$ o conjunto de todos os pontos em N no interior da bola de raio r tangente a L no ponto x e seja $U_i(x) := U(x, \frac{1}{i}) \cup \{x\}$ para $i = 1, 2, \ldots$. Para cada x em $N \setminus L$ e $r > 0$, seja $V(x, r)$ o conjunto de todos os pontos de N dentro do círculo de raio r e centro x, e seja $U_i(x) := V(x, \frac{1}{i})$ para $i = 1, 2, \ldots$ Para cada $x \in N$. A família de todos os conjuntos $U_i(x)$ para todo $i \in \omega$ e para todo $x \in N$, gera uma topologia em N. O conjunto N é chamado de Plano de Niemytzki. Agora, note que, o conjunto L é fechado e discreto em N.

[11]Esse espaço é definido no final da Seção 1.8.

[12]Ver [H, p. 32]

[13]Para uma leitura complementar, vide [Juh80].

máximo ω.

Teorema 1.32 (Groot)**.** *Dado um espaço X com a propriedade Hausdorff, então $|X| \leq 2^{hL(X)}$. Em particular, temos que todo espaço Hausdorff que é hereditariamente Lindelöf tem cardinalidade no máximo 2^{ω}.*

Demonstração:

Vide [H].

1.3 Teoria da Medida e Categoria

Primeiramente, vamos tratar de alguns conceitos elementares de Teoria da medida e em seguida trataremos dos conceitos de categoria. O ponto chave dessa seção é o conceito fundamental da medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ (respectivamente, os conceitos básicos da propriedade de Baire) que tem sido extremamente útil em vários problemas da matemática.

As referências adotadas para seção: [Oxt80] e [Roy88], sendo que na primeira, estudamos alguns resultados mais clássico sobre Categoria. Para o nosso propósito, definimos por *$\sigma-$álgebra*, em um conjunto X, a uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:

(i) $X \in \mathcal{A}$;

(ii) Se $A \in \mathcal{A}$ então $X \setminus A \in \mathcal{A}$;

(iii) Se $A_1, A_2, ..., \in \mathcal{A}$ então $\bigcup_{n<\omega} A_n \in \mathcal{A}$.

Em palavras, dado um conjunto X, uma $\sigma-$álgebra é uma família de subconjuntos de X que contém X e que é fechada para complementar e união enumerável. Seguiremos com as definições. Uma *classe monótona* $\mathcal{C}$ de X é uma família de subconjuntos de X satisfazendo as condições:

(iv) Se para todo $n \in \omega$, $A_n \in \mathcal{C}$ e $A_n \supset A_{n+1}$, $\bigcap_{n<\omega} A_n = A$, então $A \in \mathcal{C}$.

(v) Se para todo $n \in \omega$ $A_n \in \mathcal{C}$ e $A_n \subset A_{n+1}$, $\bigcup_{n<\omega} A_n = A$, então $A \in \mathcal{C}$.

A família $\mathcal{A}$ é chamada de álgebra se a condição (iii) acima é satisfeita somente no caso para uniões finitas. Disso podemos concluir que uma família $\mathcal{A}$ é uma $\sigma-$álgebra de X se, e só se, é álgebra e classe monótona. Outra maneira de obtermos $\sigma-$álgebras é via " Interseções", pois, note que não é difícil verificar que a intersecção de qualquer família de

$\sigma-$álgebras sobre X que contenham um dado subconjunto B de $\mathcal{P}(X)$ é uma $\sigma-$álgebra, e que, além disso, ela é menor que contém B. Então dizemos que tal $\sigma-$álgebra é a *$\sigma-$álgebra gerada por B*.

Quando temos um espaço topológico (X, τ) podemos considerar a topologia τ para gerar a chamada *$\sigma-$álgebra de Borel* de X, que denotaremos por $\mathcal{B}(X)$ e seus elementos são chamados de *borelianos*. Essa $\sigma-$álgebra será de grande interesse para este texto quando consideramos a topologia usual de $\mathbb{R}$. Utilizando indução Transfinita, podemos demonstrar que:

Teorema 1.33. *Existem $\mathfrak{c}$ Borelianos de $\mathbb{R}$.*

■

Por uma *medida*, em um espaço de medida $(X, \mathcal{A})$, com $\mathcal{A}$ uma $\sigma-$álgebra sobre X, entendemos por uma função não negativa $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ que satisfaz:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b) é σ aditiva, i.e, se dado $A_1, ..., A_n, ... \in \mathcal{A}$ dois a dois disjuntos, então:

$$\mu(\bigcup_{n<\omega} A_n) = \sum_{n<\omega} \mu(A_n)$$

Destacamos algumas propriedades de uma medida. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, então para $A, B \in \mathcal{A}$:

(i) $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap (X \setminus A))$

(ii) Se $A \subset B$, então $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$

Note que (i) e (ii) implicam, respectivamente, as seguinte:

(iii) Se $A \subset B$ então $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(iv) Se $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$, então $\mu(A_1 \cup ... \cup A_n) \leq \mu(A_1) + ... + \mu(A_n)$.

Medida exterior (em inglês " outer measure") de um conjunto não-vazio X é uma função $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ que satisfaz:

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

(ii) $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ se $A \subseteq B$;

(iii) $\mu^*(\bigcup_{j<\omega} A_j) \leq \sum_{j<\omega} \mu^*(A_j)$.

Seja $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ e $\rho : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ tal que $\emptyset \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{A}$, e $\rho(\emptyset) = 0$. Sempre é possível obter uma medida exterior a partir de ρ, a saber, para todo $A \subseteq X$,

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{j<\omega} \rho(A_j) : A_j \in \mathcal{A}, A \subseteq \bigcup_{j<\omega} A_j\}.$$

é uma medida exterior.

Quando ρ é dada por $\rho([a, b]) := b - a$, dizemos que μ^* é a medida exterior de Lebesgue.

Definição 1.34. Seja μ^* uma medida exterior sobre X. Diremos que $E \subseteq X$ é μ^**−mensurável* se todo $A \subseteq X$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap (X \setminus E))$$

No caso da medida exterior de Lebesgue, diremos que m^*-mensurável é um *Lebesgue mensurável*. Denotamos a família dos lebesgue mensuráveis por $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. É claro que se um conjunto $A \subset \mathbb{R}$, tal que $m^*(A) = 0$, A é um Lebesgue mensurável. Sempre que $m^*(A) = 0$, diz-se que A é um *Lebesgue nulo.*

Teorema 1.35 (Carathéodory)**.** *Seja μ^* uma medida exterior sobre X e $\mathcal{M}$ a família de todos os μ^*−mensuráveis. Então $\mathcal{M}$ é uma σ−álgebra, e a restrição de μ^* a $\mathcal{M}$ é uma medida.*

Esse teorema nós permite definir a *medida de Lebesgue*. Isto é, quando temos $\rho((a - b)) = b - a$, com $a, b \in \mathbb{R}$, obtemos a medida exterior de Lebesgue e pelo eorema de Carathéodory, podemos restringir a medida exterior de Lebesgue a σ−álgebra dos lesbesgue mensuráveis e obtemos a medida de Lebesgue. Denotaremos por "m" a medida de Lebesgue.[14]

Definição 1.36. Dado $A \subseteq \mathbb{R}$. Diremos que $m_* := \sup\{m(K) : K \subseteq A \,\text{e}\, K \text{ é compacto}\}$ é medida interior do conjunto.

É sabido que, no caso dos conjuntos de medida finita, um conjunto é mensurável se, e somente se, suas medidas interior e exterior coincidem.

Nesse trabalho a medida de interesse será a de Lebesgue, portanto, de agora em diante, vamos nos referir aos conjuntos Lebesgue mensuráveis por "mensurável" e Lebesgue nulo por "nulo". Vamos listar algumas propriedades acerca da medida de Lebesgue.

[14]Uma questão natural surge com respeito a medida de Lebesgue: Se todos os subconjuntos da reta são mensuráveis a Lebesgue ou não (e também, surge uma questão análoga sobre a propriedade de Baire). Na literatura, são apresentadas construções de subconjuntos da reta que não são mensuráveis a Lebesgue. A primeira construção é devida a Vitali em: *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta.* Nota, Bologna, 1905.

Proposição 1.37. *(i) Se $A \subset \mathbb{R}$ é nulo, então existe um boreliano nulo N tal que $A \subset N$;*

(ii) Sejam $x \in \mathbb{R}, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, então $B + x \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ e $m(B) = m(B + x)$, ou seja, m é invariante por translação.

(iii) Se $A \subseteq \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$, existe um aberto $G \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \subseteq G$ e $m(G) \leq m^*(A) + \epsilon$. Portanto, $m^*(A) = \inf\{m(G) : A \subset G e G \, aberto\}$.

(iv) Se $E \subseteq \mathbb{R}$ é mensurável, então para todo $\epsilon > 0$, existe um conjunto fechado $F \subseteq E$ tal que $m^*(F) > m^*(E) - \epsilon$, portanto $m^*(E) = \sup\{m(F) : F \subset E, E \,\text{fechado}\}$.

Proposição 1.38. *As seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) $A \subset \mathbb{R}$ é mensurável;

(ii) existe um G_δ com $A \subset G_\delta$, $m^*(G_\delta \setminus A) = 0$;

(iii) existe um F_σ com $F_\sigma \subset A$, $m^*(A \setminus F_\sigma) = 0$;

(iv) para todo $\epsilon > 0$, existe uma aberto G com $E \subseteq G$ e $m^*(G \setminus E) < \epsilon$;

(v) existe um conjunto $K \subseteq \mathbb{R}$ que é F_σ e um nulo Z, tal que $K \subseteq A$, $Z \subseteq A$ e $A = K \cup Z$.

Outra propriedade que podemos citar: é que se A é um mensurável, com $m(A)$ finito, podemos aproximá-lo por conjuntos compactos, ou seja, se A tem medida finita, então para todo $\epsilon > 0$ existe um compacto C com $C \subseteq A$ e $m^*(A \setminus C) < \epsilon$.

Agora vamos introduzir a linguagem para a noção de categoria.

Definição 1.39. Seja X um espaço topológico. Dizemos que:
(i) Um conjunto $A \subseteq X$ é um conjunto *magro* em X se A está contido numa reunião enumerável de conjuntos fechados com interior vazio. Também podemos usar *conjunto de primeira categoria* como sinônimo para *conjunto magro* e *conjunto de segunda categoria* para *não magro*.
(ii) Um conjunto $A \subseteq X$ é *raro* (em inglês "nowhere dense") em X se o interior do fecho de A é vazio;
(iii) X é um *espaço de Baire* se a intersecção de uma família enumerável de conjuntos abertos densos em X é denso em X.

Proposição 1.40. *Seja X um espaço topológico e $A \subseteq X$ um raro. Valem as seguintes asserções:*

(i) A é raro $\Leftrightarrow$ $X \setminus A$ contém um aberto denso $\Leftrightarrow$ A está contido num fechado de interior vazio;

(ii) A é raro se e somente se todo aberto não-vazio U de X contém um aberto não-vazio V tal que $V \cap A \neq \emptyset$;

(iii) A fronteira de um conjunto fechado é um conjunto raro;

(iv) Um conjunto fechado é raro se, e somente se, o seu complementar é um aberto denso;

(v) Um conjunto é um fechado de interior vazio se, e somente se, todos os seus pontos são de fronteira.

As asserções listadas abaixo são todas equivalentes e seguem diretamente da definição de espaço de Baire:

(i) X é espaço de Baire;

(ii) Toda união de uma família enumerável de conjuntos fechados sem interior deve ter interior vazio;

(iii) Todo aberto de X não vazio é não magro;

(iv) O complementar de um magro é denso e, mais ainda, contém uma intersecção enumerável de abertos densos .

Portanto, podemos dizer que um espaço é *Baire* se cumpre com alguma dessas propriedades acima.

Teorema 1.41 (**Baire**). *Seja X um espaço métrico completo. Então a intersecção enumerável de abertos densos é denso em X.*

∎

Teorema 1.42. *Seja X um espaço completamente metrizável. Então é espaço de Baire.*

∎

Todo espaço completamente metrizável não é um conjunto magro em si mesmo. Seja X um espaço completamente metrizável e A qualquer subconjunto de X. Então A é complementar de um conjunto magro em X se, e somente se, contém um denso G_δ.

Observação 1.43. Seja X um espaço topológico e A um conjunto de interior vazio em $D \subseteq X$, onde D é um conjunto denso em X. Então A tem interior vazio em X, pois claramente, se existisse um aberto U de X contido em A teríamos $U \cap D \subseteq A \cap D = A$, daí $U \cap D$ é um aberto relativo a topologia de subespaço de D que está contido em A, segue então que A não possui interior vazio em D.

Daremos a seguir uma propriedade elementar será importante no segundo capítulo.

Proposição 1.44. *Seja X um espaço topológico e $Y \subseteq X$ com interior vazio em X. Dado U um aberto de X, então podemos afirmar que $Y \cap U$ tem interior vazio em U.*

Demonstração:

Se $Y \cap U$ tem interior não vazio em U, existe um aberto V de U contido em $Y \cap U$ testemunha. Como U é aberto em X, então V é aberto em X que está contido em Y. Logo Y teria interior não vazio em X. ■

Proposição 1.45. *Sejam Y um conjunto denso contido em X, A um subconjunto de Y e Z um subconjunto de X, com $Z \cap Y = A$. Se A tem interior vazio em Y, então Z tem interior vazio em X.*

Demonstração:

De fato, pois de 1.43 se A tem interior vazio em Y, então A tem interior vazio em X. Falta checarmos que $Z \setminus A$ tem interior vazio em X. Pois bem, se existisse um aberto U de X contido em $Z \setminus A$, como Y é denso, segue então que $Y \cap U$ é não vazio e isto contradiz a afirmação que $Y \cap Z$ é igual ao conjunto A. ■

Uma consequência imediata dessa proposição é descitra no seguinte:

Corolário 1.46. *Sejam X um espaço topológico; Y um subconjunto denso de X e $A \subseteq Y$ fechado de interior vazio, então existe um fechado de interior vazio em X com $A = G \cap Y$.* ■

Proposição 1.47. *Sejam Y um conjunto denso contido em X, A um subconjunto de Y e Z um subconjunto de X, com $Z \cap Y = A$. Se A tem interior vazio em Y, então Z tem interior vazio em X.*

Demonstração:

De fato, pois por 1.43 se A tem interior vazio em Y, então A tem interior vazio em X. Falta checarmos que $Z \setminus A$ tem interior vazio em X. Pois bem, se existisse um aberto U de X contido em $Z \setminus A$, como Y é denso, segue então que $Y \cap U$ é não vazio e isto contradiz a afirmação que $Y \cap Z$ é igual ao conjunto A. ■

Proposição 1.48. *Um conjunto A é raro, se e somente se, todo aberto não vazio U contém um aberto não vazio V tal que $V \cap A$ é vazio.* ■

Proposição 1.49. Sejam A, D subconjuntos de um espaço topológico X, sendo A um fechado de interior vazio e D um denso em X. Então $A \cap D$ é um fechado de interior vazio em D.

Demonstração:

Com efeito, que $A \cap D$ é fechado em D é imediato, pois A é fechado em X. Falta vermos que $A \cap D$ tem interior vazio. Suponhamos que exista um aberto U não vazio de D contido em $A \cap D$. Por definição de aberto na topologia subespaço de D, o aberto U é igual a $V \cap D$, onde V é um aberto não vazio de X. Portanto, $U = V \cap D \subseteq A \cap D$. Como A é fechado de interior vazio, então $X \setminus A$ é um aberto denso em X, decorre que $X \setminus A \cap V = V \setminus A$ é um aberto não vazio de X. Por conseguinte, sendo D um denso em X e $V \cap D$ um subconjunto de $A \cap D$, temos que $(V \setminus A) \cap D$ é um aberto não vazio contido em $A \cap D$, absurdo. ■

Uma consequência importante da proposição 1.49, e que posteriormente voltaremos a fazer referência, consiste: se A é um fechado raro em $\mathbb{R}$ então sua intersecção com o conjunto dos irracionais é ainda um fechado raro nos irracionais.

Proposição 1.50. *Se $s_0, s_1, ..., s_k \in {}^{<\omega}\omega$ e $F_0, F_1, ..., F_m$ são conjuntos fechados de interior vazio em ${}^{\omega}\omega$, então existe $t \in {}^{<\omega}\omega$ que é tal que $[s_i{}^\frown t] \cap F_j = \emptyset$, para todo $0 \leq i \leq k$ e para todo $0 \leq j \leq m$.*

Demonstração:

Começamos argumentando para s_0 e F_0. Sendo F_0 um conjunto fechado de interior vazio, então existe $t_0 \in {}^{<\omega}\omega$ tal que $[s_0{}^\frown t_0] \cap F_0 = \emptyset$. Agora, como $[s_1{}^\frown t_0]$ é um conjunto aberto e F_0 é um conjunto raro, então existe $t_1 \in {}^{<\omega}\omega$ tal que $[s_1{}^\frown t_0{}^\frown] \cap F_0 = \emptyset$. Como o quantidade de sequências s_j é finita, então em um número finito de passos conseguirmos contruir a sequência $q_0 := t_0{}^\frown t_2{}^\frown ...{}^\frown t_k$ tal que $[s_j{}^\frown t_0{}^\frown t_1{}^\frown ...{}^\frown t_k] \cap F_0 = \emptyset$. Argumentando para F_1, sendo F_1 um conjunto fechado de interior vazio, então existe w_0 tal que $[s_0{}^\frown q_0{}^\frown w_0] \cap F_1 = \emptyset$, e assim repetimos o processo para cada F_j. No final, obtemos $t \in {}^{<\omega}\omega$, que por construção é tal que $[s_i{}^\frown t] \cap F_j = \emptyset$, para todo $0 \leq i \leq k$ e para todo $0 \leq j \leq m$. ■

Dados $x \in \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$. O ponto x é dito *ponto de condensação* de A se para todo U vizinhança aberta de x, temos $|U \cap A| > \aleph_0$.

Teorema 1.51. *Dado um conjunto do tipo G_δ que seja não-enumerável, esse G_δ contém uma cópia homeomorfa do conjunto de Cantor que é um fechado raro de medida nula.*

Demonstração:

Seja $E := \bigcap G_n$, com G_n aberto, onde E é não-enumerável. Defina $F := \{x \in E : x$ é de condensação de $E\}$. Note que F é não-vazio, pois se todo ponto de E fosse contraexemplo, como $\mathbb{R}$ tem base enumerável $\mathcal{B}$, teríamos:

$$\forall\, x \in E,\, \exists V_x \in \mathcal{B},\, \text{com}\, x \in V_x$$

$$|V_x \cap E| \leq \aleph_0$$

Considere a família $\mathcal{A} := \{V_x : x \in E\}$. Como $\mathcal{B}$ é enumerável e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, então a família $\mathcal{A}$ é enumerável. Veja também que $E \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, portanto, o conjunto E pode ser escrito como $E = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} E \cap A$. Sendo $\mathcal{A}$ enumerável, segue que E é enumerável, pois é união enumerável de conjuntos enumeráveis, diante disso, estamos contradizendo a hipótese que E é não-enumerável.

Vejamos que F não tem pontos isolados: de fato, suponha que exista $x \in F$ e U uma vizinhança aberta de x, tal que $|U \cap F| = \{x\}$. Por outro lado, teríamos que $U \setminus \{x\}$ é aberto e todos os seus pontos não seriam de condensação. Como consequência disso, um ponto de $U \setminus \{x\}$ teria uma vizinhança aberta com extremos racionais contida em $U \setminus \{x\}$ intersectanto E apenas em enumeráveis pontos, e com argumentos análogos aos acima, temos um absurdo.

Vamos construir uma cópia do conjunto de Cantor dentro do $E := \bigcap_{n \geq 1} G_n$. Seja G_1 o aberto que está na família $\{G_n : n \in \omega\}$. Podemos tomar $I(0)$ e $I(2)$ dois fechados disjuntos de comprimento no máximo $\frac{1}{3}$ cujo interior encontra F e cuja união está contida em G_1. Procedendo indutivamente, dados 2^n intervalos fechados disjuntos, todos com interior intersectando F e comprimento no máximo $\frac{1}{3^n}$, todos contidos em G_n e indexados por $I(s)$, onde $s \in {}^{<\omega}\{0, 2\}$ estendemos cada um deles por dois intervalos disjuntos, $I_{s^\frown 0}$ e $I_{s^\frown 2}$, de $diam(\frac{1}{3^{n+1}})$, contidos em G_{n+1}. Temos intervalos fechados da forma I_s para $s \in {}^{<\omega}2$. Agora, fazemos

$$C := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{\text{dom}(s) = n} I_s$$

Como $\bigcup_{\text{dom}(s)=n} I_s$ é um fechado, segue que C é um fechado, e tem interior vazio e tem medida nula pelos mesmos motivos do conjunto de Cantor. Note que $C := \{x_f : f \in {}^{\omega}\{0, 2\}\}$, onde $\{x_f\} := \bigcap_{n \geq 1} I_{f\restriction_n}$, e que existe uma bijeção de C e o conjunto de Cantor, dada por

$$x_f \mapsto (0, f(0)f(1)f(2)...)_3$$

e tal bijeção leva base em base, logo o conjunto de Cantor é homeomorfo ao conjunto C.

■

As seguintes proposições serão importantes para demonstrarmos o Teorema Erdös-Sierpiński no apêndice A.

Proposição 1.52. *Se A é um subconjunto de $\mathbb{R}$ que tem medida nula, então existe N*

nulo com $|N \setminus A| = \mathfrak{c}$.

Demonstração:

Como $m(A) = \inf\{m(U) : U \text{ aberto e } A \subseteq U\}$, se $m(A) = 0$ então tomando $\epsilon = 1$, existe $U \subseteq A$ e $m(U) < 1$. Agora como $\mathbb{R} \setminus U$ é um conjunto fechado, logo ele também é um conjunto do tipo G_δ que não é enumerável, caso contrário $m(\mathbb{R}) < 1$ o que seria um absurdo. Pelo Teorema 1.51, existe um conjunto C de medida nula que é uma cópia homeomorfa do conjunto de Cantor, tal que $C \subseteq \mathbb{R} \setminus U \subseteq \mathbb{R} \setminus A$. Considere $N := A \cup C$. ■

Proposição 1.53. *Se* A *é um subconjunto magro de* $\mathbb{R}$*, então existe* M *magro com* $|M \setminus A| = \mathfrak{c}$.

Demonstração:

Sendo A um subconjunto magro, por definição existe uma família $\{F_n : n \in \omega\}$ de conjuntos fechados de interior vazio, tal que $A \subseteq \bigcup_{n\in\omega} F_n$. Segue que $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\omega} F_n \subseteq \mathbb{R} \setminus A$. Note que $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\omega} F_n$ é um G_δ não enumerável, caso contrário $\mathbb{R}$ seria um conjunto magro. Novamente, pelo Teorema 1.51, existe $C \subseteq \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\omega} F_n \subseteq \mathbb{R} \setminus A$. Considere $M := A \cup C$. ■

1.4 Árvores

Definimos uma *árvore* como sendo uma ordem parcial $\langle T, \leq \rangle$ com a propriedade que: dado $x \in T$, o conjunto $\{y \in T : y \leq x\}$ é uma boa-ordem com respeito a $\leq$. Seja $\langle T, \leq \rangle$ uma árvore. Definimos a altura de $x \in T$, denotada por $h(x, T)$, como sendo o tipo de ordem de $\{y \in T : y \leq x\}$. Dado um ordinal α, denotamos por $Lev_\alpha(T)$ o conjunto $\{x \in T : h(x, T) = \alpha\}$ e chamaremos de *nível* α da árvore. A *altura* de uma árvore T, denotada por $ht(T)$, é o mínimo $\alpha \in On$ tal que o α-ésimo nível de T é vazio. Seguindo com as definições, dizemos que $r \subseteq T$ é um *ramo* de T se for uma cadeia maximal de T.

Fato 1.54. $ht(T) = \text{Sup}\{ht(x, T) + 1 : x \in T\}$.

Demonstração:

$\leq$: Se $\xi \in ht(T)$, então $\xi < ht(T)$. Por minimalidade, existe z com $ht(z, T) = \xi$. Como $\xi \in \xi + 1, \xi \in \bigcup\{ht(x, T) + 1 : x \in T\} = \text{Sup}\{ht(x, T) + 1 : x \in T\}$.

$\geq$: Se $x \in T$ e $\alpha = ht(x, T)$, então $Lev_\alpha(T) \neq \emptyset$ e $\alpha + 1 \leq \min\{\xi : Lev_\xi(T) = \emptyset\}$. Portanto, $\alpha + 1 \leq ht(X)$, logo $ht(T)$ é cota superior de $\{ht(x, T) + 1 : x \in T\}$, e acabou. ■

Uma *anticadeia* numa árvore $\langle T, < \rangle$ é uma família $A \subseteq T$ tal que para quaisquer $x, y \in A, x \nleq y$ e $y \nleq x$. Um exemplo de anticadeia é o próprio nível. Agora, observamos que se $p, q \in T$ são incomparáveis, obrigatoriamente não existe $t \in T$ tal que $q, p \leq t$, pois se existisse teríamos que o conjunto $\{s \in T : s \leq t\}$ é seria boa ordem, logo $\{p, q\}$ tem mínimo e daí devem ser comparáveis.

Seja $T' \subseteq T$, diz-se que T' é *subárvore* se para todo $x \in T'$ e $y \in T$, tal que $y < x$, então $y \in T'$.

É conveninte nos trabalhos envolvendo espaços de Baire ou conjunto de Cantor de espaços poloneses arbitrários algumas noções topológicas para tais espaços de maneira combinatória. Em particular, considerando $X = 2$ ou $X = \omega$, uma base padrão para a topologia de X^ω consiste na família formada por $[s] = \{x \in {}^{<\omega}X : s \subseteq x\}$, onde $s \in {}^{<\omega}X$. Para ver que de fato $\{[s] : s \in {}^{<\omega}X\}$ é uma base, tome U um aberto básico de X^ω, com $x \in U$. Seja o conjunto das coordenadas destacas de U dado por $I = \{n \in \omega : U_n \neq X\}$. Então tome $k = \max I$ e considere $s : k \to X$, pondo $s(n) = x_n$, então $x \in [s]$, e por definição de s claramente $[s] \subseteq U$. Note que um conjunto $A \subseteq {}^\omega 2$ tem interior vazio se todo aberto de ${}^\omega 2$ não está contido em A, i.e., dado qualquer $p \in {}^\omega 2$, existe $f \in [p]$ tal que $f \notin A$.

Fato 1.55. *Uma cadeia $\mathcal{C}$ que é uma subárvore é um ramo se, e somente se, não existem elementos na árvore de altura $\geq$ que $\sup\{h(x,T) + 1 : r \in \mathcal{C}\}$ que sejam limitantes superiores de $\mathcal{C}$ (neste caso note que altura do ramo é igual a altura da subárvore $\mathcal{C}$).*

Definimos o conjunto de todos os *sucessores imediadatos* de $t \in T$ o conjunto $suc(t, T) := \{s > t : h(s, T) = h(t, T) + 1\}$.

Considere A um subconjunto de 2^ω. Denote $A^* := \{x \restriction n : n \in \omega, x \in A\}$ e por $[A^*]$ o conjunto de todos os ramos de A^*. Claro que A^* é uma subárvore de ${}^{<\omega}2$. O próximo resultado diz exatamente quem são os conjuntos fechados em 2^ω (ou ω^ω).

Fato 1.56. $\overline{A} = [A^*]$.

Demonstração:

$\overline{A} \subseteq [A^*]$: Seja $f \in \overline{A}$. Considere a base local $\{[f \restriction m] : m \in \omega\}$ de f. Logo, $[f \restriction_m] \cap A \neq \emptyset$, ou seja, existe $g_m \in A$ com $g_m \restriction_m = f \restriction_m$. Disso podemos deduzir que $f \restriction_m \in A^*$ e sendo m um número natural arbitrário, f é um ramo de A^*.

$[A^*] \subseteq \overline{A}$: Seja $f \in [A^*]$, i.e. f é um ramo de A^*. Portanto, $f \restriction n$ é um elemento de A. Para todo $m \geq n$, $f \restriction_m \in [f \restriction_n]$, logo qualquer aberto básico $[f \restriction_n]$ é vizinhança aberta de f, então $f \in \overline{A}$. ∎

Proposição 1.57. *Fixe $\alpha \leq ht(T)$. Seja C uma cadeia contida em $T_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} Lev_\beta(T)$. Então C é um ramo tal que $\alpha = \min\{\beta : C \cap Lev_\beta(T) \neq \emptyset\}$ equivale a C ser limitado* *e fechado para baixo, i.e., se $x \in C$ tem altura β e $\beta < \xi < \alpha$, então existe $y \in C$ com $ht(y, T) = \xi$ e dado $x \in C$ e $y < x$, $y \in C$.* ■

Seja $A \subseteq {}^{\omega}2$. Denotamos por A^* o conjunto da forma $\{f \upharpoonright n : f \in A, n < \omega\}$. Dizemos que A^* *ramifica sempre* dado $n \in \omega$ e $f \in A$, existem $m > n$ e $g \in A$ tal que $m = \min\{k : f(k) \neq g(k)\}$.

Proposição 1.58. *$f \in A$ não é ponto de acumulação de A se, e somente se, existe $n \in \omega$, tal que para todo $m \leq n$, A^*, como árvore, não ramifica acima de $f \upharpoonright n$.* ■

1.5 Princípios de Seleção e os Jogos associados

Scheepers no artigo [Scheep96] e juntamente com seus co-autores em [JMSS96], fizeram um estudo de maneira sistemática dos princípios de seleção inspirados nas propriedades de: *Rothberger, Menger e Hurewicz*[15]. Assuma que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são famílias de conjuntos, com $\emptyset \notin \mathcal{A}$. Tais princípios, que são simplesmente declarações que podem ou não ser válidas para as famílias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, são descritos abaixo:

- $S_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$: Dada uma sequência $\langle \mathcal{A}_n : n \in \omega \rangle$ de elementos de $\mathcal{A}$, existe uma sequência $\langle B_n : n \in \omega \rangle$ tal que $B_n \in \mathcal{A}_n$, para cada $n \in \omega$, e $\{B_n : n \in \omega\} \in \mathcal{B}$.

- $S_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$: Dada uma sequência $\langle \mathcal{A}_n : n \in \omega \rangle$ de elementos de $\mathcal{A}$, podemos escolher $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{A}_n$ finito, para todo $n \in \omega$, a fim de que a família $\bigcup\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$ pertença a $\mathcal{B}$.

- $U_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$: Dada uma sequência $\langle \mathcal{A}_n : n \in \omega \rangle$ de elementos de $\mathcal{A}$, podemos selecionar, para cada $n \in \omega$, um conjunto finito $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{A}_n$ tal que $\{\bigcup \mathcal{V}_n : n \in \omega\}$ é um elemento de $\mathcal{B}$.

Note que:

Se vale $S_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ então vale $S_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Para esse trabalho, nosso principal interesse é estudar o princípio de seleção $S_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Começamos observando o seguinte:

Observação 1.59. Se $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ e vale $S_1(\mathcal{A}, \mathcal{A})$, então todo elemento de $\mathcal{A}$ contém um subconjunto enumerável que também pertence a $\mathcal{A}$. De fato: tome $\mathcal{F} \in \mathcal{A}$ e considere $\mathcal{A}_n := \mathcal{F}$, para todo $n \in \omega$. Como vale $S_1(\mathcal{A}, \mathcal{A})$, existe $B_n \in \mathcal{A}_n = \mathcal{F}$, para todo

[15] No momento, não precisamos definir essas propriedades, entretanto, estas serão definidas no apêndice B.

$n \in \omega$, tal que $\{B_n : n \in \omega\} \in \mathcal{A}$. De posse disso, concluímos que $\{B_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{F}$ e $\{B_n : n \in \omega\} \in \mathcal{A}$.

Normalmente, por uma questão de contexto, em qualquer situação os elementos de $\mathcal{A}$ são supostos enumeráveis.

Observação 1.60. Precisamos destacar, de maneira mais concreta que, os princípios de seleção definidos acima são de maior interesse quando relacionados aos espaços topológicos. Formalmente,

$$\boldsymbol{S}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \ \ \boldsymbol{S_{fin}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \text{ e } \boldsymbol{U_{fin}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

denotam classes de espaços topológicos que atendem a dada asserção definida pelo princípio de seleção. Dado X um espaço topológico arbitrário, dizemos que:

$$X \textit{ satisfaz } \boldsymbol{S}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \textit{ se, e somente se, vale o princípio } S_1(\mathcal{A}_X, \mathcal{B}_X),$$

No enunciado anterior: $\mathcal{A}_X$ e $\mathcal{B}_X$, normalmente, denotam famílias de conjuntos topologicamente definidos em termos do espaço X. Por exemplo, na literatura sempre temos $\mathcal{O}_X$ como sendo a família das coberturas abertas do espaço topológico X. Assim,

$$X \textit{ satisfaz } \boldsymbol{S}_1(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \textit{ se, e somente se, vale o princípio } S_1(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X).$$ [16]

O símbolo $G_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, com $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ famílias de conjuntos, denota o jogo associado a hipótese de seleção $S_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Esse jogo é descrito do seguinte modo:

Definição 1.61. $G_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ é o seguinte jogo, disputado por dois jogadores: UM e $DOIS$. O jogador UM na n-ésima rodada joga um elemento $\mathcal{A}_n \in \mathcal{A}$, e o jogador $DOIS$ responde escolhendo um elemento $B_n \in \mathcal{A}_n$. O jogo

$$\langle \mathcal{A}_0, B_0, \mathcal{A}_1, B_1, \mathcal{A}_2, B_2, \mathcal{A}_3, B_3, ... \rangle$$

é vencido por $DOIS$ se $\{B_n : n \in \omega\}$ for um elemento de $\mathcal{B}$; do contrário UM vence.

É claro que podemos definir os jogos associados aos princípios de seleção $S_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $U_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, com devidas adaptações, porém, tais jogos não serão estudados nessa dissertação. A definição que daremos a seguir será de grande importância para o Capítulo 3:

[16] Essa é uma das propriedades a serem definidas no apêndice B.

Definição 1.62. Consideremos o jogo $G_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Uma *estratégia* φ para o jogador UM é uma função

$$\varphi : t \in {}^{<\omega}\bigcup \mathcal{A} \mapsto \varphi(t) \in \left[\bigcup \mathcal{A}\right]^{\omega}.$$

A ideia de qualquer estratégia φ é decidir os lances de UM, a partir dos lances anteriores do jogador $DOIS$, i.e., se $\langle B_0, B_1, B_2, ..., B_{n-1}\rangle$ é uma sequência finita de lances de $DOIS$, realizados nas i-ésimas rodadas, onde $i \leq n-1$, então UM, jogando de acordo com sua estratégia, responderá na n-ésima rodada com $\varphi(\langle B_0, B_1, B_2, ..., B_{n-1}\rangle)$. Isso se traduz no seguinte:

$$\varphi(\langle\rangle) := \mathcal{A}_0$$

$$\varphi(\langle B_0, B_1, ..., B_{n-1}\rangle) := \mathcal{A}_n$$

tal que $\mathcal{A}_n := \{B_n^m : m \in \omega\}$.

No que segue, daremos a devida formalização da ideia do paragráfo anterior. Considere fixada uma estratégia φ para o jogador UM e assuma que UM jogará sempre segundo φ. Dada $s \in {}^{<\omega}\omega$ uma sequência com $\mathrm{dom}(s) = n$, podemos associar a essa sequência o lance do jogador UM que responde, segundo sua estratégia, à sequência de lances do jogador $DOIS$ cujos movimentos na i-ésima rodada, para $i < n$, constituíram-se na escolha do elemento indexado por $s(i)$. O lance associado a s, que é a jogada no domínio $\mathrm{dom}(s)$-ésima rodada, será indicado por: $\mathcal{A}_s = \{B_s^m : m \in \omega\}$. Porém, a codificação de $\mathcal{A}_s$ deve pressupor, obviamente, quais foram os lances anteriores de UM: $\mathcal{A}_\emptyset, \mathcal{A}_{s\restriction 1}, \mathcal{A}_{s\restriction 2}, ..., \mathcal{A}_{s\restriction n-1}$. Assim, codificamos os lances de $DOIS$ em uma sequência $\psi(s) \in {}^{n}\bigcup \mathcal{A}$, definida indutivamente, como descrito abaixo:

$$\psi : s \in {}^{<\omega}\omega \mapsto \psi(s) := \langle B_\emptyset^{s(0)}, B_{s\restriction 1}^{s(1)}, B_{s\restriction 2}^{s(2)}, ..., B_{s\restriction n-1}^{s(n-1)}\rangle \in {}^{<\omega}\bigcup \mathcal{A}$$

tal que

$$B_\emptyset^{s(0)} := \varphi(\langle\rangle)^{s(0)} \in \mathcal{A}_\emptyset$$

e para cada i, com $1 \leq i \leq n-1$,

$$B_{s\restriction i}^{s(i)} := \varphi(\langle B_\emptyset^{s(0)}, B_{s\restriction 1}^{s(1)}, B_{s\restriction 2}^{s(2)}, ..., B_{s\restriction i-1}^{s(i-1)}\rangle)^{s(i)} \in \mathcal{A}_{s\restriction i}$$

onde $\mathcal{A}_{s\restriction i} := \{B_{s\restriction i}^m : m \in \omega\}$.

Veja que o descrito acima, nos diz que: Dada uma sequência $s \in {}^{n}\omega$, então $\psi(s) \restriction i = \psi(s \restriction i)$, para $i < n$. A seguinte tabela descreve a codificação que tratamos acima:

Rodada	Lances de UM	Lances de $DOIS$
0	$\varphi(\langle\rangle) = \mathcal{A}_\emptyset$	$B_\emptyset^{s(0)}$
1	$\varphi(\langle B_\emptyset^{s(0)}\rangle) = \mathcal{A}_{s\restriction 1}$	$B_{s\restriction 1}^{s(1)}$
2	$\varphi(\langle B_\emptyset^{s(0)}, B_{s\restriction 1}^{s(1)}\rangle) = \mathcal{A}_{s\restriction 2}$	$B_{s\restriction 2}^{s(2)}$
3	$\varphi(\langle B_\emptyset^{s(0)}, B_{s\restriction 1}^{s(1)}, B_{s\restriction 2}^{s(2)}\rangle) = \mathcal{A}_{s\restriction 3}$	$B_{s\restriction 3}^{s(3)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$\varphi(\langle B_\emptyset^{s(0)}, B_{s\restriction 1}^{s(1)}, B_{s\restriction 2}^{s(2)}, ..., B_{s\restriction n-2}^{s(n-2)}\rangle) = \mathcal{A}_{s\restriction n-1}$	$B_{s\restriction n-1}^{s(n-1)}$
n	$\varphi(\psi(s)) := \mathcal{A}_s$	

A seguinte observação justifica a razão pela qual abordamos tais princípios, logo após tratarmos de árvores.

Observação 1.63. Uma estratégia φ para UM determina uma árvore $\{B_s : s \in {}^{<\omega}\omega\}$, ordenada pela indexação via inclusão reversa, tal que $B_\emptyset := \emptyset$ e, para todo $s \in {}^{<\omega}\omega$, $\varphi(\psi(s)) := \mathcal{A}_s = \{B_{s^\frown m} : m \in \omega\}$, onde, de modo bastante natural, temos $B_{s^\frown m} = B_s^m$, para todo $m \in \omega$.

Note que, depois de uma instância específica do jogo jogada por UM, segundo sua estratégia φ, todos os lances de $DOIS$ podem ser codificados por uma $f \in {}^\omega\omega$ que é a união das sequências finitas que codificam cada lance conforme acabamos de descrever, i.e., se s_n é a sequência finita que codifica os lances da rodada 0 até $n-1$, então obtemos:

$$f := \bigcup_{n\in\omega} s_n$$

Observe que nessas condições o n-ésimo lance de $DOIS$ é $B_{f\restriction n}^{f(n)} = B_{f\restriction n+1}$. Isso motiva a seguinte definição:

Definição 1.64. Dada uma estratégia φ para o jogador UM, uma *sequência vencedora de lances que derrota* φ é uma sequência de lances que é codificada por uma sequência $f \in {}^\omega\omega$, tal que, se UM joga segundo sua estratégia, então $\{B_{f\restriction n}^{f(n)} : n \in \omega\} = \{B_{f\restriction n+1} : n \in \omega\} \in \mathcal{B}$.

Definição 1.65. Dizemos que uma estratégia φ para o jogador UM é uma *estratégia vencedora* se φ não pode ser derrotada.

Segue da definição anterior que UM *não possui estratégia vencedora* se dada qualquer estratégia φ para o jogador UM, existe $f \in {}^\omega\omega$ tal que $\{B_{f\restriction n+1} : n \in \omega\} \in \mathcal{B}$. Uma importante conclusão é que no jogo $G_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, para mostramos que UM não possui estratégia vencedora, basta fixarmos uma estratégia arbitrária φ para UM, considerarmos a árvore correspondente, e exibirmos $f \in {}^{\omega}\omega$ tal que o ramo $\{B_{f\restriction n+1} : n \in \omega\}$ da árvore determinada por φ pertence a família $\mathcal{B}$.

A seguinte proposição nos fornece uma ferramenta importante para provarmos resultados relacionados a princípios de seleção usando os jogos associados.

Proposição 1.66. *Se UM não tem estratégia vencedora em $G_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, então vale $S_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.*
Demonstração:

Por contrapositiva, se não valesse $S_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, existiria uma família $\{\mathcal{A}_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{A}$ tal que para qualquer escolha de $B_n \in \mathcal{A}_n$, $\{B_n : n \in \omega\} \notin \mathcal{B}$. Tomando a estratégia φ de UM que responde ao n-ésimo lance sempre com $\mathcal{A}_n$, o jogador UM com certeza vence o jogo $G_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, ou seja, φ é uma estratégia vencedora para UM. ■

Como no caso dos princípios de seleção, usaremos os jogos para definir classes de espaços topológicos. Dado um espaço X, diremos que:

$$\begin{gathered} X \textit{ satisfaz } \mathbf{G_1}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \textit{ se, e somente se,} \\ \textit{o jogador } UM \textit{ não possui estratégia vencedora no jogo } G_1(\mathcal{A}_X, \mathcal{B}_X) \end{gathered}$$

Dessa forma, a proposição anterior tem o seguinte corolário:

Corolário 1.67. *Se X satisfaz $\mathbf{G_1}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, então X satisfaz $\boldsymbol{S}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.*

■

1.6 Axioma de Martin e pequenos cardinais

Nessa seção vamos introduzir o Axioma de Martin (**MA**). Tal axioma é uma ferramenta viável para demonstrar teoremas que estão relacionados com **CH**. Sob **MA**, de certa forma, todos os cardinais menores que $\mathfrak{c}$ se "comportam" como $\aleph_0$. Vale destacar que: **MA** é um princípio combinatório consistente, i.e., não é nem um axioma de **ZFC** e nem um teorema de **ZFC**.

A formulação do Axioma de Martin envolve a noção de pré-ordem. Por isso, começamos relembrando a definição de *pré-ordem.* Um par $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ diz-se pré-ordem quando $\leq$ é :

(i) reflexiva, i.e, se $p \in \mathbb{P}$ então $p \leq p$;

(ii) transitiva, i.e, se $p, q, r \in \mathbb{P}$, e $p \leq q$, $q \leq r$, então $p \leq r$.

Nessa seção e no contexto do Axioma de Martin, sempre que escrevermos "$\mathbb{P}$", estaremos supondo que se trata de uma pré-ordem, e outras vezes diremos, por abuso de linguagem, "ordem" em vez de "pré-ordem".

Seguindo com as definições, vamos nos referir aos elementos de $\mathbb{P}$ como *condições* e quando $q \leq p$, diremos que q *estende* p. Seja $p, q \in \mathbb{P}$, se p e q tem uma *extensão comum*(isto é, existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p, q$), então dizemos que p e q são *compatíveis*, caso contrário diremos que p e q são *incompatíveis*.

Uma *anticadeia* A é um subconjunto de $\mathbb{P}$ tal que quaisquer dois elementos de A são incompatíveis. Se toda anticadeia de $\mathbb{P}$ é enumerável, então $\mathbb{P}$ é dita *ccc*(do inglês *countable chain condition*).

Vejamos, também, se $\langle T, \leq \rangle$ é uma árvore, podemos considerar a ordem reversa $\langle T, \geq \rangle$ e no contexto de Axioma de Martin,temos a seguinte equivalência: Na linguagem de árvores, ser uma anticadeia equivale a ser uma anticadeia na linguagem do Axioma de Martin aplicado a pré-ordem $\langle T, \geq \rangle$. A seguir iremos conferir tal afirmação.

(i) Seja A uma anticadeia de T no sentido de árvore. Fixados $p, q \in A$, já vimos que não existe $t \in T$ tal que $q, p \leq t$. Considerando a ordem $\geq$, temos que não existe $t \geq p, q$, ou seja, p e q não são compatíveis. Logo, A é anticadeia em $\langle T, \geq \rangle$.

(ii) Reciprocamente, seja A uma anticadeia em $\langle T, \geq \rangle$. Caso A não fosse uma anticadeia no sentido de árvore, teríamos a existência de $p, q \in A$ que são comparáveis, ou seja, sem perda de generalidade, suponha $p \leq q$. Sendo $\leq$ uma ordem, então $p, q \leq q$. Isto implica que na linguagem do Axioma de Martin, temos $p, q \geq q$, ou seja, A não pode ser uma anticadeia, contradição.

Introduzimos agora a noção de conjunto denso em uma ordem. Diremos que $D \subseteq \mathbb{P}$ é *denso* se para todo $p \in \mathbb{P}$ existe algum $r \in D$ tal que $r \leq p$. Vamos dar um exemplo de conjunto denso em uma pré-ordem, porém, antes introduziremos um conjunto importante para os iniciantes no estudo do *Forcing*, que é o seguinte: Sejam I, J conjuntos, onde I é um conjunto infinito e J não-vazio, e seja κ um cardinal infinito. Definimos:

$$Fn(I, J, \kappa) = \{f | \ f : I \to J \text{ função, com } dom(f) \subseteq I \text{ e } |dom(f)| < \kappa\}.$$

O conjunto $Fn(I, J, \kappa)$[17] é uma pré-ordem (se $\mathrm{dom}(f) < \omega$, denominado por *conjunto das funções parciais finitas de I em J*), com $q \leq p$ se, e só se, $p \subseteq q$. Note que p, q são compatíveis se, e somente se, $p(x) = q(x)$, para todo $x \in dom(p) \cap dom(q)$.

Considerando $\kappa = \omega$, denotamos $F_n(I, J) := F_n(I, J, \omega)$. Um exemplo de conjunto denso nessa ordemn parcial é $D_i = \{q \in \mathbb{P} : i \in dom(q)\}$, para todo $i \in I$. De fato, fixe $p \in \mathbb{P}$. Se $i \in dom(p)$, não há o que fazer. Caso contrário, tome $q = p \cup \{\langle i, j \rangle\}$ para

[17]Sejam $I = \kappa$ e $J = 2$ e $A \in [Fn(\kappa, 2)]^{\omega_1}$. Pelo Lema dos Δ sistemas podemos tomar $\{\mathrm{dom}(p) : p \in A\}$ como sendo um Δ-sistema de raiz r. Como r é finito e como existe só um número finito de funções de r em 2, podemos tomar $q : r \to 2$ tal que dado $p \in A$ vale que $p \leq q$. Logo A não é anticadeia, logo $Fn(\kappa, 2)$ é *ccc*.

algum $j \in J$ e daí obtemos $q \leq p$, com $q \in D_i$. De maneira análogo, se demonstra que $E_j = \{q \in \mathbb{P} : j \in im(q)\}$ também é um denso em $\mathbb{P}$.

Outra definição, que por si só se faz interessante, é a de *filtro genérico* numa pré-ordem $\mathbb{P}$. Pois bem, primeiramente, definimos um $G \subseteq \mathbb{P}$ *filtro* se satisfaz as seguintes propriedades:

- Se $q \in G$ e $q \leq p$, $p \in G$;
- Se $p, q \in G$, então existe $r \in G$ tal que $r \leq p$ e $r \leq q$.

Se G é um filtro em $F_n(I, J)$, o conjunto $\bigcup G$ é uma função com domínio em I e imagem contida em J, isto é claro, pois dois elementos distintos de um filtro são sempre compatíveis no contexto de ordem, então a família G é uma *família de funções compatíveis*, i.e., uma família de funções tais que $p, q \in G$ dois elementos distintos, eles coincidem na intersecção de seus domínios, com isso, $\bigcup G$, é uma função.

Teorema 1.68. *Um filtro F na árvore $\langle T, \geq \rangle$ é exatamente uma cadeia em $\langle T, \leq \rangle$, e mais ainda, também é subárvore.*

■

Teorema 1.69. *Seja $\langle T, \leq \rangle$ uma árvore e $\alpha = ht(T)$. Um F é um filtro em $\langle T, \geq \rangle$ intersecta todos os níveis de T se, e somente se, F é um ramo de altura α em $\langle T, < \rangle$.*

■

Se C é uma cadeia em ${}^{<\omega}X$, claramente, $g := \bigcup C$ é uma função[18]. Se para todo $m \in \omega$, existe $p \in C$ com $m \in \mathrm{dom}(p)$, então $\mathrm{dom}(\bigcup C) = \omega$. Se $X = 2$, então $\bigcup C \in {}^{\omega}2$ e o ramo em ${}^{<\omega}2$ correspondente é $\{r : \exists p \in G\, \mathrm{com}\, r \subseteq p\} = \{g \upharpoonright n : n \in \omega\}$. Para árvores de sequências finitas de um dado conjunto ${}^{<\omega}X$, mais importante que a união de uma cadeia intersectar todos os níveis, acaba sendo que cada número natural n pertença ao domínio de alguma sequência $p \in {}^{<\omega}X$.

