Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Dissertação de Mestrado

Variedades de Einstein de dimensão 4 com curvatura seccional não negativa

Francisleide da Silva Pires

Salvador-Bahia
Fevereiro de 2011

Variedades de Einstein de dimensão 4 com curvatura seccional não negativa

Francisleide da Silva Pires

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ézio de Araújo Costa.

Salvador-Bahia
Fevereiro de 2011

Pires, Francisleide da Silva.

Variedades de Einstein de dimensão 4 com curvatura seccional não negativa / Francisleide da Silva Pires. – Salvador: UFBA, 2011.

37 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Ézio de Araújo Costa.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2010.

Referências bibliográficas.

1. Geometria diferencial. 2. Variedades diferenciáveis. 3. Variedades riemannianas. I. Costa, Ézio de Araújo. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 514.764.2

Variedades de Einstein de dimensão 4 com curvatura seccional não negativa

Francisleide da Silva Pires

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 25 de fevereiro de 2011 .

Banca examinadora:

Prof. Dr. Ézio de Araújo Costa (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Enaldo Silva Vergasta
UFBA

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva
UFAL

A Deus.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus "porque Dele, por Ele e para Ele são todas as coisas, glória pois a Ele eternamente, amém". Agradeço-o pelo dom da vida e por ter me dado a força e graça para superar as dificuldades encontradas ao longo da caminhada e por fim alcançar esse objetivo: concluir o Mestrado em Matemática.

Aos meus pais – Eunice e Francisco – pelo amor incondicional e por lutarem com muita dificuldade para me dar o de melhor. Aos meus irmãos – Elenice, Elisangela, Elisana e Melkzedeque– pelo apoio, pela compreensão da minha ausência em alguns momentos e ainda pela colaboração nos momentos em que precisei.

Ao professor João Cardeal, um dos principais culpados por eu ter chegado até aqui, me encorajando a tentar o Mestrado, além dele os professores Jean, Taíse e Cristiano que também me incentivaram a enfrentar a seleção e os demais professores da UEFS que contribuíram para minha formação inicial em Matemática.

Ao Professor Dr. Ézio Costa, por ter aceitado me orientar e que além de ser um excelente profissional, foi uma pessoa muito prestativa e paciente na orientação desse trabalho, dando sua parcela de contribuição na minha formação de Mestre.

Aos membros da banca, Dr. Enaldo Vergasta e Dr.Márcio Batista por aceitarem participar da banca examinadora e pelas correções sugeridas para enriquecimento desse trabalho.

A todos os colegas do Mestrado em Matemática que tive a oportunidade de conhecer nesse período e compartilhar momentos bons ou até mesmo momentos de aperto e correria. Em especial aos meus companheiros de luta Renivaldo (mais chegado que um irmão), Caio e Kátia que juntos enfrentamos inúmeras dificuldades e trabalhamos com garra no objetivo de superá-las. Também à colega Elaís que foi uma boa companheira de estudo quando cursou conosco duas disciplinas e ainda em outros momentos de descontração. Não esquecendo de agradecer ao colega João Paulo pelo auxílio com o TEX e contribuição nos grupos de estudo.

Deixo meus sinceros agradecimentos aos professores Vilton Pinheiro, Taíse Santiago, Paulo Varandas, Enaldo Vergasta, Ana Lúcia e Armando, pessoas que admiro muito e que com muita dedicação e profissionalismo contribuíram para meu aprendizado e minha formação de Mestre.

Aos funcionários do IM: D.Neide, Douglas, Alan e Gilmar pela colaboração em seus serviços. Agradeço também a secretária D. Tânia por seu excelente trabalho, e não esquecendo de D. Zezé pela sua atenção e colaboração quando precisei.

Parece contraditório, mas tenho um agradecimento especial às pessoas que não acreditaram em mim e lançaram palavras negativas. Hoje vejo que estas palavras me serviram de incentivo para que eu lutasse com mais garra e persistência ainda , e então posso afirmar sem medo:“posso todas as coisas Naquele que me fortalece”.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

"As misericórdias do SENHOR são a causa de não sermos consumidos, porque as suas misericórdias não têm fim; renovam-se cada manhã."

(Lamentações 3.22-23)

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo estudar variedades de Einstein M de dimensão 4, compactas, simplesmente conexas com curvatura seccional não negativa. Existe uma conjectura que afirma que uma tal variedade é localmente simétrica, logo é isométrica a esfera $\mathbb{S}^4$, ou a $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ ou ao espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^2$, todos esses espaços com suas métricas canônicas. Mostaremos que essa conjectura se realiza nos seguintes casos: (1) a curvatura seccional de M é $\dfrac{1}{4}$ - pinçada, (2) M é Kählerianna com curvatura seccional não negativa e (3) M tem operador de curvatura não negativo.

Palavras-chave: Variedades de Einstein; curvatura seccional; operador de curvatura; espaços localmente simétricos.

Abstract

This work aims to study compact, simply connected, with nonnegative sectional curvature and four-dimensional Einstein manifolds. There is a conjecture which states that such a manifold is locally symmetric, then M is isometric to the sphere $\mathbb{S}^4$ or to $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ or to the space complex projective $\mathbb{CP}^2$, all these spaces with their standard metrics. We will show that this conjecture is held in the following cases: (1) the sectional curvature of M is $\frac{1}{4}$-pinched, (2) M is Kählerian with nonnegative sectional curvature and (3) M has operator nonnegative curvature.

Keywords: Manifolds Einstein; sectional curvature; curvature operator; locally symmetric spaces.

Sumário

Introdução

Uma variedade Riemanniana $M = M^n$ de dimensão n é dita uma variedade de Einstein se tem curvatura de Ricci constante. Em dimensão 2 ou 3 a condição de ter curvatura de Ricci constante equivale a ter curvatura seccional constante e portanto, o estudo das variedades de Einstein é interessante quando a dimensão é maior ou igual a 4. Na nossa dissertação estaremos interessados especificamente no estudo das variedades de Einstein M de dimensão 4, compactas, simplesmente conexas e que tem curvatura seccional não negativa. Existe uma conjectura de que essas variedades são localmente simétricas e consequentemente de acordo com um teorema de Jensen (ver [Js69]) M deve ser isométrica a uma esfera $\mathbb{S}^4$, ou a um produto de duas esferas $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ ou ao espaço complexo projetivo $\mathbb{CP}^2$, com suas respectivas métricas canônicas. Mostraremos que essa conjectura se realiza nos seguintes casos :

1°) **Teorema A**.([Bg61]) *Seja M uma variedade de Einstein de dimensão 4, compacta e orientada. Se existe uma constante $K_o > 0$ tal que a curvatura seccional K de M satisfaz $K_o/4 \leq K \leq K_o$, então M é isométrica a uma esfera $\mathbb{S}^4$ ou ao espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^2$.*

2°) **Teorema B**.([Bg63]) *Seja M uma variedade de Einstein de dimensão 4, compacta e simplesmente conexa. Se M é também uma variedade Kähleriana e tem curvatura seccional não negativa então M é isométrica a um produto de duas esferas $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ ou ao espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^2$.*

3°) **Teorema C**. *Seja M uma variedade de Einstein de dimensão 4, compacta e simplesmente conexa. Se M tem operador de curvatura não negativo então M é isométrica a uma esfera $\mathbb{S}^4$, ou a um produto de duas esferas $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ ou ao espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^2$.*

Os Teoremas A e B foram provados por M. Berger em [Bg61] e [Bg63], respectivamente. O Teorema C é consequência do seguinte resultado mais geral provado por S. Tachibana em [Tb74]:

Teorema 0.0.1. *Seja M uma variedade de Einstein de dimensão n compacta e orientada. Se M tem operador de curvatura não negativo então M é um espaço localmente simétrico.*

Entretanto, em nossa dissertação daremos um prova diferente para o caso em que M tem dimensão 4. A demonstração dos Teoremas A, B e C repousa essencialmente nos seguintes resultados:

- **Fórmula de Lichnerowicz:** *Sejam M^n, $n \geq 2$, uma variedade Riemanniana, compacta e orientada com tensor de curvatura R e conexão Riemanniana ∇ e $\operatorname{div} R$ a divergência de R. Então*

$$\frac{1}{2}\int_M \mid \nabla R \mid^2 dV = \int_M \mid \operatorname{div} R \mid^2 dV - \int_M F dV,$$

onde $F : M \to \mathbb{R}$ é dada por

$$F(p) = \sum_{i,j,k,h,l,m} (R_{ikjk}R_{ihlm}R_{jhlm} + \frac{1}{2}R_{ijkh}R_{khlm}R_{lmij} + 2R_{ikjh}R_{iljm}R_{klhm}),$$

$i, j, k, h, l, m = 1, 2, 3, 4$, $R_{ijkl} = R(X_i, X_j, X_k, X_l)$ e $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ é uma base ortonormal de T_pM.

Em particular, se M^n é uma variedade de Einstein, como $\operatorname{div} R = 0$, temos

$$\frac{1}{2}\int_M \mid \nabla R \mid^2 dV = -\int_M F dV.$$

- **Fórmula de Weitzenbock:** *Seja $M = M^4$ uma variedade de Einstein de dimensão 4, compacta, orientada e com curvatura de Ricci $= \rho$. Se $W^{\pm}$ são as partes auto-dual e anti-auto-dual do tensor de Weyl W de M então*

$$\Delta \mid W^{\pm} \mid^2 = -4\rho \mid W^{\pm} \mid^2 + 36 \det W^{\pm} - 2 \mid \nabla W^{\pm} \mid^2 .$$

- **Teorema de Jensen ([Js69]):** *Seja $M = M^4$ uma variedade de Einstein de dimensão 4, compacta e simplesmente conexa. Se M é um espaço localmente simétrico então M é isometrica a uma esfera $\mathbb{S}^4$, ou ao espaço complexo projetivo $\mathbb{CP}^2$ ou a um produto de duas esferas $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$.*

Na demonstração dos Teoremas A e B, mostraremos que a função F que aparece na fórmula de Lichnerowicz é não negativa e consequentemente $\nabla R \equiv 0$, o que significa que M é localmente simétrica. Em seguida, usamos o Teorema de Jensen.

Para a prova do Teorema C, usamos a fórmula de Weitzenbock (ver [Bs87]) para mostrar que M é também um espaço localmente simétrico.

Para atingir nosso objetivo, dedicamos o primeiro capítulo às noções básicas da geometria Riemanniana que estão relacionadas com o tema proposto. No segundo capítulo, apresentamos alguns resultados referentes a variedades de Einstein de dimensão quatro, tais como: Lemas de Berger, decomposição do tensor de curvatura e o Tensor de Weyl. Nos capítulos 3, 4 e 5, demonstramos os Teoremas A, B e C, respectivamente.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduziremos algumas definições básicas e alguns resultados preliminares que serão utilizados nos capítulos posteriores. As definições e resultados referentes à Geometria Riemanniana encontram-se, por exemplo no livro de do Carmo [dC08].

Seja $M = M^n$, $n \geq 2$, uma variedade diferenciável n-dimensional. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de campos de vetores de classe C^∞ tangentes a M^n e por TM o fibrado tangente de M^n. Para cada $p \in M$, T_pM denotará o espaço tangente de M^n em p.

