



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PGMAT  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



## O TEOREMA DE HOPF E GENERALIZAÇÕES

JÚLIO CÉSAR CARVALHO PEREIRA

Salvador-Bahia

2014

# O TEOREMA DE HOPF E GENERALIZAÇÕES

JÚLIO CÉSAR CARVALHO PEREIRA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Profa. Dra. Ana Lucia Pinheiro Lima

Salvador-Bahia

2014

Pereira, Júlio César Carvalho.

O Teorema de Hopf e Generalizações / Júlio César Carvalho Pereira. – 2014.

79 f. : il.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Lucia Pinheiro Lima.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Colegiado da Pós-Graduação em Matemática, Salvador, 2014.

Referências bibliográficas.

1.Hopf, Teorema de. 2.Geometria Diferencial. 3.Imersões (Matemática). 4.Variedades riemanianas. I. Lima, Ana Lucia Pinheiro. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDD - 516.36

CDU - 514.7

# O TEOREMA DE HOPF E GENERALIZAÇÕES

JÚLIO CÉSAR CARVALHO PEREIRA

Dissertação de mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 30 de setembro de 2014.

## Banca examinadora:

---

Profa. Dra. Ana Lucia Pinheiro Lima (Orientadora)  
UFBA

---

Prof. Dr. José Nelson Bastos Barbosa  
UFBA

---

Prof. Dr. Dorel Fetcu  
Gheorghe Asachi Technical University of Iasi

*A todos aqueles que acreditaram em mim.*

# Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer à minha família, pois eles são o motivo da minha existência, da minha felicidade e graças a eles que recebo os mais amorosos e sinceros conselhos, sugestões e votos de sucesso. Mãe, pai e irmão amo vocês.

Agradeço também aos meus amigos pela companhia nesses anos, os momentos felizes ao lado de cada um de vocês tornaram e tornam mais leve e mais alegre minha trajetória de vida até aqui, sou muito feliz por tê-los ao meu lado e amo vocês.

Um agradecimento especial vai para a minha orientadora, pela pessoa incrivelmente responsável e amável que é e pela forma que foi paciente durante todo o processo de orientação. É claro que irei agradecer por ter escolhido este trabalho do Hopf para ser o tema da minha dissertação. Ela é exemplo de profissional para mim.

Agradeço a Capes pelo apoio financeiro e ao Programa Pós Graduação em Matemática pela formação. Agradeço a todos os meus professores que sempre acreditaram em mim e que sempre me incentivaram. É um sonho sendo realizado e uma etapa da vida sendo completada que venham novos sonhos, novos desafios e novas etapas.

*“A ciência nunca resolve um problema sem criar pelo menos outros dez.”*

(George Bernard Shaw)

# Resumo

Neste trabalho, estudamos o Teorema de Hopf e algumas de suas generalizações. Serão consideradas superfícies de curvatura média constante imersas em espaços homogêneos  $E^3(\kappa, \tau)$  e também superfícies com vetor curvatura média paralelo imersas em espaços  $E_c^n \times \mathbb{R}$ . As técnicas desenvolvidas originalmente por Hopf, com as devidas adaptações a cada novo espaço ambiente, são as principais ferramentas utilizadas nas demonstrações dessas generalizações.

**Palavras-chave:** Diferencial quadrática holomorfa; Imersões; Espaços Homogêneos.

# Abstract

In this work, we study the Hopf theorem and some of its generalizations. We will consider constant mean curvature surfaces immersed in homogeneous spaces  $E^3(\kappa, \tau)$  and also surfaces with parallel mean curvature vector spaces immersed in  $E_c^n \times \mathbb{R}$ . The techniques developed originally by Hopf, mutatis mutandis to each new space environment, are the main tools used in the proofs of these generalizations.

**Keywords:** Holomorphic quadratic differential; immersions; Homogeneous spaces.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 O Teorema de Hopf</b>	<b>3</b>
<b>2 As Superfícies CMC em espaços Homogêneos e o Teorema de Abresch-Rosenberg</b>	<b>13</b>
2.1 Equações de Compatibilidade . . . . .	14
2.2 A Diferencial de Abresch-Rosenberg . . . . .	27
<b>3 O Teorema de Alencar, do Carmo e Tribuzy</b>	<b>30</b>
3.1 Preliminares . . . . .	31
3.2 Lema Principal . . . . .	38
3.3 Demonstração do Teorema 21 . . . . .	44
3.4 Demonstração do Teorema 22 . . . . .	45
<b>4 O Teorema de Hopf para Espaços Ambientais de Dimensão Maior que Três</b>	<b>50</b>
4.1 Prova do Teorema 34 . . . . .	52
4.2 Prova do Teorema 35 . . . . .	61

# Introdução

Em 1951, o matemático Heinz Hopf demonstrou um Teorema que afirma que toda superfície imersa em  $\mathbb{R}^3$ , homeomorfa a uma esfera e com curvatura média  $H$  constante é isométrica a esfera  $S^2$  do  $\mathbb{R}^3$ . Este Teorema foi inovador tanto pelo seu resultado quanto pelas técnicas utilizadas nas duas demonstrações feitas originalmente por Hopf. Nas provas são considerados parâmetros locais isotérmicos, parâmetros complexos e são estudadas as propriedades da diferencial quadrática, definida sobre a superfície  $S$ , criada por Hopf. Estas são as principais ferramentas utilizadas nas duas provas que serão apresentadas no primeiro capítulo deste trabalho.

Estabelecido o Teorema de Hopf para superfícies imersas em  $\mathbb{R}^3$  outras questões surgiram. Uma delas é se este resultado continua válido quando consideramos  $S$  imersa em outros espaços ambientes diferentes de  $\mathbb{R}^3$ . De fato, com as devidas adaptações, o mesmo resultado do Teorema de Hopf foi generalizado considerando imersões em alguns espaços ambientes diferentes do  $\mathbb{R}^3$ . Neste trabalho serão estudadas generalizações do Teorema de Hopf com destaque à técnica utilizada em cada generalização que foi inspirada na técnica desenvolvida por Hopf. Denotaremos por superfícies cmc as superfícies com curvatura média  $H$  constante.

No capítulo 2, estudaremos a seguinte generalização obtida por U. abresch e H. Rosenberg, em 2004, ver [1].

**Teorema.** (Abresch-Rosenberg,[1]) *Qualquer esfera cmc  $\Sigma$  imersa em  $S^2 \times \mathbb{R}$  ou em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , é uma esfera cmc mergulhada rotacionamente invariante  $S^2_{\mathbb{H}}$  contida no respectivo espaço produto.*

Eles provaram que para superfícies com curvatura média constante imersas nos espaços homogêneos produto  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  e  $S^2 \times \mathbb{R}$  existe uma diferencial quadrática, que é uma perturbação da diferencial quadrática de Hopf, holomorfa e denominada diferencial de Abresch-Rosenberg. Daí, os autores classificaram as superfícies cuja diferencial quadrática é nula e assim generalizaram o Teorema de Hopf.

U. Abresch e H. Rosenberg anunciaram, em 2005, a existência de uma diferencial quadrática holomorfa sobre superfícies com curvatura média constante imersas no espaço

homogêneo Riemanniano tridimensional com grupo de isometrias de dimensão quatro, ver em [2].

Em 2007, H. Alencar, M. P. do Carmo e R. Tribuzzi generalizaram, em [3], o Teorema de Hopf considerando imersões em qualquer espaço homogêneo tridimensional com grupo de isometrias de dimensão quatro, assim como U. Abresch e H. Rosenberg, entretanto consideraram uma hipótese mais fraca para a curvatura média  $H$ , ao invés de constante consideraram uma limitação para a norma de  $dH$ .

**Teorema.** (Alencar, Do Carmo, Tribuzzi, Fernandez,[4]) *Seja  $M$  uma superfície compacta, de gênero zero, imersa em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , com curvatura média  $H$ . Assuma que*

$$|dH| \leq g|Q|^{(2,0)},$$

onde  $g$  é uma função real, contínua e não negativa. Então  $Q^{(2,0)}$  é identicamente nula e  $M$  é uma superfície com curvatura média constante invariante por rotações em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ . . Esta generalização será estudada no capítulo 3.

Em 2010, em [5], foi obtida uma generalização do Teorema de Hopf considerando imersões em espaços ambientes com dimensão maior que três. São consideradas imersões na variedade Riemanniana produto da variedade homogênea simplesmente conexa  $n$ -dimensional com curvatura seccional constante, denotaremos por  $E_c^n$ ,  $c \neq 0$ , com a reta euclidiana  $\mathbb{R}$ .

**Teorema.** (Alencar, Do Carmo, Tribuzzi,[5]) *Seja  $M^2$  uma superfície compacta de gênero zero e seja  $x : M^2 \looparrowright E_c^n \times \mathbb{R}$  uma imersão de  $M$  com vetor curvatura média paralelo. Então, uma das seguintes afirmações é satisfeita:*

- (1)  $x(M)$  é uma superfície mínima em uma hipersuperfície totalmente umbílica de  $E_c^n$ .
- (2)  $x(M)$  é uma esfera redonda de uma totalmente umbílica tridimensional subvariedade de  $E_c^n$ .
- (3)  $x(M)$  é a esfera redonda de  $E_c^3$ .
- (4)  $x(M)$  está em  $E_c^4 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^6$  (possivelmente com a métrica de Lorentz), e lá existe um plano  $P$  tal que  $x(M)$  é invariante por rotações que fixam seu complemento ortogonal. Além disso, as curvas de nível da função altura  $p \mapsto \langle x(p), \xi \rangle$  são círculos contidos em planos paralelos ao plano  $P$ .

Neste contexto a hipótese que considera o vetor curvatura média constante é adaptada e substituída pela que considera o vetor curvatura média paralelo no fibrado normal. O estudo desta generalização será feito no capítulo 4.

# Capítulo 1

## O Teorema de Hopf

Neste capítulo, trataremos do seguinte resultado clássico devido a Heinz Hopf sobre superfícies compactas de gênero zero e curvatura média constante em  $\mathbb{R}^3$ .

**Teorema.** (Hopf,[15]) *Seja  $S$  uma superfície compacta, de gênero zero e curvatura média constante. Então  $S$  é isométrica à esfera.*

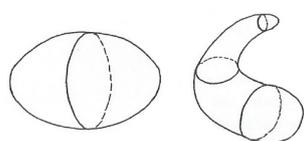
As duas demonstrações deste resultado, apresentadas por H. Hopf, fornecem duas originais e poderosas técnicas que foram generalizadas e usadas para estabelecer resultados similares em ambientes e situações mais gerais.

Iniciaremos este capítulo com algumas definições da teoria de singularidades e campos de vetores que serão utilizadas nas demonstrações. Serão necessários também alguns resultados sobre parâmetros complexos sobre uma superfície do  $\mathbb{R}^3$ .

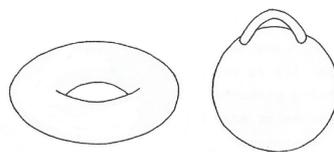
Um ponto  $p \in \mathbb{R}^3$  é chamado de *ponto de acumulação de um conjunto*  $S \subset \mathbb{R}^3$ , se toda vizinhança de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  contiver um ponto de  $S \setminus \{p\}$ . Seja  $S$  uma superfície, dizemos que  $S$  é uma *superfície fechada* se ela contiver todos os seus pontos de acumulação. Se a superfície  $S$  estiver contida em uma bola do  $\mathbb{R}^3$ , então chamamos  $S$  de *superfície limitada*. Quando uma superfície  $S$  é limitada e fechada dizemos que  $S$  é uma *superfície compacta*.

Os principais resultados deste capítulo podem ser encontrado em [15], inclusive as figuras utilizadas aqui. O próximo Teorema é um Teorema de classificação que fornece o conceito de *gênero de uma superfície compacta*.

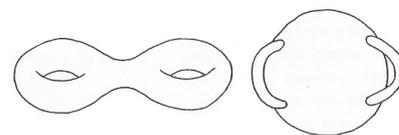
**Teorema 1** ([15]). *Se  $S$  é uma superfície compacta em  $\mathbb{R}^3$ , então  $S$  é homeomorfa à esfera com  $g$  asas ( $g \geq 0$ ).*



Surfaces with zero handle



Surfaces with one handle



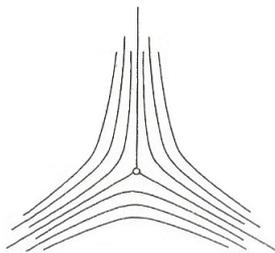
Surfaces with two handles

O número de asas  $g$  é o que denominamos de *gênero da superfície*  $S$ . Observemos que o gênero de uma superfície compacta é um conceito puramente topológico.

Dizemos que  $w$  é um *campo de vetores em um conjunto aberto*  $U \subset S \subset \mathbb{R}^3$ , se  $w$  é uma aplicação que associa a cada ponto  $p \in U$  um vetor  $w(p) \in T_p S$ . O campo de vetores será *contínuo*, ou *diferenciável*, se a aplicação for contínua, ou diferenciável, respectivamente. Se uma aplicação  $r$  associar a cada ponto  $p \in U$  uma direção, isto é, um subespaço vetorial  $r(p)$  em  $T_p S$ , gerado por um vetor não nulo  $w(p) \in T_p S$ , então dizemos que  $r$  é um *campo de direções*. Neste caso, o subespaço  $r(p)$  gerado pelo vetor  $w(p)$  é uma reta em  $T_p S$ .

Dizemos que o campo de direções  $r$  é *diferenciável em*  $p \in U$  se existe um campo de vetores diferenciável  $w$ , que não se anula, definido em uma vizinhança  $V_p \subset U$ , de  $p$ , tal que, para cada  $q \in V_p$ ,  $w(q) \neq 0$  e, portanto, é uma base do  $r(q)$ .

Cada campo diferenciável de direções, localmente, dá origem a um campo diferenciável de vetores que não se anula. Este fato não é verdade globalmente, basta considerarmos, por exemplo, o campo de direções em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  dado pelas retas tangentes às curvas da figura abaixo.



Qualquer tentativa de orientar essas curvas para obter um campo diferenciável que não se anula leva a uma contradição. Observe que é impossível estender este campo de direções à origem continuamente, pois só é possível associar, continuamente, à origem o vetor nulo, logo nenhuma direção estará associada. Esta ideia motiva a próxima definição.

Seja  $r$  um campo de direções definido em uma região  $U$  exceto em um ponto  $p$ . Se não é possível estender o campo de direções para  $p$  continuamente, então dizemos que  $p$  é uma *singularidade* do campo de direções.

Uma singularidade de um campo de direções é chamada de *singularidade isolada do campo* se existe uma curva simples fechada  $C$  tal que

- (i)  $p$  é a única singularidade do campo no interior de  $C$ ; e
- (ii) não existem singularidades do campo em  $C$ .

Considere um campo de direções em uma região  $V$  e  $p$  uma singularidade isolada deste campo. Neste caso, por definição, existe uma curva fechada  $C$  na região  $V$  satisfa-

zendo (i) e (ii) da definição acima. Então, o campo dado induz um campo  $X$  de direções sobre  $C$ , ou seja, tal campo  $X$  é o campo dado inicialmente, restrito à curva  $C$ .

Vamos considerar  $C = C(t)$  uma curva parametrizada, com  $0 \leq t \leq 1$ . Escolhamos um dos possíveis sentidos ao longo da reta associada ao ponto  $C(0)$  pelo campo de direções  $X$  restrito à curva  $C$ . Fixada essa escolha, determina-se um único sentido de percurso em  $C(t)$ , e neste caso, podemos considerar que o campo de direções  $X$  restrito a  $C$ , associa a cada ponto  $C(t)$  um vetor não nulo, que será denotado por  $u(t)$ .

É possível, então, determinar o ângulo que cada vetor  $u(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , forma com um vetor não nulo  $v \in \mathbb{R}^2$  fixado.

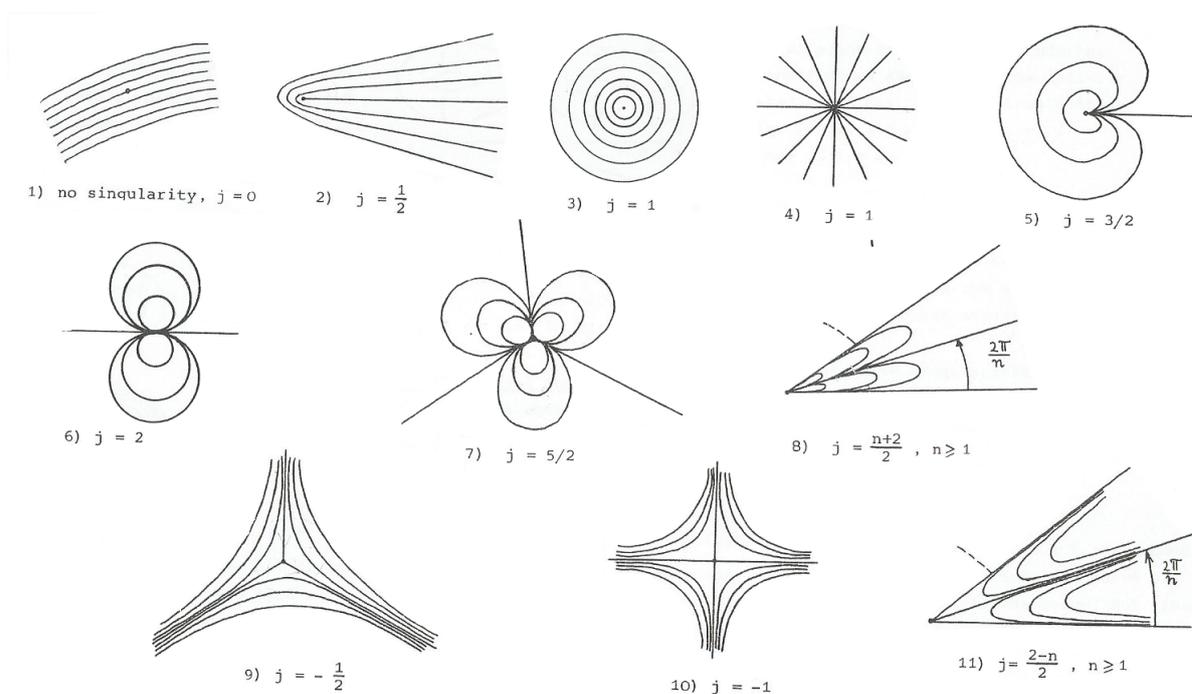
Vamos agora, considerar a variação destes ângulos ao longo da curva  $C(t)$ . Para isto, seja  $C$  pequena o suficiente, mas ainda satisfazendo (i) e (ii). Seja  $\sphericalangle[u(t), v]$  o ângulo formado pelo vetor fixo  $v$  e pelo vetor  $u(t)$  e denotemos por  $\delta_C \sphericalangle[u(t), v]$  a variação total desses ângulos quando percorrermos o traço de  $C$  fazendo  $t$  variar de 0 a 1.

Como  $C$  é uma curva simples fechada, podemos escrever o número  $\delta_C \sphericalangle[u(t), v]$  como sendo um múltiplo real de  $2\pi$ , ou seja, existe  $j \in \mathbb{R}$  tal que

$$\delta_C \sphericalangle[u(t), v] = 2\pi j.$$

Tal número  $j$  é chamado de *índice da singularidade isolada*  $p$ .

Nos exemplos a seguir são apresentados alguns campos de direções tendo a origem como singularidade isolada com índice  $j$ .



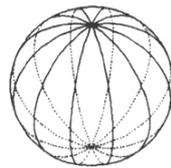
O próximo resultado garante que dada uma superfície compacta de gênero  $g$ , existe um campo de direções definido sobre esta superfície, de modo que a soma dos índices das singularidades deste campo relaciona-se com o gênero da superfície.

**Teorema 2** ([15], p.110). *Dada uma superfície de gênero  $g$  existe um campo de direções na superfície com um número finito de singularidades tal que a soma dos índices das singularidades é  $2 - 2g$ .*

**Prova.** Vamos apresentar um esboço do campo diferenciável com as propriedades procuradas.

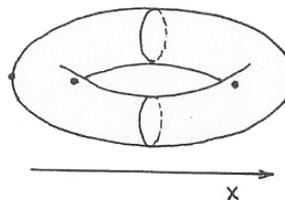
- Caso 1:  $g = 0$ .

Tomemos os grandes círculos que interseptom os pólos. Os pólos serão duas singularidades cada uma delas com índice 1. Como podemos ver na figura. Logo,  $\sum j = 1 + 1 = 2 - 2 \cdot 0 = 2$ .



- Caso 2:  $g = 1$ .

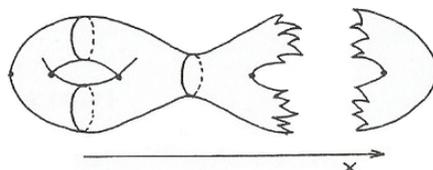
Podemos tomar os círculos obtidos com interseções do toro com os planos ortogonais ao eixo  $Ox$ .



E, neste caso, teremos quatro singularidades, das quais duas singularidades com índice 1 e duas com índice -1, portanto o  $\sum j = 0 = 2 - 2 \cdot 1$ .

- Caso 3:  $g > 1$ .

Caso uma superfície mergulhada, de gênero  $g > 1$ , arbitrária como mostra a figura. Tomaremos as curvas obtidas ao intersectarmos planos ortogonais ao eixo  $Ox$ .



Neste caso, similar ao anterior, teremos duas singularidades com índice 1 (nas extremidades) e  $2g$  singularidades com índice  $-1$  (interiores em cada "abertura" do toro), logo  $\sum j = 2 - 2g$ . ■

O próximo Teorema, devido a Poincaré, afirma que o campo de direções definido no Teorema anterior é único.

**Teorema 3** (Poincaré, [15], p.113). *Se  $X$  é um campo de direções sobre  $S$ , com no máximo um número finito de singularidades então*

$$\sum j = 2 - 2g,$$

onde  $g$  é o gênero de  $S$ .

Para a prova do Teorema 3, utilizaremos o Lema abaixo que relaciona a curvatura de Gauss de uma superfície com o índice das suas singularidades.

**Lema 4** (Gauss-Bonnet, [7]). *Seja  $S$  uma superfície compacta, orientável, de gênero  $g$  com uma métrica Riemanniana definida sobre  $S$  de modo que a curvatura  $K$  é definida sobre  $S$ . Seja  $F$  um campo de direções em  $S$  com, no máximo, um número finito de singularidades. Então, a soma dos índices  $j$  das singularidades satisfaz*

$$\int \int_S K dA = 2\pi \sum j.$$

**Prova do Teorema 3.** Pelo Lema acima, temos válida a igualdade

$$\int \int_S K dA = 2\pi \sum j.$$

Destacamos que o termo  $\int \int_S K dA$  não varia com o campo de vetores que é considerado. Assim, podemos concluir que o somatório  $\sum j$  é igual para qualquer campo sobre  $S$  com no máximo um número finito de singularidades.

Por outro lado, pelo Teorema 2, existe um campo sobre  $S$  que satisfaz  $\sum j = 2 - 2g$ .

Então a igualdade  $\sum j = 2 - 2g$  é verdadeira para qualquer campo de direções sobre  $S$  com um número finito de singularidades. ■

Com estas definições e resultados, podemos apresentar as duas provas do Teorema de Hopf em  $\mathbb{R}^3$ .

**Teorema 5** (Hopf,[15]). *Seja  $S$  uma superfície compacta em  $\mathbb{R}^3$ , de gênero zero, com curvatura média  $H$  constante. Então  $S$  é isométrica à esfera.*

**Prova.** Consideremos a existência de parâmetros isotérmicos locais sobre  $S$ , isto é, consideremos uma parametrização  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ ,  $U$  aberto, com parâmetros  $(u, v)$  e  $E = \langle X_u, X_u \rangle$ ,  $F = \langle X_u, X_v \rangle$  e  $G = \langle X_v, X_v \rangle$  tais que  $E = G$  e  $F = 0$ . Tal parametrização é escolhida de modo a ser compatível com a orientação do campo de vetores normais  $N$  de  $S$ . Consideremos também a segunda forma fundamental para superfícies

$$II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2,$$

onde  $e = \langle N, X_{uu} \rangle$ ,  $f = \langle N, X_{uv} \rangle$  e  $g = \langle N, X_{vv} \rangle$ .

Vejamus como, utilizando parâmetros isotérmicos, as expressões para a curvatura gaussiana, a curvatura média, as linhas de curvatura e as equações de Mainard-Codazzi podem ser escritas de forma mais simples.

Para a curvatura gaussiana  $K$ , temos

$$\begin{aligned} K = k_1 k_2 &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{eg - f^2}{E^2}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  são as curvaturas principais.

