Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Dissertação de Mestrado

Hipersuperfícies Mínimas Completas Estáveis Harmônicas em uma Variedade Riemanniana

Caio Eduardo Pinheiro Costa

Salvador-Bahia

Maio de 2011

Hipersuperfícies Mínimas Completas Estáveis Harmônicas em uma Variedade Riemanniana

Caio Eduardo Pinheiro Costa

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Nelson Bastos Barbosa.

Salvador-Bahia

Maio de 2011

Costa, Caio Eduardo Pinheiro.

Hipersuperfícies Mínimas Completas Estáveis Harmônicas em uma Variedade Riemanniana / Caio Eduardo Pinheiro Costa. – Salvador: UFBA, 2011.

51 f.

Orientador: Prof. Dr. José Nelson Bastos Barbosa.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2011.

Referências bibliográficas.

1. Estabilidade Harmônica. 2. Hipersuperfícies Mínimas. 3. Curvatura de Ricci. I. Barbosa, José Nelson Bastos. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Hipersuperfícies Mínimas Completas Estáveis Harmônicas em uma Variedade Riemanniana .

CDU : 514.764.2

Hipersuperfícies Mínimas Completas Estáveis Harmônicas em uma Variedade Riemanniana

Caio Eduardo Pinheiro Costa

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 27 de maio de 2011.

Banca examinadora:

Prof. Dr. José Nelson Bastos Barbosa (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Pedro Antonio Hinojosa Vera
UFPB

Prof. Dra. Ana Lucia Pinheiro Lima
UFBA

À minha mãe Mônica e minha avó Enalva.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me dado saúde e determinação necessários para a superação das dificuldades encontradas ao longo desse caminho.

Aos meus pais, Mônica e Eduardo, e meus avós, Enalva e Ney, por colaborarem com meu crescimento e entenderem, por diversas vezes, a minha ausência. Não há palavras que expressem minha sincera gratidão e admiração por minha mãe e minha avó. Com muito esforço, vocês sempre me deram muito mais do que eu precisei e o melhor que possa existir: o amor incondicional. Vocês duas são os meus maiores exemplos de vida, e sem vocês nada disso valeria a pena.
Agradeço também a Gilberto, alguém que já faz parte da família e tornou-se muito amigo e prestativo, em muitas ocasiões.

As amigas Ana Paula, Ariane e Teresa, que estiveram muito presentes nestes dois anos, agradeço por muitas e muitas palavras sinceras, momentos de felicidade e cumplicidade. A Antônio Marcos, que foi uma pessoa indispensável para a realização deste trabalho, me dando força, incentivo e ajuda em alguns momentos de fraqueza; muito obrigado, de verdade, pela compreensão e pela amizade verdadeira.

Ao meu orientador, Prof. José Nelson, pela sua orientação, confiança e ensinamentos. Sou muito grato por sua paciência, descontração e contribuição na minha formação.

Ao professor Pedro Hinojosa pelas sugestões, correções, bem como por concordar em participar da banca.

Agradeço aos colegas de mestrado, em muito especial aos meus amigos Francisleide, Kátia e Renivaldo; foram muitas e muitas horas de aprendizado, tanto matemático quanto de vida. Vocês três fizeram com que estes dois anos difícies tornassem menos dolorosos, com muitas risadas e momentos especiais. Agradeço também a minha grande amiga Elaís pelo carinho, apoio e momentos inesquecíveis.

A todos os professores da Universidade Federal da Bahia que de alguma forma contribuíram para a minha formação, através do valioso conhecimento que me forneceram. Em especial, ao professor Enaldo Vergasta e a professora Ana Lucia, pessoas que admiro muito e sempre mostraram-se presentes, proporcionando-me apoio, força e conhecimento; agradeço também a professora Ana Lucia por concordar em participar da banca.

Aos funcionários do IM, em especial a D. Tânia pela boa-vontade, incentivo e pelos esclarecimentos sobre procedimentos acadêmicos e a D. Zezé por sua constante atenção.

Agradeço também a todos que de alguma maneira contribuíram para que esse momento se concretizasse.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro durante os anos de curso.

"Tenha fé em Deus, tenha fé
na vida. Tente outra vez !".

(Raul Seixas)

Resumo

Nesta dissertação, versaremos sobre estabilidade harmônica de hipersuperfícies mínimas em uma variedade Riemmaniana. O resultado principal mostra que uma superfície mínima completa estável harmônica em uma variedade Riemanniana de curvatura de Ricci não negativa é conformemente equivalente ao plano $\mathbb{R}^2$ ou ao cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. O trabalho é baseado no artigo dos autores Qing-Ming Cheng and Young Jin Suh, intitulado "Complete Harmonic Stable Minimal Hypersurfaces in a Riemannian Manifold".

Palavras-chave: Estabilidade Harmônica; Hipersuperfícies Mínimas; Curvatura de Ricci.

Abstract

In this dissertation, we deal with some results concernig harmonic stability for complete minimal hypersurfaces in a complete Riemannian manifold. The main result shows that a complete stable minimal surface in a Riemannian manifold of nonnegative Ricci curvature is conformally equivalent to either a plane $\mathbb{R}^2$ or a cylinder $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. The work is based on the paper of the authors Qing-Ming Cheng and Young Jin Suh, entitled "Complete Harmonic Stable Minimal Hypersurfaces in a Riemannian Manifold".

Keywords: Harmonic Stability; Minimal Hypersurfaces; Ricci curvature.

Sumário

Introdução

A investigação de hipersuperfícies mínimas completas imersas em uma variedade Riemanniana floresceu no século passado e, desde então, uma boa compreensão de sua geometria local e estruturas topológicas foi obtida. O teorema clássico de Bernstein afirma que um gráfico mínimo completo no espaço Euclideano $\mathbb{R}^3$ tem que ser um plano. Como generalização, Almgren [2], De Giorgi [7], Fleming [12] e Simons [16] provaram que um gráfico mínimo completo $n-$dimensional no espaço Euclideano $\mathbb{R}^{n+1}$, com $n \leq 7$, tem que ser um hiperplano. Mas, para $n \geq 8$, Bombieri, De Giorgi e Guisti [3] encontraram gráficos inteiros mínimos em $\mathbb{R}^{n+1}$ não lineares. Como gráficos mínimos tem a propriedade de minimizar área, resultado este provado por do Carmo, é natural considerar hipersuperfícies mínimas estáveis em $\mathbb{R}^{n+1}$. Em 1979, do Carmo e Peng [8], provaram que uma superfície mínima completa estável em $\mathbb{R}^3$ deve ser um plano. Simultaneamente, Fisher-Colbrie e Schoen [11] mostraram que uma superfície mínima completa estável M em uma variedade Riemanniana completa $3-$dimensional N, com curvatura escalar não-negativa, tem que ser conformemente equivalente a um plano ou conformemente equivalente ao cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Em particular, quando $N = \mathbb{R}^3$, obtiveram que M é um plano.

Por outro lado, com foco no Teorema de Bernstein generalizado, foi questionado por Yau, em [18], se é possível provar que toda hipersuperfície mínima completa estável em $\mathbb{R}^{n+1}$ ($n \leq 7$) é um hiperplano. Embora muitos trabalhos nesta direção tem sido feitos, este problema permanece em aberto. Por exemplo, Shen e Zhu [15] mostraram que uma hipersuperfície mínima completa estável em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura total finita tem que ser um hiperplano. Cheng e Wan, em [5], provaram que uma hipersuperfície mínima completa em $\mathbb{R}^4$ com curvatura escalar constante é um hiperplano.

Em [13], Jiaqiang Mei e Senlin Xu introduziram a noção de *estabilidade harmônica* e *índice harmônico* para uma hipersuperfície mínima completa em $\mathbb{R}^{n+1}$ da seguinte maneira : sendo M uma hipersuperfície mínima em $\mathbb{R}^{n+1}$, define-se uma forma bilinear por

$$I(X,Y)=\int_M\{\langle\nabla X,\nabla Y\rangle - S\langle X,Y\rangle\}dM,\ \ \forall\, X,Y\in\Gamma c(TM)\ ,$$

onde $\Gamma c(TM)$ é o conjunto de campos de vetores tangentes com suporte compacto em M, S é o quadrado da norma da segunda forma fundamental e ∇ é a conexão induzida em M. Observemos que a expressão acima é inspirada na forma bilinear associada ao operador de estabilidade, o qual atua em um espaço de funções. O *índice harmônico* de M, $h(M)$, é definido como a dimensão máxima dos espaços vetoriais nos quais I é negativa definida. Se $h(M)=0$, M é dita *estável harmônica*. Foi provado em [13] que a condição de estabilidade harmônica é mais fraca que a de estabilidade.

Esta dissertação será baseada no artigo *Complete Harmonic Stable Minimal Hypersurfaces in a Riemannian Manifold*, de Qing-Ming Cheng e Young Jin Suh [6], publicado no Monatsh Math, em 2008, no qual é introduzido o conceito de estabilidade harmônica para uma hipersuperfície mínima em uma variedade Riemanniana completa qualquer, que generaliza o conceito apresentado em [13]. Neste contexto, o índice de M será definido como sendo o índice da forma bilinear

$$I(X,Y)=\int_M\{\langle\nabla X,\nabla Y\rangle-(\mathrm{Ric}_N(\nu,\nu)+S)\langle X,Y\rangle\}dM\ .$$

O objetivo principal deste trabalho é apresentar uma demonstração de um resultado que generaliza os teoremas provados por Do Carmo e Peng [8] e Fisher-Colbrie e Schoen [11], citados anteriormente, para uma hipersuperfície mínima completa M^2 em uma variedade Riemanniana completa N^3. Mais precisamente, o seguinte resultado.

Teorema. *Seja N^3 uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci não negativa e M^2 uma superfície mínima orientada completa estável harmônica em N^3. Então, M é conformemente equivalente ao plano $\mathbb{R}^2$ ou ao cilindro $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$.*

Embora o teorema citado refira-se a variedades bi-dimensionais, alguns dos resultados necessários para a sua demonstração serão apresentados num contexto mais geral para variedades Riemannianas de dimensão qualquer.

Este trabalho consta de quatro capítulos. O primeiro capítulo é dedicado a conceitos e resultados básicos de Geometria Riemanniana, que estão relacionados com o trabalho proposto, e a alguns resultados relevantes que serão utilizados no seu decorrer.

No segundo capítulo, exibiremos as fórmulas da primeira e da segunda variação para uma imersão entre variedades Riemannianas, as quais representam, respectivamente, a primeira e a segunda derivada da função área associada a uma variação, e o conceito de estabilidade.

No terceiro capítulo, introduziremos o conceito de estabilidade harmônica. Será visto que a condição de estabilidade harmônica é mais fraca que a de estabilidade, isto é, que toda hipersuperfície mínima completa estável é estável harmônica.

Finalmente, no quarto capítulo, apresentaremos a demonstração do principal resultado desta dissertação.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns conceitos e resultados básicos, e alguns resultados relevantes que serão utilizados ao longo deste trabalho.

1.1 Gradiente, Divergência, Laplaciano

Nesta seção definiremos gradiente, divergência e laplaciano em uma variedade Riemanniana, determinando para cada um destes suas expressões em relação a um referencial ortonormal. Destacaremos alguns resultados básicos que utilizaremos no nosso trabalho.

Consideremos M uma variedade Riemanniana de dimensão n e denotemos por $\langle\ ,\ \rangle$ a sua métrica, ∇ a conexão Riemanniana relativa a esta métrica, $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe $\mathcal{C}^\infty$ em M e $\mathcal{C}^\infty(M)$ o anel das funções reais de classe $\mathcal{C}^\infty$ definidas em M . Dada uma função $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, definimos o *gradiente* de f como o único campo ∇f em M dado por

$$\langle \nabla f, X\rangle = Xf = df \cdot X\ ,\ \forall\ X \in \mathfrak{X}(M).$$

A *divergência* de um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ é a função div $X : M \to \mathbb{R}$, definida por

$$\operatorname{div} X = \operatorname{tr}(Y \to \nabla_Y X),$$

onde tr denota o traço de uma aplicação linear.

O *laplaciano* de M é definido como o operador $\Delta : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ dado por

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f),\ \forall\ f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Calcularemos, primeiramente, as expressões de ∇f, div X *e* Δf em relação a um referencial ortonormal $\{E_1, \ldots, E_n\}$ definido em um aberto de M. Observemos no entanto que as expressões do gradiente, da divergência e do laplaciano independem do referencial escolhido, pois o gradiente em cada ponto $p \in M$ é o vetor que representa o funcional linear df_p e a divergência é o traço de uma aplicação linear.

Como, por definição,

$$\langle \nabla f, E_i \rangle = E_i f, \ i = 1, \ldots, n,$$

a expressão de ∇f é

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} (E_i f) E_i. \tag{1.1}$$

Agora, como div $X = \operatorname{tr}(Y \to \nabla_Y X)$, então

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle.$$

Escrevendo $X = \sum_{j=1}^{n} X_j E_j$, segue que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle &= \langle \nabla_{E_i} (\sum_{j=1}^{n} X_j E_j), E_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X_j E_j, E_i \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle E_i(X_j) E_j + X_j \nabla_{E_i} E_j, E_i \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle E_i(X_j) E_j, E_i \rangle + \sum_{j=1}^{n} \langle X_j \nabla_{E_i} E_j, E_i \rangle \\
&= \langle E_i(X_i) E_i, E_i \rangle + \sum_{j=1}^{n} X_j \langle \nabla_{E_i} E_j, E_i \rangle \\
&= E_i(X_i) \langle E_i, E_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} X_j \langle \nabla_{E_i} E_i, E_j \rangle \\
&= E_i(X_i) - \langle \nabla_{E_i} E_i, \sum_{j=1}^{n} X_j E_j \rangle \\
&= E_i(X_i) - \langle \nabla_{E_i} E_i, X \rangle,
\end{aligned}$$

onde usamos que

$$0 = E_i \langle E_i, E_j \rangle = \langle \nabla_{E_i} E_i, E_j \rangle + \langle E_i, \nabla_{E_i} E_j \rangle$$

implica

$$\langle \nabla_{E_i} E_j, E_i \rangle = -\langle \nabla_{E_i} E_i, E_j \rangle, \ \ \forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Portanto,

$$\text{div } X = \sum_{i=1}^{n} \{E_i(X_i) - \langle \nabla_{E_i} E_i, X \rangle\}. \tag{1.2}$$

Para o laplaciano, temos

$$\Delta f = \text{div}(\nabla f) = \sum_{i=1}^{n} \{E_i(E_i f) - \langle \nabla_{E_i} E_i, \nabla f \rangle\} = \sum_{i=1}^{n} \{E_i(E_i f) - \nabla_{E_i} E_i(f)\},$$

isto é,

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \{E_i(E_i f) - \nabla_{E_i} E_i(f)\}. \tag{1.3}$$

Lema 1.1.1. *Sejam* $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, *e* $X \in \mathfrak{X}(M)$. *Então*

(a) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;

(b) $\nabla(fg) = f\,\nabla g + g\,\nabla f$;

(c) $\nabla(h \circ f) = h' \circ f \cdot \nabla f$;

(d) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$;

(e) $\frac{1}{2}\Delta(f^2) = f\Delta f + \mid \nabla f \mid^2$;

(f) $\text{div}(fX) \;=\; f\text{div}X \;+\; \langle \nabla f, X \rangle$.