1.1 Noções básicas de Geometria Riemanniana

Definição 1.1.1. *Uma métrica Riemanniana em M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle , \rangle_p$, no espaço tangente T_pM, que varia diferencialmente com p no seguinte sentido: Se $\boldsymbol{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $\boldsymbol{x}(x_1, x_2, ..., x_n) = q$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\boldsymbol{x}(0, ..., 1, ..., 0)$, então $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle = g_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n)$ são funções diferenciáveis em U.*

Definição 1.1.2. *Uma variedade Riemanniana é uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana.*

Definição 1.1.3. *Uma conexão afim ∇ em M^n é um aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

(ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

(iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

para quaisquer que sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f, g \in C^\infty(M)$.

Definição 1.1.4. *Uma conexão afim é dita ser compatível com a métrica se ela satisfaz a regra do produto, ou seja,*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

Definição 1.1.5. *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* M *é dita ser simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_X Y = [X, Y],$$

para quaisquer que sejam $X,\ Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.1.6. *Uma conexão é dita uma conexão Riemanniana se ela for simétrica e compatível com a métrica.*

Definição 1.1.7. *A curvatura* R *de* M^n *é uma correspondência que associa a cada par* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *uma aplicação* $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ *dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

onde $Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ *é o colchete de Lie de* X *e* Y.

Definição 1.1.8. *Sejam* $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$. *O tensor de curvatura de* M^n *é definido por*

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W\rangle.$$

Se $\{X_i\}$ é uma base ortonormal de T_pM é conveniente escrever

$$R(X_i, X_j, X_k, X_l) = R_{ijkl},$$

o qual satisfaz as identidades

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij},$$

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0.$$

Esta última é conhecida como identidade de Bianchi.

Definição 1.1.9. *Sejam agora* σ *um subespaço bidimensional de* T_pM *e* $\{X, Y\}$ *uma base de* σ. *A curvatura seccional de* σ *em* p *é dada por*

$$K(\sigma) = K(X, Y) = \frac{R(X, Y, Y, X)}{|X \wedge Y|^2},$$

onde $|X \wedge Y|^2 = |X|^2.|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2$.

No caso em que X_i, X_j são ortonormais,

$$K_{ij} = K(X_i, X_j) = R(X_i, X_j, X_j, X_i).$$

Definição 1.1.10. *Seja $X \in T_pM$, com $\mid X \mid = 1$. Então a curvatura de Ricci na direção de X é dada por $Ric(X) = \sum_{i=1}^{n} K(X, X_i)$, onde $\{X_1 = X, ..., X_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM.*

Definição 1.1.11. *Uma variedade Riemanniana M^n é dita ser uma variedade de Einstein se a mesma tem curvatura de Ricci constante.*

Definição 1.1.12. *Seja M uma variedade Riemanniana. M é um espaço localmente simétrico se $\nabla R = 0$, onde R é o tensor de curvatura de M.*

1.2 O espaço de 2- formas e o operador estrela de Hodge

Definição 1.2.1. *Seja V um espaço vetorial de dimensão $n \geq 2$, com produto interno $\langle , \rangle$. Uma 1-forma em V é um funcional linear $f : V \to R$ e como sabemos, existe um único vetor $u \in V$ tal que $f(v) = \langle u, v\rangle$, $\forall v \in V$. Então podemos identificar f com um vetor $u \in V$ e usar a notação $u(v) = \langle u, v\rangle$.*

Definição 1.2.2. *Uma 2-forma em V é uma aplicação bilinear anti-simétrica $\alpha : V \times V \to R$. Se u e v são dois vetores em V, podemos definir a 2-forma $u \wedge v$ (bivetor) da seguinte maneira*

$$\begin{aligned} u \wedge v \ &: \ V \times V \to \mathbb{R} \\ &(u \wedge v)(x, y) = det \begin{pmatrix} \langle u, x\rangle & \langle u, y\rangle \\ \langle v, x\rangle & \langle v, y\rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Note que $v \wedge v = 0$ e $v \wedge u = -u \wedge v$.
O conjunto das 2-formas em V é um espaço vetorial denotado por $\Lambda^2(V)$. Se $\{e_i\}_{i=1}^n$ é uma base de V então $\{e_i \wedge e_j\}_{i<j}$ é uma base para $\Lambda^2(V)$.

Podemos definir um produto interno em $\Lambda^2(V)$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle , \rangle \ &: \ \Lambda^2(V) \times \Lambda^2(V) \to \mathbb{R} \\ &\langle e_i \wedge e_j, e_r \wedge e_k\rangle = det \begin{pmatrix} \langle e_i, e_r\rangle & \langle e_i, e_k\rangle \\ \langle e_j, e_r\rangle & \langle e_j, e_k\rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dadas 2-formas α $\beta \in \Lambda^2(V)$, podemos definir o produto exterior de $\alpha = e_i \wedge e_j$ e $\beta = e_r \wedge e_k$ como a aplicação

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta \quad : \quad & V \times V \times V \times V \to \mathbb{R}, \\ & (\alpha \wedge \beta)(v_1, v_2, v_3, v_4) = det(\langle e_i, v_j \rangle) \end{aligned}$$

Uma 2-forma $\alpha \in \Lambda^2(V)$ é dita decomponível de existem u, $v \in V$ tal que $\alpha = u \wedge v$.

Valem as seguintes propriedades:

(a) $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$

(b) α é decomponível se e somente se $\alpha \wedge \alpha = 0$

Daqui em diante estamos interessados em espaços vetoriais de dimensão 4.

Seja V um espaço vetorial de dimensão 4 com produto interno $\langle , \rangle$. Vamos definir o operador estrela $*$. Para isto, seja $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ uma base orientada de V, temos então que

$$\{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4\}$$

é uma base de $\Lambda^2(V)$. Se (i_1, i_2, j_1, j_2) é uma permutação cíclica de $(1, 2, 3, 4)$. Definimos então $*(e_{i_1} \wedge e_{i_2}) = e_{j_1} \wedge e_{j_2}$.

Lema 1.2.3. *O operador $*$ satisfaz as condições*

(i) $* \circ * = I$*;*

(ii) $*$ *é auto-adjunto;*

(iii) *Os autovalores de $*$ são ± 1, cada um com multiplicidade algébrica 3.*

Prova:

(i) De fato, basta verificar que esta propriedade é válida para os elementos da base de $\Lambda^2(V)$:

$$\begin{array}{ll} *(*(e_1 \wedge e_2)) = *(e_3 \wedge e_4) = e_1 \wedge e_2 & *(*(e_2 \wedge e_3)) = *(e_1 \wedge e_4) = e_2 \wedge e_3 \\ *(*(e_1 \wedge e_3)) = *(e_2 \wedge e_4) = e_1 \wedge e_3 & *(*(e_2 \wedge e_4)) = *(e_1 \wedge e_3) = e_2 \wedge e_4 \\ *(*(e_1 \wedge e_4)) = *(e_2 \wedge e_3) = e_1 \wedge e_4 & *(*(e_3 \wedge e_4)) = *(e_1 \wedge e_2) = e_3 \wedge e_4 \end{array} ;$$

(ii) Com efeito, basta notar que a matriz do operador $*$ com respeito a base citada acima tem a forma

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

onde I é a identidade de $\Lambda^2(V)$. Como esta matriz é simétrica, então $*$ é auto-adjunto.

(iii) De fato, pois $\det(* - \lambda I) = \lambda^6 - 2\lambda^4 + 1$, cujas raízes são ± 1, cada uma com multiplicidade 3.

Observação 1.2.4. *O operador $*$ decompõe o espaço $\Lambda^2(V)$ na soma direta ortogonal $\Lambda^2(V) = \Lambda^+(V) \bigoplus \Lambda^-(V)$, onde $\Lambda^\pm$ são os auto-espaços de $*$ correspondentes aos auto-valores ± 1, ou seja,*

$$\Lambda^+(V) = \{\alpha \in \Lambda^2(V); *\alpha = \alpha\}$$

$$\Lambda^-(V) = \{\alpha \in \Lambda^2(V); *\alpha = -\alpha\}.$$

Os espaços $\Lambda^+(V)$ e $\Lambda^+(V)$ são chamados a parte auto-dual e a parte anti-auto-dual de $\Lambda^2(V)$, respectivamente.

Capítulo 2

Variedades de Einstein de dimensão 4

Os exemplos mais simples de variedades de Einstein de dimensão 4 com curvatura de Ricci não negativa são: a esfera $\mathbb{S}^4_c$ com curvatura $c > 0$, o produto de duas esferas $\mathbb{S}^2_c \times \mathbb{S}^2_c$ de mesma curvatura $c > 0$, o espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^2$, o espaço projetivo real $\mathbb{RP}^4$, o produto de dois espaços reais projetivos $\mathbb{RP}^2_c \times \mathbb{RP}^2_c$, o espaço euclidiano $\mathbb{R}^4$ e o toro flat $\mathbb{T}^4 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, todos com suas métricas canônicas.

2.1 Lemas de Berger

Apresentaremos agora dois lemas importantes referentes a variedades de Einstein de dimensão quatro, os quais foram provados por Berger em [Bg61].

Lema 2.1.1. *Seja M uma variedade de Einstein de dimensão 4 e seja $p \in M$. Se $\{X_1, ..., X_4\}$ é uma base ortornormal do espaço tangente T_pM e K_{ij} é a curvatura secional $K(X_i, X_j)$ então*

$$K_{12} = K_{34},$$

$$K_{13} = K_{24},$$

$$K_{14} = K_{23}.$$

Prova:

Sejam M uma variedade de Einstein de dimensão 4, ρ curvatura de Ricci de M e $\{X_1, ..., X_4\}$ uma base ortornormal do espaço tangente T_pM. Sabemos que

$$K_{12} + K_{13} + K_{14} = K_{21} + K_{23} + K_{24} = K_{31} + K_{32} + K_{34} = K_{41} + K_{42} + K_{43} = \rho.$$

Usando o fato de que $K_{ij} = K_{ji}$ e combinando as equações acima, temos

$$(K_{12} + K_{13} + K_{14}) + (K_{23} + K_{24} + K_{34}) = (K_{12} + K_{13} + K_{14}) + (K_{12} + K_{23} + K_{24})$$

Portanto, da última igualdade obtemos que $K_{12} = K_{34}$ e as outras igualdades são obtidas de maneira análoga. ■

Lema 2.1.2. *Seja M uma variedade de Einstein de dimensão 4 e tensor de curvatura R. Então para todo $p \in M$, existe uma base ortonormal ortonormal $\{X_i\}$ de T_pM tal que:*

i) Todos os $R(X_i, X_j, X_k, X_h) = R_{ijkh}(i, j, k, h = 1, 2, 3, 4)$ são nulos, com exceção (eventualmente) de $K_{12} = K_{34}$, $K_{13} = K_{24}$, $K_{14} = K_{23}$, R_{1234}, R_{1342} e R_{1423}.

ii) $\mid R_{1342} - R_{1234} \mid \leq K_{13} - K_{12}$, $\mid R_{1342} - R_{1423} \mid \leq K_{13} - K_{14}$, $\mid R_{1423} - R_{1234} \mid \leq K_{14} - K_{12}$.

