Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Otimização Ergódica, Limites à Temperatura Zero e a Álgebra Max-Plus

Bruno César Conceição dos Santos

Salvador-Bahia
Abril de 2015

Otimização Ergódica, Limites à Temperatura Zero e a Álgebra Max-Plus

Bruno César Conceição dos Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro

Salvador-Bahia

Abril de 2015

dos Santos, Bruno César Conceição.

Otimização Ergódica, Limites à Temperatura Zero e a Álgebra Max-Plus / Bruno César Conceição dos Santos. – Salvador, 2015.

?? f. : il

Orientador: Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Colegiado da Pós-Graduação em Matemática, 2015.

Referências bibliográficas.

1. Sistemas Dinâmicos. 2.??? . 3.??? . I. Pinheiro, Vilton Jeovan Viana. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : ?????

Otimização Ergódica, Limites à Temperatura Zero e a Álgebra Max-Plus

Bruno César Conceição dos Santos

Dissertação de mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 16 de abril de 2015.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Vítor Domingos Martins de Araújo
UFBA

Prof. Dr. José Ferreira Alves
Universidade do Porto

Dedico este trabalho aos meu avós: Armando Batista Conceição (in memoriam) e Divaldo Lago Fernandes (in memoriam).

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, por me dar saúde para levantar todos os dias e trabalhar duro. Agradeço com muito carinho e gratidão aos meus pais, Augusto e Andréa , por todo o apoio, pelo incentivo, investimento em minha educação, conselhos, puxões de orelha e forças para sempre seguir em frente. Aos meus irmãos, Bianca e Bento, pelas alegrias diárias e a inspiração de sempre buscar mais e mais.

Aos professores da pós: Tertu, Vitor, Ana Lúcia, Manuel, Ciro e Juan Pablo, pelo esforço de nos fazer aprender e pesquisar todos os dias (todos os dias mesmo!!!). Aos professores da época da graduação: Rita de Cássia, Cristiana Paiva, Samuel Gomes, Zezinho, Graça, Joseph e muitos outros, sem vocês este trabalho também não seria possível.

Agradecer a Vilton por toda paciência e por ter me dado a oportunidade de ter sido seu orientando nesse período de mestrado. Espero que haja futuras oportunidades para que possa trabalhar novamente contigo, porque para mim, foi muito bom ter sido seu orientando.

Agradeço aos professores Vitor Domingos e José Alves por se disponibilizarem a estar presente na banca de defesa deste trabalho.

Agradeço aos funcionários do CEAPG, pela dedicação em sempre nos ajudar tanto nos grandes e pequenos problemas.

Agradeço a toda Família da Sala 18, sem vocês essa jornada seria tão gratificante, sempre serei grato a todos. Em especial, agradeço a Caroline Martins, pois desde quando pensei em fazer mestrado ela sempre foi minha companheira de estudo e sempre esteve ao meu lado me apoiando. Aos amigos da graduação que sempre estiveram presentes nessa jornada: Ana Paula, Dani, Ruy, Felipe, Lorena, Belmiro, Raiana, Rhully, Thaís e todos outros amigos. Fabiana, artista do LEMA, pela amizade de todos esses anos. Agradeço e MUITO as caronas e resenhas com Mariana.

Agradeço, imensamente, ao apoio financeiro da CAPES.

" O que fazemos na vida, ecoa na eternidade. "

(Maximus Decimus Meridius)

Resumo

Neste trabalho, vamos considertar uma função contínua A definida em um espaço compacto Ω. O Princípio Variacional nos diz que $\mathcal{P}(A) := \sup_{\mu \in \mathcal{M}_\sigma} \left\{ h_\mu + \int A d\mu \right\}$, esse supremo será realizado por uma medida μ_A. Considerando agora, βA em vez de A, com $\beta > 0$, analisaremos o que acontece com $\lim_{\beta \to \infty} \mu_{\beta A}$. Faremos relações entre $\mu_{\beta A}$ e medidas que realizam $m(A) := \sup_\mu \int A d\mu$, onde μ é uma medida invariante e usaremos a álgebra Max-Plus como ferramenta para estudar o comportamento do $\lim_{\beta \to \infty} \mu_{\beta A}$.

Palavras-chave: Otimização Ergódica; Temperatura Zero; Álgebra Max-Plus.

Abstract

In this work, we study continuous function A defined in a compact space $Omega$, the Variational Principle tells us that $\mathcal{P}(A) := \sup_{\mu \in \mathcal{M}_\sigma} \left\{ h_\mu + \int A d\mu \right\}$. Now, consider βA instead of A, with $\beta > 0$. We will analyze what happens with $\lim_{\beta \to \infty} \mu_{\beta A}$. We will make relations between $\mu_{\beta A}$ and measures to realize $m(A) := \sup_{\mu} \int A d\mu$, where μ is an invariant measure and we will use the Max-Plus Algebra as a tool to study the behavior of $\lim_{\beta \to \infty} \mu_{\beta A}$.

Keywords: Ergodic Optimization; Zero Temperature; Max-Plus Algebra.

Sumário

Introdução

O propósito desta dissertação é apresentar algumas das principais ideias e questões que são consideradas na otimização ergódica. Nosso foco aqui são questões que estão associadas à seleção de probabilidades quando a temperatura vai para zero.

Vamos nos preocupar em dar exemplos para melhor compreensão desta dissertação. Ao longo do texto, irá ser apresentado a chamada Álgebra Max-Plus que é uma ferramenta muito útil para o cálculo de soluções explícitas para o tipo de problemas que nos interessa aqui.

Consideremos uma função contínua fixada $A : \Omega \to \mathbb{R}$, que chamaremos de potencial. Sem entrar muito na teoria, para um parâmetro real β, vamos associar βA a um funcional $\mathcal{P}(\beta)$, e para cada β teremos uma medida μ_β chamada estado de equilíbrio para o potencial para βA. Em Mecânica Estatistica, β representa o inverso da temperatura. Então, quando $\beta \to +\infty$, significa que a temperatura vai para 0.