Seja $\mathcal{D}$ é uma família de densos de $\mathbb{P}$. Dizemos que G é filtro $\mathcal{D}-$genérico se, para todo $D \in \mathcal{D}$, $D \cap G \neq \emptyset$. Agora estamos aptos a enunciar o Axioma de Martin, introduzido por Donald A. Martin e Robert M. Solovay , onde tal asserção é independente dos axiomas de **ZFC** e, mais ainda, **MA** + ¬**CH** é independente de **ZFC**.

Considere a seguinte asserção:

MA(κ): *Seja $\mathbb{P}$ uma ordem ccc e $\mathcal{D}$ uma coleção de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ com $|\mathcal{D}| \leq \kappa$. Então existe um filtro $\mathcal{D}-$genérico de $\mathbb{P}$.*

Note que imediatamente se **MA**(λ) vale e $\kappa < \lambda$ então **MA**(κ) vale. Expomos que a premissa dada em **MA**(κ) não pode ser enfraquecida, no seguinte sentido, não podemos

[18]Observe que a união de uma cadeia C não faz com que C seja um ramo.

retirar a propriedade *c.c.c* da pré-ordem $\mathbb{P}$ dada na definição de $\mathbf{MA}(\kappa)$. Tomando $\kappa = \aleph_1$, o forcing $F_n(\omega, \omega_1)$ não tem a propriedade *c.c.c* e $\mathbf{MA}(\aleph_1)$, para essa ordem, falha.

Vejamos algumas consequências envolvendo $\mathbf{MA}(\kappa)$:

1. $\mathbf{MA}(\omega)$ vale(e não precisamos da hipótese de $\mathbb{P}$ ser ccc).

2. $\mathbf{MA}(\mathfrak{c})$ é falso.

3. Se κ é um cardinal infinito e vale $\mathbf{MA}(\kappa)$, então $2^\kappa = 2^\omega$.

Apresentamos um esboço da prova clássica do item 2:

Esboço da Prova: $\mathbf{MA}(\mathfrak{c})$ é falso.

Considere a ordem parcial $\mathbb{P} := \langle F_n(\omega, 2), \subseteq \rangle$. Como $\langle F_n(\omega, 2), \subseteq \rangle$ é c.c.c. Fixado $f \in {}^\omega 2$, definimos o seguinte subconjunto de $\mathbb{P}$

$$D_f := \{p \in F_n(\omega, 2) : \exists\, n \in \omega,\, p(n) = 1 - f(n)\}$$

Note que D_f é um subconjunto denso de $\mathbb{P}$. Para cada $n \in \omega$, definimos o subconjunto de $\mathbb{P}$

$$E_n := \{p \in F_n(\omega, 2) : n \in \mathrm{dom}(p)\}$$

Note que E_n também é um conjunto denso de $\mathbb{P}$. Assim, a família $\mathcal{D} := \{D_f : f \in {}^\omega 2\} \cup \{E_n : n \in \omega\}$ tem tamanho $\mathfrak{c}$. Se valesse $\mathbf{MA}(\mathfrak{c})$, existiria $G \subseteq \mathbb{P}$ filtro genérico de $\mathcal{D}$. Então, para cada $n \in \omega$, vale que $G \cap E_n \neq \emptyset$, logo $\bigcup G$ é uma função de ${}^\omega 2$. Como, para cada $f \in {}^\omega 2$, temos $G \cap D_f \neq \emptyset$, podemos concluir que $\bigcup G$ difere de todas as funções $f \in {}^\omega 2$, mas isso é impossível. ■

Acima, no item 2, vimos que o cardinal $\mathfrak{c}$ testemunha que $\mathbf{MA}(\mathfrak{c})$ é falso, então fica bem definido o cardinal:

$$\mathfrak{m} := \min\{\kappa : \mathbf{MA}(\kappa)\,\text{falha}\}.$$

Segue dos itens 1 e 2 que $\aleph_1 \leq \mathfrak{m} \leq \mathfrak{c}$. Assim, o *Axioma de Martin*, abreviado por **MA**, é a asserção que:

$$\mathbf{MA}(\kappa)\ \textit{vale para todo}\ \kappa < \mathfrak{c},\ \textit{ou, equivalentemente,}\ \mathfrak{m} = \mathfrak{c}.$$

É evidente que **CH** implica **MA**[19]. Sendo $\mathbb{P}$ uma ordem com a propriedade

[19]Aproveitamos para dizer que: usualmente quando "Sob **MA**" aparecer em um dado teorema, estaremos comentendo um certo abuso de linguagem, na verdade estamos nos referindo a "Sob $\mathbf{MA} + \neg\mathbf{CH}$", já que , sob **CH**, **MA** não nos oferece consequências relevantes, num certo sentido

c.c.c, existem versões mais fracas que **MA**, basta restringir a exigência de *c.c.c* a uma propriedade especifica (e mais forte) para $\mathbb{P}$. A seguir daremos algumas variações de **MA**.

Diz-se que $Q \subseteq \mathbb{P}$ é *centrado*, se vale: $\forall F \in [Q]^{<\omega}, \exists p \in \mathbb{P}, \forall q \in F, p \leq q$. Uma ordem $\mathbb{P}$ é dita σ- *centrada* se $\mathbb{P}$ é a uma união no máximo enumerável de conjuntos centrados.

Quando temos uma propriedade sobre $\mathbb{P}$, podemos reescrever o Axioma de Martin apenas acrescentado a propriedade de $\mathbb{P}$ ao enunciado de **MA**. Algumas dessas propriedades sobre $\mathbb{P}$ são: σ-centrada e *enumerável*. Para ordens enumeráveis vamos usar a palavra "countable", ao invés da palavra "enumerável". Destacamos $\mathbf{MA}_{\langle F_n(\omega,2),\subseteq\rangle}$ que também é denotado por $\mathbf{MA}_{Cohen}$[20]. Abaixo definimos:

$$\mathfrak{m}_{Cohen} := \min\{\kappa : \mathbf{MA}(\kappa)\,\text{falha para ordem parcial}\langle F_n(\omega,2),\subseteq\rangle\}$$

$$\mathfrak{m}_{countable} := \min\{\kappa : \mathbf{MA}(\kappa)\,\text{falha para ordens parcias enumeráveis}\}$$

$$\mathfrak{m}_{\sigma-centrada} := \min\{\kappa : \mathbf{MA}(\kappa)\,\text{falha para ordens parcias}\,\sigma\text{-centradas}\}.$$

Como toda pré-ordem enumerável é σ-*centrada*, e toda pré-ordem σ- *centrada* é *ccc*, portanto:

$$\mathbf{MA} \Rightarrow \mathbf{MA}_{\sigma-centrada} \Rightarrow \mathbf{MA}_{countable}.$$

Diz-se que uma ordem parcial $\langle\mathbb{P},\leq\rangle$ tem a propriedade **K** (*Knaster Property*), se dado um conjunto não enumerável $A \subseteq \mathbb{P}$ existe $B \subseteq A$ não enumerável tal que todo elemento $x, y \in B$ são compatíveis. Obrigatoriamente, uma ordem parcial que possui a propriedade **K** é *c.c.c*, a recíproca em geral não vale[21].

Aproveitamos para definir o cardinal:

$$\mathfrak{m}_{\text{propriedade}\,\mathbf{K}} := \{\kappa : \mathbf{MA}(\kappa)\,\text{falha para ordens com a propriedade}\,\mathbf{K}\}.$$

Além disso, dizemos também que vale:

$$\mathbf{MA} \Rightarrow \mathbf{MA}_{\text{propriedade}\,\mathbf{K}}.$$

Vale observar que no esboço da prova do item 2, fizemos uso da pré-ordem

[20]Definimos $\mathbf{MA}_{Cohen}$, pois veremos que toda álgebra de boole enumerável e sem átomos é isomorfa a $Clop({}^{\omega}2)$ e isso implica que argumentar sob $\mathbf{MA}_{countable}$ equivale a argumentar sob $\mathbf{MA}_{Cohen}$.

[21]Sob $\mathbf{MA} + \neg\mathbf{CH}$, implica que toda ordem c.c.c tem a propriedade **K**. Pode ser visto em [FM84] ou em [R]

$\langle F_n(\omega, 2), \subseteq\rangle$ para justificar que $\mathbf{MA}(\mathfrak{c})$ é falso. Note que

$$|F_n(\omega, 2)| = \left| \bigcup_{A \in [\omega]^{<\omega}} {}^{A}2 \right| = \omega,$$

então $\langle F_n(\omega, 2), \subseteq\rangle$ é uma ordem enumerável que faz com que o cardinal $\mathfrak{c}$ testemunhe que os seguintes cardinais, envolvidos na sequência de desigualdades abaixo, estejam bem definidos:

$$\mathfrak{m} \leq \mathfrak{m}_{propriedade\,\mathbf{K}} \leq \mathfrak{m}_{\sigma-centrada} \leq \mathfrak{m}_{countable} \leq \mathfrak{m}_{Cohen}$$

1.6.1 Pequenos cardinais $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{d}$.

Vamos destacar algumas consequências que estão relacionadas a **MA** e as famílias ilimitadas e dominantes. Já foi dito que algumas vezes é conveniente definir a noção "limitado" e "dominante" em contexto geral.

Seja $\langle \mathbb{P}, \leq\rangle$ uma ordem parcial sem elemento máximo. Definimos os invariantes cardinais:

$$\mathfrak{b}\langle \mathbb{P}, \leq\rangle := \min\{|A| : A \subseteq \mathbb{P} \,\mathrm{e}\, A\,\text{é ilimitado em}\,\mathbb{P}\}$$

$$\mathfrak{d}\langle \mathbb{P}, \leq\rangle := \min\{|A| : A \subseteq \mathbb{P} \,\mathrm{e}\, A\,\text{é cofinal em}\,\mathbb{P}\}$$

Veja que os cardinais acima estão obviamente bem definidos. Quando a ordem parcial estiver clara no contexto, denotaremos $\mathfrak{b}(\mathbb{P}) := \mathfrak{b}\langle \mathbb{P}, \leq\rangle$ e $\mathfrak{d}(\mathbb{P}) := \mathfrak{d}\langle \mathbb{P}, \leq\rangle$. Nessa subseção, o interesse é tratar dos cardinais $\mathfrak{d}$ e $\mathfrak{b}$.

Primeiro, definimos a pré-ordem "$\leq^*$" em ${}^{\omega}\omega$. Sejam $f, g \in {}^{\omega}\omega$, definimos $f \leq^* g$ se, e somente se, $\{n \in \omega : g(n) < f(n)\}$ é finito. Em palavras, $f \leq^* g$ se existe um número natural j tal que, para todo $n > j$, a função $f(n) \leq g(n)$. Dito de maneira informal, tal pré-ordem diz que a partir de algum natural o gráfico da função g estará sempre "acima" da função f.

Foi dito que $\leq^*$ é um pré-ordem. De fato: que $\leq^*$ é reflexiva é claro. Seja $f, g, h \in {}^{\omega}\omega$ são tais que $f \leq^* g$ e $g \leq^* h$, para ver que é transitiva, basta checar que: $\{n \in \omega : h(n) < f(n)\} \subset \{n \in \omega : g(n) < f(n)\} \cup \{n \in \omega : h(n) < g(n)\}$.

Definimos agora dois cardinais que estarão presentes no diagrama de Cichoń (objeto de estudo do capítulo 2). Para este trabalho a palavra "dominante" será reservada para o seguinte: Diz-se que uma família $D \subseteq {}^{\omega}\omega$ é *dominante* se for cofinal em $\langle {}^{\omega}\omega, \leq^*\rangle$, i.e., se para todo $g \in {}^{\omega}\omega$, existe $f \in D$ tal que $g \leq^* f$.

Definição 1.70. Chamamos de $\mathfrak{d}$ a menor cardinalidade de uma família dominante, i.e.,

$$\mathfrak{d} = \min\{|D| : D \subseteq {}^{\omega}\omega \text{ é uma família dominante em } \langle {}^{\omega}\omega, \leq^*\rangle\}$$

O cardinal $\mathfrak{d}$ é bem definido, pois ${}^{\omega}\omega$ é uma família dominante. Um fato interessante, e que será visto no final deste capítulo, é que $\mathfrak{d}$ coincide com o menor tamanho de uma família de conjuntos compactos que cobrem os irracionais.

Um resultado clássico em Teoria dos Conjuntos que pode ser visto em [vD][22], trata-se do seguinte:

Teorema 1.71. $\mathfrak{d} = \min\{|D| : D$ *é cofinal em* $\langle \omega^{\omega}, \leq \rangle\}$*, onde dado* $f, g \in {}^{\omega}\omega$*,* $f \leq g$ *se, e somente se,* $f(n) \leq g(n)$ *para todo* $n \in \omega$*.* ■

Mais precisamente, o teorema anterior garante a validade da seguinte igualdade: $\mathfrak{d}\langle {}^{\omega}\omega, \leq^* \rangle = \mathfrak{d}\langle {}^{\omega}\omega, \leq \rangle$.

Diz-se que uma família $B \subseteq {}^{\omega}\omega$ é *ilimitada* em $\langle {}^{\omega}\omega, \leq^* \rangle$ se não existe $g \in {}^{\omega}\omega$ tal que, para todo $f \in B, f \leq^* g$.

Definição 1.72. Chamamos de $\mathfrak{b}$ a menor cardinalidade de uma família ilimitada, ou seja,

$$\mathfrak{b} := \min\{|B| : B \subseteq {}^{\omega}\omega \text{ é uma família ilimitada } \langle {}^{\omega}\omega, \leq^* \rangle\}$$

O cardinal $\mathfrak{b}$ é bem definido, pois ${}^{\omega}\omega$ também é uma família ilimitada.

Fato 1.73. *Seja* $\mathcal{F} \subseteq {}^{\omega}\omega$*. Se* $\mathcal{F}$ *é uma família dominante, obrigatoriamente, ela é ilimitada.*

Demonstração:

De fato, se $\mathcal{F}$ fosse limitada, existiria $g \in {}^{\omega}\omega$ tal que $f \leq^* g$, para toda $f \in \mathcal{F}$, ou seja, dado $f \in \mathcal{F}$ existe $k \in \omega$ tal que para todo $n \geq k$ vale que $f(n) \leq g(n)$. Defina $g' \in {}^{\omega}\omega$ pondo $g'(n) := g(n) + 1$. Por $\mathcal{F}$ ser dominante, existe $h \in \mathcal{F}$ tal que $g'(n) \leq h(n)$ para todo $n \in \omega$. Como $\mathcal{F}$ é limitada, então vale que $h(n) \leq g(n)$ para todo n natural maior que um certo natural j. Sendo $g(n) < g'(n)$ para todo $n \in \omega$, logo $h(n) \leq g(n) < g'(n) \leq h(n)$ para todo $n > j$, disso podemos concluir que $h(n) < h(n)$, o que é um absurdo. ■

Destacamos que toda família enumerável de funções de ${}^{\omega}\omega$ é sempre limitada: de fato, considere uma família $A := \{f_i\}_{i \in \omega} \subseteq {}^{\omega}\omega$ e defina $g \in {}^{\omega}\omega$ fazendo $g(n) := \max\{f_i(j) : i, j \leq n\} + 1$. Dado f_i, o conjunto $\{k \in \omega : g(k) < f_i(k)\}$ é finito, pois $g(k) < f_i(k)$ só pode ocorrer quando $k < i$. Então, para toda $f_i \in A$, vale que $f_i \leq^* g$, ou seja, a família A é limitada. Sendo assim, em **ZFC**, temos a seguinte relação entre $\mathfrak{d}$ e $\mathfrak{b}$:
$\omega < \mathfrak{b} \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$.

[22]Também sugerimos [Silv98], como leitura complementar.

Observamos que para o cardinal $\mathfrak{b}$ o análogo do Teorema 1.71 é falso, vejamos isso: Considere a família $\{f_n : n < \omega\}$ tal que $f_n : \omega \to \omega$ definida por $f_n(m) := n$, para todo $m, n \in \omega$. É claro que tal família é ilimitada na ordem parcial $\langle \omega^\omega, \leq \rangle$, então $\mathfrak{b}\langle \omega^\omega, \leq \rangle = \aleph_0$, e, como já sabemos, $\mathfrak{b}\langle \omega^\omega, \leq^* \rangle > \aleph_0$. Então fica evidenciado que 1.71 não se aplica ao cardinal $\mathfrak{b}$. Daremos abaixo uma caracterização do cardinal $\mathfrak{b}$:

Teorema 1.74. $\mathfrak{b} = \{|B| : B$ *é um subconjunto ilimitado de* ${}^\omega\omega$ *formado por funções estritamente crescentes e que é bem ordenado por* $<^*\}$.

Demonstração:

Ver em [vD].

$\blacksquare$

Encerramos essa subseção dando as demonstrações de dois resultados de consistência bem conhecidos envolvendo os cardinais: $\mathfrak{d}$ e $\mathfrak{b}$.

Teorema 1.75. $\mathbf{MA}_{countable}$ *implica* $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$.

Demonstração:

Vamos mostrar que se vale $\mathbf{MA}_{countable}(\kappa)$ então $\kappa < \mathfrak{d}$. Tome $\mathcal{F} \subseteq {}^\omega\omega$ tal que $\kappa = |\mathcal{F}|$. Considere a ordem parcial $\mathbb{P} := \langle {}^{<\omega}\omega, \subseteq \rangle$ e defina $D_{f,n} := \{s \in {}^{<\omega}\omega : \exists m \geq n, \text{com}\, m, n \in \text{dom}(s) \text{ e } f(m) < s(m)\}$.
Afirmação: Fixada $f \in {}^\omega\omega$, o conjunto $D_{f,n}$ é denso em $\mathbb{P}$.

Se $s \in D_{f,n}$, não temos o que fazer. Suponha $s \notin D_{f,n}$, tomando $n \in \text{dom}(s)$ onde $m \geq n$, como $f(m) < f(m) + 1$ é claro que $s \cup \langle m, f(m) + 1 \rangle \in D_{f,n}$. Logo, $D_{f,n}$ é denso como queríamos.

Voltando a demonstração. Como $\mathcal{F}$ tem tamanho κ, então a família $\{D_{f,n} : f \in \mathcal{F}, n \in \omega\}$ tem tamanho menor ou igual a κ. Sendo válido $\mathbf{MA}_{countable}(\kappa)$, existe filtro genérico G relativo a família de densos dada. Defina $g := \bigcup G : \omega \to \omega$. Fixado $f \in \mathcal{F}$, existe $s \in G \cap D_f$. Daí existe $m \geq n$ com $n, m \in \text{dom}(s)$ tal que $f(m) < s(m)$, e como $s \subseteq \bigcup G$, podemos dizer que $f(m) < g(m)$. Decorre que $\mathcal{F}$ não é cofinal em $\langle {}^\omega\omega, \leq \rangle$. Assim temos demonstrado o teorema.

$\blacksquare$

Teorema 1.76. $\mathbf{MA}_{\sigma-centrada} \Rightarrow \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$.

Demonstração:

Considerando $\omega \leq \kappa < \mathfrak{c}$, vamos demonstrar que sob $\mathbf{MA}_{\sigma-centrada}(\kappa)$ implica que $\kappa < \mathfrak{b}$, i.e., toda subfamílias de ${}^\omega\omega$ de tamanho κ são limitadas segundo $<^*$, ou seja, fixada uma $\mathcal{F} \subseteq {}^{\omega}\omega$ com $|\mathcal{F}| = \kappa$, existe uma função $g : \omega \to \omega$ que testemunha que $\mathcal{F}$ é limitada. Definimos a pré-ordem:

$$\mathbb{P} = \{\langle p, F\rangle : p \in Fn(\omega, \omega) \text{ e } F \in [\mathcal{F}]^{<\omega}\},$$

com a relação definida:

$$\langle p, F\rangle \leq \langle q, G\rangle \Leftrightarrow q \subseteq p, G \subseteq F \text{ e para todo } f \in G, n \in \text{dom}(p) \setminus \text{dom}(q), f(n) < p(n).$$

Afirmação: A ordem $\mathbb{P}$ definida assim é $\sigma-$centrada.

Fixado $p \in Fn(\omega, \omega)$. Definimos o conjunto $\mathbb{P}_p := \{\langle p, F\rangle : F \in [\mathcal{F}]^{<\omega}\}$. Tome A um subconjunto finito de $\mathbb{P}_p$, então o conjunto A é da forma $\{\langle p, F_0\rangle, ..., \langle p, F_n\rangle\}$, onde F_j são subconjuntos finitos de $\mathcal{F}$. Observe que $\langle p, F_0 \cup ... \cup F_n\rangle$ é um limitante inferior em $\mathbb{P}_p$ para o conjunto A. Como $\mathbb{P} = \bigcup_{p \in F_n(\omega,\omega)} \mathbb{P}_p$ e $F_n(\omega, \omega)$ é enumerável, então $\mathbb{P}$ de fato é σ-centrada.

Nosso objetivo agora é definir uma família de densos de tamanho κ, para usar $MA_{\sigma-centrada}$. Para isso, começamos fixando $n < \omega$, e considere:

$$D_n = \{\langle p, F\rangle \in \mathbb{P} : n \in \text{dom}(p), F \in [\mathcal{F}]^{<\omega}\}$$

Vamos mostrar que D_n assim definido é um conjunto denso em $\mathbb{P}$. Começamos fixando $\langle p, F\rangle$ um elemento arbitrário em $\mathbb{P}$. Se $n \in dom(p)$ não há o que fazer. Se $n \notin \text{dom}(p)$. Considere $m = \max\{f(n) : f \in F\}$. Tome $q = p \cup \{\langle n, m+1\rangle\}$. Então $\langle q, F\rangle$ pertence a D_n e $\langle q, F\rangle \leq \langle p, F\rangle$. Isso nos diz que D_n é um conjunto denso em $\mathbb{P}$, para todo $n \in \omega$.

Agora, para cada $f \in \mathcal{F}$ o conjunto $E_f = \{\langle p, F\rangle : f \in F$ e p é uma função parcial finita$\}$, também, é um denso em $\mathbb{P}$. De fato: fixe $\langle p, A\rangle \in \mathbb{P}$, note que $\langle p, A \cup \{f\}\rangle$ pertence a E_f e $\langle p, A \cup \{f\}\rangle \leq \langle p, A\rangle$.

Temos a família de densos $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{E_f : f \in \mathcal{F}\}$ tem tamanho κ, com isso podemos aplicar $MA(\kappa)$ para a família $\mathcal{D}$, portanto existe G filtro $\mathcal{D}$-genérico. Defina o conjunto $g := \bigcup\{p : \exists F(\langle p, F\rangle \in G)\}$.
Afirmação: g é uma função com $\text{dom}(g) \subseteq \omega$.

De fato, para demonstrarmos isso, basta provar que $A = \{p : \exists F(\langle p, F\rangle) \in G\}$ é uma família de funções compatíveis. Então fixe $p, q \in A$, daí existem $F, H \in [\mathcal{F}]^{<\omega}$ tal que $\langle p, F\rangle, \langle q, F\rangle \in G$. Como G é filtro, existe $\langle r, R\rangle \in G$, que estende $\langle p, F\rangle$ e $\langle q, F\rangle$. Portanto, p, q são funções compatíveis, obtemos o desejado. Como $s \in g, s \in$

$p, p \in Fn(\omega, \omega)$, e como $s = \langle n, p(n) \rangle$ podemos concluir que $n \in \text{dom}(g)$. Note que G intersectando D_n para todo $n \in \omega$, obtemos que $\text{dom}(g) = \omega$.

Para terminarmos, temos de checar que g é a nossa candidata a função que limita $\mathcal{F}$. Tome $f \in \mathcal{F}$, como G é filtro $\mathcal{D}$-genérico, temos que analisar o seguinte: Seja $f \in \mathcal{F}$. Como existe $\langle p, F \rangle \in G \cap E_f$, se mostrarmos que $\{n \in \text{dom}(g) : g(n) \leq f(n)\}$ é finito, então o conjunto $\{n \in \omega : g(n) \leq f(n)\}$ será finito, e portanto $f \leq^* g$. Sendo $f \in \mathcal{F}$ arbitrária, então g é um limitante superior para $\mathcal{F}$, logo o cardinal κ é estritamente menor que $\mathfrak{b}$. Vamos a justificativa, fixamos $f \in \mathcal{F}$. Como $G \cap E_f$ é não vazio, então podemos tomar $\langle p, F \rangle \in G \cap E_f$. Tome $n \in \text{dom}(g)$, por definição, existe $p' \in F_n(\omega, \omega)$ tal que $n \in \text{dom}(p')$ tal que $\langle p', F' \rangle \in G$, e claramente, $\text{dom}(p') \subseteq \text{dom}(g)$. Agora, como $\langle p, F \rangle, \langle p', F' \rangle \in G$ então tais condições são compatíveis, isto é, existe $\langle q, H \rangle \leq \langle p, F \rangle$ e $\langle q, H \rangle \leq \langle p', F' \rangle$. Por definição de ordem $\mathbb{P}$, vale que

$$(\forall h \in F)(\forall n \in \text{dom}(p') \setminus \text{dom}(p))(h(n) < p'(n))$$

Como $f \in F$, vale que se $n \in \text{dom}(p') \setminus \text{dom}(p))$ então $f(n) < p'(n)$. Desse modo, se $f(n) \leq p'(n)$ podemos concluír que $n \notin \text{dom}(p')$ ou $n \in \text{dom}(p)$. Se $p'(n)$ existe, podemos afirmar que $n \notin \text{dom}(p')$ não pode ocorrer. Deduzimos disso que se vale $f(n) \geq p'(n)$, obtemos que $n \in \text{dom}(p)$. Como $p'(n) = g(n)$, temos que $f(n) \geq g(n)$ implica que $n \in \text{dom}(p)$. Acabamos de mostrar que se $n \in \omega$ é tal que $g(n) \leq f(n)$, então $n \in \text{dom}(p)$, ou seja, $\{n \in \text{dom}(g) : g(n) \leq f(n)\} \subseteq \text{dom}(p)$ e como $\text{dom}(p)$ é finito, então obtemos o desejado. ∎

A seguinte subseção é preparação para o segundo capítulo, pois os resultados apresentados a seguir tem relação direta com os invariantes cardinais do Diagrama de Cichoń.

1.6.2 Aplicações de MA em Topologia e Análise

Nessa subseção iremos apresentar uma sequência de resultados que foram tratados no artigo [MS70][23] de Martin e Solovay, em 1970.

Teorema 1.77. *Suponha* $\aleph_0 \leq \kappa \leq \mathfrak{c}$ *e válido* $\mathbf{MA}_{propriedade\,\boldsymbol{K}}(\kappa)$. *Se* $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ *é uma família de subconjuntos de* $\mathbb{R}$, *cada um Lesbesgue nulo, então* $\bigcup\limits_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ *é Lebesgue nulo.*

Demonstração:

A ideia da prova, consiste em tomar $\epsilon > 0$ e exibir um aberto W com $m(W) < \epsilon$ e $X_\alpha \subseteq W$, para todo $\alpha < \kappa$, com isso conseguimos garantir que $m(\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha) < \epsilon$.

[23] O texto original faz uma elegante exposição do assunto, recomendamos a leitura de tal artigo.

Tome $\epsilon > 0$ e seja $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ a família de conjuntos de medida nula. Seja ϵ um número real positivo. Nós vamos mostrar que $\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ tem a medida exterior de Lebesgue nula. Definimos a pré-ordem $\mathbb{P} := \{U \subseteq \mathbb{R} : U$ aberto, com $m(U) < \epsilon\}$ onde a relação de ordem é

$$U \leq V \text{ se, e somente se}, V \subseteq U$$

Como $\mathbb{R}$ possui base enumerável, denote por $\mathcal{B}$ tal base enumerável, e defina $\mathcal{B}^*$ a família das uniões finitas de elementos de $\mathcal{B}$.

Afirmação: $\mathbb{P}$ é *c.c.c.*

Seja $S \subseteq \mathbb{P}$, não enumerável. Note que $\mathbb{P} := \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{P}_n$, onde $\mathbb{P}_n := \{U \in \mathbb{P} : m(U) + \frac{1}{m} < \epsilon\}$. Considere $S' \subseteq S$ não enumerável e $m \geq 1$ tal que $m(U) + \frac{1}{k} < \epsilon$, para todo $U \in S'$. Para cada $U \in S'$, tome $U^* \in \mathcal{B}^*$, tal que $U^* \subseteq U$ e $m(U \setminus U^*) < \frac{1}{k} < \epsilon$, para cada $U \in S'$. Existe $S'' \subseteq S$, com S'' não enumerável tal que $U^* = V^*$, para todo $U, V \in S''$. Sejam $U, V \in S''$. Como $U^* \subseteq U$, temos que $V \setminus U \subseteq V \setminus U^*$. Então, segue que $m(U \cup V) = m(U) + m(V \setminus U) \leq m(U) + m(V \setminus V*) < m(U) + \frac{1}{k}$, onde $U \in S'$. Portanto, $U \cup V \in \mathbb{P}$ é um aberto que estende V e U, i.e., os abertos V e U são compatíveis. Com esse argumento, fica demonstrado que um conjunto S não é anticadeia e, mais ainda, que qualquer família de condições de $\mathbb{P}$ que seja enumerável não é anticadeia. Logo, se $\mathbb{P}$ tem anticadeia, ela deve ser enumerável. Assim, fica provado que $\mathbb{P}$ é uma ordem *c.c.c.*

Afirmação Seja $D_\alpha := \{U \in \mathbb{P} : X_\alpha \subseteq U\}$, vamos mostrar agora que D_α é denso em $\mathbb{P}$.

Para isso, tome $U \in \mathbb{P}$. Pela definição da ordem parcial $\mathbb{P}$, temos que $m(U) < \epsilon$. Logo, X_α tem medida nula, então existe um conjunto aberto V tal que $X_\alpha \subseteq V$ e $m(V) < \epsilon - m(U)$. Portanto, $U \cup V$ é aberto que contém X_α e $m(U \cup V) \leq m(U) + m(V) < \epsilon$. Isso nos permite concluir que D_α é denso.

Sob a hipótese de $\mathbf{MA}_{propriedade\,\mathrm{K}}(\kappa)$, existe $G \subseteq \mathbb{P}$ filtro genérico para a família de densos $\{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$. O que permite concluir que $\bigcup G$ é um conjunto aberto, e sendo $G \cap D_\alpha$ não vazio, se $U_\alpha \in G \cap D_\alpha$, temos que $X_\alpha \subseteq U_\alpha$ e $U_\alpha \in G$. Com isso, acabamos de mostrar que $X_\alpha \subseteq \bigcup G$. Então $\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha \subseteq \bigcup G$.

Afirmação: O conjunto $\bigcup G$ tem medida nula.

Suponhamos que não, ou seja, que exista $\epsilon > 0$ tal que $m(\bigcup G) > \epsilon$. Disso teríamos a existência de $G' \subseteq G$ finito, com $G' := \{U_1, ..., U_n\}$, tal que $m(\bigcup G') > \epsilon$. Mas sendo G um filtro em $\mathbb{P}$, existe $V \in G$ tal que $U_i \subseteq V$ para todo $0 \leq i \leq n$. Decorre disso que $\bigcup G' \subseteq V$, mas como V não tem medida nula, deduz-se que $m(\bigcup G') < \epsilon$, porém, isso é um absurdo. ■

Teorema 1.78. *Se vale* **MA***, então a intersecção de menos do que* $\mathfrak{c}$ *abertos densos em* $\mathbb{R}$ *é densa em* $\mathbb{R}$.

Demonstração:

Seja $\kappa < \mathfrak{c}$ e $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ família de abertos densos. Fixe um intervalo J limitado e aberto, se mostrarmos que $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \cap J \neq \emptyset$, acabou. Pois bem, começamos definindo uma pré-ordem pondo $\mathbb{P} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A$ um aberto não vazio e $\overline{A} \subseteq J\}$, e a relação definida como:

$$\forall A, B \in \mathbb{P}, A \leq B \,\text{se, e somente se,}\, A \subseteq B$$

Se temos uma anticadeia de $\mathbb{P}$, obrigatoriamente, seus elementos são disjuntos, pois a intersecção de quaisquer dois elementos distintos de $\mathbb{P}$ ainda está em $\mathbb{P}$. Agora, como $\mathbb{R}$ é espaço métrico e separável, logo tem base enumerável, daí podemos concluir que uma anticadeia de $\mathbb{P}$ não pode ter $\aleph_1$ abertos disjuntos de $\mathbb{R}$, pois todo elemento de uma anticadeia contém um aberto básico. Com isso, concluímos que $\mathbb{P}$ é *ccc*.

Seja $D_\alpha = \{U \in \mathbb{P} : \overline{U} \subseteq U_\alpha\}$, com $\alpha < \kappa$. Vejamos que cada D_α é um denso em $\mathbb{P}$. Seja U um elemento arbitrário de $\mathbb{P}$, sendo U aberto e U_α um aberto denso, então $U_\alpha \cap U$ é um aberto não vazio. Como $\mathbb{R}$ com a topologia usual é um espaço T_3, existe aberto V não vazio tal que $V \subseteq \overline{V} \subseteq U_\alpha \cap U$. Como $U \in \mathbb{P}$, segue por definição de $\mathbb{P}$ que $\overline{U} \subseteq J$, obtemos que $\overline{V} \subseteq J$, logo $V \in \mathbb{P}$. Mais ainda, $V \subseteq U$, conclui-se que $V \in D_\alpha$ e estende U, daí segue que D_α é denso. Como vale $\mathbf{MA}(\lambda)$, existe um G filtro genérico para $\{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Então podemos tomar $V_\alpha \in G \cap D_\alpha$. Como cada V_α é um aberto não vazio, pois é elemento de $\mathbb{P}$, e G é filtro, então $\{\overline{V}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ é uma família de fechados com a p.f.i, com todos os $\overline{V_\alpha}$'s contidos em $\overline{J}$. Portanto, existe $x \in \bigcap_{\alpha<\kappa} \overline{V_\alpha}$ e sendo cada $\overline{V_\alpha}$ um subconjunto de U_α, obtemos o desejado. ■

Veja que o teorema anterior com $\mathbb{P}$ restrita ao conjunto de intervalos de extremos racionais[24] e, para a propriedade dada, teremos uma ordem enumerável, assim podemos enfraquecer a hipótese do teorema 1.78 para para $\mathbf{MA}_{\text{countable}}$, e iremos obter que: a intersecção de menos do que $\mathfrak{c}$ abertos densos em $\mathbb{R}$ é um conjunto denso em $\mathbb{R}$, então a união de menos do que $\mathfrak{c}$ conjuntos fechados de interior vazio tem interior vazio, isto

[24]Sendo $\mathbb{R}$ um espaço separável, qualquer restrição de $\mathbb{P}$ a uma base enumerável vamos obter o mesmo resultado.

é, a união de menos do que $\mathfrak{c}$ conjuntos fechados-raros não cobre $\mathbb{R}$. Isso se resume no seguinte teorema:

Teorema 1.79. *Considerando $\omega \leq \kappa < \mathfrak{c}$, $\mathbf{MA}_{countable}(\kappa)$ implica que uma família de conjuntos fechados de interior vazio dada por $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ não cobre a reta.*

Abaixo apresentamos ao leitor uma segunda demonstração do teorema anterior:

Teorema 1.80. *Considerando $\omega \leq \kappa < \mathfrak{c}$, $\mathbf{MA}_{countable}(\kappa)$ implica que dada uma família $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de fechados raros, então $\bigcup\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ não cobre o espaço ${}^\omega 2$.*

Demonstração:

Considere a família $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ donde X_α é um subconjunto fechado e raro de ${}^\omega 2$. Para $\alpha < \kappa$ fixado, defina o conjunto $D_\alpha := \{t \in {}^{<\omega}2 : [t] \cap X_\alpha = \emptyset\}$.

Afirmação: D_α é um conjunto denso de ${}^{<\omega}2$.

É imediato, pois dado $t \notin D_\alpha$. Como X_α é um conjunto fechado e raro, o complementar de X_α é denso e aberto, logo existe $[s] \cap X_\alpha = \emptyset$.

Aplicando $\mathbf{MA}_{countable}(\kappa)$, existe G filtro genérico relativo a família de densos D_α.

Afirmação: $\bigcup G$ não pertence a nenhum X_α.

Fixado $\alpha < \kappa$. Como G é filtro genérico, existe $s \in G \cap D_\alpha$, logo $[s] \cap X_\alpha = \emptyset$, por outro lado, $\bigcup G$ é uma função de ${}^\omega 2$ que estende s. Logo, $\bigcup G$ não pode pertencer a X_α. Decorre então que qualquer família de κ conjuntos raros X_α não cobre ${}^\omega 2$. Logo, $\mathbf{MA}_{countable}(\kappa)$ implica $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ não cobre ${}^\omega 2$. ■

Teorema 1.81. *(Solovay) Assumindo $\mathbf{MA}_{\sigma-centrada}$. Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$, onde $|\mathcal{A}| \leq \kappa$, $|\mathcal{C}| \leq \kappa$, e para todo $y \in \mathcal{C}$, $F \subseteq \mathcal{A}$ finito, com $|y \setminus \bigcup F| = \omega$. Então existe $d \subseteq \omega$, onde para todo $x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{C}$, temos que $|d \cap x| < \omega$ e $|d \cap y| = \omega$.*

■

Teorema 1.82. *Se vale $\mathbf{MA}(\kappa)$, então a união de κ conjuntos magros é um conjunto magro.*

Demonstração:

Basta provarmos que a intersecção de κ abertos densos é complementar de um conjunto magro, pois isso equivale a dizer que toda união de κ conjuntos magros ainda é um conjunto magro. Seja U_α, $\alpha < \kappa$, aberto denso em $\mathbb{R}$. Considere $\mathcal{B} = \{B_i : i < \omega\}$

uma base para $\mathbb{R}$ formada por intervalos abertos de extremos racionais. A demonstração fará uso do teorema 1.81, então para isso denotamos:
$c_j := \{i < \omega : B_i \subseteq B_j\}$; $\mathcal{C} := \{c_j : j < \omega\}$; $a_\alpha := \{i < \omega : B_i \not\subseteq U_\alpha\}$ e $\mathcal{A} := \{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$.

Fixamos $n, j < \omega$ e $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, .., a_{\alpha_n} \in \mathcal{A}$. Como a intersecção finita de abertos denso é aberto denso, existe $B_i \subseteq B_j \cap U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \cap ... \cap U_{\alpha_n}$. Agora, por definição de $\mathcal{B}$, segue que $\{k \in \omega : B_k \subseteq B_i\}$ é um subconjunto infinito de $c_j \setminus a_{\alpha_1} \cup a_{\alpha_2} \cup ... \cup a_{\alpha_n}$. Desse modo, estamos nas hipóteses do teorema 1.81, portanto, existe $d \subseteq \omega$ tal que $d \cap c_j$ é infinito para todo $j \in \omega$ e $d \cap a$ é finito para $a \in \mathcal{A}$. Ponhamos $V_n := \{B_i : i \in d$ e $i > \omega\}$. Fixado $j \in \omega$, temos $|d \cap c_j| = \omega$, segue disso, que para todo n, existe $i \in d \cap c_j$ tal que $i > n$ e $B_i \subseteq B_j$. Daí podemos concluir que $B_i \subseteq V_n \cap B_j$, para todo $j, n < \omega$. Logo, V_n é aberto denso. Para terminarmos, veja que fixado $\alpha < \kappa$, temos $|d \cap a_\alpha| < \omega$, então existe $n \in \omega$ onde $d \cap a_\alpha \subseteq n$. Isto nos diz que para todo $i > n$, $V_n \subseteq D_\alpha$. Assim $\bigcap_{n\in\omega} V_n \subseteq \bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha$. ■

Apresentamos uma formulação topológica do Axioma de Martin:

($\mathbf{MA}_{top}$) : Um espaço X compacto T_2 com a propriedade *c.c.c*, e uma família $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de fechados raros, onde $\kappa < \mathfrak{c}$. Então $\bigcup_{\alpha<\kappa} F_\alpha$ não cobre X.

O teorema de Baire para espaços compactos é enunciado da seguinte forma:

Dado um espaço X compacto e Hausdorff, verifica-se que a intersecção enumerável de abertos densos é densa, ou equivalentemente, a união enumerável de conjuntos fechados de interior vazio tem interior vazio.

Disso que acabamos de comentar, também podemos concluir pelo teorema de Baire, que dado um espaço compacto Hausdorff, então não é possível cobri-lo com uma quantidade enumerável de conjuntos fechados-raros. Pode ser demonstrado que **MA** implica $\mathbf{MA}_{top}$. Disso, é imediato que $\mathbf{MA}_{top}$ implica o teorema de Baire. Sob **CH** o Axioma de Martin pode ser visto como uma versão enumerável do Teorema de Baire.

Teorema 1.83. **MA** *implica* $\mathbf{MA}_{top}$.

Demonstração:

Seja (X, τ) um espaço compacto T_2 c.c.c. Queremos mostrar que dada uma família de fechados-raros, digamos $\{N_\alpha : \alpha < \kappa\}$, com $\kappa < \mathfrak{c}$, então $\bigcup_{\alpha<\kappa} N_\alpha \neq X$. Defina:

$$\mathbb{P} := \{F \subseteq X : \exists U \in \tau \wedge (U \subseteq F)\}$$

e considere a ordem parcial $\langle \mathbb{P}, \subseteq \rangle$. Claramente, $\mathbb{P}$ é uma ordem com a propriedade *c.c.c.*

Afirmação: O conjunto $D_\alpha := \{F \in \mathbb{P} : F \cap N_\alpha = \emptyset\}$ é denso $\mathbb{P}$.

Para isso, fixamos um conjunto $C \in \mathbb{P}$. Por definição de $\mathbb{P}$, existe U aberto contido em C, e sendo N_α um fechado-raro então $X \setminus N_\alpha$ é um aberto denso. Portanto, existe aberto V tal que $V \subseteq U \subseteq C$, e com isso, $V \cap N_\alpha = \emptyset$. Como X é T_2 e compacto, segue que X é um espaço regular, ou seja, fixado $x \in V$ existe um conjunto fechado K tal que $x \in K \subseteq V$. Concluímos que K é um fechado que pertence a D_α e estende C, i.e., D_α é denso, como desejado.

Sob **MA**, existe filtro genérico G para a família $\{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$, mais ainda, G é uma família de fechados com a propriedade da intersecção finita. Segue da compacidade de X que existe $z \in \bigcup G$, e como G intersecta cada D_α, deduzimos que $z \notin \bigcup N_\alpha$, ou seja, a reta não pode ser coberta por uma família de κ conjuntos fechados de interior vazio.

■

Voltamos a noção de ordem. Aqui damos algumas definições que serão úteis para seção 5.

Sejam $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ e $i : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$. A função i é dita uma *imersão densa* se dados $p, p' \in \mathbb{P}$
i) $(p' \leq p \Rightarrow i(p') \leq i(p))$.
ii) p' e p são incompatíveis então $i(p)$ e $i(p')$ são incompatíveis.
Além disso, $i[\mathbb{P}]$ é denso em $\mathbb{Q}$.

Fato 1.84. *Se $\mathbb{P}$ é subordem densa de $\mathbb{Q}$, então a identidade é imersão densa.*
Demonstração:
É imediato verificar.

■

Fato 1.85. *Seja $\mathbb{P}$ subordem densa na ordem $\mathbb{Q}$. Se G é um filtro em $\mathbb{P}$, então $G^* := \{q \in \mathbb{Q} : \exists p \in G(p \leq q)\}$ é filtro em $\mathbb{Q}$. No caso de F um filtro em $\mathbb{Q}$, temos que $\{p \in \mathbb{P} : \exists q \in G, q \leq p\}$ é filtro em $\mathbb{P}$.*

Proposição 1.86. *Considerando $\mathbb{P}$ como subordem de $\mathbb{Q}$. Se D é denso em $\mathbb{P}$, então D é denso em Q.*

■

Proposição 1.87. *Se $\mathbb{P}$ é subordem densa de $\mathbb{Q}$. É equivalente dizer que:*

$$\mathbb{P} \text{ é c.c.c se, e somente se } \mathbb{Q} \text{ é c.c.c}$$

■

Proposição 1.88. *Considerando $\mathbb{P}$ como subordem de $\mathbb{Q}$. Se D é denso em $\mathbb{Q}$, então $D' := \{p \in \mathbb{P} : \exists d \in D, p \leq d\}$ é denso em P.*

■

Fato 1.89. *Diante das asserções anteriores, temos o seguinte: se $\mathbb{P}$ é uma subordem densa em $\mathbb{Q}$, então vale* **MA** *com respeito a ordem $\mathbb{P}$ se, e somente se, vale* **MA** *com respeito a ordem $\mathbb{Q}$.*

1.7 Álgebra de Boole

Em geral as noções de filtro e ideal podem ser definidas em contexto de reticulado, i.e., um conjunto $\mathbb{B}$ é um reticulado quando é um conjunto parcialmente ordenado e dados $a, b \in L$ sempre existem supremo e infimo do conjunto $\{a, b\}$ em $\mathbb{B}$, denotados respectivamente por $a \vee b$ e $a \wedge b$. Um reticulado $\mathbb{B}$ que "capta" as propriedades essenciais dos operadores lógicos é o reticulado Booleano, que nada mais é que um reticulado distributivo e complementado, i.e., existem $0, 1 \in L$ onde para todo $a \in \mathbb{B}$, existe que $b \in \mathbb{B}$ tal que $a \wedge b = 0$ e $a \vee b = 1$, daí diz-se que b é complemento de a. Se X é um conjunto e $\mathbb{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é um reticulado, então um elemento $A \in \mathbb{B}$ tem um complemento se, e somente se, $X \setminus A$ pertence a $\mathbb{B}$. Sendo $\mathbb{B}$ um reticulado booleano, dizemos que a estrutura $\langle \mathbb{B}, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$, onde "$\neg$" é a operação de complemento, é uma álgebra de Boole. Dado um conjunto X um exemplo óbvio de álgebra de Boole é a estrutura $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, \setminus, \emptyset, X\rangle$. Tal estrutura será o ponto fundamental para as definições de filtro e ideal no presente trabalho.

Sendo $\mathbb{B}$ um álgebra de boole. Definimos a ordem parcial $\langle \mathbb{B}, \leq\rangle$: Se $x, y \in \mathbb{B}$, $x \leq y$ se, e somente se, $x \vee y = y$. Um elemento a de uma álgebra de Boole $\mathbb{B}$ é chamado de *átomo* se $a \neq 0$ e para todo $b \in \mathbb{B}$, se $b \leq a$, então $b = 0$ ou $a = b$. Denote por $At(\mathbb{B})$ o conjunto de todos os átomos de $\mathbb{B}$. Se $At(\mathbb{B})$ é denso no sentido de ordem, então $\mathbb{B}$ será chamada de *atômica*.

Abaixo apresentamos a definição de Espaço de Stone.

Definição 1.90. Um espaço de Stone, também chamado de espaço Booleano, é um espaço topológico compacto, Hausdorff e que possui uma base consistindo de abertos-fechados.

Um exemplo de espaço de Stone é o espaço ${}^{\omega}2$. A seguir enunciamos uma versão do Teorema de Representação de Stone para álgebras Booleanas.

Teorema 1.91. *(Stone,1936) Todo espaço de Stone é isomorfo a uma álgebra de conjuntos abertos-fechados(clopens) de um espaço topológico.*[25]

Proposição 1.92. *$Clop({}^{\omega}2)$ é uma álgebra de boole sem átomos.*

Abaixo um teorema onde a técnica *back-and-forth* é aplicada em sua demonstração.

[25]Como leitura complementar acerca desse teorema, indicamos o livro de Paul R. Halmos: *Lectures on Boolean Algebras. D. Van Nostrand Company, Inc. New Jersey. 1963.*

Teorema 1.93. *Toda algebra de boole enumerável e sem átomos é isomorfa a $Clop({}^{\omega}2)$.*

■

Consequência importante dos resultados anteriores

Corolário 1.94. *Qualquer álgebra de boole completa e sem átomos que contenha um denso enumerável é isomorfa a álgebra $RO({}^{\omega}2)$ de abertos regulares do conjunto de Cantor.*

■

A seguir apresentamos um esboço da prova do teorema que garante que **MA** é equivalente às suas versões em Topologia e em Álgebras de Boole completas.

Teorema 1.95. *As seguintes são equivalentes:*
(i) $\mathbf{MA}(\kappa)$;
(ii) $\mathbf{MA}(\kappa)_{Top}$;
(iii) $\mathbf{MA}(\kappa)$ *restrito a álgebras de booleanas completas.*
Demonstração:
$(i) \Rightarrow (ii)$ já temos provado.
$(ii) \Rightarrow (iii)$. Vide [K80].
$(iii) \Rightarrow (i)$. Considere $\mathbb{P}$ uma ordem *c.c.c* e $\mathcal{D}$ uma família de conjuntos densos de $\mathbb{P}$, tal que $|\mathcal{D}| \leq \kappa$. Definindo a topologia sobre $\mathbb{P}$ é gerada pela base formada pelos conjuntos da forma $[p] := \{q \in \mathbb{P} : q \leq p\}$, obtemos álgebra de Boole completa dada por $RO(\mathbb{P})$. Não é díficil checar que $i : \mathbb{P} \to RO(\mathbb{P})$ definida por $i(p) := int(\overline{[p]})$ é uma imersão densa. Logo, também temos que $RO(\mathbb{P})$ tem a propriedade *c.c.c.* Como vale **MA** restrito a álgebras booleanas, existe filtro genérico G^* em $RO(\mathbb{P})$ com respeito a família de densos $\mathcal{D}^* := \{i(D) : D \in \mathcal{D}\}$. Note que $G := i^{-1}(G^*)$ é um filtro genérico em $\mathbb{P}$ com respeito a família $\mathcal{D}$. Assim, temos demonstrado que $\mathbf{MA}(\kappa)$ restrito a álgebras booleanas completas implica $\mathbf{MA}(\kappa)$. ■

Adaptando o teorema anterior para $\mathbf{MA}_{countable}$, e usando o Fato 1.89 e o Corolário 1.94, conclui-se o bem conhecido fato de que *todas as ordens enumeráveis são equivalentes no contexto de* **MA**, em particular, $\mathfrak{m}_{countable} = \mathfrak{m}_{Cohen}$.