A curvatura média  $H$  é dada por

$$\begin{aligned} H = \frac{k_1 + k_2}{2} &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{E(e + g)}{2E^2} \\ &= \frac{e + g}{2E}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Escrevemos as linhas de curvatura como

$$-fdu^2 + (e - g)dudv + fdv^2 = 0. \quad (1.3)$$

Utilizando a equação (1.2) as equações de Mainardi-Codazzi podem ser escritas como

$$\begin{aligned} e_v - f_u &= \frac{E_v}{2E}(e + g) = E_v H, \\ f_v - g_u &= -\frac{E_u}{2E}(e + g) = -E_u H. \end{aligned}$$

Agora, derivando a igualdade

$$EH = \frac{e + g}{2},$$

em relação a  $u$  e a  $v$ , respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} E_u H &= -EH_u + \frac{e_u + g_u}{2}, \\ E_v H &= -EH_v + \frac{e_v + g_v}{2}. \end{aligned}$$

Logo, as equações de Mainardi-Codazzi podem ser reescritas como

$$\left(\frac{e-g}{2}\right)_u + f_u = EH_u, \quad (1.4)$$

$$\left(\frac{e-g}{2}\right)_v - f_v = -EH_v. \quad (1.5)$$

Vamos agora reescrever a segunda forma fundamental considerando parâmetros complexos  $z = u + iv$  sobre  $U \subset S$ . Utilizaremos que  $dz = du + idv$ . Assim,

$$\begin{aligned} II &= edu^2 + 2fdudv + gdv^2 \\ &= \left(\frac{e-g}{4} - \frac{1}{2}if\right) dz^2 + \frac{1}{2}(e+g)dzd\bar{z} + \left(\frac{e-g}{4} + \frac{1}{2}if\right) d\bar{z}^2. \end{aligned}$$

Usando as notações  $\psi(z, \bar{z}) = \left(\frac{e-g}{2} - if\right)$  e  $\varphi(z, \bar{z}) = \frac{e+g}{2}$ , podemos escrever

$$II = \frac{1}{2}(\psi dz^2 + 2\varphi dzd\bar{z} + \bar{\psi} d\bar{z}^2).$$

A expressão  $\mathcal{H} = \psi dz^2$  é chamada de *diferencial de Hopf*.

Estabeleceremos agora uma propriedade fundamental da diferencial de Hopf. Inicialmente, observemos que

$$\begin{aligned} |\psi|^2 &= \left(\frac{e-g}{2}\right)^2 + f^2 = \frac{e^2 - 2eg + g^2 + 4f^2}{4} \\ &= \frac{(e^2 + 2eg + g^2) - 4eg + 4f^2}{4} \\ &= \frac{(e+g)^2 - 4(eg - f^2)}{4} \\ &= \left(\frac{e+g}{2}\right)^2 - eg - f^2 \\ &= (EH)^2 - E^2K \\ &= E^2(H^2 - K). \end{aligned}$$

Daí, decorre que

$$\begin{aligned} \frac{|\psi|^2}{E^2} = H^2 - K &= \left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)^2 - k_1k_2 \\ &= \frac{k_1^2 + 2k_1k_2 + k_2^2 - 4k_1k_2}{4} \\ &= \frac{1}{4}(k_1^2 - 2k_1k_2 + k_2^2) \\ &= \frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2. \end{aligned}$$

Portanto, segue-se que

$$\frac{|\psi|}{|E|} = \left|\frac{k_1 - k_2}{2}\right|. \quad (1.6)$$

Concluimos, desta última igualdade, que os *pontos umbílicos da superfície*, isto é, os pontos tais que  $k_1 = k_2$ , coincidem com os zeros da função  $\psi$ .

Além disso, as equações de Mainardi-Codazzi implicam que

$$\left[ \left( \frac{e-g}{2} \right)_u + f_u \right] + i \left[ \left( \frac{e-g}{2} \right)_v - f_v \right] = E[H_u - iH_v],$$

que é equivalente a

$$\psi_{\bar{z}} = EH_z. \quad (1.7)$$

Desta última equação, podemos garantir que  $\psi$  é holomorfa se, e somente se,  $H$  é constante. Como, por hipótese,  $H$  é constante sobre a superfície  $S$ , temos que  $\psi$  é holomorfa.

Agora, para continuarmos a prova do Teorema de Hopf, precisamos estabelecer o seguinte resultado auxiliar.

**Lema 6** ([15], p.139). *Seja  $R$  uma região aberta de uma superfície com curvatura média  $H$  constante e seja  $U$  o conjunto dos pontos umbílicos de  $R$ . Seja  $p \in U$ , então:*

- 1)  *$p$  é um ponto interior de  $U$ ; ou*
- 2)  *$p$  é um ponto isolado de  $U$  e o índice de  $p$  é negativo.*

**Prova do Lema.** Seja  $p \in U$ , ou seja,  $p$  é um ponto umbílico de  $R$ . Sabemos, devido a equação (1.6), que os pontos umbílicos de  $R$  são os zeros de  $\psi$ . Da equação (1.7), temos que  $\psi$  é holomorfa, pois  $H$  é constante.

Se  $\psi \equiv 0$ , então todo ponto de  $R$  é um ponto de  $U$  e, portanto, como  $R$  é aberto, todo ponto de  $U$  é ponto interior.

Caso  $\psi \not\equiv 0$ , então dado  $p \in U$ ,  $p$  é um ponto isolado de  $U$ . De fato, dado  $p \in U$ , ou seja,  $p$  ponto umbílico de  $S$  e zero de  $\psi$ , se  $p$  fosse um ponto de acumulação de  $U$ , então a função  $\psi$  seria zero numa sequência de pontos de  $U$ , distintos de  $p$ , que converge para  $p$ . Neste caso, como  $\psi$  é holomorfa, podemos concluir que  $\psi \equiv 0$  em  $R$ . Isto é uma contradição.

Resta-nos agora verificar que o índice de  $p$ , ponto isolado de  $U$ , é negativo. Para isso, observamos que, por (1.3), a parte imaginária de  $\psi dz^2$  satisfaz

$$\text{Im}(\psi dz^2) = -f du^2 + (e-g)dudv + f dv^2 = 0.$$

Portanto, o argumento de  $\psi dz^2$  é múltiplo inteiro de  $\pi$ , ou seja, existe  $m \in \mathbb{Z}$  tal que

$$\begin{aligned} \arg(\psi dz^2) &= m\pi \\ \arg(\psi) + 2\arg(dz) &= m\pi \\ \arg(dz) &= \frac{m\pi}{2} - \frac{\arg(\psi)}{2}. \end{aligned}$$

Sendo  $p$  um ponto isolado e umbílico, temos que  $p$  é uma singularidade isolada e seu índice  $j$  é dado por

$$j = \frac{1}{2\pi} \delta_C(\arg(dz)),$$

onde  $\delta_C$  representa a variação em volta de  $p$  de uma curva simples e fechada  $C$  suficientemente pequena, que satisfaz (i) e (ii) da definição de singularidade isolada. Como  $m$  é constante, então

$$2\pi j = -\frac{\delta_C(\arg(\psi))}{2}$$

e, como  $\psi$  é holomorfa, segue que  $\psi(z) = cz^n + \dots$ , com  $c \neq 0$  e  $n \geq 1$ . Neste caso, temos que  $\delta(\arg(\psi)) = 2\pi n$ . Daí concluímos que

$$j = -\frac{2\pi n}{4\pi} = -\frac{n}{2} < 1.$$

Logo o índice é negativo e isso encerra a demonstração do Lema. ■

Concluiremos agora a demonstração do Teorema de Hopf.

Seja  $U$  o conjunto de pontos umbílicos da superfície  $S$ . Mostraremos que  $U$  é aberto e fechado em  $S$ .

Pelo Teorema 3, temos que  $U$  é não vazio, pois  $\sum j = 2 - 2g = 2$ . Daí, existe ao menos uma singularidade  $p_0$  com índice positivo, neste caso, pelo Lema 6,  $p_0$  é ponto interior. Logo,  $U$  é um conjunto infinito e  $p_0$  é um ponto de acumulação de  $U$ .

Notemos que  $U$  é pré-imagem do conjunto unitário  $\{0\}$  pela função contínua  $f(p) = k_1 - k_2$ , e, como pré-imagem de um fechado por função contínua é fechado, temos que  $U$  é um fechado de  $S$ .

Consideremos agora

$$U^* = \{p \in U; p \text{ é ponto interior de } U\} = \text{int } U.$$

Suponhamos que existe  $q \in U$  tal que  $q \notin U^*$ . Logo, dado  $p \in U^*$  existem um caminho contínuo ligando  $p$  a  $q$  e um  $q_0$  que é um ponto de acumulação de  $U$ . Mas, dessa maneira  $q_0$  não é um ponto isolado e nem está no interior de  $U$ , o que contradiz o Lema 6. Portanto, a suposição feita é falsa, o que implica que todo  $q \in U$  é elemento de  $U^*$ . Em outras palavras,  $U^* = U$ . Logo  $U$  é um conjunto aberto e fechado, não vazio, em um compacto  $S$ , ou seja,  $S = U$ . Temos que a superfície é compacta e totalmente umbílica, daí podemos concluir que  $S$  é a esfera. ■

Vamos agora apresentar uma segunda prova do Teorema 5, também devida a Hopf. Observemos que alguns resultados utilizados na primeira prova serão utilizados novamente.

**Segunda Prova.** Munindo a superfície  $S$  com parâmetros isotérmicos locais, definimos a segunda forma fundamental do mesmo modo que foi definido anteriormente, em termos

complexos, e mantemos também a definição da diferencial de Hopf. Como foi provado na demonstração anterior, temos a seguinte igualdade

$$\frac{|\psi|}{|E|} = \left| \frac{k_1 - k_2}{2} \right|.$$

Daí, concluímos que os pontos umbílicos de  $S$  são os zeros da diferencial de Hopf. Utilizando a equação (1.7) podemos concluir que  $\psi$  é holomorfa se, e somente se,  $H$  é constante. Como, por hipótese,  $H$  é constante, segue que  $\psi$  é holomorfa. A prova estará concluída ao provarmos o seguinte Lema.

**Lema 7.** *Em uma superfície compacta  $S$ , de gênero zero, não existe diferencial quadrática holomorfa não-nula.*

**Prova do Lema.** Como, por hipótese, a diferencial quadrática é holomorfa, segue que  $H$  é constante, podemos então utilizar o Lema 6. Logo, seja  $p \in U$ , isto é,  $p$  um ponto umbílico de  $S$ . Então ou  $p \in \text{int}(U)$  ou  $p$  será um ponto isolado, com índice negativo.

Vimos, na primeira demonstração do Teorema 5, que caso  $\psi$  não seja identicamente nula, existe  $p \in U$ , tal que  $p$  tem índice negativo e é ponto isolado. Sabemos, pelo Teorema 3, que existe  $q \in U$  tal que  $q$  é ponto interior a  $U$ , ou seja, é ponto de acumulação de  $U$ . Desta forma, como  $\psi$  é analítica e zero para uma quantidade não-enumerável de pontos de  $U$ , segue que, como vimos antes,  $\psi$  é identicamente nula, daí nenhum ponto é isolado.

Mostramos que a existência de um ponto umbílico fora do interior, isto é isolado, nos leva a uma contradição. Concluímos então que toda diferencial holomorfa nas condições acima é identicamente nula. E isso encerra a prova do Lema. ■

Portanto, como  $\psi$  é identicamente nula, segue que  $S$  é uma superfície compacta totalmente umbílica, ou seja,  $S$  é a esfera. O que concluí a demonstração. ■

Vale observar que é possível provar o Lema 7, sem usar o Teorema de Poincaré. Uma demonstração deste fato pode ser encontrada em [15], p.140.

## Capítulo 2

# As Superfícies CMC em espaços Homogêneos e o Teorema de Abresch-Rosenberg

Dadas duas variedades Riemannianas, nem sempre é possível a imersão de uma na outra. Um problema clássico em Geometria Diferencial é, exatamente, determinar quais condições são necessárias e/ou suficientes para garantir que uma variedade  $M^m$  possa ser imersa isometricamente em uma outra variedade  $\overline{M}^{m+p}$ .

No caso em que  $\overline{M}$  é uma forma espacial de dimensão  $m + 1$ , isto é,  $\mathbb{H}^{m+1}$ ,  $\mathbb{R}^{m+1}$  ou  $\mathbb{S}^{m+1}$ , as equações de Gauss e Codazzi são condições necessárias e suficientes para  $M$  ser localmente imersa isometricamente em  $\overline{M}$ , neste caso, estas equações são chamadas também de equações de compatibilidade.

Entretanto, as equações de Gauss e Codazzi não são suficientes para descrever as superfícies imersas em espaços homogêneos de dimensão três com grupo de isometria de dimensão quatro. Tais espaços, que denotaremos por  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , são fibrações Riemannianas sobre uma forma espacial de dimensão dois, sendo  $\kappa$  a curvatura da base da fibração e  $\tau$  a curvatura do fibrado, que satisfazem  $\kappa \neq 4\tau^2$  e  $\overline{\nabla}_X \xi = \tau X \wedge \xi$ , que podem ser encontrados em [12]. Estas variedades são:  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $Nil_3$  (espaço de Heisenberg),  $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$  e  $\mathbb{S}_\tau^3$  (esferas de Berger). O Teorema que apresenta as condições necessárias e suficientes para uma superfície  $\Sigma$  ser localmente imersa isometricamente em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  foi obtido por Daniel Benoît em [8].

Neste capítulo, apresentaremos as condições obtidas por Benoît para a existência de uma imersão em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  e as reescreveremos em parâmetros complexos, seguindo o trabalho [13]. Apresentaremos também a diferencial quadrática de Abresch-Rosenberg  $Q$ , que generaliza a diferencial quadrática do Hopf para imersões em  $\mathbb{R}^3$ . A diferencial  $Q$  e as equações de compatibilidade são as principais ferramentas para uma generalização do

Teorema de Hopf em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . A prova desta generalização, feita originalmente por Uwe Abresch e por Harold Rosenberg em [1], será estudada neste capítulo.

## 2.1 Equações de Compatibilidade

Consideremos ao longo deste capítulo  $\Sigma$  uma superfície completa, imersa em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , sendo  $ds^2$  a métrica induzida pela imersão,  $\nabla$  a conexão Riemanniana,  $R$  o tensor curvatura,  $K$  a curvatura Gaussiana e  $S$  o operador de forma de  $\Sigma$ . As notações  $\bar{\nabla}$  e  $\bar{R}$  serão usadas para a conexão e o tensor curvatura de  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , respectivamente. Sejam ainda,  $T$  um campo de vetores em  $\Sigma$ , com  $\|T\| \leq 1$ , e  $v$  uma função real suave em  $\Sigma$ , tal que,  $v \leq 1$ . Passando para o recobrimento duplo orientável, se necessário, podemos supor que  $\Sigma$  é orientável. Daí, podemos definir uma estrutura complexa  $J$  sobre  $\Sigma$ , dada por

$$J(e_1) = e_2 \text{ e } J(e_2) = -e_1,$$

onde  $\{e_1, e_2\} \subset T_p\Sigma$  é uma base ortonormal positiva. Geometricamente,  $J$  representa uma rotação de  $\frac{\pi}{2}$  em  $T_p\Sigma$  no sentido anti-horário.

Dada a 4-upla  $(ds^2, S, T, v)$ , dizemos que esta satisfaz as *equações de compatibilidade para  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$* , se

$$\|T\|^2 + v^2 = 1$$

e ainda, se, para todo  $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$ , são satisfeitas as igualdades:

- (i)  $K = \det S + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)v^2$ ;
- (ii)  $\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y] = (\kappa - 4\tau^2)v(\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y)$ ;
- (iii)  $\nabla_X T = v(SX - \tau JX)$ ;
- (iv)  $dv(X) + \langle SX - \tau JX, T \rangle = 0$ .

**Observação 8.** Se  $v \neq 0$  então (iii) implica (iv). De fato, seja  $\langle T, T \rangle + v^2 = 1$ , então diferenciando esta igualdade em relação a  $X$  e usando (iii) segue-se que

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_X(\langle T, T \rangle + v^2) &= \nabla_X(\langle T, T \rangle) + \nabla_X(v^2) \\ &= 2\langle \nabla_X T, T \rangle + 2v dv(X) = 2\langle v(SX - \tau JX), T \rangle + 2v dv(X) \\ &= 2v(\langle (SX - \tau JX), T \rangle + dv(X)). \end{aligned}$$

Agora, supondo  $v \neq 0$ , obtemos a igualdade (iv), como afirmado.

No próximo resultado  $\mathbb{M}(\kappa, \tau)$  é uma variedade Riemanniana tridimensional tal que  $\pi : M^3(\kappa, \tau) \rightarrow \Sigma^2$  é uma submersão Riemanniana sobre uma superfície  $\Sigma$ , com

curvatura gaussiana  $\kappa$ , e as fibras, isto é, a pré-imagem de um ponto em  $\Sigma$  por  $\pi$ , são trajetórias de um campo de vetores de Killing unitário  $\xi$  e, portanto, geodésicas. Sua prova será omitida aqui e poderá ser encontrada em [12].

**Teorema 9.** *Seja  $\pi : M^3(\kappa, \tau) \longrightarrow \Sigma^2$  uma submersão Riemanniana com campo de Killing unitário  $\xi$ . Seja  $\{X, Y\} \in TM(\kappa, \tau)$  uma base ortonormal de vetores horizontais tal que  $\{X, Y, \xi\}$  é orientada positivamente. Então,*

$$\begin{aligned}\overline{K}(X, Y) &= \kappa - 3\tau^2, \\ \overline{K}(X, \xi) &= \tau^2.\end{aligned}$$

Utilizaremos o Teorema acima, no caso particular em que  $M$  é um espaço homogêneo, para expressar o tensor curvatura do espaço  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ . Usaremos as notações  $v = \langle N, \xi \rangle$  e  $T = \xi - vN$ , isto é,  $T$  denota a projeção de  $\xi$  em  $T\Sigma$ .

**Teorema 10.** *Para  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , temos*

$$\langle \overline{R}(X, Y)Z, W \rangle = (\kappa - 3\tau^2)\langle R_0(X, Y)Z, W \rangle + (\kappa - 4\tau^2)\langle R_1(\xi; X, Y)Z, W \rangle \quad (2.1)$$

$$\overline{R}(X, Y)Z = (\kappa - 4\tau^2)v(\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y), \quad (2.2)$$

onde

$$R_0(X, Y)Z = \langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X \quad (2.3)$$

e

$$R_1(V; X, Y)Z = \langle Y, V \rangle \langle Z, V \rangle X + \langle Y, Z \rangle \langle X, V \rangle V - \langle X, Z \rangle \langle Y, V \rangle V - \langle X, V \rangle \langle Z, V \rangle Y \quad (2.4)$$

**Prova.** Para a primeira equação o resultado é mais abrangente, pois a igualdade é válida para  $X, Y, Z, W$  campos de  $\mathfrak{X}(\mathbb{E}(\kappa, \tau))$ . De fato, vamos, inicialmente, decompor os campos  $X, Y, Z, W$  em sua parte horizontal e vertical com respeito a  $\xi$ , isto é,  $X = \tilde{X} + \xi x$ ,  $Y = \tilde{Y} + \xi y$ ,  $Z = \tilde{Z} + \xi z$  e  $W = \tilde{W} + \xi w$ , onde  $x = \langle X, \xi \rangle$ ,  $y = \langle Y, \xi \rangle$ ,  $z = \langle Z, \xi \rangle$  e  $w = \langle W, \xi \rangle$ . Portanto, pela multilinearidade do tensor curvatura, temos

$$\begin{aligned}\langle \overline{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle \overline{R}(\tilde{X} + \xi x, \tilde{Y} + \xi y)(\tilde{Z} + \xi z), \tilde{W} + \xi w \rangle \\ &= \langle \overline{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}, \tilde{W} \rangle + \langle \overline{R}(\xi x, \tilde{Y})\tilde{Z}, \tilde{W} \rangle \\ &\quad + \langle \overline{R}(\tilde{X}, \xi y)\tilde{Z}, \tilde{W} \rangle + \langle \overline{R}(\xi x, \xi y)\tilde{Z}, \tilde{W} \rangle \\ &\quad + \langle \overline{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\xi z, \tilde{W} \rangle + \langle \overline{R}(\xi x, \tilde{Y})\xi z, \tilde{W} \rangle \\ &\quad + \langle \overline{R}(\tilde{X}, \xi y)\xi z, \tilde{W} \rangle + \langle \overline{R}(\xi x, \xi y)\xi z, \tilde{W} \rangle \\ &\quad + \langle \overline{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}, \xi w \rangle + \langle \overline{R}(\xi x, \tilde{Y})\tilde{Z}, \xi w \rangle \\ &\quad + \langle \overline{R}(\tilde{X}, \xi y)\tilde{Z}, \xi w \rangle + \langle \overline{R}(\xi x, \xi y)\tilde{Z}, \xi w \rangle \\ &\quad + \langle \overline{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\xi z, \xi w \rangle + \langle \overline{R}(\xi x, \tilde{Y})\xi z, \xi w \rangle \\ &\quad + \langle \overline{R}(\tilde{X}, \xi y)\xi z, \xi w \rangle + \langle \overline{R}(\xi x, \xi y)\xi z, \xi w \rangle.\end{aligned}$$

Devido às propriedades de antissimetria do tensor curvatura, temos

$$xy\langle\bar{R}(\xi, \xi)A, B\rangle = -xy\langle\bar{R}(\xi, \xi)A, B\rangle$$

que implica

$$\langle\bar{R}(\xi, \xi)A, B\rangle = 0$$

e, de modo análogo,

$$\langle\bar{R}(A, B)\xi, \xi\rangle = 0.$$

Os termos onde  $\xi$  aparece apenas uma vez são nulos, pois existe uma base ortonormal de  $T\Sigma$  em que a matriz de  $\bar{R}$  é diagonal. Assim, restam apenas cinco destas parcelas; ou seja

$$\begin{aligned}\langle\bar{R}(X, Y)Z, W\rangle &= \langle\bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}, \tilde{W}\rangle + \langle\bar{R}(\xi x, \tilde{Y})\xi z, \tilde{W}\rangle \\ &\quad + \langle\bar{R}(\tilde{X}, \xi y)\xi z, \tilde{W}\rangle + \langle\bar{R}(\xi x, \tilde{Y})\tilde{Z}, \xi w\rangle \\ &\quad + \langle\bar{R}(\tilde{X}, \xi y)\tilde{Z}, \xi w\rangle\end{aligned}\tag{2.5}$$

Para a conclusão do Teorema precisaremos do seguinte Lema, que pode ser encontrado em [6].

**Lema 11.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana e  $p$  um ponto de  $M$ . Defina a aplicação trilinear  $R' : T_pM \times T_pM \times T_pM \rightarrow T_pM$  por*

$$\langle R'(X, Y)Z, W\rangle = \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle - \langle Y, Z\rangle\langle X, W\rangle,$$

para todo  $X, Y, Z, W \in T_pM$ . Então  $M$  tem curvatura seccional constante e igual a  $k_0$  se, e somente se,  $R = k_0R'$ , onde  $R$  é a curvatura de  $M$ .

Pelo Lema, como o espaço  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  tem curvatura seccional constante, podemos escrever  $R = k_0R'$ , e pelo Teorema 9 temos que esta curvatura seccional é  $k_0 = \kappa - 3\tau^2$  ou  $k_0 = \tau^2$ , conforme escolha dos campos considerados. Portanto, podemos reescrever a igualdade (2.5) como

$$\begin{aligned}\langle\bar{R}(X, Y)Z, W\rangle &= (\kappa - 3\tau^2)(\langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle - \langle Y, Z\rangle\langle X, W\rangle) \\ &\quad + \tau^2(xz\langle\tilde{Y}, \tilde{W}\rangle - yz\langle\tilde{X}, \tilde{W}\rangle - xw\langle\tilde{Y}, \tilde{Z}\rangle + yw\langle\tilde{X}, \tilde{Z}\rangle) \\ &= (\kappa - 3\tau^2)(\langle\tilde{X}, \tilde{Z}\rangle\langle\tilde{Y}, \tilde{W}\rangle - \langle\tilde{Y}, \tilde{Z}\rangle\langle\tilde{X}, \tilde{W}\rangle) \\ &\quad + \tau^2(\langle X, \xi\rangle\langle\xi, Z\rangle\langle\tilde{Y}, \tilde{W}\rangle - \langle Y, \xi\rangle\langle Z, \xi\rangle\langle\tilde{X}, \tilde{W}\rangle \\ &\quad - \langle X, \xi\rangle\langle W, \xi\rangle\langle\tilde{Y}, \tilde{Z}\rangle + \langle Y, \xi\rangle\langle W, \xi\rangle\langle\tilde{X}, \tilde{Z}\rangle) \\ &= (\kappa - 3\tau^2)\langle R_0(X, Y, Z), W\rangle + \\ &\quad + (\kappa - 4\tau^2)[-(\langle X, \xi\rangle\langle\xi, Z\rangle\langle\tilde{Y}, \tilde{W}\rangle - \langle Y, \xi\rangle\langle Z, \xi\rangle\langle\tilde{X}, \tilde{W}\rangle \\ &\quad - \langle X, \xi\rangle\langle W, \xi\rangle\langle\tilde{Y}, \tilde{Z}\rangle + \langle Y, \xi\rangle\langle W, \xi\rangle\langle\tilde{X}, \tilde{Z}\rangle)] \\ &= (\kappa - 3\tau^2)\langle R_0(X, Y, Z)W\rangle + (\kappa - 4\tau^2)\langle R_1(\xi; X, Y)Z, W\rangle.\end{aligned}$$

Para finalizar, provaremos agora a equação (2.2). Da equação (2.1), do Teorema 10, que acabamos de provar, temos que

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X, Y)N &= (\kappa - 3\tau^2)R_0(X, Y)N + (\kappa - 4\tau^2)R_1(\xi; X, Y)N \\
&= (\kappa - 3\tau^2)(\langle X, N \rangle Y - \langle Y, N \rangle X) \\
&\quad + (\kappa - 4\tau^2)(\langle Y, \xi \rangle \langle N, \xi \rangle X + \langle Y, N \rangle \langle X, \xi \rangle \xi \\
&\quad - \langle X, \xi \rangle \langle Y, \xi \rangle \xi - \langle X, \xi \rangle \langle N, \xi \rangle Y) \\
&= (\kappa - 4\tau^2)(\langle Y, \xi \rangle \langle N, \xi \rangle X - \langle X, \xi \rangle \langle N, \xi \rangle Y) \\
&= (\kappa - 4\tau^2)(\langle Y, (T + vN) \rangle \langle N, (T + vN) \rangle X - \langle X, (T + vN) \rangle \langle N, (T + vN) \rangle Y) \\
&= (\kappa - 4\tau^2)v(\langle Y, (T + vN) \rangle X - \langle X, (T + vN) \rangle Y) \\
&= (\kappa - 4\tau^2)v(\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y).
\end{aligned}$$

E assim concluímos a prova do Teorema. ■

O próximo resultado foi obtido por Benoît Daniel, [8], e afirma que, para existir a imersão de uma superfície  $\Sigma$  num espaço homogêneo tridimensional  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , é necessário e suficiente que  $\Sigma$  satisfaça as equações de compatibilidade para  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ .

**Teorema 12** (Benoît Daniel, 2006). *Sejam  $\Sigma$  uma variedade Riemanniana orientada, simplesmente conexa, de dimensão dois,  $ds^2$  sua métrica Riemanniana e  $\nabla$  sua conexão Riemanniana. Sejam  $S$  um campo de operadores simétricos  $S_p : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$ ,  $T$  um campo de vetores em  $\Sigma$  e  $v$  uma função suave tal que  $\|T\|^2 + v^2 = 1$ . Sejam  $\xi$  um campo vertical em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , onde  $\kappa$  é a curvatura da base da fibração e  $\tau$  a curvatura do fibrado. Então existe uma imersão isométrica  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  tal que o operador de forma com respeito ao normal  $N$  associado a  $f$  é*

$$df \circ S \circ df^{-1}$$

e tal que

$$\xi = df(T) + vN$$

se, e somente se,  $(ds^2, S, T, v)$  satisfaz as equações de compatibilidade para  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ . Neste caso, a imersão é única a menos de isometrias globais de  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  que preservam a orientação da fibra e da base da fibração.

Apresentaremos, nos dois próximos Lemas, a prova de que as equações de compatibilidade são condições necessárias para existência da imersão. A prova de que são também condições suficientes podem ser encontradas em [8] e em [9].

No primeiro Lema apresentam-se as equações de Gauss e Codazzi satisfeitas por uma imersão em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ .

**Lema 13** (Equações de Gauss e Codazzi em uma variedade homogênea). *Para  $\Sigma$  imersa isometricamente em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , temos*

$$K = K_e + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)v^2 \quad (2.6)$$

e

$$\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y] = (\kappa - 4\tau^2)v(\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y), \quad (2.7)$$

onde  $K$  é a curvatura de Gauss de  $\Sigma$  e  $K_e = \det S$  é a curvatura extrínseca de  $\Sigma$ .

**Prova.** As equações de Gauss e Codazzi para uma imersão Riemanniana são, respectivamente,

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle SX, Z \rangle \langle SY, W \rangle - \langle SX, W \rangle \langle SY, Z \rangle, \quad (2.8)$$

$$\bar{R}(X, Y)N = \nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y]. \quad (2.9)$$

Utilizando o Teorema 10, podemos substituir  $\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle$  e reescrever a equação (2.8) como

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= [(\kappa - 3\tau^2)\langle R_0(X, Y)Z, W \rangle + (\kappa - 4\tau^2)\langle R_1(T; X, Y)Z, W \rangle] \\ &= \langle SX, Z \rangle \langle SY, W \rangle - \langle SX, W \rangle \langle SY, Z \rangle. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ainda, podemos considerar  $X$  e  $Y$  ortonormais, isto é,  $\|X\| = \|Y\| = 1$  e  $\langle X, Y \rangle = 0$ , e escolher  $Z = X$  e  $W = Y$ . Daí,

$$R_0(X, Y)X = \langle X, X \rangle Y - \langle Y, X \rangle X = \|X\|^2 Y = Y, \quad (2.11)$$

$$R_1(T; X, Y)X = \langle Y, T \rangle \langle X, T \rangle X - \langle Y, T \rangle T - \langle X, T \rangle \langle X, T \rangle Y. \quad (2.12)$$

Logo, fazendo o produto interno dos primeiros e segundos membros das igualdades (2.11) e (2.12) com  $Y$ , obtemos

$$\langle R_0(X, Y)X, Y \rangle = \langle Y, Y \rangle = 1 \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \langle R_1(T; X, Y)X, Y \rangle &= \langle Y, T \rangle \langle X, T \rangle \langle X, Y \rangle - \langle Y, T \rangle \langle Y, T \rangle - \langle X, T \rangle^2 \langle Y, Y \rangle \\ &= -\langle Y, T \rangle^2 - \langle X, T \rangle^2 \\ &= -\|T\|^2 \\ &= -(1 - v^2). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Além disso,

$$\det S = \langle SX, X \rangle \langle SY, Y \rangle - \langle SX, Y \rangle \langle SY, X \rangle. \quad (2.15)$$

Portanto, substituindo (2.13), (2.14) e (2.15) em (2.10), temos

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle - [(\kappa - 3\tau^2)1 + (\kappa - 4\tau^2)(-1 - v^2)] = \det S.$$

Logo,

$$\begin{aligned} K &= \det S + \kappa - 3\tau^2 - (\kappa - 4\tau^2)(1 - v^2) \\ &= \det S + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)v^2. \end{aligned}$$

A igualdade (2.7) decorre imediatamente do Teorema 10 e da equação (2.9). Logo a equação de Codazzi é

$$\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y] = (\kappa - 4\tau^2)v(\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y).$$

O que encerra a prova do Lema. ■

A seguir, veremos o resultado que mostra que além das equações de Gauss e Codazzi mais duas outras equações são necessárias para garantir a existência uma imersão em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , como foi provado por Daniel.

**Lema 14.** *Para  $\mathfrak{X}(\Sigma)$ , temos que*

$$\nabla_X T = v(SX - \tau JX)$$

e

$$dv(X) + \langle SX - \tau JX, T \rangle = 0,$$

onde  $J$  é uma estrutura complexa definida sobre  $\Sigma$ .

**Prova do Lema.** Temos que  $\xi = T + vN$ , logo

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \xi &= \bar{\nabla}_X (T + vN) \\ &= \bar{\nabla}_X T + dv(X)N + v\bar{\nabla}_X N. \end{aligned}$$

Substituindo

$$\bar{\nabla}_X T = \nabla_X T + \langle SX, T \rangle N$$

e

$$\bar{\nabla}_X N = -SX,$$

na igualdade acima, obtemos

$$\bar{\nabla}_X \xi = \nabla_X T + \langle SX, T \rangle N + dv(X)N - vSX. \quad (2.16)$$

Por outro lado, como a conexão  $\bar{\nabla}$  de  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  satisfaz a igualdade  $\bar{\nabla}_X \xi = \tau X \wedge \xi$  (para a prova ver [12]) temos que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \xi = \tau X \wedge \xi &= \tau X \wedge (T + vN) \\ &= \tau(X \wedge T + vX \wedge N) \\ &= \tau(\langle JX, T \rangle N - vJX). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Igualando (2.16) e (2.17), obtemos

$$\nabla_X T + \langle SX, T \rangle N + dv(X)N - vSX = \tau(\langle JX, T \rangle N - vJX).$$

Reordenando-os, encontramos

$$(\langle SX - \tau JX, T \rangle + dv(X))N + \nabla_X T = v(SX - \tau JX).$$

Como  $SX - \tau JX \in T_p \Sigma$  podemos concluir que  $v(SX - \tau JX)$  não possui componente normal logo, da equação acima, podemos concluir que

$$\langle SX - \tau JX, T \rangle + dv(X) = 0$$

e, portanto,

$$\nabla_X T = v(SX - \tau JX),$$

concluindo assim a prova do Lema. ■

Agora, vamos reescrever as equações fundamentais para uma imersão  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  em termos de um parâmetro conforme  $z = u + iv$ . Identificaremos  $\psi(\Sigma)$  com  $\Sigma$ , consideraremos  $\Sigma$  uma superfície de Riemann, com estrutura complexa dada pela métrica induzida, e também  $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_u - i\partial_v)$  e  $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_u + i\partial_v)$ . A 5-upla

$$(\lambda, v, H, p, A) \in \mathbb{R}^+ \times [-1, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C},$$

será chamada de *dados fundamentais de  $\Sigma$* , onde  $\lambda$  é o fator de conformidade da métrica induzida, ou seja,  $\lambda = 2\langle \partial_z, \partial_{\bar{z}} \rangle$ ,  $v := \langle N, \xi \rangle$  é a componente normal do campo vertical  $\xi$  e  $H$  é a curvatura média de  $\Sigma$ . Além disso,  $p$  é a diferencial de Hopf de  $\Sigma$ , isto é,

$$pdz^2 = \langle -\bar{\nabla}_{\partial_z} N, \partial_z \rangle dz^2,$$

e  $A := \langle \xi, \partial_z \rangle = \langle T, \partial_z \rangle$ , com  $T \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  sendo a componente tangente do campo vertical  $\xi$ , isto é,  $T = \xi - vN$ . A primeira e a segunda formas fundamentais são, escritas em termos do parâmetro complexo, respectivamente, como

$$I = \lambda |dz^2|,$$

$$II = pdz^2 + \lambda H|dz|^2 + \bar{p}d\bar{z}^2.$$

Portanto,

$$II(\partial_z, \partial_z) = \langle S(\partial_z), \partial_z \rangle = p$$

e

$$II(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) = \langle S(\partial_z), \partial_{\bar{z}} \rangle = \frac{\lambda H}{2}.$$

Além disso, do fato de que  $A = \langle T, \partial_z \rangle$  e  $I = \lambda|dz|^2 = \frac{\lambda}{2}(dzd\bar{z} + d\bar{z}dz)$ , segue-se que

$$A = \langle T, \partial_z \rangle = I(T, \partial_z) = \frac{\lambda}{2}(dz(T)d\bar{z}(\partial_z) + d\bar{z}(T)dz(\partial_z)) = \frac{\lambda}{2}d\bar{z}(T)$$

e, de modo similar,

$$\bar{A} = \langle T, \partial_{\bar{z}} \rangle = I(T, \partial_{\bar{z}}) = \frac{\lambda}{2}(dz(T)d\bar{z}(\partial_{\bar{z}}) + d\bar{z}(T)dz(\partial_{\bar{z}})) = \frac{\lambda}{2}dz(T).$$

Como  $T \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , então  $T$  pode ser escrito como

$$T = a\partial_z + b\partial_{\bar{z}}.$$

Logo,

$$dz(T) = dz(a\partial_z + b\partial_{\bar{z}}) = a$$

e

$$d\bar{z}(T) = d\bar{z}(a\partial_z + b\partial_{\bar{z}}) = b.$$

Daí,

$$T = \frac{2}{\lambda}(\bar{A}\partial_z + A\partial_{\bar{z}}).$$

O próximo Lema apresenta algumas relações intrínsecas válidas em  $\Sigma$ .

**Lema 15** ([13]). *As seguintes relações intrínsecas são válidas em  $\Sigma$ .*

- 1)  $\langle \partial_z, \partial_z \rangle = 0$ ;
- 2)  $\langle \partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}} \rangle = 0$ ;
- 3)  $\langle \partial_z, \partial_{\bar{z}} \rangle = \frac{\lambda}{2}$ ;
- 4)  $K = \frac{-2(\log \lambda)_{z\bar{z}}}{\lambda}$ ;
- 5)  $\nabla_{\partial_z} \partial_z = \frac{\lambda_z}{\lambda} \partial_z$ ;
- 6)  $\nabla_{\partial_z} \partial_{\bar{z}} = \nabla_{\partial_{\bar{z}}} \partial_z = 0$ ;
- 7)  $J(\partial_z) = i\partial_z$ .

**Prova.** As três primeiras relações seguem da expressão para a primeira forma fundamental, pois

$$\begin{aligned}\langle \partial_z, \partial_z \rangle = I(\partial_z, \partial_z) &= \frac{\lambda}{2} (dz(\partial_z)d\bar{z}(\partial_z) + d\bar{z}(\partial_z)dz(\partial_z)) \\ &= \frac{\lambda}{2}(0 + 0) = 0.\end{aligned}$$

e, de modo similar encontramos,

$$\langle \partial_z, \partial_{\bar{z}} \rangle = I(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) = \frac{\lambda}{2}$$

e

$$\langle \partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}} \rangle = I(\partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}}) = 0.$$

Logo, as equações 1), 2) e 3) estão provadas. Agora, utilizaremos as seguintes relações

$$K = -\frac{1}{2\lambda}\Delta \log \lambda$$

e

$$\Delta(\log \lambda) = 4(\log \lambda)_{z\bar{z}},$$

que podem ser encontradas em [7]. Daí, encontramos a equação 4).

Para provarmos as demais igualdades, expressamos os coeficientes da conexão  $\nabla$  associados a  $z$  e  $\bar{z}$  como

$$\nabla_{\partial_z}\partial_z = \mathbb{C}\Gamma_{11}^1\partial_z + \mathbb{C}\Gamma_{11}^2\partial_{\bar{z}},$$

$$\nabla_{\partial_z}\partial_{\bar{z}} = \mathbb{C}\Gamma_{12}^1\partial_z + \mathbb{C}\Gamma_{12}^2\partial_{\bar{z}},$$

$$\nabla_{\partial_{\bar{z}}}\partial_{\bar{z}} = \mathbb{C}\Gamma_{22}^1\partial_{\bar{z}} + \mathbb{C}\Gamma_{22}^2\partial_z,$$

onde  $\mathbb{C}\Gamma_{ij}^k$  são os símbolos de Christoffel da conexão associados à parametrização  $(z, \bar{z})$ .

Expressando  $\nabla_{\partial_z}\partial_z$  em termos de  $(u, v)$ , sendo  $z = u + iv$ , temos

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_z}\partial_z &= \frac{1}{4}\nabla_{(\partial_u - i\partial_v)}(\partial_u - i\partial_v) \\ &= \frac{1}{4}((\Gamma_1^{11} - 2i\Gamma_1^{12} - \Gamma_1^{22})\partial_u + (\Gamma_2^{11} - 2i\Gamma_2^{12} - \Gamma_2^{22})\partial_v) \\ &= \frac{1}{4}((\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 + 2\Gamma_{12}^2) + i(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1))\partial_z \\ &\quad + \frac{1}{4}((\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 - 2\Gamma_{12}^2) - i(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 + 2\Gamma_{12}^1))\partial_{\bar{z}}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathbb{C}\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{4}((\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 + 2\Gamma_{12}^2) + i(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1)),$$

$$\mathbb{C}\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{4}((\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 - 2\Gamma_{12}^2) - i(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 + 2\Gamma_{12}^1)).$$

De modo análogo, podemos determinar  $\nabla_{\partial_z}\partial_{\bar{z}}, \nabla_{\partial_{\bar{z}}}\partial_z, \nabla_{\partial_{\bar{z}}}\partial_{\bar{z}}$ . Como a parametrização é isotérmica, os símbolos de Christoffel são dados pelas igualdades

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^1 &= \frac{E_v}{2E}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{G_u}{2E}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{E_u}{2E}, \\ \Gamma_{22}^2 &= -\frac{E_v}{2G}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{G_u}{2G}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{G_v}{2G},\end{aligned}$$

e, como

$$\mathbb{C}\Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda_z}{\lambda} \quad e \quad \mathbb{C}\Gamma_{11}^2 = 0,$$

então, de modo similar,

$$\nabla_{\partial_z}\partial_{\bar{z}} = \nabla_{\partial_{\bar{z}}}\partial_z = 0$$

e

$$\nabla_{\partial_{\bar{z}}}\partial_{\bar{z}} = \frac{\lambda_{\bar{z}}}{\lambda},$$

o que conclui a prova do Lema. ■

No próximo Teorema, que pode ser encontrado em [13], serão apresentadas as equações fundamentais para a imersão e as condições de compatibilidade, reescritas para o caso em que temos um parâmetro conforme para a primeira forma fundamental. Estas equações, que são equivalentes às de compatibilidade, são chamadas de condições de integrabilidade.

**Teorema 16** (I. Fernandez e P. Mira, [13]). *Os dados fundamentais de uma imersão  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  satisfazem às seguintes condições de integrabilidade*

$$K = K_e + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)v^2; \tag{2.18}$$

$$p_{\bar{z}} = \frac{\lambda}{2} (H_z + vA(\kappa - 4\tau^2)); \tag{2.19}$$

$$A_{\bar{z}} = \frac{v\lambda}{2}(H + i\tau); \tag{2.20}$$

$$v_z = -(H - i\tau)A - \frac{2p\bar{A}}{\lambda}; \tag{2.21}$$

$$\|A\|^2 = \frac{1}{4}\lambda(1 - v^2). \tag{2.22}$$

*Reciprocamente, se escolhermos funções  $\lambda, v, H : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\lambda > 0, -1 \leq v \leq 1$  e  $p, A : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  em uma superfície de Riemann, simplesmente conexa,  $\Sigma$  satisfazendo as equações de integrabilidade para constantes  $\kappa, \tau$ , com  $\kappa - 4\tau \neq 0$ , então, a menos de congruência, existe uma única superfície  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  cujos dados fundamentais são  $(\lambda, v, H, p, A)$ .*

**Prova.** O Teorema 12 nos fornece uma condição necessária e suficiente para a existência de uma imersão isométrica em termos das equações de compatibilidade. Portanto, para provarmos o Teorema 16, basta verificarmos que as condições de integrabilidade são equivalentes às equações de compatibilidade. Deste modo, este Teorema é consequência imediata do Teorema 12. Assim, considerando  $(\lambda, v, H, p, A)$  os dados fundamentais da superfície  $\Sigma$ , vamos mostrar que  $(\lambda, v, H, p, A)$  satisfaz as equações (2.18) à (2.22) se, e somente se,  $(S, T, \nabla, v, J, K)$  verifica as equações de compatibilidade.

Inicialmente vemos que a equação  $\|T\|^2 + v^2 = 1$  é equivalente a equação (2.22), pois sabemos que

$$T = \frac{2}{\lambda} (\bar{A}\partial_z + A\partial_{\bar{z}}),$$

logo

$$\begin{aligned} \|T\|^2 &= \left\| \frac{2}{\lambda} (\bar{A}\partial_z + A\partial_{\bar{z}}) \right\|^2 \\ &= \left\langle \frac{2}{\lambda} (\bar{A}\partial_z + A\partial_{\bar{z}}), \frac{2}{\lambda} (\bar{A}\partial_z + A\partial_{\bar{z}}) \right\rangle \\ &= \frac{4}{\lambda^2} (\bar{A}\langle\partial_z, \partial_z\rangle + 2A\bar{A}\langle\partial_z, \partial_{\bar{z}}\rangle + A\langle\partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}}\rangle) \\ &= \frac{4}{\lambda^2} \left( 2\|A\|^2 \frac{\lambda}{2} \right) \\ &= \frac{4\|A\|^2}{\lambda}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|A\|^2 = \frac{\lambda}{4}(1 - v^2)$$

é equivalente a

$$\frac{4}{\lambda}\|A\|^2 = 1 - v^2$$

e também

$$\|T\|^2 + v^2 = 1.$$

Vamos agora mostrar que  $dv(X) + \langle SX - \tau JX, T \rangle = 0$  é equivalente a (2.21). Observa-se que  $dv(X) + \langle SX - \tau JX, T \rangle = 0$  é linear em  $X$ , portanto, para mostrarmos esta equivalência basta mostrarmos que esta é válida para  $X = \partial_z$ .

Como  $dv = v_z dz + v_{\bar{z}} d\bar{z}$ , então  $dv(\partial_z) = v_z$ . Temos também que  $J(\partial_z) = i\partial_z$ . Utilizando estas relações, e também  $T = \frac{2}{\lambda}(\bar{A}\partial_z + A\partial_{\bar{z}})$ , em (iv), segue-se que

$$dv(\partial_z) + \langle S(\partial_z) - \tau J(\partial_z), T \rangle = 0$$

é dada por

$$\begin{aligned}
v_z &= - \left\langle S\partial_z - \tau i\partial_z, \frac{2}{\lambda}(\bar{A}\partial_z + A\partial_{\bar{z}}) \right\rangle \\
&= - \left\langle S\partial_z, \frac{2}{\lambda}(\bar{A}\partial_z + A\partial_{\bar{z}}) \right\rangle + \left\langle \tau i\partial_z, \frac{2}{\lambda}(\bar{A}\partial_z + A\partial_{\bar{z}}) \right\rangle \\
&= -\frac{2}{\lambda}\bar{A}\langle S(\partial_z), \partial_z \rangle - \frac{2}{\lambda}A\langle S(\partial_z), \partial_{\bar{z}} \rangle + \frac{2}{\lambda}A\tau i\langle \partial_z, \partial_{\bar{z}} \rangle \\
&= -\frac{2}{\lambda}\bar{A}p - \frac{2}{\lambda}A\frac{\lambda}{2}H - \frac{2}{\lambda}i\tau A\frac{\lambda}{2} \\
&= -(H - i\tau)A - \frac{2}{\lambda}p\bar{A}.
\end{aligned}$$

Portanto,  $dv(X) + \langle S(X) - \tau J(X), T \rangle = 0$  e (2.21) são equivalentes.

Mostremos agora que (iii) e a equação (2.1) são equivalentes. Similarmente, basta mostrarmos que (iii) é válido para  $X = \partial_z$ . Isto é equivalente a mostrar que

$$\langle \nabla_{\partial_z} T, \partial_z \rangle = \frac{v\lambda}{2}(H - i\tau)$$

e

$$\langle \nabla_{\partial_z} T, \partial_z \rangle = vp.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{\partial_z} T, \partial_z \rangle &= \langle v(S(\partial_z) - \tau J(\partial_z)), \partial_z \rangle \\
&= \langle v(S(\partial_z) - i\tau\partial_z), \partial_z \rangle \\
&= v\langle S(\partial_z), \partial_z \rangle - vi\tau\langle \partial_z, \partial_z \rangle \\
&= vII(\partial_z, \partial_z) - vi\tau\langle \partial_z, \partial_z \rangle \\
&= v\frac{\lambda H}{2} - vi\tau\frac{\lambda}{2} \\
&= \frac{v\lambda}{2}(H - i\tau).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

E, similarmente,

$$\langle \nabla_{\partial_z} T, \partial_z \rangle pd = vp.$$

Observe que a expressão em (2.23) é o conjugado da expressão (). Assim, é possível mostrar que a equação (2.1) é equivalente a (iii), reescrevendo a expressão para a derivada do produto interno a seguir

$$\partial\langle T, \partial_z \rangle.$$

Em seguida deriva-se tal expressão e utiliza as equações (2.21) e (2.22).

Agora, mostremos que (ii) é equivalente a (2.19), como a primeira equação é bilinear e antissimétrica nas variáveis  $X$  e  $Y$ , basta verificarmos para  $X = \partial_z$  e  $Y = \partial_{\bar{z}}$ . Assim, consideraremos

$$\nabla_{\partial_z} S(\partial_{\bar{z}}) - \nabla_{\partial_{\bar{z}}} S(\partial_z) - S[\partial_z, \partial_{\bar{z}}] = (\kappa - 4\tau^2)v(\langle \partial_{\bar{z}}, T \rangle \partial_z - \langle \partial_z, T \rangle \partial_{\bar{z}}).$$

E, uma vez que vale que

$$S[\partial_z, \partial_{\bar{z}}] = \nabla_{\partial_{\bar{z}}}\partial_z - \nabla_{\partial_z}\partial_{\bar{z}} = 0,$$

encontramos

$$\nabla_{\partial_z}S(\partial_{\bar{z}}) - \nabla_{\partial_{\bar{z}}}S(\partial_z) = (\kappa - 4\tau^2)v(\langle \partial_{\bar{z}}, T \rangle \partial_z - \langle \partial_z, T \rangle \partial_{\bar{z}}).$$

Fazendo o produto interno dessa expressão com  $\partial_z$  e utilizando que  $\langle \partial_z, \partial_z \rangle = 0$  e  $\langle \partial_{\bar{z}}, \partial_z \rangle = \frac{\lambda}{2}$ , temos

$$\langle \nabla_{\partial_z}S(\partial_{\bar{z}}) - \nabla_{\partial_{\bar{z}}}S(\partial_z), \partial_z \rangle = -(\kappa - 4\tau^2)v\langle \partial_z, T \rangle \frac{\lambda}{2}.$$

Agora, como

$$p = \langle S(\partial_z), \partial_z \rangle \quad \text{e} \quad \nabla_{\partial_z}\partial_z = 0 \tag{2.24}$$

encontramos as relações

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}}\langle S(\partial_z), \partial_z \rangle &= \langle \nabla_{\partial_{\bar{z}}}S(\partial_z), \partial_z \rangle + \langle S(\partial_z), \nabla_{\partial_{\bar{z}}}\partial_z \rangle, \\ p_z &= \langle \nabla_{\partial_{\bar{z}}}S(\partial_z), \partial_z \rangle. \end{aligned}$$

Além disso, como

$$\langle S(\partial_{\bar{z}}), \partial_z \rangle = I(\partial_{\bar{z}}, \partial_z) = -\frac{\lambda H}{2},$$

derivando essa igualdade, temos

$$\begin{aligned} \partial_z\langle S(\partial_{\bar{z}}), \partial_z \rangle &= \langle \nabla_{\partial_z}S(\partial_{\bar{z}}), \partial_z \rangle + \langle S(\partial_{\bar{z}}), \nabla_{\partial_z}\partial_z \rangle, \\ -\frac{\lambda_z H + \lambda H_z}{2} &= \langle \nabla_{\partial_z}S(\partial_{\bar{z}}), \partial_z \rangle + \frac{\lambda_z}{\lambda}\langle S(\partial_{\bar{z}}), \partial_z \rangle, \\ -\frac{\lambda_z H}{2} - \frac{\lambda H_z}{2} &= \langle \nabla_{\partial_z}S(\partial_{\bar{z}}), \partial_z \rangle - \frac{\lambda_z \lambda H}{2\lambda}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle \nabla_{\partial_z}S(\partial_{\bar{z}}), \partial_z \rangle = -\frac{\lambda H_z}{2}.$$

Logo, a equação (2.24) pode ser reescrita como

$$p_z = \frac{\lambda}{2} (H_z + vA(\kappa - 4\tau^2)),$$

como queríamos.