Queremos apontar as relações entre as duas formas diferentes de selecionar essas medidas:

1. $\beta \mapsto \mathcal{P}(\beta)$ é convexo e admite uma assíntota quando $\beta \to +\infty$;

2. Um ponto de acumulação para μ_β, com $\beta \to +\infty$ é A-maximizante. Então, a questão principal é saber se há convergência, e, no caso afirmativo, como é a selção do limite de μ_β?

No capítulo 1, estudaremos as ferramentas básicas para entendimento deste texto, falaremos das propriedades topológicas do espaço Ω, apresentaremos as propriedades dinâmicas e um pequeno estudo do Formalismo Termodinâmico.

Nos capítulos 2 e 3, vamos estudar os pontos de acumulação para μ_β, estes pontos serão chamados de Ground State. Veremos se existe alguma condição para que este ponto de acumulação seja único. Também trataremos de órbitas maximizantes, que serão as órbitas que tem as médias de Birkhoff iguais a $\sup_\mu \int A d\mu$, onde μ é uma medida invariante.

No capítulo final, trataremos da chamada álgebra Max-Plus, que basicamente é uma álgebra de números reais com duas operações $\oplus$ e $\otimes$. Veremos suas propriedades e estenderemos sua definição para vetores e matrizes e com isso, veremos condições para que se tenha existência e unicidade para autovalores nesta álgebra. E finalizando esta dissertação, usaremos a álgebra Max-Plus e o estudo decorrente deste texto para encontrar um limite explícito para μ_β.

Capítulo 1

Preliminares

Vamos considerar o espaço $\Omega = \{1, 2, 3, ..., k\}^{\mathbb{N}}$ dos elementos das sequências $x = (x_0, x_1, ..., x_n, ...)$ com $x_i \in \{1, ..., k\}, \forall i \in \mathbb{N}$. Um elemento em Ω é chamado de palavra infinita sobre o alfabeto $\{1, ..., k\}$, e x_i dígito ou símbolo. Sejam $x = x_0x_1x_2...$ e $y = y_0y_1y_2...$ em Ω, a distância entre x e y é dada por:

$$d(x, y) = \frac{1}{2^{min\{n \geq 1 \ \ x_n \neq y_n\}}}.$$

Por exemplo, vamos considerar o caso que $k = 3$. Sejam $x = 321332...$ e $y = 321331...$, logo temos que:

$$d(x, y) = \frac{1}{2^5}.$$

A sequência $x_0x_1...x_{n-1}$ é chamado palavra de comprimento n. Se ω é uma palavra, o seu comprimento será denotado por $|\omega|$.

Definição 1.0.1. *Um Cilindro (de comprimento n), denotado por*

$$[x_0...x_{n-1}] \subseteq \Omega,$$

é o conjunto dos pontos $y \in \Omega$ tal que

$$y_i = x_i, i = 0, 1, ..., n - 1.$$

Por exemplo, o cilindro [211] é o conjunto dos $y = y_0y_1y_2y_3...$ tais que $y_0 = 2, y_1 = 1$ e $y_2 = 1$. É fácil ver que os cilindos de tamanho n formam uma partição para Ω.

Agora, temos que (Ω, d) é um espaço métrico compacto. A compacidade decorre do fato que Ω é compacto com a topologia produto. Observe que a topologia induzida pela métrica d coincide com a topologia produto.

1.1 Dinâmica

Definição 1.1.1. *O shift $\sigma : \Omega \longrightarrow \Omega$, é a transformação dada por $\sigma(x_0x_1x_2...) = x_1x_2x_3...$.*

Note que, $d(\sigma(x), \sigma(y)) = 2d(x, y)$, portanto o shift expande distância, é Lipschitz e contínuo.

O próximo resultado será útil para definir um conjunto σ-invarinte.

Lema 1.1.2. *Seja A um boreliano, então são equivaletes:*

i. $\forall x \in A, \sigma(x) \in A$;

ii. $A \subset \sigma^{-1}(A)$.

Demonstração. Suponha que $\forall x \in A, \sigma(x) \in A$.Temos $\sigma^{-1}(A) := \{y \in \Omega; \sigma(y) \in A\}$, logo por hipótese, segue que $x \in \sigma^{-1}(A)$, portanto, $A \subset \sigma^{-1}(A)$.

Por outro lado, se supusermos que $\sigma^{-1}(A) \supset A$, pela definição do conjunto $\sigma^{-1}(A)$ temos que $\forall x \in A, \sigma(x) \in A$. $\square$

Dizemos que um boreliano B que satisfaça uma das propriedades do lema anterior (logo as duas), é dito σ-invariante. É fácil ver que se x é um ponto periódico, então $\mathcal{O}(x)$ é σ-invariante.

1.2 Medidas Invariantes

Definição 1.2.1. *Seja μ uma medida. Dizemos que μ é invariante pelo shift, se para qualquer mensurável B tivermos*

$$\mu(\sigma^{-1}(B)) = \mu(B).$$

Exemplo 1.2.2. *Vamos considerar $\Omega = \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$. Tomemos p e q dois números positivos em $(0, 1)$, e a matriz*

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(1,1) & P(1,2) \\ P(2,1) & P(2,2) \end{pmatrix}.$$

Temos que 1 é um autovalor de P. Resolvendo a equação

$$(x, y).P = (x, y),$$

encontramos um auto-espaço unidimensional, com $y = \frac{1-p}{1-q}x$. Portanto, existe um unico autovetor à esquerda (π_1, π_2) tal que

$$(\pi_1, \pi_2).P = (\pi_1, \pi_2) \text{ e } \pi_1 + \pi_2 = 1.$$

A medida μ definida como

$$\mu([x_0...x_n]) = \pi_{x_0} P(x_0, x_1) P(x_1, x_2)...P(x_{n-2}, x_{n-1}).$$

Temos que essa medida μ, é uma medida invariante pelo shift e é chamada de medida de Markov associada a P e π.