1.8 Combinatória de filtros e ideais

Seja X conjunto. Um conjunto $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é chamado de *filtro* sobre X se

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$;

(ii) se $A \in \mathcal{F}, A \subseteq B$, então $B \in \mathcal{F}$;

(iii) se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Uma família não-vazia $\mathcal{B}$ de subconjuntos não vazios de X é dita *base de filtro* se para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ existe $B_3 \in \mathcal{B}, B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Se $\mathcal{B}$ é uma base de filtro, o conjunto $F_{\mathcal{B}} = \{F \subseteq X : \exists B \in \mathcal{B} \text{ com } B \subseteq F\}$ é chamado de *filtro gerado por* $\mathcal{B}$. Não é difícil checar que $F_{\mathcal{B}}$ é o menor filtro que contém $\mathcal{B}$.

Dizemos que um filtro $\mathcal{F}$ é *primo* se para todo $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, se $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$, então $F_1 \in \mathcal{F}$ ou $F_2 \in \mathcal{F}$.

Definimos por *ultrafiltro* um filtro $\mathcal{F}$ que cumpre com a propriedade: para todo $A \subseteq X$, ou $A \in \mathcal{F}$ ou $X \setminus A \in \mathcal{F}$ ou, equivalentemente, $\mathcal{F}$ é um filtro maximal no sentido da inclusão. Também vale que todo ultrafiltro, de fato, é um filtro primo. Diz-se que um filtro $\mathcal{F}$ sobre X é *livre* se não contém subconjuntos finitos de X ou, equivalentemente, a intersecção de $\mathcal{F}$ é vazia.

Nesse contexto de filtros, vale destacar um princípio de maximalidade numa álgebra de Boole, muito conhecido, e que é chamado de (**UT**), que diz que todo filtro próprio de uma álgebra de Boole pode ser estendido a um ultrafiltro. Além disso, é conhecido que **AC** implica **UT**, porém, a recíproca não vale.

Seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos infinitos de ω. Dizemos que $\mathcal{F}$ satisfaz a *s.f.i.p* (*strong finite intersection property*) se toda subfamília finita e não-vazia possui a intersecção infinita. Um conjunto A é dito ser *pseudo-intersecção* de $\mathcal{F}$ se $A \setminus F$ é finito para todo $F \in \mathcal{F}$. Toda família com pseudo-intersecção infinita tem a *s.f.i.p*, mas o contrário não é verdade. Como todo ultrafiltro livre $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ tem a s.f.i.p e não tem pseudo-intersecção infinita, o cardinal abaixo está bem definido

$$\mathfrak{p} := \{|\mathcal{F}| : (\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega)\,(\mathcal{F}\,\text{tem s.f.i.p e não possui pseudo-intersecção infinita})\}$$

É fácil ver que famílias enumeráveis com a s.f.i.p têm pseudo-intersecção infinita. Logo, o cardinal $\mathfrak{p}$ é não-enumerável, i.e., $\aleph_1 \leq \mathfrak{p} \leq \mathfrak{c}$. Vamos, em seguida, verificar como o cardinal $\mathfrak{p}$ se comporta sob o Axioma de Martin.

Definição 1.96. Seja $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$. Definimos a ordem parcial $\mathbb{P}_{\mathcal{F}}$ como

$$\langle s', F'\rangle \leq \langle s, F\rangle \,\text{se, e só se,}\, s \subseteq s' \,\text{e}\, F \subseteq F'\,,\,\text{e para todo}\, A \in F, s' \setminus s \subseteq A.$$

Lema 1.97. *Sejam $\langle s_1, F_1\rangle, \langle s_2, F_2\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{F}}$. Os elementos $\langle s_1, F_1\rangle$ e $\langle s_2, F_2\rangle$ são compatíveis se, e somente se,*

$$\forall x \in F_1 (s_2 \setminus s_1 \subseteq x)$$
$$\forall x \in F_2 (s_1 \setminus s_2 \subseteq x)$$

Demonstração:

$\Leftarrow$: É imediato.

$\Rightarrow$: Suponhamos que $\langle s_1, F_1\rangle, \langle s_2, F_2\rangle$ sejam condições compatíveis. Por definição, existe $\langle s_3, F_3\rangle$ extensão comum de $\langle s_1, F_1\rangle, \langle s_2, F_2\rangle$, tal que

$$\langle s_3, F_3\rangle \leq \langle s_1, F_1\rangle \Leftrightarrow s_1 \subseteq s_3 \,\mathrm{e}\, F_1 \subseteq F_3\,, \text{ e para todo}\, x \in F_1, s_3 \setminus s_1 \subseteq x.$$

$$\langle s_3, F_3\rangle \leq \langle s_2, F_2\rangle \Leftrightarrow s_2 \subseteq s_3 \,\mathrm{e}\, F_2 \subseteq F_3\,, \text{ e para todo}\, x \in F_2, s_3 \setminus s_2 \subseteq x.$$

Como $s_1 \subseteq s_3$ e $s_2 \subseteq s_3$, então $s_1 \setminus s_2 \subseteq s_3 \setminus s_1$ e $s_2 \setminus s_2 \subseteq s_3 \setminus s_2$. Por hipótese, $\forall x \in F_1\, (s_3 \setminus s_1) \subseteq x$ e $\forall x \in F_2\, (s_3 \setminus s_2) \subseteq x$. Logo, para todo $x \in F_1$ vale que $s_2 \setminus s_1 \subseteq x$, e por outro lado, para todo $x \in F_2$, também vale que $s_1 \setminus s_2 \subseteq x$. ■

No próximo teorema mostramos que a restrição de **MA** a ordens σ-centradas, faz com que o cardinal $\mathfrak{p}$ seja o Continuum.

Teorema 1.98. $\mathbf{MA}_{\sigma\text{-}centrada}$ *implica* $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.

Demonstração:

Suponha que $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ tem a s.f.i.p e $|\mathcal{F}| < \mathfrak{c}$. Definimos uma pré-ordem como $\mathbb{P}_\mathcal{F} = \{\langle s, F\rangle : s \in [\omega]^{<\omega}, F \in [\mathcal{F}]^{<\omega}\}$, onde a relação posta é:

$$\langle s', F'\rangle \leq \langle s, F\rangle \,\text{se, e só se,}\, s \subseteq s' \,\mathrm{e}\, F \subseteq F'\,, \text{ e para todo}\, A \in F, s' \setminus s \subseteq A.$$

Note que qualquer número finito de pares com a mesma primeira coordenada são compatíveis, e sendo $[\omega]^{<\omega}$ um conjunto enumerável, segue que $\mathbb{P}_\mathcal{F}$ é $\sigma-$centrada. Agora, para cada $A \in \mathcal{F}$, defina o conjunto $D_{A,n} := \{\langle s, F\rangle \in \mathbb{P} : A \in F \,\mathrm{e}\, |s| > n\}$.

Afirmação: Fixado $A \in [\mathcal{F}]^{<\omega}$ e $n \in \omega$. O conjunto $D_{A,n}$ é denso em $\mathbb{P}_\mathcal{F}$.

De fato, suponha que $\langle t, E\rangle$ é um elemento de $\mathbb{P}$ que não está em $D_{A,n}$. Tome $F := E \cup \{A\}$. Como $\mathcal{F}$ tem a s.f.i.p então $\bigcap F$ é infinito, e sendo t um subconjunto finito de ω, logo existe $t' \subseteq \bigcap F$ tal que t' é finito e $|t| > n$, e $t' \cap t = \emptyset$. Sendo assim, $s := t \cup t'$ é tal que $|s| > n$. Note que $\langle s, F\rangle \leq \langle t, E\rangle$, e por construção $\langle s, F\rangle \in D_{A,n}$.

Como vale **MA**, existe um filtro genérico G com respeito a família $\mathcal{D} := \{D_{A,n} : A \in \mathcal{F}, n \in \omega\}$. Seja $X := \bigcup\{s : \exists F \in [\mathcal{F}]^{<\omega}\langle s, F\rangle \in G\}$. Note que X é infinito, pois G intersecta todo denso do tipo $D_{A,n}$. Agora, resta ver que X é uma pseudo-intersecção de $\mathcal{F}$, i.e., para todo $A \in \mathcal{F}$, o conjunto $X \setminus A$ é finito. Fixamos $A \in \mathcal{F}$, sendo G filtro genérico para $\mathcal{D}$, então existe $\langle s, F\rangle \in G$, tal $A \in F$. Como todos os elementos de G

compatíveis, segue que dado $\langle s', F' \rangle \in G$, pelo Lema 1.97, temos que $s' \setminus s \subseteq A$. Portanto, $s' \setminus A \subseteq s$. Isso implica que $X \setminus A \subseteq s$, e como s, por definição, é um conjunto finito, segue daí o resultado, i.e., o conjunto X é pseudo-intersecção de $\mathcal{F}$.

$\blacksquare$

Como é conhecido que $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{b}$, então o resultado 1.76 é corolário de 1.98[26].Foi provado por Bell[27] que $\kappa < \mathfrak{p}$ implica $\mathbf{MA}_{\sigma\text{-centrada}}(\kappa)$, ou seja, é provado que o cardinal $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_{\sigma\text{-centrada}}$, como consequência disso, temos:

$$\mathfrak{m} \leq \mathfrak{p} \leq \mathfrak{m}_{countable}.$$

Ainda em relação ao teorema anterior, segue como corolário imediato que sob **MA** toda base de ultrafiltro livre sobre ω também tem cardinalidade $\mathfrak{c}$, já que nesse caso $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.

Teorema 1.99. *$\mathfrak{p}$ é regular.*

$\blacksquare$

Algo clássico quando falamos de ultrafiltros são as propriedades aqui destacadas sobre o espaço de todos os ultrafiltros sobre um conjunto ω (com ω munido da topologia discreta). O espaço $\beta\omega$ é chamado de *compactificação de Stone-Čech de ω*. Denotamos:

$$\beta\omega = \{\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\omega) : \mathcal{U} \text{ é ultrafiltro sobre } \omega\}.$$

Seja A um subconjunto de ω. Definimos $[A]$ sendo o conjunto de todos os ultrafiltros que contém o conjunto A. Não é difícil checar que a família $\mathcal{B} = \{[A] : A \subseteq \omega\}$ é uma base de abertos e fechados para topologia de $\beta\omega$. O espaço $\beta\omega$ contém uma cópia homeomorfa do espaço discreto ω, ou melhor, cada $\{\mathcal{U} \in \beta\omega : \{n\} \in \mathcal{U}\} = [\{n\}] \in \mathcal{B}$, além disso, ω é denso em $\beta\omega$. O espaço $\beta\omega$ é um espaço de Hausdorff, mais ainda, sendo também um espaço compacto, $\beta\omega$ é um espaço normal. Como todo ponto em ω são isolados em $\beta\omega$, cada vizinhança $[A]$ de $\mathcal{U} \in \beta\omega \setminus \omega$ contém infinitos pontos, pois se $\mathcal{U} \in [A]$ e $\mathcal{U}$ é filtro livre, A é infinito, então $[A]$ é infinito. Em geral, qualquer ultrafiltro livre estende o filtro dos cofinitos, por isso nenhum elemento de um ultrafiltro pode ser finito.

Dizemos que $\mathcal{U} \in \beta\omega \setminus \omega$ sobre ω é um P-ponto, se dada qualquer partição $\{A_i : i \in \omega\}$ de ω, existe $F \in \mathcal{U}$ com $|F \cap A_i| < \aleph_0$ para todo $i \in \omega$.

A seguinte asserção é equivalente a definição de P-pontos:

O ultrafiltro $\mathcal{U} \in \beta\omega \setminus \omega$ é um P-ponto, se dada qualquer partição $\{A_i : i \in \omega\}$ de ω, tal que $A_i \notin \mathcal{U}$, para todo $i \in \omega$, existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $|A_i \cap A| < \aleph_0$, para todo $i \in \omega$.

[26]Na verdade, o resultado 1.76 foi feito para ilustrar as técnicas

[27]Vide: *On the combinatorial principle* P(c). Fund. Math.,1981. 114, 149-157.

Dada um família $\{[A_i] : i < \omega\}$ de vizinhanças de $\mathcal{U} \in \beta\omega \setminus \omega$. Uma propriedade que caracteriza os P-pontos é a seguinte: Se $\mathcal{U} \in \beta\omega \setminus \omega$ é um P-ponto se, e somente se, a intersecção de qualquer família enumerável de vizinhanças de $\mathcal{U}$ existe uma vizinhança $[A]$ de $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{U} \in [A] \subseteq \bigcap_{i<\omega}[A_i]$. Em outras palavras, $\mathcal{U}$ é um P-ponto no espaço topológico $\beta\omega \setminus \omega$ se está no interior de todo G_σ que o contenha.

A noção de P-ponto foi primeiramente definida por W. Rudin[28], que provou a existência de P-pontos sob **CH**. Porém, é conhecido que a hipótese **CH** pode ser enfraquecida para $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$. Outro resultado conhecido é devido a J. Ketonen, que sob a hipótese $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$ também existem P-pontos[29]. Com o que foi dito, temos que a existência de P-pontos é consistente. Shelah, provou que é consistente a não existência de P-pontos.

1.8.1 Invariantes Cardinais definidos em Termos de Ideais

Começamos este parágrafo definindo o conceito de ideal. Tal conceito juntamente com a noção de cardinalidade fazem parte central do que se segue nessa seção. Seja X um conjunto não vazio. Um conjunto $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é chamado de ideal, se ele satisfaz as seguintes condições :

1. $X \notin \mathcal{I}$;

2. Se $A, B \in \mathcal{I}$, então $A \cup B \in \mathcal{I}$;

3. Se $A \in \mathcal{I}$ e $B \subseteq A$, então $B \in \mathcal{I}$.

Se temos um $\mathcal{I}$, sempre podemos definir um filtro como sendo $\{X \setminus A : A \in \mathcal{I}\}$. Dizemos que uma família não vazia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$ é *base de ideal* se dados $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$, tal que $B_1 \cup B_2 \subseteq B_3$. Note que o conjunto $\{A \subseteq X : \exists B \in \mathcal{B}, A \subseteq B\}$ é um ideal, chamado de *ideal gerado* por $\mathcal{B}$, e mais ainda, é o menor ideal que contém $\mathcal{B}$. Definimos $\chi(\mathcal{I}) := \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ é base de ideal $\mathcal{I}\}$.

A seguinte asserção denotada por (**BPI**) que declara: para qualquer ideal $\mathcal{I}$ próprio de uma álgebra booleana, existe um ideal primo que estende $\mathcal{I}$. Um fato conhecido é que (**UT**) é equivalente a (**BIP**), segue disso que (**AC**) implica (**BPI**).

Um ideal $\mathcal{I}$ é dito κ-completo se é fechado para família de tamanho menor que κ, isto é, se para toda família $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ de cardinalidade menor que κ, $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{I}$. No presente trabalho iremos estudar os ideais $\aleph_1-$completo, comumente chamado por muitos autores de $\sigma-$completo.

[28]No artigo: *Homogeneity problems in the theory of Cech compactifications.* Duke Math. J. 23 (1956), no. 3, 406–419.

[29]Vide o artigo: *On the existence of P-points in the Stone-Cech compactification of integers.*Fund. Math. 62(1976), 91.

Vamos considerar $\mathcal{I}$ um ideal de X $\sigma-$completo e contendo todos unitários de X. Definimos os seguintes invariantes cardinais não-enumeráveis aditividade (add), número de cobertura (cov), uniformidade (non) e cofinalidade (cof), respectivamente, como sendo

$$\begin{aligned}
&\mathrm{add}(\mathcal{I}) := \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \text{ e } \bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{I}\},\\
&\mathrm{cov}(\mathcal{I}) := \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \text{ e } \bigcup \mathcal{A} = X\},\\
&\mathrm{non}(\mathcal{I}) := \min\{|Y| : Y \subseteq X \text{ e } Y \notin \mathcal{I}\},\\
&\mathrm{cof}(\mathcal{I}) := \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \text{ e } \forall B \in \mathcal{I}, \exists A \in \mathcal{A}, B \subseteq A\}
\end{aligned}$$

Os cardinais definidos acima estão, obviamente, bem definidos. Podemos entender os invariantes cardinais acima, como:

- $\mathrm{add}(\mathcal{I})$ o menor tamanho de uma família de subconjuntos de $\mathcal{I}$, cuja união não está em $\mathcal{I}$.

  Como qualquer ideal é fechado sob uniões finitas, este cardinal é sempre pelo menos $\aleph_0$; se $\mathcal{I}$ é $\sigma-$completo, $\mathrm{add}(\mathcal{I})$ é maior ou igual a $\aleph_1$.

- $\mathrm{cov}(\mathcal{I})$ o menor tamanho de uma família de $\mathcal{I}$, onde a união é tudo, i.e., igual a X.

  Como o próprio X não está em $\mathcal{I}$, temos $\mathrm{add}(\mathcal{I}) \leq \mathrm{cov}(\mathcal{I})$.

- $\mathrm{non}(\mathcal{I})$ o menor tamanho de um subconjuto de X que não está em $\mathcal{I}$.
  Por definição de ideal, $X \notin \mathcal{I}$. Disso, segue que $\mathrm{add}(\mathcal{I}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{I})$.

- $\mathrm{cof}(\mathcal{I})$ o menor tamanho de uma família de subconjuntos de $\mathcal{I}$ que é cofinal na ordem parcial $\langle \mathcal{I}, \subseteq \rangle$.

  Note que, por definição de base de ideal, $\mathrm{cof}(\mathcal{I}) \leq \chi(\mathcal{I})$. Além disso, $\mathrm{non}(\mathcal{I}) \leq \mathrm{cof}(\mathcal{I})$ e $\mathrm{cov}(\mathcal{I}) \leq \mathrm{cof}(\mathcal{I})$.

Tais desigualdades se resumem como:

$$\aleph_1 \leq \mathrm{add}(\mathcal{I}) \leq \min\{\mathrm{cov}(\mathcal{I}), \mathrm{non}(\mathcal{I})\} \leq \max\{\mathrm{cov}(\mathcal{I}), \mathrm{non}(\mathcal{I})\} \leq \mathrm{cof}(\mathcal{I}) \leq \chi(\mathcal{I}) \leq |\mathcal{I}|.$$

Como $\mathcal{I}$ contém todos os unitários de X, concluímos facilmente que tais invariantes cardinais são todos não-enumeráveis. Considererando $\mathcal{I}$ $\sigma-$completo com os unitários de X e as desigualdades acima, obtemos os cardinais dispostos na ordem apresentada no diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
& |\mathcal{I}| & \\
& \chi(\mathcal{I}) \arrow[u] & \\
& \mathrm{cof}(\mathcal{I}) \arrow[u] & \\
\mathrm{cov}(\mathcal{I}) \arrow[ur] & & \mathrm{non}(\mathcal{I}) \arrow[ul] \\
& \mathrm{add}(\mathcal{I}) \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& \aleph_1 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Destacamos também que tal diagrama será de grande importância no desenvolvimento da dissertação, pois dá uma ideia do "comportamento" destes cardinais sob a Hipótese do contínuum e do Axioma de Martin, além disso, serve como auxílio para o entendimento de algumas demonstrações que estarão presentes na dissertação.

Fato 1.100. Vale também a desigualdade $\chi(\mathcal{I}) \leq \mathrm{cof}(\mathcal{I})$ e, ,com isso, também deduzimos que $\mathrm{cof}(\mathcal{I}) = \chi(\mathcal{I})$, pois dada uma família $\mathcal{A}$ cofinal em $\mathcal{I}$, então $\mathcal{B} := \{\bigcup \mathcal{A}' : \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}, \mathcal{A}' \text{ finito}\}$ é uma base de $\mathcal{I}$ com mesma cardinalidade de $\mathcal{A}$.

Diante disso, podemos afirmar que: se existe uma base de ideal de tamanho $\lambda = \mathrm{add}(\mathcal{I})$, obrigatoriamente, a aditividade coincide com a cofinalidade do ideal, pois $\lambda \leq \mathrm{add}(\mathcal{I}) \leq \mathrm{cof}(\mathcal{I}) = \chi(\mathcal{I}) \leq \lambda$.

Observe que se considerarmos o ideal $\mathcal{I}$ ordenado pela inclusão, nós obtemos que $\mathrm{add}(\mathcal{I}) = \mathfrak{b}(\mathcal{I}, \subseteq)$ e $\mathrm{cof}(\mathcal{I}) = \mathfrak{d}(\mathcal{I}, \subseteq)$.

Teorema 1.101. $\mathrm{add}(\mathcal{I})$ *é um cardinal regular.*

Demonstração:

Seja um $\mathcal{I}$ um ideal $\sigma-$completo contendo os unitários e κ um cardinal tal que $\mathrm{add}(\mathcal{I}) = \kappa$. Considere a família $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de conjuntos de $\mathcal{I}$ que testemunha a minimalidade de κ. Então, para todo $\alpha < \kappa$, o conjunto $B_\alpha = \bigcup\limits_{\xi<\alpha} A_\xi$ pertence a $\mathcal{I}$. Logo, $\{B_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ é uma família crescente contida em $\mathcal{I}$. Tomando um conjunto $A \subseteq \kappa$ cofinal em κ, tal que $|A| = \mathrm{cf}(\kappa)$, podemos concluir que $\bigcup\limits_{\alpha \in A} B_\alpha$ não pertence a $\mathcal{I}$. Disso segue que $\text{add}(\mathcal{I}) \leq |A| \leq \kappa$ e, portanto, $\text{add}(\mathcal{I})$ é regular. ■

Agora, oferecemos uma segunda demonstração de 1.101. O argumento será indireto: Suponha que $\text{add}(\mathcal{I}) = \kappa$ e considere a família que testemunha a minimalidade de $\text{add}(\mathcal{I})$ dada $\{I_\xi \in \mathcal{I} : \xi < \kappa\}$. Se κ fosse singular teríamos que κ resulta da união disjunta de uma quantidade menor do que κ conjuntos, cada um dos quais também tem cardinalidade menor que κ, i.e.,

$$\kappa = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha \text{ tal que } \lambda < \kappa,\ |A_\alpha| < \kappa \text{ para todo } \alpha < \lambda.$$

Considere $B_\alpha := \bigcup\{I_\xi \in \mathcal{I} : \xi \in A_\alpha\}$. Como $|A_\alpha| < \kappa$, por minimalidade, temos que $B_\alpha \in \mathcal{I}$. Analogamente, $\bigcup\{B_\alpha : \alpha < \lambda\} \in \mathcal{I}$. Daqui deduzimos uma contradição, pois $\bigcup\{B_\alpha : \alpha < \lambda\} = \bigcup_{\xi<\kappa} I_\xi \notin \mathcal{I}$, e aqui terminamos a prova. ■

Várias consequências do Axioma de Martin estão naturalmente associadas ao estudo dos invariantes cardinais apresentados: sob **MA** + $\neg$**CH**, o valor de todos esses invariantes cardinais citados até este momento é igual à cardinalidade do Continuum.

1.8.2 Estudo de Caso I: O Ideal dos Subconjuntos Limitados de uma Pré-ordem

A seguir apresentamos um breve estudo sobre objetos investigados por Valeria de Paiva[30] e Samuel G. Silva[31] no preprint *Dialectica Categories Cardinalities of the Continuum and Combinatorics of Ideals.*

Definição 1.102. Seja $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ uma pré-ordem sem elemento máximo é dita direcionada para cima (*upwards directed*) se todo subconjunto finito $F \subseteq \mathbb{P}$ possui limitante superior em $\mathbb{P}$.

Assuma que $\mathbb{P}$ seja uma ordem direcionada para cima e, $x \in \mathbb{P}$, considere $C_x = \{y \in \mathbb{P} : y \leq x\}$. Um subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ é limitado superiormente em $\mathbb{P}$ se, e somente se, existe $x \in \mathbb{P}$, tal que $A \subseteq C_x$. Denote $\mathcal{I}_L$ a família dos subconjuntos limitados superiormente em $\mathbb{P}$, afirmamos que $\mathcal{I}_L$ é um ideal de subconjuntos de $\mathbb{P}$: de fato, como $\mathbb{P}$ não tem máximo então é ilimitado e com isso $\mathbb{P} \notin \mathcal{I}_L$, mais ainda, dados $A, B \in \mathcal{I}_L$ existem C_x e C_y contendo A e B, respectivamente. Portanto, $A \cup B \subseteq C_x \cup C_y$ e sendo $\mathbb{P}$ direcionada para cima, existe limitante superior de $\{x, y\}$, digamos z. Disso segue que $A \cup B \subseteq C_z$ e portanto $\mathcal{I}_L$ é fechado para união e um subconjunto de um limitado é limitado, temos que $\mathcal{I}_L$ é um ideal. Vale destacar que $\mathcal{B} = \{C_x : x \in \mathbb{P}\}$ é uma base para tal ideal, pois pela reflexividade de $\mathbb{P}$ o conjunto C_x é não-vazio e dados C_x, C_y,

[30] NLU Research Lab, Sunnyvale
[31] Instituto de Matemática da Universidade Federal da Bahia

novamente, sendo $\mathbb{P}$ direcionada para cima existe $C_z \in \mathcal{B}$, tal que $C_x \cup C_y \subseteq C_z$. Note que é imediato a conclusão que o ideal $\mathcal{I}_L$ coincide com o ideal gerado pela base $\mathcal{B}$.

Resumido o parágrafo anterior, sempre que estamos no contexto de ordens direcionadas para cima, podemos nos fazer uma pergunta bem razoável: " quem são os cardinais $\text{add}(\mathcal{I}_L)$, $\text{cov}(\mathcal{I}_L)$, $\text{non}(\mathcal{I}_L)$ e $\text{cof}(\mathcal{I}_L)$?". Agora vamos tratar de responder tal pergunta. Considere $\mathcal{B} = \{C_x : x \in \mathbb{P}\}$ a base de $\mathcal{I}_L$:
(i) $\text{add}(\mathcal{I}_L) = \mathfrak{b}(\mathbb{P})$

- $\text{add}(\mathcal{I}_L) \leq \mathfrak{b}(\mathbb{P})$. Tome $B \subseteq \mathbb{P}$ ilimitado que testemunha $|B| = \mathfrak{b}(\mathbb{P})$. Vamos considerar o conjunto $\mathcal{A} = \{C_x : x \in B\}$. Afirmamos que $\bigcup \mathcal{A}$ não pertence à $\mathcal{I}_L$: De fato, caso contrário se $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{I}_L$, então existe um elemento da base $\mathcal{B}$ que contém $\bigcup \mathcal{A}$, digamos C_z. Logo, C_z contém a todo C_x em $\mathcal{A}$, segue disso que $x \leq z$, para todo $x \in B$. Obtemos uma contradição da hipótese que B é ilimitado.

- $\mathfrak{b}(\mathbb{P}) \leq \text{add}(\mathcal{I}_L)$. Vamos considerar $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma família de elementos de $\mathcal{I}_L$ de tamanho mínimo que testemunha $\bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{I}_L$, com $\text{add}(\mathcal{I}_L) = \kappa$. Como $\mathcal{B}$ é base do ideal $\mathcal{I}_L$, existe $x_\alpha \in \mathbb{P}$, tal que C_{x_α} contém A_α, para todo $\alpha < \kappa$. Então $\{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ é ilimitado, pois se tivéssemos $x \in \mathbb{P}$ tal que $x_\alpha \leq x$, para todo $\alpha < \kappa$, $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup\limits_{\alpha<\kappa} C_{x_\alpha} \subseteq C_x$, e isso nos diz que $\bigcup \mathcal{A}$ é um elemento de $\mathcal{I}_L$ o que seria uma contradição.

Concluímos a igualdade desejada.
(ii) $\text{cov}(\mathcal{I}_L) = \mathfrak{d}(\mathbb{P})$

- $\text{cov}(\mathcal{I}_L) \leq \mathfrak{d}(\mathbb{P})$. Tome $D \subseteq \mathbb{P}$ dominante testemunhando $|D| = \mathfrak{d}(\mathbb{P})$. Vamos considerar o conjunto $\mathcal{A} = \{C_x : x \in D\}$. Afirmamos que a união de $\bigcup \mathcal{A}$ é o próprio ideal $\mathcal{I}_L$: De fato, fixado $x \in \mathbb{P}$. Como D é dominante, existe $d \in D$ tal que $x \leq d$, portanto $x \in C_d \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, então segue o desejado.

- $\mathfrak{d}(\mathbb{P}) \leq \text{cov}(\mathcal{I}_L)$. Vamos considerar $\mathcal{A} = \{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma família de elementos de $\mathcal{I}_L$, tal que $\bigcup \mathcal{A} = \mathcal{I}_L$, que testemunha $\text{cov}(\mathcal{I}_L) = \kappa$. Fixado um $z \in \mathbb{P}$, sabemos que existe $\alpha < \kappa$ tal que $z \in D_\alpha \subseteq C_{z_\alpha}$. Logo, $z \leq z_\alpha$ e isso nos diz que o conjunto $\{z_\alpha : \alpha < \kappa\}$ é dominante e tem cardinalidade menor ou igual a κ. Disso segue a desigualdade.

Concluímos a igualdade desejada.
(iii) $\text{non}(\mathcal{I}_L) = \mathfrak{b}(\mathbb{P})$

- $\text{non}(\mathcal{I}_L) \leq \mathfrak{b}(\mathbb{P})$. Tome $B \subseteq \mathbb{P}$ ilimitado, tal que B testemunha a minimalidade $|B| = \mathfrak{b}(\mathbb{P})$. Afirmamos que B não pertence à $\mathcal{I}_L$: de fato, se $B \in \mathcal{I}_L$, então existe um elemento da base $\mathcal{B}$ que contém B, digamos C_z. Logo, C_z contém todo x em B, segue disso que $x \leq z$, para todo $x \in B$. Obtemos uma contradição da hipótese que B é ilimitado.

- $\mathfrak{b}(\mathbb{P}) \leq \text{non}(\mathcal{I}_L)$. Vamos considerar $Y \subseteq \mathbb{P}$ de tamanho κ, tal que Y não está em $\mathcal{I}_L$, com κ testemunhando $\text{non}(\mathcal{I}_L) = \kappa$. Tome uma enumeração de $Y = \{y_\alpha : \alpha \in \kappa\}$, se Y fosse limitado, existiria $x \in \mathbb{P}$ tal que $y_\alpha \leq x$, para todo $\alpha < \kappa$, portanto $\{y_\alpha : \alpha \in \kappa\} \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} C_{y_\alpha} \subseteq C_x$, e podemos conluir que Y é um elemento de $\mathcal{I}_L$ o que seria uma contradição.

Concluímos a igualdade desejada.
(iv) $\text{cof}(\mathcal{I}_L) = \mathfrak{d}(\mathbb{P})$.

- $\text{cof}(\mathcal{I}_L) \leq \mathfrak{d}(\mathbb{P})$. Fixamos $D \subseteq \mathbb{P}$ dominante, tal que $|D| = \mathfrak{d}(\mathbb{P})$. Vamos considerar o conjunto $\mathcal{A} = \{C_x : x \in D\}$. Afirmamos que $\mathcal{A}$ é cofinal na ordem parcial $\langle \mathcal{I}_L, \subseteq \rangle$. Dado A em $\mathcal{I}_L$, existe $C_z \in \mathcal{B}$ tal que $A \subseteq C_z$. Sendo D um conjunto cofinal em $\mathbb{P}$, podemos garantir que existe $x \in D$ onde $C_z \subseteq C_x$. Portanto, A está contido em C_x, daí segue o desejado.

- $\mathfrak{d}(\mathbb{P}) \leq \text{cof}(\mathcal{I}_L)$. Denotamos $\text{cof}(\mathcal{I}_L) = \kappa$ e vamos considerar $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma família de elementos de $\mathcal{I}_L$ que é cofinal na ordem parcial $\langle \mathcal{I}_L, \subseteq \rangle$. É claro que $\{x\} \in \mathcal{I}_L$, para todo $x \in \mathbb{P}$. Portanto, existe $A_\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $\{x\} \subseteq A_\alpha$. Além disso, sabemos que existe $z_\alpha \in \mathbb{P}$, onde $A_\alpha \subseteq C_{z_\alpha}$. Decorre que $x \leq z_\alpha$ e sendo $x \in \mathbb{P}$ arbitrário, isto nos diz que o conjunto $\{z_\alpha : \alpha < \kappa\}$ é dominante e tem cardinalidade menor ou igual a κ. Disso segue a desigualdade. Concluímos a igualdade desejada.

1.9 O Espaço dos Irracionais

Para essa seção iremos denotar (por tradição) o conjunto dos números irracionais com o símbolo "$\mathbb{P}$". Uma propriedade importante do espaço $\mathbb{P}$ com a topologia de subespaço da reta é que $\mathbb{P}$ é homeomorfo ao espaço produto ω^ω. Um subconjunto compacto de $\mathbb{P}$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Se $C \subseteq \mathbb{P}$ é um compacto, então C tem interior vazio em $\mathbb{P}$, caso contrário, suponha que C tivesse interior não vazio, i.e., existe um aberto da forma $]a, b[\cap \mathbb{P}$ contido C. Pois bem, tome uma sequência infinita de irracionais dada por $\{x_n : n \in \omega\}$ no conjunto $]a, b[$ que converge para um único número racional $q \in]a, b[$. Obviamente $\{x_n : n \in \omega\}$ não converge em $]a, b[\cap \mathbb{P}$, logo C não pode ser compacto haja vista que $\{x_n : n \in \omega\}$ é um subconjunto infinito de C sem ponto de acumulação.

Definição 1.103. Se X é um espaço topológico, o número de cobertura por compactos (compact covering number) de X é dado por $Kc(X) := \min\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C}$ é família de compactos e $\bigcup \mathcal{C} = X\}$.

É imediato concluir que X compacto equivale a $Kc(X) = 1$. Também segue que todo espaço σ-compacto equivale a $Kc(X) = \aleph_0$. Abaixo demonstramos que $Kc(\mathbb{P})$ é um cardinal não-enumerável:

• $\aleph_1 \leq Kc(\mathbb{P})$. Sendo $\mathbb{R}$ um espaço métrico completo e $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto G_δ, então $\mathbb{P}$ é completamente metrizável. Logo, todo compacto de $\mathbb{P}$ é fechado e limitado. Ademais, $\mathbb{P}$ é espaço de Baire, então qualquer sequência $(F_n)_{n\in\omega}$ de conjuntos fechados raros implica que $\bigcup_{n\in\omega} F_n$ tem interior vazio. Como cada F_n é compacto em $\mathbb{P}$ e tem interior vazio, assim $\mathbb{P}$ não pode ser coberto por uma quantidade enumerável de compactos de $\mathbb{P}$. Portanto $Kc(\mathbb{P})$ é não enumerável.

A seguir daremos um resultado que será útil mais a frente, quando estivermos tratando do diagrama de Cichoń. Agora, demonstraremos que dado um espaço topológico não-compacto X, existe um ideal $\mathcal{I}$ tal que o menor tamanho de uma família de conjuntos compactos de X, que cobre X é $\mathrm{cov}(\mathcal{I})$.

Proposição 1.104. *Existe um ideal $\mathcal{I}$ de X tal que $Kc(X) = \mathrm{cov}(\mathcal{I})$.*

Demonstração:

Suponha X não compacto. Definamos $\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{P}(X) \setminus X : B$ é compacto em $X\}$. Como a união finita de compactos continua sendo um compacto, então $\mathcal{B}$ é uma base de ideal. Dessa forma, obtemos o ideal gerado por $\mathcal{B}$, será denotado $\mathcal{I} := \{A \subseteq X :$ existe $B \in \mathcal{B}, A \subseteq B\}$. Afirmamos que vale a igualdade $Kc(X) = \mathrm{cov}(\mathcal{I})$. De fato, para justificar a desigualdade $Kc(X) \leq \mathrm{cov}(\mathcal{I})$, tomamos uma cobertura por compactos de X, digamos $\mathcal{C}$, cuja cardinalidade é $Kc(X)$. Então, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$. Logo, $\bigcup \mathcal{C} = X$ segue disso que $\mathrm{cov}(\mathcal{I}) \leq |\mathcal{C}| = Kc(X)$. Para a desigualdade contrária, fixamos $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ onde $\bigcup \mathcal{A} = X$ e $|\mathcal{A}| = \mathrm{cov}(\mathcal{I})$. Os elementos de $\mathcal{A}$ não são necessariamente compactos, mas estão contidos em compactos. Portanto, a cada $A \in \mathcal{A}$, fixe B_A compacto com $A \subseteq B_A$. Como $\mathcal{A}$ cobre X, obviamente, a família $\{B_A : A \in \mathcal{A}\}$ também cobre X. Daí $Kc(X) \leq |\mathcal{A}| = \mathrm{cov}(\mathcal{I})$. Por fim, obtemos a igualdade requerida.

$\blacksquare$

Para o próximo teorema, vamos utilizar algo conhecido: $\mathbb{P}$ é homeomorfo ao conjunto ${}^{\omega}\omega$. Aproveitamos para antecipar ao leitor que de posse do seguinte teorema, podemos declarar que $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{d}$[32]. Isso será dito de melhor forma no segundo capítulo.

Proposição 1.105. *O cardinal $\mathfrak{d}$ é o menor tamanho de uma cobertura de $\mathbb{P}$ por subconjuntos compactos, i.e., $Kc(\mathbb{P}) = \mathfrak{d}$.*

[32]Essa desigualdade faz parte do diagrama de Cichoń.

Demonstração:
• $\mathfrak{d} \leq Kc(\omega^\omega)$.: Tome $\mathcal{U}$ cobertura de ω^ω por compactos de tamanho $Kc(\omega^\omega)$. Lembrando que projeção usal $\prod_n : \omega^\omega \to \omega$ na n-ésima coordenada é contínua e isso nos fornece que: fixado $K \in \mathcal{U}$, o conjunto $\prod[K]$ é um subespaço compacto de ω. Sendo ω um espaço discreto, o conjunto $\prod_n[K]$ é finito. Assim é legítimo definir a função $f_k(n) := \max \prod_n[K]$ para todo $n \in \omega$. Agora, basta checar que a família $\{f_k : K \in \mathcal{U}\}$ é cofinal em $\langle \omega, \leq \rangle$, pois daí segue a desigualdade. Então seja $g \in {}^\omega\omega$, como $\mathcal{U}$ cobre ω^ω, obtemos disso que para todo $n \in \omega, g(n) \leq \max(\prod_n[K]) = f_k(n)$, onde $g \leq f_k$ e $\{f_k : K \in \mathcal{U}\}$ é cofinal em $\langle {}^\omega\omega, \leq \rangle$, como o desejado.

• $Kc({}^\omega\omega) \leq \mathfrak{d}$.: Se D um subconjunto de ${}^\omega\omega$ cofinal em $\langle {}^\omega\omega, \leq \rangle$ com $D = \mathfrak{d}$. Basta ver que a família $\{C_f : f \in D\}$ é cobertura de ω^ω, onde $C_f := \{g \in {}^\omega\omega : g \leq f\}$. De fato, sendo $g \in {}^\omega\omega$ por hipótese de D ser cofinal em $\langle {}^\omega\omega, \leq \rangle$, existe $h \in D$ tal que $g \leq h$ e, portanto, $g \in C_f$, e como C_f é claramente um compacto, então $\{C_f : f \in D\}$ cobre ω^ω.
Das duas desigualdades concluímos a tese.

■

Capítulo 2

Ideais $\mathcal{M}$ e $\mathcal{L}$ e os cardinais do diagrama de Cichoń

2.1 Invariantes Cardinais do Diagrama de Cichoń

A maior parte do desenvolvimento do estudo de medida e de categoria sobre os reais pode ser visto a partir da perspectiva dos invariantes cardinais no diagrama de Cichoń. Tão importante quanto isso, o diagrama Cichoń é um divisor de águas no estudo do Continuum, anexando nomes e trazendo à tona os invariantes cardinais associados aos reais em seus vários aspectos.

Com a gama de possibilidades para o Continuum revelado por Cohen, existe todo o sentido para se estudar outros diagramas semelhantes ao diagrama de Cichoń, o que já vêm sendo um ponto de destaque por muitos pesquisadores nos primeiros anos após a introdução de técnicas do forcing de Cohen.

Antes de começarmos a estudar o diagrama de Cichoń, estabelecemos algumas notações. Sejam $\mathcal{M} := \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ é magro}\}$ e $\mathcal{L} := \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ é nulo}\}$. Evidentemente, $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}$ são ideais não triviais e $\mathrm{add}(\mathcal{M}), \mathrm{add}(\mathcal{L}) \geq \aleph_1$. A cardinalidade dos ideais de interesse são dadas por $|\mathcal{M}| = |\mathcal{L}| = 2^{\mathfrak{c}}$, pois devido a proposição 1.37 o conjunto de Cantor $C \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}$, logo $\mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{M} \cap \mathcal{L}$, e sendo $|C| = \mathfrak{c}$ segue a afirmação.

A seguir descreveremos o nosso objeto de estudo, considerando cada flecha uma desigualdade válida em **ZFC**:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{cov}(\mathcal{L}) \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{L}) \arrow[r] & 2^{\aleph_0} \\
 & & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\aleph_1 \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathcal{L}) \arrow[r] \arrow[uu] & \mathrm{add}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{non}(\mathcal{L}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

Começaremos dando informações a respeito do cardinal $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$:

Teorema 2.1. $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A}$ *é família de conjuntos fechados raros que cobre* $\mathbb{R}\}$.

Demonstração:

Denote por $\lambda = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A}$ é família de conjuntos fechados raros que cobre $\mathbb{R}\}$. Como todo conjunto fechado-raro também é um conjunto magro, então a desigualdade $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq \lambda$ é imediata. Por outro lado, dado um conjunto magro M_α, com $\alpha \in \mathrm{cov}(\mathcal{M})$, existe uma família $\{F_{n,\alpha} : n \in \omega\}$ de conjuntos fechados-raros tal que $M_\alpha \subseteq \bigcup\{F_{n,\alpha} : n \in \omega\}$, para todo α. Note que $|\{F_{n,\alpha} : n \in \omega, \alpha < \mathrm{cov}(\mathcal{M})\}| \leq \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ e sendo $\{M_\alpha : \alpha < \mathrm{cov}(\mathcal{M})\}$ uma família de magros que cobre $\mathbb{R}$, então $\{F_{n,\alpha} : n \in \omega, \alpha < \mathrm{cov}(\mathcal{M})\}$ também cobre $\mathbb{R}$, portanto, $\lambda \leq \mathrm{cov}(\mathcal{M})$. $\blacksquare$

Chamamos atenção do leitor para o seguinte: Se $\kappa < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$, a união de κ conjuntos magros não cobre $\mathbb{R}$, e, mais ainda, a união de κ fechados raros também não cobre $\mathbb{R}$. Podemos afirmar ainda mais:

Fato 2.2. *Se* $\kappa < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$*, uma união de* κ *conjuntos magros em* $\mathbb{R}$ *(ou, equivalentemente, de* κ *fechados raros) tem, necessariamente, interior vazio em* $\mathbb{R}$*.*

Demonstração:

Seja $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma família de fechados de interior vazio em $\mathbb{R}$. Suponha que exista um intervalo aberto U tal que $U \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} F_\alpha$, então $U = \bigcup_{\alpha<\kappa}(F_\alpha \cap U)$. Segue da proposição 1.44, que $U \cap F_\alpha$ é um fechado de interior vazio em U. Decorre disso que a família $\{U \cap F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ é uma cobertura do intervalo aberto U, formada de conjunto fechados de interior vazio em U. Como U é homeomorfo a $\mathbb{R}$, temos uma cobertura de $\mathbb{R}$ com menos que $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ conjuntos fechados de interior vazio. $\blacksquare$

Justificaremos com argumentos puramente topológicos a próxima desigualdade do Diagrama de Cichoń.

Fato 2.3. $\text{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{d}$.

Demonstração:

Como o cardinal $\mathfrak{d}$ é o menor tamanho de uma cobertura do conjunto do números irracionais por compactos, e sendo um compacto nos irracionais um conjunto fechado de interior vazio, então $\text{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{d}$. ■

Para a próximo proposição denotaremos por $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ o ideal dos magros no conjunto dos irracionais.

Proposição 2.4. *Valem as seguintes igualdades entre os invariantes cardinais:*
(i) $\text{add}(\mathcal{M}) = \text{add}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}})$:
Demonstração:

- $\text{add}(\mathcal{M}) \leq \text{add}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}})$. Seja $\mathcal{A}'$ uma família de subconjuntos de $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$, tal que $\bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ e que testemunha $|\mathcal{A}'| = \text{add}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}})$. Denote $\mathcal{A}' := \{F_\alpha : \alpha < |\mathcal{A}'|\}$ e sem perda de generalidade, considere F_α um conjunto fechado e raro de $\mathbb{P}$. Como F_α é um fechado de $\mathbb{P}$, então existe um fechado G_α em $\mathbb{R}$ tal que $F_\alpha = G_\alpha \cap \mathbb{P}$. Sendo F_α um conjunto de interior vazio e diante da proposição 1.47 o conjunto G_α tem interior vazio. Diante disso, $\mathcal{A} := \{G_\alpha : \alpha < |\mathcal{A}'|\}$ é uma família de fechados de interior vazio em $\mathbb{R}$, isto implica que $\text{add}(\mathcal{M}) \leq \text{add}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}})$.

- $\text{add}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}}) \leq \text{add}(\mathcal{M})$. Seja $\mathcal{A}$ uma família de subconjuntos de $\mathcal{M}$, tal que $\bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{M}$ e que testemunha $|\mathcal{A}| = \text{add}(\mathcal{M})$. Denote $\mathcal{A} := \{F_\alpha : \alpha < |\mathcal{A}'|\}$ e sem perda de generalidade, considere F_α um conjunto fechado e raro de $\mathbb{R}$. Daí pelo fato 1.49, segue que $F_\alpha \cap \mathbb{P}$ é um conjunto fechado de interior vazio. Portanto, a família $\mathcal{A}' := \{F_\alpha \cap \mathbb{P} : \alpha < |\mathcal{A}|\}$ de subconjuntos fechados de interior vazio em $\mathbb{P}$, e tal que $|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}'|$, o que acarreta a desigualdade $\text{add}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}}) \leq \text{add}(\mathcal{M})$.
  Deduzimos então a igualdade desejada.

■

(ii) $\text{non}(\mathcal{M}) = \text{non}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}})$
Demonstração:

- $\text{non}(\mathcal{M}) \leq \text{non}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}})$. Seja A um subconjuntos de $\mathbb{P}$ donde $A \notin \mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ que testemunha $|A| = \text{non}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}})$. Em particular, $A \subseteq \mathbb{R}$, então basta checar que $A \notin \mathcal{M}$. Sem perda de generalidade, se A fosse um fechado de interior vazio em $\mathbb{R}$, então pelo fato 1.49 $A = A \cap \mathbb{P}$ é um fechado de interior vazio em $\mathbb{P}$, isto contradiz a hipótese que $A \notin \mathcal{M}_{\mathbb{P}}$.

- $\text{non}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}}) \leq \text{non}(\mathcal{M})$. Seja A um subconjuntos de $\mathbb{R}$ donde $A \notin \mathcal{M}$ que testemunha $|A| = \text{non}(\mathcal{M})$. Sem perda de generalidade suponha que A não contém números racionais. Afirmamos que $A \cap \mathbb{P}$ tem cardinalidade $|A|$ e não pertence ao ideal $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$. Com efeito, que $|A \cap \mathbb{P}| = |A|$ é imediato, pois bem, suponhamos que $A \cap \mathbb{P}$ está incluso em uma união enumerável $\bigcup_{n<\omega} F_n$, onde F_n é um conjunto fechado de interior vazio em $\mathbb{P}$. Segue então que existe a família $\{G_n : n < \omega\}$ de subconjuntos fechados de $\mathbb{R}$ tal que $F_n = G_n \cap \mathbb{P}$ e pela proposição 1.47 obtemos que G_n tem interior vazio em $\mathbb{R}$. Dessa forma, $A = A \cap \mathbb{P} \subseteq \left(\bigcup_{n<\omega} F_n\right) \cap \mathbb{P} \subseteq \left(\bigcup_{n<\omega} G_n\right) \cap \mathbb{P} \subseteq \bigcup_{n<\omega} G_n$, e isto contradiz a afirmação que A não pertence ao ideal $\mathcal{M}$.
  Deduzimos então a igualdade desejada.

$\blacksquare$

(iii) $\text{cov}(\mathcal{M}) = \text{cov}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}})$

Demonstração:

- $\text{cov}(\mathcal{M}) \leq \text{cov}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}})$. Seja $\mathcal{A}'$ uma família de subconjuntos de $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$, tal que $\bigcup \mathcal{A}' = \mathbb{P}$ e que testemunha $|\mathcal{A}'| = \text{cov}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}})$. Denote $\mathcal{A}' := \{F_\alpha : \alpha < |\mathcal{A}'|\}$ e sem perda de generalidade, considere F_α um conjunto fechado e raro de $\mathbb{P}$. Como F_α é um fechado de $\mathbb{P}$, então existe um fechado G_α em $\mathbb{R}$ tal que $F_\alpha = G_\alpha \cap \mathbb{P}$. Sendo F_α um conjunto de interior vazio em $\mathbb{P}$ e diante da proposição 1.47 o conjunto G_α tem interior vazio. Disso, $\mathcal{A} := \{G_\alpha : \alpha < |\mathcal{A}'|\}$ é uma família de fechados de interior vazio em $\mathbb{R}$. Como $\bigcup F_\alpha$ cobre $\mathbb{P}$ e $\{\{q\} : q \in \mathbb{Q}\}$ é uma família de conjuntos magros de $\mathbb{R}$ cuja cardinalidade é estritamente menor que $|\mathcal{A}'|$, obtemos como resultado que $\{\{q\} : q \in \mathbb{Q}\} \cup \mathcal{A}$ é uma cobertura para $\mathbb{R}$ com cardinalidade $|\mathcal{A}'|$, isto implica que $\text{cov}(\mathcal{M}) \leq \text{cov}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}})$.