Para concluirmos a prova do Teorema 16 mostraremos que a relação  $K = \det S + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)v^2$  é obtida a partir das demais equações de integrabilidade. De fato, como  $E = G = 0$ ,  $F = \frac{\lambda}{2}$ ,  $e = p$ ,  $g = \bar{p}$  e  $f = \frac{\lambda H}{2}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \det(S) &= K(I, II) \\ &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{p\bar{p} - \frac{\lambda^2 H^2}{4}}{-\frac{\lambda^2}{4}} = H^2 - \frac{4|p|^2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Utilizando a expressão para  $K$  obtida no Lema 15 anterior, podemos reescrever a equação de Gauss como

$$\frac{-2(\log(\lambda))_{z\bar{z}}}{\lambda} = H^2 - \frac{4|p|^2}{\lambda^2} + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)v^2. \quad (2.25)$$

Derivando a expressão

$$A_z - \frac{\lambda_z}{\lambda} = vp,$$

em relação a  $\bar{z}$ , e utilizando as equações (2.1), (2.21) e (2.22), obtemos a expressão (2.25).

Isto finaliza a prova. ■

## 2.2 A Diferencial de Abresch-Rosenberg

A diferencial holomorfa sobre superfícies imersas em  $\mathbb{R}^3$ , construída originalmente por Hopf em 1955, é uma das principais ferramentas utilizadas para a demonstração do Teorema de Hopf, apresentado no primeiro capítulo.

Duas importantes generalizações do Teorema de Hopf foram feitas, em 2004 e 2005, por Abresch e Rosenberg, em [1] e [2], respectivamente. Eles generalizaram a definição da diferencial de Hopf para superfícies com curvatura média constante, imersas nos espaços produto  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  e, mais geralmente, para espaços homogêneos tridimensionais com grupo de isometrias de dimensão quatro. Utilizando esta ferramenta, estabeleceram uma generalização do Teorema do Hopf para superfícies imersas em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , com o seguinte enunciado.

**Teorema 17** (Abresch-Rosenberg). *Qualquer imersão de uma esfera  $\mathbb{S}^2$  de curvatura média constante, em um espaço homogêneo simplesmente conexo,  $(M^3, g)$  com grupo de isometria no mínimo de dimensão quatro é, de fato, uma esfera com curvatura média constante, mergulhada e rotacionalmente invariante.*

Na seção que conclui este capítulo apresentaremos uma prova deste resultado para imersões nos espaços produto  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , que pode ser encontrada em [1]. A diferencial devida a Abresch-Rosenberg para uma imersão  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  é a diferencial quadrática globalmente definida por

$$Qdz^2 = (2(H + i\tau)p - (\kappa - 4\tau^2)A^2) dz^2. \quad (2.26)$$

Diferentemente do que acontece para imersões em  $\mathbb{R}^3$ , onde a diferencial de Hopf ser holomorfa implica que a superfície tem curvatura média constante, a diferencial de Abresch-Rosenberg pode ser holomorfa em algumas superfícies cuja curvatura média não é constante. Todavia, a recíproca deste é válida em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , exibiremos a prova agora.

**Teorema 18.** *A diferencial quadrática  $Qdz^2$  é holomorfa em qualquer superfície com curvatura média constante em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ .*

**Prova.** Derivando (2.26) em relação a  $\bar{z}$  obtemos

$$Q_{\bar{z}} = 2H_{\bar{z}}p + 2(H + i\tau)p_{\bar{z}} - (\kappa - 4\tau^2)2AA_{\bar{z}}.$$

Pelo Teorema 16, sabemos que

$$A_{\bar{z}} = \frac{v\lambda}{2}(H + i\tau) \quad \text{e} \quad p_{\bar{z}} = \frac{\lambda}{2}(H_z + vA(\kappa - 4\tau^2)).$$

Logo, segue-se que

$$\begin{aligned} Q_{\bar{z}} &= 2H_{\bar{z}}p + 2\frac{\lambda}{2}(H + i\tau)(H_z + vA(\kappa - 4\tau^2)) - (\kappa - 4\tau^2)2A\left(\frac{v\lambda}{2}(H + i\tau)\right) \\ &= 2H_{\bar{z}}p + (H + i\tau)\lambda H_z + (H + i\tau)\lambda vA(\kappa - 4\tau^2) - (\kappa - 4\tau^2)Av\lambda H - (\kappa - 4\tau^2)Av\lambda i\tau \\ &= 2H_{\bar{z}}p + \lambda H_z(H + i\tau). \end{aligned}$$

Como  $\Sigma$  é uma superfície cmc,  $H_z = H_{\bar{z}} = 0$ , e

$$Q_{\bar{z}} = 0,$$

ou seja,  $Q$  é holomorfa, como queríamos mostrar. ■

Pode-se também definir a diferencial de Abresch-Rosenberg para imersão de uma superfície  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  da seguinte maneira

$$Qdz^2 = \left(2p - \frac{\kappa - 4\tau^2}{H + i\tau}A^2\right) dz^2.$$

Uma vantagem de escrever a diferencial desta maneira é ficar explícito que a diferencial de Abresch-Rosenberg é uma perturbação da diferencial de Hopf. O próximo resultado, que pode ser encontrado em [1], classifica as superfícies com curvatura média constante e diferencial quadrática identicamente nula.

**Teorema 19.** *Existem quatro distintas classes de superfícies completas, possivelmente imersas, cmc  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  ou  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , com diferencial quadrática  $Q$  identicamente nula.*

*Três dessas classes são compostas por superfícies mergulhadas rotacionalmente invariantes; são elas as esferas cmc de Hsiang e Pedrosa contidas no espaço homogêneo, seus primos não compactos  $D_H^2$ , e as superfícies do tipo catenoidal  $C_H^2$ . A quarta classe é compreendida de certas órbitas  $P_H^2$  do 2-dimensional grupo solúvel de isometrias do espaço homogêneo.*

Utilizando esse Teorema 19, é possível estabelecer a seguinte generalização do Teorema de Hopf em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

**Teorema 20** (Abresch, Rosenberg, [1]). *Qualquer esfera cmc  $\Sigma$  imersa em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  ou em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , é uma esfera cmc mergulhada rotacionalmente invariante  $S_H^2$  contida no respectivo espaço produto.*

**Prova.** Se a superfície é cmc então a diferencial quadrática  $Q$  é holomorfa. É conhecido, ver [1], que qualquer diferencial quadrática holomorfa sobre uma esfera de dimensão dois é identicamente nula. Logo  $Q \equiv 0$ . Então uma das quatro possibilidades, listadas no teorema de classificação enunciado acima, acontece.

Entretanto, como o gênero da superfície é zero e ela é compacta a única possibilidade que pode ocorrer é  $\Sigma$  ser uma esfera cmc, mergulhada e rotacionalmente invariante.

■

## Capítulo 3

# O Teorema de Alencar, do Carmo e Tribuzy

Neste capítulo, apresentaremos generalizações do Teorema de Hopf, para superfícies imersas em espaços homogêneos tridimensionais, com grupo de isometria de dimensão quatro. Tais espaços são fibrações Riemannianas com curvatura fibrado  $\tau$ , vertical e unidimensional, sobre uma forma espacial, bidimensional, com curvatura seccional  $\kappa$ . E são classificados, a menos de isometrias, por  $\kappa$  e  $\tau$ , ambos números reais tais que  $\kappa \neq 4\tau^2$ . Quando  $\tau = 0$ , pela diferença acima temos que  $\kappa \neq 0$ . E tais espaços são da forma  $M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ , com  $\kappa = -1, 0, 1$ . Quando  $\tau \neq 0$ , temos as esferas de Berger para  $\kappa > 0$ , o espaço tridimensional de Heisenberg para  $\kappa = 0$  e o recobrimento universal do grupo de Lie  $PSL_2(\mathbb{R})$  para  $\kappa < 0$ . Mais informações podem ser encontradas em [8] e [9].

As generalizações devidas a H. Alencar, M. do Carmo, I. Fernández e R. Tribuzzi, [3] e [4], além de generalizarem o espaço ambiente considerado, utilizaram uma hipótese mais fraca que curvatura média constante. De fato, eles supõem que a norma da diferencial da curvatura média de  $H$  é limitada

$$|dH| \leq h(z)|Q^{(2,0)}|,$$

onde  $|dH|$  é a norma da diferencial da curvatura média  $H$  da superfície imersa  $M$ , compacta e de gênero zero,  $h$  é uma função real contínua não negativa e  $Q^{(2,0)}$  é a parte  $(2, 0)$  da forma quadrática definida por Abresch e Rosenberg.

Como  $H = k$ , constante, implica que  $dH \equiv 0$ , o resultado encontrado em [3] generaliza também o resultado de U. Abresch e H. Rosenberg apresentados no capítulo 2. Enunciaremos os resultados principais deste capítulo e a seguir faremos uma seção dedicada às definições e resultados utilizados nas provas destes Teoremas, com destaque para o Lema 26 que tem importância própria.

**Teorema 21** (Alencar, do Carmo e Tribuzy,[3]). *Seja  $M$  uma superfície compacta, de gênero zero, imersa em  $M^2(c) \times \mathbb{R}$ . Suponhamos que*

$$|dH| \leq h(z)|Q^{(2,0)}|.$$

*Então  $Q^{(2,0)}$  é identicamente nula e  $M$  é uma superfície invariante por rotações em  $M^2(c) \times \mathbb{R}$ .*

**Teorema 22** (Alencar, do Carmo, Fernandez, Tribuzy, [4]). *Seja  $M$  uma superfície compacta de gênero zero imersa em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , com curvatura média  $H$ . Assuma que*

$$|dH| \leq g|Q^{(2,0)}|,$$

*onde  $g$  é uma função real, contínua e não negativa. Então  $Q^{(2,0)}$  é identicamente nula e  $M$  é uma superfície com curvatura média constante invariante por rotações em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ .*

As demonstrações destes resultados serão apresentadas nas seções 3.3 e 3.4.

### 3.1 Preliminares

Consideremos  $(u, v)$  parâmetros isotérmicos em um subconjunto aberto  $U$  da superfície  $M$ . Assim,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = \lambda^2, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = 0.$$

Sejam  $z = u + iv$ ,

$$dz = \frac{1}{\sqrt{2}}(du + idv), \quad d\bar{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(du - idv)$$

e sejam  $Z$  e  $\bar{Z}$  os campos definidos sobre  $U$  dados por

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad \bar{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right),$$

de modo que

$$dz(Z) = d\bar{z}(\bar{Z}) = 1, \quad dz(\bar{Z}) = d\bar{z}(Z) = 0 \quad \text{e} \quad \langle \bar{Z}, Z \rangle = \lambda^2.$$

Neste ponto, consideraremos o espaço ambiente mais geral  $M^n(c) \times \mathbb{R}$ , onde  $M^n(c)$  é uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante  $c$ , sendo  $M \looparrowright M^n(c) \times \mathbb{R}$  uma superfície imersa. A generalização da diferencial quadrática definida por Abresch e Rosenberg é definida por

$$Q(X, Y) = 2\langle \alpha(X, Y), \vec{H} \rangle - c\langle \xi X, \xi Y \rangle,$$

onde  $\vec{H} = HN$  é o vetor curvatura média da imersão,  $\alpha$  é a segunda forma fundamental e  $\xi : M^n(c) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a projeção  $\xi(p, t) = t$ . Seja a  $(2, 0)$ -componente da diferencial  $Q$ ,

$$Q^{(2,0)} = \psi(z)dz^2.$$

Notemos que  $Q(Z, Z) = \psi(z)$  e daí  $|Q(Z, Z)| = |\psi(z)|$ . Observemos que

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = \bar{Z}Q(Z, Z) = 2\bar{Z}\langle \alpha(Z, Z), \vec{H} \rangle - c\bar{Z}\langle \xi(Z), \xi(Z) \rangle.$$

Utilizando a conexão normal  $\nabla^\perp$ , definida por

$$\nabla_X^\perp \eta := \bar{\nabla}_X N - S_\eta(X); \quad \eta, N \in \mathfrak{X}(M)^\perp, X \in \mathfrak{X}(M).$$

Exibimos o termo  $2\bar{Z}\langle \alpha(Z, Z), \vec{H} \rangle$  como

$$2\bar{Z}\langle \alpha(Z, Z), \vec{H} \rangle = 2\langle \nabla_{\bar{Z}}^\perp \alpha(Z, Z), \vec{H} \rangle + 2\langle \alpha(Z, Z), \nabla_{\bar{Z}}^\perp \vec{H} \rangle. \quad (3.1)$$

Precisaremos das seguintes igualdades.

**Lema 23.** *Temos que  $\nabla_{\bar{Z}} Z = \nabla_Z \bar{Z} = 0$ .*

**Prova.** Como a conexão  $\nabla$  é simétrica então, para  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , temos que

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X.$$

Como  $Z, \bar{Z} \in \mathfrak{X}(M)$ , então

$$\begin{aligned} [Z, \bar{Z}] &= \nabla_Z \bar{Z} - \nabla_{\bar{Z}} Z \\ &= Z\bar{Z} - \bar{Z}Z. \end{aligned}$$

É verdade que  $[Z, \bar{Z}] \equiv 0$ . De fato, dada uma função  $f \in C^\infty(M)$ , temos

$$\begin{aligned} [Z, \bar{Z}](f) &= Z\bar{Z}(f) - \bar{Z}Z(f) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right) (f) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right) \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) (f) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) (f) - \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) (f) \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

Logo  $\nabla_{\bar{Z}} Z = \nabla_Z \bar{Z}$ , como afirmado.

Agora, como  $\nabla_{\bar{Z}} Z \in \mathfrak{X}(M)$ , podemos escrever

$$\nabla_{\bar{Z}} Z = aZ + b\bar{Z}.$$

E, daí,

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{\bar{Z}}Z, Z \rangle &= \langle aZ + b\bar{Z}, Z \rangle \\ &= a\langle Z, Z \rangle + b\langle \bar{Z}, Z \rangle \\ &= b\langle \bar{Z}, Z \rangle,\end{aligned}$$

Pois,  $\langle Z, Z \rangle$ . Por outro lado,

$$\langle \nabla_{\bar{Z}}Z, Z \rangle = \frac{1}{2}\bar{Z}\langle Z, Z \rangle = 0,$$

logo,

$$b\langle \bar{Z}, Z \rangle = 0$$

$$b = 0,$$

pois  $\langle \bar{Z}, Z \rangle = \lambda \neq 0$ . Daí,

$$\nabla_{\bar{Z}}Z = aZ.$$

Agora fazendo o produto interno de  $\nabla_{\bar{Z}}Z$  com  $\bar{Z}$ , obtemos que

$$\langle \nabla_{\bar{Z}}Z, \bar{Z} \rangle = a\langle Z, \bar{Z} \rangle,$$

isto é,

$$\langle \nabla_Z\bar{Z}, \bar{Z} \rangle = a\langle Z, \bar{Z} \rangle$$

e como  $\langle \nabla_Z\bar{Z}, \bar{Z} \rangle = \frac{1}{2}Z\langle \bar{Z}, \bar{Z} \rangle = 0$ . De modo similar, temos que

$$a\langle Z, \bar{Z} \rangle = 0$$

$$a = 0.$$

Temos então que  $\nabla_Z\bar{Z} = \nabla_{\bar{Z}}Z = 0$ , concluindo assim a prova do Lema. ■

Como, por definição,

$$\begin{aligned}(\nabla_{\bar{Z}}\alpha)(Z, Z) &= \nabla_{\bar{Z}}^\perp\alpha(Z, Z) - \alpha(\nabla_{\bar{Z}}Z, Z) - \alpha(Z, \nabla_{\bar{Z}}Z) \\ &= \nabla_{\bar{Z}}^\perp\alpha(Z, Z) - 2\alpha(\nabla_{\bar{Z}}Z, Z),\end{aligned}$$

Utilizando o Lema anterior, temos que

$$(\nabla_{\bar{Z}}\alpha)(Z, Z) = \nabla_{\bar{Z}}^\perp\alpha(Z, Z).$$

Portanto, utilizando a expressão (3.1) e a expressão acima, encontramos

$$2\bar{Z}\langle \alpha(Z, Z), \vec{H} \rangle = 2\left\langle (\nabla_{\bar{Z}}^\perp\alpha)(Z, Z), \vec{H} \right\rangle + 2\langle \alpha(Z, Z), \nabla_{\bar{Z}}^\perp\vec{H} \rangle. \quad (3.2)$$

Agora, utilizando a equação de Codazzi e denotando por  $\tilde{R}$  a curvatura do espaço ambiente, é válida a relação

$$\langle \tilde{R}(X, Y)Z, \eta \rangle = (\bar{\nabla}_Y \alpha)(X, Z, \eta) - (\bar{\nabla}_X \alpha)(Y, Z, \eta)$$

assumindo  $X = Z, Y = \bar{Z}, Z = Z, \eta = \vec{H}$ . Daí,

$$(\bar{\nabla}_{\bar{Z}} \alpha)(Z, Z, \vec{H}) = (\bar{\nabla}_Z \alpha)(\bar{Z}, Z, \vec{H}) + \langle \tilde{R}(Z, \bar{Z})Z, \vec{H} \rangle.$$

Substituindo a expressão acima na equação (3.2), utilizando a conexão normal, temos que

$$2\bar{Z}\langle \alpha(Z, Z), \vec{H} \rangle = 2\left\langle (\nabla_{\frac{1}{2}\bar{Z}} \alpha)(\bar{Z}, Z), \vec{H} \right\rangle + \left\langle \tilde{R}(Z, \bar{Z})Z, \vec{H} \right\rangle + 2\langle \alpha(Z, Z), \nabla_{\frac{1}{2}\bar{Z}} \vec{H} \rangle.$$

O próximo Lema fornece uma expressão para o termo  $\left\langle \tilde{R}(Z, \bar{Z})Z, \vec{H} \right\rangle$  da equação acima.

**Lema 24.** *Temos que*

$$\left\langle \tilde{R}(Z, \bar{Z})Z, \vec{H} \right\rangle = c\lambda^2 \langle \xi(Z), \xi(\vec{H}) \rangle.$$

**Prova.** Consideremos  $\pi : M^2(c) \times \mathbb{R} \rightarrow M^2(c)$ , definida por

$$\pi(p, t) = p.$$

Identificaremos  $\pi$  e  $\xi$  com suas respectivas derivadas. Portanto,  $X = \pi(X) + \xi(X)$ . Como o espaço ambiente  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  que estamos considerando é uma fibração Riemmanianna, podemos utilizar o Teorema 9, enunciado no Capítulo 2, para cada espaço com curvatura seccional constante. Então,  $\tilde{R}$  é dada por

$$\langle \tilde{R}(Z, \bar{Z})Z, \vec{H} \rangle = c\{\langle \pi(\bar{Z}), \pi(Z) \rangle \langle \pi(Z), \pi(\vec{H}) \rangle - \langle \pi(Z), \pi(Z) \rangle \langle \pi(\bar{Z}), \pi(\vec{H}) \rangle\}. \quad (3.3)$$

Vamos reescrever cada um dos termos do segundo membro da equação acima. Primeiro,

$$\begin{aligned} \langle \pi(\bar{Z}), \pi(Z) \rangle &= \langle \bar{Z} - \xi\bar{Z}, Z - \xi Z \rangle \\ &= \langle \bar{Z}, Z \rangle - \langle \bar{Z}, \xi Z \rangle - \langle \xi\bar{Z}, Z \rangle + \langle \xi\bar{Z}, \xi Z \rangle \\ &= \lambda^2 - \langle \pi\bar{Z} + \xi\bar{Z}, \xi Z \rangle - \langle \xi\bar{Z}, \pi Z + \xi Z \rangle + \langle \xi\bar{Z}, \xi Z \rangle \\ &= \lambda^2 - \langle \pi\bar{Z}, \xi Z \rangle - \langle \xi\bar{Z}, \xi Z \rangle - \langle \xi\bar{Z}, \pi Z \rangle - \langle \xi\bar{Z}, \xi Z \rangle + \langle \xi\bar{Z}, \xi Z \rangle. \end{aligned}$$

Como  $\langle \pi\bar{Z}, \xi Z \rangle = \langle \xi\bar{Z}, \pi Z \rangle = 0$  e os dois últimos termos da equação acima se cancelam, temos

$$\langle \pi\bar{Z}, \pi Z \rangle = \lambda^2 - \langle \xi\bar{Z}, \xi Z \rangle.$$

Sendo  $Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $N \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ , temos que  $\langle Z, N \rangle = 0$ , e daí

$$\begin{aligned}
 \langle \pi Z, \pi \vec{H} \rangle &= \langle Z - \xi Z, \vec{H} - \xi \vec{H} \rangle \\
 &= \langle Z, \vec{H} \rangle - \langle Z, \xi \vec{H} \rangle - \langle \xi Z, \vec{H} \rangle + \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle \\
 &= 0 - \langle Z, \xi \vec{H} \rangle - \langle \xi Z, \vec{H} \rangle + \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle \\
 &= -\langle \pi Z + \xi Z, \xi \vec{H} \rangle - \langle \xi Z, \pi \vec{H} + \xi \vec{H} \rangle + \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle \\
 &= -\langle \pi Z, \xi \vec{H} \rangle - \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle - \langle \xi Z, \pi \vec{H} \rangle - \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle + \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle \\
 &= -\langle \pi Z, \xi \vec{H} \rangle - \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle - \langle \xi Z, \pi \vec{H} \rangle.
 \end{aligned}$$

e, como  $\langle \pi Z, \xi \vec{H} \rangle = \langle \xi Z, \pi \vec{H} \rangle = 0$ , encontramos que

$$\langle \pi Z, \pi \vec{H} \rangle = -\langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \langle \pi \bar{Z}, \pi Z \rangle \langle \pi Z, \pi \vec{H} \rangle &= -(\lambda^2 - \langle \xi \bar{Z}, \xi Z \rangle) \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle \\
 &= -\lambda^2 \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle + \langle \xi \bar{Z}, \xi Z \rangle \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle.
 \end{aligned}$$

Agora, vamos calcular o segundo termo do segundo membro da equação (3.3). De modo similar, usando que  $\langle Z, Z \rangle = 0$ , temos

$$\begin{aligned}
 \langle \pi Z, \pi Z \rangle &= \langle Z - \xi Z, Z - \xi Z \rangle \\
 &= \langle Z, Z \rangle - \langle Z, \xi Z \rangle - \langle \xi Z, Z \rangle + \langle \xi Z, \xi Z \rangle \\
 &= -2\langle Z, \xi Z \rangle + \langle \xi Z, \xi Z \rangle \\
 &= -2(\langle \pi Z + \xi Z, \xi Z \rangle) + \langle \xi Z, \xi Z \rangle \\
 &= -2(\langle \pi Z, \xi Z \rangle + \langle \xi Z, \xi Z \rangle) + \langle \xi Z, \xi Z \rangle \\
 &= -2(0 + \langle \xi Z, \xi Z \rangle) + \langle \xi Z, \xi Z \rangle \\
 &= (-2 + 1)\langle \xi Z, \xi Z \rangle \\
 &= -\langle \xi Z, \xi Z \rangle.
 \end{aligned}$$

Utilizando que  $\langle \bar{Z}, \vec{H} \rangle = 0$ , com  $\bar{Z}, \vec{H}$  tangente e normal, respectivamente, de modo similar ao que foi feito anteriormente segue que

$$\begin{aligned}
 \langle \pi \bar{Z}, \pi \vec{H} \rangle &= \langle \bar{Z} - \xi \bar{Z}, \vec{H} - \xi \vec{H} \rangle \\
 &= \langle \bar{Z}, \vec{H} \rangle - \langle \bar{Z}, \xi \vec{H} \rangle - \langle \xi \bar{Z}, \vec{H} \rangle + \langle \xi \bar{Z}, \xi \vec{H} \rangle \\
 &= 0 - \langle \pi \bar{Z} + \xi \bar{Z}, \xi \vec{H} \rangle - \langle \xi \bar{Z}, \pi \vec{H} + \xi \vec{H} \rangle + \langle \xi \bar{Z}, \xi \vec{H} \rangle \\
 &= -\langle \pi \bar{Z}, \xi \vec{H} \rangle - \langle \xi \bar{Z}, \xi \vec{H} \rangle - \langle \xi \bar{Z}, \pi \vec{H} \rangle - \langle \xi \bar{Z}, \xi \vec{H} \rangle + \langle \xi \bar{Z}, \xi \vec{H} \rangle \\
 &= -\langle \xi \bar{Z}, \xi \vec{H} \rangle.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle \pi Z, \pi Z \rangle \langle \pi \vec{Z}, \pi \vec{H} \rangle = \langle \xi Z, \xi Z \rangle \langle \xi \bar{Z}, \xi \vec{H} \rangle.$$

Podemos então reescrever a equação (3.3) como

$$\begin{aligned} \langle \tilde{R}(Z, \bar{Z})Z, \vec{H} \rangle &= c\{-\lambda^2 \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle + \langle \xi \bar{Z}, \xi Z \rangle \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle - \langle \xi Z, \xi Z \rangle \langle \xi \bar{Z}, \xi \vec{H} \rangle\} \\ &= c\{-\lambda^2 \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle + |\xi \bar{Z}| |\xi Z| |\xi Z| |\xi \vec{H}| - |\xi \bar{Z}| |\xi Z| |\xi Z| |\xi \vec{H}| \} \\ &= -c\lambda^2 \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle. \end{aligned}$$

Finalmente, pela propriedade de antissimetria do tensor curvatura, obtemos

$$\langle \tilde{R}(\bar{Z}, Z)Z, \vec{H} \rangle = c\lambda^2 \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle,$$

como afirmado. ■

Será necessário para o que segue a prova mais um resultado auxiliar.