Lema 1.2.3. *μ é σ-invariante se, somente se, para toda função f contínua tivermos*

$$\int f(x)d\mu(x) = \int f \circ \sigma(x)d\mu(x).$$

Denote por $\mathcal{M}_\sigma := \{\mu : \Omega \to \mathbb{R};\ \ \mu$ é uma probabilidade σ- invariante$\}$. Se $\mu_n \in \mathcal{M}_\sigma$ e $\mu_n \rightharpoonup \mu$, (na topologia fraca*) então μ é σ-invariante.

Definição 1.2.4. *Uma medida extremal em $\mathcal{M}_\sigma$ é chamada ergódica.*

As medidas markovianas são ergódicas.

Teorema 1.2.5 (Ergódico de Birkhoff)**.** *Seja μ medida σ-invariante e ergódica. Então para toda função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ contínua, existe um* K *tal que $\mu(\mathrm{K}) = 1$, e para todo x em* K*, temos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\sigma^{k-1}(x)) = \int f d\mu.$$

O Teorema Ergódico de Birkhoff diz que, na hipótese de ergodicidade, a média temporal é igual a uma média espacial.

1.3 Otimização Ergódica

Definição 1.3.1. *Seja $A : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Uma medida invariante μ diz-se A-maximizante se*

$$\int A d\mu = \max \left\{ \int A d\nu;\ \nu \in \mathcal{M}_\sigma \right\} =: m(A)$$

Exemplo 1.3.2. *Note que pode haver várias medidas maximizantes.*

Com efeito, considere $\Omega = \{1, 2, ..., d\}^{\mathbb{N}}$ e o potencial

$$A(x) = -\min\{d(x, 1^\infty), d(x, 2^\infty)\} \leq 0.$$

Temos que $\mu_{1^\infty} := \delta_{1^\infty}$ e $\mu_{2^\infty} := \delta_{2^\infty}$ são medidas A-maximizantes. De fato, $\int A d\mu_{1^\infty} = A(1^\infty) = -1$ (Análogo para μ_{2^∞}). Suponha agora que exista ν probabilidade tal que $\int A d\nu \geq \int A d\mu_{1^\infty}$. Logo, temos que:

$$-1 = -\nu(\Omega) = \int -1 d\nu \geq \int A d\nu \geq \int A d\mu_{1^\infty} = -1,$$

portanto $m(A) = -1$ e segue que μ_{1^∞} e μ_{2^∞} são A-maximizantes.

Agora defina, $\mu_t := t\mu_{1^\infty} + (1-t)\mu_{2^\infty}$, $\forall t \in [0, 1]$. Por linearidade temos que μ_t é A-maximizante para cada $0 \leq t \leq 1$.

1.4 Formalismo Termodinâmico e Estado de Equilíbrio

O Formalismo Termodinamico visa singularizar medidas via o Principio Variacional:

$$\mathcal{P}(A) := \sup_{\mu \in \mathcal{M}_\sigma} \left\{ h_\mu + \int A d\mu \right\}.$$

Definição 1.4.1. *Qualquer medida que realiza o máximo de $\mathcal{P}(A)$ é chamada um Estado de Equilíbrio de A. A função A é dita potencial e $\mathcal{P}(A)$ é a pressão do potencial.*

Dado ν medida σ-invariante, o valor

$$h_\nu + \int A d\nu$$

é chamado "energia livre" da medida ν com respeito ao potencial A.

1.5 Entropia e Existência de estado de equilíbrio

Com o resultado abaixo, podemos obter uma simples definição para h_μ.

Teorema 1.5.1. *Seja μ uma probabilidade ergodica e σ-invariante. Então para μ-qtp $x = x_0 x_1 ...$*

$$h_\mu := - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mu([x_0 x_1 ... x_n])$$

existe e independe de x.

Exemplo 1.5.2. *Consideremos $\Omega = \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$ e dois números positivos p e q, tais que $p + q = 1$. Tomemos uma medida $\mathbb{P}$ em $\{1, 2\}$, definida por*

$$\mathbb{P}(\{1\}) = p, \mathbb{P}(\{2\}) = q$$

Definamos uma medida $\mu = \otimes \mathbb{P}$, chamada medida de Bernoulli, no espaço produto $\{1, 2\}^{\mathbb{N}}$. Daí, temos que μ é definida como

$$\mu([x_0 ... x_{n-1}]) = p^{\#\{\text{1's que estão na palavra } x\}} q^{\#\{\text{2's que estão na palavra } x\}},$$

onde x é a palavra finita $x_0 ... x_{n-1}$. (Note que μ é uma medida invariante pelo shift).

Temos que

$$\frac{1}{n} \#\{\text{1's que estão na palavra}\} \to_{n \to \infty} \mu([1]) = p \text{ e}$$

$$\frac{1}{n} \#\{\text{2's que estão na palavra}\} \to_{n \to \infty} \mu([2]) = q.$$

Portanto, $h_\mu = -p \log p - q \log q$.

Exemplo 1.5.3. *Agora, se μ é uma medida de Markov associada uma matris linha estocástica P e $\pi = (\pi_1, ..., \pi_d)$, temos que*

$$h_\mu = -\sum_{i,j=1}^{n} \pi_i P(i,j) \log P(i,j).$$

Vamos agora garantir a existência de estado de equilíbrio.