Prova:

Sejam M uma variedade de Einstein de dimensão 4, p um ponto de M e $\{X_1, ..., X_4\}$ uma base ortornormal do espaço tangente T_pM. Seja $\sigma(X_1, X_2) \subseteq T_pM$ o 2-plano escolhido de modo que $K(X_1, X_2)$ seja um valor mínimo da curvatura seccional em $p \in M$ e seja $\xi(X_3, X_4)$ o complemento ortogonal de $\sigma(X_1, X_2)$ em T_pM. Para quaisquer $Y \in \sigma(X_1, X_2)$, $Z \in \xi(X_3, X_4)$, sejam X_1 e X_3 vetores cujos valores máximos são dados a $K(Y, Z)$. Consideremos as funções de θ definidas a seguir

$$f_1(\theta) = K(X_1, X_2 \cos\theta + X_3 \sin\theta),$$

$$f_2(\theta) = K(X_1, X_2 \cos\theta + X_4 \sin\theta),$$

$$f_3(\theta) = K(X_2, X_1 \cos\theta + X_3 \sin\theta),$$

$$f_4(\theta) = K(X_2, X_1 \cos\theta + X_4 \sin\theta).$$

Observe que

$$f_1(\theta) = K(X_1, X_2 \cos\theta + X_3 \sin\theta) = K_{12} \cos^2\theta - R_{1213} \sin 2\theta + K_{13} \sin^2\theta,$$

daí temos

$$f_1'(\theta) = -K_{12} \sin 2\theta - 2R_{1213} \cos 2\theta + K_{13} \sin 2\theta.$$

Mas, $f_1(0) = K(X_1, X_2)$ e como $K(X_1, X_2)$ é valor mínimo da curvatura seccional temos $f_1'(0) = 0$. Note que $f_1'(0) = 2R_{1213}$, donde concluímos que $R_{1213} = 0$. Seguindo o mesmo raciocínio para as funções $f_2(\theta), f_3(\theta)$ e $f_4(\theta)$, obtemos $R_{1214} = 0$, $R_{1223} = 0$, e $R_{1224} = 0$, como queríamos. Analogamente, considerando as funções

$$K(X_1, X_3 \cos\theta + X_4 \sin\theta),$$

$$K(X_3, X_1 \cos\theta + X_2 \sin\theta)$$

e usando o fato de que $K(X_1, X_3)$ é extremo, obtemos $R_{1314} = 0$, e $R_{1323} = 0$.

E assim a parte (i) do Lema fica demonstrada.

Para mostrarmos a parte (ii) usaremos o fato de que $K(Y,Z) \leq K_{13}$ quaisquer que sejam $Y \in \sigma(X_1, X_2)$, $Z \in \xi(X_3, X_4)$. Dessa forma,

$$K(aX_1 + bX_2, cX_3 + dX_4) \leq K_{13}, \tag{2.1}$$

quaisquer que sejam a, b, c, $d \in \mathbb{R}$. Em particular, para $a = b = c = d = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, temos

$$K(\frac{1}{\sqrt{2}}X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_2, \frac{1}{\sqrt{2}}X_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_4) \leq K_{13}.$$

Note que,

$$\begin{aligned}
& K(\frac{1}{\sqrt{2}}X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_2, \frac{1}{\sqrt{2}}X_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_4) \qquad (2.2)\\
= & \langle R(\frac{1}{\sqrt{2}}X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_2, \frac{1}{\sqrt{2}}X_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_4)\frac{1}{\sqrt{2}}X_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_4, \frac{1}{\sqrt{2}}X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_2\rangle \\
= & \langle R(\frac{1}{\sqrt{2}}X_1, \frac{1}{\sqrt{2}}X_3)\frac{1}{\sqrt{2}}X_3, \frac{1}{\sqrt{2}}X_1\rangle + \langle R(\frac{1}{\sqrt{2}}X_2, \frac{1}{\sqrt{2}}X_3)\frac{1}{\sqrt{2}}X_3, \frac{1}{\sqrt{2}}X_1\rangle \\
+ & \langle R(\frac{1}{\sqrt{2}}X_1, \frac{1}{\sqrt{2}}X_4)\frac{1}{\sqrt{2}}X_3, \frac{1}{\sqrt{2}}X_1\rangle + \langle R(\frac{1}{\sqrt{2}}X_2, \frac{1}{\sqrt{2}}X_4)\frac{1}{\sqrt{2}}X_3, \frac{1}{\sqrt{2}}X_1\rangle \\
+ & \langle R(\frac{1}{\sqrt{2}}X_1, \frac{1}{\sqrt{2}}X_3)\frac{1}{\sqrt{2}}X_4, \frac{1}{\sqrt{2}}X_1\rangle + \langle R(\frac{1}{\sqrt{2}}X_2, \frac{1}{\sqrt{2}}X_3)\frac{1}{\sqrt{2}}X_4, \frac{1}{\sqrt{2}}X_1\rangle \\
+ & \langle R(\frac{1}{\sqrt{2}}X_1, \frac{1}{\sqrt{2}}X_4)\frac{1}{\sqrt{2}}X_4, \frac{1}{\sqrt{2}}X_1\rangle + \langle R(\frac{1}{\sqrt{2}}X_2, \frac{1}{\sqrt{2}}X_4)\frac{1}{\sqrt{2}}X_4, \frac{1}{\sqrt{2}}X_1\rangle \\
+ & \langle R(\frac{1}{\sqrt{2}}X_1, \frac{1}{\sqrt{2}}X_3)\frac{1}{\sqrt{2}}X_3, \frac{1}{\sqrt{2}}X_2\rangle + \langle R(\frac{1}{\sqrt{2}}X_2, \frac{1}{\sqrt{2}}X_3)\frac{1}{\sqrt{2}}X_3, \frac{1}{\sqrt{2}}X_2\rangle \\
+ & \langle R(\frac{1}{\sqrt{2}}X_1, \frac{1}{\sqrt{2}}X_4)\frac{1}{\sqrt{2}}X_3, \frac{1}{\sqrt{2}}X_2\rangle + \langle R(\frac{1}{\sqrt{2}}X_2, \frac{1}{\sqrt{2}}X_4)\frac{1}{\sqrt{2}}X_3, \frac{1}{\sqrt{2}}X_2\rangle \\
+ & \langle R(\frac{1}{\sqrt{2}}X_1, \frac{1}{\sqrt{2}}X_3)\frac{1}{\sqrt{2}}X_4, \frac{1}{\sqrt{2}}X_2\rangle + \langle R(\frac{1}{\sqrt{2}}X_2, \frac{1}{\sqrt{2}}X_3)\frac{1}{\sqrt{2}}X_4, \frac{1}{\sqrt{2}}X_2\rangle \\
+ & \langle R(\frac{1}{\sqrt{2}}X_1, \frac{1}{\sqrt{2}}X_4)\frac{1}{\sqrt{2}}X_4, \frac{1}{\sqrt{2}}X_2\rangle + \langle R(\frac{1}{\sqrt{2}}X_2, \frac{1}{\sqrt{2}}X_4)\frac{1}{\sqrt{2}}X_4, \frac{1}{\sqrt{2}}X_2\rangle \\
= & \frac{1}{4}(K_{13} - R_{2331} - R_{1431} + R_{1324} - R_{1341} + R_{1423} \\
+ & K_{14} - R_{2441} - R_{1332} + K_{23} + R_{1423} - R_{2432} - R_{1342} \\
- & R_{2342} - R_{1442} + K_{24}). \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.1.1, temos $K_{13} = K_{24}$ e $K_{14} = K_{23}$. Além disso, pelo item (i) desse lema, temos $R_{ijkj} = 0$, se $i \neq k$. Juntando esses dois fatos, obtém-se

$$\begin{aligned}
K(\frac{1}{\sqrt{2}}X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_2, \frac{1}{\sqrt{2}}X_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_4) &= \frac{1}{4}(2K_{13} + 2R_{1423} - 2R_{1342} + 2K_{14}) \\
&= \frac{1}{2}(K_{13} + R_{1423} - R_{1342} + K_{14}). \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Como, K_{13} é valor máximo da curvatura seccional, temos

$$\frac{1}{2}(K_{13} + R_{1423} - R_{1342} + K_{14}) \leq K_{13},$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}(R_{1423} - R_{1342}) \leq \frac{1}{2}(K_{13} - K_{14}).$$

Daí tem-se,

$$R_{1423} - R_{1342} \leq K_{13} - K_{14}.$$

Além disso, note que se fizermos $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = c = d = \frac{1}{\sqrt{2}}$ em (2.1), realizando-se cálculos análogos, obtém-se

$$-\frac{1}{2}(R_{1423} - R_{1342}) \leq \frac{1}{2}(K_{13} - K_{14}).$$

Assim,

$$R_{1423} - R_{1342} \geq K_{14} - K_{13}$$

e portanto,

$$\mid R_{1342} - R_{1423} \mid \leq K_{13} - K_{14}, \tag{2.5}$$

como queríamos.

Analogamente, como K_{12} é valor mínimo da curvatura seccional, quaisquer que sejam a, b, c e d, tem-se

$$K(aX_1 + bX_3, cX_2 + dX_4) \geq K_{12}. \tag{2.6}$$

Em particular, para $a = b = c = d = \frac{1}{\sqrt{2}}$, temos

$$K(\frac{1}{\sqrt{2}}X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_3, \frac{1}{\sqrt{2}}X_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_4) \geq K_{12}.$$

Através de cálculos análogos ao anterior, obtém-se

$$\begin{aligned} K(\frac{1}{\sqrt{2}}X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_3, \frac{1}{\sqrt{2}}X_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_4) &= \frac{1}{4}(K_{12} - R_{3221} - R_{1421} + R_{1234} - R_{1241} + R_{1432} \\ &+ K_{14} - R_{3441} - R_{1223} + K_{32} + R_{1432} - R_{2423} \\ &- R_{1343} - R_{3243} - R_{1443} + K_{34}) \\ &= \frac{1}{4}(2K_{12} + 2R_{1432} - 2R_{1243} + 2K_{14}) \\ &= \frac{1}{2}(K_{12} + R_{1234} - R_{1423} + K_{14}). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Substituindo (2.7) na última desigualdade acima, tem-se

$$\frac{1}{2}(K_{12} + R_{1234} - R_{1423} + K_{14}) \geq K_{12},$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}(R_{1234} - R_{1423}) \geq \frac{1}{2}(K_{12} - K_{14}).$$

Fazendo $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = c = d = \frac{1}{\sqrt{2}}$ em (2.6) e realizando-se cálculos análogos obtém-se

$$-\frac{1}{2}(R_{1234} - R_{1423}) \geq \frac{1}{2}(K_{12} - K_{14}).$$

Portanto,

$$R_{1234} - R_{1423} \leq K_{14} - K_{12},$$

e daí segue que

$$\mid R_{1234} - R_{1423} \mid \leq K_{14} - K_{12}. \tag{2.8}$$

Finalmente combinando as desigualdades (2.5) e (2.8) obtemos

$$\mid R_{1342} - R_{1234} \mid \leq K_{13} - K_{12}.$$

■

2.2 Decomposição do tensor de curvatura de uma variedade de Einstein de dimensão 4

Nosso objetivo nesta seção é apresentar uma forma canônica para os tensores de curvatura em espaços de Einstein de dimensão 4, conforme aparece no artigo de Singer-Torpe [ST69].