Demonstração:

(a) Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ qualquer. Por definição,

$$\begin{aligned} \langle \nabla(f+g), X \rangle &= X(f+g) = Xf + Xg \\ &= \langle \nabla f, X \rangle + \langle \nabla g, X \rangle \\ &= \langle \nabla f + \nabla g, X \rangle, \end{aligned}$$

e como $X \in \mathfrak{X}(M)$ é qualquer, concluímos que

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g.$$

(b) Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ qualquer. Por definição,

$$\begin{aligned}\langle \nabla(fg), X\rangle &= X(fg) = f\, Xg + g\, Xf \\ &= f\langle \nabla g, X\rangle + g\langle \nabla f, X\rangle \\ &= \langle f\,\nabla g + g\,\nabla f, X\rangle,\end{aligned}$$

e como $X \in \mathfrak{X}(M)$ é qualquer, concluímos que

$$\nabla(fg) = f\,\nabla g + g\,\nabla f.$$

(c) Sejam $p \in M$ e $X \in T_pM$ quaisquer. Por definição,

$$\begin{aligned}\langle \nabla(h\circ f)_p, X\rangle &= d(h\circ f)_p X = h'(f(p))df_p X \\ &= h'(f(p))\langle \nabla f_p, X\rangle \\ &= \langle h'(f(p))\nabla f_p, X\rangle,\end{aligned}$$

e como $p \in M$ e $X \in T_pM$ são quaisquer, concluímos que

$$\nabla(h\circ f) = h'\circ f \cdot \nabla f.$$

(d) Seja $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial ortonormal definido em um aberto $p \in U \subset M$.

Sabendo que $\Delta f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\{E_i(E_i(f)) - \nabla_{E_i}E_i(f)\}$, $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, temos

$$\begin{aligned}\Delta(fg) &= \sum_{i=1}^{n}\{E_i(E_i(fg)) - \nabla_{E_i}E_i(fg)\} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\{E_i(fE_i(g) + gE_i(f)) - f\,\nabla_{E_i}E_i(g) - g\,\nabla_{E_i}E_i(f)\} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\{E_i(fE_i(g)) + E_i(gE_i(f)) - f\,\nabla_{E_i}E_i(g) - g\,\nabla_{E_i}E_i(f)\} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\{fE_i(E_i(g)) + E_i(g)E_i(f) + gE_i(E_i(f)) + E_i(f)E_i(g) \\ &\qquad -f\,\nabla_{E_i}E_i(g) - g\,\nabla_{E_i}E_i(f)\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(E_i(E_i(g)) - \nabla_{E_i}E_i(g)) + \sum_{i=1}^{n} g(E_i(E_i(f)) - \nabla_{E_i}E_i(f)) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} E_i(g)E_i(f) + E_i(f)E_i(g) \\ &= f\sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(g)) - \nabla_{E_i}E_i(g) + g\sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(f)) - \nabla_{E_i}E_i(f) \\ &+ 2\sum_{i=1}^{n} E_i(f)E_i(g) \\ &= f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle,\end{aligned}$$

já que

$$\begin{aligned} \langle \nabla f, \nabla g \rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} (E_i(f))E_i, \sum_{j=1}^{n} (E_j(g))E_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} E_i(f)E_j(g)\langle E_i, E_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} E_i(f)E_i(g), \end{aligned}$$

pois $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal.

(e) Tomando $g = f$ no item anterior, segue que

$$\Delta(f^2) = 2f\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla f \rangle,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\Delta(f^2) = f\Delta f + \mid \nabla f \mid^2,$$

como queríamos.

(f) Sabendo que div $X = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle$, onde $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal em M , temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(fX) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(fX), E_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle\ f\nabla_{E_i}X \ + \ E_i(f)X\ ,\ E_i\ \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} f\ \langle \nabla_{E_i}X, E_i \rangle \ + \ E_i(f)\langle X, E_i \rangle \\ &= f\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}X, E_i \rangle \ + \ \left\langle X, \sum_{i=1}^{n} E_i(f)E_i \right\rangle \\ &= f\mathrm{div}X \ + \ \langle \nabla f, X \rangle\ , \end{aligned}$$

finalizando a prova da proposição.

■

Se M é compacta e orientável com bordo ∂M , para $X \in \mathfrak{X}(M)$ tem-se que

$$\int_M (\mathrm{div}X)\, dM \ = \ \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle\, dA\ ,$$

onde dM e dA são os elementos de volume de M e do bordo ∂M, respectivamente, e ν é o campo unitário normal exterior em ∂M. Este resultado é conhecido como *Teorema da Divergência* (veja [17]).

Sejam $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Considerando o campo $X \;=\; f\ \nabla g$, temos deste teorema que

$$\int_M \operatorname{div}(f\nabla g)dM \;=\; \int_{\partial M} f\,\langle \nabla g, \nu\rangle\, dA.$$

Mas, pelo item (f) do lema anterior,

$$\int_M \operatorname{div}(f\nabla g)dM \;=\; \int_M \left(f\operatorname{div}(\nabla g) \;+\; \langle \nabla f, \nabla g\rangle\right) dM$$

e portanto

$$\int_M \left(f\Delta g \;+\; \langle \nabla f, \nabla g\rangle\right) dM \;=\; \int_{\partial M} f\,\langle \nabla g, \nu\rangle\, dA. \tag{1.4}$$

Por outro lado, considerando o campo $X \;=\; g\nabla f$, segue que

$$\int_M \left(g\Delta f \;+\; \langle \nabla g, \nabla f\rangle\right) dM \;=\; \int_{\partial M} g\,\langle \nabla f, \nu\rangle\, dA.$$

A diferença entre estas duas útimas expressões nos dá

$$\int_M \left(f\Delta g \;-\; g\Delta f\right) dM \;=\; \int_{\partial M} \left(f\,\langle \nabla g, \nu\rangle \;-\; g\,\langle \nabla f, \nu\rangle\right) dA. \tag{1.5}$$

As expressões (1.4) e (1.5) são chamadas *Fórmulas de Green* .

Introduziremos agora o conceito de variedades conformes. Seja $\varphi \,:\, M \longrightarrow N$ um difeomorfismo, onde N é uma variedade Riemanniana. Denotemos, por abuso, $\langle\ ,\ \rangle$, ∇ *e* Δ a métrica em N, a conexão Riemanniana e o laplaciano relativos a esta métrica, respectivamente. Suponhamos existir uma função $\mu \in \mathcal{C}^\infty(M)$ que satisfaça, para todo $p \in M$ e todo par de vetores v , $w \in T_pM$, $\mu(p) \neq 0$ e

$$\langle d\varphi_p \cdot v, d\varphi_p \cdot w\rangle \;=\; \mu^2(p)\langle v, w\rangle.$$

Neste caso, dizemos que φ é uma *aplicação conforme*, que M e N são *variedades conformes* e que a função μ^2 é o *coeficiente de conformalidade* de φ.
Dizemos que $\varphi : M \longrightarrow N$ é uma aplicação *localmente conforme* se, para cada $p \in M$ existir $V_p \subset M$ vizinhança de p em M tal que $\varphi\big|_{V_p} : V_p \to \varphi(V_p)$ é uma aplicação conforme. Neste caso, dizemos que M e N são *variedades localmente conformes.*

Supondo $\varphi : M \longrightarrow N$ aplicação conforme, observemos que dados $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, pondo $g \;=\; f \circ \varphi^{-1}$ temos, para $q = \varphi(p)$,

$$((d\varphi \cdot X)g)(q) \;=\; X(g \circ \varphi)(\varphi^{-1}(q)) \;=\; X(f)(\varphi^{-1}(q)) \;=\; (Xf \circ \varphi^{-1})(q)$$

isto é,

$$(d\varphi \cdot X)g \;=\; Xf \circ \varphi^{-1}. \tag{1.6}$$

O lema seguinte nos mostra como se relacionam as conexões de M e N.

Lema 1.1.2. *Se* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, *então*

$$\nabla_{d\varphi\cdot X}(d\varphi \cdot Y) \;=\; d\varphi \cdot \left(\; \nabla_X Y \;+\; \frac{1}{2\mu^2}(\; X(\mu^2)Y \;+\; Y(\mu^2)X \;-\; \langle X, Y\rangle \nabla\mu^2 \;) \right).$$

Demonstração:

Seja $S(X,Y)$ o campo em M que satisfaz

$$\nabla_{d\varphi\cdot X}(d\varphi \cdot Y) \;=\; d\varphi \cdot (\nabla_X Y \;+\; S(X,Y))\;, \tag{1.7}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.
Utilizando (1.6) obtemos para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}(d\varphi \cdot X)\langle d\varphi \cdot Y, d\varphi \cdot Z\rangle \;&=\; (d\varphi \cdot X)(\; \mu^2\langle Y, Z\rangle\;)\\ &= X(\mu^2\langle Y, Z\rangle) \circ \varphi^{-1}\;,\end{aligned}$$

ou seja,

$$(d\varphi \cdot X)\langle d\varphi \cdot Y, d\varphi \cdot Z\rangle \;=\; \{X(\mu^2)\langle Y, Z\rangle \;+\; \mu^2\; X\langle Y, Z\rangle\} \circ \varphi^{-1}\;. \tag{1.8}$$

Pela definição de S, temos também que

$$\begin{aligned}\langle\; \nabla_{d\varphi\cdot X}(d\varphi \cdot Y), d\varphi \cdot Z\;\rangle \;&=\; \langle\; d\varphi \cdot (\nabla_X Y \;+\; S(X,Y)), d\varphi \cdot Z\;\rangle\\ &= \mu^2\langle \nabla_X Y \;+\; S(X,Y), Z\rangle \circ \varphi^{-1}\\ &= \{\; \mu^2\langle \nabla_X Y, Z\rangle \;+\; \mu^2\langle S(X,Y), Z\rangle\;\} \circ \varphi^{-1}.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Permutando-se Y e Z em (1.9) obtemos

$$\langle\; d\varphi \cdot Y, \nabla_{d\varphi\cdot X}(d\varphi \cdot Z)\;\rangle \;=\; \{\; \mu^2\langle Y, \nabla_X Z\rangle \;+\; \mu^2\langle Y, S(X,Z)\rangle\;\} \circ \varphi^{-1}. \tag{1.10}$$

Pela compatibilidade com a métrica da conexão Riemanniana,

$$(d\varphi \cdot X)\langle d\varphi \cdot Y, d\varphi \cdot Z\rangle \;=\; \langle\; \nabla_{d\varphi\cdot X}(d\varphi \cdot Y), d\varphi \cdot Z\;\rangle \;+\; \langle\; d\varphi \cdot Y, \nabla_{d\varphi\cdot X}(d\varphi \cdot Z)\;\rangle.$$

Usando novamente a compatibilidade com a métrica da conexão Riemanniana, decorre de (1.8), (1.9), e (1.10) que (1.7) equivale a

$$X(\mu^2)\langle Y,Z\rangle \;=\; \mu^2\{\,\langle S(X,Y),Z\rangle \;+\; \langle Y,S(X,Z)\rangle\,\}\,. \tag{1.11}$$

Por outro lado, $S(X,Y)$ dado por

$$S(X,Y) \;=\; \frac{1}{2\mu^2}\{\,X(\mu^2)Y \;+\; Y(\mu^2)X \;-\; \langle X,Y\rangle\nabla\mu^2\,\}$$

obviamente verifica

$$\langle S(X,Y),Z\rangle \;=\; \frac{1}{2\mu^2}\{\,X(\mu^2)\langle Y,Z\rangle \;+\; Y(\mu^2)\langle X,Z\rangle \;-\; Z(\mu^2)\langle X,Y\rangle\,\},$$

como também

$$\langle S(X,Z),Y\rangle \;=\; \frac{1}{2\mu^2}\{\,X(\mu^2)\langle Y,Z\rangle \;+\; Z(\mu^2)\langle X,Y\rangle \;-\; Y(\mu^2)\langle X,Z\rangle\,\}$$

e consequentemente, satisfaz a equação (1.11), o que conclui a demonstração do lema.

■

A proposição seguinte nos mostra a relação que existe entre os laplacianos das variedades conformes M e N .

Proposição 1.1.3. *Sejam $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e $g \in \mathcal{C}^\infty(N)$ tais que $g \;=\; f\circ\varphi^{-1}$. Então,*

$$\Delta g(q) \;=\; \left\{\,\frac{1}{\mu^2}\Delta f \;+\; \frac{n-2}{2\mu^4}\nabla\mu^2(f)\,\right\}(p)\,,$$

onde $q = \varphi(p)$, $p \in M$.

Demonstração:

Seja $\{E_1,\ldots,E_n\}$ um referencial ortonormal definido num aberto $p \in V \subset M$. Usando que μ^2 é o coeficiente de conformalidade de φ, é fácil ver que $\{\eta F_1,\ldots,\eta F_n\}$ é um referencial ortonormal definido no aberto $W \;=\; \varphi(V)$, onde $\eta \;=\; \frac{1}{\mu}\circ\varphi^{-1}$ e $F_i = d\varphi\cdot E_i$, $i \;=\; 1,\ldots,n$. Assim, de acordo com (1.3) temos em W

$$\Delta g \;=\; \sum_{i=1}^{n}\{\,\eta F_i(\eta F_i(g)) - (\nabla_{\eta F_i}(\eta F_i))g\,\}. \tag{1.12}$$

Utilizando (1.6) , temos que

$$F_i g \ = \ (d\varphi \cdot E_i) g \ = \ (E_i f) \circ \varphi^{-1},$$

$$F_i(F_i g) \ = \ (d\varphi \cdot E_i)((E_i f) \circ \varphi^{-1}) \ = \ (E_i(E_i f)) \circ \varphi^{-1}$$
$$F_i \eta \ = \ (d\varphi \cdot E_i)\frac{1}{\mu} \circ \varphi^{-1} \ = \ (E_i(\frac{1}{\mu})) \circ \varphi^{-1}.$$

Calculemos cada parcela da soma em (1.12) . Pelas três expressões acima, temos que

$$\begin{aligned} \eta F_i(\eta F_i(g)) \ &= \ \eta(F_i \eta)(F_i g) \ + \ \eta^2 F_i(F_i(g)) \\ &= \left\{ \ \frac{1}{\mu}(E_i(\frac{1}{\mu}))(E_i f) \ + \ \frac{1}{\mu^2}(E_i(E_i f)) \ \right\} \circ \varphi^{-1}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

E pela compatibilidade com a métrica da conexão Riemanniana,

$$(\nabla_{\eta F_i}(\eta F_i))g \ = \ \eta(F_i \eta)(F_i g) \ + \ \eta^2((\nabla_{F_i} F_i) g).$$

Para desenvolvermos esta última igualdade, vamos determinar a expressão de $\nabla_{F_i} F_i$. Pelo lema anterior, tem-se

$$\nabla_{F_i} F_i \ = \ \nabla_{d\varphi \cdot E_i}(d\varphi \cdot E_i) \ = \ d\varphi \cdot (\ \nabla_{E_i} E_i \ + \ \frac{1}{2\mu^2}(\ 2E_i(\mu^2) E_i \ - \ \nabla \mu^2 \ ) \ ),$$

decorrendo então de (1.6) que

$$(\nabla_{F_i} F_i) g \ = \ \left\{ \ (\nabla_{E_i} E_i) f \ + \ \frac{1}{2\mu^2}(\ 2E_i(\mu^2) E_i \ - \ \nabla \mu^2 \ ) f \ \right\} \circ \varphi^{-1} \ .$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (\nabla_{\eta F_i}(\eta F_i)) g \ = \ \{ \ & \frac{1}{\mu}(E_i(\frac{1}{\mu}))(E_i f) \\ & + \frac{1}{\mu^2}(\ (\nabla_{E_i} E_i) f \ + \ \frac{1}{2\mu^2}(\ 2E_i(\mu^2) E_i \ - \ \nabla \mu^2 \ ) f \ ) \ \} \circ \varphi^{-1} \ . \end{aligned}$$

Consequentemente, usando esta última expressão e (1.13), o termo geral do somatório em (1.12) é

$$\begin{aligned} \eta F_i(\eta F_i(g)) - (\nabla_{\eta F_i}(\eta F_i)) g \ = \ \{ \ & \frac{1}{\mu^2}(\ E_i(E_i f) \ - \ (\nabla_{E_i} E_i) f \ ) \\ & - \frac{1}{2\mu^4}(\ 2E_i(\mu^2) E_i \ - \ \nabla \mu^2 \ ) f \ \} \circ \varphi^{-1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta g \ &= \ \{ \ \frac{1}{\mu^2} \sum_{i=1}^{n} (\ E_i(E_i f) \ - \ (\nabla_{E_i} E_i) f \ ) \\ & \quad + \ \frac{1}{2\mu^4}(\ \sum_{i=1}^{n} \nabla \mu^2 \ - \ 2 \sum_{i=1}^{n} E_i(\mu^2) E_i \ ) f \ \} \circ \varphi^{-1} \\ &= \left\{ \ \frac{1}{\mu^2} \Delta f \ + \ \frac{n-2}{2\mu^4} \nabla \mu^2(f) \ \right\} \circ \varphi^{-1}, \end{aligned}$$

e em $q = \varphi(p)$ temos a fórmula desejada.