Teorema 1.5.4. *Se A é contínuo, então existe pelo menos um estado de equilíbrio de A.*

A ideia da demonstração consiste mostrar que $F : \mathcal{M}_\sigma \to \mathbb{R}$, onde $F(\nu) = h_\nu + \int A d\nu$ é semicontínua e usar o fato de que $\mathcal{M}_\sigma$ é um conjunto compacto para deduzir que F atinge um máximo, provando a existência de estados de equilíbrio para A. Para mais detalhes ver [12].

Agora trataremos da Unicidade do Estado de Equilíbrio para potenciais α-Hölder.

Definição 1.5.5. *Dizemos que $A : \Omega \to \mathbb{R}$ é α-Hölder, $0 < \alpha < 1$, se existe uma constante real $C > 0$ tal que para todo $x, y \in \Omega$,*

$$|A(x) - A(y)| \leq Cd(x,y)^\alpha.$$

Então, para α fixo, denote por

$$\mathcal{H}_\alpha := \{A : \Omega \to \mathbb{R}; A \text{ é } \alpha\text{-Hölder}\}$$

e defina $||A||_\alpha := \sup\limits_{x \neq y} \dfrac{|A(x) - A(y)|}{d(x,y)^\alpha} + \sup\limits_{x \in \Omega} |A(x)|$.

Lema 1.5.6. *$(\mathcal{H}, ||.||_\alpha)$ é um espaço de Banach.*

Teorema 1.5.7. *Se $A : \Omega \to \mathbb{R}$ é Hölder continuo, então existe um único estado de equilíbrio μ_A para A. Além disso, μ_A é uma medida de Gibbs e $\beta \mapsto \mathcal{P}(\beta\mathcal{A})$ é analítica, com $\beta > 0$.*

O resultado acima é consequência do Teorema de Ruelle que diz:

Teorema 1.5.8. *[Teorema de Ruelle] Sejam $T : M \to M$ uma transformação expandora e $\psi : M \to \mathbb{R}$ uma função α-Hölder. Então existe um único estado de equilibrio associado ao par (T, ψ). Além disso, o estado de equilibrio está suportada em todo o M e é um estado de Gibbs.*

Demonstração. [12]. □

Para nosso estudo façamos, $M = \Omega,\ T = \sigma$ e $\psi = A$.

Definição 1.5.9. *Seja (X, d) espaço métrico completo. Uma transformação expansora é uma aplicação $T : M \to M$ contínua satisfazendo:*

Existem $r > 0, 0 < \lambda < 1$ e $c > 0$ tais que:

1. $x \neq y, T(x) = T(y) \Longrightarrow d(x, y) > c$;

2. $\forall x \in M e\, a \in T^{-1}(x)$, *existe uma função contínua $\varphi : B_r(x) \to M$ tal que:*

   i. $\varphi(x) = a$;

   ii. $(T \circ \varphi)(z) = z, \forall z \in B_r(x)$;

   iii. $d(\varphi(z), \varphi(z')) \leq \lambda d(z, z'), \forall z, z' \in B_r(x)$.

Lema 1.5.10. *$\sigma : \Omega \to \Omega$ é expansora.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \Omega$ tais que $x \neq y e \sigma(x) = \sigma(y)$, daí temos que $x_0 \neq y_0$. Logo, $d(x, y) = \frac{1}{2^0} = 1$. Fazendo $0 < c < 1$ provamos o primeiro item.

Seja agora $x \in \Omega$. Tome $r = \frac{1}{2}$ e defina

$$\varphi : B_{\frac{1}{2}}(x) \to \Omega$$

$$y \mapsto ky := ky_0y_1...$$

Note que:

- $\varphi(x) = kx = kx_0x_1... \in \sigma^{-1}(x)$;
- $(\sigma \circ \varphi)(z) = \sigma(kz_0z_1...) = z_0z_1... = z, \forall z \in B_{\frac{1}{2}}(x)$;
- $d(\varphi(z), \varphi(z')) = d(kz_0z_1..., kz_0'z_1'...) = \frac{1}{2}d(z, z')$.

Fazendo $0 < \lambda < 1$, temos o resultado desejado. □

Pelo Teorema 1.5.8 segue que temos um único estado de equilíbrio para $\mathcal{P}(A)$, sempre que A é Hölder.

1.6 Operador de Tranferência

Seja $A : \Omega \to \mathbb{R}$ um potencial α-Hölder.

Definição 1.6.1. *o operador de transferência correspondente ao potencial A, $\mathcal{L}_A : \mathcal{C}^0(\Omega) \to \mathcal{C}^0(\Omega)$, é dado por: Para cada $\phi \in \mathcal{C}^0(\Omega)$,*

$$\mathcal{L}_A(\phi) = \varphi \in \mathcal{C}^0(\Omega) \text{ com } \varphi(x) := \sum_{a \in \{1,2,...,d\}} e^{A(ax)}\phi(ax).$$

Observação 1.6.2. *Usando o Teorema 1.5.8 pode-se mostrar que a pressão é exatamente o logaritmo do raio espectral do operador de tranferência, ou seja,* $\mathcal{P}(A) = \log \lambda_A$.

Seja μ uma probabilidade. A aplicação $f \mapsto \int \mathcal{L}_A(f)d\mu$ é uma função limitada em $\mathcal{C}^0(\Omega)$. Pelo Teorema da Representação de Riesz, existe ν tal que para cada $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, $\int f d\nu = \int \mathcal{L}_A(f)d\mu$. Logo, $\mathcal{L}_A^* : \mu \mapsto \nu$ $(\mathcal{L}_A^*(\mu) = \nu)$ é o operador dual de $\mathcal{L}_A$.