Seja M uma variedade orientada de dimensão 4, em cada ponto $x \in M$ vamos considerar $V = T_xM$ e $\Lambda_x^2 = \Lambda^2(T_xM) = \Lambda_x^+ \oplus \Lambda_x^-$. O *tensor de curvatura* R em x é uma aplicação linear simétrica definida por

$$\begin{aligned} R : \Lambda_x^2 &\rightarrow \Lambda_x^2 \\ X \wedge Y &\mapsto R(X, Y) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} R(X \wedge Y) &: T_xM \rightarrow T_xM \\ R(X \wedge Y)Z &= R(X, Y)Z. \end{aligned}$$

Seja $P = \{X, Y\}$ o plano gerado pelos vetores ortonormais $X, Y \in T_xM$, podemos identificar P com $X \wedge Y$ e denotar a curvatura seccional de M em P por

$$K(P) = \langle R(P), P\rangle = \langle R(X \wedge Y), (X \wedge Y)\rangle = \langle R(X, Y), Y, X\rangle.$$

Definição 2.2.1. *Seja M uma variedade de Einstein de dimensão 4, com operador de curvatura R e curvatura seccional K. Seja G o conjunto dos bivetores decomponíveis de comprimento 1. Um 2-plano $P \in G$ é um plano crítico de R se P é ponto crítico de $K : G \to R$.*

Daí, podemos provar o seguinte resultado:

Lema 2.2.2. *G é um produto de duas esferas, a saber as esferas de raio $\frac{1}{\sqrt{2}}$ nos auto-espaços $\Lambda_x^{\pm}$ do operador estrela.*

Prova:

Sabemos que $\xi \in \Lambda_x^2$ é decomponível se, e somente se, $\xi \wedge \xi = 0$.
Logo,

$$\begin{aligned} G &= \{\xi \in \Lambda_x^2 / \xi \wedge \xi = 0, \langle \xi, \xi \rangle = 1\} \\ &= \{\xi \in \Lambda_x^2 / \langle \xi, *\xi \rangle = 0, \langle \xi, \xi \rangle = 1\}, \end{aligned}$$

Como $\Lambda_x^2 = \Lambda_x^+ \oplus \Lambda_x^-$, onde Λ_x^+ é o auto espaço associado ao autovalor $+1$ e Λ_x^- é o auto espaço associado ao autovalor -1, podemos escrever $\xi = \alpha + \beta$, onde $*\alpha = \alpha$ e $*\beta = -\beta$. Daí temos

$$1 = \langle \xi, \xi \rangle = \langle \alpha + \beta, \alpha + \beta \rangle = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + 2\langle \alpha, \beta \rangle = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$$

$$0 = \langle \xi, *\xi \rangle = \langle \alpha + \beta, *(\alpha + \beta) \rangle = \langle \alpha + \beta, \alpha - \beta \rangle = \|\alpha\|^2 - \|\beta\|^2$$

Das equações acima, concluímos que $\|\alpha\| = \|\beta\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e portanto

$$G = \{\alpha + \beta \in \Lambda_x^2, \|\alpha\| = \|\beta\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\}.$$

■

Proposição 2.2.3. *$P \in G$ é um ponto crítico de R se, e somente se, existem números reais λ e μ tais que $R(P) = \lambda P + \mu P^{\perp}$.*

Prova:

Considere as três funções dadas por $f(\xi) = \langle R(\xi), \xi \rangle$, $g(\xi) = \langle \xi, \xi \rangle$ e $h(\xi) = \langle \xi, *\xi \rangle$, $\xi \in \Lambda_x^2$. Note que, K é a restrição de f a $G = g^{-1}(1) \cap h^{-1}(0)$. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange em $\mathbb{R}^n$, temos que $P \in G$ é um ponto crítico da curvatura seccional em P se, e somente se, existem números reais λ e μ tais que, em P temos a igualdade

$$\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g + \mu \operatorname{grad} h,$$

onde λ e μ são os multiplicadores de Lagrange. Mas, se $A : V \to V$ é uma aplicação linear simétrica no espaço vetorial V, temos $\text{grad}\langle A(v), v\rangle = 2A(v)$. Aplicando isto as funções f, g e h obtemos

$$2R(P) = 2\lambda P + 2\mu(*P).$$

Mas, para $P \in G$, $*P$ é o complemento ortogonal orientado $P^\perp$ de P em V. Daí segue que

$$R(P) = \lambda P + \mu P^\perp.$$

■

Podemos agora obter a decomposição do operador de curvatura de uma variedade de Einstein de dimensão 4, conforme Singer-Torpe [ST69].

Teorema 2.2.4. *Seja M uma variedade de Einstein de dimensão 4 e R o seu operador de curvatura. Então existe uma base ortonormal de T_pM tal que cada par de vetores gera um plano crítico de R. Com relação a essa base, a matriz dos componentes da curvatura tem a forma*

$$[R] = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix},$$

onde $$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

Prova:

Note que, se M^4 é de Einstein e R é o operador de curvatura de M temos $* \circ R = R \circ *$, e visto que os operadores $*$ e R são auto-adjuntos, então os operadores podem ser diagonalizados simultaneamente . Seja ξ_i $(1 \leq i \leq 6)$ uma base ortonormal para Λ^2 tal que

$$\begin{cases} *\xi_i = \xi_i, i \leq 3 \\ *\xi_i = -\xi_i, i > 3 \end{cases}$$

$$R(\xi_i) = a_i\xi_i \ (1 \leq i \leq 6),$$

ou seja, $\xi_i \in \Lambda^+$ para $i \leq 3$ e $\xi_i \in \Lambda^-$ para $i > 3$. Definindo $P_i = (\xi_i + \xi_{i+3})/\sqrt{2}$ e $P_i^\perp = (\xi_i - \xi_{i+3})/\sqrt{2}$, temos que $\beta = \{P_1, P_2, P_3, P_1^\perp, P_2^\perp, P_3^\perp\}$ é uma base ortonormal para Λ^2 satisfazendo $\langle *P, P\rangle = 0$, $\forall P \in \beta$, ou seja, os elementos de β se identificam com os elementos de G e vale $*P_i = P_i^\perp$, $i = 1, 2, 3$.

Além disso,

$$R(P_i) = \lambda_i P_i + \mu_i P_i^\perp$$

e

$$R(P_i^\perp) = \lambda_i P_i^\perp + \mu_i P_i,$$

onde $\lambda_i = (a_i + a_{3+i})/2$ e $\mu_i = (a_i - a_{3+i})/2$ de modo que, pela Proposição (2.2.3), β é uma base ortonormal de Λ^2 consistituída de planos críticos de R e segundo a qual a matriz tem $[R]$ a referida forma.

Como $P_1,\ P_2 \in \beta$ satisfazem $P_1 \wedge P_2 = \langle P_1, *P_2\rangle w = \langle P_1, P_2^{\perp}\rangle w = 0$, segue que $P_1 \cap P_2 \neq \{0\}$ e sendo assim existem $e_1 \in P_1 \cap P_2$, $e_2 \in P_1$ e $e_3 \in P_2$ tais que $e_1 \wedge e_2 = P_1$ e $e_1 \wedge e_3 = P_2$. Escolhendo $e_4 \in V$, de modo que $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ seja uma base ortonormal com orientação compatível com a orientação fixada em T_pM, temos $e_3 \wedge e_4 = P_1^{\perp}$ e $e_4 \wedge e_2 = P_2^{\perp}$.

Da ortogonalidade de $\{P_i, P_i^{\perp}\}$ segue que P_3 é uma combinação linear de $e_1 \wedge e_4$ e $e_2 \wedge e_3$. Como P_3 e $P_3^{\perp}$ são decomponíveis e $\langle P_3, P_3^{\perp}\rangle = 0$, segue que $e_1 \wedge e_4 = \pm P_3$ e $e_2 \wedge e_3 = \pm P_3^{\perp}$, ou vice-versa. Mas, $-P_3$ e $\pm P_3^{\perp}$ são também planos críticos de R com os mesmos multiplicadores de Lagrange λ_3 e μ_3 de P_3. Logo, a base $\{e_1, ..., e_4\}$ satisfaz as condições do Teorema. ■

2.3 O tensor de Weyl de uma variedade de Einstein de dimensão 4

Seja M uma variedade Riemanniana orientada de dimensão 4 com operador de curvatura R. Decorre da prova do Teorema 2.2.4 que se M é uma variedade de Einstein, então, para todo $x \in M$, existe uma base ortonormal B de $\Lambda_x^2 = \Lambda_x^+ \oplus \Lambda_x^-$, $B = \{\beta_1, ..., \beta 6\}$ tal que

$$R(\beta_i) = (\lambda_i \pm \mu_i)\beta_i.$$

Observe que $\lambda_i \pm \mu_i$ são autovalores do operador de curvatura R de M. Se ρ é a curvatura de Ricci de M, o tensor $W = R - \dfrac{\rho}{3} I_{\Lambda_x^2}$ é chamado *tensor de Weyl* de M.

Observe que, para uma variedade de Einstein, $R = W + \dfrac{\rho}{3} I_{\Lambda_x^2}$ e $W \equiv 0$ se, e somente se, M^4 tem curvatura seccional constante . Pela ação do operador $*$, podemos decompor W na soma direta $W = W^+ \oplus W^-$, onde $W^{\pm} = W|_{\Lambda^{\pm}}$ são chamados de *partes auto-dual e anti-auto-dual de* W, respectivamente.

Ainda, pelo Teorema 2.2.4, $W^{\pm}$ tem autovalores $\lambda_i \pm \mu_i - \dfrac{\rho}{3}$, onde $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = \rho$ e, pela primeira identidade de Bianchi, $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \mu_i = 0$, pois $\mu_1 = \langle R(P_1), P_1^{\perp}\rangle = R_{1234}$, $\mu_2 = \langle R(P_2), P_2^{\perp}\rangle = R_{1342}$ e $\mu_3 = \langle R(P_3), P_3^{\perp}\rangle = R_{1423}$.

Capítulo 3

Variedades de Einstein de dimensão 4 com curvatura seccional $\frac{1}{4}$ - pinçada

Uma variedade M é dita ser $\frac{1}{4}$ - pinçada se existe $K_0 > 0$ tal que a curvatura seccional de M satisfaz $\frac{K_0}{4} \leq K(X,Y) \leq K_0$, quaisquer que sejam $X, Y \in T_pM$. Nosso objetivo nesse capítulo é demonstrar um resultado que classifica as variedades de Einstein de dimensão 4 que tem curvatura seccional $\frac{1}{4}$ - pinçada.

Teorema A. *Seja M uma variedade de Einstein de dimensão 4, compacta e orientada. Se a curvatura seccional de M for $\frac{1}{4}$ - pinçada , então M é isométrica a uma esfera $\mathbb{S}^4$ ou ao espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^2$.*

Prova:

Sejam M^4 uma variedade de Einstein, $\{X_i\}_{i=1}^4$ um referencial ortonormal de T_pM e $F : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(p) = \sum_{i,j,k,h,l,m} (R_{ikjk}R_{ihlm}R_{jhlm} + \frac{1}{2}R_{ijkh}R_{khlm}R_{lmij} + 2R_{ikjh}R_{iljm}R_{klhm}), \qquad (3.1)$$

onde R é o operador de curvatura de M e $i,j,k,h,l,m = 1,2,3,4$. Utilizando, no ponto p, um referencial ortonormal $\{X_i\}_{i=1}^4$ cuja existência e propriedades são assegurados pelo Lema 2.1.2 e fazendo $K_{12} = a$, $K_{13} = b$, $K_{14} = c$, $R_{1234} = \alpha$, $R_{1342} = \beta$, $R_{1423} = \gamma$, um cálculo muito trabalhoso – conforme Berger [Bg61] e que consta no Apêndice – nos mostra que

$$\begin{aligned} \frac{F}{8} &= a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + \alpha^2(b+c-2a) + \beta^2(c+a-2b) \\ &+ \gamma^2(a+b-2c) - 6a\beta\gamma - 6b\gamma\alpha - 6c\alpha\beta. \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Conforme provamos no Lema 2.1.2, temos as desigualdades

$$| \beta - \alpha | \leq b - a,$$

$$| \beta - \gamma | \leq b - c,$$

$$| \gamma - \alpha | \leq c - a.$$

Podemos substituir essas desigualdades na equação acima, e obteremos

$$\begin{aligned} \frac{F}{8} &\geq a(\beta-\gamma)^2 + b(\gamma-\alpha)^2 + c(\alpha-\beta)^2 + \alpha^2(b+c-2a) + \beta^2(c+a-2b) \\ &+ \gamma^2(a+b-2c) - 6a\beta\gamma - 6b\gamma\alpha - 6c\alpha\beta, \end{aligned}$$

e simplificando teremos

$$\frac{F}{16} \geq \alpha^2(b+c-a) + \beta^2(c+a-b) + \gamma^2(a+b-c) - 4a\beta\gamma - 4b\gamma\alpha - 4c\alpha\beta. \tag{3.3}$$

E, como $\alpha + \beta + \gamma = 0$, substituindo β por $-(\alpha + \gamma)$ em (3.3) obtém-se

$$\frac{F}{96} \geq a\gamma^2 + c\alpha^2 + (a+c-b)\alpha\gamma.$$

Ora, o segundo membro desta desigualdade pode ser visto como uma forma quadrática em γ e seu discriminante é dado por $\{(a+c-b)\alpha\}^2 - 4ac\alpha^2 = \alpha^2\{(a-c)^2 + b^2 - 2b(a+c)\}$.