- $\text{cov}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}}) \leq \text{cov}(\mathcal{M})$. Considere uma família de conjuntos magros $\mathcal{A} := \{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de $\mathbb{R}$ tal que $\bigcup \mathcal{A} = \mathbb{R}$, e $\kappa = \text{cov}(\mathcal{M})$. Sem perda de generalidade, vamos assumir que cada F_α é um fechado de interior vazio em $\mathbb{R}$. Defina $B_\alpha := F_\alpha \cap \mathbb{P}$, como F_α é fechado e possui interior vazio em $\mathbb{R}$, então B_α é um fechado de interior vazio em $\mathbb{P}$. Sendo $\mathcal{A}$ uma família que cobre $\mathbb{R}$, obtemos que $\mathcal{A}' := \{B_\alpha : \alpha <\}$ em particular é uma família de fechados de interior vazio em $\mathbb{P}$ que é cobertura para $\mathbb{P}$. Sendo assim, ficamos com $\text{cov}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}}) \leq |\mathcal{A}'| \leq |\mathcal{A}| = \text{cov}(\mathcal{M})$, logo $\text{cov}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}}) \leq \text{cov}(\mathcal{M})$.

Então fica demonstrada a igualdade desejada.

$\blacksquare$

(iv) $\text{cof}(\mathcal{M}) = \text{cof}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}})$

Demonstração:

- $\mathrm{cof}(\mathcal{M}) \leq \mathrm{cof}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}})$. Seja $\mathcal{A}'$ uma família de subconjuntos de $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$, que testemunha $|\mathcal{A}'| = \mathrm{cof}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}})$. Denote $\mathcal{A}' := \{F_\alpha : \alpha < |\mathcal{A}'|\}$ e sem perda de generalidade, considere F_α um conjunto fechado e raro de $\mathbb{P}$. Como F_α é um fechado de $\mathbb{P}$, então existe um fechado G_α em $\mathbb{R}$ tal que $F_\alpha = G_\alpha \cap \mathbb{P}$. Sendo F_α um conjunto de interior vazio e diante da proposição 1.47 o conjunto G_α tem interior vazio. Diante disso, $\mathcal{A} := \{G_\alpha : \alpha < |\mathcal{A}'|\}$ é uma família de fechados de interior vazio em $\mathbb{R}$. Considere $\mathcal{B} := \{G_\alpha \cup \mathbb{Q} : G_\alpha \in \mathcal{A}\}$. Claramente $\mathcal{B}$ é uma família de subconjuntos magros de $\mathbb{R}$ de cardinalidade $\mathrm{cof}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}})$. Para mostrarmos a desigualdade requerida, tome $B \in \mathcal{M}$. Sem perda de generalidade, suponha que $B \cap \mathbb{P}$, então por 1.49 obtemos que $B \cap \mathbb{P}$ é um fechado de interior vazio em $\mathbb{P}$. Sendo assim, existe $G_\alpha \cap \mathbb{P} \in \mathcal{A}'$ que contém $B \cap \mathbb{P}$. Tomando $F := \{\{q\} : q \in \mathbb{Q} \cap (B \setminus B \cap \mathbb{P})\}$, que por sua vez pertence a família $\mathcal{B}$, deduzimos que B está incluso na união de dois magros de $\mathbb{R}$ que pertencem a família $\mathcal{B}$, isto é, $B \subseteq (G_\alpha \cap \mathbb{P}) \cup F \subseteq G_\alpha \cup \mathbb{Q}$.

  Sendo isto implica que $\mathrm{add}(\mathcal{M}) \leq \mathrm{add}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}})$.

- $\mathrm{cof}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}}) \leq \mathrm{cof}(\mathcal{M})$. Seja $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{A}$ é família cofinal testemunhando $\kappa = |\mathcal{A}| = \mathrm{cof}(\mathcal{M})$. Tome a enumeração de $\mathcal{A} := \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Sem perda de generalidade, vamos assumir que A_α é um subconjunto fechado de interior vazio em $\mathbb{R}$. Denote $B_\alpha := A_\alpha \cap \mathbb{P}$, como A_α é um conjunto fechado de interior vazio em $\mathbb{R}$, então B_α é um fechado de interior vazio em $\mathbb{P}$. Claramente, a família $\mathcal{A}' := \{B_\alpha : \alpha < \kappa\}$ é cofinal em $\mathbb{P}$, pois dado um magro $M \subseteq \mathbb{P}$, existe um conjunto F fechado de interior vazio em $\mathbb{R}$ tal que $M = F \cap \mathbb{P}$. Como $\mathcal{A}$ é família cofinal, segue daí que existe $A_\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $F \subseteq A_\alpha$, e portanto, existe B_α contendo M.

Fica provada a igualdade desejada.

■

Fizemos a proposição anterior para ilustrar um fato que usaremos livremente: para qualquer espaço polonês, os valores dos invariantes cardinais coincidem com os valores para $\mathbb{R}$, tanto para $\mathcal{M}$ como $\mathcal{L}$.

2.2 Algumas Desigualdades do Diagrama de Cichoń

Um ponto forte a ser destacado nesse trabalho, não só por sua beleza, mas por ser uma ferramenta importante para demonstrarmos alguns dos teoremas apresentandos, se trata da caracterização do invariante cardinal onde: $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{m}_{countable}$. Voltando ao Teorema 1.80, essencialmente, temos demonstrado o teorema abaixo:

Teorema 2.5. $\mathbf{MA}_{countable}(\kappa)$ *implica* $\kappa < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$.

Pela Proposição 1.16 o teorema anterior se traduz na prova de $\mathfrak{m}_{countable} \leq \text{cov}(\mathcal{M})$. Também destacamos que: pelo fato 2.3, temos que $\text{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{d}$, logo o Teorema 2.5 tem como corolário o Teorema 1.75. Agora vamos provar a recíproca do teorema 1.80.

Teorema 2.6. $\kappa < \text{cov}(\mathcal{M})$ *implica* $\mathbf{MA}_{countable}(\kappa)$.

Demonstração:

Pelo comentário logo após o Teorema 1.95 é suficiente aplicar o Axioma de Martin para $\langle {}^{<\omega}2 \supseteq \rangle$. Seja $\{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ é uma família de conjuntos densos em $\langle {}^{<\omega}2, \supseteq \rangle$. Basta mostrar que existe um filtro genérico. Fixe $\alpha < \kappa$ e considere $E_\alpha := \bigcup_{q \in D_\alpha} [q] \subseteq {}^{\omega}2$. Claramente, E_α é aberto. Agora, vejamos que E_α é denso em ${}^{\omega}2$. Para isso, tome $[p]$ um aberto básico e fixe $h \in [p]$. Como D_α é denso em $\langle {}^{<\omega}2, \supseteq \rangle$, existe $s \in D_\alpha$, tal que $s \supseteq h$. Logo, $p \subseteq s$, e isto implica que $s \in [p]$ e $s \in D_\alpha$, ou seja, $[p] \cap D_\alpha$ é não vazio. Concluímos que ${}^{\omega}2 \setminus E_\alpha$ é um fechado de interior vazio. Como $\kappa < \text{cov}(\mathcal{M})$, temos que $\bigcup_{\alpha<\kappa}({}^{\omega}2 \setminus E_\alpha)$ não cobre ${}^{\omega}2$. Portanto, existe $f \in {}^{\omega}2$ tal que $f \in E_\alpha$ para todo $\alpha < \kappa$. Definimos o conjunto $G := \{f \upharpoonright n : n < \omega\}$.

Afirmação: G é um filtro genérico para a família de subconjuntos densos $\{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$.

De fato, sendo G uma cadeia (no caso, ramo) de $\langle {}^{<\omega}2, \supseteq \rangle$, temos que G é filtro em $\langle {}^{<\omega}2, \supseteq \rangle$. Falta provarmos que G é filtro genérico com respeito a família de subconjuntos densos $\{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Para isso, fixamos $\alpha < \kappa$, sabemos que $f \in E_\alpha$, então segue, por definição de E_α, que existe $q \in D_\alpha$ tal que $f \in [q]$. Logo, $f \upharpoonright \text{dom}(q) = q$. Seja $j := \text{dom}(q)$, então $f \upharpoonright_j \in \{f \upharpoonright n : n < \omega\} \cap D_\alpha$, e portanto, segue a afirmação.

Assim, fica provado que $\kappa < \text{cov}(\mathcal{M})$ implica que $\mathbf{MA}_{countable}(\kappa)$. Desse modo, também fica provado que $\text{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{m}_{countable}$, donde segue:

$$\text{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{m}_{countable}.$$

■

O Teorema 1.77, nos diz que sob $\mathbf{MA}(\kappa)$ temos que $\kappa < \text{add}(\mathcal{L})$, e o Teorema 1.78, nos diz que sob $\mathbf{MA}(\kappa)$ vale $\kappa < \text{add}(\mathcal{M})$.

A seguir apresentaremos um resultado que é a essência do argumento que justifica as desigualdades: $\text{cov}(\mathcal{M}) \leq \text{cov}(\mathcal{L})$ e $\text{cov}(\mathcal{L}) \leq \text{non}(\mathcal{M})$, tais desigualdades fazem parte do Diagrama de Cichoń. Também antecipamos que o próximo resultado é importante para que possamos definir os morfimos que justificam as desigualdades citadas na próxima seção.

Teorema 2.7. $\mathbb{R}$ *pode ser decomposto numa união disjunta formada por um conjunto* *magro e um nulo.*

Demonstração:

Vamos considerar uma enumeração de $\mathbb{Q} = \{q_1, ..q_n, ..\}$, vamos definir o conjunto

$$P_n := \bigcup_{j<\omega}]q_j - \frac{1}{2^{n+j}}, q_n + \frac{1}{2^{n+j}}[, \quad \text{para}\, n > 0$$

Defina $A := \bigcap_{n<\omega} P_n$ e $B := \mathbb{R} \setminus A$. Como P_n é um aberto denso, para todo natural n, o conjunto $\mathbb{R} \setminus P_n$ é fechado de interior vazio. Logo, B é um conjunto magro. Se mostrarmos que A é um conjunto nulo, teremos que A e B são os conjuntos que decompõem a reta. O fato que A é nulo, segue de

$$m^*(A) \leq m^*(P_n) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(]q_j - \frac{1}{2^{n+j}}, q_n + \frac{1}{2^{n+j}}[) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+j}} = \frac{1}{2^{n+1}} \to 0, \text{com}\, n \to \infty.$$

■

Para essa seção, a menos de menção contrária, para resultados posteriores, vamos assumir que A e B são os conjuntos dados no teorema anterior. Uma consequência óbvia de 2.7 é que todo subconjunto da reta pode ser representado como união de um conjunto magro e um conjunto de medida nula. Introduzimos novas notações para demonstrarmos a dualidade presente entre os invariantes cardinais $\text{cov}(\mathcal{M})$, $\text{cov}(\mathcal{L})$, $\text{non}(\mathcal{M})$ e $\text{non}(\mathcal{L})$. Se X é subconjunto de $\mathbb{R}$ e y um número real, denotamos:

1. $-X := \{-x : x \in X\}$;

2. $y + X := \{y + x : x \in X\}$, onde $y + X$ é a "translação de X por y'');

3. Se $Y \subseteq \mathbb{R}$, $Y + X := \bigcup\{y + X : y \in Y\}$.

Agora, vejamos que a propriedade de um ser magro é mantida via translações, ou seja, dado um conjunto magro X o conjunto $y + X$, para um $y \in \mathbb{R}$ fixado, ainda é um conjunto magro. Para isso, fixe $y \in \mathbb{R}$ e observe que $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x + y \in \mathbb{R}$ é um homeomorfismo e, também, uma isometria. Sendo X um conjunto magro, então $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} F_n$, F_n conjunto fechado e raro. Logo, $y + X = g(X) \subseteq \bigcup_{n\in\omega} g(F_n)$ e, mais ainda, sendo g um homeomorfismo cada $g(F_n)$ é um conjunto fechado. Por conseguinte, obtemos que dado um número real y o conjunto $y + X$ é magro, sempre que X for um conjunto magro. Também destacamos o caso analogo para o conceito de conjuntos nulos, i.e, dados N um subconjunto nulo de $\mathbb{R}$ e $y \in R$, vale que $y + N$ é um conjunto de medida nula. Para ver isso, note que $h : x \in \mathbb{R} \mapsto x + y \in \mathbb{R}$ é um homeomorfismo e uma isometria.

Fixado $\epsilon > 0$, existe uma coleção $\{I_n\}_{n\in\omega}$, coleção de intervalos abertos de cobrem X tal que $\sum^{\infty} m(I_k) < \epsilon$, onde m é a medida de Lebesgue. Como h é um homeomorfismo a imagem de um conjunto aberto ainda é um conjunto aberto, e sendo h uma isometria, temos o desejado. Em resumo, tal parágrafo pode ser expresso na seguinte proposição:

Proposição 2.8. *Se X é um conjunto magro(nulo), então $y + X$ também é um conjunto magro (nulo) para todo $y \in \mathbb{R}$.*

$\blacksquare$

Utilizando argumentos analogos ao da proposição anterior, podemos demonstrar que um conjunto magro (nulo) é invariante por simetria, ou seja, dado X magro (nulo) então $-X$ é magro (nulo).

Podemos tornar evidente a partir da proposição 2.7 que: Sendo $\mathbb{R}$ uma união disjunta de um conjunto de medida nula A e B um conjunto magro, se temos X um conjunto não magro então $A + X$ é igual a $\mathbb{R}$. Para demonstrarmos isso, provaremos a próxima proposição, que por mais simples que seja, é a essência do resultado 2.11. Aproveitamos para dizer de maneira prévia que tal proposição também é parte central da demonstração do Teorema 2.29 que será dada na seção seguinte.

Proposição 2.9. *Consideremos os conjuntos A e B como no teorema 2.7. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, então*

1. $y \notin x + B \Rightarrow x \in y - A$;
2. $y \notin x + A \Rightarrow x \in y - B$

Demonstração:

Vamos demonstrar somente o item (1), pois o caso (2) é análogo. Começamos afirmando que : $y - x \notin B$. De fato, pois caso contrário, se $y - x \in B$ então $y = x + (y - x) \in x + B$, o que é um contradição. Como A e B são disjuntos, então $y - x \in A$. Disso vem que $-x \in A - y$ e, consequentemente, $x \in y - A$. $\blacksquare$

O argumento que acabamos de mostrar para os conjuntos A, B fixados de acordo com a proposição 2.7, demonstra o seguinte resultado:

Teorema 2.10. *X não magro(não nulo), então $A + X = \mathbb{R}\,(B + X = \mathbb{R})$.*

Demonstração:

Demonstraremos o caso X não-magro, pois para o outro caso o argumento é análogo. Veja que se $A + X \neq \mathbb{R}$, teríamos a existência de $z \in \mathbb{R} \setminus A + x$, tal que

$$\forall x \in X (z \notin A + x).$$

Logo, da Proposição 2.9,

$$\forall x \in X(x \in z - B),$$

ou seja, $X \subseteq z - B$, e diante disso, sendo B um conjunto magro, já vimos que $z - B$ é magro. Concluímos que X também seria um conjunto magro, o que seria uma contradição. ■

Agora damos a prova de Rothberger para as seguintes desigualdades:

Teorema 2.11. $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{L})$ *e* $\mathrm{cov}(\mathcal{L}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{M})$.

Demonstração:

Por 2.7, podemos fixar $A \in \mathcal{L}$ e $B \in \mathcal{M}$ tal que $A \cup B = \mathbb{R}$. Primeiro vamos demonstrar que $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{L})$. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$, tal que $X \notin \mathcal{L}$ e $|X| = \mathrm{non}(\mathcal{L})$. Pelo Teorema 2.10, $B + X = \mathbb{R}$. Sendo B um conjunto magro, então $B + x$ é magro, para todo $x \in X$. Disso, podemos concluir que $C = \{B + x : x \in X\}$ é uma família de subconjuntos de $\mathcal{M}$, onde $\bigcup C = \mathbb{R}$. Decorre que $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq |C| \leq |X| = \mathrm{non}(\mathcal{L})$.

Para a desigualdade $\mathrm{cov}(\mathcal{L}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{M})$, tome $X \subseteq \mathbb{R}$, tal que $X \notin \mathcal{M}$ e $|X| = \mathrm{non}(\mathcal{M})$. Novamente, fazendo uso do Teorema 2.10, temos $A + X = \mathbb{R}$. Como $A + x$ tem medida nula, deduz-se que $F = \{A + x : x \in X\}$ é uma família de subconjuntos de $\mathcal{L}$, onde $\bigcup F = \mathbb{R}$. Decorre que $\mathrm{cov}(\mathcal{L}) \leq |F| \leq |X| = \mathrm{non}(\mathcal{M})$. ■

Abaixo, damos uma observação interessante para um cardinal κ, basicamente, um cardinal κ que atende a propriedade abaixo, sempre vale que a união de conjuntos fechados de interior vazio tem interior vazio, independente do espaço de Baire considerado.

Observação 2.12. Digamos que κ satisfaz:

Nenhum espaço de Baire pode ser escrito como união de κ fechados raros.

Então, também vale que:

Seja $\{M_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma família de conjuntos fechados raros de um espaço de Baire X, então $\bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ tem interior vazio.

De fato, por contrapositiva, se $\bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ tivesse interior não-vazio, então existiria um conjunto aberto U contido em $\bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$. Como U é aberto de um espaço de Baire, logo U é um espaço de Baire. Disso segue que U é um espaço de Baire que pode ser escrito como união de κ conjuntos fechados raros. ■

Teorema 2.13. *Se* $\kappa < \mathfrak{b}$ *e* $\kappa < \operatorname{cov}(\mathcal{M})$, *então* $\kappa < \operatorname{add}(\mathcal{M})$.

Demonstração:

Seja $\{M_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma família de conjuntos magros da reta. Como $\kappa < \operatorname{cov}(\mathcal{M})$ então a família $\{M_\alpha : \alpha < \kappa\}$ não cobre $\mathbb{R}$. Se mostrarmos que $M := \bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ é um conjunto magro, temos a prova do teorema. O conjunto M, pela Observação 2.12, tem interior vazio, logo $\mathbb{R} \setminus M$ é um conjunto denso em $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R} \setminus M$ tem base enumerável, segue que $\mathbb{R} \setminus M$ é separável. Então existe um denso $D = \{d_n : n \in \omega\}$ contido em $\mathbb{R} \setminus M$ que também é denso em $\mathbb{R}$. Sendo M_α um conjunto magro, vamos supor sem perda de generalidade que $M_\alpha = \bigcup_{n\in\omega} F_{\alpha,n}$, onde $F_{\alpha,n}$ é um conjunto fechado-raro de $\mathbb{R}$ e $(F_{\alpha,n})_{n\in\omega}$ é uma sequência crescente. Fixado $n \in \omega$, definimos $f_\alpha : \omega \to \omega$ pondo:

$$f_\alpha(n) = \min\{k \in \omega :]d_n - \frac{1}{k}, d_n + \frac{1}{k}[\cap F_{\alpha,n} = \emptyset\}$$

Note que f_α está bem definida, pois $F_{\alpha,n}$ é um conjunto raro, logo qualquer aberto V de $\mathbb{R}$ contém um aberto U não vazio que não intersecta $F_{\alpha,n}$. Por hipótese, $\kappa < \mathfrak{b}$ então a família $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ é limitada, i.e. existe $f \in {}^\omega\omega$, tal que para todo $\alpha < \kappa$, existe $n(\alpha) \in \omega$, valendo o seguinte:

$$f_\alpha(n) < f(n), \forall\, n \geq n(\alpha)$$

.

Dado $m \in \omega$, qualquer conjunto do tipo $\{d_j : j \geq m\}$ ainda é denso[1]. Com isso, podemos concluir que o conjunto

$$U_m := \bigcup_{n\geq m}]d_n - \frac{1}{f(n)}, d_n + \frac{1}{f(n)}[$$

é aberto-denso. Pelo teorema de Baire, deduzimos que $\mathbb{R}\setminus\bigcap_{m\in\omega} U_m$ é um conjunto magro.
Afirmação: $M \subseteq \mathbb{R} \setminus \bigcap_{m\in\omega} U_m$.

Vamos justicar isso do seguinto modo: fixe $n \in \omega$ e $\alpha < \kappa$. Tomando $j \geq \max\{n(\alpha), n\}$, temos $f_\alpha(j) < f(j)$, e, portanto,

$$\frac{1}{f(j)} < \frac{1}{f_\alpha(j)}, \forall j \geq \max\{n_\alpha, n\}.$$

[1]Como $\mathbb{R}$ é espaço T_1 e qualquer vizinhança U_x de $x \in \mathbb{R}$ possui infinitos pontos, logo qualquer $x \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação. Dado $x \in \mathbb{R}$ é possível contruir uma sequência $(d_{j_k})_{k\in\omega}$ de elementos dois-a-dois distintos. Logo, dado $j \geq m$ existe um certo índice $j_k > j \geq m$, tal que $d_{j_k} \in U_x$

O que acarreta que

$$]d_j - \frac{1}{f(j)}, d_j + \frac{1}{f(j)}[\subseteq]d_j - \frac{1}{f_\alpha(j)}, d_j + \frac{1}{f_\alpha(j)}[$$

Agora, por definição de $f_\alpha(j)$, temos o seguinte

$$]d_j - \frac{1}{f_\alpha(j)}, d_j + \frac{1}{f_\alpha(j)}[\cap F_{\alpha,j} = \emptyset$$

Vale lembrar que a sequência $(F_{\alpha,n})_{n\in\omega}$ é crescente. Então para o $n \in \omega$ fixado acima, vale que $F_{\alpha,n} \subseteq F_{\alpha,j}$. Diante disso,

$$]d_j - \frac{1}{f_\alpha(j)}, d_j + \frac{1}{f_\alpha(j)}[\cap F_{\alpha,n} = \emptyset, \forall j \geq \max\{n_\alpha, n\}.$$

Com isso deduz-se que tomando $l := \max\{n_\alpha, n\}$, o conjunto $U_l \cap F_{\alpha,n} = \emptyset$. Esse raciocínio nos leva a concluir que $M \subseteq \mathbb{R} \setminus \bigcap_{m\in\omega} U_m$.

Voltando para a demonstração do teorema, para $\kappa < \mathfrak{c}$ e $\kappa < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$, sempre podemos exibir um conjunto $M := \bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$, tal que M ainda pertence ao ideal $\mathcal{M}$. Então obrigatoriamente $\kappa < \mathrm{add}(\mathcal{M})$, como desejado. ■

Corolário 2.14. $\min\{b, \mathrm{cov}(\mathcal{M})\} \leq \mathrm{add}(\mathcal{M})$.

Demonstração:

Segue imediatamente da Proposição 1.19. ■

Seja X um conjunto. Entendemos por base de σ-ideal a família $\mathcal{B}$ não vazia de elementos de $\mathcal{P} \setminus \{X\}$ tal que para toda família $\{B_n : n \in \omega\}$, existe $B \in \mathcal{B}$ que contém $\bigcup\{B_n : n \in \omega\}$.

Na próxima seção provaremos a desigualdade contrária.

Como união enumerável de σ-compactos é σ-compacto, então a família dos σ-compactos é uma base de σ-ideal, portanto, podemos pensar no σ-ideal gerado pelos σ-compactos. Denotaremos por $\mathcal{K}$ o σ-ideal gerado pelos compactos de ${}^\omega\omega$. O próximo resultado nos diz que o $\sigma-$ideal $\mathcal{K}$ é a família os subconjuntos limitados de ${}^\omega\omega$.

Teorema 2.15. *As seguintes são equivalentes:*

(i) X é σ-compacto;

(ii) Existe $f \in {}^\omega\omega$ tal que $X \subseteq C_f := \{g \in {}^\omega\omega : g \leq^* f\}$.

Em particular, cada C_f é um conjunto magro.

Demonstração:

Primeiramente, vamos provar que $(i) \Rightarrow (ii)$. Seja $X = \bigcup_{i \leq \omega} K_i$, onde K_i é um conjunto compacto de ${}^\omega\omega$. Pela compacidade de K_i, existe $f_i \in {}^\omega\omega$ tal que $K_i \subseteq K_{f_i} := \{s \in {}^\omega\omega : s \leq f_i\}$. Agora, a família $\mathcal{F} := \{f_i : i \in \omega\}$ por ser enumerável é limitada, i.e., existe $g \in {}^\omega\omega$ que testemunha que dado $f \in \mathcal{F}$, vale que $f \leq^* g$. Afirmamos que X está contido em $C_g := \{s \in {}^\omega\omega : s \leq^* g\}$. De fato, pois para uma função $h \in X$, existe K_i que contém h. Disso, $h \in K_{f_i}$, logo $h \leq f_i \leq^* g$, assim temos $h \leq^* g$. Para provarmos que $(ii) \Rightarrow (i)$, assumimos que $f \in {}^\omega\omega$ e $X \subseteq C_f := \{g \in {}^\omega\omega : g \leq^* f\}$. Para um conjunto $A \subseteq \omega$ finito note que o número de funções $g \in {}^\omega\omega$ tais que $\{n \in \omega : g(n) > f(n)\} = A$ é enumerável, pois qualquer g que atenda tal propriedade é um elemento de $\prod_{m \in A}[f(m)+1, \omega)$. Portanto, se $A \in [\omega]^{<\omega}$, então as funções g tais que $\{n < \omega : f(n) < g(n)\} = A$ estão contidas em uma união enumerável da família $\{K_{F_{A,n}} : n \in \omega\}$. Seja então $\bigcup_{A \in [\omega]^{<\omega}} \{K_{F_{A,n}} : n \in \omega\}$. Essa é uma união enumerável de conjuntos compactos. Tomando um elemento $h \in C_f$, então $\{n < \omega : f(n) < g(n)\}$ é um subconjunto finito de ω, digamos F. Portanto, $h \in K_{f_{F,n}}$, e diante disso, o conjunto C_f está incluso numa união enumerável de compactos, com isso, segue o resultado. ■

Teorema 2.16. $\mathrm{add}(\mathcal{K}) = \mathfrak{b}$ *e* $\mathrm{cov}(\mathcal{K}) = \mathfrak{d}$.

Demonstração:

• $\mathrm{add}(\mathcal{K}) = \mathfrak{b}$. Para provarmos a desigualdade "$\mathfrak{b} \leq \mathrm{add}(\mathcal{K})$", note que qualquer família $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathcal{K}$, sendo $\kappa < \mathfrak{b}$, existe a família $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ tal que cada A_α está contido em C_{f_α}. Como $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ é limitada, existe $f \in {}^\omega\omega$ satisfazendo $f_\alpha \leq^* f$ para todo $\alpha < \kappa$. Então $\bigcup\{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq C_f$, ou seja, uma família de elementos de $\mathcal{K}$ que testemunha a minimalidade de $\mathrm{add}(\mathcal{K})$ não pode ter tamanho estritamente menor que $\mathfrak{b}$. Para a desigualdade "$\mathrm{add}(\mathcal{K}) \leq \mathfrak{b}$", seja uma família ilimitada$\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\}$. Considere $\bigcup\{C_{f_\alpha} : \alpha < \mathfrak{b}\}$, vejamos que tal família não pode pertence ao σ-ideal $\mathcal{K}$. De fato, pois se pertencesse existiria $f \in {}^\omega\omega$ que torna válido que $\bigcup\{C_{f_\alpha} : \alpha < \mathfrak{b}\}$ está contido em C_f. Daí, temos que $C_{f_\alpha} \subseteq C_f$, então $f_\alpha \in C_f$. Deduzimos que $f_\alpha \leq^* f$, para todo $\alpha < \mathfrak{b}$, mas isso é um absurdo, pois $\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\}$ é uma família ilimitada. Assim, temos demonstrado a igualdade desejada.

Usaremos a seguinte caracterização do cardinal $\mathfrak{d}$: é o menor tamanho de uma família de compactos de ω^ω que cobertura para ω^ω.

• $\mathrm{cov}(\mathcal{K}) = \mathfrak{d}$. Como todo conjunto compacto é σ-compacto, qualquer família que testemunha a minimalidade de $\mathfrak{d}$ atende a propriedade que caracteriza o cardinal $\text{cov}(\mathcal{K})$, então segue disso a desigualdade "$\text{cov}(\mathcal{K}) \leq \mathfrak{d}$". Vejamos a prova de "$\mathfrak{d} \leq \text{cov}(\mathcal{K})$". Seja $\lambda < \mathfrak{d}$ e $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq \mathcal{K}$. Por definição, $X_\alpha \in \mathcal{K}$, então existe uma família enumerável $\{K_{\alpha_n} : n \in \omega\}$ formada de compactos em ω^ω tal que $X_\alpha \subseteq \bigcup\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$. Decorre que $\bigcup\{X_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq \bigcup_{\alpha<\lambda}\bigcup_{n\in\omega}\{K_{\alpha_n} : n \in \omega\}$. Como $\lambda < \mathfrak{d}$, $\bigcup_{\alpha<\lambda}\bigcup_{n\in\omega}\{K_{\alpha_n} : n \in \omega\}$ não pode cobrir ω^ω e, por conseguinte, $\bigcup\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ também não cobre. Logo, para $\lambda < \mathfrak{d}$, não existe família de elementos de $\mathcal{K}$ que cubra ω^ω. Donde segue que $\mathfrak{d} \leq \text{cov}(\mathcal{K})$. ■

Observamos que, se considerarmos o ideal $\mathcal{I}$ gerado por compactos de ${}^\omega\omega$, então $\text{add}(\mathcal{I}) = \aleph_0$ e $\text{cov}(\mathcal{I}) = \mathfrak{d}$. Não entraremos em detalhe, mas isso se refere ao fato, já visto no Capítulo 1, que $\mathfrak{b}(\langle {}^\omega\omega, \leq\rangle) = \aleph_0$ e $\mathfrak{d}(\langle {}^\omega\omega, \leq\rangle) = \mathfrak{d}(\langle {}^\omega\omega, \leq^*\rangle)$.

Encerramos essa seção dando uma caracterização do cardinal $\text{cov}(\mathcal{M})$ usando um princípio de predição. É conhecido que vários princípios de predições tem ampla relação com os invariantes cardinais, como exemplo, o princípio de predição diamante $(\diamond)$[2]. A seguir daremos o conceito fundamental para o nosso propósito.

Definição 2.17 (**Guessing Principle**). Sejam $g, f \in {}^\omega\omega$. Diz-se que g adivinha f se $\{n < \omega : g(n) = f(n)\}$ é infinito. Uma família $\mathcal{F} \subseteq {}^\omega\omega$ é adivinhada por g se todas as funções em $\mathcal{F}$ são adivinhadas por g.

A definição carece de uma observação. Sendo $\mathbf{MA}(\omega)$ verdadeiro, qualquer família $\mathcal{F} \subseteq {}^\omega\omega$ que seja enumerável é sempre adivinhada e a justificativa disso pode ser deduzida da primeira parte da demonstração do próximo teorema. Também vale destacar que, claramente, ${}^\omega\omega$ não é adivinhada por nenhuma $g \in {}^\omega\omega$. Em resumo, estamos dizendo que o cardinal $\mathfrak{gs} := \{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq {}^\omega\omega \text{ não é adivinhada}\}$ está bem definido[3] e, mais ainda, $\omega_1 \leq \mathfrak{gs} \leq \mathfrak{c}$.

Teorema 2.18. $\text{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{gs}$.

Demonstração:

Vimos que $\text{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{m}_{countable}$. Logo para $\kappa < cov(\mathcal{M})$, temos $\mathbf{MA}_{countable}(\kappa)$. Sendo $\langle {}^{<\omega}\omega, \supseteq\rangle$ uma ordem enumerável, podemos aplicar $\mathbf{MA}_{countable}(\kappa)$. Primeiramente, tome uma família $\mathcal{F} := \{f_\xi : \xi < \kappa\} \subseteq {}^\omega\omega$. O conjunto $D_{\xi,m} = \{q \in {}^{<\omega}\omega : \exists k > m, f_\xi(k) = q(k)\}$ é denso, dado $s \notin D_{\xi,m}$ a sequência finita $s \cup \{\langle m+1, f_\xi(m+1)\rangle\}$ estende s e pertence ao conjunto $D_{\xi,m}$. O conjunto $E_j = \{q \in {}^{<\omega}\omega : j \in \text{dom}(q)\}$ também é denso. Portanto, $\{D_{\xi,m} : \xi \in \kappa\} \cup \{E_j : j \in \omega\}$ é uma família de κ densos. De $\mathbf{MA}_{countable}(\kappa)$, existe filtro G genérico em $\langle {}^{<\omega}\omega, \supseteq\rangle$, então podemos definir a função $g := \bigcup G : \omega \to \omega$.

[2]Para o leitor interessado em tal tema, sugerimos: Moore, J.T.; Hrušák, M.; Džamonja, M. *Parametrized $\diamond$ principles,* Trans. Amer. Math. Soc., v. 356, n.6, p. 2281-2306, 2004.

[3]A notação $\mathfrak{gs}$ não é comumente utilizada. Estamos usando-a para dar destaque a esse cardinal.

Afirmação: g adivinha $\mathcal{F}$.

Fixado $l \in \omega$. Para um dado $\xi < \kappa$, vamos checar que $A_\xi := \{n < \omega : g(n) = f_\xi(n)\}$ é ilimitado. Pois bem, sendo G um filtro genérico, vale que $D_{\xi,l} \cap G \neq \emptyset$. Portanto, existe $r \in G$, tal que $f_\xi(k) = r(k)$ para algum $k > l$, e como $r \subseteq g := \bigcup G$, disso que dado $l \in \omega$ sempre existe $k > l$ tal que $k \in A_\xi$, segue nossa afirmação de que A_ξ é ilimitado, para todo $\xi < \kappa$.

Decorre imediatamente que dada uma família $\mathcal{F} \subseteq {}^\omega\omega$ de cardinalidade $\kappa < \text{cov}(\mathcal{M})$, sempre existe função $g : \omega \to \omega$ que adivinha a família $\mathcal{F}$, logo $\text{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{gs}$.

$\blacksquare$

A seguir daremos uma demonstração alternativa para o Teorema anterior, usando argumentos puramente topológicos:

Demonstração:

Fixe $f \in {}^\omega\omega$. Vamos provar que o conjunto definido como

$$M_f := \{g \in {}^\omega\omega : \{n < \omega : g(n) = f(n)\} \text{ é finito}\}$$

é um conjunto magro. Note que $M_f := \bigcup\limits_{A \in [\omega]^{<\omega}} \{g \in {}^\omega\omega : A = \{n \in \omega : g(n) = f(n)\}\}$. Então vale que

$$M_f \subseteq \bigcup_{A \in [\omega]^{<\omega}} \left(\bigcap_{n \notin A} \{g \in {}^\omega\omega : g(n) \neq f(n)\} \right)$$

Agora vamos provar que $\bigcap_{n \notin A} \{g \in {}^\omega\omega : g(n) \neq f(n)\}$ é um conjunto fechado de interior vazio, e com isso, podemos concluir que M_f é um conjunto magro. Vamos a prova, fixado f e $n \in \omega$ note que $\{g \in {}^\omega\omega : g(n) \neq f(n)\}$ é um conjunto fechado, pois ${}^\omega\omega \setminus [\{\langle n, f(n)\rangle\}]$ é aberto, disso segue que o conjunto $\bigcap_{n \notin A} \{g \in {}^\omega\omega : g(n) \neq f(n)\}$ é fechado. Falta vermos que $\bigcap_{n \notin A} \{g \in {}^\omega\omega : g(n) \neq f(n)\}$ tem interior vazio, para isso, tome $h \in \bigcap_{n \notin A} \{g \in {}^\omega\omega : g(n) \neq f(n)\}$. Como qualquer vizinhança de h contém um aberto básico $[h \restriction_n]$ para algum n. Tomando $m > \max\{n, \max A\}$, com isso, considere $h \restriction_m \cup \{\langle m, f(m)\rangle\}$. Logo, $[h \restriction_m \cup \{\langle m, f(m)\rangle\}] \subseteq [h \restriction_n]$ e, portanto, existem funções no aberto básico $[h \restriction_n]$ que não pertencem ao conjunto $\bigcap_{n \notin A} \{g \in {}^\omega\omega : g(n) \neq f(n)\}$. Assim, fica provado que $\bigcap_{n \notin A} \{g \in {}^\omega\omega : g(n) \neq f(n)\}$ é fechado de interior vazio, deduzimos disso que M_f é um conjunto magro. Então, temos provado que $g \in {}^\omega\omega$ não adivinha a família $\mathcal{F}$ se, e somente se, $g \in M_f$. Então, se $|\mathcal{F}| = \mathfrak{gs}$ e $\mathcal{F}$ é uma família que não é adivinhada, temos provado que ${}^\omega\omega = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} M_f$. Portanto, $\text{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{gs}$. $\blacksquare$

A seguir, daremos a prova que justifica a igualdade $\mathfrak{gs} = \text{cov}(\mathcal{M})$.

Teorema 2.19. *Dado um cardinal κ, são equivalentes:*

(1) $\mathbb{R}$ não é união de menos que κ magros;

(2) Toda família $\mathcal{F} \subseteq {}^{\omega}\omega$ de tamanho $\lambda < \kappa$ é adivinhada;

(3) Sejam $\mathcal{F} \subseteq {}^{\omega}\omega$ e para todo conjunto $X \subseteq [\omega]^{\omega}$, onde $|X| = \lambda < \kappa$, existe $g \in \omega^{\omega}$ tal que para todo $f \in \mathcal{F}, A \in X$, o conjunto $\{n \in A : f(n) = g(n)\}$ é infinito.

Demonstração:

(1) $\Rightarrow$ (2): Já foi provada no Teorema 2.18.

(2) $\Rightarrow$ (3): Definimos a função $h_{\alpha,\beta} : \omega \to Fn(\omega, 2)$ pondo

$$h_{\alpha,\beta}(n) := F_{\beta} \restriction \{X^0{}_{\alpha}, X^1{}_{\alpha}, ..., X^n{}_{\alpha}\}.$$

Afirmação: Seja A conjunto enumerável e $\mathcal{F} \subseteq {}^{\omega}A$, $|\mathcal{F}| < \kappa$. Então existe $g : \omega \to A$ tal que $\{n < \omega : f(n) = g(n)\}$ é finito para todo $f \in \mathcal{F}$.

De fato, fixe uma enumeração de A, digamos $A = \{a_n : n < \omega\}$. Seja $\mathcal{F} = \{F_{\alpha} : \alpha < \lambda\}$, com $\lambda < \kappa$. A cada $\alpha < \lambda$, defina $F'{}_{\alpha}(n) = m$ se, e somente se, $F_{\alpha}(n) = a_m$. Como $|\mathcal{F}'| < \kappa$, existe $g' : \omega \to \omega$ que adivinha $\mathcal{F}'$. Assim, podemos definir $g(n) = a_{g'(n)}$. Note que $\{n < \omega : f_{\alpha}(n) = g(n)\} = \{n < \omega : f'_{\alpha}(n) = g'(n)\}$. Temos que para todo $n < \omega$, vale que: $f_{\alpha}(n) = g(n)$ se e somente se $f'_{\alpha}(n) = g'(n)$. Assim, fica provada nossa afirmação.

Agora, seguimos com a demonstração. Segue da afirmação anterior, para $\lambda < \kappa$, vale que a família $\{h_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta < \lambda\}$ é adivinhada, i.e., existe $h : \omega \to Fn(\omega, 2)$ que tal que $\{h_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta < \lambda\}$. Agora, definimos a função $g : \omega \to \omega$ escolhendo indutivamente

$$\begin{aligned}
&x_0 \in \mathrm{dom}(h)\\
&x_1 \in \mathrm{dom}(h) \setminus \{x_0\}\\
&x_2 \in \mathrm{dom}(h) \setminus \{x_0, x_1\}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Fixe $\alpha, \beta < \lambda$. O conjunto $\{n \in X_{\alpha} : g(n) = F_{\beta}(n)\}$ contém $\{x_m : x_m \in X_{\alpha}$ e $g(x_m) = F_{\beta}(x_m)\}$.

Afirmação: $\{x_m : x_m \in X_{\alpha}$ e $g(x_m) = F_{\beta}(x_m)\}$ é infinito. Pois $\{m < \omega : h(m) = h_{\alpha,\beta}(m)\}$ é infinito.

De fato, se $m \in \omega$ é tal que $h(m) = h_{\alpha,\beta}(m)$, temos $g(x_m) = h(m)(x_m) = h_{\alpha,\beta}(m)(x_m) = F_{\beta} \restriction \{X^0{}_{\alpha}, X^1{}_{\alpha}, ..., X^n{}_{\alpha}\}$ portanto $x_m \in \{X^0{}_{\alpha}, X^1{}_{\alpha}, ..., X^n{}_{\alpha}\}$ logo $x_m \in$

X_α, e portanto $F_\beta(x_m) = g(x_m)$.

(3) $\Rightarrow$ (1).(Esboço da demonstração, ver detalhes em [BaJ]) Seja $\lambda < \kappa \leq \mathfrak{d}$. Considere a família $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha < \lambda\}$ de fechados raros de ${}^\omega\omega$. Nosso objetivo aqui é construir um elemento $x \in {}^\omega 2$ tal que $x \notin \bigcup \mathcal{F}$. Para isso, começamos fixando $\alpha < \lambda$, defina $s_n^\alpha = \min\{s \in {}^{<m}2 : \forall t \in {}^j 2, j \leq n, [t^\frown s] \cap F_\alpha = \emptyset\}$. Por hipótese, é adivinha essa família , portanto, existe $(s_n) \in {}^\omega({}^{<\omega}2)$ tal que para todo $\alpha < \lambda$, defina $X_\alpha := \{n : s_n = s_n^\alpha\}$. Como cada $\lambda < \mathfrak{d}$, então é possível fixar uma família de funções estritamente crescentes nos naturais que codifiquem partições em intervalos, obtendo assim uma sequência estritamente crescente $\langle k_n : n \in \omega \rangle$ de modo que as sequências s_j para $j \leq k_{2n}$ têm domínio contido em $[0, k_{2n+1})$ para todo $\alpha < \lambda$ o conjunto $\{n < \omega : X_\alpha \cap [k_{2n}, k_{2n+1}) \neq \emptyset\}$ é infinito[4].

Afirmação: Existe $X \subseteq \omega$ infinito tal que $|X \cap [k_{2n}, k_{2n+1})| \leq 1$ para todo $n \in \omega$ e $X \cap X_\alpha$ é infinito, para todo $\alpha < \lambda$.

De fato, dado $\alpha < \lambda$ e $n \in \omega$, defina:

$$f_\alpha(n) := \begin{cases} \min(X_\alpha \cap [k_{2n}, k_{2n+1})) & \text{se } [k_{2n}, k_{2n+1}) \neq \emptyset \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e seja $Y_\alpha := \{n < \omega : f_\alpha(n) \neq 0\}$. Considere a família $\{Y_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Por hipótese de (3), dado $\alpha < \lambda$

$$\{n \in Y_\alpha : g(n) = f_\alpha(n)\} \text{ é infinito}$$

é claro que $X := \{g(n) : n \in \omega\}$ satisfaz o desejado.

Agora, seja $\{x_n : n \in \omega\}$ uma enumeração do conjunto X construido acima. Note que cada $x_n \in X$ é um número natural. Diante disso, defina

$$x := s_0{}^\frown s_{x_1}{}^\frown s_{x_2}{}^\frown \ldots {}^\frown s_{x_n}{}^\frown \ldots$$

Afirmação: $x \notin \bigcup \mathcal{F}$.

Fixe $\alpha < \lambda$. Como $X \cap X_\alpha$ é não vazio, podemos tomar o mínimo $x_n \in X \cap [K_{2n}, K_{2n+1})$ e $x_n \in X_\alpha$. Então $s_{x_n} := s_{x_n}^\alpha$, onde m deve ser o mínimo número natural tal que para todo $t \in {}^{<k}2, [t^\frown s] \cap F_\alpha = \emptyset$. Note que $\langle {}^{<\omega}2, \supseteq \rangle$ é uma ordem enumerável, tomando uma enumeração de ${}^{<\omega}2 = \{s_n : n \in \omega\}$, então fixado $\alpha < \lambda$ o conjunto $X_\alpha = \{n < \omega : s_n^\alpha = s_n\}$. Se $j < n$, então $x_j < K_{2n}$ e, portanto, s_{x_j} tem domínio contido

[4] Detalhes em [BaJ].

em $[0, k_{2n+1})$, para todo $j < n$. Por definição de $\langle s_n^\alpha : n \in \omega \rangle$,

$$[s_0{}^\frown s_{x_1}{}^\frown s_{x_2}{}^\frown \ldots {}^\frown s_{x_n}] = [s_0{}^\frown s_{x_1}{}^\frown s_{x_2}{}^\frown \ldots {}^\frown s_{x_n}^\alpha]$$

e por construção $[s_0{}^\frown s_{x_1}{}^\frown s_{x_2}{}^\frown \ldots {}^\frown s_{x_n}^\alpha]$ é disjunto de F_α. Como $x \in [s_0{}^\frown s_{x_1}{}^\frown s_{x_2}{}^\frown \ldots {}^\frown s_{x_n}^\alpha]$, então $x \notin F_\alpha$. Sendo $\alpha < \lambda$, temos que $x \notin \bigcup \mathcal{F}$. ■

O teorema anterior pode ser traduzido no seguinte:

Corolário 2.20. $\mathfrak{gs} = \mathrm{cov}(\mathcal{M})$.

Demonstração:

Denote por

$$\varphi(\lambda) \equiv \textit{ existe cobertura da reta por } \lambda \textit{ conjuntos magros.}$$

$$\xi(\lambda) \equiv \textit{ existe família } \mathcal{F} \subseteq {}^\omega\omega\textit{, com } |\mathcal{F}| = \lambda\textit{, que não é adivinhada.}$$

Pelo teorema anterior, as fórmulas são equivalentes:

$$\forall \mu < \lambda(\xi(\mu) \text{ é falso})$$

$$\forall \mu < \lambda(\varphi(\mu) \text{ é falso}).$$

Então, pelo Fato 1.21, podemos afirmar que:

$$\mathfrak{gs} := \max\{\lambda : \forall \mu < \lambda(\xi(\mu) \text{ é falso})\}.$$

$$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) := \max\{\lambda : \forall \mu < \lambda(\varphi(\mu) \text{ é falso})\}$$

e pelas equivalências das fórmulas, obtemos $\mathfrak{gs} = \mathrm{cov}(\mathcal{M})$, como esperado.

■

2.3 Morfismos em $\mathrm{Dial}_2(Sets)^{op}$.

Durante anos, vários conceitos em Teoria das Categorias foram introduzidos com a finalidade de generalizar conceitos da Teoria dos Conjuntos em outras áreas da matemática. Andreas Blass foi primeiro a propor discursões sobre fatos que segundo o próprio Blass, são empíricos dentro da Teoria de Conjuntos e que estariam ligados a Teoria das Categorias. Nesse sentido, Blass encontra no trabalho de Valéria de Paiva [P89a] e Peter Vojtáš [V93] uma relação direta tratada no artigo [Bla95]. Nosso objetivo para essa seção é mostrar que as desigualdades do diagrama de Cichón podem ser provadas por morfismos.

Alguns autores durante anos tentaram compreender a interpretação dialética de Gödel[5] em termos categorias. Seguindo nisso, a pesquisadora Valeria de Paiva em sua tese de PhD[6] introduz as chamadas *categorias dialéticas*. Nessa parte do trabalho vamos apresentar como a categoria $\mathrm{Dial}_2(Sets)^{op}$ se relaciona com os invariantes cardinais de interesse. As referências adotadas para essa seção: [Bla10]; [BaJ] e [Bla96].

Os objetos da categoria $\mathrm{Dial}_2(sets)^{op}$ são triplas da forma $o := (A, B, E)$, onde A, B são conjuntos e E é uma relação binária contida em $A \times B$. Um morfismo de $o_2 = (A_2, B_2, E_2)$ para $o_1 = (A_1, B_1, E_1)$ é um par de funções(φ, ψ) tal que $\varphi : A_1 \to A_2$ e $\psi : B_2 \to B_1$ tal que para cada $a \in A_1$ e para cada $b \in B_2$,

$$\text{se vale } \varphi(a)E_2b, \text{ então } aE_1\psi(b).$$

Denotamos por $o_1 \leq o_2$ se existe um morfismo de $o_2 := (A_2, B_2, E_2)$ para $o_1 := (A_1, B_1, E_1)$. O diagrama abaixo expressa de maneira clara a definição de morfismo:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[d, "\varphi"'] & E_1 & B_1 \\
A_2 & E_2 & B_2 \arrow[u, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Definimos a *norma* do objeto o da categoria $\mathrm{Dial}_2(sets)^{op}$ denotado por $||o||$ da relação (A, B, E) como sendo a menor cardinalidade de um subconjunto Y de B tal que todo $x \in A$ está relacionado pela E com pelo menos um $y \in Y$, i.e.,

$$||o|| := \min\{|Y| : (Y \subseteq B) \wedge (\forall x \in A\, \exists y \in Y\, [xEy])\}$$

Dado X conjunto e $\mathcal{I}$ um ideal sobre X, nessa nova linguagem os invariantes cardinais são dados por:

(1) $\mathrm{add}(\mathcal{I}) = ||(\mathcal{I}, \mathcal{I} \not\supseteq)||$;

(2) $\mathrm{non}(\mathcal{I}) = ||(\mathcal{I}, X, \not\ni)||$;

(3) $\mathrm{cov}(\mathcal{I}) = ||(X, \mathcal{I}, \in)||$;

(4) $\mathrm{cof}(\mathcal{I}) = ||(\mathcal{I}, \mathcal{I}, \subseteq)||$.