**Lema 25.** *Temos*

$$c\bar{Z} \langle \xi Z, \xi Z \rangle = 2c\lambda^2 \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle.$$

**Prova.** Observe, inicialmente, que

$$\alpha(Z, \bar{Z}) = \bar{\nabla}_{\bar{Z}} Z - (\nabla_{\bar{Z}} Z)^T = \bar{\nabla}_{\bar{Z}} Z,$$

pois já foi provado que  $\nabla_{\bar{Z}} Z = 0$ . Como o espaço ambiente é o espaço produto  $M^n(c) \times \mathbb{R}$  com as projeções naturais  $\pi$  e  $\xi$ , então podemos escrever

$$\bar{\nabla}_{\bar{Z}} Z = \bar{\nabla}_{\bar{Z}}(\xi Z + \pi Z) = \nabla_{\bar{Z}}^1(\xi Z) + \nabla_{\bar{Z}}^2(\pi Z),$$

onde  $\nabla^1$  e  $\nabla^2$  são as conexões de  $\mathbb{R}$  e de  $M^n(c)$ , respectivamente. Logo,

$$\xi \alpha(Z, \bar{Z}) = \xi \bar{\nabla}_{\bar{Z}} Z = \xi \nabla_{\bar{Z}}^1(\xi Z) + \xi \nabla_{\bar{Z}}^2(\pi Z) = \nabla_{\bar{Z}}^1(\xi Z).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle \xi \alpha(Z, \bar{Z}), \xi Z \rangle &= \langle \nabla_{\bar{Z}}^1(\xi Z), \xi Z \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{Z}}(\xi Z), \xi Z \rangle. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \bar{Z} \langle \xi Z, \xi Z \rangle &= 2 \langle \nabla_{\bar{Z}}(\xi Z), \xi Z \rangle \\ &= 2 \langle \xi \alpha(Z, \bar{Z}), \xi Z \rangle. \end{aligned}$$

Consideremos o campo

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2), \tag{3.4}$$

onde  $e_1$  e  $e_2$  são os vetores unitários nas direções de  $\frac{\partial}{\partial u}$  e  $\frac{\partial}{\partial v}$ , respectivamente. É verdade que  $Z = \lambda E$ , pois

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial}{\left| \frac{\partial}{\partial u} \right|} - i \frac{\partial}{\left| \frac{\partial}{\partial v} \right|} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial}{\lambda \partial u} - i \frac{\partial}{\lambda \partial v} \right). \end{aligned}$$

Vamos agora utilizar este fato e a bilinearidade da segunda forma  $\alpha$  para o que segue

$$\begin{aligned} \alpha(Z, \bar{Z}) = \lambda^2 \alpha(E, E) &= \lambda^2 \alpha \left( \frac{e_1 - ie_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_1 - ie_2}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \{ \alpha(e_1, e_1) + \alpha(e_2, e_2) \} \\ &= \lambda^2 \vec{H}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{Z} \langle \xi Z, \xi \bar{Z} \rangle &= 2 \langle \nabla^1 \bar{Z}(\xi Z), \xi Z \rangle = 2 \langle \alpha(Z, \bar{Z}), \xi Z \rangle = 2 \langle \lambda^2 \vec{H}, \xi Z \rangle \\ &= 2 \lambda^2 \langle \vec{H}, \xi Z \rangle. \end{aligned}$$

Como afirmado. ■

Podemos reescrever  $\bar{Z}Q(Z, Z)$  como

$$\begin{aligned} \bar{Z}Q(Z, Z) &= 2 \langle (\nabla_{\bar{Z}}^\perp)(\bar{Z}, Z), \vec{H} \rangle + 2c\lambda^2 \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle + 2 \langle \alpha(Z, Z), \nabla_{\bar{Z}}^\perp \vec{H} \rangle - c\bar{Z} \langle \xi Z, \xi Z \rangle \\ &= 2 \langle (\nabla_{\bar{Z}}^\perp)(\bar{Z}, Z), \vec{H} \rangle + 2 \langle \alpha(Z, Z), \nabla_{\bar{Z}}^\perp \vec{H} \rangle. \end{aligned} \tag{3.5}$$

A última igualdade decorre devido ao cancelamento de dois, dos quatro termos anteriores, utilizamos para isto o Lema 25,

O primeiro termo do segundo membro da equação (3.5) é igual a

$$\begin{aligned} (\nabla_{\bar{Z}}^\perp \alpha)(\bar{Z}, Z) &= \nabla_{\bar{Z}}^\perp(\alpha(\bar{Z}, Z)) - \alpha(\nabla_{\bar{Z}} \bar{Z}, Z) - \alpha(\bar{Z}, \nabla_{\bar{Z}} Z) \\ &= Z \langle \bar{Z}, Z \rangle \vec{H} - \alpha(\bar{Z}, \nabla_{\bar{Z}} Z), \end{aligned}$$

a última igualdade decorre das igualdades  $\alpha(Z, \bar{Z}) = \lambda^2 H$  e  $\nabla_{\bar{Z}} \bar{Z} = 0$ . Utilizando a regra de derivação do produto e do produto interno obtemos

$$(\nabla_{\bar{Z}}^\perp \alpha)(\bar{Z}, Z) = \langle \nabla_{\bar{Z}} \bar{Z}, Z \rangle \vec{H} + \langle \bar{Z}, \nabla_{\bar{Z}} Z \rangle \vec{H} + \langle \bar{Z}, Z \rangle \nabla_{\bar{Z}}^\perp \vec{H} - \alpha(\bar{Z}, \nabla_{\bar{Z}} Z).$$

Considere  $E$ , definido pela equação (3.4), deste modo, quaisquer vetores complexos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , podem ser escritos como  $X = w_1 E$  e  $Y = w_2 E$ , com  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ . Daí,

$$\alpha(X, \bar{Y}) = w_1 w_2 \alpha(E, \bar{E}) = \langle X, \bar{Y} \rangle \vec{H}.$$

Agora, escolhendo  $X = \nabla_Z Z$  e  $Y = Z$ , obtemos

$$(\nabla_Z^\perp \alpha)(\bar{Z}, Z) = \langle \nabla_Z \bar{Z}, Z \rangle \vec{H} + \langle \bar{Z}, \nabla_Z Z \rangle \vec{H} + \langle \bar{Z}, Z \rangle \nabla_Z^\perp \vec{H} - \langle \nabla_Z Z, \bar{Z} \rangle \vec{H}$$

novamente utilizando que  $\nabla_Z \bar{Z} = 0$  e simplificando a expressão do segundo membro, retirando os termos que se anulam, temos

$$(\nabla_Z^\perp \alpha)(\bar{Z}, Z) = \langle \bar{Z}, Z \rangle \nabla_Z^\perp \vec{H}.$$

Finalmente, podemos reescrever a expressão de  $\bar{Z}Q(Z, Z)$  como segue

$$\bar{Z}Q(Z, Z) = 2\langle \langle Z, \bar{Z} \rangle \nabla_Z^\perp \vec{H}, \vec{H} \rangle + 2\langle \alpha(Z, Z), \nabla_Z^\perp \vec{H} \rangle. \quad (3.6)$$

Na próxima seção destacamos um Lema que será fundamental na demonstração dos Teoremas principais do capítulo.

## 3.2 Lema Principal

Nesta seção, enunciaremos e provaremos o Lema Principal, que é um resultado fundamental para demonstração dos Teoremas centrais deste capítulo.

**Lema 26** (Lema Principal). *Seja  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função complexa definida no aberto  $U$ , que contém a origem  $z = 0$ . Suponhamos que*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \leq h(z) |f(z)|, \quad (3.7)$$

onde  $h$  é uma função real contínua, não negativa. Assumamos que  $z = z_0$  é um zero de  $f$ . Então  $f = 0$  em uma vizinhança  $V \subset U$  de  $z_0$  ou

$$f(z) = (z - z_0)^k f_k(z), \quad z \in V, k \geq 1.$$

Aqui  $f_k(z)$  é uma função contínua com  $f_k(z_0) \neq 0$ .

Sem perda de generalidade, vamos supor  $z_0 = 0$  e que  $U$  é um disco de raio  $R$  e centro na origem. A prova do Lema Principal segue imediatamente dos dois seguintes Lemas auxiliares.

**Lema 27.** *Assumindo as hipóteses do Lema Principal e que  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^{r-1}} = 0, r \geq 1$ , temos que o  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^r}$  existe.*

**Prova.** Definamos uma forma diferencial

$$\frac{f(z)}{z^r(z-w)}dz$$

em  $D_R(0)$ , com  $z \neq 0$ ,  $z \neq w$  e  $r \geq 1$ . Usando a versão complexa do Teorema de Green-Stokes, que pode ser encontrada em [17], p.175,

$$\int \int_B \left( \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z} = \int_{\partial B} g dz + h d\bar{z},$$

obtemos

$$- \int \int_{D_R(0) \setminus (D_a(0) \cup D_a(w))} \frac{1}{z^r(z-w)} dz \wedge d\bar{z} = \int_{\partial D_R(0) \setminus (D_a(0) \cup D_a(w))} \frac{f(w)}{z^r(z-w)} dz. \quad (3.8)$$

De fato, a equação (3.8) é satisfeita pois

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{f(z)}{z^r(z-w)} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{1}{z^r(z-w)} \right) f(z) + \frac{1}{z^r(z-w)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}},$$

e sendo  $\frac{1}{z^r(z-w)}$  holomorfa em  $D_R(0) \setminus \{D_a(0) \cup D_a(w)\}$ , temos

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{1}{z^r(z-w)} \right) = 0.$$

Daí a equação (3.8) é consequência imediata do Teorema de Green-Stokes. Daí,

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_R(0)} \frac{f(z)}{z^r(z-w)} dz + \int_{\partial D_a(0)} \frac{f(z)}{z^r(z-w)} dz + \int_{\partial D_a(w)} \frac{f(z)}{z^r(z-w)} dz \\ = - \int \int_{D_R(0) \setminus \{D_a(0) \cup D_a(w)\}} \frac{1}{z^r(z-w)} dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Vamos agora calcular as integrais de (3.9). Definamos a função auxiliar  $g(z) = \frac{f(z)}{z^r}$  e façamos a seguinte mudança de variáveis  $z = w + ae^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , na integral

$$\int_{\partial D_a(w)} \frac{f(z)}{z^r(z-w)} dz.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_a(w)} \frac{g(z)}{z-w} = - \int_{\partial D_a^-(w)} \frac{g(z)}{z-w} = - \int_0^{2\pi} \frac{g(w + ae^{i\theta})}{ae^{i\theta}} aie^{i\theta} d\theta \\ = - \int_0^{2\pi} ig(w + ae^{i\theta}) d\theta, \end{aligned}$$

utilizamos que  $dz = aie^{i\theta} d\theta$  e  $\partial D_a^-(w)$  é  $\partial D_a(w)$  com a orientação anti-horária.

Como  $g(z)$  é contínua em  $D_a(w)$  temos que

$$\lim_{a \rightarrow 0} g(w + ae^{i\theta}) = g(w),$$

e, portanto,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\partial D_a(w)} \frac{g(z)}{z-w} = -ig(w) \int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi ig(w) = -2\pi if(w)w^{-r}.$$

Calculemos, agora, explicitamente a integral

$$\int_{\partial D_a(0)} \frac{f(z)}{z^r(z-w)} dz, \quad r \geq 1.$$

Fazendo a mudança de variável  $z = ae^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_a(0)} \frac{f(z)}{z^r(z-w)} dz &= - \int_{\partial D_a^-(0)} \frac{f(ae^{i\theta})}{(a^r e^{ri\theta}(ae^{i\theta} - w))} dz \\ &= - \int_{\partial D_a^-(0)} \frac{f(ae^{i\theta})}{(a^r e^{ri\theta}(ae^{i\theta} - w))} aie^{i\theta} d\theta = -i \int_{\partial D_a^-(0)} \frac{f(ae^{i\theta})}{(a^{r-1} e^{i(r-1)\theta}(ae^{i\theta} - w)} d\theta. \end{aligned}$$

Por hipótese,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^{r-1}} = 0.$$

Daí, fazendo  $a \rightarrow 0$ , temos  $z \rightarrow 0$ , e, usando a integral acima, temos que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_{\partial D_a(0)} \frac{f(z)}{z^r(z-w)} dz = -i \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{f(ae^{i\theta})}{a^{r-1} e^{i(r-1)\theta}(ae^{i\theta} - w)} d\theta = 0.$$

Fazendo  $a \rightarrow 0$  na equação (3.9), temos que

$$-2i\pi f(w)w^{-r} + \int_{\partial D_R(0)} \frac{f(z)}{z^r(z-w)} dz = - \iint_{D_R(0)} \frac{1}{z^r(z-w)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}. \quad (3.10)$$

Além disso, a integral dupla, acima, à direita, quando  $a \rightarrow 0$ , existe pois as integrais à esquerda de (3.9), quando  $a \rightarrow 0$ , existem. Agora, voltemos à expressão (3.10), por hipótese existe  $A > 0$  tal que

$$\max_{z \in D_R(0)} h(z) \leq A,$$

pois  $h$  é contínua e o disco é um compacto, portanto, possui máximo. Então, segue da equação (3.10) que

$$\begin{aligned} 2\pi|f(w)||w|^{-r} &\leq \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r|z-w|} |dz| + \iint_{D_R(0)} \frac{1}{|z|^{-r}|z-w|} \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| |dz \wedge d\bar{z}| \\ &\leq \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r|z-w|} |dz| + \iint_{D_R(0)} \frac{2A|f(z)|}{|z|^{-r}|z-w|} dx dy, \end{aligned} \quad (3.11)$$

pois  $dz \wedge d\bar{z} = -2idxdy$ , com  $z = x + iy$ .

Tomando  $z_0 \in D$ ,  $z_0 \neq 0$ , multiplicando a inequação por  $\frac{1}{|w-z_0|}$  e integrando com respeito a  $dudv$ , onde  $w = u + iv$ , concluímos com  $D_\epsilon = D_R(0) \setminus D_\epsilon(z_0)$ , que

$$2\pi \int_{D_\epsilon} \frac{|f(w)|}{|w - z_0||w|^r} dudv \leq \int_{D_\epsilon} \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z|^r|z - w||w - z_0|} dudv + 2A \int_{D_\epsilon} \iint_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r|z - w||w - z_0|} dx dy dudv. \quad (3.12)$$

Vamos agora estimar as integrais à direita da desigualdade acima. Iniciaremos por

$$\int_{D_\epsilon} \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z|^r|z - w||w - z_0|} dudv.$$

Como

$$\frac{1}{|z - w||w - z_0|} = \frac{1}{|z - z_0|} \left| \frac{1}{z - w} + \frac{1}{w - z_0} \right| \leq \frac{1}{|z - z_0|} \left( \frac{1}{|z - w|} + \frac{1}{|w - z_0|} \right),$$

temos que

$$\int_{D_\epsilon} \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z|^r|z - w||w - z_0|} dudv \leq \int_{D_\epsilon} \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z|^r|z - z_0||z - w|} dudv + \int_{D_\epsilon} \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z|^r|z - z_0||w - z_0|} dudv. \quad (3.13)$$

Por outro lado, como

$$\int_{D_R(0)} \frac{dudv}{|z - w|} \leq \int_{D_{2R}(0)} \frac{dudv}{|z - w|},$$

sendo  $w = u + iv$ , podemos escrever  $w$  como

$$w = z + \rho e^{i\theta},$$

onde  $0 \leq \rho \leq 2R$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Segue que  $dw = e^{i\theta} d\rho + i\rho e^{i\theta} d\theta$  e  $d\bar{w} = e^{-i\theta} d\rho - i\rho e^{-i\theta} d\theta$ .

Daí

$$d\bar{w} \wedge dw = -2i\rho d\rho \wedge d\theta$$

e

$$dudv = -\rho d\rho \wedge d\theta = \rho d\theta \wedge d\rho.$$

Destas relações, obtemos

$$\int_{D_{2R}(z)} \frac{dudv}{|z - w|} = \int_0^{2R} \int_0^{2\pi} d\theta \wedge d\rho = 4\pi R.$$

Portanto,

$$\int_{D_R(0)} \frac{dudv}{|z - w|} \leq 4\pi R.$$

Logo, obtemos a seguinte estimativa para o primeiro termo da equação (3.13):

$$\begin{aligned}
 \int_{D_\epsilon} \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z|^r |z-w||w-z_0|} dudv &\leq \int_{D_\epsilon} \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z|^r |z-z_0||z-w|} dudv \\
 &\quad + \int_{D_\epsilon} \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z|^r |z-z_0||w-z_0|} dudv \\
 &\leq 4\pi R \left\{ \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r |z-z_0|} |dz| \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r |z-z_0|} |dz| \right\} \\
 &= 8\pi R \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r |z-z_0|} |dz|.
 \end{aligned}$$

De modo similar, podemos expressar a segunda parcela da inequação (3.12) assim

$$2A \int_{D_\epsilon} \iint_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r} \frac{1}{|z-w||w-z_0|} dxdy dudv \leq 16AR\pi \iint_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r |z-z_0|} dxdy.$$

Daí, reescrevemos a inequação (3.12) como

$$2\pi \int_{D_\epsilon} \frac{|f(w)|}{|w-z_0||w|^r} dudv \leq 8\pi R \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r |z-z_0|} |dz| + 16AR\pi \iint_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r |z-z_0|} dxdy,$$

isto é,

$$2\pi(1-8AR) \iint_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r |z-z_0|} dxdy \leq 8\pi R \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z|^r |z-z_0|}.$$

Além disso, podemos escolher  $R$  de modo que  $1-8AR$  seja positivo. Logo, para  $z_0 \neq 0$ ,

$$0 \leq 2\pi(1-8AR) \iint_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r |z-z_0|} dxdy \leq 8\pi R \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z|^r |z-z_0|} \leq C(z_0),$$

onde  $C(z_0)$  é uma constante que depende de  $z_0$ . Logo,

$$\iint_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r |z-z_0|} dxdy$$

é limitada, para todo  $z_0 \in D_R(0)$ . Quando  $z_0 \rightarrow 0$ , então  $|z-z_0| \rightarrow |z|$ , e o integrando cresce monotonicamente. Portanto

$$\lim_{z_0 \rightarrow 0} \iint_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r |z-z_0|} dxdy$$

existe.

Utilizando a existência do limite acima e a inequação (3.11) então segue-se que  $|f(w)||w|^{-r}$  é limitado quando  $w \rightarrow 0$ . Da equação (3.10), concluímos que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^r}$$

existe. ■

Vamos agora provar o segundo resultado auxiliar, que será necessário para a prova do Lema Principal.

**Lema 28.** *Admitindo as hipóteses do Lema 25, isto é,  $\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \leq h(z)|f(z)|$  e supondo que*

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^{r-1}} = 0, \forall r \geq 1,$$

*temos que  $f \equiv 0$  em uma vizinhança de 0.*

**Prova.** Suponha, por absurdo, que  $f$  não é identicamente nula em uma vizinhança de 0 e seja  $z_0$  tal que  $f(z_0) \neq 0$ ,  $|z_0| < R$ . Utilizando o mesmo argumento, feito na demonstração do Lema anterior, podemos reescrever a inequação (3.12) assim

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{D_\epsilon} \frac{|f(w)|}{|w - z_0||w|^r} dudv &\leq 8\pi R \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r |z - z_0|} |dz| \\ &\quad + 16AR\pi \iint_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r |z - z_0|} dxdy, \forall r \geq 1, \end{aligned}$$

onde

$$\int_{D_R(0)} \frac{dudv}{|z - w|} \leq 4\pi R \quad \text{e} \quad \max_{z \in D_R(0)} h(z) \leq A.$$

Definamos

$$D^* = \left\{ z \in D_R(0); |z| \leq |z_0| \quad \text{e} \quad |f(z)| \geq \frac{f(z_0)}{2} \right\}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} (1 - 8AR) \iint_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r} dxdy &\geq (1 - 8AR) \iint_{D^*} \frac{|f(z)|}{|z|^r} dxdy \\ &\geq \frac{(1 - 8AR)}{2} |f(z_0)| |z_0|^{-r} \text{vol}(D^*) \\ &= a |z_0|^{-r}, \end{aligned}$$

sendo

$$a = \frac{(1 - 8AR)}{2} |f(z_0)| \text{vol}(D^*).$$

Por outro lado,

$$4R \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r} |dz| \leq bR^{-R},$$

com

$$b = 4R \max_{\partial D_R(0)} |f(z)| \int_{\partial D_R(0)} |dz|.$$

Deste modo,

$$a |z_0|^{-r} \leq bR^{-R}, \forall r.$$

Temos que  $a, b$  dependem de  $r$ , então, como  $|z_0| \leq R$ , temos

$$0 \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{a}{b} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{|z_0|}{R} \right)^r.$$

Observe que o último limite tende a zero, portanto o limite do centro da desigualdade acima tende a zero também.

Como  $a = \frac{(1 - 8AR)}{2} |f(z_0)| \text{vol}(D^*)$ , segue-se que  $f(z_0) = 0$ , e isto é uma contradição. Logo a suposição inicial é falsa e assim concluímos a prova do Lema. ■

**Prova do Lema Principal.** Dos Lemas 27 e 28 segue o Lema Principal. De fato, do Lema 28 obtemos que se  $f$  não é identicamente nula em uma vizinhança de zero, existe um  $r$  tal que  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^r} \neq 0$  e  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^{r-1}} = 0$ . Denotemos por  $c$  o  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^r}$ . Logo podemos escrever

$$f(z) = cz^r + R, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{R}{z^r} = 0$$

ou

$$f(z) = z^r f_r(z), \quad f_r(z) = c + \frac{R}{z^r},$$

tal que  $f_r(0) = c \neq 0$ . Assim prova-se o Lema Principal. ■

### 3.3 Demonstração do Teorema 21

Antes de iniciar a prova do Teorema vamos particularizar a equação (3.6) para o caso onde a dimensão do espaço base da fibração é  $n = 2$ . Deste modo, sendo a codimensão igual a um, temos  $\nabla_X^\perp N = 0, \forall X \in TM$ , onde  $N$  é um vetor unitário normal à superfície  $M$ . Daí,

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{Z}}^\perp \bar{H} &= \nabla_{\bar{Z}}^\perp (H \cdot N) = (\bar{Z}H)N + H \cdot \nabla_{\bar{Z}}^\perp N = (\bar{Z}H)N + 0 \\ &= (\bar{Z}H)N. \end{aligned}$$

Desta maneira

$$\bar{Z}Q(Z, Z) = 2\lambda^2 Z(H)H + 2\alpha(Z, Z)(\bar{Z}(H)).$$

Assim,

$$|Z(H)| = |dH(Z)| \leq |dH||Z| = |dH|\lambda,$$

e, de modo similar,

$$|\bar{Z}(H)| = |dH(\bar{Z})| \leq |dH||\bar{Z}| = |dH|\lambda.$$

Logo

$$|\bar{Z}Q(Z, Z)| \leq |2\lambda^2 Z(H)H| + 2|\alpha(Z, Z)(\bar{Z}(H))| \leq \{2\lambda^3|H| + 2\lambda|\alpha(Z, Z)|\}|dH|.$$

Por hipótese,  $|dH| \leq g|Q^{(2,0)}|$ . Portanto

$$\bar{Z}Q(Z, Z) = h(Z)|Q(Z, Z)|,$$

onde  $h(Z) = g\{2\lambda^3|H| + 2\lambda|\alpha(Z, Z)|\}$  é uma função contínua não negativa. Podemos então aplicar o Lema Principal.

Considere  $U \subset M$ , um conjunto aberto coberto por coordenadas isotérmicas. Suponhamos que existe  $z_0 \in U$  zero de  $Q(Z, Z) = \psi(z)$ . Pelo Lema Principal, temos que  $Q(Z, Z)$  é identicamente nula em uma vizinhança  $V$  de  $z_0$ , ou os zeros de  $Q(Z, Z)$  são isolados e, neste caso, o índice  $j$  do campo de direções determinado por  $Im[Q(Z, Z)dz^2] = 0$  é  $(-k/2)$  como vimos na prova do Lema 6. E, portanto,  $j$  é negativo.