Afirmamos que $F \geq 0$. De fato, assuma que $\frac{1}{4} \leq K \leq 1$. Inicialmente note que o sinal de α não interfere no sinal do discriminante e assim é necessário estudar o sinal de $(a-c)^2 + b^2 - 2b(a+c)$.

Observe que

$$(a-c)^2 + b^2 - 2b(a+c) = (b - (a^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}})^2)(b - (c^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}})^2). \tag{3.4}$$

Como $\frac{1}{4} \leq a \leq c \leq b \leq 1$, então

$$b^{\frac{1}{2}} \leq 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \leq 2a^{\frac{1}{2}} \tag{3.5}$$

e

$$b^{\frac{1}{2}} \leq 2c^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \leq 2c^{\frac{1}{2}}. \tag{3.6}$$

Somando (3.5)e (3.6) obtemos $b^{\frac{1}{2}} \leq a^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}}$, e isto implica que $b - (a^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}})^2 \leq 0$. Por outro lado, $b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} \geq b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}} \geq 0$, ou seja, $b - (c^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}})^2 \geq 0$.

Daí temos (3.4) não positivo, ou seja, o discriminante da forma quadrática é não positivo e como a é positivo segue que $F \geq 0$ e a afirmação fica provada.

Para concluir a demonstração do teorema, basta usar a Fórmulda de Lichnerowicz para variedades de Einstein e notar que como $F \geq 0$ temos $\frac{1}{2}\int_M \mid \nabla R \mid^2 dV \leq 0$ e daí segue que $\nabla R = 0$, ou seja, M é um espaço localmente simétrico.

Como M^4 é compacta, orientada e tem curvatura seccional $K > 0$, conforme um dos corolários do Teorema de Synge-Weinstein [dC08, p. 206] temos que M é simplesmente conexa. Como M é variedade de Einstein segue do Teorema de Jensen que $M \simeq \mathbb{S}^4$ ou $M \simeq \mathbb{CP}^2$, já que $M \simeq \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ não tem curvatura seccional $K > 0$. $\blacksquare$

Capítulo 4

Variedades de Einstein Kählerianas de dimensão 4 com curvatura seccional não negativa

Nesse capítulo, demonstraremos o Teorema B sobre variedades de Einstein Kählerianas de dimensão 4 com curvatura seccional não negativa. Antes, precisamos de algumas considerações. Iniciaremos com a definição de Variedades Kählerianas, que é válida, mais geralmente, para variedades de dimensão par.

Definição 4.0.1. *Seja M^4 uma variedade Riemanniana, com conexão riemanniana ∇ e tensor de curvatura R. Dizemos que M é Kähleriana se existe um tensor $J : TM \to TM$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $J \circ J = -Id_{TM}$

(ii) $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$, $\forall X, Y \in TM$;

(iii) $\nabla_X JY - J(\nabla_X Y) = 0$, $\forall X, Y \in TM$

Note que, como consequência da definição, J satisfaz a propriedade

$$R(JX, JY) = R(X, Y).$$

De fato

$$\begin{aligned}
\langle R(X,Y)JZ, JW \rangle &= \langle \nabla_Y \nabla_X JZ - \nabla_X \nabla_Y JZ + \nabla_{[X,Y]} JZ, JW \rangle \\
&= \langle \nabla_Y J(\nabla_X Z) - \nabla_X J(\nabla_Y Z) + J(\nabla_{[X,Y]} Z), JW \rangle \\
&= \langle J(\nabla_Y \nabla_X Z) - J(\nabla_X \nabla_Y Z) + J(\nabla_{[X,Y]} Z), JW \rangle \\
&= \langle J(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z), JW \rangle \\
&= \langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, W \rangle = \langle R(X,Y)Z, W \rangle.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\langle R(JX,JY)Z,W\rangle &= \langle R(JX,JY)JZ,JW\rangle\\ &= \langle R(JZ,JW)JX,JY\rangle\\ &= \langle R(JZ,JW)X,Y\rangle\\ &= \langle R(X,Y)JZ,JW\rangle\\ &= \langle R(X,Y)Z,W\rangle,\end{aligned}$$

donde concluímos que

$$R(JX,JY) = R(X,Y).$$

Os exemplos mais simples de variedades de Einstein compactas de dimensão 4 que são Kählerianas e simplesmente conexas são o produto de duas esferas $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$, ambas com mesma curvatura seccional e o espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^2$. Por razões de natureza topológica, sabe-se que a esfera $\mathbb{S}^4$ não admite métrica Kähleriana.

Antes de provarmos o Teorema B precisamos do seguinte resultado devido a Berger [Bg63].

Lema 4.0.2. *Seja M uma variedade de Einstein Kähleriana de dimensão 4. Então para cada $p\in M$, existe uma base ortonormal $\{X_i\}$ de T_pM tal que*

- ***(i)*** *Todos os $R_{ijkh}(i,j,k,h = 1,2,3,4)$ são nulos, com exceção (eventualmente) dos seguintes: $R_{1212} = R_{3434}$, $R_{1313} = R_{4242} = R_{1324}$, $R_{1414} = R_{2323} = R_{1432}$ e $R_{1234} = R_{1313} + R_{1414}$.*
- ***(ii)*** $K_{12} \geq 2(K_{13} - K_{14})$

Prova:

Escolhamos $\{X_1, X_2 = JX_1\}$ ($X_1 \in T_pM$ unitário) de modo que

$$K(X_1, JX_1) = \sup\{(K(X,JX))/|X| = 1, X\in T_pM\}.$$

Seja W o complemento ortogonal do subespaço gerado por X_1, JX_1. Inicialmente note que qualquer base ortonormal de W é da forma $\{Z, JZ\}$ (Z unitário). De fato, se $Z\in W$ é Z unitário sabemos que JZ é unitário pois $\|JZ\| = \|Z\| = 1$ e além disto temos que $JZ\in W$ pois $\langle X_1, JZ\rangle = -\langle J^2X_1, JZ\rangle = -\langle JX_1, Z\rangle = 0$ e $\langle JX_1, JZ\rangle = \langle X_1, Z\rangle = 0$, visto que $Z\in W$ e $JX_1\in W^\perp$.

Agora, consideremos a forma quadrática $Q(Z) = \langle R(X_1,Z)X_1,Z\rangle$ associada à forma bilinear simétrica $B(X,Y) = \langle R(X_1,X)X_1,Y\rangle$, X, $Y\in T_xM$. A restrição de Q a W é também uma forma quadrática. Dessa forma, existe uma base ortonormal de W tal que $B(X_i,X_j) = 0$, para $i\neq j$. Mas, como toda base ortornormal de W é da forma

$\{Z, JZ\}$ (Z unitário), então tomemos $X_3 \in W$ e teremos $\langle R(X_1, X_3)X_1, JX_3\rangle = 0$, ou seja, $R_{1314} = 0$. Mostremos agora, que o referencial $\{X_1, X_2 = JX_1, X_3, X_4 = JX_3\}$ satisfaz às condições do lema.

Em primeiro lugar, sabemos que $R_{1314} = 0$. Agora, como M é de Einstein com curvatura de Ricci ρ, temos que

$$\sum_{i=1}^{i=4} R_{ijki} = \rho\delta_{jk},$$

e fazendo $j = 3$ e $k = 4$ temos

$$R_{1341} + R_{2342} + R_{3343} + R_{4344} = 0,$$

o que implica $R_{2342} = 0$.

Além disso,

$$R_{1323} = \langle R(X_1, X_3)JX_1, X_3\rangle = \langle R(JX_1, JX_3)JX_1, X_3\rangle = R_{2423} = 0$$

e

$$R_{2441} = \langle R(JX_1, JX_3)JX_3, X_1\rangle = \langle R(X_1, X_3)JX_3, X_1\rangle = R_{1341} = 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
& K(aX_1 + bX_3, J(aX_1 + bX_3)) = \\
= \ & [\langle R(aX_1 + bX_3, J(aX_1 + bX_3))J(aX_1 + bX_3), aX_1 + bX_3\rangle](a^2 + b^2)^{-2} \\
= \ & [\langle R(aX_1, aJX_1)aJX_1, aX_1\rangle + \langle R(aX_1, bJX_3)aJX_1, aX_1\rangle + \\
+ \ & \langle R(aX_1, bJX_3)bJX_3, aX_1\rangle + \langle R(aX_1, aJX_1)bJX_3, aX_1\rangle + \\
+ \ & \langle R(bX_3, aJX_1)aJX_1, aX_1\rangle + \langle R(bX_3, bJX_3)aJX_1, aX_1\rangle + \\
+ \ & \langle R(bX_3, bJX_3)bJX_3, aX_1\rangle + \langle R(bX_3, aJX_1)bJX_3, aX_1\rangle + \\
+ \ & \langle R(aX_1, aJX_1)aJX_1, bX_3\rangle + \langle R(aX_1, bJX_3)aJX_1, bX_3\rangle + \\
+ \ & \langle R(aX_1, bJX_3)bJX_3, bX_3\rangle + \langle R(aX_1, aJX_1)bJX_3, bX_3\rangle + \\
+ \ & \langle R(bX_3, aJX_1)aJX_1, bX_3\rangle + \langle R(bX_3, bJX_3)aJX_1, bX_3\rangle + \\
+ \ & \langle R(bX_3, bJX_3)bJX_3, bX_3\rangle + \langle R(bX_3, aJX_1)bJX_3, bX_3\rangle](a^2 + b^2)^{-2} \\
= \ & [a^4R_{1221} + a^3bR_{1421} + a^2b^2R_{1441} + a^3bR_{1241} + a^3bR_{3221} + a^2b^2R_{3421} + \\
+ \ & ab^3R_{3441} + a^2b^2R_{3241} + a^3bR_{1223} + a^2b^2R_{1423} + ab^3R_{1443} + a^2b^2R_{1243} + \\
+ \ & a^2b^2R_{3223} + ab^3R_{3423} + b^4R_{3443} + ab^3R_{3243}].(a^2 + b^2)^{-2}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Note que

$$\begin{aligned}
R_{1241} &= \langle R(X_1, JX_1)JX_3, X_1\rangle = \langle R(JX_3, X_1)X_1, JX_1\rangle \\
&= -\langle R(X_3, JX_1)X_1, JX_1\rangle = R_{3212} = R_{1232},
\end{aligned}$$

$$R_{1443} = \langle R(X_1, JX_3)JX_3, X_3\rangle = \langle R(JX_1, -X_3)JX_3, X_3\rangle = -R_{2343} = R_{3243},$$

$$R_{1331} = \langle R(X_1, X_3)X_3, X_1\rangle = \langle R(JX_1, JX_3)X_3, X_1\rangle = R_{24313} = R_{1342}$$

e

$$R_{1441} = \langle R(X_1, JX_3)JX_3, X_1\rangle = \langle R(JX_1, -X_3)JX_3, X_1\rangle = -R_{2341} = R_{1423}.$$