As duas últimas igualdades seguem diretamente da definição dos invariantes cardinais envolvidos. Vamos justificar os itens (1) e (2), respectivamente.

[5] Ver definição em [P89]
[6] Vide [P89]

(1) **Demonstração:** Dado $\mathcal{A}$ uma família de elementos de $\mathcal{I}$. O conjunto $\bigcup \mathcal{A}$ não pertence ao ideal $\mathcal{I}$ se, e somente se, dado $Y \in \mathcal{I}$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \nsubseteq Y$. Note que se existisse $Y \in \mathcal{I}$ tal que todo $A \in \mathcal{A}$ é subconjunto de Y, então $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{I}$. Reciprocamente, não pode ocorrer $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{I}$, pois teríamos a existência de um conjunto $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \nsubseteq \bigcup \mathcal{A}$.

(2) **Demonstração:** Seja $Y \subseteq X$. O conjunto Y pertence ao ideal $\mathcal{I}$ se, e somente se, dado $I \in \mathcal{I}$, existe $b \in Y$ tal que $b \notin I$. Primeiramente, se existisse $I \in \mathcal{I}$, tal que todo $b \in Y$ é também um elemento de I, teríamos $Y \subseteq I$ e, portanto, o conjunto Y é um elemento de $\mathcal{I}$. Para a recíproca, suponha que $Y \in \mathcal{I}$. Então, por hipótese, existe $b \in Y$ tal que $b \notin Y$, o que é um absurdo.

Proposição 2.21. *Sejam o_1, o_2 objetos da categoria* $\mathrm{Dial}_2(Sets)^{op}$*. Se $o_1 \leq o_2$, então $||o_1|| \leq ||o_2||$.*

Demonstração:

Sendo $o_1 \leq o_2$, existe um morfismo de o_2 para o_1 dado pelo par (φ, ψ). Fixe um subconjunto Y de B_2 com Y testemunha da minimalidade de $||o_2||$. Sendo $|\psi[Y]| \leq |Y|$ e $\psi[Y] \subseteq B_1$, podemos afirmar que $\psi[Y]$ é tal que, para todo $a \in A$ existe $b \in \psi[Y]$ onde aE_1b. De fato, fixemos $a \in A_1$. Como Y é testemunha da minimalidade de $||o_2||$, então existe $b \in Y$ tal que $\phi(a)E_2b$ implica que $\psi(b) \in \psi[Y]$. Concluímos disso que se $o_1 \leq o_2$ então sempre vale que $||o_1|| \leq ||o_2||$. ∎

Seja um objeto $o = (A, B, E)$. Apresentamos o dual de o como sendo o objeto definido por $o^* := (B, A, E^*)$, onde $(x, y) \in E^*$ se, e somente se, $(y, x) \notin E$.

Não é difícil ver que os objetos cujas normas são os invariantes cardinais $\mathrm{cof}(\mathcal{I})$ e $\mathrm{non}(\mathcal{I})$, também são objetos duais dos objetos cujas normas são $\mathrm{add}(\mathcal{I})$ e $\mathrm{cov}(\mathcal{I})$, respectivamente.

Fato 2.22. *Se o par (φ, ψ) é um morfismo de o_2 para o_1, então (ψ, φ) é um morfismo de $o_1^* = (B_1, A_1, E_1^*)$ para $o_2^* = (B_2, A_2, E_2^*)$.*

Demonstração:

Como o par (φ, ψ) é um morfismo de o_2 para o_1 vale que:

$$\forall a \in A_1 \ \forall b \in B_2 \ \ \varphi(a)E_2b \Rightarrow aE_1\psi(b)$$

O fato segue de uma simples observação de que a contra-positiva da implicação acima garante que o par (ψ, φ) é um morfismo de o_1^* para o_2^*. Pois bem, vejamos isso:

aplicando a contra-positiva da implicação acima, vale que

$$(a, \psi(b)) \notin E_1 \Rightarrow (\varphi(a), b) \notin E_2$$

portanto,

$$(\psi(b), a) \notin E_1^{-1} \Rightarrow (b, \varphi(a)) \notin E_2^{-1}$$

Segue da definição de E_1^* e E_2^* que

$$\forall b \in B_2 \ \forall a \in A_1 \ \ (\psi(b), a) \in E_1^* \Rightarrow (b, \varphi(a)) \in E_2^*$$

e isso mostra o desejado, ou seja, (ψ, φ) é um morfismo de o_1^* para o_2^*. Abaixo o diagrama que representa (ψ, φ):

$$\begin{tikzcd} B_2 \arrow[d, "\psi"'] & E_2^* & A_2 \\ B_1 & E_1^* & A_1 \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

■

Como consequência direta desse fato, temos um importante resultado:

Corolário 2.23. *Se* $||o_1|| \leq ||o_2||$, *então* $||o_2^*|| \leq ||o_1^*||$.

2.3.1 Estudo de Caso II: O Ideal dos subconjuntos Limitados de uma Pré-ordem

Vimos na Subseção 1.8.2 que uma ordem $\mathbb{P}$, sem elemento máximo, com a propriedade que todo subconjunto finito de $\mathbb{P}$ possui limitante superior em $\mathbb{P}$, tem a seguinte caracterização para um subconjunto limitado de $\mathbb{P}$:
Para cada $x \in \mathbb{P}$ definimos $C_x := \{y \in \mathbb{P} : y \leq x\}$.Dado $A \subseteq \mathbb{P}$:

"O subconjunto A é limitado superiormente se, e somente se, existe $x \in \mathbb{P}$, tal que $A \subseteq C_x$."

Também vimos que a família $\mathcal{I}_L$ dos subconjuntos limitados de $\mathbb{P}$ é um ideal sobre $\mathbb{P}$, onde a base que gera tal ideal é dada por $\mathcal{B} := \{C_x : x \in \mathbb{P}\}$. Para essa ordem $\mathbb{P}$ definida acima, ficou demonstrado na Subseção 1.8.2 a validade das seguintes igualdades:

$$\mathrm{add}(\mathcal{I}_L) = \mathfrak{b}(\mathbb{P})$$

$$\mathrm{cov}(\mathcal{I}_L) = \mathfrak{d}(\mathbb{P})$$

$$\mathrm{non}(\mathcal{I}_L) = \mathfrak{b}(\mathbb{P})$$

$$\mathrm{cof}(\mathcal{I}_L) = \mathfrak{d}(\mathbb{P})$$

Para demonstrarmos essas igualdades fizemos uso de vários argumentos envolvendo a estrutura da pré-ordem $\mathbb{P}$, além da minimalidade dos invariantes cardinais citados. Agora, iremos apresentar uma segunda prova para tais igualdades fazendo uso da linguagem de morfismos, i.e., vamos exibir morfismos que demonstram essas igualdades. Para isso, sempre faremos uso da Proposição 2.21. Para o segue lembramos que $\mathcal{B} := \{C_y : y \in \mathbb{P}\}$ é base do ideal $\mathcal{I}_L$, logo para um dado $C \in \mathcal{I}_L$, existe $y_c \in \mathbb{P}$ tal que $C \subseteq C_{y_c}$.

Proposição 2.24. $\mathrm{cov}(\mathcal{I}_L) = \mathfrak{d}(\mathbb{P})$.

Demonstração:

• $\mathrm{cov}(\mathcal{I}_L) \leq \mathfrak{d}(\mathbb{P})$: Defina

$$\varphi : x \in \mathbb{P} \mapsto x \in \mathbb{P}$$

$$\psi : y \in \mathbb{P} \mapsto C_y \in \mathcal{I}_L$$

Dados $x, y \in \mathbb{P}$. Se vale $\varphi(x) \leq y$, por definição de φ, temos $x \leq y$, portanto, $x \in C_y$, ou seja, $x \in \psi(y)$. Assim, o par (φ, ψ) é um morfismo do objeto $(\mathbb{P}, \mathbb{P}, \leq)$ para $(\mathbb{P}, \mathcal{I}_L, \in)$, então de posse da Proposição 2.21, segue que $\mathrm{cov}(\mathcal{I}_L) \leq \mathfrak{d}(\mathbb{P})$.

• $\mathfrak{d}(\mathbb{P}) \leq \mathrm{cov}(\mathcal{I}_L)$: Defina

$$\varphi : x \in \mathbb{P} \mapsto x \in \mathbb{P}$$

$$\psi : C \in \mathcal{I}_L \mapsto y_c \in \mathbb{P}$$

onde y_c é tal que $C \subseteq C_{y_c}$.

Dados $x \in \mathbb{P}$ e $C \in \mathcal{I}_L$. Se vale $\varphi(x) \in C$, por definição de φ e de y_c, temos $\varphi(x) := x \in C_{y_c}$, portanto, $x \leq y_c$, ou seja, $x \leq \psi(C)$. Assim, o par (φ, ψ) é um morfismo do objeto $(\mathbb{P}, \mathcal{I}_L, \in)$ para $(\mathbb{P}, \mathbb{P}, \leq)$, então pela Proposição 2.21, segue que $\mathfrak{d}(\mathbb{P}) \leq \mathrm{cov}(\mathcal{I}_L)$.

Então fica demonstrada a igualdade $\mathrm{cov}(\mathcal{I}_L) = \mathfrak{d}(\mathbb{P})$.

■

Pelo Corolário 2.23, obtemos a seguinte proposição, que é a igualdade dual:

Proposição 2.25. $\mathrm{non}(\mathcal{I}_L) = \mathfrak{b}(\mathbb{P})$.

Agora demonstremos a seguinte proposição:

Proposição 2.26. $\text{cof}(\mathcal{I}_L) = \mathfrak{d}(\mathbb{P})$.

Demonstração:

• $\text{cof}(\mathcal{I}_L) \leq \mathfrak{d}(\mathbb{P})$.
Definimos

$$\varphi : C \in \mathcal{I}_L \mapsto x_c \in \mathbb{P}$$

$$\psi : y \in \mathbb{P} \mapsto C_y \in \mathcal{I}_L$$

onde x_c é tal que $C \subseteq C_{x_c}$.

Dados $C \in \mathcal{I}_L$ e $y \in \mathbb{P}$. Se vale $\varphi(C) \leq y$, por definição de φ, temos $x_c \leq y$, portanto, $C \subseteq C_y$, ou seja, $C \subseteq \psi(y)$. Assim, o par (φ, ψ) é um morfismo do objeto $(\mathbb{P}, \mathbb{P}, \leq)$ para $(\mathcal{I}_L, \mathcal{I}_L, \subseteq)$, então de posse da Proposição 2.21, segue que $\text{cof}(\mathcal{I}_L) \leq \mathfrak{d}(\mathbb{P})$.

• $\mathfrak{d}(\mathbb{P}) \leq \text{cof}(\mathcal{I}_L)$: Defina

$$\varphi : x \in \mathbb{P} \mapsto C_x \in \mathcal{I}_L$$

$$\psi : C \in \mathcal{I}_L \mapsto y_c \in \mathbb{P}$$

onde y_c é tal que $C \subseteq C_{y_c}$.

Dados $x \in \mathbb{P}$ e $C \in \mathcal{I}_L$. Se vale $\varphi(x) \subseteq C$, por definição de φ e de y_c, temos $\varphi(x) := C_x \subseteq C_{y_c}$, portanto, $x \leq y_c$, ou seja, $x \leq \psi(C)$. Assim, o par (φ, ψ) é um morfismo entre do objeto $(\mathcal{I}_L, \mathcal{I}_L, \subseteq)$ para $(\mathbb{P}, \mathbb{P}, \leq)$ e, então de posse da Proposição 2.21, segue que $\mathfrak{d}(\mathbb{P}) \leq \text{cof}(\mathcal{I}_L)$.

Daí fica demonstrada a igualdade $\text{cof}(\mathcal{I}_L) = \mathfrak{d}(\mathbb{P})$.

■

Pelo Corolário 2.23, obtemos a seguinte proposição, que é a igualdade dual:

Proposição 2.27. $\text{add}(\mathcal{I}_L) = \mathfrak{b}(\mathbb{P})$.

■

Vale destacar que de posse da linguagem de morfismos, o que acabamos de fazer segue de maneira muito natural. O que na verdade, acaba sendo uma sistematização (ou síntese) dos argumentos usados para demonstrarmos tais igualdades apresentadas, inicialmente, na Subseção 1.8.2.

2.3.2 Morfismos no Diagrama de Cichoń

Na linguagem de objetos, o diagrama de Cichoń é apresentado da seguinte forma

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R},\mathcal{L},\in) \arrow[r] & (\mathcal{M},\mathbb{R},\not\ni) \arrow[r] & (\mathcal{M},\mathcal{M},\subseteq) \arrow[r] & (\mathcal{L},\mathcal{L},\subseteq) \\
 & ({}^{\omega}\omega,{}^{\omega}\omega,\not\geq^{*}) \arrow[u] \arrow[r] & ({}^{\omega}\omega,{}^{\omega}\omega,\leq^{*}) \arrow[u] & \\
(\mathcal{L},\mathcal{L},\not\supseteq) \arrow[uu] \arrow[r] & (\mathcal{M},\mathcal{M},\not\supseteq) \arrow[u] \arrow[r] & (\mathbb{R},\mathcal{M},\in) \arrow[u] \arrow[r] & (\mathcal{L},\mathbb{R},\not\ni) \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

Observação 2.28. Todas as desigualdades entre os objetos que aparecem no diagrama de Cichón podem ser “resumidas” em apenas 5 desigualdades, a saber :
$(i)({}^{\omega}\omega,{}^{\omega}\omega,\not\geq^{*}) \leq (\mathcal{M},\mathbb{R},\not\ni)$;
$(ii)(\mathcal{M},\mathcal{M},\subseteq) \leq (\mathcal{L},\mathcal{L},\subseteq)$;
$(iii)(\mathcal{M},\mathcal{M},\not\supseteq) \leq ({}^{\omega}\omega,{}^{\omega}\omega,\not\geq^{*})$;
$(iv)(\mathbb{R},\mathcal{L},\in) \leq (\mathcal{M},\mathbb{R},\not\ni)$;
$(v)(\mathcal{L},\mathcal{L},\not\supseteq) \leq (\mathbb{R},\mathcal{L},\in)$.

O que justifica a palavra “resumida” que usamos acima é que podemos estudar somente as desigualdades citadas devido ao Corolário 2.23, pois as demais desigualdades do diagrama de Cichoń são justamente as desigualdades duais dessa lista de 5 desigualdades. Então a partir de agora provar uma desigualdade entre os nossos invariantes cardinais será traduzido em exibir um morfismo que testemunha sua validade.

Já mostramos que: $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{L})$ e $\mathrm{cov}(\mathcal{L}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{M})$ na seção anterior. Utilizamos de vários argumentos tomando como ponto de partida a Proposição 2.9(a saber, Teoremas 2.10 e 2.11). É bastante interessante que usando a linguagem de morfismos, temos uma demonstração alternativa de que usando 2.9 sozinho, já se prova uma das desigualdades: $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{L})$ e $\mathrm{cov}(\mathcal{L}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{M})$. O teorema a seguir prova a desigualdade: $\mathrm{cov}(\mathcal{L}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{M})$. Segue de 2.23, a desigualdade dual, i.e, $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{L})$.

Teorema 2.29. $(\mathbb{R},\mathcal{L},\in) \leq (\mathcal{M},\mathbb{R},\not\ni)$.

Demonstração:

Tomamos os conjunto A, B como no Teorema 2.7. Definimos:

$$\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto x + B \in \mathcal{M}$$

$$\psi : y \in \mathbb{R} \mapsto y - A \in \mathcal{L}.$$

Já vimos que translação e simetria de um conjuntos magro e de um conjunto de medida nula ainda é um conjunto magro e um conjunto de medida nula, respectivamente.

Com isso, as funções φ e ψ estão bem definidas. Agora, dados $x, y \in \mathbb{R}$, se supusermos $y \notin \varphi(x)$, podemos concluir pelo Teorema 2.9, que $x \in \psi(y)$. Então obtemos que o par (φ, ψ) é um morfismo que justifica o resultado desejado. ■

Justificamos a desigualdade $\operatorname{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{d}$ por argumentos puramente topológicos no fato 2.3. Poderíamos nos perguntar: se existe uma demonstração por morfismos? A resposta é sim. Sendo mais fácil provar a desigualdade dual, abaixo daremos a demonstração disso. Vamos demonstrar o teorema que, essencialmente, se traduz na desigualdade: $\mathfrak{b} \leq \operatorname{non}(\mathcal{M})$. Para o próximo teorema, lembramos que: Dado $f \in {}^{\omega}\omega$ o conjunto $C_f := \{g \in {}^{\omega}\omega : g \leq^* f\}$ é um σ-compacto no subconjunto dos irracionais, logo, é um subconjunto magro em ${}^{\omega}\omega$.

Teorema 2.30. $({}^{\omega}\omega, {}^{\omega}\omega, {}^{*}\not\geq) \leq (\mathcal{M}, {}^{\omega}\omega, \not\ni)$.

Demonstração:

Defina $\varphi : f \in {}^{\omega}\omega \mapsto C_f \in \mathcal{M}$ e ponha $\psi : g \in {}^{\omega}\omega \mapsto g \in {}^{\omega}\omega$. Dados $f, g \in {}^{\omega}\omega$, suponhamos que $g \notin \varphi(f) := C_f$. Então $g \not\leq^* f$ e, por definição, $\psi(g) = g \not\leq^* f$. Assim, temos que $g \notin \varphi(f)$ implica que $\psi(g) \not\leq^* f$. Logo, o par (φ, ψ) é o morfismo que testemunha o desejado. ■

O próximo teorema tem como consequência a desigualdade: $\mathfrak{d} \leq \operatorname{cof}(\mathcal{M})$.

Teorema 2.31. $({}^{\omega}\omega, {}^{\omega}\omega, \leq^*) \leq (\mathcal{M}, \mathcal{M}, \subseteq)$.

Demonstração:

Dada $f \in {}^{\omega}\omega$ definimos a função $f' \in {}^{\omega}\omega$ pondo $f'(n) := \max\{f(i) : i \leq n\} + 1$. Considere

$$\varphi : {}^{\omega}\omega \to \mathcal{M}$$

$$f \mapsto \varphi(f) := \{g \in {}^{\omega}\omega : g \leq^* f'\}$$

Como $\varphi(f) := \{g \in {}^{\omega}\omega : g \leq^* f'\}$ é σ-compacto nos irracionais, então é um conjunto magro. Para cada conjunto magro $M \in \mathcal{M}$, existe uma família $\{F_{M,n} : n \in \omega\}$ de conjuntos fechados de interior vazio tal que $M \subseteq \bigcup_{n<\omega} F_{M,n}$. Vamos definir as sequências $\langle s_n : n \in \omega \rangle$, $\langle t_n : n \in \omega \rangle$ e $\langle w_n : n \in \omega \rangle$ da seguinte forma:

Considere fixada uma enumeração de ${}^{<\omega}\omega$. Fazemos $s_0 = t_0 = w_0 = \langle 0 \rangle$ e vamos supor construídos $t_0, ..., t_n$. Definimos $w_n := t_0 ^\frown t_1 ^\frown ... ^\frown t_n$ e vamos por s_{n+1} sendo a sequência s de menor índice satisfazendo:

Para todo $i \in \mathrm{dom}(w_n)$ e para todo $j \in \mathrm{dom}(w_n)$, se dado $p \in {}^{i+1}j+1$, então $[p^\frown s] \cap F_{M,l} = \emptyset$, para todo $l \leq n+1$.

Considere $d_{n+1} := \max\{\mathrm{dom}(w_n{}^\frown s_{n+1}), \max(\mathrm{im}(s_{n+1}))\}$ e seja $t_{n+1} := s_{n+1}{}^\frown\langle 000..00\rangle$, onde a quantidade de termos nulos é $d_{n+1} - \mathrm{dom}(w_n{}^\frown s_{n+1})$. Finalmente,

$$w_{n+1} = t_0{}^\frown t_1{}^\frown ..{}^\frown t_n{}^\frown t_{n+1}{}^7.$$

Seja agora $\psi : \mathcal{M} \to {}^\omega\omega$ pondo $\psi(M)(n) := \max\{w_n(i) : i \in \mathrm{dom}(w_n)\}$.

Afirmação(*): Se $\varphi(f) \subseteq M$, então $f \leq^* \psi(M)$.

Primeiro, para um magro M fixado, vamos observar um fato que decorre da contrução das sequências acima, note que, se $h \in {}^\omega\omega$ e $m \in \omega$ são tais que:

$$\mathrm{im}(h \restriction_{\mathrm{dom}(w_m)}) \subseteq \mathrm{dom}(w_m)$$

e também

$$h \restriction_{\mathrm{dom}(w_{m+1})\setminus\mathrm{dom}(w_m)} = w_{n+1} \restriction_{\mathrm{dom}(w_{m+1})\setminus\mathrm{dom}(w_m)}$$

Sendo a imagem de $h \restriction_{\mathrm{dom}(w_m)}$ um subconjunto de $\mathrm{dom}(w_m)$, então $h \restriction_{\mathrm{dom}(w_m)}$ é uma das p's nas condições em que $p \in {}^{i+1}j+1$, e, como

$$h \restriction_{\mathrm{dom}(w_{m+1})\setminus\mathrm{dom}(w_m)} = w_{m+1} \restriction_{\mathrm{dom}(w_{m+1})\setminus\mathrm{dom}(w_m)}$$

coincide com w_{m+1} e, por construção, como

$$h \restriction_{\mathrm{dom}(w_{m+1})} = h \restriction_{\mathrm{dom}\, w_m}{}^\frown t_{m+1},$$

então

$$[h \restriction_{\mathrm{dom}(w_{m+1})} \cap F_{M,l}] = \emptyset$$

Desse modo, podemos concluir que $h \notin F_{M,0}, F_{M,1}, ..., F_{M,m+1}$. Diante disso, o conjunto

$$\{n < \omega : \mathrm{im}(h \restriction_{\mathrm{dom}(w_n)} \subseteq \mathrm{dom}(w_n)) \,\mathrm{e}\, h \restriction_{\mathrm{dom}(w_{n+1})\setminus\mathrm{dom}(w_n)} = w_{n+1} \restriction_{\mathrm{dom}(w_{n+1})\setminus\mathrm{dom}(w_n)}\} \quad (2.1)$$

é finito, pois caso contrário, $h \notin F_{M,n}$, para todo $n \in \omega$.

Tendo em vista do que foi observado acima, vamos dar a prova da contrapositiva da nossa afirmação (*). Então suponha que $f \not\leq^* \psi(M)$. Daí, por definição, temos que o conjunto $A := \{n < \omega : \psi(M)(n) < f(n)\}$ é infinito. Defina $g : \omega \to \omega$ uma função tal

[7]Note que, geometricamente, $\mathrm{dom}(w_{n+1})$ é o lado do menor quadrado que contém o gráfico de w_{n+1}.

que

$$g(n) := \begin{cases} w_n(m) & \text{se}\,, n \in A\,, \text{e}\,, n := \min\{j : m \in \text{dom}(w_j)\} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

ou seja, se $A := \{x_n : n \in \omega\}$, g é a função que coincide com w_{x_n} nos pontos de $\text{dom}(w_{x_n}) \setminus \text{dom}(w_{n-1})$, sendo identicamente nula nos demais pontos. Logo, por (2.1), temos que $g \notin M$. Se mostrarmos que $g \in \varphi(f)$, teremos provado que $\varphi(f) \nsubseteq M$. Vamos mostrar mais: $g \leq f'$. Seja $i \in \omega$, caso $g(i) = 0$, acabou. Se $g(i) = w_n(i)$ para $n \in A$ e $i \in \text{dom}(w_n)$, pelo fato 1.23, $n \leq i$ então segue da definição de f' que $f(n) \leq f'(i)$. Agora, como $n \in A$, temos $\psi(M)(n) < f(n)$. Portanto, valem as desigualdades

$$g(i) = w_n(i) \leq \psi(M)(n) < f(n) \leq f'(i)$$

. ■

No Corolário 2.14, vimos que $\min\{\mathfrak{b}, \text{cov}(\mathcal{M})\} \leq \text{add}(\mathcal{M})$. Por outro lado, já é conhecido que $\text{add}(\mathcal{M}) \leq \text{cov}(\mathcal{M})$, e o teorema anterior, por dualidade, é uma prova de $\text{add}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{b}$, então obtemos o seguinte corolário:

Corolário 2.32. $\text{add}(\mathcal{M}) = \min\{\mathfrak{b}, \text{cov}(\mathcal{M})\}$.

■

Por dualidade, também deduzimos:

Corolário 2.33. $\text{cof}(\mathcal{M}) = \max\{\mathfrak{d}, \text{non}(\mathcal{M})\}$.

■

Encerramos essa seção destacando que a desigualdade mais díficil de ser provada é $\text{add}(\mathcal{L}) \leq \text{add}(\mathcal{M})$, sendo que por dualidade, segue a desigualdade $\text{cof}(\mathcal{M}) \leq \text{cof}(\mathcal{L})$, cuja demonstração é atribuída a Bartoszynski em [BaJ]. Do mais, todas as outras desigualdades do diagrama de Cichón foram provadas nesse capítulo.

Capítulo 3

Aplicações em Topologia e Análise

Começamos esse capítulo discutindo sobre dois subconjuntos especiais da reta, chamados de conjuntos Luzin e conjuntos de Sierpiński. Tais conjuntos são úteis em várias questões da Análise e Teoria da medida. Também, têm um número bastante considerável de aplicações em Teoria dos conjuntos (principalmente, na construção de modelos de **ZFC**).

Nosso principal objetivo para esse começo de capítulo é demonstrar que a existência de Conjuntos de Luzin e Sierpiński não podem ser estabelecidas com a teoria **ZFC**. Destacamos que tanto o Axioma de Martin, quanto a Hipótese do Continuum, tem ampla relação com o estudo dos conjunto de Luzin e Sierpiński. Nessa primeira parte do capítulo, veremos que, mais geralmente, hipóteses sobre os invariantes cardinais do diagrama de Cichoń podem ser utilizadas em várias situações, nos mesmos contextos.

3.1 Conjuntos de Luzin e Sierpiński

Os resultados dessa seção são clássicos e fazem parte do *Folklore* da área. Começamos essa seção definindo conjuntos de Luzin e Sierpiński, e posteriormente, mostraremos que **ZFC** não prova e nem desprova a existência de tais conjuntos.

- $X \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto de *Luzin*, se X é não-enumerável, porém sua intersecção com qualquer subconjunto magro de $\mathbb{R}$ é enumerável.

O objeto dual –em um certo sentido– dos conjuntos de Luzin, são definidos abaixo:

- $Y \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto de *Sierpiński*, se Y é não-enumerável, porém sua intersecção com qualquer Lebesgue nulo é enumerável.

Vejamos que $X \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto de Luzin é equivale a X ser não-enumerável e todo subconjunto de X não-enumerável não é magro, em particular, o próprio X não é magro. Também existe um fato análogo para os conjuntos de Sierpiński, ou seja, todo subconjunto não-enumerável de X não pode ser nulo, e também, vale que o próprio X não é nulo.

Se X é um conjunto de Luzin e X' um subconjunto de X, então X' também é Luzin. Para ver isso, tome um conjunto magro $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $X' \cap A$ é não vazio. Como X é Luzin, $|X' \cap A| \leq |X \cap A| \leq \omega$, então X' é um conjunto de Luzin. No caso que X é Sierpiński, X' é Sierpiński. A seguir apresentamos uma prova de que a não existência de conjuntos de Luzin é consistente.

Teorema 3.1. *Sob* **MA** + $\neg$**CH** *não existem conjuntos de Luzin.*

Demonstração:

De fato, tomando $X \subseteq \mathbb{R}$, se X é enumerável, então X não é Luzin. Se X for não-enumerável, já sabemos que sob o Axioma de Martin $\text{add}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$, portanto, $\text{non}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$. Como não vale **CH**, temos que $\aleph_1 < \text{non}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$. Disso concluímos que qualquer conjunto de tamanho $\aleph_1$ é magro, logo nenhum conjunto de cardinalidade $\aleph_1$ pode ser Luzin. ■

Analogamente, sob **MA** + $\neg$**CH** não existem conjuntos de Sierpiński.

O próximo teorema, mostra que é consistente a existência de conjuntos de Luzin.

Teorema 3.2. *Se vale* **CH***, então existe conjunto de Luzin.*

Demonstração:

Denote por $\mathcal{F}$ a família de todos os conjuntos fechado de interior vazio de $\mathbb{R}$. Como o conjunto unitário de um número real é um conjunto fechado de interior vazio, tem que $\{\{x\} : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{F}$. Como $\mathbb{R}$ tem base enumerável, é fácil ver que $|\mathcal{F}| \leq 2^{\aleph_0}$. Sob **CH**, temos que $|\mathcal{F}| = \mathfrak{c} = \aleph_1$. Portanto, tome uma enumeração de $\mathcal{F}$ dada por $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Como F_0 tem interior vazio, logo F_0 não é igual a reta. Desse modo, existe $x_0 \notin F_0$. Agora, $F_1 \cup F_0 \cup \{x_0\}$ é um fechado de interior vazio, então definimos $x_1 \notin F_1 \cup F_0 \cup \{x_0\}$. Assuma que a família $\{x_\alpha : \alpha < \xi\}$ já está construída para $\xi < \omega_1$. Sendo $\xi < \omega$, note que

$$\bigcup_{\alpha \leq \xi} F_\alpha \cup \{x_\alpha : \alpha < \xi\}$$

é um conjunto magro, logo não pode ser a igual a reta. Assim, é possível tomar

$$x_\xi \notin \bigcup_{\alpha \leq \xi} F_\alpha \cup \{x_\alpha : \alpha < \xi\}.$$

Seja

$$X := \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

Note que por construção a indexação é bijetora, então $|X| = \aleph_1$. Portanto, X é não enumerável e intersecta qualquer fechado de interior vazio em um conjunto enumerável, pois fixado F_β, temos $X \cap F_\beta \subseteq \{x_\alpha : \alpha < \beta\}$ e sendo $\beta < \omega_1$, temos o desejado, i.e., o conjunto X é um conjunto de Luzin. ■

Com as adaptações óbvias do teorema anterior, também é possível demonstrar que **CH** implica existência de conjuntos de Sierpiński.

Abaixo apresentamos uma prova alternativa para a existência de conjuntos de Luzin e Sierpiński enfraquecendo **CH**. Consideramos o próximo teorema em um contexto geral de invariantes cardinais definidos a partir de um ideal $\mathcal{I}$ sobre um conjunto X dado.

Teorema 3.3. *Seja $\mathcal{I}$ um ideal não-trivial sobre um conjunto X. Suponhamos que $\mathrm{cov}(\mathcal{I}) = \mathrm{cof}(\mathcal{I}) = \kappa$, então existe um conjunto $B \subseteq X$ tal que $|B| = \kappa$ e para todo $I \in \mathcal{I}, |B \cap I| < \kappa$.*

Demonstração:

Considere $\mathcal{A} := \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma base do ideal $\mathcal{I}$ testemunha da minimalidade de $\mathrm{cof}(\mathcal{I})$. Como $\mathrm{cov}(\mathcal{I}) = \kappa$, então cada conjunto $\bigcup_{\xi<\beta} A_\xi$, com $\beta < \kappa$, não é igual a X. Logo, podemos tomar

$$x_\beta \in X \setminus \bigcup_{\xi<\beta} A_\xi,$$

segue disso que $x_\beta \neq x_\xi$, para todo $\xi < \beta$. Defina o conjunto $B := \{x_\beta : \beta < \kappa\}$. Note que por construção B tem cardinalidade κ.

Tome $I \in \mathcal{I}$. Como $\mathcal{A}$ é uma base do ideal $\mathcal{I}$, existe mínimo $\beta < \kappa$ tal que $I \subseteq A_\beta$. Deduzimos que $B \cap I \subseteq \{x_\xi : \xi < \beta\}$, e sendo $\beta < \kappa$, podemos concluir que $|B \cap I| < \kappa$.

■

Se assumimos $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathrm{cof}(\mathcal{M}) = \aleph_1$, o teorema anterior garante a existência de conjuntos de Luzin. Logo, o Teorema 3.3 tem o Teorema 3.2 como corolário. Analogamente, assumindo $\mathrm{cov}(\mathcal{L}) = \mathrm{cof}(\mathcal{L}) = \aleph_1$, temos garantida a existência de conjuntos de Sierpiński. No artigo [Bla10], encontra-se o forcing usado para demonstração da consistência das seguintes igualdades: $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathrm{cof}(\mathcal{M}) = \aleph_1$ e $\mathrm{cov}(\mathcal{L}) = \mathrm{cof}(\mathcal{L}) = \aleph_1$. Diante disso, podemos declarar que é consistente a existência de conjuntos de Luzin e Sierpiński.

Proposição 3.4. *Se existe $X \subseteq \mathbb{R}$ Luzin, então* $\text{non}(\mathcal{M}) = \aleph_1$.

Demonstração:

Como $X \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto de Luzin, tome $X' \subseteq X$ de tamanho $\aleph_1$. Então X' é um conjunto de Luzin. Logo, X' não é um conjunto magro. Assim, $\text{non}(\mathcal{M}) = \aleph_1$. ■

Para vários resultados envolvendo a noção de conjuntos de Luzin, sempre haverá um resultado para a noção de conjuntos de Sierpiński, e vice-versa. Também podemos provar que se existe um conjunto de Sierpiński, $\text{non}(\mathcal{L}) = \aleph_1$.

Proposição 3.5. *Se X é conjunto de Luzin, então X é nulo. No caso de X ser conjunto de Sierpiński, temos que X é magro.*

Demonstração:

Sabemos que $\mathbb{R}$ pode ser escrito como união disjunta, digamos, $R = A \cup B$, onde A é nulo e B é magro . Temos que $X = (X \cap A) \cup (X \cap B)$ e como X é Luzin, vale que $|X \cap B| \leq \omega$ e portanto, $X \cap B$ tem medida nula. Sendo $X \cap A \subseteq A$, então $m(X \cap A) = 0$. Podemos conluir que $m(X) = 0$. No caso que X é um conjunto de Sierpiński, a demonstração é análoga. ■

Teorema 3.6. *Se existe um conjunto de Luzin, então todo conjunto de Sierpiński deve ter cardinalidade $\aleph_1$.*

Demonstração:

Primeiro, lembre que $\text{cov}(\mathcal{L}) \leq \text{non}(\mathcal{M})$. Se existe X conjunto de Luzin, pela proposição 3.4 temos $\text{non}(\mathcal{M}) = \aleph_1$. Portanto, $\text{cov}(\mathcal{L}) = \aleph_1$, ou seja, o menor tamanho de uma cobertura de $\mathbb{R}$ por conjuntos nulos é $\aleph_1$. Agora, considere uma cobertura de $\mathbb{R}$ dada pela família de conjuntos de medida nula $\{N_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$. Então ficamos com o seguinte: dado $Y \subseteq \mathbb{R}$, temos $|Y| = |\bigcup_{\alpha<\aleph_1}(N_\alpha \cap Y)| \leq \aleph_1$. Supondo $Y \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto de Sierpiński, isso acarreta que Y deve ser necessáriamente não enumerável, ou seja, $\aleph_1 \leq |Y|$. Então ficamos com $\aleph_1 \leq |Y| = |\bigcup\limits_{\alpha<\aleph_1}(N_\alpha \cap Y)| \leq \aleph_1$. Portanto, Y tem cardinalidade $\aleph_1$. ■

De maneira análoga podemos demonstrar que se existe um conjunto de Sierpiński, então todo conjunto de Luzin tem cardinalidade $\aleph_1$, para isso basta mostrar que $\mathbb{R}$ pode ser coberto por uma família de magros de tamanho $\aleph_1$. De todo modo concluímos que se existem conjuntos de Luzin e Sierpiński, ambos devem ter cardinalidade igual a $\aleph_1$.

Definição 3.7. Diz-se que um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é Luzin generalizado (Sierpiński generalizado) se $|X| = \mathfrak{c}$ e sua intersecção com qualquer magro (nulo) é menor que $\mathfrak{c}$.

É fácil ver que essas noções generalizadas só fazem sentindo em modelos de $\neg$**CH**. Pois para modelos com **CH** a noção de conjunto de Luzin Generalizado (ou Sierpiński Generalizado) acaba coincidindo com a noção de conjunto de Luzin (Sierpiński).

Teorema 3.8. *Sob* **MA** $+ \neg$**CH** *existem conjuntos de Sierpiński generalizados.*

Demonstração:

Sob **MA** $+ \neg$**CH**, temos $\mathrm{cov}(\mathcal{L}) = \mathrm{cof}(\mathcal{L}) = \mathfrak{c}$. Aplicando o Teorema 3.3 para $\kappa = \mathfrak{c}$, temos garantida a existência de conjuntos de Sierpiński generalizados. ■

Novamente, no artigo [Bla10] o autor apresenta o forcing que também prova a consistência de $\mathrm{cov}(\mathcal{L}) = \mathrm{cof}(\mathcal{L}) = \mathfrak{c}$. De posse disso, temos outra forma de justificar que a existência de conjuntos de Sierpiński generalizados é consistente. Obviamente, sob **MA** $+ \neg$**CH** também existem conjuntos de Luzin generalizados, adaptando a demonstração acima.

3.2 Quando $\mathbb{R}$ é a união crescente de nulos ?

Estudamos o problema no título desta seção e mostraremos que é equivalente ao fato de que cada conjunto de reais é uma união crescente de conjuntos mensuráveis. Os resultados apresentados aqui podem ser vistos em [GHV]. Obviamente, sob **CH**, o conjunto $\mathbb{R}$ pode ser escrito como $\mathbb{R} = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, fazendo $N_\alpha := \{x_\xi : \xi \leq \alpha\}$, obtemos uma sequência crescente de subconjuntos enumeráveis e nulos.

Teorema 3.9. *Os seguintes são equivalentes:*

(i) *Todo subconjunto* $X \subseteq \mathbb{R}$ *pode ser escrito como união crescente de conjuntos mensuráveis;*

(ii) *Todo subconjunto* $X \subseteq \mathbb{R}$ *pode ser escrito como união crescente de nulos;*

(iii) $\mathbb{R}$ *pode ser escrito como união crescente de conjuntos nulos.*

Demonstração:

A equivalência $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ é imediata, e o item $(iii) \Rightarrow (i)$ é claro. Temos que mostrar apenas que $(i) \Rightarrow (iii)$. Pois bem, sabemos que existe conjunto de Vitali[1] X que não é mensurável, com as propriedades: $m_*(X) = 0$ e $X + \mathbb{Q} = \mathbb{R}$. Agora, por hipótese, existe uma família $\{U_\xi : \xi < \kappa\}$ de conjuntos mensuráveis com a condição de que: Para

[1] ver em [Roy88].

todo $\xi, \zeta < \kappa$, onde $\xi < \zeta$ implica que $U_\xi \subseteq U_\zeta$ e tal que $X = \bigcup_{\alpha<\kappa} U_\alpha$. Como $m_*(X) = 0$ e $U_\alpha \subseteq X$, então U_α é um conjunto de medida nula[2], para todo $\alpha < \kappa$. Então o conjunto $N_\alpha := U_\alpha + \mathbb{Q}$ é nulo, para $\alpha < \kappa$ e, mais ainda, obtemos uma sequência crescente $(N_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ de conjuntos nulos tal que $\mathbb{R} = \bigcup_{\alpha<\kappa} U_\alpha$, como desejávamos. ■

Definição 3.10. Diz-se que um subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é $\mathcal{L}$-*inacessível* se $X \neq \bigcup_{\alpha<\kappa} N_\alpha$, onde $\{N_\alpha : \alpha < \kappa\}$ é uma família crescentes de subconjuntos nulos contidos em X, i.e, X é $\mathcal{L}$-inacessível se não pode ser escrito como uma união crescente de conjuntos de medida nula contidos em si próprio.

Proposição 3.11. *Se* $\mathrm{cov}(\mathcal{L}) = \mathrm{add}(\mathcal{L})$ *ou* $\mathrm{non}(\mathcal{L}) = \mathfrak{c}$, *então nenhum subconjunto* $X \subseteq \mathbb{R}$ *é* $\mathcal{L}$*-inacessível.*

Demonstração:

Se mostrarmos que $\mathbb{R}$ não é $\mathcal{L}$-inacessível, ou seja, que é possível escrever $\mathbb{R}$ como união crescente de conjuntos de medida nula, pelo teorema 3.9 segue que todo subconjunto X de $\mathbb{R}$ pode ser escrito como união crescente de conjuntos de medida nula. Seja $\kappa = \mathrm{cov}(\mathcal{L})$. Portanto, existe uma família $\{N_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathcal{L}$ tal que $\mathbb{R} = \bigcup\{N_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Óbvio que tal família não é necessariamente crescente. Por isso, definimos uma nova família formada pelos elementos $N'_\alpha = \bigcup_{\beta\leq\alpha} N_\beta$ para todo $\alpha < \kappa$. Como $\mathrm{add}(\mathcal{L}) = \kappa$, então N'_α é um conjunto de medida nula, para todo $\alpha < \kappa$. Claramente, a família $\{N'_\alpha : \alpha < \kappa\}$ é cobertura crescente de $\mathbb{R}$. Desse modo temos que a família $\{N'_\alpha : \alpha < \kappa\}$ testemunha que $\mathbb{R}$ não é $\mathcal{L}$-inacessível. Daí segue que todo subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é também $\mathcal{L}$-inacessível.

No caso em que $\mathrm{non}(\mathcal{L}) = \mathfrak{c}$, tomamos uma enumeração de $\mathbb{R}$ dada por $\{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Sendo assim, o conjunto $A_\alpha := \{x_\beta : \beta \leq \alpha\}$ é nulo, pois $\alpha < \mathrm{non}(\mathcal{L})$. Claramente, a família $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ é crescente e testemunha que $\mathbb{R}$ não é $\mathcal{L}$-inacessível.

■

Como corolário imediato disso, vem o seguinte teorema:

Teorema 3.12. **MA** $+ \neg$**CH** *ou* **CH** *implica que não existe subconjunto da reta que seja* $\mathcal{L}$*-inacessível.*

Temos então um exemplo de resultado válido tanto em modelos de **CH** como em modelos de **MA** $+ \neg$**CH**.

[2] O conjunto de Vitali tem medida interior nula, logo qualquer mensurável contido em X tem medida nula.

3.3 D-espaços e $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$

Nessa seção iremos apresentar resultados de [AJL]. Aqui também usamos técnicas de demonstrações presentes em [A09]. Para os seguintes resultados, estaremos assumindo a propriedade T_3+T_1. Definimos **ONA**(do inglês: *open neighbourhood assignment*) em um espaço topológico(X,τ) por uma função $\mathcal{O}: X \to \tau$ tal que, para todo $x \in X, x \in \mathcal{O}(x)$. Com um leve abuso de linguagem, diremos que o conjunto $N = \{\mathcal{O}(x) : x \in X\}$ é a ona de X. Para um subconjunto A de X que tal que $\bigcup\{\mathcal{O}(x) : x \in A\} = X$, diz-se que A é núcleo da ona $\mathcal{O}$. Dizemos que X é $D-$*espaço* se para toda ona $\mathcal{O}$ de X existe $D \subseteq X$ tal que $\bigcup\{\mathcal{O}(x) : x \in D\} = X$, com D sendo um subconjunto fechado e discreto. Se X é um espaço T_1 e compacto, obrigatoriamente, é um D-espaço, pois fixada uma ona $\{\mathcal{O}(x) : x \in X\}$ de X, existe um conjunto finito $F \subseteq X$ tal que $\bigcup\{\mathcal{O}(x) : x \in F\} = X$, por T_1, F é fechado e discreto, segue que X é D-espaço. O próximo resultado é citado em [G], iremos apresentar a sua demonstração.

Proposição 3.13. *Um espaço X Hausdorff que é σ-compacto, necessariamente é D-espaço.*

Demonstração:

Seja $\mathcal{O}$ uma ona sobre X e considere uma família de subespaços compactos de X dada por $\{K_n : n \in \omega\}$ tal que $X = \bigcup_{n\in\omega} K_n$. Sem perda de generalidade, assuma que $\{K_n : n \in \omega\}$ é uma família crescente que cobre X. Vamos argumentar indutivamente. Note que $C_0 := \{\mathcal{O}(x) : x \in K_0\}$ é uma família de abertos que cobre K_0, logo por compacidade, existe subfamília finita de C_0 que cobre K_0. Com isso, existem finitos pontos de K_0, digamos $\{x_0^0, x_0^1, ..., x_0^{n_0}\}$ que é núcleo finito de $\mathcal{O}$ com respeito a K_0. Denote

$$\langle x\rangle_0 := \langle x_0^0, x_0^1, ..., x_0^{n_0}\rangle,$$

então ficamos com o seguinte: $K_0 \subseteq \mathcal{O}[\langle x\rangle_0]$. Agora, considere a família de abertos

$$\{\mathcal{O}(x) : x \in K_1 \setminus \mathcal{O}[\langle x\rangle_0]\}.$$

Como K_1 é compacto e o espaço X é Hausdorff, temos que K_1 é fechado em X. Deduzimos disso que $K_1 \setminus \mathcal{O}[\langle x\rangle_0]$ é fechado em X, logo é fechado em K_1, então $K_1 \setminus \mathcal{O}[\langle x\rangle_0]$ também é compacto. Desse modo, existe $\langle x\rangle_1$, tal que $\mathcal{O}[\langle x\rangle_1]$ é uma família que cobre $K_1 \setminus \mathcal{O}[\langle x\rangle_0]$, daí

$$\mathcal{O}[\langle x\rangle_0{}^\frown\langle x\rangle_1]$$

cobre $K_0 \cup K_1 = K_1$[3]. Procedendo indutivamente, para $j > 1$ temos que

$$\{\mathcal{O}(x) : x \in K_j \setminus \mathcal{O}[\langle x\rangle_0{}^\frown\langle x\rangle_1{}^\frown\langle x\rangle_2 ...{}^\frown\langle x\rangle_{j-1}]\}$$

é uma família de abertos, e portanto contruímos

$$\langle x\rangle_j := \langle x_j^0, x_j^1, ..., x_j^{n_j}\rangle$$

tal que

$$\mathcal{O}[\langle x\rangle_0{}^\frown\langle x\rangle_1{}^\frown\langle x\rangle_2 ...{}^\frown\langle x\rangle_{j-1}{}^\frown\langle x\rangle_j]$$

é família de abertos de X que cobre K_j.

Para todo $n \in \omega$, temos construídas as sequências $\langle x\rangle_n$. Agora, definimos

$$x := \langle x\rangle_0{}^\frown\langle x\rangle_1{}^\frown\langle x\rangle_2 ...{}^\frown\langle x\rangle_{n-1}{}^\frown\langle x\rangle_n{}^\frown ...$$

$$F := \mathrm{im}(x).$$

Por construção, $\mathcal{O}[F] \supseteq \bigcup_{n<\omega} K_n = X$.
Afirmação F é fechado e discreto.

Pela Proposição 1.26, basta checarmos que $\{\{z\} : z \in \mathrm{im}(x)\}$ é localmente finita em X. Seja $t \in x$ existe $m := \min\{j : t \in K_j\}$. Note que por construção $V := \mathcal{O}[\langle x\rangle_0{}^\frown\langle x\rangle_1{}^\frown\langle x\rangle_2 ...{}^\frown\langle x\rangle_{j-1}{}^\frown\langle x\rangle_m]$ tal que a vizinhança aberta de t que é tal que $V \cap \mathrm{im}(x) \subseteq \{\mathrm{im}(\langle x\rangle_0{}^\frown\langle x\rangle_1{}^\frown ...{}^\frown\langle x\rangle_m)\}$.

■

Os resultados expostos nessa seção tem como motivação o problema proposto em [vDP79], onde os autores perguntaram:

Um espaço de Lindelöf regular é D-espaço?

Obviamente, a Proposição 3.13 garante que espaços regulares enumeráveis que são, consequentemente, σ-compactos e Lindelöf, são D-espaços. Vamos apresentar na sequência uma prova de que espaços de Lindelöf de cardinalidade menor que $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ são D-espaços. O seguinte lema é de extrema importância e para tal vamos considerar X sendo um espaço $T_1 + T_3$. Dada uma sequência finita s de ${}^{<\omega}Y$, vamos denotar por $\mathcal{O}[s]$ como sendo a ona aplicada ao conjunto imagem de s, i.e., $\mathcal{O}[s] = \mathcal{O}[\{s(j) : j < \mathrm{dom}(s)\}]$.

[3]Estamos supondo a sequência dos $K_n's$ crescente.

Sendo Y enumerável, podemos supor $\{y_i : i < \omega\}$ uma enumeração fixada de Y. Dessa maneira vale observar que em geral $s(j)$ não precisa ser igual a y_j.