■

A partir desta proposição, segue imediatamente o seguinte

Corolário 1.1.4. *Se* $\varphi : M^2 \longrightarrow N^2$ *é um difeomorfismo conforme,* $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *e* $g \in \mathcal{C}^\infty(N)$ *são tais que* $g = f \circ \varphi^{-1}$, *então*

$$\Delta g(q) \;=\; \frac{1}{\mu^2}\Delta f(p)\;,$$

onde $q = \varphi(p)$, $p \in M$ *e* μ^2 *é o coeficiente de conformalidade.*

■

Uma função $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ é dita *harmônica* se $\Delta f \equiv 0$. Nas condições do corolário acima, observemos que f é harmônica se, e somente se, g é harmônica.

1.2 Forma Elemento de Volume

Seja M variedade Riemanniana orientada. Seja dM a forma diferencial de grau $n = dim\ M$ definida por

$$\mathrm{dM}(v_1, \ldots, v_n)(p) \;=\; \pm\sqrt{\det(\langle v_i, v_j\rangle)},\ p \in M,\ i,j \in \{1, \ldots, n\},$$

onde $v_1, \ldots, v_n \in T_pM$ e o sinal $+$ ou $-$ indica se a base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ pertence à orientação de M ou não. dM é chamado o *elemento de volume* de M.

Para todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ definimos o *produto interior* $i(X)dM$, de X por dM, como a $(n-1)-$forma

$$i(X)\mathrm{dM}(Y_2, \ldots, Y_n) \;=\; \mathrm{dM}(X, Y_2, \ldots, Y_n),\ Y_2, \ldots, Y_n \in \mathfrak{X}(M).$$

Usaremos o seguinte resultado em nosso trabalho.

Lema 1.2.1. *Para qualquer* $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$d(i(X)dM) \;=\; \mathrm{div}\ XdM.$$

Demonstração:

Sejam $p \in M$ e $\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial geodésico em p definido em $U \subset M$. Podemos supor que $\{E_i(q)\} \subset T_qM$ é uma base positiva de T_qM, $\forall q \in U$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, seja w_i a $1-$forma diferencial definida por

$$w_i(E_j) \;=\; \delta_{ij},\; j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Afirmamos que $w_1 \wedge \ldots \wedge w_n \;=\; \mathrm{dM},\; \textit{em } U.$

Com efeito , seja $q \in U,\; v_1, \ldots, v_n \in T_qM$ vetores linearmente independentes. Escrevamos $v_j \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_{ij}E_i(q)$ em função dos vetores da base $\{E_i(q)\}$.

Assim,

$$\begin{aligned} w_1 \wedge \ldots \wedge w_n(v_1, \ldots, v_n) \;&=\; \det \begin{pmatrix} w_1(v_1) & \cdots & w_1(v_n) \\ & \vdots & \\ w_n(v_1) & \cdots & w_n(v_n) \end{pmatrix} \\ &=\; \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

onde estamos usando que $w_i(E_j) \;=\; \delta_{ij}$.

Por outro lado, observemos que para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\langle v_i, v_j \rangle \;=\; \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki}E_k(q), \sum_{s=1}^{n} a_{sj}E_s(q) \right\rangle \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}\;,$$

já que $\{E_i\}$ é um referencial ortonormal.

Denotando $A \;=\; \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ e $G \;=\; \Big(\langle v_i, v_j \rangle \Big)_{n \times n}$, temos que

$$G \;=\; A^T A$$

e daí,

$$\det G \;=\; \det A^T A \;=\; (\det A)^2.$$

Portanto,

$$\det A \;=\; \pm\sqrt{\det G}.$$

Concluímos então que $w_1 \wedge \ldots \wedge w_n(v_1, \ldots, v_n) \;=\; \mathrm{dM}(v_1, \ldots, v_n)$. Como $q \in U$ e $v_1, \ldots, v_n \in T_qM$ foram tomados arbitrários, a nossa afirmação está provada.

Agora, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, considere $\theta_i = w_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{w_i} \wedge \ldots \wedge w_n$, onde $\widehat{w_i}$ significa que o fator w_i não está presente.
Sendo $X \in \mathfrak{X}(U)$, escrevamos $X = \sum_i X_i E_i$.
Afirmamos que $i(X)\mathrm{dM} = \sum_i (-1)^{i+1} X_i \theta_i$, em U.
De fato , para quaisquer $Y_2, \ldots, Y_n \in \mathfrak{X}(U)$ temos por definição,

$$\begin{aligned}
i(X)\mathrm{dM}(Y_2, \ldots, Y_n) &= \mathrm{dM}(X, Y_2, \ldots, Y_n) = \mathrm{dM}(\sum_i X_i E_i, Y_2, \ldots, Y_n) \\
&= \sum_i X_i \, \mathrm{dM}(E_i, Y_2, \ldots, Y_n) \\
&= \sum_i X_i \, w_1 \wedge \ldots \wedge w_n(E_i, Y_2, \ldots, Y_n) \\
&= \sum_i X_i \det \begin{pmatrix} 0 & w_1(Y_2) & \cdots & w_1(Y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_i(Y_2) & \cdots & w_i(Y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & w_n(Y_2) & \cdots & w_n(Y_n) \end{pmatrix} \\
&= \sum_i X_i \, (-1)^{i+1} \det \left(\; w_k(Y_j) \; \right)_{k=1,\ldots,n, \; k \neq i, \; j=2,\ldots,n} \\
&= \sum_i (-1)^{i+1} X_i \, w_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{w_i} \wedge \ldots \wedge w_n(Y_2, \ldots, Y_n) \\
&= \sum_i (-1)^{i+1} X_i \, \theta_i(Y_2, \ldots, Y_n),
\end{aligned}$$

e como $Y_2, \ldots, Y_n \in \mathfrak{X}(U)$ foram tomados arbitrários, obtemos

$$i(X)\mathrm{dM} = \sum_i (-1)^{i+1} X_i \theta_i \, , \quad em \;\; U.$$

Desta última afirmação segue que

$$d(i(X)dM) = \sum_i (-1)^{i+1} \, d(X_i \theta_i) = \sum_i (-1)^{i+1} \, dX_i \wedge \theta_i + \sum_i (-1)^{i+1} X_i \wedge d\theta_i.$$

Mas $d\theta_i \equiv 0$ em p, pois para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$dw_k(E_i, E_j) = E_i(w_k(E_j)) - E_j(w_k(E_i)) + w_k([E_i, E_j])$$

e assim

$$dw_k(E_i, E_j)(p) = E_i(\delta_{kj})(p) - E_j(\delta_{ki})(p) + 0 = 0,$$

$\forall \, i, j \in \{1, \ldots, n\}$, pois $\{E_i\}$ é um referencial geodésico em p.

Com isso, temos em p,

$$d(i(X)dM) \; = \; \sum_i (-1)^{i+1} \, dX_i \wedge \theta_i.$$

Por fim, observemos que

$$\begin{aligned}
\sum_i (-1)^{i+1} \, dX_i \wedge \theta_i \;\; &= \;\; \sum_i (-1)^{i+1} \, (\sum_j E_j(X_i) \, w_j) \wedge \theta_i \\
&= \;\; \sum_{i,j} (-1)^{i+1} \, E_j(X_i) \, w_j \wedge \theta_i \\
&= \;\; \sum_i (-1)^{i+1} \, E_i(X_i) \, w_i \wedge \theta_i \\
&= \;\; \sum_i E_i(X_i) \, w_1 \wedge \ldots \wedge w_n \sum_i E_i(X_i) \text{ dM} \\
&= \;\; \text{div } X \, dM,
\end{aligned}$$

onde usamos que $w_j \wedge \theta_i \; = \; w_j \wedge (w_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{w}_i \wedge \ldots \wedge w_n) \; = \; 0$, se $i \neq j$, e

$$(-1)^{i+1} \, w_i \wedge \theta_i \; = \; (-1)^{i+1} \, w_i \; \wedge (w_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{w}_i \wedge \ldots \wedge w_n) \; = \; w_1 \wedge \ldots \wedge w_n,$$

como também (1.2) e o fato de $\{E_i\}$ ser um referencial geodésico em p.
Obtemos então que $d(i(X) \, dM)(p) \; = \;$ div $X(p)$ dM, e como $p \in M$ foi tomado arbitrário, concluímos que

$$d(i(X) \, dM) \; = \; \text{div } X \text{ dM}.$$

■

1.3 Fórmula de Bochner-Weitzenbock

Nesta seção estabeleceremos alguns resultados envolvendo o hessiano de funções de classe $\mathcal{C}^\infty$ e demonstramos a fórmula de Bochner-Weitzenbock.

Definição 1.3.1. Sejam $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e $p \in M$. Definimos o *hessiano* de f no ponto p como sendo o operador linear

$$\text{hess} f_p : T_pM \longrightarrow T_pM$$

$$x \longmapsto \text{hess} f_p \cdot x \; = \; \nabla_x(\nabla f)$$

Considerando o tensor $\text{Hess}f(X,Y) = \langle \nabla_X(\nabla f), Y\rangle$, observemos que

$$\begin{aligned}\text{Hess}f(X,Y) &= \langle \nabla_X(\nabla f), Y\rangle = X\langle \nabla f, Y\rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y\rangle \\ &= XY(f) - \nabla_X Y(f),\end{aligned}$$

onde usamos a compatibilidade com a métrica da conexão Riemanniana ∇ e a definição de ∇f. Assim,

$$\begin{aligned}\text{Hess}f(X,Y) - \text{Hess}f(Y,X) &= XY(f) - \nabla_X Y(f) - [YX(f) - \nabla_Y X(f)] \\ &= (XY - YX)f + (\nabla_Y X - \nabla_X Y)f \\ &= [X,Y]f + [Y,X]f = 0\end{aligned}$$

ou seja,

$$\text{Hess}f(X,Y) = \text{Hess}f(Y,X)\ ,\ \forall\ X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Observação 1.3.2.

$$\Delta f = \text{tr}(\text{hess}f).$$

De fato, seja $\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal em M. Assim,

$$\begin{aligned}\text{tr}(\text{hess}f) &= \sum_{i=1}^n \langle \text{hess}f(E_i), E_i\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}(\nabla f), E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \left\langle \nabla_{E_i}\left(\sum_{j=1}^n E_j(f)E_j\right), E_i\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \nabla_{E_i}(E_j(f)E_j), E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle E_j(f)\nabla_{E_i}E_j + E_i(E_j(f))E_j, E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_j(f)\langle \nabla_{E_i}E_j, E_i\rangle + E_i(E_j(f))\delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{j=1}^n E_j(f)\langle \nabla_{E_i}E_j, E_i\rangle\right) + E_i(E_i(f))\right].\quad (\star)\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$0 = E_i\langle E_i, E_j\rangle = \langle \nabla_{E_i}E_i, E_j\rangle + \langle E_i, \nabla_{E_i}E_j\rangle$$

Logo,

$$\langle \nabla_{E_i}E_j, E_i\rangle = -\langle \nabla_{E_i}E_i, E_j\rangle.$$

Também,

$$\begin{aligned} \nabla_{E_i}E_i(f) &= \langle \nabla_{E_i}E_i, \nabla f\rangle = \langle \nabla_{E_i}E_i, \sum_{j=1}^{n} E_j(f)E_j\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} E_j(f)\langle \nabla_{E_i}E_i, E_j\rangle. \end{aligned}$$

Substituindo as duas últimas igualdades em $(\star)$, obtemos

$$\mathrm{tr(hessf)} = \sum_{i=1}^{n} \{-\nabla_{E_i}E_i(f) + E_i(E_i(f))\} = \Delta f,$$

como queríamos.

Para a demonstração do próximo teorema, a Fórmula de Bochner-Weitzenbock, precisamos do seguinte lema.

Lema 1.3.3. *Sejam $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e $\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial geodésico em M. Então,*

$$\sum_{i=1}^{n}(\ E_i(f)\Delta(E_i(f)) - E_i(f)E_i(\Delta f)\ ) = \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f),$$

onde $\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f)$ *é a curvatura de Ricci de M na direção do campo ∇f.*

Demonstração:

Inicialmente, observemos a validade das seguintes relações

(1) $E_j(E_i(f)) = E_j\langle \nabla f, E_i\rangle = \langle \nabla_{E_j}(\nabla f), E_i\rangle + \langle \nabla f, \nabla_{E_j}E_i\rangle = \mathrm{hess}f(E_j, E_i) = \mathrm{hess}f(E_i, E_j) = \langle \nabla_{E_i}(\nabla f), E_j\rangle$,

onde usamos que o referencial $\{E_i\}_{i=1}^n$ é geodésico.

(2) $\nabla(E_i(f)) = \sum_{j=1}^{n} E_j(E_i(f))E_j = \sum_{j=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}(\nabla f), E_j\rangle E_j$, onde na última igualdade foi usado o item anterior.

(3) $\Delta(E_i(f)) = \mathrm{tr}(\mathrm{hess}E_i(f)) = \sum_{j=1}^{n}\langle \mathrm{hess}(E_i(f))\cdot E_j, E_j\rangle = \sum_{j=1}^{n}\langle \nabla_{E_j}(\nabla E_i(f)), E_j\rangle = \sum_{j,k=1}^{n}\langle \nabla_{E_j}(\langle \nabla_{E_i}(\nabla f), E_k\rangle E_k), E_j\rangle$ onde usamos, na última igualdade, o item (2).

A partir disto, temos

$$\begin{aligned}
\Delta(E_i(f)) &= \sum_{j,k=1}^{n} \langle\ \langle \nabla_{E_i}(\nabla f), E_k\rangle \cdot \nabla_{E_j} E_k + E_j(\langle \nabla_{E_i}(\nabla f), E_k\rangle) E_k\ ,\ E_j\rangle \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \langle E_j(\langle \nabla_{E_i}(\nabla f), E_k\rangle) E_k\ ,\ E_j\rangle \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} E_j \langle \nabla_{E_i}(\nabla f), E_k\rangle \cdot \delta_{kj} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_{E_j} \nabla_{E_i}(\nabla f), E_j\rangle + \langle \nabla_{E_i}(\nabla f), \nabla_{E_j} E_j\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_{E_j} \nabla_{E_i}(\nabla f), E_j\rangle.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} E_i(f)\Delta(E_i(f)) \ = \sum_{i,j=1}^{n} E_i(f)\langle \nabla_{E_j} \nabla_{E_i}(\nabla f), E_j\rangle \quad (*)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
E_i(\Delta f) &= E_i\left(\sum_{j=1}^{n} E_j(E_j(f)) - \nabla_{E_j} E_j(f) \right) \ = \ E_i\left(\sum_{j=1}^{n} E_j(E_j(f) \right) \\
&= E_i\left(\sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_{E_j}(\nabla f), E_j\rangle \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} E_i \langle \nabla_{E_j}(\nabla f), E_j\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_j}(\nabla f), E_j\rangle,
\end{aligned}$$

onde usamos a relação (1) acima e o fato de ser $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ um referencial geodésico. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} E_i(f)E_i(\Delta f) &= \sum_{i=1}^{n} E_i(f) \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_j}(\nabla f), E_j\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} E_i(f)\langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_j}(\nabla f), E_j\rangle \quad (**)
\end{aligned}$$

Finalmente, de $(*)$ e $(**)$ concluimos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} E_i(f)\Delta(E_i(f)) - E_i(f)E_i(\Delta f)\\
&\qquad\qquad = \sum_{i,j=1}^{n} E_i(f)(\ \langle\nabla_{E_j}\nabla_{E_i}(\nabla f), E_j\rangle - \langle\nabla_{E_i}\nabla_{E_j}(\nabla f), E_j\rangle\ )\\
&\qquad\qquad = \sum_{i,j=1}^{n} E_i(f)(\ \langle\nabla_{E_j}\nabla_{E_i}(\nabla f) - \nabla_{E_i}\nabla_{E_j}(\nabla f)\ ,\ E_j\rangle\ )\\
&\qquad\qquad = \sum_{i,j=1}^{n} E_i(f)(\ \langle \mathrm{R}(E_i, E_j)\nabla f\ ,\ E_j\rangle\ )\\
&\qquad\qquad = \sum_{j=1}^{n}\langle\ \mathrm{R}(\ \sum_{i=1}^{n} E_i(f)E_i, E_j\ )\nabla f\ ,\ E_j\ \rangle\\
&\qquad\qquad = \sum_{j=1}^{n}\langle\ \mathrm{R}(\nabla f, E_j)\nabla f\ ,\ E_j\ \rangle\\
&\qquad\qquad = \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f)\ ,
\end{aligned}
$$

o que prova o lema.