Se, para alguma vizinhança coordenada  $V$  de zero, a função  $Q(Z, Z) = \psi(z) = 0$ , então isto ocorre para qualquer  $z \in M$ , ou seja,  $\psi$  é identicamente nula. De fato, caso isso não ocorra, isto é, se existissem pontos  $z_j \in M \setminus V$  tais que  $Q(Z, Z) = \psi(z_j) \neq 0$  existiria uma vizinhança  $V_j$ , que conteria  $V$  e isso contradiz o Lema Principal.

Para o caso em que todos os zeros  $\psi$  são pontos isolados, segue que, todos possuiriam índice negativo e isto implicaria que a soma dos índices é negativa. Observemos que, neste caso,  $Q(Z, Z)$  não é identicamente nula. Por outro lado, como o gênero da superfície  $M$  é zero, segue do Teorema 3 que a soma dos índices de singularidades de qualquer campo de direções é dois, ou seja, a soma será positiva. Isso é uma contradição, portanto o caso em que  $Q(Z, Z)$  não é identicamente nula nunca ocorre. Logo, pelo Teorema 19, que classifica tais superfícies com diferencial quadrática  $Q$  identicamente nula, uma das quatro possibilidades ocorre. Como o gênero da superfície é zero e ela é compacta a única possibilidade é que seja uma esfera cmc, mergulhada e rotacionalmente invariante. O que finaliza a prova do Teorema 21.

### 3.4 Demonstração do Teorema 22

Nesta seção apresentaremos a demonstração do resultado obtido por H. Alencar, M. do Carmo, I. Fernandez e R. Tribuzy, para imersões em  $E(\kappa, \tau)$ , quando  $\tau \neq 0$ , que generaliza o Teorema 21 para os demais espaços homogêneos, de dimensão três, com grupo de isometrias de dimensão quatro. A técnica para demonstração é similar à que fora utilizada na seção anterior, com modificações devidas ao espaço ambiente que possui agora curvatura fibrado  $\tau$  não nula. Nesta situação a generalização da diferencial quadrática  $Q$  é dada por

$$Q(X, Y) = 2(H + i\tau)\alpha(X, Y) - (\kappa - 4\tau^2)\langle \xi, X \rangle \langle \xi, Y \rangle$$

onde  $X$  e  $Y$  são vetores tangentes a  $M$ . Observe que no caso em que  $\tau = 0$ , encontramos a mesma diferencial quadrática que fora utilizada na prova do Teorema 21 para as fibrações

$H^2 \times \mathbb{R}$  e  $S^2 \times \mathbb{R}$ . Deste modo,  $Q$ , de fato, generaliza a diferencial definida anteriormente.

Usaremos a mesma notação e alguns resultados desenvolvidos na seção 3.1. A componente real da diferencial quadrática  $Q$  é dada por

$$Q^{(2,0)} = \psi(z)dz^2,$$

onde  $z = u + iv$ , sendo  $(u, v)$  parâmetros isotérmicos em  $M$ . Considerando  $Z, \bar{Z}, dz, d\bar{z}$  definidos como antes, temos

$$dz(Z) = d\bar{z}(\bar{Z}) = 1, \quad dz(\bar{Z}) = d\bar{z}(Z) = 0 \quad \text{e} \quad \langle \bar{Z}, Z \rangle = \lambda^2.$$

E também,

$$Q(Z, Z) = \psi(z), \quad \langle Z, Z \rangle = \langle \bar{Z}, \bar{Z} \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \nabla_{\bar{Z}}Z = \nabla_Z\bar{Z} = 0.$$

De modo similar, ao feito na seção 3.1, calculemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = \bar{Z}Q(Z, Z) = \bar{Z} (2(H + i\tau)\langle SZ, Z \rangle - (\kappa - 4\tau^2)\langle \xi, Z \rangle^2),$$

onde  $S$  é o operador de forma associado à forma bilinear  $\alpha$ .

**Teorema 29.** *Temos que*

$$\bar{Z}Q(Z, Z) = 2\bar{Z}(H)\alpha(Z, Z) + 2(H + i\tau)\lambda^2Z(H).$$

**Prova.** Derivando  $Q(Z, Z)$ , encontramos

$$\bar{Z}Q(Z, Z) = 2\bar{Z}(\theta)\langle SZ, Z \rangle + 2\theta\langle \nabla_{\bar{Z}}(SZ), Z \rangle - 2c\langle \xi, Z \rangle\langle \bar{\nabla}_{\bar{Z}}\xi, Z \rangle - 2c\langle \xi, Z \rangle\langle \xi, \bar{\nabla}_{\bar{Z}}Z \rangle,$$

onde  $\theta = H + i\tau$  e  $c = \kappa - 4\tau^2$ . Note que utilizamos  $\nabla_{\bar{Z}}Z = 0$ .

Nos próximos Lemas, vamos calcular, separadamente, expressões para os termos  $\langle \nabla_{\bar{Z}}(SZ), Z \rangle$ ,  $\langle \bar{\nabla}_{\bar{Z}}\xi, Z \rangle$  e  $\langle \xi, \bar{\nabla}_{\bar{Z}}Z \rangle$ . Vamos expressá-los de modo conveniente para o que se segue.

**Lema 30.** *Temos que*

$$\langle \nabla_{\bar{Z}}(SZ), Z \rangle = \langle \nabla_Z(S\bar{Z}), Z \rangle + c\lambda^2\langle \xi, N \rangle\langle \xi, Z \rangle.$$

**Prova.** Utilizando  $\nabla_{\bar{Z}}Z = 0$  e a equação de Codazzi, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{Z}}(SZ) &= (\nabla_{\bar{Z}}S)(Z) + S(\nabla_{\bar{Z}}Z) \\ &= (\nabla_ZS)(\bar{Z}) + \tilde{R}(Z, \bar{Z})N \\ &= (\nabla_ZS)(\bar{Z}) + c\langle N, \xi \rangle (\langle Z, \xi \rangle \bar{Z} - \langle \bar{Z}, \xi \rangle Z), \end{aligned}$$

onde  $\tilde{R}$  é a curvatura de  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ ,  $N$  é vetor normal à superfície  $M$ . A última igualdade acima é consequência do Corolário 3.2 de [8]. Finalmente, como  $\langle Z, Z \rangle = 0$ , concluímos que

$$\langle \nabla_{\bar{Z}}(SZ), Z \rangle = \langle \nabla_Z(S\bar{Z}), Z \rangle + c\langle N, \xi \rangle\langle Z, \xi \rangle\lambda^2.$$

■

**Lema 31.** Temos que  $\langle \bar{\nabla}_{\bar{Z}}\xi, Z \rangle = i\tau\lambda^2\langle \xi, N \rangle$ .

**Prova.** Utilizando a prova da Proposição 3.3, que pode ser encontrada em [8], obtemos

$$\bar{\nabla}_{\bar{Z}}\xi = \tau\xi \times \bar{Z} = \tau (\langle J\bar{Z}, \xi \rangle N - \langle \xi, N \rangle J\bar{Z}).$$

Então,

$$\langle \bar{\nabla}_{\bar{Z}}\xi, Z \rangle = -i\tau\langle \xi, N \rangle\lambda^2.$$

■

**Lema 32.** Temos que

$$\langle \xi, \bar{\nabla}_{\bar{Z}}Z \rangle = \lambda^2 H\langle \xi, N \rangle.$$

**Prova.** São válidos,  $\nabla_{\bar{Z}}Z = 0$  e  $\alpha(\bar{Z}, Z) = \lambda^2 H$ , já mostrados na seção anterior. Daí

$$\langle \xi, \bar{\nabla}_{\bar{Z}}Z \rangle = \lambda^2 H\langle \xi, N \rangle.$$

Utilizando os Lemas 30 e 31 na expressão obtida para a derivada de  $Q(Z, Z)$ , no Teorema 29, temos

$$\begin{aligned} \bar{Z}Q(Z, Z) &= 2\bar{Z}(H)\alpha(Z, Z) + 2\theta\langle \nabla_Z(SZ), Z \rangle + 2\theta c\lambda^2\langle N, \xi \rangle\langle Z, \xi \rangle \\ &\quad - 2ci\tau\lambda^2\langle N, \xi \rangle\langle Z, \xi \rangle - 2c\lambda^2 H\langle N, \xi \rangle\langle Z, \xi \rangle. \end{aligned}$$

Como  $\theta = H + i\tau$ , temos que

$$2\theta c\lambda^2\langle N, \xi \rangle\langle Z, \xi \rangle = 2ci\tau\lambda^2\langle N, \xi \rangle\langle Z, \xi \rangle + 2c\lambda^2 H\langle N, \xi \rangle\langle Z, \xi \rangle.$$

Daí

$$\bar{Z}Q(Z, Z) = 2\bar{Z}(H)\alpha(Z, Z) + 2\theta\langle \nabla_Z(S\bar{Z}), Z \rangle. \quad (3.14)$$

Para concluirmos a prova do Teorema 29 mostraremos o seguinte Lema.

**Lema 33.** Vale a igualdade  $\langle \nabla_Z(S\bar{Z}), Z \rangle = \lambda^2 Z(H)$ .

**Prova.** Primeiramente, afirma-se que

$$\nabla_Z Z = \frac{Z(\lambda^2)}{\lambda^2} Z.$$

Note que  $\nabla_Z Z = aZ + b\bar{Z}$  e então,

$$\langle \nabla_Z Z, Z \rangle = b\lambda^2 = \frac{1}{2}Z\langle Z, Z \rangle = 0.$$

Portanto, segue-se que  $b = 0$ . E, portanto,  $\nabla_Z Z = aZ$ . Por outro lado,

$$\langle \nabla_Z Z, \bar{Z} \rangle = Z\langle Z, \bar{Z} \rangle = Z(\lambda^2) = a\langle Z, \bar{Z} \rangle.$$

Logo,

$$a = \frac{Z(\lambda^2)}{\lambda^2},$$

deste modo a afirmação feita inicialmente de fato é válida. Observe, agora, que

$$Z(\lambda^2 H) = Z(\langle S\bar{Z}, Z \rangle) = \langle \nabla_Z(S\bar{Z}), Z \rangle + \langle S\bar{Z}, \nabla_Z Z \rangle.$$

Então

$$\begin{aligned} \langle \nabla_Z(S\bar{Z}), Z \rangle &= Z(\lambda^2)H + \lambda^2 Z(H) - \langle S\bar{Z}, \nabla_Z Z \rangle \\ &= Z(\lambda^2)H + \lambda^2 Z(H) - \langle S\bar{Z}, Z \rangle \frac{Z(\lambda^2)}{\lambda^2} \\ &= Z(\lambda^2)H + \lambda^2 Z(H) - H\lambda^2 \frac{Z(\lambda^2)}{\lambda^2} \\ &= \lambda^2 Z(H), \end{aligned}$$

onde  $\langle S\bar{Z}, Z \rangle = \lambda^2 H$ . Assim, encerramos a prova do Lema 33. ■

Utilizando o Lema acima e a equação (3.14) concluímos a prova do Teorema 29.

Apresentaremos agora a prova do Teorema 22, resultado principal deste capítulo.

**Prova.** Pelo Teorema 29 e pelas relações

$$|\bar{Z}(H)| = |dH(\bar{Z})| \leq |dH||\bar{Z}|$$

e

$$|Z(H)| \leq |dH||\lambda|.$$

temos que

$$\begin{aligned} |\bar{Z}Q(Z, Z)| &= |2\bar{Z}(H) + 2\theta\lambda^2 Z(H)| \\ &\leq |dH||\lambda||2\alpha(Z, Z) + 2\theta\lambda^2|. \end{aligned}$$

Por hipótese,

$$|dH| \leq g|Q^{(2,0)}|,$$

onde a função  $g$  é contínua e não negativa. Portanto,

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} \right| = |\bar{Z}Q(Z, Z)| \leq h|Q^{(2,0)}| = h|\psi(z)|,$$

onde

$$h = g|\lambda| (|\alpha(Z, Z)| + 2\lambda^2|H + i\tau|).$$

Isto é,  $h$  é uma função real contínua, não negativa sobre  $M$ . Podemos utilizar agora o Lema Principal e concluir que ou  $\psi = 0$ , em uma vizinhança  $V \subset U$  de  $z_0$ , ou para todo  $z \in V$ , temos

$$\psi(z) = (z - z_0)^m f_m(z), \quad m \geq 1, \quad f_m(z) \neq 0.$$

Assim, podemos concluir a prova do Teorema, utilizando o mesmo argumento usado da prova do Teorema 21. De fato, pelo Lema Principal,  $Q^{(2,0)}$  é identicamente nula ou tem um número finito de zeros. Nós mostramos que no caso de um número finito de zeros chegamos a uma contradição. De fato, a equação  $Im\{Q^{(2,0)}dz^2\} = 0$  dá origem a dois campos de direções sobre  $M$  da qual as singularidades são os zeros de  $Q(Z, Z)$ . O índice de cada uma dessas singularidades é dado por  $-\frac{m}{2}$ , onde  $m$  é a ordem do zero, como aparece na equação

$$\psi(z) = (z - z_0)^m f_m(z).$$

Por outro lado, como  $M$  tem gênero zero, o Teorema 3 nos diz que a soma dos índices das singularidades do seu campo de direções é dois, e portanto positivo. Isto é uma contradição. Assim concluímos a prova do Teorema 22 dessa seção.

## Capítulo 4

# O Teorema de Hopf para Espaços Ambientantes de Dimensão Maior que Três

Diante das generalizações do Teorema de Hopf que foram apresentadas nos capítulos 2 e 3 desta dissertação, o objetivo deste quarto capítulo é tratar de imersões com codimensão maior que 1.

De fato, será apresentada uma generalização do Teorema de Hopf que considera imersões de uma superfície  $M^2$  na variedade Riemanniana produto  $E_c^n \times \mathbb{R}$ , onde  $E_c^n$  é uma variedade simplesmente conexa,  $n$ -dimensional, com curvatura seccional constante  $c \neq 0$ .

Assumiremos que o vetor curvatura média da superfície,  $\vec{H}$ , é paralelo no fibrado normal e definiremos uma forma quadrática em  $M^2$  de modo análogo ao definido anteriormente. Ou seja,

$$Q(X, Y) = 2\langle \alpha(X, Y), \vec{H} \rangle - c\langle X, \xi \rangle \langle Y, \xi \rangle,$$

onde  $X$  e  $Y$  são vetores tangentes em  $M$ ,  $\alpha$  é a segunda forma fundamental de  $M$ , tomando valores no fibrado normal de  $M$ , e  $\xi$  é o vetor tangente unitário de  $\mathbb{R}$ .

Novamente aqui, serão considerados  $(u, v)$  parâmetros isotérmicos em  $M$ , com  $z = u + iv$

$$dz = \frac{1}{\sqrt{2}}(du + idv) \quad \text{e} \quad d\bar{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(du - idv)$$

e

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right) \quad \text{e} \quad \bar{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right),$$

e, de modo similar ao que foi feito anteriormente, prova-se, neste novo contexto, que a parte  $(2, 0)$  da forma quadrática  $Q$  é holomorfa, isto é, que  $Q^{(2,0)} = \psi dz dz$  é

holomorfa. Assim,

$$Q^{(2,0)}(Z, Z) = 2\langle \alpha(Z, Z), \vec{H} \rangle - c\langle Z, \xi \rangle^2 = \psi$$

é holomorfa.

O objetivo será usar o fato de  $Q^{(2,0)}$  ser holomorfa para apresentar uma descrição das superfícies imersas em  $E_c^n \times \mathbb{R}$  que têm vetor curvatura média paralelo. Todas as superfícies consideradas ao longo deste capítulo são conexas e orientáveis.

Inicialmente, estudaremos um resultado que classifica, sob hipóteses globais, as superfícies com vetor curvatura média paralelo e imersas no espaço ambiente  $E_c^n \times \mathbb{R}$ .

**Teorema 34** (Alencar, Do Carmo, Tribuzzy,[5]). *Sejam  $M^2$  uma superfície e  $E_c^n$  uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante  $c \neq 0$ , e seja  $x : M^2 \looparrowright E_c^n \times \mathbb{R}$  uma imersão com vetor curvatura média paralelo. Então, uma das seguintes afirmações é satisfeita:*

- (1)  $x(M)$  é uma superfície mínima em uma hipersuperfície totalmente umbílica de  $E_c^n$ .
- (2)  $x(M)$  é uma superfície com vetor curvatura média constante de uma subvariedade tridimensional totalmente umbílica ou totalmente geodésica de  $E_c^n$ .
- (3)  $x(M)$  está em  $E_c^4 \times \mathbb{R}$ .

A demonstração do Teorema 34 será feita na próxima sessão e a ideia é mostrar que ou o vetor  $H$  é uma direção umbílica, e, neste caso, a superfície  $x(M)$  está contida em  $E_c^n$ , ou podemos reduzir a codimensão da imersão para três. No primeiro caso, estaremos na situação tratada pelo Teorema de S. T. Yau, que pode ser encontrado em [18], e podemos concluir que (1) ou (2) valem. No segundo caso, a afirmação (3) será satisfeita.

O principal resultado do capítulo apresenta uma generalização do resultado do Hopf para imersões em  $E_c^n \times \mathbb{R}$ , assumindo que  $M$  é homeomorfa a uma esfera.

**Teorema 35** (Alencar, Do Carmo, Tribuzzy,[5]). *Seja  $M^2$  uma superfície compacta de gênero zero e seja  $x : M^2 \looparrowright E_c^n \times \mathbb{R}$  uma imersão de  $M$  com vetor curvatura média paralelo. Então, uma das seguintes afirmações é satisfeita:*

- (1)  $x(M)$  é uma superfície mínima em uma hipersuperfície totalmente umbílica de  $E_c^n$ .
- (2)  $x(M)$  é uma esfera redonda de uma subvariedade tridimensional de  $E_c^n$  totalmente umbílica.
- (3)  $x(M)$  é a esfera redonda de  $E_c^3$ .

(4)  $x(M)$  está em  $E_c^4 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^6$  (possivelmente com a métrica de Lorentz) e existe um plano  $P$  tal que  $x(M)$  é invariante por rotações que fixam seu complemento ortogonal. Além disso, as curvas de nível da função altura  $p \mapsto \langle x(p), \xi \rangle$  são círculos contidos em planos paralelos ao plano  $P$ .

A prova do Teorema 35 será feita na segunda seção deste capítulo. Na demonstração, vamos mostrar que, ou  $H$  é uma direção umbílica e daí estamos nas mesmas condições do Teorema 34 e, conseqüentemente, ocorrem (1) e (2) do Teorema 34, ou estamos na situação do item (4) do Teorema 35 que generaliza o resultado de Hopf para imersões de esferas em  $E_c^n \times \mathbb{R}$ .

Notemos que, como o vetor curvatura média da imersão  $x$  é paralelo, a imersão é analítica. Isto significa que as funções de duas variáveis reais que definem localmente a aplicação  $x : M \looparrowright E_c^n \times \mathbb{R}$  são funções reais analíticas (ver [16]). Tal função satisfaz o princípio da continuação analítica (ver [10]) que tem a seguinte consequência: seja  $V$  um aberto-conexo subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  e seja  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^k$  uma função real analítica em  $V$ . Seja  $U \subset V$  um aberto do  $\mathbb{R}^n$ . Se  $f \equiv 0$  em  $U$ , então  $f \equiv 0$  em  $V$ . Portanto, uma função analítica não pode ser zero em um subconjunto aberto sem ser identicamente zero.

## 4.1 Prova do Teorema 34

Vamos iniciar apresentando alguns resultados preliminares.

**Lema 36** ([5]). *Seja  $x : M \looparrowright E_c^n \times \mathbb{R}$  a imersão de uma superfície. Assuma que um subfibrado  $L$  do fibrado normal contém a imagem da segunda forma fundamental, é paralelo na conexão normal e que  $TM \oplus L = V$  é invariante pelo tensor curvatura  $\tilde{R}$  de  $E_c^n \times \mathbb{R}$ , no seguinte sentido: quaisquer que sejam  $A, B, C \in V$  temos que*

$$\tilde{R}(A, B)C \in V.$$

*Então, existe uma subvariedade totalmente geodésica  $S \in E_c^n \times \mathbb{R}$ , com  $T_p S = V$ , para todo  $p \in S$ , tal que  $x(M) \subset S$ .*

**Prova.** Este resultado segue do Teorema 2, que pode ser encontrado em [11], pois  $E_c^n \times \mathbb{R}$ , com a conexão de Levi-Civita da métrica produto, é um espaço homogêneo redutível. ■

Dado um fibrado  $E \rightarrow B$ , qualquer, com a conexão  $\nabla$ , dizemos que o subfibrado  $E' \rightarrow B$ ,  $E' \subset E$ , é paralelo na conexão  $\nabla$  se  $E'$  é invariante pela conexão  $\nabla$ , ou seja,  $\nabla(E') = 0$ .

O próximo Lema também será utilizado na prova do Teorema principal dessa seção. Na demonstração é enunciado e provado um sublema que será importante para o que segue.

**Lema 37** ([5]). *Seja  $x : M \looparrowright E_c^n \times \mathbb{R}$  uma imersão de uma superfície com vetor curvatura média paralelo. Então, para todo  $v \in TM^\perp$ , a aplicação linear  $A_H$  comuta com  $A_v$ ; onde  $A_v$  é a segunda forma fundamental, como aplicação linear em  $TM$ , correspondendo ao vetor normal  $v$ , isto é,  $\langle A_v(X), Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), v \rangle$ .*

**Prova.** Da equação de Ricci, temos que

$$\langle R^\perp(X, Y)H, v \rangle = \langle [A_H, A_v]X, Y \rangle + \langle \tilde{R}(X, Y)H, v \rangle,$$

onde  $\tilde{R}$  é o tensor curvatura de  $E_c^n \times \mathbb{R}$  e  $R^\perp$  é o tensor curvatura do fibrado normal da imersão. Por hipótese,  $H$  é paralelo no fibrado normal, isto é,  $\nabla^\perp H = 0$ . Portanto,

$$R^\perp(X, Y)H = \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp H - \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp H + \nabla_{[X, Y]}^\perp H = 0.$$

Agora, é suficiente mostrar que  $\langle \tilde{R}(X, Y)H, v \rangle = 0$ . Como  $E_c^n \times \mathbb{R}$  tem dimensão maior que três podemos escolher  $A, B, C, D$  vetores ortogonais neste espaço ambiente. Denotamos por  $A_2$  a projeção de  $A$  no segundo fator, isto é, em  $\mathbb{R}$ . Assim,

$$A_2 = \langle A, \xi \rangle \xi,$$

e, de modo similar, fazemos as projeções no segundo fator dos demais vetores. Sendo

$$\pi A = A - A_2$$

a projeção de  $A$  sobre o espaço tangente de  $E_c^n$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{R}(A, B)C, D \rangle &= c \{ \langle \pi A, \pi C \rangle \langle \pi B, \pi D \rangle - \langle \pi A, \pi D \rangle \langle \pi B, \pi C \rangle \} \\ &= c \{ (\langle \pi A, \pi C \rangle - \langle \pi A_2, \pi C_2 \rangle) (\langle \pi B, \pi D \rangle - \langle \pi B_2, \pi D_2 \rangle) \\ &\quad - (\langle \pi A, \pi D \rangle - \langle \pi A_2, \pi D_2 \rangle) (\langle \pi B, \pi C \rangle - \langle \pi B_2, \pi C_2 \rangle) \}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

A primeira igualdade acima é válida, pois  $E_c^n$  tem curvatura seccional constante  $c \neq 0$  e  $R$  tem curvatura seccional constante igual a zero. E a segunda igualdade decorre das relações:  $\pi A = A - A_2$  e  $\langle A_2, C \rangle = \langle A, C_2 \rangle = \langle A_2, C_2 \rangle$ , que também são válidas para os demais vetores. De fato, para  $A$ , temos

$$\begin{aligned} \langle A_2, C \rangle &= \langle (\langle A, \xi \rangle \xi), C \rangle = \langle A, \xi \rangle \langle \xi, C \rangle, \\ \langle A, C_2 \rangle &= \langle A, (\langle C, \xi \rangle \xi) \rangle = \langle A, \xi \rangle \langle \xi, C \rangle, \\ \langle A_2, C_2 \rangle &= \langle (\langle A, \xi \rangle \xi), (\langle C, \xi \rangle \xi) \rangle = \langle A, \xi \rangle \langle \xi, C \rangle \langle \xi, \xi \rangle = \langle A, \xi \rangle \langle \xi, C \rangle. \end{aligned}$$

Vamos agora excluir o caso em que  $\xi \in T_p M$ , para todo  $p \in M$ . Para isso vamos provar o seguinte sublema.

**Sublema 38.** *Se  $\xi \in T_p M$ , para todo  $p \in M$ , então  $x(M) \subset E_c^2 \times \mathbb{R}$ . Neste caso,  $x(M)$  é um cilindro vertical sobre uma curva em  $E_c^2$ , de curvatura geodésica  $2H$ .*

**Prova.** Seja  $\xi \in T_p M$ , para todo  $p \in M$ . Escolha uma base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de  $TM$ , sendo  $e_1 = \xi$  e  $e_2$  é um vetor unitário ortogonal a  $e_1$ , de modo que a base seja positiva.