Lema 3.14. *Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{O}$ é ona sobre X. Se X é um espaço de Lindelöf, então existe um subconjunto Y de X enumerável , tal que para todo $F \subseteq Y$ finito, e para todo $x \in X \setminus \mathcal{O}[F]$ existe $y \in Y \setminus \mathcal{O}[F]$ tal que $x \in \mathcal{O}(y)$.*

Demonstração:

Como X é um espaço de Lindelöf, existe Y_0 enumerável tal que $\mathcal{O}[Y_0] = X$. Seja $\mathcal{F}_0 = \{F_{0,n} : n < \omega\} = [Y_0]^{<\omega}$. Dado $n \in \omega$, considere $Z_{0,n} = X \setminus \mathcal{O}[F_{0,n}]$ e note que $Z_{0,n} \cup F_{0,n}$ é núcleo de $\mathcal{O}$, logo pela hipótese de X ser Lindelöf existe $Y_{1,n} \subseteq Z_{0,n} \cup F_{0,n}$ núcleo enumerável de $\mathcal{O}$. Desse modo obtemos o conjunto

$$Y_1 = \bigcup_{n \leq \omega} Y_{1,n}.$$

Portanto, $\mathcal{O}[Y_0 \cup Y_1] = X$. Novamente, defina $\mathcal{F}_1 = \{F_{1,n} : n < \omega\} = [Y_0 \cup Y_1]^{<\omega}$. Dado $n \in \omega$ o conjunto $Z_{1,n} = X \setminus \mathcal{O}[F_{1,n}]$ e note que $Z_{1,n} \cup F_{1,n}$ é núcleo de $\mathcal{O}$, logo pela hipótese de X ser Lindelöf, existe $Y_{2,n} \subseteq Z_{1,n} \cup F_{1,n}$ núcleo enumerável de $\mathcal{O}$, assim construímos

$$Y_2 = \bigcup_{n \leq \omega} Y_{2,n}.$$

Prosseguindo de maneira indutiva, construímos $Y = \bigcup\{Y_n : n < \omega\}$. Agora, vamos provar que o conjunto Y, assim construído, atende ao lema. De fato, por construção Y é enumerável. Seja $F \subseteq Y$ finito e $x \notin \mathcal{O}[F]$. Existe $j < \omega$ tal que $F \subseteq \bigcup_{i \leq j} Y_i$. Logo $F = F_{j,m} \in \mathcal{F}_j = \{F_{j,n} : n < \omega\} = \left[\bigcup_{i \leq j} Y_i\right]^{<\omega}$. Por construção, existe

$$y \in Y_{j+1,m} \subseteq Z_{j,m} \cup F_{j,m},$$

tal que $x \in \mathcal{O}(y)$ e $Y_{j,m} \subseteq Y_j \subseteq Y$. ■

O teorema que se sucede faz parte do artigo [AJL]. Daremos uma demonstração que é uma adaptação dos argumentos dados na Proposição 5.1.6 apresentada por Aurichi em [A09].

Teorema 3.15. *Se X é um espaço de Lindelöf cuja cardinalidade é estritamente menor que $\operatorname{cov}(\mathcal{M})$, então X é um D-espaço.*

Demonstração:

Seja $\mathcal{O}$ uma ona arbitrária. Sem perda de generalidade suponha que $\mathcal{O}$ não pos-

sui núcleo finito[4]. Considere Y como no lema 3.14. Seja Z a subárvore de $\langle {}^{<\omega}Y, \subseteq\rangle$, onde Z é definida por: $s \in Z$ se, e somente se, $s(\mathrm{dom}(s) - 1) \notin \mathcal{O}[s \restriction (\mathrm{dom}(s) - 1)]$. Claramente, $\langle Z, \supseteq\rangle$ é uma pré-ordem enumerável. Nossa intenção é usar o fato que $\kappa = |X| < \mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{m}_{countable}$, logo vale $\mathbf{MA}_{countable}(\kappa)$. Para isso, tome $x \in X$ e defina $D_x := \{s \in Z : x \in \mathcal{O}[s]\}$ e para cada $n \in \omega$, defina $E_n := \{s \in Z : n \in \mathrm{dom}(s)\}$.
Afirmação:

(i) $D_x := \{s \in Z : x \in \mathcal{O}[s]\}$ é denso:

Tome $t \in Z$ tal que $t \notin D_x$. Como $t \notin D_x$, temos que $x \notin \mathcal{O}[t]$, então pelo Lema 3.14, existe $y_i \in Y$ tal que $x \in \mathcal{O}(y_i)$. Note que $s := t^\frown y_i$ é um elemento de Z que estende t, com $x \in \mathcal{O}[s]$.

(ii) E_n é denso:

Tome $t \notin E_n$ com $\mathrm{dom}(t) = j$. Queremos definir $s \in E_n$ tal que $t \subseteq s$. Pois bem, como $t \in Z$, então $t(j-1) \notin \mathcal{O}[t \restriction_{j-1}]$. Pelo Lema 3.14, existe $y_{j_0} \in Y$, tal que $t(j-1) \in \mathcal{O}(y_j)$. Defina $t^\frown y_j$. Se $n \in \mathrm{dom}(t^\frown y_j)$, estamos feitos. Caso contrário, como $\mathcal{O}$ não possui núcleo finito, então $\mathcal{O}[t^\frown y_{j_0}]$ não cobre X. Portanto, existe $x \in X \setminus \mathcal{O}[t^\frown y_{j_0}]$. Novamente, pelo Lema 3.14, existe $y_{j_1} \in Y$, tal que $x \in \mathcal{O}(y_{j_1})$. Com isso, definimos $t^\frown y_{j_0}{}^\frown y_{j_1}$, se $n \in \mathrm{dom}(t^\frown y_{j_0}{}^\frown y_{j_1})$, tomamos $s := t^\frown y_{j_0}{}^\frown y_{j_1}$. Caso contrário, continuamos o processo $k+1$-vezes seja necessário, até obtermos

$$s := t^\frown y_{j_0}{}^\frown y_{j_1}{}^\frown ...{}^\frown y_{j_k}$$

tal que $n \in \mathrm{dom}(s)$. Portanto, dada uma condição $t \in Z$, sempre é possível estendê-la a alguma $s \in E_n$.

Como $\mathcal{D} := \{D_x : x \in X\} \cup \{E_n : n \in \omega\}$ é uma família de denso com tamanho menor ou igual a $|X|$, então podemos aplicar $\mathbf{MA}_{countable}(|X|)$. Portanto, existe filtro $G \subseteq Z$ tal que $G \cap D_x \neq \emptyset$ e $G \cap E_n \neq \emptyset$, para todo $x \in X$. Por G ser filtro genérico com respeito $\mathcal{D}$, temos que $r := \bigcup G : \omega \to Y$.

Afirmação: O conjunto $\{r(n) : n \in \omega\}$ é núcleo fechado-discreto de $\mathcal{O}$.

- $X = \displaystyle\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{O}(r(n))$.

Justificativa: De fato, fixe $x \in X$. Como G é filtro genérico com respeito a $\mathcal{D}$, temos que existe $t \in G \cap D_x$. Portanto, $t \in G$ e $t \in D_x$, então deduzimos:

(i) $t \subseteq r$, logo $r \restriction \mathrm{dom}(t) = t$;

[4]Um conjunto finito em um espaço T_1 é fechado e discreto.

(ii) $x \in \mathcal{O}[t]$.

Com esse raciocínio, temos que $x \in \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{O}(r(n))$, logo vale que

$$X = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{O}(r(n))$$

• $\{r(n) : n \in \omega\}$ é um conjunto fechado-discreto em X.

Justificativa: Para isso, basta ver que a família $\{\{r(n)\} : n \in \omega\}$ é localmente finita. Com efeito: fixe $x \in X$ e tome $m := \min\{i \in \omega : x \in \mathcal{O}[r \upharpoonright i]\}$. Como $\{r \upharpoonright n : n \in \omega\}$ é um ramo da árvore de Z, então para todo $n > m$, temos que $r \upharpoonright n \supsetneq r \upharpoonright m$. Então $\mathcal{O}[r \upharpoonright m]$ é vizinhança aberta de x tal que

$$\mathcal{O}[r \upharpoonright m] \cap \operatorname{im}(r) \subseteq \{r(0), r(1), ..., r(m-1)\}$$

■

Observação 3.16. É consistente que a hipótese de X ser Lindelöf não pode ser retirada do teorema acima, vejamos: Seja X um espaço não compacto e enumeravelmente compacto. Verifiquemos que X não é D-espaço. Pois bem, como X não é compacto, existe cobertura aberta $\mathcal{U}$ que não possui subcobertura finita. Claramente, temos uma ona $\mathcal{O}$ associada a cobertura $\mathcal{U}$. Sabemos que em um espaço enumeravelmente compacto, qualquer $D \subseteq X$ fechado e discreto é, necessariamente, finito. Logo, $\displaystyle\bigcup_{x\in D} \mathcal{O}(x)$ não cobre X, do contrário estaríamos contradizendo que X não é compacto, com esse raciocínio deduzimos que X, nessas condições, não é D-espaço. Agora, já sabemos que ω_1 com a topologia da ordem não é compacto, porém, é enumeravelmente compacto. Pelo que vimos, ω_1 não é D-espaço e, além disso, é sabido que $\omega_1 < \operatorname{cov}(\mathcal{M})$ é consistente.

Abaixo temos dois resultados de consistência.

Corolário 3.17 ($\mathbf{MA}_{countable}$)**.** *Se X é Lindelöf tal que $|X| < 2^{\omega}$, então X é D-espaço.*

Corolário 3.18 ($\mathbf{MA}_{countable}$)**.** *Se X é um espaço hereditariamente Lindelöf que não é D espaço, então $|X| = \mathfrak{c}$.*

Demonstração:

Pelo Teorema 1.32, temos que $|X| \leq 2^{hL(X)}$. Como X é hereditariamente Lindelöf, então X é Lindelöf e $hL(X) = \omega$, e disso vem que $|X| \leq 2^{\omega_0}$. Do corolário anterior, se $|X| < \mathfrak{c}$ o espaço X seria D-espaço, mas como X não é D-espaço, então $|X| = \mathfrak{c}$.

■

Vamos agora preparar caminho para um resultado ainda mais forte, enunciado em termos de uniões de subespaços compactos.

Lema 3.19. *Seja (X, τ) um espaço topológico Lindelöf e seja $\mathcal{O}$ uma ona sobre X tal que nenhum suconjunto finito da imagem de $\mathcal{O}$ cobre X. Considerando Y como no lema 3.14, então existe uma árvore $\langle T, \subseteq\rangle$ de abertos de X e uma função $F : s \in {}^{<\omega}\omega \setminus \{\emptyset\} \mapsto (f(s), U_s) \in Y \times \tau$ que satisfazem:*

(i) se $s \in {}^{<\omega}\omega$ então $U_s \subseteq \mathcal{O}(f(s))$, onde $U_s \in T$;

(ii) se r é um ramo de ${}^{<\omega}\omega$, então $\{f(s) : s \in r\}$ é um fechado discreto em $\bigcup\{U_s : s \in r\}$;

(iii) se $C \subseteq X$ é compacto, então $D_C = \{s \in {}^{<\omega}\omega : C \subseteq \bigcup_{k \leq \mathrm{dom}(s)} U_{s\restriction k}\}$ é denso em ${}^{<\omega}\omega$.

Demonstração:

Definimos a função $F : s \in {}^{<\omega}\omega \mapsto (f(s), U_s) \in Y \times \tau$ satisfazendo:

(a) Se $s \in {}^{<\omega}\omega$, para $n \in \omega$, temos $f(s^\frown n) \notin \bigcup_{k \leq \mathrm{dom}(s)} U_{s\restriction k}$.

(b) para $s \in {}^{\omega}\omega$, tem-se que $U_s := \mathcal{O}[f(s)] \setminus F$ onde F é um subconjunto finito de $Y \setminus \{f(s)\}$,

(c) para $s \in {}^{\omega}\omega$, se $y \in Y \setminus \bigcup_{k \leq \mathrm{dom}(s)} U_{s\restriction k}$, então $y = f(s^\frown n)$, para algum $n \in \omega$. Em outras palavras, $U_{s^\frown n}$ são obtidos tomando $\mathcal{O}[f(s^\frown n)] \setminus F$ para os $f(s^\frown n)$ que são elementos de Y não cobertos por $\bigcup_{k \leq \mathrm{dom}(s)} U_{s\restriction k}$ e para exatamente esses.

(d) Se $y = f(s)$ para alguma $s \in {}^{<\omega}\omega$ e F é um subconjunto finito de $(Y \cap \mathcal{O}[f(s)]) \setminus \{f(s)\}$, então existe $n \in \omega$ tal que $U_{s^\frown n} = \mathcal{O}[f(s)] \setminus F$.

O item (i) é óbvio. Para a prova do item (iii), temos:

Fato.1

Se A é um subconjunto finito de Y. Então o conjunto $D_A := \{s \in {}^{<\omega}\omega : A \subseteq \bigcup_{k \leq \mathrm{dom}(s)} U_{s\restriction k}\}$ é denso na pré-ordem $\langle {}^{<\omega}\omega, \supseteq\rangle$.

De fato, tome $s \in {}^{<\omega}\omega$. Sem perda de generalidade, suponha $s \notin D_A$. Então existe $l \in \omega$, tal que $A \setminus \bigcup_{k \leq \mathrm{dom}(s)} U_{s\restriction k} = \{y_{i_1}, ..., y_{i_l}\}$. Sendo assim, considere primeiramente y_{i_1}, então existe $n_1 \in \omega$ tal que $y_{i_1} = f(s^\frown n_1)$. Tomando o conjunto finito $F_1 = \{y_{i_2}, y_{i_3} ..., y_{i_l}\}$ e o aberto $U_{s^\frown n_1} = \mathcal{O}[f(s^\frown n_1)] \setminus F_1$. Como $y_{i_2} \notin \bigcup_{k \leq \mathrm{dom}(s^\frown n_1)} U_{s^\frown n_1} \restriction k$, existe $n_2 \in \omega$ tal que

$f(s^\frown n_1{}^\frown n_2) = y_{i_2}$. Tomando agora o conjunto finito $F_2 = \{y_{i_3}, ..., y_{i_l}\}$ e o aberto $U_{s^\frown n_1{}^\frown n_2} = \mathcal{O}[f(s^\frown n_1{}^\frown n_2)] \setminus F_2$. No final do processo, existirão $n_1, n_2, ..., n_l$ números naturais, tal que para $s^\frown n_1{}^\frown n_2{}^\frown ...{}^\frown n_l$ o conjunto A será coberto por $\bigcup_{k \leq \mathrm{dom}(s^\frown n_1{}^\frown n_2{}^\frown ...{}^\frown n_l)} U_{s^\frown n_1{}^\frown n_2{}^\frown ...{}^\frown n_l} \restriction k$, como queríamos demonstrar.

Fato.2

Sejam s, q, r elementos de ${}^{<\omega}\omega$. Se $s \subseteq q$, $s \subseteq r$, então é possível encontrar $t \in {}^{<\omega}\omega$, tal que $s \subseteq t$ e $U_q \cup U_r \subseteq \bigcup_{k \leq \mathrm{dom}(t)} U_{t \restriction k}$.

Sendo $U_q = \mathcal{O}[f(q)] \setminus F$, onde F é um subconjunto finito de $Y \setminus f(q)$. Para provarmos tal fato, precisamos fazer a seguinte distinção:

Caso.1.

Suponhamos que $f(q) \notin \bigcup_{k \leq \mathrm{dom}(r)} U_{r \restriction k}$. Portanto existe $n \in \omega$ tal que $f(r^\frown n) = f(q)$. Tomando $U_{r^\frown n} = \mathcal{O}[f(r^\frown n)] \setminus F$ onde F é o finito que define U_q. Sendo assim, temos que $U_{r^\frown n} = U_q$. Tome $t = r^\frown n$, daí segue o desejado.

Caso.2.

Suponhamos que $f(q) \in \bigcup_{k \leq \mathrm{dom}(r)} U_{r \restriction k}$. Então existe $j = \min\{k \leq \mathrm{dom}(r) : f(q) \in U_{r \restriction k}\}$. Observe que se $j = \mathrm{dom}(s)$, existe a possibilidade de $f(p) = f(q)$, mais isso pode ser facilmente contornado. Então sem perda de generalidade, assuma que $f(p) \neq f(q)$ e que j é estritamente maior que $\mathrm{dom}(s)$, pois caso contrário, se $j \leq \mathrm{dom}(s)$ e sendo que s está contida em r, então $r \restriction \mathrm{dom}(s)$ coincide com s, logo $s \restriction j = r \restriction j$. Podemos concluir disso que $f(q) \in U_{r \restriction j} = U_{s \restriction j} = U_{q \restriction j}$, decorre que $f(q) \in \bigcup_{k \leq \mathrm{dom}(q)} U_{q \restriction k}$, contrariando a construção de U_q. Sendo assim, $\mathrm{dom}(s) \leq j - 1$, e por conta da minimalidade de j o $f(q)$ não é coberto por $\bigcup_{k \leq \mathrm{dom}(r \restriction j-1)} U_{r \restriction k}$, diante disso deve existir um $n_1 \in \omega$ tal que $f((r \restriction j-1)^\frown n_1) = f(q)$ com $(r \restriction j-1)^\frown n_1$ estendendo s. Tomemos o aberto $U_{r \restriction j^\frown n_1} = \mathcal{O}[f(r \restriction n_1) \setminus \{f(r)\} = \mathcal{O}[f(q)] \setminus \{f(r)\}$. Agora note que $f(r) \notin \bigcup_{k \leq \mathrm{dom}(r^\frown n_1)} U_{r \restriction k}$, logo existe $n_2 \in \omega$ tal que $f((r \restriction j-1)^\frown n_1{}^\frown n_2) = f(r)$, então tome o aberto $U_{(r \restriction j-1)^\frown n_1{}^\frown n_2} = U_r$. Por construção, a sequência finita t desejada é $(r \restriction j-1)^\frown n_1{}^\frown n_2$.

Prosseguimos com a demonstração do item (iii). Considere C um subconjunto compacto de X e note que como consequência do item (c) e da propriedade satisfeita em 3.14 pelo conjunto Y, temos o seguinte:

$$(\bigcup_{k \leq \mathrm{dom}(s)} U_{s \restriction k}) \cup \{\mathcal{O}(y) : y \in Y \setminus \bigcup_{k \leq \mathrm{dom}(s)} U_{s \restriction k}\}$$

é uma cobertura aberta de X, com $s \in {}^{<\omega}\omega$.

Afirmação: O conjunto D_C é denso.

De fato, fixado $s \in {}^{<\omega}\omega$, sem perda de generalidade, suponha que $s \notin D_C$. Então $C' := C \setminus \bigcup_{k \leq \text{dom}(s)} U_{s\restriction k}$ pode ser coberto por $\{U_{s^\frown n} : n \in \omega\}$. Pela compacidade de C', existem $i_1, i_2, ..., i_n$ elementos de ω, tal que $C \setminus \bigcup_{k \leq \text{dom}(s)} U_{s\restriction k} \subseteq \bigcup_{j \leq n} U_{s^\frown i_j}$. Observe que pelo item (d), podemos tomar $U_{s^\frown ij} = \mathcal{O}[f(s^\frown i_j)] \setminus \{f(s^\frown i_k) : 0 < k \leq n \text{ e } k \neq j\}$. Como $\{f(s^\frown i_j) : 0 < j \leq n\}$ é um conjunto finito de Y, segue do Fato.1. que existe uma $t \in {}^{<\omega}\omega$ que estende s de tal forma que $\{f(s^\frown k_j) : 0 < j \leq n\}$ é incluso em $\bigcup_{k \leq \text{dom}(t)} U_{t\restriction k}$. Seguindo pelo Fato.2. juntamente com uma indução finita sobre n, existe $q \in {}^{<\omega}\omega$, tal que $\left(\bigcup_{j \leq n} U_{s^\frown i_j}\right) \cup U_t$ está contido em $\bigcup_{k \leq \text{dom}(q)} U_{q\restriction k}$. Portanto, $C \subseteq \bigcup_{k \leq \text{dom}(q)} U_{q\restriction k}$, como queríamos demonstrar.

Para a prova do item (ii), considere $s \in {}^{<\omega}\omega$. Sem perda de generalidade considere r sendo um ramo infinito de ${}^{<\omega}\omega$. Tome y um elemento de $\bigcup_{t \in r} U_t$. Então existe $s \in r$, tal que $y \in U_s$. Note que para uma sequência finita $q \in r$ que estenda s, $f(q) \notin \bigcup_{k \leq \text{dom}(s)} U_{s\restriction k}$, diante disso, o aberto U_s contém uma quantidade finita de elementos de $\{f(s) : s \in r\}$. Sendo X um espaço T_1, y não é ponto de acumulação de $\{f(s) : s \in r\}$. Como tomamos y um elemento arbitrário em $\bigcup_{t \in r} U_t$, segue que $\{f(s) : s \in r\}$ não possui ponto de acumulação em $\bigcup_{t \in r} U_t$. Por conseguinte, $\{f(s) : s \in r\}$ é um fechado e discreto como o desejado.

■

Teorema 3.20. *Todo espaço de Lindelöf que é união de menos que* $\text{cov}(\mathcal{M})$ *subespaços compacto é um D-espaço.*

Demonstração:

Seja $\mathcal{O}$ uma ona arbitrária. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\mathcal{O}$ não possui núcleo finito. Consideramos um cardinal κ estritamente menor que $\text{cov}(\mathcal{M})$ e $X = \bigcup\{C_\xi : \xi < \kappa\}$, onde cada C_ξ é um subconjunto compacto de X. Sendo X um espaço de Lindelöf, existe a árvore $\langle T, \subseteq\rangle$ de abertos e a função F como no lema 3.19. Logo definido o conjunto $D_{C_\zeta} := \{s \in {}^{<\omega}\omega : C_\zeta \subseteq \bigcup_{k \leq \text{dom}(s)} U_{s\restriction k}\}$ segue que é um denso. Sendo $\langle {}^{<\omega}\omega, \supseteq\rangle$ uma ordem enumerável, podemos aplicar o $\mathbf{MA}_{countable}(\kappa)$. Então existe filtro genérico G tal que $G \cap D_{C_\zeta} \neq \emptyset$, para todo $\zeta < \kappa$. Portanto existe um ramo $r \in {}^{<\omega}\omega$ tal que $r = \bigcup G$. Fixado $\zeta < \kappa$, existe um elemento p_ζ que está em $G \cap D_{C_\zeta}$. Assim $p_\zeta \subseteq r$

e $C_\zeta \subseteq \bigcup_{k \leq \text{dom}(p_\zeta)} U_{p_\zeta \restriction k}$. Sendo $X = \bigcup\{C_\xi : \xi < \kappa\}$, podemos concluir que $X \subseteq \bigcup_{s \in r} U_s$. Obtemos a partir disso que $X = \bigcup_{s \in r} U_s$ e sendo $\{f(s) : s \in r\}$ um fechado e discreto em $\bigcup_{s \in r} U_s$, então é fechado e discreto em X. Agora, por definição dos abertos da árvore T, $U_s = \mathcal{O}[f(s)] \setminus F_s$, onde F_s é um conjunto finito de Y, com $U_s \subseteq \mathcal{O}[f(s)]$. Então $X = \bigcup_{s \in r} \mathcal{O}[f(s)]$, com isso, $\{f(s) : s \in r\}$ é núcleo fechado e discreto da ona $\mathcal{O}$ e segue o resultado. ■

3.4 Princípios de Seleção Envolvendo Conjuntos Densos e Discretos

Nossas principais referências nessa seção: [ADJ] e [D]. Para uma leitura complementar, com respeito as definições introdutórias, sugerimos [BMS].

Um espaço topológico Xé dito:

(i) *d-separável* se contém um subconjunto denso σ-discreto, i.e., existe um subconjunto Y denso em X dado por $Y = \bigcup\limits_{n \in \omega} D_n$ onde cada D_n é discreto em X.

(ii) *D-separável* se toda sequência de $(S_n)_{n \in \omega}$ de subconjuntos densos de X, existe uma sequência $(D_n)_{n \in \omega}$ de subconjuntos discretos de X tal que para todo $n \in \omega$, $D_n \subseteq S_n$ e $\bigcup\limits_{n \in \omega} D_n$ é um subconjunto denso em X.

Seja X um espaço topológico. Denotaremos por $\mathcal{D}_X$ a família de todos os subconjuntos densos de X. Definimos o jogo $G_{dis}(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X)$ do seguinte modo: *Em cada rodada $n \in \omega$, o jogador UM escolhe um denso S_n de X, daí o jogador $DOIS$ escolhe um discreto D_n contido em S_n. O jogador $DOIS$ vence se $\bigcup\limits_{n \in \omega} D_n$ é um subconjunto denso em X.*

Denote por $\mathcal{D}_{disc}$ a família de subconjuntos discretos de X. Agora, definimos o seguinte:

(iii) *D^+-separável* se $DOIS$ tem uma estratégia vencedora no jogo $G_{dis}(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X)$.

Já discutimos no primeiro capítulo a noção de estratégia e estratégia vencedora para o jogador UM em determinados jogos; fazendo-se as adaptações necessárias com o devido cuidado, pode-se chegar nas noções análogas para o jogador $DOIS$. Com isso, observamos também que se UM não possui estratégia vencedora, isso não é garantia de que o jogador $DOIS$ tenha estratégia vencedora, porém, se $DOIS$ tem estratégia vencedora é claro que UM não pode ter estrátegia vencedora.

Observação 3.21. Dado um espaço topológico X, se UM não tem estratégia vencedora, então o espaço X é D-separável. A justificativa disso segue a linha dos argumentos da Proposição 1.66, devidamente traduzidos para os objetos: famílias de subconjuntos densos e discretos de X. Juntando isso ao último comentário do parágrafo anterior, podemos deduzir que se um espaço X é D^+-separável, então X é D-separável.

Da observação acima, temos que D^+-separável é uma propriedade mais forte que D-separável. Note também que D-separável claramente implica d-separável.[5]

Diz-se que um espaço topológico X *quase-desenvolvível*[6] se existe uma sequência $(\mathcal{U}_n)_{n\in\omega}$ de famílias de subconjuntos abertos de X tal que, sempre que $x \in U$ aberto em X, existe $n \in \omega$ tal que $\mathrm{st}(x,\mathcal{U}_n) \subseteq U$.

Proposição 3.22. *Um espaço topológico X quase-desenvolvível é d-separável.*

Demonstração:

Sendo X quase-desenvolvível, existe $(\mathcal{U}_n)_{n\in\omega}$ famílias de subconjuntos abertos de X satisfazendo : sempre que $x \in U$ aberto em X, existe $n \in \omega$ tal que $\mathrm{st}(x,\mathcal{U}_n) \subseteq U$.

Pelo Axioma da Escolha, $\mathcal{U}_n$ pode ser bem-ordenado. Então existe ordinal γ_n, onde $\{U_n^\alpha : \alpha \in \gamma_n\}$ é a enumeração canônica de $\mathcal{U}_n$. Defina recursivamente:
(i) $A_n^\alpha := \{x_n^\alpha\}$ com $x_n^\alpha \in U_n^\alpha \setminus \bigcup_{\beta\in\alpha} U_n^\beta$ e $x_n^\alpha \notin \bigcup_{\beta\in\alpha} A_\beta^n$.
(ii) $A_n^\alpha := \emptyset$, se $U_n^\alpha \subseteq \bigcup_{\beta\in\alpha} U_\beta^n$ ou $U_n^\alpha \cap \bigcup_{\beta\in\alpha} A_\beta^n \neq \emptyset$.

Considere o conjunto $D_n := \bigcup_{\alpha\in\gamma_n} A_n^\alpha$. Note que D_n é discreto, pois para um x fixado em D_n, existe A_n^α que contém o ponto $x = x_n^\alpha$. Nesse caso estamos nas condições de (i) e por construção U_n^α é um aberto que contém x_n^α, falta ver que $U_n^\alpha \cap D_n = \{x_n^\alpha\}$. Suponha $y \in U_n^\alpha \cap D_n$, tal que $y \neq x$, existe A_n^ξ contendo y, daí $y = x_n^\xi$. Sem perda de generalidade supondo $\xi > \alpha$, novamente por construção, $x_n^\xi \in U_n^\xi \setminus \bigcup_{\beta\in\xi} U_n^\beta$ e $x_n^\xi \notin \bigcup_{\beta\in\xi} A_\beta^n$, absurdo, pois $x_n^\xi \in U_n^\alpha$. Disso podemos concluir $U_n^\alpha \cap D_n$ não contém nenhum outro ponto além de x, como queríamos. Para encerrarmos a prova, basta checarmos que $\bigcup_{n\in\omega} D_n$ é um denso em X. Para tal, tome um subconjunto aberto V de X, e fixe $x \in V$. Sendo $(\mathcal{U}_n)_{n\in\omega}$ quase-desenvolvível, temos $\mathrm{st}(x,\mathcal{U}_n) \subseteq V$ para algum $n \in \omega$. Defina $\zeta := \min\{\alpha \in \gamma_n : x \in U_n^\alpha\}$. Segue da construção, se $D_n \cap U_n^\zeta$ for vazio, então $\left(\bigcup_{\beta<\alpha} A_n^\alpha\right) \cap U_n^\zeta = \emptyset$, para todo

[5] Em geral, D não implica D^+-separável, e nem d-separável implica D-separável, vide [BMS].

[6] Aqui apontamos a diferença entre: quase-desenvolvível e desenvolvível. Um espaço topológico X é dito desenvolvível se dada uma $\mathcal{U}$ família de abertos, existe uma sequência de coberturas abertas $(\mathcal{U}_n)_{n\in\omega}$ tal que para $x \in X$, $\{\mathrm{st}(x,\mathcal{U}_n) : n \in \omega\}$ é base local para x.

$\alpha < \gamma_n$. Desse modo, temos $U_n^\zeta \subseteq \bigcup_{\beta\in\zeta} U_n^\beta$, então $x \in U_n^\zeta \subseteq \bigcup_{\beta\in\zeta} U_n^\beta$, então $x \in U_n^\beta$, para algum $\beta < \zeta$ e isto contradiz a minimalidade de ζ. Portanto, $\emptyset \neq D_n \cap U_n^\zeta \subseteq D_n \cap V$. Sendo V um aberto arbitrário de X, segue que D_n é um subconjunto denso de X. ■

Proposição 3.23. *Um espaço topológico que é quase-desenvolvível necessariamente d-separável.* ■

O próximo resultado mostra uma condição suficiente para caracterizar um espaço D-separável.

Teorema 3.24. *Dado um espaço topológico X com $\pi w(X)$ estritamente menor que* $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ *tal que qualquer subconjunto denso de X é d-separável. Então X é D-separável.*

Demonstração:

Em virtude da observação 3.21, basta mostrarmos que o jogador UM não tem estratégia vencedora no jogo $G_{dis}(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X)$.

Vamos fixar uma estratégia φ para o jogador UM. Nosso objetivo é construir uma sequência de lances dada por $DOIS$ que derrota φ. Começamos do seguinte:

Dado um denso E de X, por hipótese, temos que E é d-espaço, logo existe um denso em E que é σ-discreto, i.e., existe $\langle E^m : m < n\rangle$ discretos em E tal que $\bigcup_{n\in\omega} E^m$ é denso em E, com isso, um denso em X.

Denote a família de conjuntos discretos de X por $\mathcal{D}_{disc}$. Com modificações adequadas dos argumentos utilizados no Capítulo 1, definimos uma função que codifica os subconjuntos discretos escolhidos por $DOIS$ até a rodada $i < n$, como sendo:

$$\psi : s \in {}^{<\omega}\omega \mapsto \langle E_{\langle\emptyset\rangle}^{s(0)}, {E_{s\restriction 1}}^{s(1)}, {E_{s\restriction 2}}^{s(2)}, ..., {E_{s\restriction n-1}}^{s(n-1)}\rangle \in \mathcal{D}_{dis},$$

com $n = \mathrm{dom}(s)$.

Defina por $E_{s\restriction n}$ o subconjunto denso de X na n-ésima rodada de acordo com a estratégia $\varphi(\psi(s \restriction n))$ de UM.

Agora, fixe uma π-base $\mathcal{V}$ para X de cardinalidade $\pi w(X)$. Para $V \in \mathcal{V}$, definimos

$$B_V := \bigcup_{n\in\omega} \{s \in {}^{n+1}\omega : V \cap E_{s\restriction n}^{s(n)} \neq \emptyset\}.$$

Afirmação: Para cada $V \in \mathcal{V}$, o conjunto B_V é denso na ordem parcial enumerável $\langle {}^{<\omega}\omega, \supseteq\rangle$.

Primeiramente, fixamos $j \in \omega$. Como $\bigcup_{i<\omega} E_j^i$ é um conjunto denso em X, segue que $\left(\bigcup_{i<\omega} E_j^i\right) \cap V \neq \emptyset$, ou seja, existe E_j^i donde $E_j^i \cap V \neq \emptyset$. Agora, fixado $s \in {}^{<\omega}\omega$. Se $s \in B_V$, existe $m \in \omega$ tal $s \in {}^{m+1}\omega$ e $V \in {E_{s\restriction m}}^{s(m)}$. No caso que $s \notin B_V$, tome qualquer $t \in {}^{\omega}\omega$ tal que $t = s^\frown\mathrm{dom}(s)$ tal que $E_s^t \cap V$ é não vazio. Em qualquer caso sempre é possível estender s. Segue que B_V é denso, como queríamos.

Por hipótese $|\mathcal{V}| < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$, como consequência temos que $\{B_V : V \in \mathcal{V}\}$ é uma família de densos cuja cardinalidade é estritamente menor que $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$. Sendo $\langle {}^{<\omega}\omega, \supseteq\rangle$ uma ordem enumerável, então podemos argumentar por $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{m}_{countable}$. Segue então que existe um filtro-genérico $G \subseteq {}^{<\omega}\omega$ com respeito a $\{B_V : V \in \mathcal{V}\}$. Seja $g := \bigcup G$ que sabemos ser elemento de ${}^{\omega}\omega$.

Afirmação.2: Se UM joga de acordo com sua estratégia e $DOIS$ responde sempre com $E^{g(n)}$, $DOIS$ ganha.

Seja $V \in \mathcal{V}$. Por definição de filtro-genérico, temos que $G \cap B_V \neq \emptyset$. Portanto existe $r \in G$ e $r \in B_V$, então $r \subseteq g \in {}^{\omega}\omega$ e existe $m \in \omega$ tal que $V \cap E_{r\restriction m}^{r(m)}$ é não vazio. Como $r \subseteq g$, então $V \cap E_{g\restriction m}^{g(m)}$ é não vazio. Assim, $V \cap \bigcup\limits_{n\in\omega} E_{g\restriction n}^{g(n)} \neq \emptyset$ e como $\mathcal{V}$ é uma π-base, segue que $\bigcup\limits_{n\in\omega} E_{g\restriction n}^{g(n)}$ é um denso em X. Portanto, $DOIS$ vence. ∎

Se X é um espaço topológico quase-desenvolvível e satisfaz $\pi w(X) < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$, então X é D-separável. Pois todo subespaço de X também é quase-devesenvolvível. Pela proposição 3.22 temos que todo subespaço de X é d-espaço, e segue do teorema anterior que X é D-separável.

Corolário 3.25. *Se X é quase-desenvolvível e tem base ponto enumerável e $s(X) < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$, então X é D-separável.*

Demonstração:

Pela proposição 3.22 X é d-separável, decorre disso que X tem um denso $D = \bigcup\limits_{n\in\omega} D_n$, onde D_n é um subconjunto discreto de X. Diante disso $|D|$ é no máximo $s(X).\aleph_0 = s(X)$. Então $d(X) \leq s(X) < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$. Sabemos que $d(X) \leq w(X)$, por outro lado, como X tem base ponto enumerável, temos que $w(X) \leq d(X)$, desse modo $w(X) = d(X) < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$. Daí $\pi w(X) < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ e o resultado segue de 3.24. ∎

3.5 Separabilidade Seletiva, Invariantes Cardinais e Aplicações

A menos de menção em contrário, os resultados que seguem nessa seção estão presentes no artigo [BBM]. A seguir damos um grupo de definições que são motivadas pelas propriedades de Rothberger, Menger e Hurewicz.[7]

Definição 3.26. Seja X um espaço T_1. Dizemos que:

(i) X é dito *R-separável* se para toda sequência de subespaços densos $(E_n : n \in \omega)$ existe uma sequência $(p_n)_{n\in\omega}$ tal que $p_n \in E_n$, para todo $n \in \omega$ e $\{p_n : n \in \omega\}$ é denso em X.

(ii) X é M-*separável* se dada qualquer sequência $\langle D_n : n \in \omega \rangle$ de subespaços densos de X podemos selecionar, para todo $n \in \omega$, um subconjunto finito $F_n \subseteq D_n$ tal que $\bigcup\{F_n : n \in \omega\}$ é um subconjunto denso em X.

(iii) Um espaço X é dito H-*separável* se toda sequência $\langle D_n : n \in \omega \rangle$ de subespaços densos de X, podemos escolher um $F_n \subseteq D_n$ finito, para todo $n \in \omega$, tal que para todo aberto não vazio U de X o conjunto $\{n \in \omega : F_n \cap U = \emptyset\}$ é finito.

Observação 3.27. Dado um espaço topológico X, se considerarmos a família de todos os conjuntos densos de X, denotada por $\mathcal{D}_X$, podemos dizer que X:

(i) é R-separável se vale o princípio de seleção $S_1(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X)$.[8]

(ii) é M-separável se vale o princípio de seleção $S_{fin}(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X)$.

Abaixo o diagrama que ilustra as implicações envonvendo “$R-$”, “$M-$”, “$H-$” separabilidade.

$$\begin{tikzcd}
& R - \text{separável} \arrow[dr] & & \\
\pi - \text{peso enumerável} \arrow[ur] \arrow[dr] & & M - \text{separável} \arrow[r] & \text{Separável} \\
& H - \text{separável} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Note que um espaço X com $\pi-$peso enumerável todo denso em X é separável. A seguir justificamos as implicações do diagrama acima. Assuma que X seja um espaço

[7]Tais propriedades são descritas no apêndice desta dissertação.

[8]Pela Proposição 1.66, UM não ter estratégia vencedora no jogo $G_1(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X)$ implica que vale o princípio $S_1(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X)$, e, portanto, o espaço X é R-separável.

topológico:

• *Um espaço com π-peso enumerável é R-separável*[9].

Justificativa: De fato, consideramos uma família enumerável de conjuntos densos de X, digamos $\{D_n : n \in \omega\}$, e uma π-base enumeravél de X com enumeração dada por $\{V_n : n \in \omega\}$. Como D_n é um conjunto denso para cada $n \in \omega$, existe $p_n \in V_n \cap D_n$. Agora, por definição de π-base, cada aberto U do espaço X contém algum aberto V_n que pertence a π-base dada. Segue disso que o conjunto $\{p_n : n \in \omega\}$ é denso em X, e temos que X é R-separável.

• *Um espaço com π-peso enumerável é H-separável.*

Justificativa: O argumento para justificarmos tal afirmação se baseia no fato de que famílias enumeráveis são limitadas. Apresentamos a demonstração para a generalização em breve (no Teorema 3.33).

• *R-separabilidade implica M-separabilidade.*

Justificativa: Seja o conjunto denso $\{p_n : n \in \omega\}$ como na definição de R-separável. Como conjuntos unitários são finitos, então X é M-separável.

• *H-separabilidade implica M-separabilidade.*

Justificativa: Com efeito, pela definição de espaço H-separável dada uma família $\langle D_n : n \in \omega\rangle$ de subespaços densos de X, existe $F_n \subseteq D_n$ finito, tal que a família $\{F_n : n \in \omega\}$ satisfaz o seguinte: para um aberto U fixado, existe $n_U \in \omega$ tal para todo $n \geq n_U$, temos $F_n \cap U \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_U$. Então $\bigcup\{F_n : n \in \omega\}$ é denso em X, o que implica que X é M-separável.

• *Se X é M-separável, então é separável.*

Justificativa: Pela definição de M-separável, dada qualquer sequência $\langle D_n : n \in \omega\rangle$ de subespaços densos de X, para cada $n \in \omega$, existe $F_n \subseteq D_n$ finito, tal que $\bigcup\{F_n : n \in \omega\}$ é denso em X. Como união enumerável de conjuntos finitos ainda é um conjunto enumerável, segue que $\bigcup\{F_n : n \in \omega\}$ é um subconjunto enumerável e denso em X. Com isso, X é um espaço separável.

O próximo teorema foi provado por Scheepers no artigo *Combinatorics of open cover VI*. Com uma modificação simples do Teorema 3.24, podemos demonstrá-lo[10].

Teorema 3.28. *Se X é um espaço topológico tal que todo subespaço denso de X é se-*

[9] Ajustado o argumento para a linguagem de jogos, pode ser provado que se um espaço topológico X tem π-peso enumerável, então UM não possui estratégia vencedora no jogo $G_1(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X)$.

[10] Tal modificação foi sugerida em [ADJ]

parável e $\pi w(X) < \text{cov}(\mathcal{M})$ então necessariamente X é R-separável.

Demonstração:

Tome $(E_n : n \in \omega)$ uma sequência de subespaços densos. Sendo cada E_n separável, existe um denso enumerável D_n de E_n. Logo D_n é um denso enumerável de X. Denotamos $D_n := \{x_n^m : m \in \omega\}$.

Definimos a função:

$$\psi : s \in {}^{<\omega}\omega \mapsto \langle x_\emptyset^{s(0)}, x_1^{s(1)}, x_2^{s(2)}, ..., x_{n-1}^{s(n-1)} \rangle$$

tal que $\text{dom}(s) = n$ e $x_i^{s(i)} \in D_i$, para todo $i < n$.

Agora, fixe uma π-base $\mathcal{V}$ para X de cardinalidade $\pi w(X)$. Para $V \in \mathcal{V}$, definimos $B_V := \bigcup_{n \in \omega} \{s \in {}^{n+1}\omega : x_n^{s(n)} \in V\}$.

Vejamos que B_V é denso na ordem parcial enumerável $\langle {}^{<\omega}\omega, \supseteq \rangle$. Com efeito: fixamos $r \in {}^{<\omega}\omega$ e supondo, sem perda de generalidade, que $r \notin B_V$ e $\text{dom}(r) = j$. Como D_n é denso para todo $n \in \omega$, então $D_n \cap V$ é sempre não-vazio, para todo $n \in \omega$. Assim sendo, podemos tomar uma sequência finita $s := r^\frown j$ tal que $x_j^{s(j)} \in V$. Segue daí que s estende r e pertence ao conjunto B_V. Com isso, segue a afirmação de que B_V é denso na pré-ordem $\langle {}^{<\omega}\omega, \supseteq \rangle$.

Por hipótese $|\mathcal{V}| < \text{cov}(\mathcal{M})$, como consequência temos que $\{B_V : V \in \mathcal{V}\}$ é uma família de densos cuja cardinalidade é estritamente menor que $\text{cov}(\mathcal{M})$. Sendo $\langle {}^{<\omega}\omega, \supseteq \rangle$ uma ordem enumerável, então podemos argumentar por $\text{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{m}_{countable}$. Segue então que existe um filtro-genérico $G \subseteq {}^{<\omega}\omega$ com respeito a $\{B_V : V \in \mathcal{V}\}$. Por definição de filtro-genérico, temos que $G \cap B_V \neq \emptyset$ para todo $V \in \mathcal{V}$. Tomando $g := \bigcup G$ que é um elemento de ${}^\omega\omega$, existe $k \in \omega$ tal que $g \upharpoonright (k+1) \in B_V$, ou seja, $x_k^{g(k)} \in V$. Por conseguinte, $V \cap \{x_n^{g(n)} : n \in \omega\} \neq \emptyset$, e como o argumento é para qualquer elemento V da π-base $\mathcal{V}$, segue que $\{x_n^{g(n)} : n \in \omega\}$ é o conjunto denso de X desejado. ■

O resultado que acabamos de demonstrar, também pode ser traduzido e provado na linguagem de jogos. Diante dessa última afirmação, apontamos um fato que não é difícil de ser checado: Sejam X um espaço topológico e $D \subseteq X$ um denso não-enumerável. Se D não contém nenhum denso enumerável em X, então UM tem estratégia vencedora no jogo $G_1(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X)$.

O seguinte resultado consta em [BBM], no entanto, não estamos seguros quanto a sua demonstração apresentada e/ou sugeridas em [BBM] e [BBM2], por isso, assumiremos como uma conjectura.

Conjectura 3.29. $2^{\text{cov}(\mathcal{M})}$ *contém um subespaço denso enumerável que não é R-separável.*

O próximo corolário e fato são resultados condicionais, que assumem a conjectura.

Corolário 3.30. $\text{cov}(\mathcal{M}) = \min\{\pi w(Y) : |Y| = \omega, Y$ *não é R-separável*$\}$.

Demonstração:

Denote por $\lambda := \min\{\pi w(Y) : |Y| = \omega, Y$ não é R-separável$\}$. Pela Conjectura 3.29, existe Y subespaço enumerável de $2^{\text{cov}(\mathcal{M})}$ que não é R-separável tal que $\lambda \leq \pi w(Y) \leq w(Y) \leq w(2^{\text{cov}(\mathcal{M})}) = \text{cov}(\mathcal{M})$, segue a desigualdade $\lambda \leq \text{cov}(\mathcal{M})$. Para a desigualdade contrária, suponha que $\lambda < \text{cov}(\mathcal{M})$. Por definição de λ, existe X enumerável tal que $\lambda = \pi w(X)$ é estritamente menor que $\text{cov}(\mathcal{M})$, então segue do Teorema 3.28 que o espaço X é R-separável, contradizendo a minimalidade de λ. Portanto, deduzimos que $\text{cov}(\mathcal{M}) = \lambda$. ■

Fato 3.31. *Se* $\kappa < \text{cov}(\mathcal{M})$, *então podemos concluir que todo subespaço enumerável de* 2^κ *é R-separável.*

Demonstração:

Se tivermos S um subespaço enumerável de 2^κ qualquer subespaço de S é enumerável. Em particular qualquer denso em S é enumerável. Como todo espaço 2^κ tem base de tamanho κ e a função cardinal peso é monótona[11] então $\pi w(S) \leq w(S) \leq \kappa < \text{cov}(\mathcal{M})$, podemos concluir pelo teorema 3.28 que todo subespaço S enumerável de 2^κ é R-separável.

■

Nosso próximo objetivo é analisar qual a relação de $\text{cov}(\mathcal{M})$ com os cardinais que serão definidos abaixo:

$$\lambda_1 := \min\{\kappa : 2^\kappa, \text{ existe}\, Y \in [2^\kappa]^\omega,\, Y \text{ não é}\, R\text{-separável}\}$$

$$\lambda_2 := \min\{\kappa : 2^\kappa, \text{ existe}\, Y \in [2^\kappa]^\omega,\, Y \text{ é denso que não é R-separável}\}$$

Note que ambos estão bem definidos. Chamamos a atenção do leitor para um resultado imediato que segue da combinação do fato anterior com a Conjectura 3.29. Note que $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Veja que o Fato 3.31 assegura que o cardinal λ_1 não pode ser estritamente menor que $\text{cov}(\mathcal{M})$, logo $\text{cov}(\mathcal{M}) \leq \lambda_1$. Mais ainda, pela Conjectura 3.29, temos que $\text{cov}(\mathcal{M})$ é um cardinal que testemunha a propriedade que define a minimalidade de λ_2, então $\lambda_2 \leq \text{cov}(\mathcal{M})$. Ficamos com as desigualdades: $\text{cov}(\mathcal{M}) \leq \lambda_1$ e $\lambda_2 \leq \text{cov}(\mathcal{M})$, assim $\text{cov}(\mathcal{M}) = \lambda_1 = \lambda_2 = \text{cov}(\mathcal{M})$. Em resumo temos a seguinte proposição:

Proposição 3.32. *O cardinal* $\text{cov}(\mathcal{M})$ *é o menor tamanho para um cardinal que satisfaz as propriedades dos conjuntos que definem* λ_1 *e* λ_2.

[11] A função cardinal π-peso não é monótona. O espaço $\beta\omega$ é testemunha para tal afirmação, pois $\pi w(\beta\omega) = \omega$, contudo $\pi w(\beta\omega \setminus \omega) = 2^\omega$. Por outro lado a função peso é claramente monótona.

■

Agora vamos tratar de resultados relacionados a H-separabilidade.

Teorema 3.33. *Se os subespaços densos de X são separáveis e $\pi w(X) < \mathfrak{b}$, então X é H-separável.*

Demonstração:

De início fixamos uma π-base $\mathcal{V} := \{V_\xi : \xi < \kappa\}$ para X, sendo $\kappa < \mathfrak{b}$, e $\langle D_n : n \in \omega\rangle$ uma sequência de subespaços densos de X. Por hipótese, para cada $n \in \omega$, existe denso enumerável $E_n := \{d_n^m : m \in \omega\}$ contido em D_n, logo E_n também é um subespaço denso de X. Disso segue que todo V_ξ em $\mathcal{V}$ possui intersecção não vazia com qualquer denso E_n. Dessa maneira, podemos definir a função:

$$f_\xi(n) := \min\{m \in \omega : d_n^m \in V_\xi\}$$

para $\xi < \kappa$.

Como κ é estritamente menor que $\mathfrak{b}$, existe $f^* \in {}^\omega\omega$ testemunha que a família $\{f_\xi : \xi < \kappa\}$ é limitada, i.e., para cada $\xi < \kappa$, o conjunto $\{i \in \omega : f^*(i) < f_\xi(i)\}$ é finito. Denote $F_n := \{d_n^j : j \leq f^*(n)\}$.

Afirmação: Se mostrarmos que qualquer elemento da π-base $\mathcal{V}$ é disjunto somente de um número finito de conjuntos da forma F_n, obtemos o desejado.

De fato, considere fixado um aberto U de X e seja família $E := \{V_\xi \in \mathcal{V} : V_\xi \subseteq U\}$. Definimos $f_U : \omega \to \omega$, pondo

$$f_U(n) := \min\{m : d_n^m \in U\}.$$

Fixado V_ξ em E, temos que $f_U \leq f_\xi \leq^* f^*$, e isso implica que $\{i < \omega : f^*(i) < f_U(i)\}$ é um conjunto finito. Seja $i \in \omega$ tal que $F_i \cap U = \emptyset$, portanto, $F_i := \{d_i^j : j \leq f^*(i)\}$ não contém pontos de U. Ora, $d_i^{f_U(i)} \in U$, logo $f^*(i) < f_U(i)$. Portanto, podemos concluir que o conjunto $\{i \in \omega : V_\xi \cap F_i = \emptyset\}$ está incluso no conjunto finito $\{i \in \omega : f^*(i) < f_\xi(i)\}$. Assim, obtemos o desejado.