■

Podemos agora demonstrar o

Teorema 1.3.4. ***(Fórmula de Bochner-Weitzenbock)***
Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Então,

$$\frac{1}{2}\Delta \mid \nabla f \mid^2 = \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle\nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + \mid \mathrm{hess} f \mid^2,$$

onde $\mid \mathrm{hess} f \mid^2 = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\langle\nabla_{E_i}(\nabla f), E_j\rangle^2$ *e* $\{E_i\}_{i=1}^n$ *um referencial ortonormal em* M.

Demonstração:

Seja $\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal em M . Sabendo que

$$\mid \nabla f \mid^2 = \sum_{i=1}^{n}(E_i(f))^2,$$

temos

$$
\begin{aligned}
\Delta \mid \nabla f \mid^2 &= \Delta(\sum_{i=1}^{n}(E_i(f))^2)\ =\ \sum_{i=1}^{n}\Delta(E_i(f))^2\\
&= \sum_{i=1}^{n} 2(\ E_i(f)\Delta(E_i(f)) + \mid \nabla(E_i(f)) \mid^2\ )\\
&= 2\sum_{i=1}^{n} E_i(f)\Delta(E_i(f)) + \mid \nabla(E_i(f)) \mid^2,
\end{aligned}
$$

onde usamos o Lema 1.1.1−item (e).

Assim, usando o lema anterior, segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta \mid \nabla f \mid^2 &= \sum_{i=1}^{n} E_i(f)\Delta(E_i(f)) + \sum_{i=1}^{n} \mid \nabla(E_i(f)) \mid^2 \\ &= \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \sum_{i=1}^{n} E_i(f)E_i(\Delta f) + \sum_{i=1}^{n} \mid \nabla(E_i(f)) \mid^2 .\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle = &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} E_i(f)E_i, \sum_{j=1}^{n} E_j(\Delta f)E_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} E_i(f)E_i(\Delta f),\end{aligned}$$

pois o referencial $\{E_i\}_{i=1}^n$ é ortonormal.

Também, pela relação (2) na prova do lema anterior temos

$$\mid \nabla(E_i(f)) \mid^2 = \langle\ \nabla(E_i(f)), \nabla(E_i(f))\ \rangle\ = \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(\nabla f), E_j\rangle^2.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} \mid \nabla(E_i(f)) \mid^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(\nabla f), E_j\rangle^2\ = \mid \mathrm{hess} f \mid^2 .$$

Concluímos então que

$$\frac{1}{2}\Delta \mid \nabla f \mid^2 = \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + \mid \mathrm{hess} f \mid^2,$$

provando o teorema.

■

1.4 Conexão Induzida

Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Definimos o operador

$$\begin{aligned}\nabla X : \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(M) \\ Z &\mapsto \nabla X(Z)\ =\ \nabla_Z X,\end{aligned}$$

chamado *Conexão Induzida* em M.

Observe que ∇X é $\mathcal{C}^\infty(M)-$linear, já que

$$\begin{aligned}\nabla X(W + fZ) &= \nabla_{W+fZ}X = \nabla_W X + f\nabla_Z X \\ &= \nabla X(W) + f\nabla X(Z),\end{aligned}$$

para quaisquer $W, Z \in \mathfrak{X}(M),\ f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Definamos

$$\langle \nabla X, Y\rangle : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$$

$$Z \mapsto \langle \nabla X, Y\rangle Z = \langle \nabla X(Z), Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle.$$

Note que, pela $\mathcal{C}^\infty(M)-$linearidade de ∇X e pela bilinearidade da métrica Riemanniana, $\langle \nabla X, Y\rangle$ é assim um tensor de ordem 1 em M.

Sejam T, S dois tensores de ordem 1 em M. Definamos

$$\langle T, S\rangle = \sum_i T(E_i)S(E_i),$$

sendo $\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal definido em um aberto de M.

Vejamos, primeiramente, que a igualdade acima independe da escolha do referencial ortonormal. Para tal, seja $\{F_i\}_{i=1}^n$ outro referencial ortonormal em M. Escrevendo

$$F_i = \sum_j a_{ij}E_j,$$

temos

$$\begin{aligned}\langle T, S\rangle_F &= \sum_i T(\sum_j a_{ij}E_j)S(\sum_k a_{ik}E_k) = \sum_i(\sum_j a_{ij}T(E_j)\cdot \sum_k a_{ik}S(E_k)) \\ &= \sum_i \sum_{j,k} a_{ij}a_{ik}T(E_j)S(E_k) = \sum_{i,j,k} a_{ij}a_{ik}T(E_j)S(E_k) \\ &= \sum_{j,k}(\sum_i a_{ij}a_{ik})T(E_j)S(E_k) = \sum_{j,k}\delta_{jk}T(E_j)S(E_k) \\ &= \sum_j T(E_j)S(E_j) = \langle T, S\rangle_E,\end{aligned}$$

o que mostra o que queríamos, onde usamos que a matriz mudança de base $(a_{ij})_{n\times n}$ é ortogonal.

É facil ver que a definição acima é uma forma bilinear, simétrica e positiva definida e, portanto, define um produto interno. A partir disto, dado T um tensor de ordem 1 em M, definamos

$$| T | = \sqrt{\langle T, T \rangle} := \sqrt{\sum_i (T(E_i))^2},$$

onde $\{E_i\}_{i=1}^n$ é qualquer referencial ortonormal definido em um aberto de M.

Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Logo, $\langle \nabla X, Y \rangle : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ é um tensor de ordem 1 em M. De acordo com o que vimos acima, definimos então

$$| \langle \nabla X, Y \rangle | = \sqrt{\sum_i (\langle \nabla X, Y \rangle E_i)^2},$$

onde $\{E_i\}_{i=1}^n$ é qualquer referencial ortonormal definido em um aberto de M.
Em particular, dado $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$| \langle \nabla X, X \rangle |^2 = \sum_i (\langle \nabla X, X \rangle E_i)^2. \tag{1.14}$$

Sendo novamente $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, sabemos que ∇X, $\nabla Y : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ são dois operadores lineares. Definimos então

$$\begin{aligned} \langle \nabla X, \nabla Y \rangle &= \operatorname{tr}(\nabla X^* \circ \nabla Y) = \sum_i \langle \nabla X^* \circ \nabla Y(E_i), E_i \rangle \\ &= \sum_i \langle \nabla Y(E_i), \nabla X(E_i) \rangle \\ &= \sum_i \langle \nabla X(E_i), \nabla Y(E_i) \rangle \end{aligned}$$

para qualquer referencial ortonormal $\{E_i\}_{i=1}^n$ definido em um aberto de M, onde ∇X^* é o operador adjunto associado a ∇X.
Em particular, definimos

$$\langle \nabla X, \nabla X \rangle = \sum_i \langle \nabla X(E_i), \nabla X(E_i) \rangle$$

isto é,

$$| \nabla X |^2 = \sum_i | \nabla X(E_i) |^2 . \tag{1.15}$$

Lema 1.4.1. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então,*

(*i*) $| \nabla | X |^2 |^2 = 4 | \langle \nabla X, X \rangle |^2$.

(*ii*) $| \langle \nabla X, X \rangle | \leq | \nabla X || X |$.

Demonstração:

Seja $\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal definido em um aberto de M. Então, segue que

$$\begin{aligned}\nabla \mid X \mid^2 &= \nabla\langle X, X\rangle \;=\; \sum_i E_i\langle X, X\rangle \cdot E_i \\ &= \sum_i 2\langle \nabla_{E_i} X, X\rangle \cdot E_i \;=\; 2\sum_i (\langle \nabla X, X\rangle E_i) E_i.\end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}\mid \nabla \mid X \mid^2\mid^2 &= \langle \nabla \mid X \mid^2, \nabla \mid X \mid^2\rangle \\ &= \left\langle\; 2\sum_i (\langle \nabla X, X\rangle E_i) E_i \;,\; 2\sum_j (\langle \nabla X, X\rangle E_j) E_j \;\right\rangle \\ &= 4\sum_{i,j} \langle \nabla X, X\rangle E_i \cdot \langle \nabla X, X\rangle E_j \cdot \langle E_i, E_j\rangle \\ &= 4\sum_i (\langle \nabla X, X\rangle E_i)^2 \\ &= 4 \mid \langle \nabla X, X\rangle \mid^2 ,\end{aligned}$$

onde usamos (1.1), o fato da conexão ∇ ser compatível com a métrica e ser $\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal.

Ou seja,

$$\mid \nabla \mid X \mid^2\mid^2 = \; 4 \mid \langle \nabla X, X\rangle \mid^2,$$

o que mostra o item (i).

Para (ii), o cálculo é simples

$$\begin{aligned}\mid \langle \nabla X, X\rangle \mid^2 &= \sum_i (\langle \nabla X, X\rangle E_i)^2 \;=\; \sum_i \langle \nabla_{E_i} X, X\rangle^2 \\ &= \sum_i \mid \langle \nabla_{E_i} X, X\rangle \mid^2 \leq \; \sum_i \mid \nabla_{E_i} X \mid^2 \mid X \mid^2 \\ &= \mid X \mid^2 \sum_i \mid \nabla X(E_i) \mid^2 = \mid X \mid^2 \sum_i \langle \nabla X(E_i), \nabla X(E_i)\rangle \\ &= \mid X \mid^2 \langle \nabla X, \nabla X\rangle \;= \mid X \mid^2 \mid \nabla X \mid^2,\end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para a métrica Riemanniana. Portanto,

$$\mid \langle \nabla X, X\rangle \mid \leq \mid \nabla X \mid\mid X \mid ,$$

como queríamos demonstrar.

■

1.5 Superfícies de Riemann

Uma *superfície de Riemann* M é uma variedade bidimensional, conexa de Hausdorff, com um atlas maximal $\{U_{\alpha,z_\alpha}\}_{\alpha\in A}$ em M (ou seja, $\{z_\alpha(U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ constitui uma cobertura aberta de M e

$$z_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{C} \to M$$

é um homeomorfismo de um subconjunto aberto do plano complexo $\mathbb{C}$) tal que as mudanças de parâmetros

$$f_{\alpha\beta} \;=\; z_\alpha^{-1} \circ z_\beta : z_\beta^{-1}(z_\beta(U_\beta) \cap z_\alpha(U_\alpha)) \to z_\alpha^{-1}(z_\beta(U_\beta) \cap z_\alpha(U_\alpha))$$

são holomorfas sempre que $z_\alpha(U_\alpha) \cap z_\beta(U_\beta) \;\neq\; \emptyset$. Pelas equações de Cauchy-Riemann, concluímos que toda superfície de Riemann é orientável.

Pode-se mostrar que toda superfície orientável M possui uma estrutura de superfície de Riemann.

O plano complexo $\mathbb{C}$, com a única carta coordenada $(\mathbb{C}, id)$, e qualquer subconjunto aberto conexo de $\mathbb{C}$ são superfícies de Riemann; em particular, o disco unitário $D^2 = \{z \in \mathbb{C}; \mid z \mid < 1\}$ é uma superfície de Riemann. A esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, com o atlas formado por duas aplicações, a identidade definida em $\mathbb{C}$ e a aplicação $z \mapsto \frac{1}{z}$ definida para $z \neq 0$ extendida a ∞ por $0 \mapsto \infty$, com esta estrutura, é uma superfície de Riemann.

Uma aplicação contínua $f : M_1 \to M_2$ entre duas superfícies de Riemann é dita *holomorfa* em $p \in M_1$ se, dada uma coordenada local $\{V_1, y_1\}$ em $f(p)$, existe uma coordenada local $\{U_1, x_1\}$ em p tal que $f(x_1(U_1)) \subset y_1(V_1)$ e a aplicação $y_1^{-1} \circ f \circ x_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ é um holomorfismo em $x_1^{-1}(p)$. A função f é dita holomorfa em um aberto de M_1 se for holomorfa em todos os pontos deste aberto. É claro que a definição dada é independente da escolha das coordenadas locais.

Se f é bijetiva e holomorfa, então f^{-1} é holomorfa e f é dita *equivalência conforme*. Neste caso, M_1 e M_2 são ditas *conformemente equivalentes*.

Lema 1.5.1. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset \mathbb{R}^2$ uma bijeção holomorfa entre abertos de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Então, f é uma aplicação conforme.*

Demonstração:

Escrevamos $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, $(x, y) \in U$. Como f é holomorfa, vale as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Sendo $\{e_1, e_2\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$, segue que

$$\begin{aligned}\langle df_{e_1}, df_{e_2}\rangle &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\rangle \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = 0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle df_{e_1}, df_{e_1}\rangle &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}\right\rangle = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \langle df_{e_2}, df_{e_2}\rangle.\end{aligned}$$

Assim, $\langle df_{e_i}, df_{e_j}\rangle = \mu^2\delta_{ij} = \mu^2\langle e_i, e_j\rangle$, onde $\mu^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$.

Agora, se v é um campo de vetores qualquer em U, temos que

$$\begin{aligned}\langle df_v, df_v\rangle &= \langle df(a_1e_1 + a_2e_2), df(a_1e_1 + a_2e_2)\rangle \\ &= a_1^2\mu^2\langle e_1, e_1\rangle + a_2^2\mu^2\langle e_2, e_2\rangle \\ &= \mu^2(a_1^2 + a_2^2) = \mu^2\langle v, v\rangle,\end{aligned}$$

e portanto f é uma aplicação conforme.

■

Seja agora $f : M_1 \to M_2$ uma equivalência conforme entre duas superfícies de Riemann. Tomando $\{U, x\}$ e $\{V, y\}$ como parametrizações isotérmicas em M_1 e M_2, respectivamente, tais que $f(x(U)) \subset y(V)$, então a aplicação

$$\varphi = y^{-1} \circ f \circ x : U \subset \mathbb{R}^2 \to y^{-1}(f(x(U))) \subset \mathbb{R}^2$$

é uma bijeção holomorfa, e pelo lema anterior concluímos ser uma aplicação conforme. Como x e y são isotérmicas, então são aplicações conformes. Assim, de $\varphi = y^{-1} \circ f \circ x$ segue que $f = y \circ \varphi \circ x^{-1}$ é um difeomorfismo, e por composição é localmente conforme. Portanto, f é uma aplicação localmente conforme.

Uma aplicação contínua $\pi : \widetilde{M} \to M$ entre duas variedades diferenciáveis chama-se uma *aplicação de recobrimento* quando cada ponto $p \in M$ pertence a um aberto $V \subset M$ tal que $\pi^{-1}(V) = \bigcup_\alpha U_\alpha$ é uma reunião de abertos $U_\alpha \subset \widetilde{M}$, dois a dois disjuntos, cada um dos quais se aplica por π difeomorficamente sobre V. Assim, podemos dizer que π é um difeomorfismo local. O conjunto $\widetilde{M}$ chama-se um *espaço de recobrimento* de M e, para cada $p \in M$, o conjunto $\pi^{-1}(p)$ chama-se a *fibra* sobre p. Quando $\widetilde{M}$ é simplesmente conexo, chamamos $\widetilde{M}$ de *recobrimento universal* de M .