Observação 1.6.3. $\mathcal{L}_A(1) = 1 \Rightarrow \mathcal{L}_A^*(\mu)$ *é uma probabilidade se* μ *também for.*

Teorema 1.6.4. *Seja* λ_A *o raio espectral de* $\mathcal{L}_A$*. Então,* λ_A *é um autovalor para* $\mathcal{L}_A^*$*, ou seja,* $\exists \nu_A$ *probabilidade tal que*

$$\mathcal{L}_A^*(\nu_A) = \lambda_A \nu_A.$$

Para demonstrar esse teorema, usamos os seguintes resultados:

Lema 1.6.5. $\mathcal{C}_+^0(\Omega) := \{\varphi \in \mathcal{C}^0(\Omega) : \varphi \geq 0\}$ *é um cone normal de* $\mathcal{C}^0(\Omega)$.

Para a prova desse Lema, ver [12].

E um resultado da análise funcional, temos:

Teorema 1.6.6. *Seja* $\mathcal{C}$ *um cone normal num espaço de Banach* E *e seja* $T : E \to E$ *um operador linear positivo sobre* $\mathcal{C}$*. Então,* $r(T^*)$ *(raio espectral) é autovalor do operador dual* $T^* : E^* \to E^*$ *e admite algum autovalor* v^*.

Fazendo $E = \mathcal{C}^0(\Omega), \mathcal{C} = \mathcal{C}_+^0(\Omega)$ e $T = \mathcal{L}_A$. A conclusão do teorema significa que $\mathcal{L}_A^*$ admite algum autovetor $\nu_A \in \mathcal{C}_+^0(\Omega)$ correspondente ao autovalor λ_A. Note que ν_A se identifica com uma medida positiva finita.Para mais detalhes ver [12]. Desse teorema, obtemos um único H_A, com a normalização $\int H_A d\nu_A = 1$ tal que

$$\mathcal{L}_A(H_A) = \lambda_A H_A.$$

Lema 1.6.7. $\mu_A := H_A \nu_A$ *é* σ*-invariante.*

Demonstração.

Lema 1.6.8. $\mathcal{L}_A((g_1 \circ \sigma)g_2) = g_1 \mathcal{L}_A(g_2), \forall g_1, g_2 \in \mathcal{C}^0(\Omega)$.

Com efeito, $\mathcal{L}_A((g_1 \circ \sigma)g_2) := \sum_{a \in \{1,2,\ldots,d\}} e^{A(ax)} g_1(\sigma(ax))g_2(ax) =$ $\sum_{a \in \{1,2,\ldots,d\}} e^{A(ax)} g_1(x)g_2(ax) = g_1(x) \sum_{a \in \{1,2,\ldots,d\}} e^{A(ax)} g_2(ax) =: g_1(x)\mathcal{L}_A(g_2(x))$, verificando o lema anterior.

Então, para toda função $g : \Omega \to \mathbb{R}$ integrável:

$$\int (g \circ \sigma) d\mu_A = \lambda_A^{-1} \int (g \circ \sigma) H_A d(\mathcal{L}_A^* \nu_A) =$$

$$\lambda_A^{-1} \int \mathcal{L}_A((g \circ \sigma) H_A) d\nu_A = \lambda_A^{-1} \int g \mathcal{L}_A(H_A) d\nu_A =$$

$$\int g H_A d\nu_A = \int g d\mu_A.$$

Portanto segue que μ_A é σ-invariante. $\square$

Pode ser mostrado que esta medida, é uma medida de Gibbs, ou seja, $\exists C_A > 0$ tal que $\forall x \in \Omega$ e $\forall n$

$$e^{-C_A} \leq \frac{\mu_A\left([x_0 \ldots x_{n-1}]\right)}{e^{S_n(A)(x) - n \log \lambda_A}} \leq e^{C_A},$$

onde $S_n(A)(x) := \sum_{k=1}^{n} A(\sigma^{k-1}(x))$. Essas duas desigualdades definem a energia livre para μ_A, que é $\log \lambda_A$. Mais ainda, a primeira desigualdade diz para qualquer medida ergódica $\nu \neq \mu_A$,

$$h_\nu + \int A d\nu < \log \lambda_A.$$

Como já vimos, $\mathcal{P}(A) = \log \lambda_A$ e μ_A é o único estado de equilíbrio para A, com $\beta > 0$.

Observação 1.6.9. *Pode-se obter os mesmos resultados para βA em vez de A.*

Já sabemos que $\beta \longmapsto \mathcal{P}(\beta)$ é localmente analítica, mas por argumentos de conexidade, obtemos que é globalmente analítica.

Os resultados até aqui citados valem em outros casos. Em particular, se Ω (o shift completo no espaço de Bernoulli).

Para toda ψ Hölder contínuo,

$$\mathcal{L}_A^n(\psi) = e^{n\mathcal{P}(A)} \int \psi d\nu_\beta \phi + e^{n(\mathcal{P}(A) - \varepsilon)} \psi_n,$$

onde $\varepsilon = \varepsilon(A) > 0$, ψ_n é contínuo com $\|\psi_n\|_\infty \leq C\|\psi\|_\infty, \forall n$ e C é uma constante que depende de A. Fazendo $\psi = 1$, temos

$$\mathcal{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mathcal{L}_A^n(1)$$

e $\frac{d\mathcal{P}}{d\beta}(\beta) = \int A d\mu_\beta$.

Proposição 1.6.10. *O gráfico de $\mathcal{P}(\beta)$ admite uma assíntota quando $\beta \to \infty$ com inclinacão determinada por $m(A) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_\sigma} \int A d\mu$. Qualquer ponto de acumulação para μ_β é uma medida A-maximizante.*

Demonstração. Seja μ_∞ uma medida A-maximizante. Como $h_{\mu_\infty} < +\infty$, temos:

$$m(A) = \int A d\mu_\infty \leq \frac{h_{\mu_\infty}}{\beta} + \int A d\mu_\infty = \frac{\sup\left\{h_\mu + \int \beta A d\mu\right\}}{\beta} =$$

$$\frac{\mathcal{P}(\beta)}{\beta} \leq \frac{\log \lambda_A}{\beta} + \int A d\mu_\beta \leq \frac{\log \lambda_A}{\beta} + m(A).$$

Logo, segue que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\mathcal{P}(\beta)}{\beta} = m(A)$, e assim a inclinação da assíntota de $\mathcal{P}(\beta)$ é $m(A)$.