Pela identidade de Bianchi, temos

$$R_{1234} + R_{2314} + R_{3124} = 0,$$

assim,

$$R_{1243} = -R_{1234} = R_{1423} + R_{1342} = K_{14} + K_{13}.$$

Usando o fato de que $K_{12} = K_{34}$, temos

$$K(aX_1+bX_3, J(aX_1+bX_3)) = \frac{(a^4 + b^4)K_{12} + 2a^2b^2(3K_{14} + K_{13}) + 4a^3bR_{1241} + 4ab^3R_{1443}}{(a^2 + b^2)^2}.$$

Como

$$K(X_1, JX_1) = \sup_{x=p}(K(X, JX)),$$

temos

$$\frac{(a^4 + b^4)K_{12} + 2a^2b^2(3K_{14} + K_{13}) + 4a^3bR_{1214} + 4ab^3R_{1434}}{(a^2 + b^2)^2} \leq K_{12},$$

para quaisquer a e b números reais. Simplificando temos:

$$2a^2b^2(3K_{14} + K_{13} - K_{12}) + 4a^3bR_{1241} + 4ab^3R_{1443} \leq 0.$$

Fazendo $A = 3K_{14} + K_{13}$, $B = 2R_{1241}$ e $C = 2R_{1443}$, teremos

$$2a^2b^2(A - K_{12}) + 2Ba^3b + 2Cab^3 \leq 0.$$

para quaisquer a e b números reais.

Afirmamos que $A - K_{12} \leq 0$ e $B = C = 0$. De fato, por hipótese

$$a^2b^2(A - K_{12}) + Ba^3b + Cab^3 \leq 0 \tag{4.2}$$

para quaisquer números reais a e b. Em particular, para $a = \pm\frac{1}{n}$ e $b = \sqrt[3]{n}$, temos

$$\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n^2}(A - K_{12}) \pm \frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^3}B \pm C \leq 0. \tag{4.3}$$

Tomando o limite da última desigualdade quando n tende a infinito, obtemos $\pm C \leq 0$, ou seja $C = 0$. Sendo assim, temos

$$a^2b^2(A - K_{12}) + Ba^3b \leq 0, \tag{4.4}$$

para quaisquer a e b números reais. Fazendo $a = \sqrt[3]{n}$ e $b = \pm\frac{1}{n}$, obtemos

$$\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n^2}(A - K_{12}) \pm B \leq 0. \tag{4.5}$$

Analogamente, tomando o limite em (4.5) quando n tende a infinito, obtemos $\pm B \leq 0$, o que implica $B = 0$.

Dessa forma temos que $B = C = 0$ e consequentemente $A - K_{12} \leq 0$ e a afirmação fica provada. Daí,

$$R_{1214} = R_{1434} = 0.$$

Mas,

$$R_{1214} = R_{1232} = 0$$

e

$$R_{1434} = R_{3234} = 0$$

e portanto

$$R_{1232} = R_{3234} = 0.$$

Como $A - K_{12} \leq 0$, temos então $K_{12} \geq 3K_{14} + K_{13}$.

Por outro lado, sabemos que $K(aX_1 + bX_4, J(aX_1 + bX_4)) \leq K_{12}$ quaisquer números reais a e b. Realizando cálculos análogos aos anteriores, concluímos que

$$K_{12} \geq 3K_{13} + K_{14}$$

e

$$R_{1213} = R_{4243} = 0.$$

Finalmente, somando as últimas desigualdades obtidas, temos

$$2K_{12} \geq 4K_{13} + 4K_{14},$$

ou seja,

$$K_{12} \geq 2(K_{13} + K_{14}),$$

e o lema fica demonstrado. Agora, podemos provar o seguinte resultado que classifica as variedades em estudo.

Teorema B. *Seja M uma variedade de Einstein de dimensão 4, compacta e simplesmente conexa. Se M é também uma variedade Kähleriana e tem curvatura seccional não negativa então M é isométrica a um produto de duas esferas $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ ou ao espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^2$.*

Prova:

Seja $F : M \to \mathbb{R}$ a função dada em (3.1). Novamente usaremos o seguinte fato provado por Berger [Bg61]: Para um referencial ortonormal que satisfaz $R_{ikjk} = 0$ se $i \neq j$, fazendo $a = K_{12}$, $b = K_{13}$, $c = K_{14}$, $\alpha = R_{1234}$, $\beta = R_{1342}$ e $\gamma = R_{1423}$, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{F}{8} &= a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + \alpha^2(b+c-2a) + \beta^2(c+a-2b) \\ &+ \gamma^2(a+b-2c) - 6a\beta\gamma - 6b\gamma\alpha - 6c\alpha\beta. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Além disso, para o referencial cuja existência é assegurada pelo Lema (4.0.2), temos $b = K_{13} = -\beta$, $c = K_{14} = -\gamma$ e $\alpha = R_{1234} = b + c$, substituindo essas igualdades em (4.6), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{F}{8} &= a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + (b+c)^2(b+c-2a) + b^2(c+a-2b) \\ &+ c^2(a+b-2c) - 6abc - 6b(-c)(b+c) - 6c(b+c)(-b) \\ &= a(b^2-2bc+c^2) + b(c^2-2ac+a^2) + c(a^2-2ab+b^2) + (b+c)^2(b+c-2a) \\ &+ b^2(c+a-2b) + c^2(a+b-2c) - 6abc + 12bc(b+c) \\ &= ab^2 - 2abc + ac^2 + bc^2 - 2abc + a^2b + a^2c - 2abc + b^2c + (b+c)^2(b+c-2a) \\ &+ b^2a + b^2c - 2b^3 + ac^2 + bc^2 - 2c^3 - 6abc + 12bc(b+c) \\ &= 2ab^2 - 12abc + 2ac^2 + 2bc^2 + a^2(b+c) + 2b^2c + (b+c)^2(b+c-2a) \\ &+ -2b^3 - 2c^3 + 12bc(b+c). \end{aligned}$$

Como $K(p) \geq 0$ para todo $p \in M$, temos $b \geq 0$ e $c \geq 0$. Se $b = c = 0$, temos $F(p) = 0$. Assim, daqui em diante, podemos supor que $b + c > 0$ e escrever

$$\frac{F}{8} = (b+c)(a - \frac{8bc}{b+c})^2 - \frac{64b^2c^2}{b+c} + (b+c)(18bc - b^2 - c^2).$$

Do Lema (4.0.2), temos $a \geq 2(b+c)$, assim

$$a - \frac{8bc}{b+c} \geq 2(b+c) - \frac{8bc}{b+c} = \frac{2(b+c)^2 - 8bc}{b+c} = \frac{2(b-c)^2}{b+c} \geq 0.$$

Daí temos,

$$\frac{F}{8} \geq (b+c)(\frac{2(b-c)^2}{b+c})^2 - \frac{64b^2c^2}{b+c} + (b+c)(18bc - b^2 - c^2),$$

ou seja,

$$\frac{F}{8} \geq \frac{4(b-c)^4}{b+c} + \frac{(b+c)^2(18bc - b^2 - c^2) - 64b^2c^2}{b+c} = \frac{3b^4 - 6b^2c^2 + 3c^4}{b+c} = \frac{3(b^2-c^2)^2}{b+c} \geq 0.$$

Pela fórmula de Lichnerowich, obtemos $\nabla R \equiv 0$ e portanto M é localmente simétrico. Pelo Teorema de Jensen ([Js69]), $M = \mathbb{S}^4$, ou $M = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ ou $M = \mathbb{CP}^2$. Mas $\mathbb{S}^4$ não admite métrica Kähleriana, portanto $M = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ ou $M = \mathbb{CP}^2$. $\blacksquare$

Capítulo 5

Variedade de Einstein 4-dimensional com operador de curvatura não negativo

Neste capítulo, provaremos o Teorema C. Para isso seja M^4 uma variedade de Einstein orientada com curvatura de Ricci ρ. Seja R o operador de curvatura de M em $x \in M$. De acordo com o Teorema 2.2.4 os autovalores de R são $\lambda_i \pm \mu_i$, onde $\lambda_i \pm \mu_i - \frac{\rho}{3}$ são autovalores das partes auto-dual W^+ e anti-auto-dual W^- do tensor de Weyl W de M. Além disso, $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = \rho$ e $\sum_{i=1}^{3} \mu_i = 0$.

Note que se o operador R é não negativo então $\lambda_i \pm \mu_i \geq 0$, $\forall i = 1, 2, 3$.

Precisamos do seguinte Lema:

Lema 5.0.3. *O valor máximo da função $f(x, y, z) = xyz$ sujeita as condições $x+y+z = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ é $\frac{1}{\sqrt{54}}$.*

Prova:

Seja $g(x, y, z) = x + y + z$ e $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, temos:

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \zeta \operatorname{grad} g(x, y, z) + \eta \operatorname{grad}(hx, y, z),$$

daí temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} yz &= \zeta + 2\eta x \\ xz &= \zeta + 2\eta y \\ xy &= \zeta + 2\eta z \end{cases} \tag{5.1}$$

$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \end{cases} \tag{5.2}$$

Multiplicando as três equações em (5.1) por x, y e z, respectivamente, e somando-as membro a membro, obtemos

$$3xyz = \zeta(x + y + z) + 2\eta(x^2 + y^2 + z^2) \tag{5.3}$$

Substituindo (5.2) em (5.3), obtemos $3xyz = 2\eta$, isto é, $\eta = \dfrac{3xyz}{2}$. Substituindo o valor de η em (5.1), temos

$$yz = \zeta + 3x^2yz \tag{5.4}$$

$$xz = \zeta + 3xy^2z \tag{5.5}$$

$$xy = \zeta + 3xyz^2 \tag{5.6}$$

Subtraindo (5.4) de (5.5) tem-se

$$yz - xz - 3x^2yz + 3xy^2z = 0,$$

ou seja,

$$(y - x)(3xyz + z) = 0,$$

o que implica

$$y - x = 0$$

ou

$$3xyz + z = 0.$$

Analisemos cada caso acima:

Se $y - x = 0$ temos $y = x$. Como $x + y + z = 0$ temos $z = -2x$, substituindo estas igualdades em $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, temos $x^2 + x^2 + (-2x)^2 = 1$, daí $6x^2 = 1$, o que implica $x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}$,logo $x = y = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. Se $x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}$, então $z = \mp\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ e $f(x, y, z) = \mp\dfrac{\sqrt{6}}{18}$.