Dizemos que uma aplicação contínua e sobrejetiva $f : \widetilde{M} \to M$ tem a *propriedade de levantamento de caminhos* se, dados arbitrariamente um caminho $\alpha : [0,1] \to M$ e um ponto $\widetilde{p} \in \widetilde{M}$ tal que $f(\widetilde{p}) = \alpha(0)$, existir um caminho $\widetilde{\alpha} : [0,1] \to \widetilde{M}$, tal que $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{p}$ e $f \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$.

Se existir um único caminho $\widetilde{\alpha}$ como acima, dizemos que $f : \widetilde{M} \to M$ tem a *propriedade de levantamento único de caminhos.* Prova-se que qualquer recobrimento possui tal propriedade.

O teorema a seguir caracteriza o recobrimento universal de qualquer superfície de Riemann.

Teorema 1.5.2. *(Teorema da Uniformização de Koebe) O recobrimento universal de qualquer superfície de Riemann é conformemente equivalente ao disco unitário* D^2 *, ao plano* $\mathbb{R}^2$ *ou à esfera* $\overline{\mathbb{C}}$ *.*

O teorema de uniformização foi demonstrado por P. Koebe e H. Poincaré.

Capítulo 2

Hipersuperfícies Mínimas Estáveis

No presente capítulo, introduziremos o conceito de variação de uma imersão e em seguida apresentaremos as fórmulas da primeira e segunda variação da função volume associada a cada variação. A fórmula da primeira variação nos permite caracterizar as hipersuperfícies mínimas como pontos críticos da função volume, enquanto que a da segunda é de fundamental importância quando se tenta encontrar um mínimo local desta função para cada variação. Esta tentativa nos conduz ao problema de estabilidade, que é o objetivo de estudo deste capítulo.

Sejam $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana e $x : M \to \overline{M}$ uma imersão, onde M é uma variedade diferenciável de dimensão n. Suponhamos que M é compacta orientada com bordo ∂M.

Formalizemos agora o conceito de variação.

Definição 2.0.3. Uma *variação* da imersão x é uma aplicação $X : I \times M \to \overline{M}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, onde $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, que satisfaz:

(i) cada aplicação $x_t : M \to \overline{M}$ definida por $x_t(p) = X(t,p)$ é uma imersão;

(ii) $x_0 = x$;

(iii) $x_t\big|_{\partial M} = x\big|_{\partial M}$, para todo $t \in I$.

Para o campo $\dfrac{\partial}{\partial t}$ em I, indicaremos sua extensão (de maneira usual) ao produto $I \times M$ simplesmente por $\dfrac{\partial}{\partial t}$.

Seja W o campo em $x(M)$ definido por

$$W = dX \cdot \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0}.$$

Observemos que para cada $p \in M$, $W(p)$ é o vetor velocidade, em $t = 0$, da curva $\alpha : I \to \overline{M}$ definida por $\alpha(t) = X(t,p)$. O campo W é denominado *campo variacional* da variação X.

Seja dM_t o elemento de volume de M na métrica induzida por x_t, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Definamos a função $\mathcal{A} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{A}(t) = \int_M dM_t.$$

Isto é, $\mathcal{A}(t)$ é o volume de M com relação à métrica induzida por x_t.

O teorema seguinte nos mostra a expressão da primeira derivada da função $\mathcal{A}(t)$ em $t = 0$.

Teorema 2.0.4 (fórmula da primeira variação).

$$\left.\frac{d\mathcal{A}}{dt}\right|_{t=0} = -n\int_M \langle \overrightarrow{H}, W\rangle dM,$$

onde $\overrightarrow{H}$ *é o campo curvatura média da imersão.*

Demonstração: Pode ser encontrada em [4] .

■

Decorre deste teorema que a imersão x é mínima se, e somente se, $\left.\frac{d\mathcal{A}}{dt}\right|_{t=0} = 0$, para a função volume $\mathcal{A}$ correspondente a cada variação como definida anteriormente.

Com efeito, se x é mínima então $\overrightarrow{H} \equiv 0$, e portanto $\left.\frac{d\mathcal{A}}{dt}\right|_{t=0} = 0$, para toda variação de x. Reciprocamente, suponha que $\left.\frac{d\mathcal{A}}{dt}\right|_{t=0} = -n\int_M \langle \overrightarrow{H}, W\rangle dM = 0$, para qualquer campo W em M. Suponhamos que exista um ponto $p \in M$ tal que $\overrightarrow{H}(p) \neq 0$. Assim, pela continuidade do campo $\overrightarrow{H}$ existe uma vizinhança $U \subset M$ do ponto p tal que $\overrightarrow{H}(q) \neq 0$, $\forall\, q \in U$. Tomemos como W um campo em M de forma que $W \equiv \overrightarrow{H}$, em U e $W \equiv 0$, em $M \backslash U$. Logo,

$$\int_M \langle \overrightarrow{H}, W\rangle dM = \int_U \langle \overrightarrow{H}, W\rangle dM = \int_U \mid \overrightarrow{H} \mid^2 dM \quad > 0,$$

e então para tal campo W, $-n\int_M \langle \overrightarrow{H}, W\rangle dM \ < 0$, o que contraria nossa hipótese, mostrando que de fato devemos ter $\overrightarrow{H} \equiv 0$, ou seja, x é mínima.

Podemos dizer então que a imersão x é mínima se, e somente se, x é um ponto crítico para a função volume $\mathcal{A}$ correspondente a cada variação como definida anteriormente. Mais precisamente, pelo fato de que x é mínima se e somente se $\left.\frac{d\mathcal{A}}{dt}\right|_{t=0} = 0$, temos que o ponto $t = 0$, o qual está associado à imersão x, é um ponto crítico para a função $\mathcal{A}$ relativa a cada variação. É neste sentido que dizemos serem as imersões mínimas os pontos críticos da função volume.

Se x é uma imersão mínima, é natural então perguntar se, para cada variação, x representa um mínimo local desta função, isto é, se temos $\mathcal{A}(0) \leq \mathcal{A}(t)$, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e para toda variação de x. Como este é um problema de determinar o mínimo de uma função diferenciável $\mathcal{A} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$, é preciso conhecermos a expressão de $\left.\dfrac{d^2\mathcal{A}}{dt^2}\right|_{t=0}$, chamada *fórmula da segunda variação*, que apresentaremos a seguir.

De acordo com nosso interesse neste trabalho, faremos algumas restrições. Suporemos a partir de agora que a imersão x é mínima e tem codimensão 1, e que a variação X é normal, isto é, o campo W é um campo normal. Assim, escreveremos $W = fN$, onde $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e N é uma orientação de M. Observemos que, como X fixa o bordo de M, temos que $W|_{\partial M} \equiv 0$, e essa condição equivale a $f|_{\partial M} \equiv 0$.

Temos então o seguinte resultado.

Teorema 2.0.5 (fórmula da segunda variação).

$$\delta_f^2\mathcal{A} \;=\; \left.\frac{d^2\mathcal{A}}{dt^2}\right|_{t=0} = -\int_M \{f\Delta f + (\mathrm{Ric}_{\overline{M}}(N,N) + S)f^2\}dM,$$

onde $\mathrm{Ric}_{\overline{M}}(N,N)$ *é a curvatura de Ricci de* $\overline{M}$ *na direção* N *e* $S = |\ B\ |^2$ *é o quadrado da norma da segunda forma fundamental* B *da imersão.*

Demonstração: Pode ser encontrada em [4] .

■

Consideremos $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientada imersa em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$. Suponhamos que M compacta com bordo ∂M.
Fixado N uma orientação de M, denotemos por A o operador de M com respeito a N dado por

$$\mathrm{A} : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

$$\mathrm{A}X = -(\overline{\nabla}_X N)^T, \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Cada função suave $f \in H(M)$, onde $H(M) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M)\ ;\ f|_{\partial M} \equiv 0\}$, induz uma variação normal

$$X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to \overline{M},$$

cujo campo variacional é $W = fN$.

Podemos então considerar a função volume $\mathcal{A} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R},\ \mathcal{A}(t) = \displaystyle\int_M dM_t$.
Assim, pela fórmula da primeira variação,

$$\delta_f \mathcal{A} = \left.\frac{d\mathcal{A}}{dt}\right|_{t=0} = -n\int_M \langle \overrightarrow{H}, W\rangle dM = -n\int_M HfdM,$$

onde H é a curvatura média de x.
Como consequência, M é uma hipersuperfície mínima se, e somente se, $\delta_f\mathcal{A} = 0,\ \forall\ f \in H(M)$.

O operador estabilidade desse problema variacional é dado pela fórmula da segunda variação, como sendo

$$\delta_f^2 \mathcal{A} = \left.\frac{d^2\mathcal{A}}{dt^2}\right|_{t=0} = -\int_M \{f\Delta f + (\mathrm{Ric}_{\overline{M}}(N,N) + S)f^2\}dM.$$

Disso, definimos a forma bilinear $Q : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ agindo no espaço das funções suaves em M como

$$Q(f,g) = -\int_M \{f\Delta g + f(\mathrm{Ric}_{\overline{M}}(N,N) + S)g\}dM.$$

O *índice* de uma hipersuperfície mínima M, denotado por *Ind(M)*, é definido como sendo a dimensão máxima de qualquer subespaço V de $H(M)$ no qual Q é negativa definida, ou seja

$$Ind(M) = max\{dim\ V : V \leq H(M)\ e\ Q(f,f) < 0\ para\ toda\ f \in V\}.$$

Uma hipersuperfície mínima é dita *estável* se $Q(f,f) \geq 0$ para toda $f \in H(M)$. Caso contrário, é dita *instável*. Equivalentemente, em termos de índice, estabilidade significa que $Ind(M) = 0$.

Intuitivamente, $Ind(M)$ mede o número de direções independentes nas quais a hipersuperfície deixa de minimizar volume. Para ver isto, observe que se $Q(f,f) < 0$ para alguma $f \in H(M)$, então $\delta_f^2\mathcal{A} < 0$ e portanto $Volume(M) > Volume(M_t)$ para valores pequenos de $t \neq 0$, na variação normal induzida por f, onde M_t significa a variedade M dotada com a métrica induzida por x_t. Daí a hipersuperfície mínima M, enquanto ponto crítico do funcional volume, não é um mínimo local.

Vamos agora formalizar a definição de estabilidade, para uma hipersuperfície mínima não necessariamente compacta. De uma maneira geral, consideraremos este problema variacional para domínios limitados da variedade.

Definição 2.0.6. Seja $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima orientada imersa em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$. Seja $D \subset M$ um domínio limitado com fecho compacto. Dizemos que D é *estável* se $\delta_f^2\mathcal{A} \geq 0$ para qualquer $f \in H(\overline{D})$. Dizemos que M é *estável* se todo domínio limitado $D \subset M$, com fecho compacto, é estável.

Observação 2.0.7. Notemos que sendo $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima orientada imersa em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$, fixado N uma orientação de M temos que M é estável se, e somente se, $\forall f \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$(funções suaves com suporte compacto)

$$-\int_M \{Sf^2 + \mathrm{Ric}_{\overline{M}}(N,N)f^2 - \mid \nabla f \mid^2\}dM \ \geq \ 0.$$

Com efeito, supondo M estável seja $f \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$. Tomando $D = \mathrm{supp} f$, temos que $\overline{D} = \mathrm{supp} f$ é compacto ; também, $f|_{\partial\overline{D}} \equiv 0$, pois caso existisse $p \in \partial\overline{D}$ com $f(p) \neq 0$, pela continuidade de f existiria $V \subset M$ vizinhança de p tal que $f(q) \neq 0, \forall\ q \in V$, e então teríamos $V \subset \mathrm{supp} f$, o que não ocorre por hipótese. Assim, pela estabilidade de M, $\delta_f^2\mathcal{A} \geq 0$. Com isso,

$$\begin{aligned}
&-\int_M \{Sf^2 + \mathrm{Ric}_{\overline{M}}(N,N)f^2 - \mid \nabla f \mid^2\}dM \\
&\qquad = \int_{\overline{D}} \mid \nabla f \mid^2 dM - \int_{\overline{D}} \{Sf^2 + \mathrm{Ric}_{\overline{M}}(N,N)f^2\}dM \\
&\qquad = -\int_{\overline{D}} f\Delta f dM - \int_{\overline{D}} \{Sf^2 + \mathrm{Ric}_{\overline{M}}(N,N)f^2\}dM \\
&\qquad = -\int_{\overline{D}} \{f\Delta f + Sf^2 + \mathrm{Ric}_{\overline{M}}(N,N)f^2\}dM = \delta_f^2\mathcal{A} \ \geq 0.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\forall f \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$,

$$-\int_M \{Sf^2 + \mathrm{Ric}_{\overline{M}}(N,N)f^2 - \mid \nabla f \mid^2\}dM \geq 0.$$

Aqui, usamos o seguinte. Se $X = \nabla\left(\dfrac{f^2}{2}\right)$, usando o teorema de Stokes e o Lema(1.2.1), temos

$$\int_{\overline{D}} \Delta\left(\frac{f^2}{2}\right) dM = \int_{\overline{D}} \mathrm{div}\ X dM = \int_{\overline{D}} d(i(X)dM) = \int_{\partial\overline{D}} i\left(\nabla(\frac{f^2}{2})\right) dM = 0,$$

pois $f|_{\partial\overline{D}} \equiv 0$. Daí, usando o Lema 1.1.1 $-$ item (e) e o fato que $\Delta(\frac{f^2}{2}) = \frac{1}{2}\Delta(f^2)$, concluímos que $\int_{\overline{D}} \mid \nabla f \mid^2 dM = -\int_{\overline{D}} f\Delta f dM.$

Reciprocamente, supondo que $\forall f \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$

$$-\int_M \{Sf^2 + \mathrm{Ric}_{\overline{M}}(N,N)f^2 - \mid \nabla f \mid^2\}dM \ \geq 0,$$

seja $D \subset M$ um domínio limitado com $\overline{D}$ compacto. Tomemos $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\overline{D}), f|_{\partial \overline{D}} \equiv 0$. Consideremos $\overline{f} \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$ dada por:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \overline{D} \\ 0, & x \notin \overline{D} \end{cases}$$

Logo, $\operatorname{supp}\overline{f} \subset \overline{D}$ é compacto e então $\overline{f} \in \mathcal{C}_0^{\infty}(M)$. Daí, por hipótese, segue que

$$\begin{aligned} & -\int_{\overline{D}} \{f\Delta f + Sf^2 + \mathrm{Ric}_{\overline{M}}(N,N)f^2\} dM \\ &\qquad = -\int_{\overline{D}} \{Sf^2 + \mathrm{Ric}_{\overline{M}}(N,N)f^2 - \mid \nabla f \mid^2\} dM \\ &\qquad = -\int_{M} \{S\overline{f}^2 + \mathrm{Ric}_{\overline{M}}(N,N)\overline{f}^2 - \mid \nabla \overline{f} \mid^2\} dM \quad \geq 0, \end{aligned}$$

ou seja, D é estável. Como $D \subset M$ foi tomado arbitrário, concluímos que M é estável, como queríamos.

Capítulo 3

Estabilidade Harmônica

No presente capítulo, introduziremos o conceito de estabilidade harmônica e índice harmônico para uma hipersuperfície mínima em uma variedade Riemanniana completa qualquer. Veremos um resultado que mostra que a condição de estabilidade harmônica é mais fraca que a de estabilidade, enquanto que um segundo resultado será útil para a demonstração do teorema principal deste trabalho.

Seja M^n uma hipersuperfície mínima orientada em uma variedade Riemanniana completa N^{n+1}. Definimos uma forma bilinear através da igualdade:

$$I(X,Y) = \int_M \{\langle \nabla X, \nabla Y\rangle - (\mathrm{Ric}_N(\nu,\nu) + S)\langle X, Y\rangle\} dM,$$

para quaisquer $X, Y \in \Gamma_c(TM)$, que é o conjunto de campos de vetores tangentes com suporte compacto em M, onde S denota o quadrado da norma da segunda forma fundamental, ∇ é a conexão induzida, $\mathrm{Ric}_N(\nu,\nu)$ denota a curvatura de Ricci de N na direção do vetor normal unitário ν para M.