Seja agora a função:

$$\xi : \beta \longmapsto \mathcal{P}(\beta) - \beta m(A).$$

Note que:

i. $\xi'(\beta) = \frac{d\mathcal{P}}{d\beta}(\beta) - m(A) = \int A d\mu_\beta - m(A) \le 0$;

ii. ξ é uma função decrescente;

iii. $\xi \ge 0$, pois $m(A) \le \frac{\mathcal{P}(\beta)}{\beta}, \forall \beta$.

Isso implica que $\exists \lim_{\beta\to\infty} \xi(\beta) \ge 0$. Considerando que μ_∞ é ponto de acumulação para μ_β, temos (pela desigualdade encontrada acima) que $\int A d\mu_\beta \to m(A)$. Daí, temos, $\mu_{\beta_n} \to \mu_\infty \Rightarrow \int A d\mu_{\beta_n} \to \int A d\mu_\infty$, mas por outro lado $\int A d\mu_{\beta_n} \to m(A)$, logo $m(A) = \int A d\mu_\infty$ e portanto μ_∞ é A-maximizante. $\square$

Agora, como μ_A é uma medida de Gibbs, temos que a constante C_A é proporcional a $\| A \|_\infty$. Substituindo βA no lugar de A, e fazendo $\beta \to \infty$ temos que $C_{\beta A} \to +\infty$.

No entanto,

Proposição 1.6.11. *Seja A α-Höder. Então existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{\beta}\log H_{\beta A}$ é α-Höder com a norma limitada por $C\| A \|_\infty$.*

Demonstração. Defina $h_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_A^{-i}\mathcal{L}_A^i(\chi)$. Temos que h_n é uma sequência limitada e equicontínua. Por Ascoli-Arzelá, temos que $h_{n_i} \to H_A$.

E temos que existe $k > 0$ tal que:

$$\|\lambda_A^{-n}\mathcal{L}_A^n(\chi)(x) - \lambda_A^{-n}\mathcal{L}_A^n(\chi)(y)\| \le k d(x,y)^\alpha,$$

logo (h_n) é α-Hölder e portanto H_A é α-Hölder. E é fácil ver que se H_A é α-Hölder, então $\log H_A$ também será α-Hölder.
Analogamente, provamos que $\frac{1}{\beta}\log H_{\beta A}$ é α-Höder. $\square$

1.7 Cálculo de Estado de Equilíbrio no caso em que A é localmente constante

Num caso particular, suponha agora que A dependa de duas coordenadas, ou seja,

$$A(x_0x_1x_2x_3...) = A(x_0, x_1).$$

Desta forma, daremos uma forma explícita para o estado de equilíbrio via operador de transferência.

Denotaremos por $A(i,j)$ o valor de A no cilindro $[ij]$ onde $i,j \in 1,2,...,d$. Nesse caso,

$$(\mathcal{L})_A(\phi)(x_0x_1x_2...) = \sum_{a\in\{1,...,d\}} e^{A(ax_0)}\phi(ax_0x_1...).$$

Seja M a matriz de todas as entradas positivas dadas por $M_{i,j} = e^{A(i,j)}$.

Lema 1.7.1. *$\mathcal{L}_A$ e M possuem o mesmo raio espectral.*

Demonstração. Suponha que $\phi(x_0x_1x_2...) = \phi(x_0)$. Por abuso de notação, a função ϕ será descrita pelo vetor $(\phi(1), \phi(2), ..., \phi(d))$.
Logo, para todo j temos:

$$(\mathcal{L})_A(\phi)(j) = \sum_{j=1}^{s} M_{ij}\phi(i) = \phi M = M^T\phi$$

.
Portanto o raio espectral de M,λ_M, é menor ou igual a λ_A (que é o autovalor maximal).

Lembre que o raio espectral é dado por $\lambda_A := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log |||\mathcal{L}_A^n|||$, onde $|||\mathcal{L}_A^n||| = \sup_{\|\psi\|=1} \|\mathcal{L}_A^n(\psi)\|_\infty$. Como $\mathcal{L}_A > 0$ e linear, temos que $\mathcal{L}_A$ é monótona, daí $|||\mathcal{L}_A^n||| = \|\mathcal{L}_A^n(\chi)\|_\infty$. E, χ depende de uma coordenada, portanto $\mathcal{L}_A^n(\chi) = M^n(\chi) \Rightarrow \lambda_A \leq \lambda_M$. Portanto $\lambda_A = \lambda_M$. □

Teorema 1.7.2 (Perron-Frobenius)**.** *Suponha que $B = (b_{ij})$ é uma matriz $d \times d$ com todas as entradas estritamente positivas, $1 \leq i,j \leq d$. Então existem $\lambda > 0$ e vetores $l = (l_1, ..., l_d)$ e $r = (r_1, ..., r_d)$ tais que:*

- $\forall i, l_i > 0$ *e* $r_i > 0$ *;*
- $\forall i, \sum_{j=1}^{d} b_{ij}r_j = \lambda r_i$ *e* $\forall j, \sum_{i=1}^{d} l_i b_{ij} = \lambda l_j$.

(isto é, r é o autovetor é o autovetor à direita de B e l é o autovetor à esquerda de B)

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que existe pelo menos um vetor r com todas as entradas positivas e $\lambda \geq 0$ tal que,

$$\sum_{j=1}^{d} b_{ij}r_j = \lambda r_i, \forall i.$$

Consideremos o conjunto convexo $\mathcal{H}$ de vetores $h = (h_1, ..., h_d)$, com $h_i \geq 0$, $1 \leq i \leq d$ e $\sum_{i=1}^{d} h_i = 1 (\Rightarrow h \neq 0)$.