Voltemos à demonstração. Do que acabamos de mostrar na afirmação acima, podemos concluir que dado $\xi < \kappa$. Se $n \in \omega$ é tal que $V_\xi \cap F_n = \emptyset$, então $f^*(n) < f_\xi(n)$. Portanto, $\{i \in \omega : V_\xi \cap F_i = \emptyset\}$ é incluso no conjunto finito $\{i \in \omega : f^*(i) < f_\xi(i)\}$. ■

Observação 3.34. Vejamos agora que é possível obter outra demonstração do teorema

3.28 fazendo uma adaptação da demonstração do teorema anterior.

Demonstração:

Tome uma π-base $\mathcal{V} := \{V_\zeta : \zeta < \kappa\}$ para X, sendo $\kappa < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$, e $\langle D_n : n \in \omega\rangle$ uma sequência de subespaços densos de X. Por hipótese, para cada $n \in \omega$, existe denso enumerável $E_n := \{d_n^m : m \in \omega\}$ contido em D_n, logo E_n também é um subespaço denso de X. Disso segue que todo V_ξ em $\mathcal{V}$ possui intersecção não vazia com qualquer denso E_n. Assim,podemos definir a função $f_\zeta(n) := \min\{m \in \omega : d_n^m \in V_\zeta\}$, para $\zeta < \kappa$. Como o tamanho mínimo de uma família que não é adivinhada é $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ e $\kappa < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$, então existe $f^* \in {}^\omega\omega$ que adivinha a família $\{f_\zeta : \zeta < \kappa\}$, i.e., para todo $\zeta < \kappa$, $\{n \in \omega : f^*(n) = f_\zeta(n)\}$ é infinito. Para encerrarmos a prova, tome a sequência $S = \{d_n^{f^*(n)} : n \in \omega\}$.

Afirmação: Qualquer elemento da π-base $\mathcal{V}$ intersecta S.

Fixe V_ξ em $\mathcal{V}$. Como f^* adivinha f_ξ, existe um certo $j < \omega$, tal que $f^*(j) = f_\xi(j) \in S$, por outro lado, pela definição de f_ξ segue que $d_n^{f^*(j)} = d_n^{f_\xi(j)} \in V_\xi$, logo $S \cap V_\xi$ é não vazio. Desse modo, fica justificada a afirmação acima.

Sendo $\mathcal{V}$ um π-base, qualquer aberto U de X intersecta S. Segue que S é denso em X como esperado. ■

Fato 3.35. *Suponhamos $\kappa < \mathfrak{b}$. Todo subespaço enumerável de 2^κ é H-separável.*

Demonstração:

Seja S um subespaço enumerável 2^κ. Qualquer subespaço de S é enumerável. Em particular qualquer denso em S é enumerável. Como todo espaço 2^κ tem base de tamanho κ, então $\pi w(S) \leq w(S) \leq \kappa < \mathfrak{b}$. De posse do Teorema 3.33, segue que todo subespaço S enumerável de 2^κ é H-separável. ■

Teorema 3.36. *O espaço topológico $2^\mathfrak{b}$ contém um subespaço denso enumerável que não é H-separável.*

Demonstração:

Para mostramos que um certo espaço topológico Y não é H-separável, devemos mostrar que existe uma sequência $\langle Y_n : n \in \omega\rangle$ de subespaços densos em Y, tal que para todo escolha de subconjuntos finitos F_n de Y_n, existe um aberto U de Y tal que $\{n \in \omega : U \cap F_n = \emptyset\}$ é infinito.

Começamos observando que sendo $\mathfrak{b} \leq 2^\omega$ e $d(2) = \omega$, segue do teorema de Hewitt-

Marczewsky-Pondiczery[12] que $d(2^{\mathfrak{b}}) = \omega$. Então podemos considerar $X = \{x_m : m \in \omega\}$ um subespaço denso de $2^{\mathfrak{b}}$. Além disso, considere também $\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\}$ um família ilimitada de funções de ${}^{\omega}\omega$. Dados $n, m \in \omega$, definimos as funções $y_n^m \in 2^{\mathfrak{b}}$ pondo:

$$y_n^m(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se}\, m < f_\alpha(n), \\ x_m(\alpha) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Denote $Y_n := \{y_n^m : m \in \omega\}$ e $Y := \bigcup\{Y_n : n \in \omega\}$.

Afirmação.1: A sequência de subconjuntos densos $\langle Y_n : n \in \omega\rangle$ será testemunha que o subespaço Y não é H-separável em $2^{\mathfrak{b}}$.

Vamos dividir a justificativa da afirmação acima em dois itens:
(i) Primeiramente, devemos provar que Y_n é denso em Y. Para isso é suficiente checar

que Y_n é denso em $2^{\mathfrak{b}}$. Sem perda de generalidade, vamos mostrar que para Y_n fixado sua interseção com qualquer aberto básico $[s]$ de $2^{\mathfrak{b}}$ é não vazio.Como dom(s) é um conjunto finito, podemos definir $g(n) := \max\{f_\alpha(n) : \alpha \in \text{dom}(s)\}$. Sabemos que qualquer aberto básico $[s]$ contém infinitos pontos de X, existe $x_m \in [s]$ tal que $m > g(n) \geq f_\alpha(n)$, segue pela definição da função y_n^m que $y_n^m(\alpha) = x_m(\alpha)$ para todo $\alpha \in \text{dom}(s)$ e sendo x_n uma extensão de s, segue daí que $y_n^m \restriction \text{dom}(s) = s$, em vista disso, temos $Y_n \cap [s]$ é não vazio. Logo Y_n é denso em $2^{\mathfrak{b}}$.

(ii) Para concluirmos a justificativa, devemos mostrar que para qualquer escolha de um subconjunto finito $F_n \subseteq Y_n$, existe um aberto U de $2^{\mathfrak{b}}$, tal que $\{n \in \omega : U \cap F_n = \emptyset\}$ é infinito. Façamos assim, tome $n \in \omega$ e considere F_n um subconjunto finito de Y_n dado por

$$F_n = \{y_n^{m_1}, y_n^{m_2}, ..., y_n^{m_i}\}$$

Note que podemos definir uma função $f \in {}^{\omega}\omega$ pondo $f(n)$ um número natural estritamente maior que m_i, assim $F_n \subseteq \{y_n^m : m < f(n)\}$. Como $\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\}$ é uma família ilimitada, então existe $\xi < \kappa$, tal que $f_\xi \not<^* f$, i.e., o conjunto $A = \{n \in \omega : f(n) < f_\xi(n)\}$ é infinito. Então se $n \in A$ e $y_n^m \in F_n$, temos que $m < f(n) < f_\xi(n)$. Segue por definição da função y_n^m que $y_n^m(\xi) = 1$, pois $m < f_\xi(n)$. Em outras palavras, temos que $y(\xi) = 1$ para todo $y \in F_n$ e $n \in A$. Isto significa que o aberto básico $[\{\langle \xi, 0\rangle\}] = \{x \in 2^{\mathfrak{b}} : x(\xi) = 0\}$ é disjunto de um número infinito de conjuntos F_n.

Juntando os itens (i) e (ii), podemos concluir que o espaço $Y \subseteq 2^{\mathfrak{b}}$, definido

[12]Vide [H].

inicialmente, é um subconjunto denso-enumerável que não é H-separável. ■

Corolário 3.37. $\mathfrak{b} = \min\{\pi w(Y) : |Y| = \omega, Y$ *não é H-separável*$\}$.

Demonstração:

Denote por $\kappa := \min\{\pi w(X) : |X| = \omega, X$ não é H-separável$\}$. Pelo Teorema 3.36, existe X subespaço enumerável de $2^{\mathfrak{b}}$ que não é H-separável. Então $\kappa \leq \pi w(X) \leq w(2^{\mathfrak{b}}) = \mathfrak{b}$, disso segue a desigualdade $\kappa \leq \mathfrak{b}$. Para a desigualdade contrária, suponha que $\kappa < \mathfrak{b}$. Por definição de κ, existe Y enumerável testemunha que $\kappa = \pi w(X)$ é estritamente menor que $\mathfrak{b}$, então pelo Teorema 3.33, temos que X é H-separável, contradizendo a minimalidade de κ. Deduzimos com isso que $\mathfrak{b} = \kappa$. Como queríamos demonstrar. ■

Vimos que o cardinal $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ atende as propriedades descritas na Proposição 3.32. Também ocorre um caso análogo para o cardinal $\mathfrak{b}$. Definidos os cardinais abaixo:

$$\kappa_1 := \min\{\kappa : 2^\kappa, \text{ existe}\, X \in [2^\kappa]^\omega,\ X \text{ não é}\, H\text{-separável}\}$$

$$\kappa_2 := \min\{\kappa : 2^\kappa, \text{ existe}\, X \in [2^\kappa]^\omega,\ X \text{ é denso que não é H-separável}\}$$

Podemos demonstrar usando as mesmas técnicas da Proposição 3.32 o seguinte resultado:

Proposição 3.38. $\mathfrak{b} = \kappa_1 = \kappa_2$.

■

Com uma simples adaptação do argumento usado em 3.33, apresentamos a demonstração do seguinte teorema:

Teorema 3.39. *Dado X um espaço topológico, se todo subespaço denso de X é separável e $\pi w(X) < \mathfrak{d}$, então X é M-separável.*

Demonstração:

Tome uma π-base $\mathcal{V} := \{V_\xi : \xi < \kappa\}$ para X, sendo $\kappa < \mathfrak{d}$, e $\langle D_n : n \in \omega\rangle$ uma sequência de densos subespaços de X. Por hipótese, para cada $n \in \omega$, existe denso enumerável $E_n := \{x_n^m : m \in \omega\}$ contido em D_n, logo E_n também é um subespaço denso de X. Disso segue que todo V_ξ em $\mathcal{V}$ possui intersecção não vazia com qualquer denso E_n. Dessa maneira, podemos definir a função $f_\xi(n) := \min\{m \in \omega : x_n^m \in V_\xi\}$, para $\xi < \kappa$. Como κ é estritamente menor que $\mathfrak{d}$, existe $h \in {}^\omega\omega$ testemunha que a família $\mathcal{F} := \{f_\xi : \xi < \kappa\}$ não é dominante em $\langle {}^\omega\omega, \leq\rangle$, i.e., existe $h \in {}^\omega\omega$ tal que para todo $\xi < \kappa$, existe certo $n_\xi \in \omega$ satisfazendo $f_\xi(n_\xi) < h(n_\xi)$. Vamos denotar $F_n := \{x_n^m : 0 \leq m \leq h(n)\}$.

Afirmação: Qualquer elemento da π-base $\mathcal{V}$ intersecta F_j algum $j \in \omega$.

Tome $V_\zeta \in \mathcal{V}$. Como h é tal que $h \not\leq f_\zeta$, então existe n_ζ, tal que $f_\zeta(n_\zeta) < h(n_\zeta)$. Isso implica que $x_{n_\zeta}^{f_\zeta(n_\zeta)} \in F_{n_\zeta}$. Por outro lado, segue da definição de f_ζ que $x_{n_\zeta}^{f_\zeta(n_\zeta)} \in V_\zeta$. Então $x_{n_\zeta}^{f_\zeta(n_\zeta)}$ testemunha que $V_\zeta \cap F_m$ é não vazio. Daí segue o desejado.

Voltando a demonstração. Pela afirmação acima, decorre que $\bigcup_{n\in\omega} F_n$ é denso em X. Isto resulta que X é M-separável. ∎

Destacamos que: Sob **MA** $+ \neg$**CH** é consistente que todo subespaço enumerável de 2^{ω_1} é M-separável. Com efeito, sob **MA** o cardinal $\mathfrak{d}$ é igual a $\mathfrak{c}$ e como não vale CH, temos que $\omega_1 < \mathfrak{c}$. Sendo a função peso hereditária e $w(2^{\omega_1}) = \omega_1$, ficamos com o seguinte: dado um subespaço X de 2^{ω_1}, $\pi w(X) \leq w(X) \leq w(2^{\omega_1}) = \omega_1 < \mathfrak{c}$. Se X é enumerável, então todo subconjunto denso de X também é enumerável. Diante disso, pelo teorema 3.39, concluímos que X é M-separável. O próximo corolário pode ser justificado fazendo uso de algumas modificações do que acabamos de destacar:

Corolário 3.40. *Se $\kappa < \mathfrak{d}$, então todo subespaço enumerável de 2^κ é M-separável* ∎

O próximo teorema está no artigo [BBMT].

Teorema 3.41. *O espaço $2^{\mathfrak{d}}$ contém um subespaço denso enumerável que não é M-separável.*

Demonstração:

Fixamos uma família $\mathcal{A}$ de funções de cofinal em $\langle {}^\omega\omega, \leq \rangle$ e que testemunha $|\mathcal{A}| = \mathfrak{d}$. Como $|\mathcal{A}|$ tem cardinalidade no máximo continuum, então podemos definir uma topologia sobre $\mathcal{A}$ com base enumerável. Pois bem, vamos denotar por $\mathcal{B}$ tal base de $\mathcal{A}$. Definimos $P := \{f \in 2^{\mathcal{A}}$: existe uma família finita e disjunta $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}$ tal que f é constante sobre os elementos de $\mathcal{V}$ e $f(\mathcal{A} \setminus \bigcup \mathcal{V}) = \{0\}\}$. O conjunto P é enumerável, pois fixado $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}$ finito o conjunto $\{f \in {}^{\mathcal{A}}2 : f$ é constante sobre cada elemento de $\mathcal{V}$ e $f(\mathcal{A} \setminus \bigcup \mathcal{V}) = 0\}$ tem cardinalidade $2^{|\mathcal{V}|}$, e como $\mathcal{B}$ é enumerável, temos que $|\mathcal{B}|^{<\omega}$. Diante disso podemos tomar uma enumeração $\{p_n : n \in \omega\}$ do conjunto P, onde cada elemento de P aparece infinitas vezes em P.

Fixamos $n, i \in \omega$ e $f \in \mathcal{A}$. Precisamos exibir um subespaço D de $2^{\mathfrak{d}}$ e uma família enumerável de subconjuntos densos de tal subespaço que testemunha que D não é M-separável. Para isso, começamos definindo a função :

$$d_i^m(f) = \begin{cases} p_n(f) & \text{se } f(m) < n, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Afirmação.1. Dado $n \in \omega$. O conjunto $D_n := \{d_i^m : i \in \omega\}$ é denso no subespaço $2^{\mathcal{A}}$. Segue imediatamente disso que $\displaystyle\bigcup_{n\in\omega} D_n$ é denso em $2^{\mathcal{A}}$.

Para justificarmos tal afirmação, basta mostrarmos que D_n intersecta qualquer aberto básico de $2^{\mathcal{A}}$. Seja A um subconjunto finito de $\mathcal{A}$ e a função $s : A \to 2$. Para demonstrarmos que D_n é denso, temos que mostrar que existe $p_i \in P$ tal que $d_i^n(p_i(g)) = s(g)$, para todo $g \in A$. Pois bem, tomando a família $\mathcal{V} := \{U_g : g \in A\}$ de subconjuntos de $\mathcal{B}$, sendo F um espaço de Hausdorff, podemos considerar $\mathcal{V}$ um família de abertos disjuntos. Note que é possível tomar $p_i \in P$ tal que $p_i(g) = s(g)$, com $p_i(\bigcup_{g\in A} U_g) = 0$. Como n é fixado e p_i aparece infinitas vezes em P, então existe $j \in \omega$ tal que $j \geq g(n)$ e $p_i = p_j$. Logo, $d_i^m(g) = p_i(g) = p_j(g) = s(g)$, para todo $g \in A$. Portanto, $d_i^n \upharpoonright A = s$ e assim fica demonstrada nossa afirmação.

Pelo que vimos $D =: \{D_n : n \in \omega\}$ é uma família de subconjuntos densos de $2^{\mathcal{A}}$, ademais, sendo $2^{\mathfrak{d}}$ homeomorfo a $2^{\mathcal{A}}$, temos que D é uma família de subconjuntos densos de $2^{\mathfrak{d}}$. Para terminarmos a prova, fixe um conjunto finito $F_n \subseteq D_n$. Tomamos $h \in {}^{\omega}\omega$ pondo $h(n) = \max\{i : d_i^n \in K_n\} + 1$, sendo $\mathcal{A}$ uma família cofinal em $\langle {}^{\omega}\omega, \leq\rangle$, com $|\mathcal{A}| = \mathfrak{d}$, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $F_n \subseteq \{d_i^m : i < f(n)\}$ para todo $n \in \omega$ e $i < f(m)$, o que mostra que $t(f) = 0$ para todo $t \in F := \bigcup_{n\in\omega} F_n$. Dessa forma, F não é denso em $2^{\mathcal{A}}$, pois o aberto $[\{\langle f, 1\rangle\}]$ testemunha isso. Deduzimos que a família $\{D_n : n \in \omega\}$ testemunha que o espaço D não é M-separável, como desejado. ■

Corolário 3.42. $\mathfrak{d} = \min\{\pi w(X) : X$ *é enumerável e* X *não é* M*-separável*$\}$.

■

Com argumentos vistos anteriormente, também podemos demonstrar facilmente a validade das igualdades abaixo:

$$\mathfrak{d} = \min\{\kappa : 2^{\kappa}, \text{ existe } X \in [2^{\kappa}]^{\omega},\ X \text{ não é } M\text{-separável}\}$$
$$\mathfrak{d} = \min\{\kappa : 2^{\kappa}, \text{ existe } X \in [2^{\kappa}]^{\omega},\ X \text{ é denso que não é M-separável}\}$$

3.5.1 Jogos Conjuntísticos

Para essa seção, iremos estudar dois jogos: $G_2(\kappa)$ e $G_4(\kappa)$, onde κ é um cardinal infinito não-enumerável. Os jogos que serão estudados nos dão caracterizações dos invariantes cardinais: $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ e $\mathrm{add}(\mathcal{M})$. No que segue, o símbolo φ denotará, como na seção 1.5 *uma estratégia arbitrária do jogador UM*. Na seção 1.5, vimos que se UM joga, segundo uma estratégia arbitrária φ, o jogo $G_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, então sabemos que existem conceitos que estarão ligados a estratégia φ, por exemplo: árvore correspondente a φ e sequência vencedora de lances (ou sequência que derrota φ). Tais conceitos podem ser facilmente traduzidos e moldados de acordo com os jogos e objetos envolvidos no contexto dessa subseção.

A referência adotada para essa subseção é [Scheep2].

Definição 3.43. Seja κ um cardinal infinito. Definimos o jogo $G_2(\kappa)$ da seguinte maneira: O jogador UM na n-ésima rodada joga uma família $\mathcal{U}_n := \{U_n^m : n < \omega\} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ que decompõe κ, i.e, $\bigcup \mathcal{U}_n = \kappa$, e $DOIS$ responde escolhendo $U_n^m \in \mathcal{U}_n$. $DOIS$ vence o jogo se $\kappa = \bigcup\{U_n^m : m \in \omega\}$. Caso contrário, UM ganha.

Abaixo, definimos uma *estratégia* para UM, referente ao jogo $G_2(\kappa)$:

Definição 3.44. Uma estratégia para UM no jogo $G_2(\kappa)$ é uma função:

$$\varphi : {}^{<\omega}\mathcal{P}(\kappa) \to \{\mathcal{A} \in [\mathcal{P}(\kappa)]^{\aleph_0} : \bigcup \mathcal{A} = \kappa\}.$$

O seguinte fato será útil na demonstração do Teorema 3.46 na implicação: $(ii) \Rightarrow (i)$.

Fato 3.45. *Dados um conjunto $F \subseteq {}^{\omega}\omega$ fechado de interior vazio e $[s]$ um aberto básico de ${}^{\omega}\omega$, então existe um aberto básico que contido em $[s]$ que é disjunto de F.*

Demonstração:

Seja F um subconjunto de ${}^{\omega}\omega$ cujo interior é vazio, então existe $t \in [s]$ tal que $t \notin F$. Como ${}^{\omega}\omega \setminus F$ é um conjunto aberto, $t \in [q] \subseteq {}^{\omega}\omega$ para algum $q \in {}^{<\omega}\omega$. Sendo $[s] \cap [q]$ um conjunto aberto, então podemos tomar um aberto $[w]$ tal que $t \in [w] \subseteq [q] \cap [s]$. Claramente, o aberto $[w]$ testemunha o desejado. ■

Para os Teoremas 3.46 e 3.52, faremos uso da seguinte notação:

$$U_{[s]} := \langle U_{s(0)}, U_{s(0)s(1)}, ..., U_{s(0)s(1)...s(n-1)} \rangle,$$

onde $U_{[s]} \subseteq \kappa$, para $s \in {}^{<\omega}\omega$.

Teorema 3.46. *Fixado um cardinal κ, as seguintes são equivalentes:*

(i) $\kappa < \text{cov}(\mathcal{M})$.

(ii) UM *não tem a estratégia vencedora em* $G_2(\kappa)$*;*

Demonstração:

$(i) \Rightarrow (ii)$: Sejam $s \in {}^{<\omega}\omega$ e uma estratégia φ para o jogador UM. Então os lances de UM ficam definidos como:
$U_{\langle\rangle} := \kappa$;
$\varphi(U_{[s]}) := \{U_{s^\frown m} : m \in \omega\}$.

Queremos demonstrar que se $\kappa < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$, então existe uma sequência $g \in {}^{\omega}\omega$ que derrota a estratégia φ, ou seja, se o jogador $DOIS$ responde o i-ésimo lance com o subconjunto $U_{g\restriction i+1}$, então $DOIS$ vencerá o jogo $G_2(\kappa)$. Começamos fixando $\alpha < \kappa$, defina $G_\alpha := \{h \in {}^{\omega}\omega : \alpha \notin \bigcup\limits_{i\in\omega} U_{g\restriction i+1}\}$.

Afirmação: $D_\alpha := {}^{\omega}\omega \setminus G_\alpha$ é um aberto denso.

De fato, fixado $h \in D_\alpha$, existe $i \in \omega$ tal que $\alpha \in U_{h\restriction_{i+1}}$. Logo, $[h \restriction_{i+1}]$ é uma vizinhança básica de h e, obrigatoriamente, qualquer função f que estenda $h \restriction_{i+1}$ testemunha que $\alpha \in U_{f\restriction_{i+1}}$, portanto, $[h \restriction_{i+1}] \subseteq D_\alpha$, i.e., D_α é aberto. Falta mostrarmos que D_α é denso em ${}^{\omega}\omega$, i.e., qualquer aberto básico possui intersecção não vazia com D_α. Para isso, tome um aberto básico $[s]$, onde $\mathrm{dom}(s) = n$. Dividimos em dois casos:

(a) Note que se caso $\alpha \in \bigcup\limits_{0\leq i<n} U_{[s\restriction_{i+1}]}$, então existe $j \in \mathrm{dom}(s)$ onde $\alpha \in U_{[s\restriction_j]}$. Logo, $[s] \subseteq [s \restriction_j] \subseteq D_\alpha$.

(b) Se $\alpha \notin \bigcup\limits_{0\leq i<n} U_{[s\restriction_{i+1}]}$, pela estratégia de UM existe um $m_0 \in \omega$ tal que $\alpha \in U_{s^\frown m_0}$, disso podemos concluir que qualquer extensão h de $s^\frown m_0$ será um extensão de s e, mais ainda, $\alpha \in U_{h\restriction_k}$, para todo $k \in \omega$, ou seja, $[s^\frown m] \subseteq [s] \cap D_\alpha$ é não vazio. Deduzimos que D_α é um conjunto denso em ${}^{\omega}\omega$.

Agora, sendo $\{G_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma família de conjuntos fechados-raros e $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) > \kappa$, então existe $g \in {}^{\omega}\omega$ tal que $g \in D_\alpha$, para todo $\alpha < \kappa$. Logo, existe $i_\alpha \in \omega$ tal que $\alpha \in U_{g\restriction_{i_\alpha+1}}$ e, portanto, $\alpha \in U_{g\restriction_m}$ para todo $m \geq i_\alpha$. Disso, decorre que $\kappa = \bigcup_{m<\omega} U_{g\restriction_m}$, ou seja, $DOIS$ vence o jogo $G_2(\kappa)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sendo κ um cardinal e assuma que UM não tem estratégia vencedora. Nosso objetivo é mostrar que dada uma família de conjuntos fechados-raros ela não cobre ${}^{\omega}\omega$. Começamos pelo seguinte, sendo ${}^{<\omega}\omega$ enumerável, fixamos uma enumeração ${}^{<\omega}\omega := \{t_n : n \in \omega\}$. Considere $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$, com F_α um conjunto fechado-raro. Vamos definir uma estratégia φ para UM no jogo $G_2(\kappa)$, do seguinte modo: como F_α é um conjunto fechado-raro, então dada $s \in {}^{<\omega}\omega$, pelo fato 3.45, podemos definir:

$$U_{s^\frown t_n} := \{\alpha < \kappa : n = \min\{j \in \omega : F_\alpha \cap [s^\frown t_j] = \emptyset\}\}$$

Então dados $s_0, s_1, ..., s_m \in {}^{<\omega}\omega$, se $DOIS$ joga $\langle U_{s_0}, U_{s_0^\frown s_1}, ..., U_{s_0^\frown s_1^\frown s_2^\frown ...^\frown s_m}\rangle$ então UM responderá:

$$\varphi(\langle U_{s_0}, U_{s_0^\frown s_1}, ..., U_{s_0^\frown s_1^\frown s_2^\frown ...^\frown s_m}\rangle) := \{U_{s_0^\frown s_1^\frown s_2^\frown ...^\frown s_m^\frown t_k} : k \in \omega\}.$$

Como UM não tem estratégia vencedora, então existe uma sequência:

$$\langle U_{w_0}, U_{w_0^\frown w_1}, ..., U_{w_0^\frown w_1^\frown w_2^\frown ...^\frown w_m}, ...\rangle$$

tal que $DOIS$ vence o jogo $G_2(\kappa)$, i.e., $\bigcup\limits_{k\in\omega} U_{w_0^\frown w_1^\frown w_2^\frown ...^\frown w_k}$ cobre κ. Agora basta checarmos que $f := \bigcup_{k\in\omega} w_0{}^\frown w_1{}^\frown w_2{}^\frown ...{}^\frown w_k \notin F_\alpha$, para todo $\alpha < \kappa$. Para um $\alpha < \kappa$ fixado, existe $j \in \omega$ mínimo tal que $\alpha \in U_{w_0^\frown w_1^\frown w_2^\frown ...^\frown w_j}$. Por definição, $[w_0{}^\frown w_1{}^\frown w_2{}^\frown ...{}^\frown w_j] \cap F_\alpha = \emptyset$ e como $f \in [w_0{}^\frown w_1{}^\frown w_2{}^\frown ...{}^\frown w_j]$, segue o desejado. Portanto, $f \notin \bigcup_{\alpha<\omega} F_\alpha$. ■

Segue do teorema anterior que:

$$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \min\{\kappa : UM \text{ tem estratégia vencedora no jogo } G_2(\kappa)\}.$$

Observação 3.47. Veja que na prova de $(i) \Rightarrow (ii)$ do Teorema 3.46, quando uma estratégia φ é fixada para o jogador UM, sempre temos definada uma família de conjuntos fechados de interior vazio.

Definição 3.48. Seja κ um cardinal infinito. Definimos o jogo $G_4(\kappa)$ da seguinte maneira: o jogador UM na n-ésima rodada joga a família $\mathcal{U}_n := \{U_n^m : m < \omega\}$, onde $U_n^m \subseteq \kappa$, $\bigcup \mathcal{U}_n = \kappa$, e o jogador $DOIS$ escolhe um elemento $U_n^{m_n} \in \mathcal{U}_n$. $DOIS$ vence o jogo se existe uma função crescente $h : \omega \to \omega$ tal que para cada $\alpha < \kappa$,

$$\exists n(\alpha) \in \omega\,, \forall n \geq n(\alpha) \;\; \alpha \in \bigcup_{h(n)\leq j<h(n+1)} U_j^{m_j}.$$

Caso contrário, UM ganha.

As definição de estratégia para o jogador UM em $G_4(\kappa)$ obedece a mesma noção da estratégia de UM no jogo $G_2(\kappa)$. Já comentamos isto no início dessa subseção, mas para fixarmos as ideias: os conceitos relacionados a uma estratégia arbitrária de UM para o jogo $G_4(\kappa)$, essencialmente, são os mesmos, com suas devidas adaptações.

Observação 3.49. Uma estratégia vencedora para UM em $G_2(\kappa)$ é, ela própria, uma estratégia vencedora para UM em $G_4(\kappa)$. Argumentando por contra-positiva, considere φ uma estratégia para UM que não é vencedora em $G_4(\kappa)$, então existe uma sequência $f \in {}^{\omega}\omega$ que derrota φ. Sendo $\langle U_n^{f(n)} : m < \omega\rangle$ os lances de $DOIS$ que respondem aos lances de UM, que joga segundo φ, sabemos que $DOIS$ ganhou $G_4(\kappa)$, ou seja, existe uma função crescente $h : \omega \to \omega$ tal que para cada $\alpha < \kappa$,

$$\exists m(\alpha) \in \omega\,, \forall m \geq m(\alpha) \;\; \alpha \in \bigcup_{h(m)\leq j<h(m+1)} U_j^{f(j)}.$$

Isso implica que $\{U_n^{f(n)} : n < \omega\}$ é uma cobertura para κ. Logo, se UM joga segundo uma estratégia φ que não é vencedora, concluímos que $\{U_n^{f(n)} : n < \omega\}$ cobre κ, então $DOIS$ vence o jogo $G_2(\kappa)$. Diante disso, φ acaba sendo derrotada por $f \in {}^{\omega}\omega$ no jogo $G_2(\kappa)$, então φ não é uma estratégia vencedora para UM no jogo $G_2(\kappa)$.

Iremos apresentar uma caracterização do invariante cardinal $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ envolvendo o jogo $G_4(\kappa)$. Mas antes, daremos uma definição importante para o nosso objetivo:

Definição 3.50. Dada uma função $f \in {}^{\omega}\omega$ definimos a função $m_f \in {}^{\omega}\omega$ pondo $m_f(n) := \max\{f(j) : j \leq n\}$.

Observação 3.51. É claro que m_f é monótona não-decrescente, e sendo g uma função de ${}^{\omega}\omega$ tal que $m_f \leq^* g$, então $f \leq^* g$. Esta observação garante que : Dada uma família $\mathcal{F} \subseteq {}^{\omega}\omega$ de tamanho κ se pudermos construir a família $\mathcal{F}^* := \{m_f : f \in \mathcal{F}\}$ de tamanho κ e mostrarmos que $\mathcal{F}^*$ é limitada, então a família $\mathcal{F}$ será limitada com mesmo limitante superior.

Teorema 3.52. *Fixado um cardinal κ, as seguintes são equivalentes:*

(i) UM não tem a estratégia vencedora em $G_4(\kappa)$;

(ii) $\kappa < \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{cov}(\mathcal{M})\}$.

Demonstração:

$(i) \Rightarrow (ii)$: Temos que mostrar que $\kappa < \mathfrak{b}$ e $\kappa < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$. Primeiro mostraremos que $\kappa < \mathfrak{b}$, para isso basta mostrarmos que a dada uma família de funções de ${}^{\omega}\omega$ de tamanho κ existe $f \in {}^{\omega}\omega$ que testemunha que ela é limitada. Desse modo, dada uma família $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq {}^{\omega}\omega$ e pela observação consecutiva a Definição 3.50, sem perda de generalidade, podemos supor que cada f_α é monótona não-decrescente. Considere uma partição de κ dada por $\{U_n^m : n, m < \omega\}$, onde $U_n^m := \{\alpha < \kappa : f_\alpha(n) = m\}$. Seja φ uma estratégia de UM dada por:

$$\varphi : {}^{<\omega}\mathcal{P}(\kappa) \to \{\mathcal{A} \in [\mathcal{P}(\kappa)]^{\aleph_0} : \bigcup \mathcal{A} = \kappa\}$$

que será constante para sequências de ${}^{<\omega}\mathcal{P}(\kappa)$ que possuem o mesmo comprimento. Como UM não possui estratégia vencedora, existe uma sequência de lances $\langle U_0^{m_0}, U_1^{m_1}, ..., U_n^{k_n}, ...\rangle$ que derrota φ, ou seja, por definição, existe $h \in {}^{\omega}\omega$ tal que para cada $\alpha < \kappa$, existe $n(\alpha) \in \omega$ onde

$$\alpha \in \bigcup_{h(n) \leq j < h(n+1)} U_j^{k_j}$$

para todo $n \geq n(\alpha)$.

Definimos a função $f \in {}^{\omega}\omega$ pondo $f(0) := m_0$ e $f(n) := \max\{m_j : h(n) \leq j \leq h(n+1)\}$. Para $\alpha < \kappa$ fixado, temos que existe $n(\alpha)$. Temos de checar que $\{t : f(t) < f_\alpha(t)\}$ é finito. Para isso, fixado $t \geq n(\alpha)$ temos que $\alpha \in \bigcup_{h(t) \leq j < h(t+1)} U_j^{k_j}$. Portanto, existe $l \in [h(t), h(t+1))$ onde $\alpha \in U_l^{k_l}$. Segue por definição de $U_l^{k_l}$ que $f_\alpha(l) = k_l$ e diante disso, decorre que $f_\alpha(l) = k_l \leq f(t)$. Sendo $t \leq h(t)$ e $h(t) \leq l$, então $t \leq l$. Como a função f_α é monótona, deduzimos que $f_\alpha(t) \leq f_\alpha(l)$, e sendo $f_\alpha(l) = k_l \leq f(t)$ concluímos que $f_\alpha(t) \leq f(t)$. Como $t \geq n(\alpha)$ é dado, então $\{t : f(t) < f_\alpha(t)\}$ é finito, ou seja, $f_\alpha \leq^* f$, para $\alpha < \kappa$. Da observação 3.49, segue $\kappa < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ e, portanto, $\kappa < \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{cov}(\mathcal{M})\}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Seja $\kappa < \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{cov}(\mathcal{M})\}$. Considere φ uma estratégia para UM e $s \in {}^{<\omega}\omega$. Se UM joga segundo sua estratégia, temos definido:

$$\varphi(\langle\rangle) := \{U_{\langle m\rangle} : m \in \omega\}$$

$$\varphi(U_{[s]}) := \{U_{s^\frown m} : m \in \omega\}$$

Para provarmos (i), Precisamos exibir os seguintes objetos:

(a) A sequência $g \in {}^{\omega}\omega$ que derrota φ;

(b) A sequência $h \in {}^{\omega}\omega$ estritamente crescente tal que $DOIS$ vence o jogo $G_4(\kappa)$, i.e., para uma quantidade infinita de naturais, vale

$$\alpha \in \bigcup_{h(n) \leq j < h(n+1)} U_{g\restriction j+1}$$

Na prática sabemos que as únicas estratégias de interesse para UM são tais que as respostas para UM são tais que as respostas para cada α não são limitadas em índices, isso motiva a definição para seguinte função: Dado $\alpha < \kappa$

$$g_\alpha(0) := \min\{m : \alpha \in U_{\langle m\rangle}\};$$

$$g_\alpha(n+1) := \min\{k > g_\alpha(n) : [\forall i, j \leq g_\alpha(n)][\forall p \in {}^{i+1}(j+1) \exists\, m \in \omega \operatorname{com} g_\alpha(n) \leq m < k](\alpha \in U_{p^\frown m})\}.$$

Pela Observação 3.47 sempre temos uma família de conjuntos fechados de interior vazio dada por um estratégia de UM. Assim, fica bem definida a função g_α, para cada $\alpha < \kappa$.

Como $\kappa < \mathfrak{b}$, então a família $\{g_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\}$ é ilimitada, isto é, fixado $\alpha < \kappa$ existe $n_{(\alpha)} \in \omega$ tal que para todo $n \geq n_{(\alpha)}$, vale $g_\alpha(n) < f(n)$.Denote $X := \prod_{n\in\omega}[0, f(0)]$, onde $[0, f(n)]$ é um conjunto com a topologia discreta. Dado $\alpha < \kappa$, defina $G^n_\alpha := \{g \in X : (\forall n \geq n_0)(\alpha \notin U_{g\restriction_{k+1}})\}$.

Vamos provar que G^n_α é um conjunto fechado e raro. Para isso, basta checar que $D^n_\alpha := X \setminus G^n_\alpha$ é aberto-denso:

Aberto: Para isso fixe $g \in D^n_\alpha$ e $k \geq n_\alpha$. Tome $[g \restriction_{k+1}]$ vizinhança aberta de g e, claramente, qualquer $h \in [g \restriction_{k+1}]$ cumpre com $h \restriction_{k+1} = g \restriction_{k+1}$. Portanto, $\alpha \in U_{h\restriction_{k+1}}$. Desse modo, $[g \restriction_{k+1}] \subseteq D^n_\alpha$, ou seja , D^n_α é aberto.

Denso: Fixado $\alpha < \kappa$ e dado um aberto básico $[t]$, queremos mostrar que sua intersecção com D_α é não vazia, i.e., que existe $h \in {}^\omega\omega$ que estende t e $\alpha \in U_{h\restriction_{k+1}}$, para todo $n \geq n_\alpha$. Sejam $\operatorname{dom}(t) = j$ e n_α definido acima, tome $l > \max\{j, n(\alpha)\}$ e, como g_α é estritamente crescente, segue que $l < g_\alpha$. Fazendo $p := t^\frown g \restriction_{[j+1,l]}$, temos que $p \in {}^{g(l)+1}g(l) + 1$. Por definição da g_α, existe $m \in \omega$ tal que $\alpha \in U_{p^\frown m}$. Logo, dada $f \in {}^\omega\omega$ que estenda $p^\frown m$ também estenderá t, mais ainda, $\alpha \in U_{f\restriction_{k+1}}$ para todo $k \geq n(\alpha)$. O que acabamos de mostrar é que dado um aberto $[t]$ sua intersecção com D^n_α é sempre diferente do vazio, portanto, segue que D^n_α é denso.

Então mostramos acima, que para cada $\alpha < \kappa$, o conjunto D^n_α é aberto-denso e isso implica que G^n_α é um conjunto fechado-raro. Sendo $\kappa < \operatorname{cov}(\mathcal{M})$, existe $g \in X \setminus \bigcup\limits_{\alpha<\kappa} G^n_\alpha$ e fixado α, o conjunto $\{j \in \omega : \alpha \in U_{g\restriction j+1}\}$ é infinito. Assim podemos definir

$$h_\alpha(0) := \min\{k < \omega : (\exists j < k)(\alpha \in U_{g\restriction j+1})\};$$
$$h_{\alpha(n+1)} := \min\{k > h_\alpha(n) : (\exists j \in [h_\alpha(n), k))\alpha \in U_{g\restriction_{j+1}})\}$$

Novamente, como a família das funções h_α tem tamanho $\kappa < \mathfrak{b}$, então existe $r \in {}^\omega\omega$ que testemunha $h_\alpha \leq^* r$, para todo $\alpha < \kappa$. Claramente, podemos assumir que $r(0) > 0$. Precisamos construir a função h descrita no começo da demonstração, vamos defini-la do seguinte modo

$$h(n) = r^{2^{n+1}}(0)$$

ou seja, definimos h pondo $h(n)$ como a 2^{n+1}-ésima iterada de r no ponto 0. Agora, basta checar que dado $\alpha < \kappa$, ele pertence a infinitos conjuntos da forma $\bigcup_{h(n)\leq j<h(n+1)} U_{g\restriction_{j+1}}$, ou

seja, essencialmente, temos que demonstrar que existem infinitos intervalos $[h(n), h(n+1))$. Então começamos fixando α e um natural M tal que $h(n) < r(n)$, para todo $n \geq M$(lembre que a família das f_α é limitada por r). Como h é estritamente crescente, tome $k \geq 3$ tal que $M < h(k) + 1$. Sendo h_α estritamente crescente, vale $h(k) < h_\alpha(k+1)$ e por outro lado, $h_\alpha(h(k)+1) < r(h(k)+1)$. Deduzimos disso, que $h(k) < h_\alpha(h(k)) < h_\alpha(h(k)+1) < h(k+1)$, ou seja, $[h(k), h(k+1))$, com $k \geq M$, sempre contém um intervalo da forma $[h_\alpha(h(k)), h_\alpha(h(k)+1))$. Segue por definição de $h_\alpha(h(k)+1)$ que existe $j \in [h_\alpha(h(k)), h_\alpha(h(k)+1))$ tal que $\alpha \in U_{g\restriction_j}$, disso segue o resultado. ■

Segue do teorema anterior que

$$\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \min\{\kappa : UM \text{ tem estratégia vencedora no jogo } G_4(\kappa)\}.$$

Observe que já mostramos neste trabalho que $\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{cov}(\mathcal{M})\}$, assim com uma variação de argumentos, prova-se:

Teorema 3.53. $\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \min\{|X| : X \subseteq {}^\omega\omega$ *e não existe* $f, g \in {}^\omega\omega$ *tal que* f *é estritamente crescente e para todo* $x \in X$ *e para todo* n*, exceto uma quantidade finita de* n*, existe* $j \in [f(n), f(n+1))$ *tal que* $x(j) = g(j)\}$.

■

A seguinte propriedade será dada com objetivo de relaciona-lá ao teorema que acabamos de demonstrar. Tal propriedade fornece uma prova alternativa da versão dada por Miller em [M89] para a igualdade: $\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{cov}(\mathcal{M})\}$.

A(κ): Dada uma sequência $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega \rangle$ de partições de um dado conjunto X de cardinalidade κ, tal que $\mathcal{U}_n := \{U_n^m : m \in \omega\}$, existem $f \in {}^\omega\omega$ estritamente crescente e $\langle U_n^{m_n} : n \in \omega \rangle$ tal que o conjunto

$$A_x := \left\{ i \in \omega : x \notin \bigcup_{f(i) \leq j < f(i+1)} U_j^{m_j} \right\}$$

é finito, para todo $x \in X$.

No artigo [Scheep2] é provado que:

Proposição 3.54. *Dado um cardinal κ infinito as seguintes asserções são equivalentes:*

(*i*) *UM não tem estratégia vencedora em* $G_4(\kappa)$.

(ii) Vale $A(\kappa)$.

■

Do Teorema 3.52, vimos que $\kappa < \text{add}(\mathcal{M})$ se, e somente se, UM não tem estratégia vencedora em $G_4(\kappa)$. Juntando isso a proposição anterior, podemos deduzir que:

Teorema 3.55. $\text{add}(\mathcal{M}) = \min\{\kappa : A(\kappa)$ *falha*$\}$.

■

O teorema que acabamos de enunciar, será utilizado na próxima subseção.

3.5.2 A versão em Separabilidade da Propriedade de Gerlits-Nagy

Para o que segue, os espaços adotados nessa seção satisfazem $T_3 + T_1$. Lembramos que uma partição de um conjunto X é uma família de subconjuntos de X dois-a-dois disjuntos cuja união é X.

Um espaço topológico X tem a *propriedade de Gerlits-Nagy* se dada uma sequência $(\mathcal{U}_n : n \in \omega)$ de coberturas abertas de X existe uma partição $\{X_n : n \in \omega\}$ de X tal que para cada $n, m \in \omega$ existem k, j tal que $m < k < j$ e existem $U_i \in \mathcal{U}_i, k \leq i \leq j$, onde $X_n \subseteq \bigcup\{U_i : k \leq i \leq j\}$.

O próximo teorema é demonstrado em [NSW], e faz uma relação com a propriedade de Gerlits-Nagy.

Teorema 3.56. *As seguintes são equivalentes:*

(i) X tem a Propriedade de Gerlits-Nagy.

(ii) Dada uma sequência $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega \rangle$ de coberturas abertas de X, existe uma sequência $\{m_n : n \in \omega\}$ e uma função $f \in {}^\omega\omega$ estritamente crescente, tal que dado $x \in X$, para algum $n(x) \in \omega$, temos

$$x \in \bigcup_{f(i) \leq n < f(i+1)} U_n^{m_n}$$

para todo $i \geq n(x)$.

(iii) X tem a propriedade de Rothberger e Hurewicz[13].

Definição 3.57. Seja D um subconjunto denso de X:

[13]Ambas são definidas no apêndice **B**.

(i) Diz-se que D é *grupável* se existe uma família $\{A_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos não-vazios e finitos de X que particionam D, com a propriedade que dado U aberto de X existe $n_0 \in \omega$ tal que para todo $n \geq n_0$, $U \cap A_n \neq \emptyset$.

(ii) Dizemos que X é *ω-resolúvel* se pode ser particionado em $\aleph_0$ subconjuntos densos dois-a-dois disjuntos.

A próxima definição que daremos, segue o padrão do que fizemos no Capítulo 1. Pois bem, dado um espaço topológico X, definimos o princípio de seleção $S_1(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X^{gp})$ como sendo a afirmação que: *A cada sequência $(D_n : n \in \omega)$ de subconjuntos densos de X existe $d_n \in D_n$ tal que $\{d_n : n \in \omega\}$ é denso grupável.*

A seguinte conceito foi introduzido em [DKL]:

Definição 3.58. Um espaço X é dito *GN-separável* se satisfaz $S_1(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X^{gp})$.

O Teorema 3.56 motiva a pergunta:

Sob quais hipóteses a propriedade de GN-separabilidade equivale a R-separabilidade mais H-separabilidade?

Para o restante dessa subseção, trataremos de seguir a linha de estudo para obtermos a resposta da pergunta acima. Primeiramente, começamos evidenciando ao leitor que um denso D-grupável é obrigatoriamente ω-resolúvel. De fato, seja X um espaço topólogico e D um denso grupável de X. Então, por definição, existe uma família $\{A_n : n \in \omega\}$ que é partição de D. Considere uma partição de ω em infinitos conjuntos infinitos, digamos $\{C_n : n \in \omega\}$. Sendo D um denso grupável, fixado um aberto U de X, para algum $n_0 \in \omega$, $U \cap A_n \neq \emptyset$, para todo $n \geq n_0$. Agora, defina $D_n := \bigcup\{A_n : n \in C_n\}$, como para todo $n \in \omega$ o conjunto C_n é ilimitado, logo D_n é denso em X. Desse modo, concluímos que a família $\{D_n :\in \omega\}$, cujos elementos são dois-a-dois disjuntos, particiona D em ω subconjuntos densos, logo $\{D_n : n \in \omega\}$ testemunha que D é ω-resolúvel.

Observação 3.59. Sejam D e D' dois conjuntos densos, distintos e enumeráveis de X, $D' \subseteq D$, onde D' é denso grupável, com isso podemos afirmar que D também é denso grupável. De fato, sendo D' um denso grupável, existe uma partição $\{A_n : n \in \omega\}$ de D', com A_n finito e não vazio, tal que o conjunto $\{A_n : U \cap A_n = \emptyset\}$ é finito. Analisamos dois casos:
(i) Se $D \setminus D'$ for finito, então $\{A_n : n \in \omega\} \cup \{D \setminus D'\}$ é claramente uma partição que atende a definição para D ser grupável, pois qualquer aberto U de X intersecta D, por conta de sua densidade, e também será disjunto de uma quantidade finita de elementos

de $\{A_n : n \in \omega\} \cup \{D \setminus D'\}$, pois U é disjunto de um número finito de elementos de $\{A_n : n \in \omega\}$.
(ii) Se $D \setminus D'$ for infinito e enumerável, tome uma enumeração de $D \setminus D' = \{d_n : n \in \omega\}$ e considere a família $\{A_n \cup \{d_n\} : n \in \omega\}$, também é evidente que tal família particiona D e cada aberto U de X é disjunto de uma quantidade finita de elementos de $\{A_n \cup \{d_n\} : n \in \omega\}$.

Vamos apresentar a demonstração da seguinte proposição:

Proposição 3.60. *As seguintes são equivalentes:*

(i) *X é GN-separável.*

(ii) *X é R-separável e todo subespaço denso enumerável de X contém um denso grupável.*

Demonstração:

$(i) \Rightarrow (ii)$: Suponha que X seja GN-separável. Seja D um conjunto denso em X, tal que D é enumerável. Como X é GN-separável, tome $D_n := D$, para todo $n \in \omega$. Portanto, existe $\{p_n : n \in \omega\}$ denso grupável em X, onde $p_n \in D_n = D$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Suponha que X seja R-separável. Então dada uma família de densos de X, digamos $\{D_n : n \in \omega\}$, existe $p_n \in D_n$ tal que $\{p_n : n \in \omega\}$ é denso em X. Por hipótese, temos que $D' \subseteq \{p_n : n \in \omega\}$ é um denso grupável. Pela Observação 3.59, temos que $\{p_n : n \in \omega\}$ é denso grupável

$\blacksquare$

Fato 3.61. *Se X é H-separável, então todo subespaço denso de X que seja ω-resolúvel é um denso grupável.*

Demonstração:

Tome D um subconjunto denso e enumerável de X que é ω-resolúvel. Seja $\{A_n : n \in \omega\}$ a família de densos dois-a-dois disjuntos que particiona D. Usando a hipótese que X é H-separável, existe finito $F_n \subseteq A_n$, tal que dado U aberto em X, existe $n_0 \in \omega$, satisfazendo $F_n \cap U \neq \emptyset$, para todo $n \geq n_0$. Então a família $\{F_n : n \in \omega\}$ é uma partição de $\bigcup_{n\in\omega} F_n$ que testemunha que $\bigcup_{n\in\omega} F_n \subseteq D$ é um denso grupável de D.

$\blacksquare$

Uma consequência que decorre da Proposição 3.60 e do Fato 3.61 é provada abaixo:

Corolário 3.62. *Seja X um espaço R-separável e H-separável. Se todo subespaço denso enumerável de X é ω-resolúvel, então X é GN-separável.*

Demonstração:

Sabemos da Proposição 3.60 que se X é um espaço R-separável e todo denso enumerável contém um denso grupável, então X é GN-separável. Para concluirmos o corolário, basta ver que o Fato 3.61 implica que todo denso enumerável contém um denso grupável. Então, segue a conclusão desejada.