O *índice harmônico* de M, $h(M)$, é definido como a dimensão máxima dos espaços vetoriais nos quais $I(.,.)$ é negativa definida. Se $h(M) = 0$, M é dita *estável harmônica* .

Conforme vimos no capítulo anterior, uma hipersuperfície mínima M em uma variedade Riemanniana completa N^{n+1} é dita estável se

$$\int_M \{Sf^2 + \mathrm{Ric}_N(\nu,\nu) f^2\} dM \leq \int_M |\nabla f|^2 \, dM,$$

vale para qualquer $f \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$.

Quando o espaço ambiente $N^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$, Jiaqiang Mei e Senlin Xu, em [13], provaram que uma hipersuperfície mínima completa estável tem que ser estável harmônica. Veremos agora que tal afirmação é válida para qualquer espaço ambiente.

Proposição 3.0.8. *Uma hipersuperfície mínima orientada completa estável M^n em uma variedade Riemanniana completa N^{n+1} é estável harmônica .*

Demonstração:

Suponha M estável e não estável harmônica. Logo, deve existir um campo de vetores $X \in \Gamma_c(TM)$ tal que

$$\int_M \{\langle \nabla X, \nabla X\rangle - (\mathrm{Ric}_N(\nu,\nu) + S)\langle X, X\rangle\} dM < 0,$$

isto é,

$$\int_M \{\mathrm{Ric}_N(\nu,\nu) \mid X \mid^2 + S \mid X \mid^2\} dM > \int_M \mid \nabla X \mid^2 dM.$$

Seja $\varepsilon > 0$ um número real positivo.
Como X tem suporte compacto, existe $r > 0$ tal que $\mathrm{supp}X \subset B_p(r)$, onde $p \in \mathrm{supp}X$ é um ponto fixado e $B_p(r)$ é uma bola geodésica com raio r centrada em p.
Escolhemos uma função suave φ tal que

$$\begin{cases} \varphi = 1, & em\ B_p(r), \\ \varphi = 0, & em\ M \backslash B_p(r+1), \\ \mid \nabla\varphi \mid \leq 2, & em\ M. \end{cases}$$

Note que $\varphi|_{\mathrm{Supp}X} = 1$ e $\mathrm{supp}\varphi = \overline{B_p(r+1)}$.

Consideremos a função $f_\varepsilon = \varphi(\mid X \mid^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$. Usando o Lema 1.1.1 , temos que

$$\nabla f_\varepsilon = (\mid X \mid^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \cdot \nabla\varphi + \frac{1}{2} \cdot \varphi \cdot (\mid X \mid^2 + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \cdot \nabla(\mid X \mid^2).$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \mid \nabla f_\varepsilon \mid^2 &= \langle \nabla f_\varepsilon, \nabla f_\varepsilon \rangle \\ &= (\mid X \mid^2 + \varepsilon) \cdot \mid \nabla\varphi \mid^2 + \varphi \cdot \langle \nabla\varphi, \nabla \mid X \mid^2 \rangle \\ &+ \frac{1}{4} \frac{\varphi^2}{(\mid X \mid^2 + \varepsilon)} \mid \nabla \mid X \mid^2 \mid^2 . \end{aligned}$$

Com isto, temos que

$$
\begin{aligned}
&\int_M \{Sf_\varepsilon^2 + Ric_N(\nu,\nu)f_\varepsilon^2 - \mid \nabla f_\varepsilon \mid^2\}dM \\
&\quad = \int_M S\varphi^2 \mid X \mid^2 dM + \varepsilon \int_M S\varphi^2 dM + \int_M \mathrm{Ric}_N(\nu,\nu)\varphi^2 \mid X \mid^2 dM \\
&\qquad +\varepsilon \int_M \mathrm{Ric}_N(\nu,\nu)\varphi^2 dM - \int_M \mid X \mid^2 \mid \nabla\varphi \mid^2 dM - \varepsilon \int_M \mid \nabla\varphi \mid^2 dM \\
&\qquad - \int_M \varphi\langle \nabla\varphi, \nabla \mid X \mid^2\rangle dM - \frac{1}{4}\int_M \frac{\varphi^2}{(\mid X \mid^2 + \varepsilon)} \mid \nabla \mid X \mid^2\mid^2 dM \\
&\quad = \int_M S \mid X \mid^2 dM + \varepsilon \int_M S\varphi^2 dM + \int_M \mathrm{Ric}_N(\nu,\nu) \mid X \mid^2 dM \\
&\qquad +\varepsilon \int_M \mathrm{Ric}_N(\nu,\nu)\varphi^2 dM - \varepsilon \int_M \mid \nabla\varphi \mid^2 dM - \frac{1}{4}\int_M \frac{4 \mid \langle \nabla X, X\rangle \mid^2}{(\mid X \mid^2 + \varepsilon)} dM \\
&\quad = \int_M \{S \mid X \mid^2 + \mid X \mid^2 \mathrm{Ric}_N(\nu,\nu)\}dM + \varepsilon[\int_M \{S\varphi^2 + \mathrm{Ric}_N(\nu,\nu)\varphi^2\}dM \\
&\qquad - \int_M \mid \nabla\varphi \mid^2 dM] - \int_M \frac{\mid \langle \nabla X, X\rangle \mid^2}{(\mid X \mid^2 + \varepsilon)} dM \\
&\quad \geq \int_M \{S \mid X \mid^2 + \mid X \mid^2 \mathrm{Ric}_N(\nu,\nu)\}dM \\
&\qquad +\varepsilon \left[\int_M \{S\varphi^2 + \mathrm{Ric}_N(\nu,\nu)\varphi^2\}dM - \int_M \mid \nabla\varphi \mid^2 dM\right] - \int_M \frac{\mid \nabla X \mid^2 \mid X \mid^2}{(\mid X \mid^2 + \varepsilon)} dM \\
&\quad > \int_M \{S \mid X \mid^2 + \mid X \mid^2 \mathrm{Ric}_N(\nu,\nu)\}dM - \int_M \mid \nabla X \mid^2 dM \\
&\quad + \ \varepsilon \left[\int_M \{S\varphi^2 + \mathrm{Ric}_N(\nu,\nu)\varphi^2\}dM - \int_M \mid \nabla\varphi \mid^2 dM\right],
\end{aligned}
$$

onde usamos que $\varphi \mid_{\mathrm{supp}} X = 1$ e o Lema 1.4.1.

Por hipótese, M não é estável harmônica e M é estável. Assim, pela desigualdade acima e do fato de ε ser tomado arbitrário, tomando ε pequeno o suficiente, podemos garantir então que

$$\int_M \{Sf_\varepsilon^2 + \mathrm{Ric}_N(\nu,\nu)f_\varepsilon^2 - \mid \nabla f_\varepsilon \mid^2\}dM > 0$$

isto é,

$$\int_M \{Sf_\varepsilon^2 + \mathrm{Ric}_N(\nu,\nu)f_\varepsilon^2\}dM > \int_M \mid \nabla f_\varepsilon \mid^2 dM > 0,$$

contrariando a hipótese de M ser estável. Portanto, M é estável harmônica .

■

O seguinte lema será utilizado para provar a próxima proposição.

Lema 3.0.9. *Seja $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ sequência de números reais satisfazendo $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 0$. Então, para cada j, tem-se*

$$\lambda_j^2 \leq \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^n \lambda_j^2.$$

Demonstração:

Como $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 0$, então para cada j fixado,

$$\begin{aligned}\lambda_j^2 &= (-\sum_{i\neq j}\lambda_i)^2 = \sum_{i\neq j}\lambda_i^2 + \sum_{i<k,i,k\neq j} 2\lambda_i\lambda_k\\ &\leq \sum_{i\neq j}\lambda_i^2 + \sum_{i<k,i,k\neq j} \lambda_i^2+\lambda_k^2,\end{aligned}$$

já que

$$0 \leq (\lambda_i-\lambda_k)^2 = \lambda_i^2 - 2\lambda_i\lambda_k + \lambda_k^2$$

implica que

$$2\lambda_i\lambda_k \;\leq\; \lambda_i^2+\lambda_k^2\;,\;\forall\, i,k.$$

Agora observe que, $\forall\, i,k \in \{1,\ldots,n\}$,

$$\begin{aligned}\sum_{i<k}(\lambda_i^2+\lambda_k^2) &= \sum_{k>1}(\lambda_1^2+\lambda_k^2) + \sum_{k>2}(\lambda_2^2+\lambda_k^2) + \ldots + \sum_{k>n-2}(\lambda_{n-2}^2+\lambda_k^2) + \lambda_{n-1}^2+\lambda_n^2\\ &= (n-1)\lambda_1^2 + (\lambda_2^2+\ldots+\lambda_n^2) + (n-2)\lambda_2^2 + (\lambda_3^2+\ldots+\lambda_n^2)\\ &\quad + \ldots + 2\lambda_{n-2}^2 + \lambda_{n-1}^2 + \lambda_n^2 + \lambda_{n-1}^2 + \lambda_n^2\\ &= (n-1)\lambda_1^2 + (n-1)\lambda_2^2 + \ldots + (n-1)\lambda_n^2\\ &= (n-1)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2.\end{aligned}$$

Daí,

$$\sum_{i<k,i,k\neq j}\lambda_i^2+\lambda_k^2 \;=\; (n-2)\sum_{i\neq j}\lambda_i^2$$

e portanto

$$\lambda_j^2 \;\leq\; \sum_{i\neq j}\lambda_i^2 + (n-2)\sum_{i\neq j}\lambda_i^2 \;=\; (n-1)\sum_{i\neq j}\lambda_i^2,$$

para cada j fixado.

Como $(n-1)\lambda_j^2 \geq 0$, obtemos que

$$(n-1)\lambda_j^2 + \lambda_j^2 \;\leq\; (n-1)\lambda_j^2 + (n-1)\sum_{i\neq j}\lambda_i^2$$

ou seja,

$$n\lambda_j^2 \;\leq\; (n-1)\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2$$

e então

$$\lambda_j^2 \le \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \,,$$

como queríamos demonstrar.

■

A próxima proposição será bastante útil para a prova do teorema principal deste trabalho, e nos dá uma estimativa para a curvatura de Ricci.

Proposição 3.0.10. *Seja M^n uma hipersuperfície em uma variedade Riemanniana N^{n+1}. Então, para qualquer ponto $p \in M$*

$$\mathrm{Ric}_M(v,v) \ \ge \ \sum_{\alpha=2}^{n} K_N(v,e_\alpha) + 2(n-1)H^2 - \frac{n-1}{n}S - \frac{n-2}{n}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sqrt{n^2H^2(S-nH^2)},$$

onde $\{e_1 = v, e_2, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal de T_pM e K_N denota a curvatura seccional da variedade ambiente N^{n+1}.

Demonstração:

Como M é uma hipersuperfície, em cada ponto $p \in M$ podemos escolher um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ tal que $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, onde os $h'_{ij}s$ são as componentes da segunda forma fundamental de M e os $\lambda'_i s$ denotam as curvaturas principais de M. De fato, como A é auto-adjunta, tomando $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ como a base de auto-vetores de A, isto é, $A(e_i) = \lambda_i e_i$, temos $h_{ij} = \langle A(e_i), e_j\rangle = \langle \lambda_i e_i, e_j\rangle = \lambda_i \delta_{ij}$.
Então, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ fixado,

$$h_{jj} nH - \sum_{i=1}^{n} h_{ij}h_{ji} \ = \ \lambda_j nH - (h_{jj})^2 \ = \ nH\lambda_j - \lambda_j^2. \tag{3.1}$$

Como

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n}(\lambda_j - H) \ &= \ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j - \sum_{j=1}^{n} H \ = \ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j - nH \\ &= \ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j - \sum_{j=1}^{n}\lambda_j \ = \ 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j - H)^2 &= \sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^2 - \lambda_j H - H\lambda_j + H^2)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2 - H\sum_{j=1}^{n}\lambda_j + \sum_{j=1}^{n}H(H-\lambda_j)\\ &= S - HnH - H\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j - H)\\ &= S - nH^2,\end{aligned}$$

já que $\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j - H) = 0$, então usando o lema anterior podemos concluir que

$$(\lambda_j - H)^2 \leq \frac{n-1}{n}(S - nH^2),$$

para cada j fixado.

Então, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, temos

$$\begin{aligned}\lambda_j^2 - nH\lambda_j &= (\lambda_j - H)^2 - (n-2)H(\lambda_j - H) - (n-1)H^2\\ &\leq \frac{n-1}{n}(S - nH^2) + (n-2) \mid H \mid \sqrt{\frac{n-1}{n}}\sqrt{S - nH^2} - (n-1)H^2\\ &= (\frac{n-1}{n})S - 2(n-1)H^2 + \frac{n-2}{n}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sqrt{n^2H^2(S - nH^2)},\end{aligned}$$

onde usamos que

$$(\lambda_j - H)^2 \leq \frac{n-1}{n}(S - nH^2)$$

implica

$$\mid \lambda_j - H \mid \leq \sqrt{\frac{n-1}{n}(S - nH^2)}.$$

Logo,

$$-\sqrt{\frac{n-1}{n}(S - nH^2)} \leq \lambda_j - H \leq \sqrt{\frac{n-1}{n}(S - nH^2)},$$

resultando em

$$-H(\lambda_j - H) \leq \mid H \mid \sqrt{\frac{n-1}{n}(S - nH^2)}$$

para ambos os casos $H > 0$ ou $H < 0$.

Da última igualdade e de (3.1) , concluímos que

$$\begin{aligned}h_{jj}nH - \sum_{i=1}^{n}h_{ij}h_{ji} &= -(\lambda_j^2 - nH\lambda_j)\\ &\geq 2(n-1)H^2 - (\frac{n-1}{n})S - \frac{n-2}{n}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sqrt{n^2H^2(S - nH^2)}. \quad (3.2)\end{aligned}$$

Assim, em cada ponto $p \in M$, escolhendo o referencial $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ como sendo formado pelas direções principais e denotando $v = e_1$, da equação de Gauss segue que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_M(v,v) = \mathrm{Ric}_M(e_1,e_1) = \textstyle\sum_{\alpha=2}^n \langle R_M(e_1,e_\alpha)e_1, e_\alpha\rangle & \\
= \ & \sum_{\alpha=2}^n \langle R_N(e_1,e_\alpha)e_1,e_\alpha\rangle + \langle B(e_\alpha,e_\alpha), B(e_1,e_1)\rangle - \langle B(e_1,e_\alpha), B(e_\alpha,e_1)\rangle \\
= \ & \sum_{\alpha=2}^n K_N(e_1,e_\alpha) \ + \ \sum_{\alpha=2}^n \langle H_\eta(e_\alpha,e_\alpha)\cdot\eta, H_\eta(e_1,e_1)\cdot\eta\rangle - \sum_{\alpha=2}^n \langle H_\eta(e_1,e_\alpha)\cdot\eta, H_\eta(e_\alpha,e_1)\cdot\eta\rangle \\
= \ & \sum_{\alpha=2}^n K_N(e_1,e_\alpha) \ + \ \sum_{\alpha=2}^n h_{\alpha\alpha}\cdot h_{11} \ - \ \sum_{\alpha=2}^n h_{1\alpha}\cdot h_{\alpha 1} \\
= \ & \sum_{\alpha=2}^n K_N(e_1,e_\alpha) \ + \ \sum_{\alpha=2}^n \lambda_\alpha\lambda_1 \ = \ \sum_{\alpha=2}^n K_N(e_1,e_\alpha) \ + \ \lambda_1(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) \ - \ \lambda_1^2 \\
= \ & \sum_{\alpha=2}^n K_N(e_1,e_\alpha) \ + \ h_{11}nH \ - \ \sum_{i=1}^n h_{i1}h_{1i}.
\end{aligned}
$$

Com isso, usando (3.2) para $j = 1$ nós obtemos

$$
\mathrm{Ric}_M(v,v) \ \geq \ \sum_{\alpha=2}^n K_N(v,e_\alpha) + 2(n-1)H^2 - \frac{n-1}{n}S - \frac{n-2}{n}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sqrt{n^2H^2(S-nH^2)},
$$

como queríamos.