A matriz B determina uma transformação contínua $G : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, dada por $G(h) = h'$ com

$$h' = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{d} b_{ij}h_j}{\displaystyle\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} b_{ij}h_j}.$$

Como $b_{ij} > 0 \forall i, j$, $h_j \geq 0$ e h não é o vetor nulo, temos que todas as entradas de h' são estritamente positivas. Assim, $G(\mathcal{H}) \subsetneq \mathcal{H}$. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, temos que existe pelo menos um ponto fixo para G. Seja $r \in \mathcal{H}$ ponto fixo de G, ou seja, $G(r) = r$. Como $G(\mathcal{H}) \subsetneq \mathcal{H}$, temos que r possui entradas estritamente positivas e

$$r_i = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{d} b_{ij}r_j}{\displaystyle\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} b_{ij}r_j}.$$

Fazendo $\lambda = \displaystyle\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} b_{ij}r_j$, teremos um autovalor à direita.

Considere B^t no lugar de B, obtemos outro autovetor à direita, digamos l, para B^t (que será um autovetor à esquerda para B) com autovalor igual a λ^* .

Note que $\langle r, l\rangle \neq 0$, então

$$\lambda\langle r, l\rangle = \langle \lambda r, l\rangle =$$

$$\langle Br, l\rangle = \langle r, B^t l\rangle = \lambda^*\langle r, l\rangle \Rightarrow \lambda = \lambda^*$$

. □

Mais ainda, pode-se provar que o autovalor λ é o raio espectral da matriz B e os vetores r e l são únicos.

Considerando a matriz M, com $M_{i,j} = e^{A(i,j)}$, pelo Teorema de Perron-Frobenius, existem autovetores à esquerda e à direita, l e r respectivamente, associados a λ_A (raio espectral de $\mathcal{L}_A$).

Vamos definir $P_A = P_A(i, j)$, uma matriz $d \times d$ onde $P_A(i, j) := \frac{e^{A(i,j)}r_j}{\lambda_A r_i}$. Note que $\displaystyle\sum_j P_A(i, j) = \frac{\displaystyle\sum_j e^{A(i,j)}r_j}{\lambda_A r_i} = \frac{\displaystyle\sum_j M_{ij}r_j}{\lambda_A r_i} = \frac{\lambda_A r_i}{\lambda_A r_i} = 1$, ou seja, P_A é uma matriz estocástica (soma de suas linhas é constante igual a 1).

Agora, fixemos a normalização da seguinte forma:

$$\sum_j r_j = 1 \text{ e } \sum_i l_i r_i = 1.$$

Seja o vetor $\pi = (\pi_1, ..., \pi_d)$ definido por $\pi_i = l_i r_i$, usando o Teorema de Perron-Frobenius, concluimos que esse vetor satisfaz $\pi P_A = \pi$, ou seja, π é o vetor estacionário para P_A.

O autovetor à direita r pode ser visto como ν_A do Teorema 1.6.4 e $r_j = \nu_A([j])$. Normalizando o autovetor à esquerda l, este vai ser visto como a autofunção H_A, com $\int H_A d\nu_A = 1$.

A medida de Markov invariante associada μ_A é definida por

$$\mu_A([x_0 x_1 ... x_{n-1}]) = \pi_{x_0} P_A(x_0, x_1) ... P_A(x_{n-2}, x_{n-1}).$$

Um cálculo exato nos dá

$$\mu_A([x_0 x_1 ... x_{n-1}]) = H_A(x_0) e^{S_n(A)(x) - n \log \lambda_A} \nu_A([x_{n-1}]).$$

E como ν_A e H_A possuem entradas positivas, temos que

$$\frac{\mu_A([x_0 x_1 ... x_{n-1}])}{e^{S_n(A)(x) - n \log \lambda_A}} = H_A(x_0) \nu_A([x_{n-1}]) > 0$$

e tomando $C_A = \max_n \{\log(H_A(x_0)\nu_A([x_{n-1}]))\}$ vem

$$e^{-C_A} \leq \frac{\mu_A([x_0 x_1 ... x_{n-1}])}{e^{S_n(A)(x) - n \log \lambda_A}} \leq e^{C_A},$$

portanto μ_A é uma medida de Gibbs.

Observe que, podemos escrever μ_A como

$$\mu_A([x_0 x_1 ... x_{n-1}]) = l_{x_0} e^{S_n(A)(x) - n \log \lambda_A} r_{x_{n-1}}.$$

Observação 1.7.3. *No caso em que $A \equiv 0$, a medida μ_A é uma probabilidade de Markov associada a uma matriz linha estocástica com todas entradas iguais a $\frac{1}{d}$. Vamos denotar μ_{top} a medida de máxima entropia. É a única probabilidade invariante com entropia igual a $\log d$.*

Lema 1.7.4. *μ_A é o estado de equilíbrio para A.*

Demonstração. Como $\mu_A([x_0 x_1 ... x_{n-1}]) = l_{x_0} e^{S_n(A)(x) - n \log \lambda_A} r_{x_{n-1}}$ isso implica que

$$\frac{1}{n} \log \mu_A([x_0 x_1 ... x_{n-1}]) = \frac{1}{n} \log \left[l_{x_0} e^{S_n(A)(x) - n \log \lambda_A} r_{x_{n-1}} \right] = \frac{1}{n} S_n(A)(x) + \frac{1}{n} \log(l_{x_0} r_{x_{n-1}}) - \log \lambda_A,$$

tomando o limite, com $n \to \infty$, em ambos os lados temos:

$$-h_{\mu_A} = \int A d\mu_A - \log \lambda_A$$

e portanto

$$h_{\mu_A} + \int A d\mu_A = \log \lambda_A.$$

$\square$

Capítulo 2

Ground State

Como vimos anteriormente, dizemos que uma medida μ é A-maximizante se

$$\int Ad\mu = \max_{\nu \in \mathcal{M}_\sigma} \int Ad\nu.$$

A existência de probabilidades maximizantes para funções continua $A : \Omega \to \mathbb{R}$, decorre da compacidade de $\mathcal{M}_\sigma$ (e da continuidade da aplicação $\nu \longmapsto \int Ad\nu$).