Se $3xyz + xz = 0$ temos $z(3xy + 1) = 0$, o que implica $z = 0$ ou $3xy + 1 = 0$. Se $z = 0$ temos $f(x, y, z) = 0$ e sabemos que este valor não é máximo, pois no caso (1) já encontramos um valor positivo para f. Para o caso $3xy + 1 = 0$ realizando-se os cálculos necessários percebe-se que a função $f(x, y, z)$ não possui pontos críticos. Sendo assim, temos que o valor máximo de $f(x, y, z)$ é $\dfrac{\sqrt{6}}{18} = \dfrac{1}{\sqrt{54}}$, como queríamos. ∎

Teorema C. *Seja M uma variedade de Einstein de dimensão 4, compacta e simplesmente conexa. Se M tem operador de curvatura não negativo então M é isométrica a uma esfera $\mathbb{S}^4$, ou a um produto de duas esferas $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ ou ao espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^2$.*

Prova:

Sejam $x \in M$ e $W^+(x)$ e $W^-(x)$ as partes anti-dual e e anti-auto-dual do tensor de Weyl $W(x)$, respectivamente. Então,

$$| W^{\pm} |^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2,$$

onde $\alpha_i = \lambda_i \pm \mu_i - \dfrac{\rho}{3}$, são autovalores de $W^{\pm}$, respectivamente, $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$ e $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 0$. Como $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, então $\alpha_2 + \alpha_3 = -\alpha_1$ e daí temos $\alpha_1^2 = (\alpha_2 + \alpha_3)^2 = \alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3^2$ e assim $\alpha_1^2 - 2\alpha_2\alpha_3 = \alpha_3^2 + \alpha_3^2$, e desta forma temos

$$| W^{\pm} |^2 = 2\alpha_1^2 - 2\alpha_2\alpha_3.$$

Como, $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$ devemos ter $\alpha_1 \leq 0$ e $\alpha_3 \geq 0$. Se $\alpha_2 \leq 0$, então $\alpha_2\alpha_3 \leq 0$ e assim $-2\alpha_2\alpha_3 \geq 0$ e teremos

$$| W^{\pm} |^2 = 2\alpha_1^2 - 2\alpha_2\alpha_3 \leq 2\alpha_1^2 \leq 6\alpha_1^2.$$

Como $\alpha_1 \leq \alpha_2$ então $-2\alpha_2\alpha_3 \leq -2\alpha_1\alpha_3$.

Por outro lado, $\alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2 \leq -2\alpha_1$, daí temos $-2\alpha_2\alpha_3 \leq 4\alpha_1^2$, e portanto temos $| W^{\pm} |^2 = 2\alpha_1^2 - 2\alpha_2\alpha_3 \leq 6\alpha_1^2$.

Assim em todos os casos temos $| W^{\pm} |^2 \leq 6\alpha_1^2$ e como M tem operador de curvatura não negativo então,

$$0 \geq \alpha_1 = \lambda_1 \pm \mu_1 - \frac{\rho}{3} \geq -\frac{\rho}{3}$$

e daí, $\alpha_1^2 \leq \dfrac{\rho^2}{9}$. Assuma que $\rho = 1$. Então $| W^{\pm} |^2 \leq \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$. Isto significa que se M tem operador de curvatura não negativo então $| W^{+} |^2 \leq \dfrac{2}{3}$ em M. Usaremos agora a fórmula de Weitzenbock

$$\Delta | W^{\pm} |^2 = -4\rho | W^{\pm} |^2 + 36 \det W^{\pm} - 2 | \nabla W^{\pm} |^2 . \tag{5.7}$$

Como $\rho = 1$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_M | \nabla W^{\pm} |^2 \, dV &= -\int_M \frac{\Delta | W^{\pm} |^2}{4} dV + \int_M [- | W^{\pm} |^2 + 9 \det W^{\pm}] dV \\ &= \int_M [- | W^{\pm} |^2 + 9 \det W^{\pm}] dV. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Considere $| W^{\pm} | \neq 0$ e sejam $x = \frac{\alpha_1}{| W^{\pm} |}$, $y = \frac{\alpha_2}{| W^{\pm} |}$ e $z = \frac{\alpha_3}{| W^{\pm} |}$. Temos que $x + y + z = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Pelo Lema (5.0.4) temos que $xyz \leq \frac{1}{\sqrt{54}}$, ou seja,

$$\frac{\alpha_1}{| W^{\pm} |} \cdot \frac{\alpha_2}{| W^{\pm} |} \cdot \frac{\alpha_3}{| W^{\pm} |} \leq \frac{1}{\sqrt{54}}$$

e daí

$$\det W^{\pm} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \leq \frac{| W^{\pm} |^3}{\sqrt{54}}$$

em M. Como $| W^{\pm} |^2 \leq \frac{2}{3}$, decorre de (5.8) que

$$0 \leq \frac{1}{2} \int_M | \nabla W^{\pm} |^2 \, dV \leq \int_M | W^{\pm} |^2 \{-1 + \frac{9 | W^{\pm} |}{\sqrt{54}}\} \leq 0.$$

Daí, concluímos que

$$\int_M | W^{\pm} |^2 \{-1 + \frac{9 | W^{\pm} |}{\sqrt{54}}\} = 0.$$

Portanto, $\int_M | \nabla W^{\pm} |^2 \, dV = 0$ e daí $\nabla W^{\pm} \equiv 0$. Mas, o tensor de curvatura de uma variedade de Einstein admite a decomposição $R = W \oplus \frac{\rho}{3} I_{\Lambda^2} = W^+ \oplus W^- + \frac{\rho}{3} I_{\Lambda^2}$, onde ρ é a curvatura de Ricci de M. Assim,

$$\nabla R = \nabla W^+ + \nabla W^- \equiv 0,$$

e isto prova que M^4 é um espaço localmente simétrico. Como M é simplesmente conexo, segue do teorema de Jensen que M é isométrica a uma esfera $\mathbb{S}^4$, ou a um produto de duas esferas $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ ao espaço complexo projetivo $\mathbb{CP}^2$. ■

Capítulo 6

Apêndice

Sejam $i, j, k, h, l, m = 1, 2, 3, 4$, vamos desenvolver a função

$$F(p) = \sum_{i,j,k,h,l,m} (-R_{ikjk}R_{ihlm}R_{jhlm} + \frac{1}{2}R_{ijkh}R_{khlm}R_{lmij} + 2R_{ikjh}R_{iljm}R_{klhm}),$$

que aparece na fórmula de Lichnerowicz. Para isto, precisamos dos Lemas 2.1.1 e 2.1.2. Usaremos a notação $K_{12} = K_{34} = a$, $K_{13} = K_{24} = b$, $K_{14} = K_{23} = c$ e ainda $R_{1234} = \alpha$, $R_{1342} = \beta$ e $R_{1423} = \gamma$, logo, pela pela primeira identidade de Bianchi temos $\alpha+\beta+\gamma = 0$. Lembremos ainda que, devido à simetria da curvatura, são válidas as igualdades

$$K_{ij} = K_{ji},\ R_{1234} = R_{3412} = R_{4321} = R_{2143},$$
$$R_{1342} = R_{4213} = R_{2431} = R_{3143}\, e\, R_{1423} = R_{2314} = R_{3241} = R_{4132}.$$

Note que podemos escrever

$$\begin{aligned} F(p) &= \sum_{i=k\neq j}(-R_{ikjk}R_{ihlm}R_{jhlm} + \frac{1}{2}R_{ijkh}R_{khlm}R_{lmij} + 2R_{ikjh}R_{iljm}R_{klhm}) \\ &+ \sum_{i\neq k}(-R_{ikjk}R_{ihlm}R_{jhlm} + \frac{1}{2}R_{ijkh}R_{khlm}R_{lmij} + 2R_{ikjh}R_{iljm}R_{klhm}) \end{aligned}$$

Se $i = k$ temos $-R_{ikjk}R_{ihlm}R_{jhlm} = 0$ e $2R_{ikjh}R_{iljm}R_{klhm} = 0$, sendo assim a expressão acima se resume a

$$\begin{aligned} F(p) &= \underbrace{\sum_{i=k\neq j} \frac{1}{2}R_{ijkh}R_{khlm}R_{lmij}}_{(I)} + \underbrace{\sum_{i\neq k}(-R_{ikjk}R_{ihlm}R_{jhlm})}_{(II)} \\ &+ \underbrace{\sum_{i\neq k} \frac{1}{2}R_{ijkh}R_{khlm}R_{lmij}}_{(III)} + \underbrace{\sum_{i\neq k} R_{ikjh}R_{iljm}R_{klhm}}_{(IV)} \end{aligned}$$

Vamos calcular separadamente cada parcela acima:

Cálculo de $(\boldsymbol{I}) = \dfrac{1}{2} \sum_{i=k\neq j} \boldsymbol{R_{ijkh} R_{khlm} R_{lmij}}$:

Para que esta parcela seja não nula, devemos ter $k \neq h$, $i \neq h$ e $l \neq m$ e daí temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{i=k\neq j} R_{ijkh} R_{khlm} R_{lmij} &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i\neq j, i\neq h\\ l\neq m}} R_{ijih} R_{ihlm} R_{lmij} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=h, i\neq j\\ i\neq h, l\neq m}} R_{ijih} R_{ihlm} R_{lmij} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j\neq h, i\neq j\\ i\neq h, l\neq m}} R_{ijih} R_{ihlm} R_{lmij}
\end{aligned}$$

Note que, se $j \neq h$, então $R_{ijih} = 0$, para a base ortonormal cuja existência é garantida pelo lema 2.1.2. Assim, a segunda parcela da expressão acima se anula e temos

$$\begin{aligned}
(I) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=h, i\neq j\\ i\neq h, l\neq m}} R_{ijih} R_{ihlm} R_{lmij} &= \frac{1}{2} \sum_{i\neq j, l\neq m} R_{ijij} R_{ijlm} R_{lmij} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i\neq j, l\neq m} K_{ij} (R_{ijlm})^2 \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i\neq j} (K_{ij})^3 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j,l,m\\ \text{2 a 2 distintos}}} K_{ij} (R_{ijlm})^2 \\
&= -4a^3 - 4b^3 - 4c^3 - 4a\alpha^2 - 4b\beta^2 - 4c\gamma^2
\end{aligned}$$

Cálculo de $(\boldsymbol{II}) = \sum_{i\neq k} (-\boldsymbol{R_{ikjk} R_{ihlm} R_{jhlm}})$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i\neq k} (-R_{ikjk} R_{ihlm} R_{jhlm}) &= -\sum_{i=j\neq k} R_{ikjk} R_{ihlm} R_{jhlm} - \sum_{i\neq j, i\neq k} R_{ikjk} R_{ihlm} R_{jhlm} \\
&= -\sum_{i\neq k, i\neq h, l\neq m} R_{ikik} R_{ihlm} R_{ihlm} + 0 \quad \text{(pelo lema 2.1.2)} \\
&= -\sum_{i\neq k, i\neq h, l\neq m} (-K_{ik}) (R_{ihlm})^2 \\
&= \sum_{\substack{k=h, i\neq k\\ i\neq h, l\neq m}} K_{ik} (R_{ihlm})^2 + \sum_{\substack{k\neq h, i\neq k\\ i\neq h, l\neq m}} K_{ik} (R_{ihlm})^2 \\
&= \sum_{i\neq h, l\neq m} K_{ih} (R_{ihlm})^2 + \sum_{\substack{k\neq h, i\neq k\\ i\neq h, l\neq m}} K_{ik} (R_{ihlm})^2 \\
&= 2 \sum_{i\neq h} (K_{ih})^3 + \sum_{\substack{i,h,l,m\\ \text{2 a 2 distintos}}} K_{ih} (R_{ihlm})^2 + \sum_{\substack{k\neq h, i\neq k\\ i\neq h, l\neq m}} K_{ik} (R_{ihlm})^2.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\sum_{\substack{k\neq h, i\neq k\\ i\neq h, l\neq m}} K_{ik}(R_{ihlm})^2 = 2\sum_{k\neq h, i\neq k, i\neq h} K_{ik}(K_{ih})^2 + \sum_{\substack{k\neq h, i\neq k\\ i,h,l,m\\ \text{2 a 2 distintos}}} K_{ik}(R_{ihlm})^2.$$