■

Capítulo 4

Superfícies Mínimas Estáveis Harmônicas

Este capítulo é dedicado ao principal resultado deste trabalho. Tal teorema generaliza os teoremas provados por Do Carmo e Peng [8] e Fisher-Colbrie e Schoen [11] para uma hipersuperfície mínima completa M^2 em uma variedade Riemanniana N^3. A saber, é dada uma classificação de superfícies mínimas completas estáveis harmônicas em uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci não negativa, como segue

Teorema 4.0.11. *Seja N^3 uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci não negativa e M^2 uma superfície mínima orientada completa estável harmônica em N^3. Então, M é conformemente equivalente ao plano $\mathbb{R}^2$ ou ao cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.*

Demonstração:

Consideremos $\widetilde{M}$ o recobrimento universal de M. Afirmamos que se M é estável harmônica então $\widetilde{M}$ é também estável harmônica. De fato, seja X um campo de vetores qualquer com suporte compacto em $\widetilde{M}$ e escrevamos $X(\overline{p}) = \sum_j X_j E_j(\overline{p})$, onde $\{E_j\}_{j=1}^2$ é um referencial ortonormal em $T_{\widetilde{p}}\widetilde{M}$.
A partir de X, definamos um campo de vetores $\overline{X}$ em M como

$$\overline{X}(p) = \sum_j \overline{X}_j \overline{E}_j(p),$$

onde $\{\overline{E}_j\}_{j=1}^2$ é um referencial ortonormal em T_pM, de forma que as funções $\overline{X}_j$ satisfaçam

$$| \overline{X}_j |^2 (p) = \sum_{\overline{p} \in \pi^{-1}(p)} | X_j |^2 (\overline{p}),$$

onde $\pi : \widetilde{M} \to M$ é a aplicação de recobrimento.
Então, $\overline{X}$ é um campo de vetores com suporte compacto em M e $| \overline{X} |^2 (p) = \sum_{\overline{p} \in \pi^{-1}(p)} | X |^2 (\overline{p}),\ \forall\, p \in M$. De fato, para cada $p \in M$,

$$\begin{aligned} | \overline{X} |^2 (p) &= \sum_j | \overline{X}_j |^2 (p) \;=\; \sum_j \sum_{\overline{p} \in \pi^{-1}(p)} | X_j |^2 (\overline{p}) \\ &= \sum_{\overline{p} \in \pi^{-1}(p)} \sum_j | X_j |^2 (\overline{p}) \;=\; \sum_{\overline{p} \in \pi^{-1}(p)} | X |^2 (\overline{p}). \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned} \mathrm{supp}\overline{X} &= \overline{\{p \in M : \overline{X}(p) \neq 0\}} \;=\; \overline{\{p \in M : | \overline{X} |^2 (p) \neq 0\}} \\ &= \overline{\{p \in M : \sum_{\overline{p} \in \pi^{-1}(p)} | X |^2 (\overline{p}) \neq 0\}} \\ &= \overline{\{p \in M : | X |^2 (\overline{p}) \neq 0,\ \textit{para algum}\ \overline{p} \in \pi^{-1}(p)\}} \\ &= \overline{\{p \in M : X(\overline{p}) \neq 0,\ \textit{para algum}\ \overline{p} \in \pi^{-1}(p)\}} \\ &= \overline{\{p \in M : \exists\, \overline{p} \in \pi^{-1}(p),\ \overline{p} \in \mathrm{supp}X\}} \\ &= \overline{\pi(\mathrm{supp}X)} \;=\; \pi(\mathrm{supp}X)\ , \end{aligned}$$

que é compacto, já que $\mathrm{supp}X$ é compacto e π é uma aplicação contínua.

Observemos agora que sendo M^2 uma superfície mínima em N^3, temos que

$$\frac{1}{2} S \mid X \mid^2 - K_M \mid X \mid^2 = \ S \mid X \mid^2,$$

onde K_M denota a curvatura de Gauss-Kroneker de M. De fato, sendo λ_1, λ_2 as curvaturas principais de M, segue que

$$0 \;=\; (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \;=\; \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 \;=\; S + 2K_M,$$

e então

$$\frac{1}{2} S \;=\; -K_M.$$

Logo,

$$S \mid X \mid^2 = \ \frac{1}{2} S \mid X \mid^2 + \frac{1}{2} S \mid X \mid^2 = \ \frac{1}{2} S \mid X \mid^2 - K_M \mid X \mid^2 .$$

Sejam $\widetilde{S}$, $\widetilde{\mathrm{Ric}_N}$ e $\widetilde{K_M}$ as funções levantamento de S, Ric_N e K_M a $\widetilde{M}$. Denotando-as simplesmente por S, Ric_N e K_M, do que acabamos de observar e usando que

$$\mid \overline{X} \mid^2 (p) = \sum_{\overline{p} \,\in\, \pi^{-1}(p)} \mid X \mid^2 (\overline{p}),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{M}} \{ S \mid X \mid^2 + \mathrm{Ric}_N \mid X \mid^2 \} d\widetilde{M} &= \int_{\widetilde{M}} \{ \frac{1}{2} S \mid X \mid^2 + \mathrm{Ric}_N \mid X \mid^2 - K_M \mid X \mid^2 \} d\widetilde{M} \\
&= \int_M \{ \frac{1}{2} S \mid \overline{X} \mid^2 + \mathrm{Ric}_N \mid \overline{X} \mid^2 - K_M \mid \overline{X} \mid^2 \} dM \\
&= \int_M \{ S \mid \overline{X} \mid^2 + \mathrm{Ric}_N \mid \overline{X} \mid^2 \} dM \\
&\leq \int_M \mid \nabla \overline{X} \mid^2 dM,
\end{aligned}$$

usando o fato de M ser estável harmônica.

Por outro lado, como

$$\nabla \mid \overline{X}_j \mid^2 = \nabla (\overline{X}_j)^2 = 2 \overline{X}_j \nabla \overline{X}_j,$$

pelo Lema 1.1.1−item (b) , segue que $\mid \nabla \mid \overline{X}_j \mid^2 \mid^2 = 4 \mid \overline{X}_j \mid^2 \mid \nabla \overline{X}_j \mid^2$, e daí

$$\begin{aligned}
\mid \nabla \overline{X}_j \mid^2 (p) &= \frac{\mid \nabla \mid \overline{X}_j \mid^2 \mid^2 (p)}{4 \mid \overline{X}_j \mid^2 (p)} = \frac{\mid \nabla (\sum_{\overline{p} \,\in\, \pi^{-1}(p)} \mid X_j \mid^2) \mid^2 (\overline{p})}{4 \sum_{\overline{p} \,\in\, \pi^{-1}(p)} \mid X_j \mid^2 (\overline{p})} \\
&= \frac{\mid \sum_{\overline{p} \,\in\, \pi^{-1}(p)} \nabla \mid X_j \mid^2 (\overline{p}) \mid^2}{4 \sum_{\overline{p} \,\in\, \pi^{-1}(p)} \mid X_j \mid^2 (\overline{p})}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mid \overline{X}_j \mid^2 \mid \nabla \overline{X}_j \mid^2 (p) &= \sum_{\overline{p} \,\in\, \pi^{-1}(p)} \mid X_j \mid^2 (\overline{p}) \frac{\mid \sum_{\overline{p} \,\in\, \pi^{-1}(p)} \nabla \mid X_j \mid^2 (\overline{p}) \mid^2}{4 \sum_{\overline{p} \,\in\, \pi^{-1}(p)} \mid X_j \mid^2 (\overline{p})} \\
&= \frac{\mid \sum_{\overline{p} \,\in\, \pi^{-1}(p)} 2 \cdot X_j \cdot \nabla X_j(\overline{p}) \mid^2}{4} \\
&= \mid \sum_{\overline{p} \,\in\, \pi^{-1}(p)} X_j \cdot \nabla X_j(\overline{p}) \mid^2 \\
&\leq \sum_{\overline{p} \,\in\, \pi^{-1}(p)} \mid X_j \mid^2 \sum_{\overline{p} \,\in\, \pi^{-1}(p)} \mid \nabla X_j \mid^2 (\overline{p}) \\
&= \mid \overline{X}_j \mid^2 \sum_{\overline{p} \,\in\, \pi^{-1}(p)} \mid \nabla X_j \mid^2 (\overline{p}) \,,
\end{aligned}$$

onde usamos novamente o Lema 1.1.1−item (b) e a desigualdade de Schwarz .
Portanto,

$$| \nabla \overline{X}_j |^2 (p) \leq \sum_{\overline{p} \in \pi^{-1}(p)} | \nabla X_j |^2 (\overline{p}) .$$

Escolhamos os referenciais $\{\overline{E}_j\}_{j=1}^2$ e $\{E_j\}_{j=1}^2$ como sendo os referenciais geodésicos em $p \in M$ e $\overline{p} \in \widetilde{M}$, respectivamente. Então, em p,

$$\begin{aligned}
| \nabla \overline{X} |^2 &= \sum_j | \nabla \overline{X}(\overline{E}_j) |^2 = \sum_j | \nabla_{\overline{E}_j} \overline{X} |^2 \\
&= \sum_j | \nabla_{\overline{E}_j} (\sum_i \overline{X_i E_i}) |^2 \\
&= \sum_j | \sum_i \overline{X_i} (\nabla_{\overline{E}_j} \overline{E_i}) + \overline{E}_j(\overline{X_i}) \overline{E_i} |^2 \\
&= \sum_j | \sum_i \overline{E}_j(\overline{X_i}) \overline{E_i} |^2 \\
&= \sum_j \langle \sum_i \overline{E}_j(\overline{X_i}) \overline{E_i}, \sum_k \overline{E}_j(\overline{X_k}) \overline{E_k} \rangle \\
&= \sum_j \sum_{i,k} \overline{E}_j(\overline{X_i}) \overline{E}_j(\overline{X_k}) \delta_{ik} \\
&= \sum_j \sum_i (\overline{E}_j(\overline{X_i}))^2 \\
&= \sum_i \sum_j (\overline{E}_j(\overline{X_i}))^2 = \sum_i | \nabla \overline{X}_i |^2 ,
\end{aligned}$$

onde usamos a propriedade (1.15) de conexão induzida e o fato de ser $\{E_j\}_{j=1}^2$ um referencial geodésico em $p \in M$. Ou seja, em $p \in M$, $| \nabla \overline{X} |^2 = \sum_i | \nabla \overline{X}_i |^2$, e analogamente, em $\overline{p} \in \widetilde{M}$, $| \nabla X |^2 = \sum_i | \nabla X_i |^2$.
Disto, segue que

$$\begin{aligned}
| \nabla \overline{X} |^2 (p) &= \sum_i | \nabla \overline{X}_i |^2 (p) \\
&\leq \sum_i \sum_{\overline{p} \in \pi^{-1}(p)} | \nabla X_i |^2 (\overline{p}) \\
&= \sum_{\overline{p} \in \pi^{-1}(p)} \sum_i | \nabla X_i |^2 (\overline{p}) \\
&= \sum_{\overline{p} \in \pi^{-1}(p)} | \nabla X |^2 (\overline{p}).
\end{aligned}$$

Como p e $\overline{p}$ são arbitrários, temos

$$\int_M | \nabla \overline{X} |^2 \, dM \leq \int_{\widetilde{M}} | \nabla X |^2 \, d\widetilde{M}.$$

Portanto,

$$\int_{\widetilde{M}} \{ S \mid X \mid^2 + \mathrm{Ric}_N \mid X \mid^2 \} d\widetilde{M} \leq \int_M \mid \nabla \overline{X} \mid^2 dM \leq \int_{\widetilde{M}} \mid \nabla X \mid^2 d\widetilde{M} ,$$

e pela arbitrariedade da escolha do campo $X \in \Gamma_c(T\widetilde{M})$, concluímos que $\widetilde{M}$ é estável harmônica, o que prova a nossa afirmação.

Pelo Teorema de Uniformização de Koebe (teorema 1.5.2), $\widetilde{M}$ tem que ser conformemente equivalente ao disco unitário D^2 ou ao plano $\mathbb{R}^2$. Suponhamos que $\widetilde{M}$ seja conformemente equivalente ao disco unitário. Podemos usar o seguinte diagrama

$$\widetilde{M} \longrightarrow_{Conf.} D^2 \longrightarrow_{Isomet.} H^2 \longrightarrow_{Conf.} \mathbb{R}^2_+$$

É conhecido da teoria de equações diferenciais parciais que existem funções harmônicas limitadas não-constantes em $\mathbb{R}^2_+$ (veja, por exemplo, [10]). Como a propriedade harmônica em dimensão 2 é invariante sobre transformação conforme (Corolário 1.1.4), concluímos que existem funções harmônicas limitadas não-constantes em $\widetilde{M}$.
Seja u uma tal função harmônica. Pela fórmula de Bochner-Weizenbock (teorema 1.3.4), temos

$$\frac{1}{2}\Delta \mid \nabla u \mid^2 = Ric_{\widetilde{M}}(\nabla u, \nabla u) + \mid \nabla^2 u \mid^2,$$

onde $\nabla^2 u = \nabla(\nabla u) = \mathrm{Hess}\, u$.
Fixemos um ponto $\overline{p} \in \widetilde{M}$, e denotemos $B_{\overline{p}}(r)$ a bola geodésica com raio r e centrada em $\overline{p}$. Escolhamos uma função suave φ_r com suporte compacto, tal que

$$\begin{cases} \varphi_r = 1, & em\ B_{\overline{p}}(r), \\ \varphi_r = 0, & em\ \widetilde{M} \backslash B_{\overline{p}}(r+1), \\ \mid \nabla \varphi_r \mid \leq 1, & em\ \widetilde{M}. \end{cases}$$

Consideremos o campo de vetores $X_r = \varphi_r \nabla u$, que claramente pertence a $\Gamma_c(T\widetilde{M})$. Como $\widetilde{M}$ é estável harmônica, sabemos que

$$\int_{\widetilde{M}} \{ S \mid X_r \mid^2 + \mathrm{Ric}_N(\nu, \nu) \mid X_r \mid^2 \} d\widetilde{M} \leq \int_{\widetilde{M}} \mid \nabla X_r \mid^2 d\widetilde{M}. \tag{4.1}$$

Seja $\{E_i\}_{i=1}^2$ um referencial ortonormal em $\widetilde{M}$. Como $X_r = \varphi_r \nabla u$, temos que

$$
\begin{aligned}
|\nabla X_r|^2 = \textstyle\sum_i |\nabla X_r(E_i)|^2 = \sum_i \langle \nabla_{E_i} X_r, \nabla_{E_i} X_r \rangle \\
&= \sum_i \langle\, \nabla_{E_i}(\varphi_r \nabla u), \nabla_{E_i}(\varphi_r \nabla u)\,\rangle \\
&= \sum_i \langle\, \varphi_r \nabla_{E_i}\nabla u \;+\; E_i(\varphi_r)\nabla u \;,\; \varphi_r \nabla_{E_i}\nabla u \;+\; E_i(\varphi_r)\nabla u \,\rangle \\
&= \sum_i \varphi_r^2 \,|\, \nabla_{E_i}\nabla u \,|^2 \;+ 2\varphi_r E_i(\varphi_r)\,\langle \nabla_{E_i}\nabla u, \nabla u\rangle \;+\; (E_i(\varphi_r))^2 \,|\, \nabla u \,|^2 \\
&= \varphi_r^2 \sum_i |\, \nabla\nabla u(E_i)\,|^2 \;+ \varphi_r \cdot \sum_i E_i(\varphi_r)\cdot 2\,\langle \nabla_{E_i}\nabla u, \nabla u\rangle \;+\; |\,\nabla u\,|^2 \cdot \sum_i (E_i(\varphi_r))^2 \\
&= \varphi_r^2 \,|\, \nabla(\nabla u)\,|^2 \;+ \varphi_r \cdot \sum_i E_i(\varphi_r)\cdot E_i\,\langle \nabla u, \nabla u\rangle \;+\; |\,\nabla u\,|^2 |\,\nabla\varphi_r\,|^2 \\
&= \varphi_r^2 \,|\, \nabla^2 u\,|^2 \;+ \varphi_r \cdot \sum_i \langle\, E_i(\varphi_r)E_i \;,\; E_i\,\langle \nabla u, \nabla u\rangle\, E_i \,\rangle \;+\; |\,\nabla u\,|^2 |\,\nabla\varphi_r\,|^2 \\
&= \varphi_r^2 \,|\, \nabla^2 u\,|^2 \;+ \varphi_r \cdot \left\langle \sum_i E_i(\varphi_r)E_i \;,\; \sum_j E_j \,|\,\nabla u\,|^2 \cdot E_j \right\rangle \;+\; |\,\nabla u\,|^2 |\,\nabla\varphi_r\,|^2 \\
&= \varphi_r^2 \,|\, \nabla^2 u\,|^2 \;+ \varphi_r \cdot \big\langle \nabla\varphi_r \;,\; \nabla \,|\,\nabla u\,|^2 \big\rangle \;+\; |\,\nabla u\,|^2 |\,\nabla\varphi_r\,|^2 \\
&= |\,\nabla u\,|^2 |\,\nabla\varphi_r\,|^2 \;+\; \big\langle \varphi_r\nabla\varphi_r \;,\; \nabla \,|\,\nabla u\,|^2 \big\rangle \;+\; \varphi_r^2 \left(\frac{1}{2}\Delta \,|\,\nabla u\,|^2 \;-\, \mathrm{Ric}_{\widetilde{M}}(\nabla u, \nabla u) \right) \\
&= |\,\nabla u\,|^2 |\,\nabla\varphi_r\,|^2 \;+\; \left\langle \frac{1}{2}\nabla\varphi_r^2 \;,\; \nabla \,|\,\nabla u\,|^2 \right\rangle \;+\; \frac{1}{2}\cdot\varphi_r^2\cdot\Delta\,|\,\nabla u\,|^2 \;-\, \varphi_r^2\cdot \mathrm{Ric}_{\widetilde{M}}(\nabla u, \nabla u)\;,
\end{aligned}
$$

onde foram usados (1.15), (1.1), a fórmula de Bochner-Weizenbock e o fato do referencial $\{E_i\}_{i=1}^2$ ser ortonormal.