Inicialmente, vamos mostrar que  $\alpha(e_1, e_2) = 0$ . Para isso, sejam  $e_\beta$ , com  $\beta = 3, 4, \dots, n+1$ , vetores que formam uma base ortonormal positiva do fibrado norma  $TM^\perp$ . Então, para todo  $\beta$  temos que

$$\begin{aligned} \langle \alpha(e_1, e_2), e_\beta \rangle &= \langle \alpha(e_2, e_1), e_\beta \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_1 - \nabla_{e_2} e_1, e_\beta \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_1 - (\tilde{\nabla}_{e_2} e_1)^T, e_\beta \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Na igualdade acima, utilizamos que  $\xi$  é paralelo na conexão  $\tilde{\nabla}$ , portanto

$$\tilde{\nabla} e_1 = (\tilde{\nabla} e_1)^T = 0.$$

De modo similar, mostra-se que  $\alpha(e_1, e_1) = 0$ . Daí,

$$\alpha(e_1, e_1) + \alpha(e_2, e_2) = \alpha(e_2, e_2) = 2H$$

e, como  $H$  é paralelo na conexão normal, temos que  $\alpha(e_2, e_2)$  também é paralelo na conexão normal. Portanto, segue-se que o primeiro espaço normal da imersão, isto é, a imagem da segunda forma fundamental, é um subespaço unidimensional paralelo do espaço normal. De fato, dados  $X, Y \in TM$  podemos escrevê-los como combinação dos elementos da base. Portanto

$$\alpha(X, Y) = \alpha(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) = bd\alpha(e_2, e_2) = 2bdH,$$

e temos que  $\alpha(X, Y)$  é múltiplo de  $H, \forall X, Y \in TM$ .

Agora, vamos considerar  $\bar{L} = Im(\alpha)$ . Sabemos que  $\bar{L}$  é paralelo no fibrado normal. Logo, temos que  $\bar{L} \oplus TM = \bar{V}$  é paralelo na conexão  $\tilde{\nabla}$ . Queremos mostrar que  $\bar{V}$  é invariante por  $\tilde{R}$ . Pela linearidade vamos mostrar a invariância de  $\tilde{R}$  apenas para os vetores da base. Escolhamos uma base  $\{a_1, a_2, a_3\}$  de  $\bar{V}$ , de modo que  $\xi$  pertença a esta base. Seja  $\eta \in \bar{V}^\perp$ . Segue da equação (4.1) que, para todo  $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ , temos

$$\langle \tilde{R}(a_i, a_j)a_k, \eta \rangle = 0, \quad \forall \eta \in \bar{V}^\perp.$$

De fato,  $\langle \tilde{R}(a_i, a_j)a_k, \eta \rangle$  é igual a

$$c\{(\langle a_i, a_k \rangle - \langle a_i, \langle a_k, \xi \rangle \xi \rangle)(\langle a_i, \eta \rangle - \langle a_j, \langle \eta, \xi \rangle \xi \rangle) - (\langle a_i, \eta \rangle - \langle a_i, \langle \eta, \xi \rangle \xi \rangle)(\langle a_j, a_k \rangle - \langle a_j, \langle a_k, \xi \rangle \xi \rangle)\}$$

e, como  $\langle a_i, \eta \rangle = \langle a_j, \eta \rangle = 0$  e  $\langle \eta, xi \rangle = 0$ , segue-se que um fator de cada um dos produtos acima é zero. Portanto a diferença é zero e a igualdade é válida para todo  $\eta \in \bar{V}^\perp$ .

Mostramos que  $\tilde{R}$  é sempre ortogonal a  $\bar{V}^\perp$ , ou seja, provou-se que  $\tilde{R}(a_i, a_j)a_k \in \bar{V}$ . Utilizando o Lema 36 e o fato de que  $\dim(\bar{L}) = 1$ , concluímos que  $x(M)$  está contida em uma subvariedade de dimensão três de  $E_c^n \times \mathbb{R}$ . Portanto, a codimensão da imersão se reduz a um. Além disso, como  $\xi \in \bar{V}$ , o subespaço totalmente geodésico  $S$  do Lema 36 é  $E_c^2 \times \mathbb{R}$  e o sublema está provado. ■

**Observação 39.** *Seja  $\phi : M \rightarrow \mathcal{L}(TM^\perp, \mathbb{R})$  a aplicação que associa a cada  $p \in M$  a função linear  $\phi_p$  de  $TpM$  dada por*

$$\phi_p(\eta_p) = \langle \eta_p, \xi \rangle,$$

onde  $\eta_p$  é um vetor normal em  $p$ . Observe que  $\xi \in TpM$  se, e somente se,  $\phi_p \equiv 0, \forall \eta_p$ . Por analiticidade, temos que ou  $\phi$  é identicamente zero ou o conjunto de zeros  $T$  de  $\phi$  é um conjunto fechado e sem pontos interiores. Ou seja, ou  $\xi \in TpM$ , para todo  $p \in M$  ou então  $\xi \in TpM$  em  $T$ . No primeiro caso a codimensão se reduz a um, pelo sublema anterior, e a situação é conhecida. Vamos considerar agora o segundo caso.

Retornando à prova do Lema 37, vamos introduzir uma base em  $TM^\perp$  considerando o vetor  $u$  como a projeção de  $\xi$  no fibrado normal e  $e_3 = \frac{u}{|u|}$ . Observe que  $e_3$  está bem definido apenas no complementar  $T^c$  do conjunto  $T$  definido acima. Notemos também que  $T^c$  é um conjunto aberto e denso. Consideremos uma base ortonormal de  $TM^\perp$ , com  $e_3$  elemento da base, ou seja,  $\{e_3, e_4, \dots, e_{n+1}\}$ . Consideremos também  $\{e_1, e_2\}$  uma base ortonormal de  $TM$ . Vamos adotar a seguinte notação: letras latinas  $i, j, k$  vão variar em  $\{1, 2\}$  e letras gregas  $\alpha, \beta$  em  $\{3, 4, \dots, n + 1\}$ . Segue da equação (4.1) que

$$\langle \tilde{R}(e_i, e_j)e_\alpha, e_\beta \rangle = 0.$$

Pois

$$\begin{aligned} \langle \tilde{R}(e_i, e_j)e_\alpha, e_\beta \rangle &= c\{(\langle e_i, e_\alpha \rangle - \langle e_i, \langle e_\alpha, \xi \rangle \xi \rangle)(\langle e_j, e_\beta \rangle - \langle e_j, \langle e_\beta, \xi \rangle \xi \rangle) \\ &\quad - (\langle e_i, e_\beta \rangle - \langle e_i, \langle e_\beta, \xi \rangle \xi \rangle)(\langle e_j, e_\alpha \rangle - \langle e_j, \langle e_\alpha, \xi \rangle \xi \rangle)\} \\ &= c\{(\langle e_i, e_\alpha \rangle - \langle e_i, \xi \rangle \langle e_\alpha, \xi \rangle)(\langle e_j, e_\beta \rangle - \langle e_j, \xi \rangle \langle e_\beta, \xi \rangle) \\ &\quad - (\langle e_i, e_\beta \rangle - \langle e_i, \xi \rangle \langle e_\beta, \xi \rangle)(\langle e_j, e_\alpha \rangle - \langle e_j, \xi \rangle \langle e_\alpha, \xi \rangle)\}. \end{aligned}$$

No caso de  $\alpha = \beta = 3$ , obviamente, a igualdade acima seria zero, pois teríamos uma diferença de termos iguais. Caso  $\alpha \neq 3$  ou  $\beta \neq 3$ , vamos supor, sem perda de generalidade, que  $\alpha = 4$  e considerar  $\xi = \xi^\perp + \xi^T = au + bu^T$ , onde  $u^T$  é um vetor de

$TM$ , ortogonal a  $u \in TM^\perp$ . Assim, temos

$$\begin{aligned} \langle e_4, \xi \rangle &= \langle e_4, au \rangle + \langle e_4, bu^T \rangle = a\langle e_4, u \rangle = a\langle e_4, |u|e_3 \rangle \\ &= a|u|\langle e_4, e_3 \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo,  $\langle e_4, \xi \rangle = 0$  e, de modo análogo para qualquer  $\alpha \neq 3$ , temos que  $\langle e_\alpha, \xi \rangle = 0$ . Segue-se então que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{R}(e_i, e_j)e_\alpha, e_\beta \rangle &= c\{(\langle e_i, e_\alpha \rangle - \langle e_i, \xi \rangle \langle e_\alpha, \xi \rangle)(\langle e_j, e_\beta \rangle - \langle e_j, \xi \rangle \langle e_\beta, \xi \rangle) \\ &\quad - (\langle e_i, e_\beta \rangle - \langle e_i, \xi \rangle \langle e_\beta, \xi \rangle)(\langle e_j, e_\alpha \rangle - \langle e_j, \xi \rangle \langle e_\alpha, \xi \rangle)\} \\ &= c\{(\langle e_i, e_\alpha \rangle - \langle e_i, \xi \rangle \cdot 0)(\langle e_j, e_\beta \rangle - \langle e_j, \xi \rangle \langle e_\beta, \xi \rangle) \\ &\quad - (\langle e_i, e_\beta \rangle - \langle e_i, \xi \rangle \langle e_\beta, \xi \rangle)(\langle e_j, e_\alpha \rangle - \langle e_j, \xi \rangle \cdot 0)\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

A última igualdade decorre de  $\langle e_i, e_\alpha \rangle = \langle e_j, e_\alpha \rangle = 0$ . Assim,  $(\tilde{R}(X, Y)v)^\perp = 0$ , para todo  $v \in TM^\perp$ , e assim o Lema 37 está provado em  $T^c$ . Como  $T^c$  é um conjunto aberto e denso, por continuidade, a equação  $(\tilde{R}(X, Y)v)^\perp = 0$  vale, para todo  $p \in M$ . ■

Como consequência da prova do Lema 37, podemos enunciar o seguinte resultado.

**Corolário 40.** *Ou existe uma base que diagonaliza  $A_v$ , para todo  $v \in TM^\perp$ , ou  $A_H$  é um múltiplo da identidade, isto é,  $A_H$  é uma direção umbílica.*

O Lema a seguir garante a existência de um específico subfibrado do fibrado normal sempre que  $H$  nunca for uma direção umbílica.

**Lema 41** ([5]). *Se  $H$  não é direção umbílica em nenhum ponto da superfície, então existe um subfibrado do fibrado normal que é paralelo, contém a imagem da segunda forma e tem dimensão menor ou igual a três.*

**Prova.** Seja

$$L = \text{span}\{Im(\alpha) \cup e_3\},$$

onde  $e_3$  é o vetor unitário da projeção de  $\xi$  no espaço normal e está bem definido apenas no conjunto  $T^c$  definido na observação 39. Então, no momento, nos restringiremos a  $T^c$ .

Observe que, se mostrarmos que  $L$  é paralelo, isto provará o Lema. Para isso, é suficiente mostrarmos que se um subfibrado normal  $W \perp L$ , então  $\nabla^\perp W \perp L$ . Pelo Lema 37, existe uma base  $\{e_1, e_2\}$ , que diagonaliza  $\alpha$ . Seja  $w \in W$ . Vamos mostrar então que  $\alpha \perp \nabla_{e_k}^\perp w$  e  $e_3 \perp \nabla_{e_k}^\perp w$ .

Primeiro mostraremos que

$$-A_{ijk} := \langle \alpha(e_i, e_j), \nabla_{e_k}^\perp w \rangle = 0, \quad \forall i, j, k \in \{1, 2\}. \quad (4.2)$$

De fato, como  $w \perp L$ , então

$$\langle \alpha(e_i, e_j), w \rangle = 0.$$

Derivando essa igualdade temos,

$$\begin{aligned} \nabla_{e_k}^\perp (\langle \alpha(e_i, e_j), w \rangle) &= \nabla_{e_k}^\perp (0) = 0 \\ &= \langle \nabla_{e_k}^\perp (\alpha(e_i, e_j)), w \rangle + \langle \alpha(e_i, e_j), \nabla_{e_k}^\perp w \rangle = 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\langle \nabla_{e_k}^\perp (\alpha(e_i, e_j)), w \rangle = -\langle \alpha(e_i, e_j), \nabla_{e_k}^\perp w \rangle = A_{ijk}.$$

Como  $\alpha$  é simétrico então  $A_{ijk} = A_{jik}$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_{e_k}^\perp \alpha)(e_i, e_j), w \rangle &= \langle \nabla_{e_k}^\perp (\alpha(e_i, e_j)), w \rangle - \langle \alpha(\nabla_{e_k}^\perp e_i, e_j), w \rangle - \langle \alpha(e_i, \nabla_{e_k}^\perp e_j), w \rangle \\ &= \langle \nabla_{e_k}^\perp (\alpha(e_i, e_j)), w \rangle. \end{aligned}$$

Como  $w \perp Im(\alpha)$ , pela equação de Codazzi, temos

$$\begin{aligned} (\nabla_{e_k}^\perp \alpha)(e_i, e_j) &= \nabla_{e_i}^\perp (\alpha(e_k, e_j)) + (\tilde{R}(e_k, e_i)e_j) \\ &= \nabla_{e_j}^\perp (\alpha(e_i, e_k)) + (\tilde{R}(e_i, e_j)e_k). \end{aligned}$$

Mas, pela equação (4.1),  $\langle \tilde{R}(e_k, e_i)e_j, w \rangle = \langle \tilde{R}(e_i, e_j)e_k, w \rangle = 0$ . Daí,

$$A_{ijk} = A_{kji} = A_{ikj} \tag{4.3}$$

Observe que

$$\langle \alpha(e_i, e_j), \nabla_{e_k}^\perp w \rangle = \langle A_{\nabla_{e_k}^\perp w}(e_i), e_j \rangle.$$

Temos que a base  $\{e_1, e_2\}$  diagonaliza  $\alpha$ , se  $i \neq j$ ,

$$\langle \alpha(e_i, e_j), \nabla_{e_k}^\perp w \rangle = -A_{ijk} = 0.$$

Portanto da equação (4.3) segue que se dois dos índices  $i, j, k$  forem distintos então  $A_{ijk} = 0$ . Falta verificarmos o caso complementar, onde todos os índices são iguais. Temos

$$\begin{aligned} A_{iii} &= \langle \nabla_{e_i}^\perp (\alpha(e_i, e_i)), w \rangle \\ &= -\langle \alpha(e_i, e_i), \nabla_{e_i}^\perp w \rangle + (-\langle \alpha(e_j, e_j), \nabla_{e_i}^\perp w \rangle + \langle \alpha(e_j, e_j), \nabla_{e_i}^\perp w \rangle) \\ &= -\langle \alpha(e_i, e_i) + \alpha(e_j, e_j), \nabla_{e_i}^\perp w \rangle + \langle \alpha(e_j, e_j), \nabla_{e_i}^\perp w \rangle \\ &= -\langle \nabla_{e_i}^\perp (\alpha(e_i, e_i) + \alpha(e_j, e_j)), w \rangle + \langle \alpha(e_j, e_j), \nabla_{e_i}^\perp w \rangle \\ &= -\langle \nabla_{e_i}^\perp (2H), w \rangle + \langle \alpha(e_j, e_j), \nabla_{e_i}^\perp w \rangle \\ &= -\langle \nabla_{e_i}^\perp (2H), w \rangle + A_{jji} = 0. \end{aligned}$$

Nas igualdades acima, somamos e subtraímos o mesmo termo, utilizamos a bilinearidade do produto interno e também a igualdade  $-\langle \alpha(e_i, e_j), \nabla_{e_k}^\perp w \rangle = \langle \nabla_{e_k}^\perp (\alpha(e_i, e_j)), w \rangle$ . Para a última igualdade utilizamos o caso anterior, em que  $i \neq j$ , e também o fato de  $\vec{H}$  ser paralelo na conexão normal. Portanto, isto prova a equação (4.2). Resta mostrar que, se  $w \in W$ , então

$$\nabla_{e_k}^\perp w \perp e_3.$$

Como  $E_c^n \times \mathbb{R}$  é o produto de espaços localmente simétricos então também será localmente simétrico, e, portanto,

$$\tilde{\nabla}_Z^\perp \tilde{R}(X, Y, w) = 0, \quad \forall X, Y, Z \in TM.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_Z \tilde{R}(X, Y, w) &= Z\tilde{R}(X, Y, w) - \tilde{R}(\tilde{\nabla}_Z X, Y, w) - \tilde{R}(X, \tilde{\nabla}_Z Y, w) - \tilde{R}(X, Y, \tilde{\nabla}_Z w) \\ &= Z\tilde{R}(X, Y, w) - \tilde{R}((\nabla_Z X + \alpha(X, Z)), Y, w) - \tilde{R}(X, (\nabla_Z Y + \alpha(Y, Z)), w) \\ &\quad - \tilde{R}(X, Y, (-A_w Z + \nabla_Z^\perp w)) \\ &= Z\tilde{R}(X, Y, w) - \tilde{R}(\nabla_Z X, Y, w) - \tilde{R}(\alpha(X, Z), Y, w) - \tilde{R}(X, \nabla_Z Y, w) \\ &\quad + \tilde{R}(X, \alpha(Y, Z), w) + \tilde{R}(X, Y, A_w Z) - \tilde{R}(X, Y, \nabla_Z^\perp w). \end{aligned}$$

Utilizamos acima a equação de Weingarten e a equação de Gauss. Note que, na equação (4.1) se  $C$  é ortogonal a  $A$  e  $B$  e  $C_2 = 0$ , então  $\tilde{R}(A, B)C = 0$ . Portanto, todos os termos do lado direito, com exceção dos dois últimos, são nulos na equação acima. E mais, como  $w \perp Im(\alpha)$ , segue-se que

$$0 = \langle \alpha(X, Y), w \rangle = \langle A_w X, Y \rangle,$$

portanto  $A_w = 0$ . Obtemos então que

$$\tilde{R}(X, Y, \nabla_Z^\perp w) = 0, \quad \forall X, Y, Z \text{ com } X \perp Y.$$

Vamos assumir agora que  $X_2 \neq 0$  e  $Y_2 = 0$ . Daí, pela equação (4.1), temos

$$0 = \tilde{R}(X, Y, \nabla_Z^\perp w) = \langle X, \xi \rangle \langle \nabla_Z^\perp w, \xi \rangle.$$

Portanto,  $\langle \nabla_Z^\perp w, \xi \rangle = 0$ , e isto prova o Lema para  $T^c \subset M$ . Como  $T^c$  é um conjunto que é aberto e denso em  $M$ , o fibrado normal  $W$ , por continuidade, será paralelo em  $M$ . Assim, concluímos a prova do Lema. ■

O próximo Lema trata do caso em que  $\vec{H}$  é uma direção umbílica.

**Lema 42** ([5]). *Se  $\vec{H}$  é uma direção umbílica, não nula, em todo ponto, então  $\langle X, \xi \rangle = 0$ , para todo campo de vetores tangente  $X$ . Segue-se então que  $TM \subset TE_c^n$  e, portanto,  $x(M) \subset E_c^n$ .*

**Prova.** Pela definição de  $Q$ , temos

$$Q(Z, Z) = 2\langle \alpha(Z, Z), H \rangle - c\langle Z, \xi \rangle^2.$$

Agora, fixemos uma base  $\{X, Y\}$  ortonormal de  $TM$ . Daí, para  $Z = X + iY$ , temos que

$$\langle \alpha(Z, Z), H \rangle = \langle \alpha(X, X) - \alpha(Y, Y) - 2i\alpha(X, Y), H \rangle.$$

Como  $H$  é direção umbílica, então  $A_H Z = \mu Z$ , isto é, o operador  $A_H$  é um múltiplo da identidade, para todo  $Z \in TM$ . Daí,

$$\langle \alpha(X, X), H \rangle = \langle A_H X, X \rangle = \langle \mu X, X \rangle = \mu \langle X, X \rangle = \mu |X|^2 = \mu,$$

e, de modo análogo,

$$\langle \alpha(Y, Y), H \rangle = \mu.$$

Também temos que

$$\langle \alpha(X, Y), H \rangle = \langle A_H X, Y \rangle = \mu \langle X, Y \rangle = 0.$$

Portanto, se  $H$  é uma direção umbílica então

$$Q(Z, Z) = -c\langle Z, \xi \rangle^2.$$

E mais, como  $H$  é holomorfa, temos que

$$\begin{aligned} 0 = \bar{Z}Q(Z, Z) &= \bar{Z}(-c\langle Z, \xi \rangle^2) = -2c\langle Z, \xi \rangle \langle \tilde{\nabla}_{\bar{Z}} Z, \xi \rangle \\ &= -2c\langle \alpha(Z, \bar{Z}), \xi \rangle \langle Z, \xi \rangle, \end{aligned} \tag{4.4}$$

utilizamos a equação de Gauss e que  $(\tilde{\nabla}_{\bar{Z}} Z)^T = 0$ .

Denotemos por  $e_1$  e  $e_2$  os vetores unitários tangentes de  $\frac{\partial}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial}{\partial v}$ , respectivamente, temos que

$$\begin{aligned} \alpha(Z, \bar{Z}) &= \lambda^2 \alpha \left( \frac{e_1 - ie_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_1 + ie_2}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\lambda^2}{\sqrt{2}} \{ \alpha(e_1, e_1) + \alpha(e_2, e_2) \} \\ &= \lambda^2 H. \end{aligned}$$

Portanto, podemos reescrever (4.4) da seguinte maneira:

$$0 = -2c \langle -2c \langle \alpha(Z, \bar{Z}), \xi \rangle \langle Z, \xi \rangle = -2c\lambda^2 \langle H, \xi \rangle \langle Z, \xi \rangle.$$

Como  $c \neq 0$  e  $\lambda \neq 0$ , já que  $H$  é uma direção umbílica não nula, temos que ou  $\langle Z, \xi \rangle = 0$  ou  $\langle H, \xi \rangle = 0$ . Seja  $G$  o conjunto dos zeros de  $\langle \xi, Z \rangle$ . Temos que  $G$  não é igual a  $M$ , pois caso contrário teríamos  $\langle \xi, e_1 \rangle = \langle \xi, e_2 \rangle = 0$ . Como  $X$  é combinação linear de  $e_1, e_2$ , teríamos que  $\langle X, \xi \rangle = 0$  e, assim, o Lema estaria provado. Por analiticidade,  $G$  é um

conjunto fechado e sem pontos interiores. No complementar, aberto e denso,  $G^c$  de  $G$ , temos que  $\langle H, \xi \rangle = 0$ . Portanto, derivando essa igualdade em relação a  $X$ , onde  $X$  é um campo tangente arbitrário, temos

$$0 = X\langle H, \xi \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X H, \xi \rangle + \langle H, \tilde{\nabla}_X \xi \rangle = -\langle A_H X, \xi \rangle = -\mu \langle X, \xi \rangle.$$

Nas igualdades acima utilizamos que  $\tilde{\nabla}_X \xi = 0$ , já que  $\xi$  é constante, que  $H$  é paralelo no fibrado normal, logo  $\tilde{\nabla}_X H = \tilde{\nabla}_X^T H + \tilde{\nabla}_X^\perp H = \tilde{\nabla}_X^T H = -A_H X$ , e ainda que  $A_H$  é um múltiplo não nulo da identidade. Portanto, podemos concluir que  $\langle X, \xi \rangle = 0$ , para qualquer campo tangente  $X$ , em todos os pontos de  $G^c$ . Pela continuidade de  $\langle X, \xi \rangle$  em  $M$  temos que  $\langle X, \xi \rangle = 0$  em todos os pontos de  $M$ . E assim, concluimos a prova do Lema 42. ■

**Observação 43.** *Note que a aplicação  $p \mapsto (A_H - \mu I)(p)$ ,  $\mu$  constante, é analítica. Se  $H$  é uma direção umbílica (que é um zero desta aplicação) então, ou isto é válido para todo  $p$  em  $M$ , ou então é válido em um conjunto fechado sem pontos interiores de  $M$ . O primeiro caso é tratado no Lema 42. Para o segundo caso,  $H$  não é uma direção umbílica em um conjunto aberto e denso  $W$  de  $M$ . Na prova do Lema 41, foi provado que se isto é válido para  $W$ , então, por continuidade, vale em  $M$ . Portanto os Lemas 41 e 42 esgotam todas as possíveis situações, e a conclusão final é que ou  $H$  é sempre direção umbílica, e  $M^2 \subset E_c^n$ , ou  $H$  não é direção umbílica em nenhum lugar, e existe um subfibrado normal que é paralelo, contém a imagem da segunda forma fundamental e tem dimensão menor ou igual a três.*

O próximo resultado é um teorema de redução de codimensão.

**Teorema 44.** *Seja  $x : M^2 \looparrowright E_c^n \times \mathbb{R}$  uma imersão da superfície  $M$ , assumamos que  $H$  nunca é uma direção umbílica. Sejam  $L = \text{span}\{Im(\alpha), e_3\}$  e seja  $V = L \oplus TM$ . Então, existe uma subvariedade totalmente geodésica  $S \subset E_c^n \times \mathbb{R}$ , com  $\dim(S) = \dim(V)$ , tal que  $x(M) \subset S$ .*

**Prova.** Segue-se do Lema 41 que o fibrado  $L \oplus TM$  é paralelo na conexão  $\tilde{\nabla}$ . Além disso, sabemos que  $V$  é invariante por  $\tilde{R}$ , no sentido do Lema 36. De fato, isto segue da equação (4.1) e do mesmo argumento utilizado na prova do sublema anterior. Daí, como  $V$  é invariante podemos aplicar o Lema 36 e assim finalizamos a prova do Teorema. ■

Outro teorema que necessitaremos será o Teorema de Yau com o seguinte enunciado.