Assim, temos

$$\text{(II)} \;=\; 2\sum_{i\neq h}(K_{ih})^3 + \sum_{\substack{i,h,l,m\\ \text{2 a 2 distintos}}} K_{ih}(R_{ihlm})^2 + 2\sum_{k\neq h, i\neq k, i\neq h} K_{ik}(K_{ih})^2 + \sum_{\substack{k\neq h, i\neq k\\ i,h,l,m\\ \text{2 a 2 distintos}}} K_{ik}(R_{ihlm})^2.$$

Note que:

$$\begin{aligned}
2\sum_{i\neq h}(K_{ih})^3 &= 2.(4a^3+4b^3+4c^3) = 8(a^3+b^3+c^3),\\
\sum_{i\neq h\neq l\neq m} K_{ih}(R_{ihlm})^2 &= 8a\alpha^2 + 8b\beta^2 + 8c\gamma^2,\\
2\sum_{k\neq h, i\neq k, i\neq h} K_{ik}(K_{ih})^2 &= 8a(b^2+c^2) + 8b(a^2+c^2) + 8c(a^2+b^2),\\
\sum_{\substack{k\neq h, i\neq k\\ i,h,l,m\\ \text{2 a 2 distintos}}} K_{ik}(R_{ihlm})^2 &= 8a(\beta^2+\gamma^2) + 8b(\alpha^2+\gamma^2) + 8c(\alpha^2+\beta^2).
\end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{i\neq k}(-R_{ikjk}R_{ihlm}R_{jhlm}) &= 8(a^3+b^3+c^3) + 8a\alpha^2 + 8b\beta^2 + 8c\gamma^2 + 8a(b^2+c^2) + 8b(a^2+c^2)\\
&+ 8c(a^2+b^2) + 8a(\beta^2+\gamma^2) + 8b(\alpha^2+\gamma^2) + 8c(\alpha^2+\beta^2).
\end{aligned}$$

Cálculo de $\boldsymbol{(III) = \frac{1}{2}\sum_{i\neq k} R_{ijkh}R_{khlm}R_{lmij}}$

Inicialmente, note que, como $i\neq k$, para que essa parcela não seja nula (pelo Lema 2.1.2), é necessário que $j\neq h$, e além disso precisamos ter $i\neq j$, $k\neq h$, $l\neq m$. Vamos separar (III) em duas parcelas, uma com $j=k$ (e pelo Lema 2.1.2 devemos ter $i=h$) e $j\neq k$ (e pelo 2.1.2 devemos ter $i\neq h$). Assim,

$$\begin{aligned}
\text{(III)} &= \frac{1}{2}\sum_{i\neq j, l\neq m} R_{ijji}R_{jilm}R_{lmij} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{l\neq m\\ i,j,k,h\\ \text{2 a 2 distintos}}} R_{ijkh}R_{khlm}R_{lmij}\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j, l\neq m} K_{ij}R_{khlm}R_{lmij} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{l\neq m\\ i,j,k,h\\ \text{2 a 2 distintos}}} R_{ijkh}R_{khlm}R_{lmij}.
\end{aligned}$$

Mas

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j,l\neq m} K_{ij}R_{khlm}R_{lmij} &= -\sum_{i\neq j}(K_{ij})^3 - \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j,l,m \\ \text{2 a 2 distintos}}} K_{ij}R_{ijlm} \\
&= -4(a^3+b^3+c^3) - \frac{1}{2}(8a\alpha^2+8b\beta^2+8c\gamma^2) \\
&= -4(a^3+b^3+c^3) - 4(a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2),
\end{aligned}
$$

e além disso, temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{\substack{l\neq m \\ i,j,k,h \\ \text{2 a 2 distintos}}} R_{ijkh}R_{khlm}R_{lmij} = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\substack{k=m,h=l,l\neq m \\ i,j,k,h \\ \text{2 a 2 distintos}}} R_{ijkh}R_{khlm}R_{lmij} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k\neq m,h\neq l,l\neq m \\ i,j,k,h \\ \text{2 a 2 distintos}}} R_{ijkh}R_{khlm}R_{lmij} \\
&= -\sum_{\substack{i,j,l,m \\ \text{2 a 2 distintos}}} K_{lm}(R_{ijlm})^2 + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j,k,h,l,m \\ \text{2 a 2 distintos}}} R_{ijkh}R_{khlm}R_{lmij} \\
&= -2\sum_{\substack{i,j,k,h, \\ \text{2 a 2 distintos}}} K_{ij}(R_{ijkh})^2 \\
&= -2(4a.2\alpha^2+4b.2\beta^2+4c.2\gamma^2) = -16a\alpha^2-16b\beta^2-16c\gamma^2
\end{aligned}
$$

Em resumo,

$$
\text{III} = -4(a^3+b^3+c^3) - 20a\alpha^2 - 20b\beta^2 - 20c.\gamma^2.
$$

Cálculo de $(IV) = 2\sum_{i\neq k} R_{ikjh}R_{iljm}R_{klhm}$

Para que a expressão acima seja não nula precisamos ter $i\neq l$, $k\neq l$, $h\neq m$, $j\neq h$, $j\neq m$. Vamos separar o somatório acima em duas parcelas, uma com $i=j$ e outra com $i\neq j$. Pelo Lema 2.1.2 na primeira parcela devemos ter $h=k$ e $l=m$ e na segunda devemos ter $h\neq k$ e $l\neq m$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\text{IV} &= -2\sum_{\substack{i\neq k,k\neq m\\ m\neq i}}(K_{ik})(K_{im})(K_{km}) + 2\sum_{\substack{i,j,l,m\\ \text{2 a 2 distintos}}} K_{ij}R_{iljm}R_{imjl}\\
&+ 2\sum_{\substack{i\neq k,k\neq l,l\neq i,j\neq h\\ h\neq m,m\neq j,j\neq k,i\neq h\\ i\neq j,k\neq h,l\neq m}} R_{ikjh}R_{iljm}R_{khlm}\\
&= -2\sum_{\substack{i\neq k,k\neq m\\ m\neq i}}(K_{ik})(K_{im})(K_{km}) + 2\sum_{\substack{i,j,l,m\\ \text{2 a 2 distintos}}} K_{ij}R_{iljm}R_{imjl}\\
&+ 2\sum_{\substack{i,k,j,h\\ \text{2 a 2 distintos}}} K_{ij}R_{ikjh}R_{ihjk} + 2\sum_{\substack{i,k,j,h \text{ 2 a 2 distintos}\\ i,j,l,m \text{ 2 a 2 distintos}\\ k\neq l,h\neq m}} R_{ikjh}R_{iljm}R_{klhm}.
\end{aligned}
$$

Fazendo $k = l$ e $h = m$ na terceira parcela da expressão acima e somando com a segunda parcela teremos

$$
\begin{aligned}
(\text{IV}) &= -2\sum_{\substack{i\neq k,k\neq m\\ m\neq i}}(K_{ik})(K_{im})(K_{km}) + 4\sum_{\substack{i,j,l,m\\ \text{2 a 2 distintos}}} K_{ij}R_{iljm}R_{imjl}\\
&+ 2\sum_{\substack{i,k,j,h \text{ 2 a 2 distintos}\\ i,j,l,m \text{ 2 a 2 distintos}\\ k\neq l,h\neq m}} R_{ikjh}R_{iljm}R_{klhm}.
\end{aligned}
$$

Mas, note que

$$
-2\sum_{\substack{i\neq k,k\neq m,\\ m\neq i}}(K_{ik})(K_{im})(K_{km}) = -2(4a.2bc + 4b.2ac + 4c.2a) = -48abc,
$$

$$
\begin{aligned}
4\sum_{\substack{i,j,l,m\\ \text{2 a 2 distintos}}} K_{ij}R_{iljm}R_{imjl} &= 4[4a.(-2\beta\gamma) + 4b(-2\alpha\gamma) + 4c(-2\alpha\beta)]\\
&= -32a\beta\gamma) - 32\alpha\gamma - 32\alpha\beta,
\end{aligned}
$$

e ainda,

$$
\begin{aligned}
2\sum_{\substack{i,k,j,h \text{ 2 a 2 distintos}\\ i,j,l,m \text{ 2 a 2 distintos}\\ k\neq l,h\neq m}} R_{ikjh}R_{iljm}R_{klhm} &= 2(-4\alpha\gamma b - 4\alpha\beta c - 4\beta\gamma a\\
&- 4\beta\alpha c - 4\gamma\beta a - 4\gamma\alpha b)\\
&= -16a\beta\gamma - 16b\alpha\gamma - 16c\alpha\beta.
\end{aligned}
$$

Em resumo,

$$
(\text{IV}) = -48abc - 48a\beta\gamma - 48b\alpha\gamma - 48c\alpha\beta.
$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} F(p) &= -4(a^3+b^3+c^3) - 4(a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2) + 8(a^3+b^3+c^3) + \\ &+ 8(a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2) + 8a(b^2+c^2) + 8b(a^2+c^2) + 8c(a^2+b^2) + \\ &+ 8a(\beta^2+\gamma^2) + 8b(\alpha^2+\gamma^2) + 8c(\alpha^2+\beta^2) - 4(a^3+b^3+c^3) - \\ &- 20(a\alpha^2+b\beta^2+c.\gamma^2) - 48abc - 48a\beta\gamma - 48b\alpha\gamma - 48c\alpha\beta. \end{aligned}$$

E simplificando os cálculos acima, obtemos,

$$\begin{aligned} F(p) &= -16a\alpha^2 - 16b\beta^2 - 16c\gamma^2 + 8a(b-c)^2 + 8b(c-a)^2 + 8c(a-b)^2 + 8\gamma^2(a+b) \\ &+ 8\beta^2(a+c) + 8\alpha^2(b+c) - 48abc - 48a\beta\gamma - 48b\alpha\gamma - 48c\alpha\beta \\ &= 8a(b-c)^2 + 8b(c-a)^2 + 8c(a-b)^2 + 8\alpha^2(b+c-2a) \\ &+ 8\beta^2(a+c-2b) + 8\gamma^2(a+b-2c) - 48a\beta\gamma - 48b\alpha\gamma - 48c\alpha\beta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{F}{8} &= a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + \alpha^2(b+c-2a) \\ &+ \beta^2(a+c-2b) + \gamma^2(a+b-c) - 6a\beta\gamma - 6b\alpha\gamma - 6c\alpha\beta. \end{aligned}$$

■

Referências

[Bg61] BERGER, Marcel. Sur quelques variétés d'Einstein compactes. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, v. **53**, no. 1, p. 89 - 95, 1961.

[Bg63] BERGER, Marcel. Les variétés Kählériennes compactes d'Einstein de dimension quatre à courbure positive. *Tensor (N.S.)*, v. **13**, no. 1, p. 71 - 74, 1963.

[Bs87] BESSE, Arthur L. *Einstein Manifolds*. New York: Springer, 1987.

[dC08] DO CARMO, Manfredo P. *Geometria Riemanniana*. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. (Projeto Euclides)

[Js69] JENSEN, G. Homogeneous Einstein spaces of dimensional four. *Journal Differential Geometry*, v. **3**, p. 309 - 349, 1969.

[ST69] SINGER, Isadore M.; THORPE, John A. The curvature of 4-dimensional Einstein spaces. *Global Analysis*, v. **9**, p. 355 - 365, 1969.

[Tb74] TACHIBANA, Schum-ichi. A Theorem on Riemannian manifolds of positive curvature operator. *Proc. Japan Acad.*, v. **50**, no. 4, p. 301 - 302, 1974.

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

---

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170 -110
<http://www.pgmat.ufba.br>