Logo,

$$
\begin{aligned}
\int_{\widetilde{M}} |\,\nabla X_r\,|^2\, d\widetilde{M} \\
&= \int_{\widetilde{M}} |\,\nabla u\,|^2 |\,\nabla\varphi_r\,|^2\, d\widetilde{M} \;+\; \frac{1}{2}\int_{\widetilde{M}} \big\{\, \big\langle \nabla\varphi_r^2 \;,\; \nabla\,|\,\nabla u\,|^2 \big\rangle \;+\; \varphi_r^2\cdot\Delta\,|\,\nabla u\,|^2 \,\big\}\, d\widetilde{M} \\
&\quad - \int_{\widetilde{M}} \big\{\, \varphi_r^2 \cdot \mathrm{Ric}_{\widetilde{M}}(\nabla u, \nabla u)\,\big\}\, d\widetilde{M} \\
&= \int_{\widetilde{M}} \big\{\, |\,\nabla u\,|^2 |\,\nabla\varphi_r\,|^2 \;-\; \varphi_r^2\cdot \mathrm{Ric}_{\widetilde{M}}(\nabla u, \nabla u)\,\big\}\, d\widetilde{M}\;,
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

pois pela *fórmula de Green* (1.5) ,

$$
\begin{aligned}
\int_{\widetilde{M}} \big\{\, \varphi_r^2\cdot\Delta\,|\,\nabla u\,|^2 \;+\; \big\langle \nabla\varphi_r^2 \;,\; \nabla\,|\,\nabla u\,|^2 \big\rangle \,\big\}\, d\widetilde{M} \\
&= \int_{\partial\widetilde{M}} \varphi_r^2 \,\big\langle \nabla\,|\,\nabla u\,|^2, \eta \big\rangle\, dA = 0,
\end{aligned}
$$

já que $\partial\widetilde{M} \;\equiv\; \emptyset$.

Pela bilinearidade do tensor de Ricci, segue que

$$\mathrm{Ric}_{\widetilde{M}}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|},\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \;=\; \frac{1}{|\nabla u|^2}\cdot \mathrm{Ric}_{\widetilde{M}}(\nabla u,\nabla u)\ ,$$

isto é ,

$$\mathrm{Ric}_{\widetilde{M}}(\nabla u,\nabla u) \;= |\nabla u|^2 \cdot \mathrm{Ric}_{\widetilde{M}}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|},\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right), \tag{4.3}$$

onde $\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}$ é um campo unitário.

Sendo $\{e_1, e_2\}$ a base de direções principais em $\widetilde{M}$, escrevemos

$$\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \;=\; c_1e_1 + c_2e_2\ ,\quad c_1^2 + c_2^2 \;=\; 1\ .$$

Assim,

$$\mathrm{Ric}_{\widetilde{M}}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|},\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = c_1^2\mathrm{Ric}_{\widetilde{M}}(e_1,e_1) + 2c_1c_2\mathrm{Ric}_{\widetilde{M}}(e_1,e_2) + c_2^2\mathrm{Ric}_{\widetilde{M}}(e_2,e_2).$$

Mas,

$$\mathrm{Ric}_{\widetilde{M}}(e_1,e_2) \;=\; \langle R(e_1,e_1)e_2,e_1\rangle \;+\; \langle R(e_1,e_2)e_2,e_2\rangle \;=\; 0\ ,$$

como também

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_{\widetilde{M}}(e_1,e_1) \;&=\; \langle R(e_1,e_2)e_1,e_2\rangle = \langle R(e_2,e_1)e_2,e_1\rangle \\
&=\; \mathrm{Ric}_{\widetilde{M}}(e_2,e_2) \\
&=\; K_{\widetilde{M}}(e_1,e_2)\ .
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_{\widetilde{M}}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|},\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \;&=\; c_1^2\mathrm{Ric}_{\widetilde{M}}(e_1,e_1) + c_2^2\mathrm{Ric}_{\widetilde{M}}(e_2,e_2) \\
&=\; (c_1^2+c_2^2)\mathrm{Ric}_{\widetilde{M}}(e_1,e_1) \\
&=\; \mathrm{Ric}_{\widetilde{M}}(e_1,e_1)
\end{aligned}$$

e então pela Proposição 3.1.3 ,

$$\mathrm{Ric}_{\widetilde{M}}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|},\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = \mathrm{Ric}_{\widetilde{M}}(e_1,e_1) \;\geq\; K_N(e_1,e_2) \;-\; \frac{1}{2}S. \tag{4.4}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_N(\nu,\nu) = K_N(e_1,\nu) + K_N(e_2,\nu) \;&\geq 0,\\
\mathrm{Ric}_N(e_1,e_1) = K_N(e_2,e_1) + K_N(\nu,e_1) \;&\geq 0,\\
\mathrm{Ric}_N(e_2,e_2) = K_N(e_1,e_2) + K_N(\nu,e_2) \;&\geq 0,
\end{aligned}$$

e disto obtemos

$$\mathrm{Ric}_N(\nu,\nu) \;-\; \mathrm{Ric}_N(e_1,e_1) \;-\; \mathrm{Ric}_N(e_2,e_2) \;=\; -2K_N(e_1,e_2)\;,$$

ou seja,

$$-K_N(e_1,e_2) \;=\; \frac{1}{2}\left(\mathrm{Ric}_N(\nu,\nu) \;-\; \mathrm{Ric}_N(e_1,e_1) \;-\; \mathrm{Ric}_N(e_2,e_2)\right). \qquad (4.5)$$

Assim, usando (4.3) e (4.4) concluimos que

$$\begin{aligned}
-\mathrm{Ric}_{\widetilde{M}}(\nabla u,\nabla u) &\leq \mid \nabla u \mid^2 \left(-K_N(e_1,e_2) \;+\; \frac{1}{2}S\right)\\
&= \mid \nabla u \mid^2 \frac{1}{2}\left(\mathrm{Ric}_N(\nu,\nu) \;-\; \mathrm{Ric}_N(e_1,e_1) \;-\; \mathrm{Ric}_N(e_2,e_2)\right) \;+\; \frac{1}{2}S \mid \nabla u \mid^2\\
&\leq \frac{1}{2}\mathrm{Ric}_N(\nu,\nu) \mid \nabla u \mid^2 \;+\; \frac{1}{2}S \mid \nabla u \mid^2,
\end{aligned}$$

já que N possui curvatura de Ricci não negativa, pela hipótese do teorema. Logo,

$$-\varphi_r^2\mathrm{Ric}_{\widetilde{M}}(\nabla u,\nabla u) \;\leq\; \frac{1}{2}S\varphi_r^2 \mid \nabla u \mid^2 \;+\; \frac{1}{2}\mathrm{Ric}_N(\nu,\nu)\varphi_r^2 \mid \nabla u \mid^2 \;.$$

Então, (4.2) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{M}} \mid \nabla X_r \mid^2 d\widetilde{M} &= \int_{\widetilde{M}} \{ \mid \nabla\varphi_r \mid^2 \mid \nabla u \mid^2 \;-\; \varphi_r^2 \cdot \mathrm{Ric}_{\widetilde{M}}(\nabla u,\nabla u) \}\, d\widetilde{M}\\
&\leq \int_{\widetilde{M}} \left\{ \mid \nabla\varphi_r \mid^2 \mid \nabla u \mid^2 \;+\; \frac{1}{2}S\varphi_r^2 \mid \nabla u \mid^2 \;+\; \frac{1}{2}\mathrm{Ric}_N(\nu,\nu)\varphi_r^2 \mid \nabla u \mid^2 \right\} d\widetilde{M}\;.
\end{aligned}$$

Disso e de (4.1) temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{M}} \{ S \mid X_r \mid^2 + \mathrm{Ric}_N(\nu,\nu) \mid X_r \mid^2 \}\, d\widetilde{M} \;\leq\; &\int_{\widetilde{M}} \{ \mid \nabla\varphi_r \mid^2 \mid \nabla u \mid^2 \;+\; \frac{1}{2}S\varphi_r^2 \mid \nabla u \mid^2\\
&+\frac{1}{2}\mathrm{Ric}_N(\nu,\nu)\varphi_r^2 \mid \nabla u \mid^2 \} d\widetilde{M}\;,
\end{aligned}$$

e como $X_r = \varphi_r \nabla u$ obtemos

$$\int_{\widetilde{M}} \left\{ \frac{1}{2}S\varphi_r^2 \mid \nabla u \mid^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Ric}_N(\nu,\nu)\varphi_r^2 \mid \nabla u \mid^2 \right\} d\widetilde{M} \;\leq\; \int_{\widetilde{M}} \mid \nabla\varphi_r \mid^2 \mid \nabla u \mid^2 \, d\widetilde{M}.$$

Daí, pela definição de φ_r, segue que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{\overline{p}}(r)} \left\{ \frac{1}{2}S \mid \nabla u \mid^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Ric}_N(\nu,\nu) \mid \nabla u \mid^2 \right\} d\widetilde{M}\\
&\qquad\leq \int_{\widetilde{M}} \left\{ \frac{1}{2}S\varphi_r^2 \mid \nabla u \mid^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Ric}_N(\nu,\nu)\varphi_r^2 \mid \nabla u \mid^2 \right\} d\widetilde{M}\\
&\qquad\leq \int_{\widetilde{M}} \mid \nabla\varphi_r \mid^2 \mid \nabla u \mid^2 \, d\widetilde{M}\\
&\qquad\leq \int_{B_{\overline{p}}(r+1)\setminus B_{\overline{p}}(r)} \mid \nabla u \mid^2 \, d\widetilde{M}.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int_{B_{\overline{p}}(r)} \left\{ \frac{1}{2} S \mid \nabla u \mid^2 \ + \frac{1}{2} \mathrm{Ric}_N(\nu, \nu) \mid \nabla u \mid^2 \right\} d\widetilde{M} \ \leq \ \int_{B_{\overline{p}}(r+1) \setminus B_{\overline{p}}(r)} \mid \nabla u \mid^2 d\widetilde{M}.$$

Como r é arbitrário, fazendo $r \to \infty$ concluímos que

$$\int_{\widetilde{M}} \left\{ \frac{1}{2} S \mid \nabla u \mid^2 \ + \frac{1}{2} \mathrm{Ric}_N(\nu, \nu) \mid \nabla u \mid^2 \right\} d\widetilde{M} \ = \ 0.$$

Como N possui curvatura de Ricci não-negativa, da igualdade acima obtemos que $S \equiv 0$ e $\mathrm{Ric}_N(\nu, \nu) = 0$ em $\widetilde{M}$, devido ao fato de u ser uma função harmônica não-constante. Então, por (4.5) e pela equação de Gauss concluímos que $\widetilde{M}$ tem curvatura seccional não-negativa. Daí, pelo teorema de Blanc-Fiala-Huber em [12], não existem funções harmônicas limitadas não-triviais em $\widetilde{M}$, o que é uma contradição. Portanto, $\widetilde{M}$ é conformemente equivalente ao plano $\mathbb{R}^2$.

Como $\widetilde{M}$ é o recobrimento universal de M e $\mathbb{R}^2$ recobre $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (a menos de difeomorfismos), segue que M é difeomorfa a $\mathbb{R}^2$ ou a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Se M for simplesmente conexa, novamente fazendo uso do Teorema de Uniformização concluímos que M deve ser conformemente equivalente ao plano $\mathbb{R}^2$. Caso contrário, concluímos ser M conformente equivalente ao cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

$\blacksquare$

Referências

[1] Alias, L. *On the stability index of minimal and constant mean curvature hypersurfaces in spheres.* Rev. Un. Mat. Argentina **47** : 39-61 , 2006.

[2] Almgren, F. *Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem.* Ann Math **85** : 277-292 , 1966.

[3] Bombieri, E; De Giorgi, E; Guisti, E. *Minimal cones and the Bernstein problem.* Invent Math **7** : 243-268 , 1969

[4] Chavel, I. *Riemannian Geometry : A modern Introduction.* Cambridge university Press ,1993.

[5] Cheng, Q-M; Wan Q-R. *Complete hypersurfaces of* $\mathbb{R}^4$ *with constant mean curvature.* Monatsh Math . **118**: 171-204 , 1994.

[6] Cheng, Q-M; Suh, J-S. *Complete harmonic stable minimal hypersurfaces in a Riemann manifold.* Monatsh Math **154**: 121-134 , 2008.

[7] De Giorgi, E. *Una estensione del teorema di Bernstein.* Ann Scuola Nor Sup Pisa **19** : 79-85, 1965.

[8] do Carmo, M; Peng, CK . *Stable complete minimal surfaces in* $\mathbb{R}^3$ *are planes.* Bull Amer Math Soc **1**: 903-906 , 1979.

[9] do Carmo,M. *Geometria Riemanniana.* 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. (Projeto Euclides)

[10] Evans, L. *Partial Differential Equations.* Graduate Studies in Mathematics, volume 19 ,1998.

[11] Fisher-Colbrie, D; Schoen, R *The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature.* Comm Pure Appl Math **33**: 199-211, 1980.

[12] Fleming, W. *On the oriented Plateau problem.* Rend Circ Mat Palerino **11**: 69-90, 1963.

[13] Mei, J; Xu, S. *On minimal hypersurfaces with finite harmonic indices.* Duke Math J **110**: 195-215, 2001.

[14] Pogorelov, V. *On the stability of minimal surfaces.* Sov Math Dokl **24**: 274-276, 1981.

[15] Shen, Y-B; Zhu, X-H. *On the stable complete minimal hypersurfaces in* $\mathbb{R}^{n+1}$. Amer J Math **120**: 103-116, 1998.

[16] Simons, J. *Minimal varieties in Riemann manifolds.* Ann Math **80**: 1-21, 1964.

[17] Spivak, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry.* vol IV, 1964. Publish or Perish.

[18] Yau, ST; Schoen, R. *Differential Geometry.* Beijing: Science Press, 1991.

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170 -110
<http://www.pgmat.ufba.br>