**Teorema 45** (Yau, [18]). *Seja  $x : M^2 \looparrowright E_c^n$  uma superfície imersa em  $E_c^n$ , com vetor curvatura média paralelo. Então, ou  $M^2$  é uma superfície mínima, ou é uma hipersuperfície umbílica de  $E_c^n$ , ou  $M^2$  está contida em uma subvariedade umbílica tridimensional de  $E_c^n$  com curvatura média constante.*

Agora podemos completar a prova do Teorema 34.

**Prova.** Se  $H$  for uma direção umbílica, pelo Lema 42, temos que  $M \subset E_c^n$ , e podemos então utilizar o Teorema 45 para obter os itens (1) e (2) do Teorema 34. Caso  $H$  não seja uma direção umbílica, existe um subfibrado normal  $L$  que é paralelo na conexão normal, contendo a imagem da segunda forma fundamental  $\alpha$  e  $\dim(L) \leq 3$ ; isto decorre do Lema 41. Pelo Teorema 44,  $M$  está contida em uma subvariedade totalmente geodésica  $S$  de  $E_c^n \times \mathbb{R}$  de dimensão no máximo 5. Como o conjunto  $V$  do Teorema 44 contém um múltiplo não nulo de  $\xi$ , então  $S$  está contida em  $E_c^4 \times \mathbb{R}$ . Logo,  $x(M) \subset S \subset E_c^4 \times \mathbb{R}$ . E assim, obtemos (3) e concluimos a prova do Teorema 34. ■

## 4.2 Prova do Teorema 35

Para o que segue, vamos destacar dois casos.

**Caso a:** Assuma que  $\xi \perp T_p M$ , para todo  $p$ , em um subconjunto aberto e conexo de  $M$ . Então, este aberto está contido em  $E_c^n$ . Por analiticidade, o mesmo acontece para  $x(M)$ , ou seja,  $x(M) \subset E_c^n$ . Como vimos no Lema 42, da seção anterior, isto ocorre quando  $H$  é uma direção umbílica e implica que  $x(M) \subset E_c^n$ . Tratamos este caso na seção anterior usando o Teorema de Yau.

**Caso b:** Consideremos  $\xi \in T_p M$ , para todo  $p$ , em um subconjunto aberto e conexo de  $M$ . Neste caso, podemos mostrar que o primeiro espaço normal é paralelo e tem dimensão um, como vimos no Sublema da seção anterior. Daí, temos que o subconjunto aberto acima está em  $E_c^2 \times \mathbb{R}$ . Por analiticidade, o mesmo também vale para  $x(M)$ .

Entretanto, sob as hipóteses do Teorema 35, temos o seguinte.

**Afirmção:** Se  $M$  é homeomorfa a uma esfera, então o caso  $b$  não ocorre.

**Prova.** Como  $\xi$  é um campo de vetores paralelo, as hipóteses do teorema 2 no caso  $b$ , supondo por absurdo que este ocorre, significam que temos um vetor paralelo em um subconjunto aberto conexo  $U \subset M$ . Isto implica que a curvatura Gaussiana é igual a zero em  $U$ , e por analiticidade em  $M$ . Mas, pela fórmula de Gauss-Bonnet, a integral de  $K$  em  $M$  é positiva. Portanto, existem pontos  $p \in U$  onde  $K$  é positivo, uma contradição. Assim a suposição feita é falsa e provamos a afirmação. ■

O caso  $a$  pode ser tratado utilizando o Teorema de Yau, como no Teorema 34, e assim provamos os itens de (1) a (3) do Teorema 2. Portanto, vamos assumir que não estamos no caso  $a$  e nos concentraremos na demonstração do item (4). Observe que nesta situação  $H$  não é uma direção umbílica.

Escolhamos uma base ortonormal positiva  $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$ , tal que  $e_1, e_2$  é base de  $TM$ , e  $e_1, e_3$  são os vetores unitários nas direções das projeções de  $\xi$  no espaço tangente

e no espaço normal, respectivamente; isto equivale a

$$\langle \xi, e_A \rangle = 0,$$

se  $A \neq 1$  e  $A \neq 3$ .

Como  $M$  é homeomorfa a uma esfera, a função holomorfa  $Q^{(2,0)}(Z, Z)$  se anula em  $M$ . Daí,

$$Q(Z, Z) = 2\langle \alpha(Z, Z), H \rangle - c\langle \xi, Z \rangle \langle \xi, Z \rangle = 0.$$

Portanto, para  $Z = X + iY$ ,

$$\begin{aligned} 2\langle \alpha(X, X) - \alpha(Y, Y) - 2i\alpha(X, Y), H \rangle - c\langle \xi, Z \rangle \langle \xi, Z \rangle &= 0 \\ 2\langle \alpha(e_1, e_1), H \rangle - 2\langle \alpha(e_2, e_2), H \rangle - 4i\langle \alpha(e_1, e_2), H \rangle - c(\langle \xi, e_1 \rangle)(\langle \xi, e_1 \rangle) &= 0. \end{aligned}$$

Na última igualdade acima, encontramos um número complexo igual a zero, portanto, partes real e imaginária devem ser zero. Segue-se que

$$2\langle \alpha(e_1, e_1), H \rangle - 2\langle \alpha(e_2, e_2), H \rangle - c(\langle \xi, e_1 \rangle)(\langle \xi, e_1 \rangle) = 0$$

e daí,

$$2\langle \alpha(e_1, e_1), H \rangle - c(\langle \xi, e_1 \rangle)(\langle \xi, e_1 \rangle) = 2\langle \alpha(e_2, e_2), H \rangle,$$

ou seja,

$$Q(e_1, e_1) = Q(e_1, e_2).$$

Além disso,

$$-4i\langle \alpha(e_1, e_2), H \rangle = 0 \text{ e } \langle \alpha(e_1, e_2), H \rangle = Q(e_1, e_2) = 0.$$

Então, obtemos que

$$Q(e_1, e_1) = Q(e_2, e_2) \quad \text{e} \quad Q(e_1, e_2) = 0.$$

Portanto,

$$2\langle \alpha(e_1, e_2), H \rangle = c\langle \xi, e_1 \rangle \langle \xi, e_2 \rangle = 0.$$

Esta última igualdade acima implica que a base  $\{e_1, e_2\}$  diagonaliza  $A_H$  e, pelo Lema 37, diagonaliza  $\alpha$ .

De agora em diante, vamos definir  $\alpha_{ij} := \alpha(e_i, e_j)$ , com  $i, j \in \{1, 2\}$ . Notemos que, deste modo, podemos escrever  $\xi$  da seguinte maneira

$$\xi = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2.$$

A próxima Proposição ajudará a simplificar alguns cálculos, e portanto, será importante para o que segue.

**Proposição 46** ([5]). *As seguintes identidades são satisfeitas:*

$$(i) \quad \nabla_{e_1} e_1 = 0 = \nabla_{e_1} e_2;$$

$$(ii) \quad d(\theta)(e_2) = 0;$$

$$(iii) \quad \nabla_{e_2}^\perp e_3 = 0.$$

**Prova.** Como  $\xi$  é paralelo, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{\nabla}_{e_1} \xi &= -\operatorname{sen}(\theta) d\theta(e_1) e_1 + \cos(\theta) (\nabla_{e_1} e_1 + \alpha_{11}) \\ &\quad + \cos(\theta) d\theta(e_1) e_3 + \operatorname{sen}(\theta) (\nabla_{e_1}^\perp e_3 - A_{e_3}(e_1)). \end{aligned}$$

Utilizamos que  $\alpha(e_1, e_1) = \tilde{\nabla}_{e_1} e_1 - \nabla_{e_1} e_1$  e a equação de Weingarten acima. Logo, as componentes tangente e normal de  $\tilde{\nabla}_{e_1} \xi$  também são nulas. Para a componente tangente temos

$$-\operatorname{sen}(\theta) d\theta(e_1) e_1 + \cos(\theta) \nabla_{e_1} e_1 - \operatorname{sen}(\theta) A_{e_3}(e_1) = 0.$$

A base  $\{e_1, e_2\}$  diagonaliza  $\alpha$ , portanto,  $A_{e_3}(e_1) = \beta e_1$  e também  $\nabla_{e_1} e_1 = b e_2$ . Como  $e_1$  e  $e_2$  são linearmente independentes então se a expressão acima é zero seus coeficientes também serão zero, portanto  $\nabla_{e_1} e_1 = b e_2 = 0$ . Como  $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ , derivando essa igualdade, temos  $\langle \nabla_{e_1} e_2, e_1 \rangle = 0$ . Logo  $\nabla_{e_1} e_2 = 0$ . E assim, obtemos (i).

De modo similar,

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{\nabla}_{e_2} \xi &= -\operatorname{sen}(\theta) d\theta(e_2) e_1 + \cos(\theta) (\nabla_{e_2} e_1 + \alpha_{12}) \\ &\quad + \cos(\theta) d\theta(e_2) e_3 + \operatorname{sen}(\theta) (\nabla_{e_2}^\perp e_3 - A_{e_3}(e_2)). \end{aligned}$$

Suas componentes tangente e normal são, respectivamente,

$$-\operatorname{sen}(\theta) d\theta(e_2) e_1 + \cos(\theta) \nabla_{e_2} e_1 - \operatorname{sen}(\theta) A_{e_3}(e_2) = 0$$

e

$$\cos(\theta) d\theta(e_2) e_3 + \operatorname{sen}(\theta) \nabla_{e_2}^\perp e_3 = 0,$$

já que  $\alpha_{12} = 0$ . Como  $\nabla_{e_2} e_1 = a e_2$  e  $e_2$  é autovalor de  $A_{e_3}$ , concluímos novamente, devido a independência linear de  $e_1$  e  $e_2$  que  $d\theta(e_2) = 0$ . Portanto, da segunda igualdade acima,  $\nabla_{e_2}^\perp e_3 = 0$ , isto prova (ii) e (iii) e conclui a prova da Proposição 46. ■

O próximo resultado é sobre o vetor  $\alpha_{22}$ .

**Proposição 47** ([5]). *O vetor normal  $\alpha_{22} = \alpha(e_2, e_2)$  é paralelo na conexão normal ao longo das curvas integrais de  $e_2$ .*

**Prova.** Queremos mostrar que  $\nabla_{e_2}^\perp \alpha_{22} = 0$ . Primeiramente, notemos que, como  $2H = \alpha_{11} + \alpha_{22}$  é paralelo, então  $\nabla^\perp \alpha_{22} = -\nabla^\perp \alpha_{11}$ . Segue-se que

$$\begin{aligned} \nabla_{e_2}^\perp \alpha_{22} = -\nabla_{e_2}^\perp \alpha_{11} &= -(\nabla_{e_2}^\perp \alpha)(e_1, e_1) + 2\alpha(\nabla_{e_2} e_{e_1}, e_1) \\ &= -(\nabla_{e_1}^\perp \alpha)(e_2, e_1) + (\tilde{R}(e_2, e_1)e_1)^\perp \\ &= -(\nabla_{e_1}^\perp \alpha)(e_2, e_1). \end{aligned}$$

Utilizamos que  $\nabla_{e_2} e_1 = ae_2$ ,  $\alpha(e_1, e_2) = 0$ , a equação de Codazzi e a equação (4.1) para concluir que  $(\tilde{R}(e_2, e_1)e_1)^\perp = 0$ . Mas,

$$(\nabla_{e_1}^\perp \alpha)(e_2, e_1) = \nabla_{e_1}^\perp \alpha(e_1, e_2) - \alpha(\nabla_{e_1} e_2, e_1) - \alpha(e_2, \nabla_{e_1} e_1) = 0.$$

Pois,  $\nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_1} e_2 = 0$ , pela Proposição anterior. Assim, concluimos a prova da Proposição 47. ■

A próxima proposição fornece uma expressão para  $\nabla_{e_2} e_2$ .

**Proposição 48** ([5]). *Temos que  $\nabla_{e_2} e_2 = be_1$  e  $b$  é constante ao longo das curvas integrais de  $e_2$ .*

**Prova.** Como  $\xi = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_3$ , temos que  $\langle \xi, e_2 \rangle = 0$ . Pela diferenciação, obtemos

$$0 = e_2 \langle \xi, e_2 \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{e_2} \xi, e_2 \rangle + \langle \xi, \tilde{\nabla}_{e_2} e_2 \rangle$$

e, como  $\langle \tilde{\nabla}_{e_2} \xi, e_2 \rangle = 0$ , pois  $\xi$  é paralelo, temos

$$\begin{aligned} 0 = \langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_2, \xi \rangle &= \langle \nabla_{e_2} e_2 + \alpha(e_2, e_2), \xi \rangle \\ &= \langle \nabla_{e_2} e_2, \xi \rangle + \langle \alpha(e_2, e_2), \xi \rangle \\ &= \langle \nabla_{e_2} e_2, \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_3 \rangle + \langle \alpha(e_2, e_2), \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_3 \rangle \\ &= \cos(\theta) \langle \nabla_{e_2} e_2, e_1 \rangle + \sin(\theta) \langle \alpha_{22}, e_3 \rangle. \end{aligned}$$

Para a última igualdade acima, utilizamos que  $e_1$  é tangente e  $e_3$  é normal, e, consequentemente, os demais produtos internos são zero, sobrando apenas os termos que aparecem no lado direito da última igualdade. Logo,

$$\langle \nabla_{e_2} e_2, e_1 \rangle = b = -tg(\theta) \langle \alpha_{22}, e_3 \rangle.$$

Agora derivando  $b$ , obtemos

$$e_2(b) = -\sec^2(\theta) d\theta(e_2) \langle \alpha_{22}, e_3 \rangle - tg(\theta) \{ \langle \nabla_{e_2}^\perp \alpha_{22}, e_3 \rangle + \langle \alpha_{22}, \nabla_{e_2}^\perp e_3 \rangle \}.$$

Pela Proposição 46, temos que  $d\theta(e_2) = 0$  e  $\nabla_{e_2}^\perp e_3 = 0$ , e ainda, pela proposição 47 temos que  $\nabla_{e_2}^\perp \alpha_{22} = 0$ . Portanto  $e_2(b) = 0$  e assim provamos a Proposição 48. ■

Vamos considerar agora  $E^4 \times \mathbb{R}$ , que é o espaço ambiente quando  $H$  não é uma direção umbílica, como no fim da prova do Teorema 34 e que  $E^4 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}$ , com  $\mathbb{R}^5$  munido, possivelmente, com a métrica de Lorentz. Seja  $\bar{\nabla}$  a conexão de  $\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}$ .

**Proposição 49** ([5]). *O subespaço  $\text{span}\{e_2, \bar{\nabla}_{e_2}e_2\}$  é paralelo ao longo das curvas integrais de  $e_2$ .*

**Prova.** Note que neste novo espaço ambiente

$$\bar{\nabla}_{e_2}e_2 = be_1 + \alpha_{22} + e\eta,$$

onde  $\eta$  é o vetor unitário normal a subvariedade umbílica de  $E_c^4$  em  $\mathbb{R}^5$  que é determinada pela orientação de  $E_c^4$ . Vamos calcular  $\bar{\nabla}_{e_2}\bar{\nabla}_{e_2}e_2$  derivando termo a termo a igualdade acima. Temos

$$\bar{\nabla}_{e_2}(be_1) = b(\nabla_{e_2}e_1 + \alpha_{12}) = b\nabla_{e_2}e_2 + b\alpha_{22},$$

$$\bar{\nabla}_{e_2}(\alpha_{22}) = \nabla_{e_2}(\alpha_{22}) + \nabla_{e_2}^\perp(\alpha_{22}) = \nabla_{e_2}^\perp\alpha_{22} - A_{\alpha_{22}}e_2,$$

e, pela Proposição 47, encontramos  $\nabla_{e_2}^\perp\alpha_{22} = 0$ . E, como

$$\bar{\nabla}_{e_2}\eta = -ee_2,$$

temos

$$\bar{\nabla}_{e_2}\bar{\nabla}_{e_2}e_2 = b\nabla_{e_2}e_1 + b\alpha_{12} - A_{\alpha_{22}}e_2 - e^2e_2$$

que é um múltiplo de  $e_2$ , pois  $\alpha_{12} = 0$  e  $\nabla_{e_2}e_1 = -be_2$ . Para todo  $v$  normal,  $A_v$  é um múltiplo da identidade, ou seja,  $A_v e_2$  é um múltiplo de  $e_2$ . O que encerra a prova. ■

As duas próximas Proposições caracterizam as curvas integrais de  $e_2$ .

**Proposição 50** ([5]). *As curvas integrais de  $e_2$  são círculos planos.*

**Prova.** Primeiro, note que  $|\bar{\nabla}_{e_2}e_2|$  é constante. Temos que  $be_1, \alpha_{22}$  e  $e\eta$  são vetores ortogonais com norma constante. Como  $\bar{\nabla}_{e_2}\bar{\nabla}_{e_2}e_2$  é um múltiplo de  $e_2$ , concluímos a prova. ■

**Proposição 51** ([5]). *As curvas integrais de  $e_2$  estão em planos paralelos.*

**Prova.** Inicialmente, observamos que as curvas integrais de  $e_2$  são curvas de nível da função altura  $h(p) = \langle x(p), \xi \rangle, p \in M$ . Para vermos isso, sejam  $w_1, w_2$  formas diferenciais definidas em  $M$  por  $w_i(e_j) = \delta_{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$ . Então

$$dh = \langle dx, \xi \rangle = \langle w_1e_1 + w_2e_2, \xi \rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} dh(e_2) &= \langle w_1(e_2)e_1 + w^2(e_2)e_2, \xi \rangle = \langle e_1 + e_2, \xi \rangle \\ &= \langle e_1 + e_2, \cos(\theta)e_1 + \text{sen}(\theta)e_3 \rangle \\ &= \langle e_2, \xi \rangle = 0. \end{aligned}$$

e isso implica que a função altura é constante ao longo das curvas integrais de  $e_2$ . Consideremos um ponto  $p$  em uma dada curva integral de  $e_2$ . Então, qualquer outra curva integral de  $e_2$ , suficientemente perto da primeira curva, pode ser ligada ao ponto  $p$  por uma única linha gradiente. Isto nos permite falar sobre pontos correspondentes em distintas curvas integrais de  $e_2$  que sejam próximas o suficiente.

Notemos que as linhas gradientes parametrizadas por comprimento de arco são curvas integrais do campo  $e_1$ . Como

$$\bar{\nabla}_{e_1} e_2 = \nabla_{e_1} e_2 + \alpha_{12} = 0,$$

vemos que as linhas tangentes, em pontos correspondentes de distintas curvas integrais de  $e_2$ , que são próximos o suficiente, são paralelas. Assim, tais curvas estão contidas em planos paralelos.

Como os pontos críticos da função altura são os os zeros da diferencial analítica

$$dh_p : X_p \longrightarrow \langle X_p, \xi \rangle,$$

onde  $X_p$  é um vetor tangente em  $p$ , eles formam um conjunto fechado  $F$  em  $M$ , sem pontos interiores. E como já eliminamos o Caso  $a$ , não podemos ter  $\langle X_p, \xi \rangle \equiv 0$ . O conjunto complementar  $F^c$  é aberto e denso e deve conter um número de componentes conexas. Claramente, para uma dada componente conexa de  $F^c$ , os planos contendo trajetórias de  $e_2$  são todos paralelos a um plano fixado.

Agora, dado um ponto que pertence ao bordo de duas componentes conexas  $F_1^c$  e  $F_2^c$ , consideremos dois planos  $P_1$  e  $P_2$  que são limite dos planos contendo os pontos das sequências  $\{p_i^1\} \in F_1^c$  e  $\{p_i^2\} \in F_2^c$ , respectivamente, que convergem para  $p$ . Afirmamos que  $P_1 = P_2$ . Caso contrário, a interseção entre eles seria uma linha reta, que, por completude, se estenderia por toda  $M$ . Isto implicaria que  $K \equiv 0$ , uma contradição.

Segue-se que todos os planos contendo as curvas integrais de  $e_2$  são paralelos a um plano fixado e isto prova a Proposição 51. ■

Agora decompondo  $\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}$  em dois subespaços ortogonais  $P \oplus P^\perp$ , onde  $P$  é um plano que contém uma curva integral de  $e_2$  e  $P^\perp$  é o seu complemento ortogonal. Podemos parametrizar o círculo, que é a curva integral de  $e_2$  em  $P$  por

$$\hat{g} + r \cos(\theta) f_1 + r \sin(\theta) f_2, \tag{4.5}$$

onde  $\{f_1, f_2\}$  é uma base ortonormal de  $P$ ,  $r$  é uma função em  $M$  tal que  $e_2(r) = 0$ , e  $\hat{g} \in P$  é outro vetor posição do centro do círculo em (4.5).

Quando nos movemos ao longo de uma linha gradiente, as curvas de nível de altura  $h$ , que são círculos em planos paralelos a  $P$ , são dadas por

$$\beta(s) = \hat{g}(s) + r(s) \cos(\theta) f_1 + r(s) \sin(\theta) f_2.$$

Consideremos a projeção das curvas  $\beta(s)$  em  $P$ , e manteremos, por simplicidade, a mesma notação da parametrização  $\beta(s)$ .

Afirmamos que, quando nos movemos ao longo de uma linha gradiente, os pontos  $\hat{g}(s)$  permanecem fixados, isto é,  $\hat{g}'(s) = 0$ . Para vermos isso, consideremos  $\hat{e}_1$  a projeção de  $e_1$  sobre  $P$ . Então,

$$\hat{e}_1 = \frac{\partial}{\partial s} \beta s = \hat{g}'(s) + r'(s) \cos(\theta) f_1 + r'(s) \sin(\theta) f_2.$$

Como  $e_2 \in P$ ,  $\langle \hat{e}_1, e_2 \rangle = 0$ . Também, observando que  $e_2 = -\sin(\theta) f_1 + \cos(\theta) f_2$ , obtemos

$$= 0 \langle \hat{e}_1, e_2 \rangle = \langle \hat{g}'(s), e_2 \rangle$$

e, como  $e_2$  gera  $P$ , concluímos que  $\hat{g}'(s) \equiv 0$ , como afirmamos. Mostramos então que, se não ocorre o Caso (a), o item (4) do Teorema 35 vale.

Usando a analiticidade da imersão da maneira que foi feita anteriormente, mostramos que o item (4) do Teorema 35 vale em  $M$ . De fato, como vimos antes, se  $H$  é uma direção umbílica em todos os pontos, então  $x(M) \subset E_c^n$ . Neste caso, podemos usar o Teorema 45 e concluir os outros itens do Teorema 35. ■

# Referências Bibliográficas

- [1] Abresch, U., Rosenberg, H., A Hopf differential for constant mean curvature in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , *Acta Math.* 193 (2004), 141-174.
- [2] Abresch, U., Rosenberg, H., Generalized Hopf Differentials. *Matemática Contemporânea* 28 (2005), Sociedade Brasileira de Matemática, 1-28.
- [3] Alencar, H., do Carmo, M. P., Tribuzy, R., A Theorem of H. Hopf and the Cauchy-Riemann inequality, *Communications in Analysis and Geometry* 15 (2007), 283-298.
- [4] Alencar, H., do Carmo, M. P., Tribuzy, R., Fernandez, I., A Theorem of H. Hopf and the Cauchy-Riemann inequality II. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, v. 38, p. 525-532, 2007.
- [5] Alencar, H., do Carmo, M. P., Tribuzy, R., A Hopf Theorem for ambient spaces of dimensions higher than three, *J. Differential Geometry* 84 (2010), 1-17.
- [6] do Carmo, M., *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, 4ª edição, 2008.
- [7] do Carmo, M., *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Textos Universitários, Rio de Janeiro: SBM, 2ª edição, 2006.
- [8] Daniel, B., Isometric immersions into to 3-dimensional homogeneous manifolds, *Comment. Math. Helv.* 82 (2007), no 1, 87-131.
- [9] Daniel, B., Isometric immersions into  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  and applications to minimal surfaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 361 (2009), no. 12, 6255-6282.
- [10] Dieudonné, J., *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, 1969, Chapter IX (2.4.2).
- [11] Eschenburg, J. H., Tribuzy, R., Existence and uniqueness of maps into affine homogeneous spaces. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 89 (1993), 11-18.

- [12] Espinar, J., de Oliveira, I. S., Locally convex surfaces immersed in a Killing submersion, *Bull. Math. Soc. (N.S.)* 44 (2013), 155-171.
- [13] Fernández, I., Mira, P., A Characterization of Constant Mean Curvature Surfaces in Homogeneous 3–Manifolds, *Differential Geom., Appl.* 25 (2007), no. 3, 281-289.
- [14] Fetcu, D., Surfaces with parallel mean curvature vector in complex space forms. *J. Differential Geometry* 91 (2012), 215-232.
- [15] Hopf, H., *Differential Geometry in Large*, Lectures Notes in Mathematics.1000, Springer-Verlag, 1983.
- [16] Jr, C. B Morrey, On analiticity of solutions of analytic nonlinear elliptic systems of partial differential equations, *American J. of Math*, 80 (1958), 198-237.
- [17] Neto, A. L. , *Funções de uma Variável Complexa*. Rio de Janeiro: IMPA, 2ªedição, 2005.
- [18] Yau, S. T. , Submanifolds with constant mean curvature I. *American Journal of Mathematics* 96 (1974) 346-366.