■

Teorema 3.63. *Se X é um espaço enumerável T_1 e sem pontos isolados e $\pi w(X) < \mathrm{add}(\mathcal{M})$, então X é ω-resolúvel.*

Demonstração:

Fixamos uma π-base $\mathcal{V}$ de tamanho $\pi w(X) = |\mathcal{V}|$ e uma enumeração de X dada por $\{x_n : n \in \omega\}$. Para cada $n \in \omega$, ponha $\mathcal{U}_n := \{V_n^m : n \leq m < \omega\}$ tal que $V_n^m := \{V \in \mathcal{V} : x_m \in V \text{ e } x_j \notin V \text{ para } n \leq j < m\}$ (note que V_n^m pode ser vazio).

Afirmação.1: $\mathcal{U}_n$ é uma partição de $\mathcal{V}$.
Note que os elementos de $\mathcal{U}_n$ são dois-a-dois disjuntos. Isso pode ser visto quando fixamos V_n^k , $V_n^q \in \mathcal{U}_n$, supondo $k < q$, nenhum elemento de V_n^q contém x_k, pois para $n \leq j < q$, temos que $x_j \notin V \in V_n^q$. Mais ainda, por definição dos elementos V_n^m, temos que $\mathcal{U}_n$ cobre $\mathcal{V}$. Assim, justificamos tal afirmação.

Para demonstrarmos que X é ω- resolúvel, a ideia consiste na construção de uma sequência $(D_k : k \in \omega)$ de conjuntos densos de X a partir de $\mathcal{U}_n$, que irá testemunhar a tese. Pois bem, começamos com seguinte: como $|\mathcal{V}| < \mathrm{add}(\mathcal{M})$, segue do teorema 3.55, existem $f \in {}^\omega\omega$ estritamente crescente e uma sequência $(k_j : j \in \omega)$, tal que $\{V_j^{k(j)} : j \in \omega\}$ satisfaz $A(\kappa)$, isto é, $V \in \mathcal{V}$, existe $n_{_V} \in \omega$ tal que para todo $i \geq n_{_V}$, vale que

$$V \in \bigcup_{f(i) \leq j < f(i+1)} V_j^{k_j}.$$

Defina $M_i := \{k_j : f(i) \leq j < f(i+1)\}$. Então o conjunto M_i é obviamente finito, e qualquer $m \in \omega$ pertence à um número finito de conjuntos M_i, pois f é estritamente crescente, logo $f(i) \leq j$, para um número finito de valores i. Sendo cada M_i finito, podemos construir uma sequência estritamente crescente $(i_j : j \in \omega)$ tal que M_{i_j} são dois-a-dois disjuntos[14]. Ponha $J := \{i_j : j \in \omega\}$, tomando uma partição $\{J_k : k \in \omega\}$

[14]Tal construção é justificada pela Proposição 1.22.

de J, onde cada J_k é infinito. Daí, tome $T_l := \bigcup\{M_{i_j} : i_j \in J_l\}$ e $D_l := \{x_n : n \in T_l\}$.

Afirmação.2: $\{D_l : l \in \omega\}$ é uma família de conjuntos densos disjuntos de X testemunha de que X é ω-resolúvel.

Primeiramente, vamos checar que D_l é um conjunto denso em X. Para isso, é suficiente mostrar que D_l intersecta qualquer elemento de $\mathcal{V}$. Fixado $V \in \mathcal{V}$, vale que $V \in \bigcup_{f(i)\leq j<f(i+1)} V_j^{k_j}$ para todo $i \geq n_V$. Então, existe $i_j \in J_l$ tal que, para algum $s \in [f(i_j), f(i_j+1))$, temos $V \in V_s^{k_s}$. Logo, $k_s \in M_{i_j}$ e disso segue que $k_s \in T_l$. Por outro lado, pela definição de $V_s^{k_s}$ o elemento x_{k_s} pertence ao conjunto V. Sendo assim, x_{k_s} está na intersecção de V e X_l. Como V é arbitrário, então X_l é denso.

Sendo J particionado pelos conjuntos J_l's, deduzimos que a família $\{D_l : l \in \omega\}$ tem seus elementos dois-a-dois disjuntos. Diante do que foi demonstrado, a família $\{D_l : l \in \omega\}$ testemunha, que de fato, X é ω-resolúvel.

■

Observação 3.64. Se X contém um denso ω-resolúvel, então X é ω-resolúvel. Com efeito, seja D um subconjunto denso de X que é ω-resolúvel, então, por definição, existe uma família $\{D_n : n \in \omega\}$ uma partição de D, onde cada D_n é denso em D. Suponha que $\bigcup_{n\in\omega} D_n$ não é X, assim podemos definir

$$E_0 := X \setminus D \cup D_0$$

$$E_n := D_n, \forall n \geq 1$$

Como D_n também é denso em X, segue a observação, i.e., a família de densos $\{E_n : n \in \omega\}$ particiona X e testemunha que X é ω-resolúvel.

Corolário 3.65. *Seja X um espaço sem pontos isolados e com todo subespaço denso de X separável. Se $\pi w(X) < \mathrm{add}(\mathcal{M})$, então X é ω-resolúvel.*

Demonstração:

Seja D um subespaço denso e enumerável de X. Como $\pi w(X) < \mathrm{add}(\mathcal{M})$, então $\pi w(D) < \mathrm{add}(\mathcal{M})$[15], logo pelo teorema 3.63, o subespaço D é ω-resolúvel contido em X. Logo, pela observação anterior, segue o desejado.

■

[15]É imediato verificar que se D é um denso em X, então $\pi w(D) \leq \pi w(X)$.

Teorema 3.66. *Se X não tem pontos isolados e todo subconjunto denso de X é separável e $\pi w(X) < \mathrm{add}(\mathcal{M})$, então X é GN-separável.*

Demonstração:

Já é conhecido que $\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{cov}(\mathcal{M})\}$. Então segue da hipótese que $\pi w(X) < \mathfrak{b}$ e $\pi w(X) < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$. Pelo Teorema 3.28 temos garantido que X é R-separável, e também, pelo Teorema 3.33, temos garantido que X é H-separável. Em vista do corolário anterior, X é ω-resolúvel. Assim, do Corolário 3.62 deduzimos que X é GN-separável.

$\blacksquare$

Apêndice A

Dualidade de Erdös-Sierpiński

Destacamos que os resultados deste apêndice são clássicos, e , na maioria dos livros, são apresentados como consequência de **CH** (veja, por exemplo, [Oxt80]), mas aqui apresentaremos uma demonstração com uma hipótese consistentemente mais fraca que **CH**.

Relembramos o comentário feito logo após o fato 1.100: se existe uma base de um ideal $\mathcal{I}$ de tamanho $\lambda = \text{add}(\mathcal{I})$, então necessariamente $\text{add}(\mathcal{I}) = \text{cof}(\mathcal{I})$ (ou seja, as condições para o seguinte fato são exatamente as esperadas no contexto).

Fato A.1. *Seja $\mathcal{I}$ um ideal sobre um conjunto X e $\lambda = \text{add}(\mathcal{I}) = \text{cof}(\mathcal{I})$. Suponha que a família $\mathcal{B} = \{B_\xi : \xi < \lambda\}$ seja uma base do ideal $\mathcal{I}$. Afirmamos, sem perda de generalidade, que podemos assumir que $B_\zeta \subseteq B_\xi$, para todo $\zeta < \xi < \lambda$.*

Demonstração:

De fato, tome $B'_\xi := \bigcup_{\zeta \leq \xi} B_\zeta$ e vejamos que $\{B'_\xi : \xi < \lambda\}$ é base de $\mathcal{I}$. Dado $Y \in \mathcal{I}$ como $\{B_\xi : \xi < \lambda\}$ é base do ideal $\mathcal{I}$, existe $B_\alpha \supseteq Y$. Logo, $Y \subseteq B'_\alpha := \bigcup_{\zeta \leq \alpha} B_\zeta$ e como $\alpha < \lambda = \text{add}(\mathcal{I})$, segue que $B'_\alpha \in \mathcal{I}$. Desse modo, $\{B'_\xi : \xi < \lambda\}$ é uma base de $\mathcal{I}$, como o desejado. ■

Relembramos as proposições:

Proposição1.52 Se A é um subconjunto de $\mathbb{R}$ que tem medida nula, então existe N nulo com $|N \setminus A| = \mathfrak{c}$.

Proposição1.53 Se A é um subconjunto magro de $\mathbb{R}$, então existe M magro com $|M \setminus A| = \mathfrak{c}$.

O fato e as proposições apresentadas acima, serão úteis para a demonstração do próximo teorema.

Teorema A.2 (Erdös-Sierpiński). *Se $\text{add}(\mathcal{L}) = \text{cof}(\mathcal{L})$, existe uma bijeção $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que*

$$g(A) \in \mathcal{L} \Leftrightarrow A \in \mathcal{M}$$
$$g(A) \in \mathcal{M} \Leftrightarrow A \in \mathcal{L}.$$

Demonstração:

Assumindo $\mathrm{add}(\mathcal{L}) = \mathrm{cof}(\mathcal{L}) = \lambda$. Convidamos o leitor a ver o diagrama de Cichón na introdução da dissertação. Se $\mathrm{add}(\mathcal{L}) = \mathrm{cof}(\mathcal{L})$, vale $\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \mathrm{cof}(\mathcal{M}) = \mathrm{add}(\mathcal{L}) = \mathrm{cof}(\mathcal{L})$.

Considere $\mathcal{A} := \{A_\alpha : \alpha < \lambda\}$ base de $\mathcal{L}$ e $\mathcal{B} := \{B_\alpha : \alpha < \lambda\}$ base de $\mathcal{M}$. Iremos construir por recursão transfinita as bases $\{C_\alpha : \alpha < \lambda\}$ e $\{D_\alpha : \alpha < \lambda\}$ de $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$, respectivamente, que servirão de suporte na construção da função g.

Defina $A_0 := C_0$. Pela proposição 1.52, existe $N_0 \in \mathcal{L}$ disjunto de A_0, com $|N_0| = \mathfrak{c}$. Assim, definimos o conjunto $C_1 := A_0 \cup N_0$. Note que $C_1 \cup A_1$ é um conjunto de medida nula. Novamente, pela proposição 1.52, existe $N_1 \in \mathcal{L}$ disjunto de $C_1 \cup A_1$ com $|N_1| = \mathfrak{c}$. Procedendo indutivamente,

$$C_{\alpha+1} := \bigcup_{\zeta \leq \alpha} A_\zeta \cup N_\alpha$$

onde N_α é um conjunto de medida nula com $|N_\alpha| = \mathfrak{c}$. Note que $\bigcup\limits_{\zeta \leq \alpha} A_\zeta$ é um conjunto nulo, haja vista que $\alpha < \mathrm{add}(\mathcal{L})$. Assim, fica bem definido $C_{\alpha+1}$. Os passos limites são construídos da maneira esperada, i.e., unindo todos os anteriores. Então temos construído a base $\{C_\alpha : \alpha < \lambda\}$ de $\mathcal{L}$ satisfazendo:

$(i) C_{\alpha+1} \supseteq C_\alpha \cup A_\alpha$;

$(ii) |C_{\alpha+1} \setminus C_\alpha| = \mathfrak{c}$;

$(iii) C_\lambda := \bigcup_{\xi<\lambda} C_\xi$ se λ é ordinal limite.

De maneira análoga, e utilizando 1.53, construímos a base $\{D_\alpha : \alpha < \lambda\}$ de $\mathcal{M}$:

$(iv) D_{\alpha+1} \supseteq D_\alpha \cup B_\alpha$;

$(v) |D_{\alpha+1} \setminus D_\alpha| = \mathfrak{c}$;

$(vi) D_\lambda := \bigcup_{\xi<\lambda} D_\xi$ se λ é ordinal limite.

Pelo Teorema 2.7, existem $A \in \mathcal{L}, B \in \mathcal{M}$ tal que $\mathbb{R} = A \cup B$, onde $A \cap B = \emptyset$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $A := C_0$ e $B := D_0$, assim $C_0 \cup D_0 = \mathbb{R}$. Fixe $\alpha \leq \lambda$. Vimos que $|C_{\alpha+1} \setminus C_\alpha| = |D_{\alpha+1} \setminus D_\alpha| = \mathfrak{c}$, então podemos afirmar que existe $f_\alpha : C_{\alpha+1} \setminus C_\alpha \to D_{\alpha+1} \setminus D_\alpha$ que é bijetora e com isso $f_\alpha^{-1} : D_{\alpha+1} \setminus D_\alpha \to C_{\alpha+1} \setminus C_\alpha$ também fica definida. Note que $\tilde{f} := \bigcup\limits_{\alpha<\kappa} f_\alpha$ é uma bijeção, com $\mathrm{dom}(\tilde{f}) = \mathbb{R} \setminus C_0 = D_0$ e $\mathrm{im}(\tilde{f}) = \mathbb{R} \setminus D_0 = C_0$.

Afirmação: A função procurada é $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) := \begin{cases} f_\alpha(x), & \text{se } x \in C_{\alpha+1} \setminus C_\alpha \\ f_\alpha^{-1}(x), & \text{se } x \in D_{\alpha+1} \setminus D_\alpha. \end{cases}$$

com $C_{\alpha+1} \setminus C_\alpha \in \mathcal{L}$ e $D_{\alpha+1} \setminus D_\alpha \in \mathcal{M}$. Note que g assim definida é $g := \tilde{f} \cup \tilde{f}^{-1}$, por essa razão, g é uma involução de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, i.e., $g^{-1} = g$. Exatamente por isso para concluirmos o teorema basta mostrar que

$$Se\, A \in \mathcal{M} \Rightarrow g(A) \in \mathcal{L}$$

$$Se\, A \in \mathcal{L} \Rightarrow g(A) \in \mathcal{M}$$

Vamos checar a primeira implicação, sendo que os argumentos para a segunda implicação são inteiramente análogos. Observe que $C_0 = \bigcup_{\alpha<\kappa} D_{\alpha+1} \setminus D_\alpha$. Seja A um conjunto magro de $\mathbb{R}$. Como C_0 e D_0 particionam a reta, temos que $A = (A \cap D_0) \cup (A \cap C_0)$. Por definição, $\tilde{f}[A \cap D_0]$ é um subconjunto de C_0, e logo é nulo. Agora, como $A \cap C_0$ é um conjunto magro, então existe $\beta < \kappa$, tal que $A \cap C_0 \subseteq D_{\beta+1}$. Portanto, $\tilde{f}^{-1}[A \cap C_0] \subseteq C_{\beta+1}$. Desse argumento, decorre que $g[A]$ é um conjunto nulo. O argumento para a segunda implicação, note que $D_0 = \bigcup_{\alpha<\kappa} C_{\alpha+1} \setminus C_\alpha$ e assumindo A um conjunto nulo, e o restante do argumento é análogo. ∎

O teorema anterior segue de $\text{add}(\mathcal{L}) = \text{cof}(\mathcal{L})$. Em particular, $\mathbf{MA} + \neg\mathbf{CH}$ também implica a existência de tal bijeção no teorema anterior. O teorema de *Erdös-Sierpiński* é mais um exemplo de resultado válido tanto em modelos de **CH** como em modelos de $\mathbf{MA} + \neg\mathbf{CH}$.

Apêndice B

Combinatória das coberturas abertas.

Nossas referências principais para esse apêndice são : [Bu]; [FM88] e [JMSS96].

No artigo [Ro38] Rothberger introduziu a noção:

Um espaço topológico X tem a Propriedade de Rothberger *se: Dada uma sequência de coberturas abertas de X $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ de coberturas abertas de X, podemos escolher para cada $n \in \omega$, $U_n \in \mathcal{U}_n$, tal que $\{U_n : n \in \omega\}$ é cobertura aberta de X.*

No artigo [Me24] Menger introduz a propriedade:

Um espaço X tem a propriedade de Menger *se: Dada uma sequência $(\mathcal{U}_n)_{n\in\omega}$ de coberturas abertas, para todo $n \in \omega$, podemos escolher $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{U}_n$, com $\mathcal{F}_n$ finito, de tal modo que a família $\bigcup\{\mathcal{F}_n : n \in \omega\}$ é uma cobertura de X*[1].

Note que um espaço com propriedade de Rothberger, também tem a propriedade de Menger.

A próxima propriedade foi introduzida por Hurewicz (1927):

Dado um espaço X ele tem a propriedade de Hurewicz *se dada uma sequência $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ de coberturas abertas de X existe $\{\mathcal{F}_n : n \in \omega\}$ com $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ e $|\mathcal{F}_n| < \omega$, tal que $X = \bigcup_k \bigcap_{n>k} \bigcup \mathcal{F}_n$, i.e., dado $x \in X$ o conjunto $\{n \in \omega : x \notin \bigcup \mathcal{F}_n\}$ é finito (dito de*

[1] No artigo [A10] o autor prova que um espaço com a propriedade de Menger é D-espaço. Como espaços de Menger são, claramente, Lindelöf, o resultado de Aurichi é reconhecido como uma importante resposta parcial da pergunta feita em [vDP79] a qual comentamos na seção 3.3 ("Lindelöf regular, implica D-espaço?")

outra forma: para todo $x \in X$ existe $n_0(x) \in \omega$ tal que para todo $n \geq n_0(x)$, $x \in \bigcup \mathcal{F}_n$).

Não é difícil ver que se um espaço tem a propriedade de Hurewicz, então possui a propriedade de Menger. Também observamos que um espaço σ-compacto possui as propriedades de Menger e Hurewicz.[2] Para o próximo resultado, vale lembrar que uma função $g \in {}^\omega\omega$ adivinha (*guess*) uma família de funções $\mathcal{F}$ de elementos de ${}^\omega\omega$ se para todo f em $\mathcal{F}$, $f(n) = g(n)$ para uma quantidade infinita de $n \in \omega$. Também destacamos que se $|\mathcal{F}| < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$, então existe g que adivinha $\mathcal{F}$, e que ${}^\omega\omega$ é um espaço homeomorfo ao conjunto dos irracionais.

Teorema B.1. *Dado um espaço topológico X, com $w(X) = \aleph_0$ e $|X| < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$, então X tem a propriedade de Rothberger.*

Demonstração:

Como X tem base $\mathcal{B}$ enumerável, então X é um espaço de Lindelöf. Assim, sem perda de generalidade, cada cobertura aberta de X pode ser suposta enumerável. Tome uma família de coberturas abertas de X dada por $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$, onde $\mathcal{U}_n := \{U_n^m : m \in \omega\}$, para todo $n \in \omega$. Agora, fixados $n \in \omega$ e $x \in X$, sendo $\mathcal{U}_n$ cobertura aberta de X, existe $m \in \omega$ tal que $U_n^m \in \mathcal{U}_n$ e $x \in U_n^m$. Disso podemos definir $f_x \in {}^\omega\omega$ pondo $f_x(n) = \min\{k : x \in U_n^k\}$.

Denote $\mathcal{F} := \{f_x \in {}^\omega\omega : x \in X\}$. Como $|X|$ é estritamente menor que $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$, então $|\mathcal{F}| < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$. Portanto, existe $g \in {}^\omega\omega$ que adivinha $\mathcal{F}$, i.e., o conjunto $\{l \in \omega : f_x(l) = g(l)\}$ é infinito, para todo $x \in X$. Podemos deduzir que $\{U_n^{g(n)} : n \in \omega\}$ é uma cobertura aberta de X, pois para $x \in X$ fixado, temos da definição de f_x, que $x \in U_n^{f_x(n)} = U_n^{g(n)}$, para algum $n \in \omega$. Decorre então que X tem a propriedade de Rothberger. ■

Observação B.2. Dada uma família $\mathcal{F} \subseteq {}^\omega\omega$ que é não é adivinhada, sempre é possível construir uma família $\mathcal{F}^* \subseteq {}^\omega\omega$ com mesma cardinalidade de $\mathcal{F}$ que também não é adivinhada e que é fechada para modificações finitas. De fato: dada $f \in \omega$, para cada $A \in [\omega]^{<\omega}$, defina $f_A := \prod_{n \notin A}\{f(n)\} \times {}^A\omega$ a família das modificações finitas de f obtidas mudando os valores em A. Obviamente, o tamanho de f_A é infinito enumerável. Definindo $f_\omega := \displaystyle\bigcup_{A \in [\omega]^{<\omega}} f_A$, temos que f_ω é o conjunto de todas as modificações finitas de f. Então a família que buscamos pode ser tomada como $\mathcal{F}^* = \displaystyle\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f_\omega$. Note que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^*$ e,

[2]Em geral um espaço com a propriedade de Hurewicz não é σ-compacto, vide [JMSS96].

mais ainda, temos que $|\mathcal{F}^*| = |\mathcal{F}|$ e como $\mathcal{F}$ não é adivinhada, então $\mathcal{F}^*$ também não é adivinhada.

Teorema B.3. *Existe um subconjunto da reta com cardinalidade* $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ *que não tem a propriedade de Rothberger.*

Demonstração:

Considere $\mathcal{F} \subseteq {}^{\omega}\omega$ uma família que não é adivinhada de tamanho $|\mathcal{F}| = \mathrm{cov}(\mathcal{M})$; pela observação B.2, podemos supor, sem perda de generalidade, que tal família $\mathcal{F} \subseteq {}^{\omega}\omega$ é fechada para modificações finitas e não é adivinhada. Definimos $\mathcal{U}_n := \{U_n^m : m \in \omega\}$ onde $U_n^m := \{f \in \mathcal{F} : f(n) = m\}$. É claro que $\mathcal{U}_n$ cobre $\mathcal{F}$.
Afirmação: Fixada uma sequência $(m_n)_{n\in\omega}$, a família $\{U_n^{m_n} : n \in \omega\}$ não cobre $\mathcal{F}$.

De fato, dado $(m_n)_{n\in\omega}$ existe $f \in \mathcal{F}$[3] tal que o conjunto $A_f := \{n : f(n) = m_n\}$ é finito. Como $\mathcal{F}$ é fechada para modificações finitas, existe $f' \in \mathcal{F}$ tal que o conjunto $A_{f'}$ é vazio. Portanto, $f' \notin \bigcup\{U_n^{m_n} : n \in \omega\}$, e daí segue a nossa afirmação.

Como ${}^{\omega}\omega$ é homeomorfo ao conjunto dos irracionais, então existe um subconjunto de $\mathbb{R}$ que não possui a propriedade de Rothberger e que tem tamanho $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$, então segue o desejado. ■

Observação B.4. Sob a luz dos Teoremas B.1 e B.3, podemos evidenciar que o último resultado nada mais é do que a prova de que os seguintes cardinais são iguais:

- $\lambda_1 := \min\{|X| : X$ é espaço topológico com $w(X) = \aleph_0$ que não é Rothberger$\}$;
- $\lambda_2 := \min\{|M| : M$ é espaço métrico com $w(M) = \aleph_0$ que não é Rothberger$\}$;
- $\lambda_3 := \min\{|A| : A \subseteq \mathbb{R}$ e A não é Rothberger$\}$

Dos teoremas anteriores, valem as igualdades:

$$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$$

(i) A desigualdade $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq \lambda_1$ é justificada pelo Teorema B.1.

(ii) As desigualdade $\lambda_1 \leq \lambda_2$ e $\lambda_2 \leq \lambda_3$, seguem, respectivamente, do fato que todo espaço métrico é um espaço topológico e a propriedade de possuir base enumerável é hereditária.

(iii) Pelo Teorema B.3 vale a desigualdade $\lambda_3 \leq \mathrm{cov}(\mathcal{M})$.

Portanto, pela observação anterior, temos o bem conhecido teorema:

[3] A existência de f é garantida, pois a família $\mathcal{F}$ não é adivinhada.

Teorema B.5. *O cardinal* $\text{cov}(\mathcal{M})$ *é o menor tamanho de um subespaço da reta que não tem a propriedade de Rothberger.*

$\blacksquare$

Agora, iremos dar um tratamento aos espaços de Menger, relacionando-os ao cardinal $\mathfrak{d}$ de uma maneira análoga à que fizemos para espaços de Rothberger e cardinal $\text{cov}(\mathcal{M})$.

Teorema B.6. *Seja* X *um espaço com* $w(X) = \aleph_0$*. Se* $|X| < \mathfrak{d}$*, então* X *satisfaz a propriedade de Menger.*

Demonstração:

Seja uma família $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ de coberturas abertas de X. Sendo $w(X) = \aleph_0$, então X é Lindelöf. Assim, podemos assumir que as coberturas são enumeráveis, digamos $\mathcal{U}_n := \{U_n^m : m \in \omega\}$. Dado $x \in X$, tome a função $f_x \in {}^\omega\omega$ definida por

$$f_x(n) := \min\{k : x \in U_n^k\},$$

já vimos que f_x está bem definida. Como $|X| < \mathfrak{d}$, então a família $\{f_x : x \in X\}$ não é dominante na pré-ordem $\langle {}^\omega\omega, \leq \rangle$, i.e., existe $g \in {}^\omega\omega$, tal que para todo $x \in X$, $g \nleq f_x$. Fixado um $x \in X$ arbitrário, existe $l \in \omega$ tal que $f_x(l) < g(l)$. Sendo assim, defina o seguinte conjunto finito:

$$\mathcal{F}_n := \{U_n^0, ..., U_n^{g(n)}\}.$$

Claramente, $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n$ é uma cobertura aberta de X, pois dado $x \in X$, vimos que existe $l \in \omega$ que depende de x, tal que $f_x(l) < g(l)$ e, portanto, $x \in U_l^{f_x(l)} \in \mathcal{F}_l$. Então, deduzimos que todo espaço X nas condições do enunciado é um espaço de Menger. $\blacksquare$

Teorema B.7. *Existe um subconjunto da reta de tamanho* $\mathfrak{d}$ *que não satisfaz a propriedade de Menger.*

Demonstração:

Seja $\mathcal{F}$ uma família de ${}^\omega\omega$, que é dominante em $\langle {}^\omega\omega, \leq \rangle$ com $|\mathcal{F}| = \mathfrak{d}$. Defina $\mathcal{U}_n := \{U_n^m : m \in \omega\}$ onde $U_n^m := \{f \in \mathcal{F} : f(n) = m\}$. É claro que $\mathcal{U}_n$ é uma cobertura aberta de ${}^\omega\omega$.

Afirmação: A família $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ definida acima testemunha que $\mathcal{F}$ não tem a propriedade de Menger.

De fato, tomando um conjunto $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ que seja finito, podemos definir

$$g : \omega \to \omega$$

$$n \mapsto g(n) := \max\{j : U_n^j \in \mathcal{F}_n\}$$

Como $\mathcal{F}$ é dominante, existe $f \in \mathcal{F}$ tal $g(n) < f(n)$, para todo $n \in \omega$. Agora, destacamos o seguinte: Dada uma função $h \in {}^\omega\omega$ e $k \in \omega$, se $h \in U_k^j \in \mathcal{F}_k$, então

$$h(k) = j \leq g(k) < f(k).$$

Diante do que acabamos de concluir, decorre que $f \notin \bigcup \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n$, pois do contrário, teríamos algum $k \in \omega$ tal que $f(k) < f(k)$, o que é claramente um absurdo. Dessa forma, fica demonstrado que a família $\bigcup\{\mathcal{F}_n : n \in \omega\}$ não cobre $\mathcal{F}$.

Como ${}^\omega\omega$ é homeomorfo ao conjunto dos irracionais, então existe um subconjunto de $\mathbb{R}$ que tem tamanho $\mathfrak{d}$ e não satisfaz a propriedade de Menger. ■

Obviamente, com as devidas modificações da Observação B.4 envolvendo os Teoremas B.6 e B.7, obtemos conclusão análoga para a propriedade de Menger e o cardinal $\mathfrak{d}$:

Teorema B.8 **(Miller-Fremlin).** *O cardinal $\mathfrak{d}$ é o menor tamanho para um espaço métrico com base enumerável que testemunha contra a propriedade de Menger.*

■

Ainda na mesma linha do que fizemos até agora nesse apêndice, vejamos que o cardinal $\mathfrak{b}$ é o menor tamanho de um subconjunto da reta que não possui a propriedade de Hurewicz.

Teorema B.9. *Seja X um espaço topológico com $w(X) = \aleph_0$. Se $|X| < \mathfrak{b}$, então X satisfaz a propriedade de Hurewicz.*

Demonstração:

Seja $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ uma família de coberturas abertas de X. Como X tem base enumerável, sem perda de generalidade, considere $\mathcal{U}_n := \{U_n^m : m \in \omega\}$. Para cada $x \in X$, defina $f_x \in {}^\omega\omega$ pondo

$$f_x(n) := \min\{m \in \omega : x \in U_n^m\}.$$

Seja a família $\mathcal{F} = \{f_x : x \in X\}$. Como $|X| < \mathfrak{b}$, então $\mathcal{F}$ é limitada, portanto, existe $g \in {}^\omega\omega$ tal que $f_x \leq^* g$, para todo $x \in X$. Definimos a família de conjuntos finitos $\{\mathcal{F}_n : n \in \omega\}$, tal que $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{U}_n$, do seguinte modo:

$$\mathcal{F}_n := \{U_n^m : m \leq g(n)\}.$$

Dado $x \in X$, como $f_x \leq^* g$, existe $k \in \omega$ tal que para todo $j \geq k$, $f_x(j) \leq g(j)$.

Por definição, para todo $j \geq k$ teremos $x \in U_j^{f_x(j)} \in \mathcal{F}_j$. Logo, x não pertece a no máximo uma quantidade finita de conjuntos $\bigcup \mathcal{F}_n$, como queríamos. ■

Teorema B.10. *Existe um conjunto da reta com tamanho $\mathfrak{b}$ que não satisfaz a propriedade de Hurewicz.*

Demonstração:

Seja $\mathcal{F} \subseteq {}^\omega\omega$ uma família ilimitada em $\langle {}^\omega\omega, \leq^* \rangle$ tal que $|\mathcal{F}| = \mathfrak{b}$. Vamos definir a sequência de coberturas abertas de $\mathcal{F}$ que testemunha que $\mathcal{F}$ não tem a propriedade de Hurewicz. Pois bem, considere a família de abertos $\mathcal{U}_n := \{U_n^m : m \in \omega\}$ onde $U_n^m := \{f \in \mathcal{F} : f(n) = m\}$.
Afirmação: Dada a família $\{\mathcal{F}_n : n \in \omega\}$, com $\mathcal{F}_n \in [\mathcal{U}_n]^{<\omega}$. Existe $h \in \mathcal{F}$ tal que $\{i \in \omega : h \notin \bigcup \mathcal{F}_i\}$ é infinito.

Seja $g \in {}^\omega\omega$ tal que

$$g(n) := \max\{m \in \omega : U_n^m \in \mathcal{F}_n\}.$$

Como $\mathcal{F}$ é ilimitada, existe $h \in \mathcal{F}$ tal que $A := \{j \in \omega : g(j) < h(j)\}$ é infinito. Tomando $j \in A$, temos que $h \notin \bigcup \mathcal{F}_j$, pois caso contrário, se para algum $U_j^m \in \mathcal{F}_j$ tivéssemos $h \in U_j^m$, então por definição do aberto U_j^m teríamos $h(j) = m \leq g(j)$, o que é um absurdo, pois $j \in A$. Sendo A um conjunto infinito, podemos concluir que o conjunto

$$\{n \in \omega : h \notin \bigcup \mathcal{F}_n\}$$

é infinito, como queríamos demonstrar. ■

Também, como no caso de espaços de Rothberger e Menger, a conclusão obtida na Observação B.4, pode ser adaptada para espaços de Hurewicz e cardinal $\mathfrak{b}$. Desse modo, obtemos:

Teorema B.11. *O menor tamanho de um subconjunto da reta que não tem a propriedade de Hurewicz é $\mathfrak{b}$.*

■

Terminamos este apêndice, relacionando as propriedades de Rothberger, Menger e Hurewicz com a subseção 1.5. Denotaremos por $\mathcal{O}$ a classe de todas as coberturas abertas. Se as famílias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de conjuntos que descrevem os princípios de seleção definidos na subseção 1.5, são dadas por $\mathcal{O} = \mathcal{A} = \mathcal{B}$, temos o seguinte:

• $S_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$: Dada uma sequência $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega \rangle$ de elementos de $\mathcal{O}$, existe uma sequência $\langle U_n : n \in \omega \rangle$ tal que $U_n \in \mathcal{U}_n$, para cada $n \in \omega$, e $\{U_n : n \in \omega\} \in \mathcal{O}$.

• $S_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O})$: Para toda sequência $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega \rangle$ de elementos de $\mathcal{O}$, podemos escolher $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ finito, para todo $n \in \omega$, a fim de que a família $\bigcup\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$ pertença a $\mathcal{O}$.

Seja X um espaço topológico. Considerando $\mathcal{O}_X$ uma família de coberturas abertas do espaço X é fácil ver que os princípios $S_1(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X)$ e $S_{fin}(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X)$ definem, respectivamente, a propriedade de Rothberger e Menger. Para expressarmos a propriedade de Hurewicz via um princípio de seleção, difiniremos a noção de Γ-cobertura. Uma cobertura $\mathcal{U}$ de X é dita ser uma Γ-cobertura, se para cada $x \in X$ o conjunto $\{U \in \mathcal{U} : x \notin \mathcal{U}\}$ é finito.

Denotaremos por Γ_X a família das Γ-coberturas de X. De acordo com a definição que acabamos de dar, o princípio $U_{fin}(\mathcal{O}_X,\Gamma_X)$ definido na 1.5 equivale ao espaço X ter a propriedade de Hurewicz:

• $U_{fin}(\mathcal{O},\Gamma)$: Dada uma sequência $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega \rangle$ de elementos de $\mathcal{O}$, podemos selecionar, para cada $n \in \omega$, um conjunto finito $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ tal que $\{\bigcup \mathcal{V}_n : n \in \omega\}$ é um elemento de Γ.

Dados os princípios de seleção acima, ficam definidas as classe: $\boldsymbol{S_1}(\mathcal{O},\mathcal{O})$, $\boldsymbol{S_{fin}}(\mathcal{O},\mathcal{O})$ e $\boldsymbol{U_{fin}}(\mathcal{O},\Gamma)$ dos espaços de Rothberger, Menger e Hurewicz, respectivamente.

A cada princípio de seleção, temos seu jogo associado e, já vimos que, se UM não possui estratégia vencedora, então o respectivo princípio de seleção é válido. Por exemplo, se para um dado espaço topológico X o jogador UM não tem estratégia vencedora em $G_1(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X)$, vimos na subseção 1.5, que vale o princípio $S_1(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X)$. Em geral, dado um jogo arbitrário (associado a algum princípio de seleção), a recíproca disso é falsa, ou seja, se vale o princípio de seleção pode ser que UM possua estratégia vencedora no jogo associado ao princípio. Jogos onde tal recíproca vale, são de grande importância para a Teoria dos Conjuntos e Topologia. Podemos destacar que Pawlikowski em [P94], demonstrou que dado um espaço topológico X:

Teorema B.12 (Pawlikowski). *Se $S_1(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X)$ é válido, então UM não possui estratégia vencedora em $G_1(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X)$.*

■

De posse das definições de $\boldsymbol{S_1}(\mathcal{O},\mathcal{O})$ e $\boldsymbol{G_1}(\mathcal{O},\mathcal{O})$ o teorema anterior pode ser enunciado da seguinte maneira:

"A classe $\boldsymbol{S_1}(\mathcal{O},\mathcal{O})$ coincide com a classe $\mathbf{G}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$"

■

Apêndice C

Conjuntos fortemente nulos

As principais referências adotadas para o este apêndice são [BaJ] e [Bu]. Como leitura complementar destacamos [FM88].

Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é dito fortemente nulo (*strong measure zero* ou **SMZ**) se dada sequência uma $\langle \varepsilon_n : n \in \omega \rangle$ de números reais positivos, existe uma família de abertos $\{U_n, \text{ com } n \in \omega\}$, que cobre X e $m(U_n) < \varepsilon_n$ para todo $n \in \omega$. Em [BaJ] é apresentada a demonstração de que a família $\mathcal{SMZ}$ de todos os conjuntos fortemente nulos da reta é um ideal fechado para uniões enumeráveis. Então os invariantes cardinais: add, non, cov e cof ficam definidos para $\mathcal{SMZ}$, nos mesmos moldes da subseção 1.8.1.

Proposição C.1. *Um conjunto X que é fortemente nulo, necessariamente, tem medida nula.*

Demonstração:

Fixe $\varepsilon > 0$. Defina $\varepsilon_n := \dfrac{\varepsilon}{2^{n+2}}$. Como X é fortemente nulo, então existe uma família de abertos U_n, com $n \in \omega$, que cobre X e $m(U_n) < \varepsilon_n$ para todo $n \in \omega$. Como $\displaystyle\sum_0^\infty m(U_n) = \frac{\varepsilon}{2}$, então $m(X) < \varepsilon$. Sendo ε tomado arbitrário, segue o desejado. ■

Fato C.2. *Um conjunto enumerável é fortemente nulo.*

Demonstração:

Para isso, considere X um conjunto enumerável com enumeração $\{x_n : n \in \omega\}$. Tome $\langle \varepsilon_n : n \in \omega \rangle$ uma sequência de números reais positivos. Defina:

$$U_n :=]x_n - \frac{\varepsilon_n}{4}, x_n + \frac{\varepsilon_n}{4}[$$

Note que $m(U_n) \leq \dfrac{\varepsilon_n}{2} < \varepsilon_n$ e, obviamente, $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} U_n$, portanto, acabamos de mostrar que todo conjunto enumerável tem a propriedade de ser fortemente nulo. ■

Diante do fato anterior, temos o contexto para:

Conjectura de Borel(BC): Se $A \subseteq \mathbb{R}$ é SMZ, então A é enumerável.

Vamos começar a procurar exemplos consistentes de conjuntos que sejam fortemente nulos e não-enumeráveis.

Proposição C.3 (**Rothberger**). *Se X é um conjunto de Luzin, então X é fortemente nulo.*

Demonstração:

Para ver isso, comece tomando uma sequência $\langle \epsilon_n : n \in \omega \rangle$ de números reais positivos e considere $\{q_n : n \in \omega\}$ uma enumeração de $\mathbb{Q}$. Defina o conjunto $U_{2n} :=]q_n - \frac{\varepsilon_{2n}}{4}, q_n + \frac{\varepsilon_{2n}}{4}[$. Note que $\bigcup_{n\in\omega} U_{2n}$ é um aberto denso, então $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\omega} U_{2n}$ é um fechado raro, logo é um conjunto magro. Sendo X um conjunto de Luzin, obtemos que

$$X \bigcap \left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\omega} U_{2n} \right)$$

é um conjunto enumerável. Então tome uma enumeração por ω desse conjunto, digamos $\{x_n : n \in \omega\}$. Denote $U_{2n+1} :=]x_n - \frac{\varepsilon_{2n+1}}{4}, x_n + \frac{\varepsilon_{2n+1}}{4}[$. De posse disso, deduzimos que

$$X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} U_{2n+1} \cup \bigcup_{n\in\omega} U_{2n}$$

Por construção, $m(U_n) = \frac{\varepsilon_n}{2} < \epsilon_n$, para todo $n \in \omega$. Com isso, fica provado a proposição. ■

Pelo Teorema 3.2, assumindo **CH** existe conjunto de Luzin. Portanto, pela proposição C.3, em um modelo de **ZFC**+ **CH** existe conjunto que tem **SMZ** cuja cardinalidade não é enumerável. Richard Laver, em 1976, provou a consistência de **BC** com $\mathfrak{c} = \aleph_2$, utilizando as técnicas de forcing iterado para construir o modelo $\mathfrak{c} = \aleph_2 +$ **BC** de **ZFC**, onde todo conjunto com **SMZ** é enumerável. A prova de Laver é dada no artigo: *On the consistency of Borel's conjecture.* Acta Math. 137 (1976).

O próximo resultado relaciona, talvez, de modo magnificente, as propriedades de Rothberger e **SMZ**.

Proposição C.4. *No caso que X tem a propriedade de Rothberger, obrigatoriamente, é **SMZ**.*

Demonstração:

De fato, fixada a sequência $(\varepsilon_n)_{n\in\omega}$, considere para cada $n \in \omega$ a família

$$\mathcal{U}_n := \left\{]x - \frac{\varepsilon_n}{4}, x + \frac{\varepsilon_n}{4}[: x \in X \right\}.$$

Obviamente, $\mathcal{U}_n$ é cobertura de X, para cada $n \in \omega$, então pela propriedade de

Rothberger, segue a existência de uma família $\{U_n : n \in \omega\}$, com $U_n \in \mathcal{U}$, que cobre o conjunto X. Como $m(U_n) = \frac{\varepsilon_n}{2} < \epsilon_n$, então deduzimos que X é fortemente nulo. ■

Vimos no apêndice **B** que o invariante cardinal $\text{cov}(\mathcal{M})$ é o menor tamanho para um subconjunto da reta que não tem a propriedade de Rothberger, então se um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é tal que $|X| < \text{cov}(\mathcal{M})$, obrigatoriamente, deve ter a propriedade de Rothberger. De posse da Proposição C.4, X é fortemente nulo. Portanto, vale a seguinte desigualdade

Teorema C.5. $\text{cov}(\mathcal{M}) \leq \text{non}(\mathcal{SMZ})$.

■

O trabalho feito no apêndice **B**, já garante informações importantes sobre os invariantes cardinais: $\text{cov}(\mathcal{M})$ e $\text{non}(\mathcal{SMZ})$. Destacamos ainda que os autores em [FM88], demonstraram que as seguintes condições são equivalentes:
(i) X tem a propriedade de Rothberger.
(ii) X é fortemente nulo com respeito a qualquer métrica que dar a mesma topológica de X.

Para terminarmos esse trabalho, gostaríamos de apontar uma questão que naturalmente decorre do Teorema C.5, consiste na seguinte pergunta:

Será que pode ocorrer $\text{cov}(\mathcal{M}) = \text{non}(\mathcal{SMZ})$ *?*

A resposta é "Não". Segundo Scheepers no artigo: *Combinatorics of open cover IV: subspaces of the Alexandroff double of the unit interval.* Topology Appl. 83 (1998), 63-75; na página 74 encontramos o comentário sobre a consistência da seguinte desigualdade:

$$\aleph_1 = \text{cov}(\mathcal{M}) < \text{non}(\mathcal{SMZ}) = \aleph_2 = 2^{\aleph_0}$$

■

Referências Bibliográficas

[A09] Aurichi, Leandro Fiorini. *A influência dos subespaços discretos sobre os espaços topológicos*. 2009. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009

[A10] Aurichi, Leandro Fiorini. *D-spaces, topological games, and selection principles.* Topology Proc. 369 (2010), 107-122. MR 2591778 (2011d:54004).

[ADJ] Aurichi,L.; Dias, R. R.; Junqueira, L. R. *On d- e D-separability.*, Topology Proc. 35(2010),73-82.

[AJL] Aurichi,L.; Junqueira, L.R.; Larson,P. B. *D-spaces, irreducibility and trees*, Topology Proc. 35(2010),73-82.

[BBM] A. Bella, M. Bonanzinga, M.V. Matveev, Variations of selective separability Topology Proc.156(2009)1241-1256

[BBM2] A. Bella, M. Bonanzinga, M.V. Matveev. Addendum to *Variantions of selective separabilty* [Topology Appl. 159(7)(2009)12411252]

[BBMT] A. Bella, M. Bonanzinga, M.V. Matveev, V.V. Tkachuk. *Selective Separability: General facts and Behavior in Countable Spaces*, Topology Proc.32(2008)

[BMS] A.Bella, M. Matveev, S. Spadaro. *Variations of selective separability II: Discrete sets and influence of convergence and maximality*, Topology Appl.159(2012)253-271.

[BaJ] Bartoszynski.T, Judah H. *Set Theory: On the Structure of the Real Line,* A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1995.

[Bla10] Blass, A. *Combinatorial Cardinal Characteristics of the Continuum.* In: Foreman, M., Kanamori, A. (eds.), Handbook of set theory. In 3 volumes. Dordrecht: Springer. 395-489 (2010).

[Bla95] Blass, A., *Questions and answers a category arising on linear logic, complexity theory, and set theory, Advances in Linear Logic* (Ithaca, NY, 1993), London Math. Soc. Lecture Note Ser. 222, p. 61-81, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[Bla96] Blass, A. *Reductions between cardinal characteristics of the continuum* In Set theory (Boise , ID, 1992-1994), volume 192 of Contemp. Math., pages 31-49. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[Bu] Bukovsky, L. *The structure of the real line.* Ins tytut Matematyczny Polskiej Akademi Nauk. Monografie Matematyczne (New Series)[Mathematics Institute of the Polish Academy of Sciences. Mathematical Monographs, series 71. Birkäuser/ Springer Basel AG, 2011. xiv+536 pp. 978-3-0348-0005-1.

[D] Dias, Roque.R. *Princípios de seleção, jogos topológicos e indestrutibilidade de espaços compactos*,Tese (Doutorado em Matemática) 2012- Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

[DKL] DiMaio, G; Kočinac, Lj; Meccariello, E. *Selection principles and hyperspace topologies* Topology Apply. 153 (2005) 912-923.

[E89] Engelking, Ryszard. *General Topology.* rev. compl. ed. Berlin: Heldermann, 1989. (Sigma Series in Pure Mathematics, (**6**)

[FM84] Fremlin,D.H. *Consequences of Martin's axiom*, Crambridge University Press, Cambridge, 1984. MR, 86i:03001.

[FM88] Fremlin,D.H; Miller, A.W. *On some properties of Hurewicz, Menger and Rothberger*,Fundamenta Mathematecae, 1988,17-33.

[G] Gruenhage, G. *A survey of D-spaces.* Contemporany math,533, (2011)13-28.

[GHV] González J., Hérnandez, F.,Villa, C. *When is $\mathbb{R}$ the union of an increasing family of null sets*? Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 48, (4) 2007, 623-630.

[H] Hodel, R. *Cardinal function I* In: Handbook of Set Theoretic Topology, K. Kunen e J. Vaughan (eds.), North-Holland, Amsterdam-NY (1984), 1-62.

[J78] Jech, T. J. *Set Theory.* New York: Academic Press, 1978. (Pure and Applied Mathematics, a Serie of Monographs and Textbooks, **79**)

[Juh80] I. Juhasz, *Cardinal functions in topology ten years later*, centre tract 23, amsterdam 1980.

[JMSS96] Just, W; Miller, A. W.; Scheepers, M; Szeptycki, P.J. *The combinatorial combinatorics of open covers* II. Topology Appl. 73(1996), no. 3, 241-1266.

[K80] Kunen, Kenneth. *Set Theory: an introduction to independence proofs.* Amsterdam: North-Holland, 1980. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, **102**)

[M89] Miller. A.W, *Some properties measure category* Trans. Americ. th. soc. 266(1981,1993) Corrections, Trans. Amer. Math.oc.271,1989,347-348.

[Me24] Menger, M.K; *Einige Überdeckungssätze der Punktmengenlehre*, Sitzungsberichte der Wiener Akademie, 133 (1924), 421-444.

[MS70] Martin, D. A; Solovay, R. M, *Internal Cohen Extension.*, (1970) Annn. Math. Logic2 (2)143-178 MR 0270904.

[NSW] Nowik, A; Scheepers, M; Weiss, T. *Algebraic sum of sets of real numbers with strong measure zero sets* J. Symbolic Logic 63(1998)301-324.

[Oxt80] Oxtoby, J. C. *Measure and Category. A survey of the Analogies between Topological and Measure Space*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol.2, Springer, New York-Berlin, 1980.

[P94] Pawlikowski, J; *Undertemined sets of point-open games*, Fundamenta Mathematicae 144 (1994), 279 - 285.

[P89a] de Paiva, V., *A dialectica-like model of linear logic.* Category Theory and Computer Science (Manchester, 1989), Lecture Notes is Compu. Sci. 389, p. 341-356, Springer, Berlin, 1989. Springer, Berlin, 1989.

[P89] de Paiva, V. *The dialectica categories*, Proc. of Categories in Computer Science and Logic, Boulder, CO, 1987(J.W. Gray and A. Scedrov, eds.), vol.92, American Mathematical Society, 1989, pp. 47-62.

[R] Rudin, M. E. *Martin's Axiom.* B.6 in Handbook of Mathematical Logic, Barwise, J. (ed), Elsevier Science, Amsterdam (1977), 491-501.

[Ro38] Rothberger, F. *Eine Verschärfung der Eigenschaft* C, Fund. Math.30(1938), 50-53; Fritz

[Roy88] Royden H.L. *Real Analysis*, third ed., Macmillan Publishing Company, New York, 1988.

[Scheep96] Scheepers, M. *Combinatorial of open covers* (I): *Ramsey theory.* Topology and its Applications 69 (1996), 31-62.

[Scheep2] Scheepers, M. *Meager sets and infinite games.* Set theory (Boise, ID,1992-1994), 77-90, Contemp. Math, 192, Amer. Math. Soc, Providence, RI, .1996.

[Silv98] da Silva, Samuel G. *Uma introdução aos pequenos cardinais e às suas aplicações em topologia.* Dissertação de Mestrado, iv + 120 pp, IME/USP, 1998.

[vD] van Douwen, E. *The Integers and Topology.* In: Handbook of Set Theoretic Topology, K. Kunen e J. Vaughan (eds.), North-Holland, Amsterdam-NY (1984), 111-167.

[vDP79] van Douwen; Pfeffer, W. F; *Some properties of the Sorgenfrey line and related spaces*, Pacific J. Math. 81(1979), 371-377. MR 0547605.

[V93] Vojtáš, P., *Generalized Galois Tukey connections between explicit relations on classical objects of real analysis.* In Set theory of the reals (Ramat Gan,1991), p. 619-643. Barclan Univ., Ramat Gan, 1993.

Index

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170 - 110
<http://www.pgmat.ufba.br>