Assumindo que o potencial A é Hölder contínuo, temos que todo ponto de acumulação para μ_β é uma medida A-maximizante, quando $\beta \to \infty$. Relacionando estado de equilíbrio com medidas maximizantes, temos a seguinte definição:

Definição 2.0.5. *Seja A um potencial Hölder contínuo. Uma probabilidade σ-invariante é dita um ground state (para A), se é um ponto de acumulação para μ_β, com $\beta \to \infty$.*

Claramente, um ground state é uma medida A-maximizante mas, a priori, uma medida maximizante não é necessariamente um ground state.

Uma pergunta natural é: temos convergência de μ_β, com $\beta \to \infty$?

Se o limite para μ_β existe, com $\beta \to \infty$, então $\mu = \lim\limits_{\beta \to \infty} \mu_\beta$ é a seleção quando a temperatura vai para zero. Num exemplo anterior,

$$A(x) = -\min \{d(x, 1^\infty), d(x, 2^\infty)\},$$

tinhamos que δ_{1^∞} e δ_{2^∞} são duas medidas σ-invariantes e A-maximizantes assim como sua combinação convexa e isso nos dá uma ideia de como é difícil o problema da seleção, pois há muitas possibilidades.

No caso em que exista μ, medida σ-invariante, tal que $\mu = \lim\limits_{\beta \to \infty} \mu_\beta$ é natural se perguntar a velocidade de convergência de μ_β. Mais precisamente, se C é um cilindro tal que $C \cap \mathcal{A} = \emptyset$ (esse conjunto $\mathcal{A}$ será apresentado no decorrer deste capítulo), então $\lim\limits_{\beta \to \infty} \mu_\beta(C) = 0$. Assim é natural considerar

$$\lim_{\beta \to \infty} \frac{1}{\beta} \log (\mu_\beta(C)).$$

Essas perguntas estão relacionadas com o comportamento de $\frac{1}{\beta}\log H_\beta$ (como já vimos anteriormente).

2.1 Sub-ação Calibrada

Considere $A:\Omega\to\mathbb{R}$ Lipschitz e $\beta>0$. O operador de transferência fornece que para todo x:

$$\mathcal{L}_\beta(H_\beta)(x)=e^{\mathcal{P}(\beta)}H_\beta(x)=\sum_{i=1}^{d}e^{\beta A(ix)}H_\beta(ix).$$

(Estamos substituindo β por βA por simplicidade).

Vimos que, se $\beta\to\infty$ existe o controle da constante de Lipschitz (ou Hölder). Mais precisamente, temos o controle de $\frac{1}{\beta}\log H_\beta$ e além disso, $\frac{1}{\beta}\log H_\beta$ forma uma família de funções equicontínuas. Vamos considerar um ponto de acumulação para essa sequência, digamos V. Logo existe $\beta_n\to_{n\to\infty}\infty$ tal que $V=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\beta_n}\log H_{\beta_n}$. Como $\frac{1}{\beta}\log H_\beta$ é Lipschitz, temos que V também será uma função Lipschitz.

Novamente por simplicidade, vamos manter a notação $\beta\to\infty$, mesmo que, na verdade, estamos considerando subsequência. Então,

$$\frac{1}{\beta}\log\left(e^{\mathcal{P}(\beta)}H_\beta\right)=\frac{1}{\beta}\log\left(\sum_{i=1}^{d}e^{\beta A(ix)}H_\beta(ix)\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\mathcal{P}(\beta)}{\beta}+\frac{1}{\beta}\log H_\beta=\frac{1}{\beta}\log\left(e^{\beta A(1x)}H_\beta(1x)+...+e^{\beta A(dx)}H_\beta(dx)\right)=$$

$$\frac{1}{\beta}\log\left(\left(\max_j\left(e^{\beta A(jx)}H_\beta(jx)\right)\right)\left(\frac{e^{\beta A(1x)}H_\beta(1x)}{\max_j\left(e^{\beta A(jx)}H_\beta(jx)\right)}+...+1+...+\frac{e^{\beta A(dx)}H_\beta(dx)}{\max_j\left(e^{\beta A(jx)}H_\beta(jx)\right)}\right)\right)$$

fazendo $\beta\to\infty$ cada termo $\dfrac{e^{\beta A(ix)}H_\beta(dx)}{\max_j\left(e^{\beta A(jx)}H_\beta(jx)\right)}\to 0$ daí segue que,

$$m(A)+V(x)=\max_i\left\{A(ix)+V(ix)\right\}.$$

Vamos agora, provar um resultado num caso particular.

Definição 2.1.1. *Uma função contínua $u:\Omega\to\mathbb{R}$ é chamada sub-ação calibrada para $A:\Omega\to\mathbb{R}$, se para qualquer $x\in\Omega$, tivermos*

$$u(x)=\max_{\sigma(y)=x}[A(y)+u(y)-m(A)].$$

Teorema 2.1.2. *Suponha que A é um potencial que depende de duas coordenadas. Suponhamos também que β_n é tal que, para cada j*

$$\lim_{\beta_n\to\infty}\frac{1}{\beta_n}\log l^{\beta_n A}(j)=V(j),$$

onde $l^{\beta_n A}(j)$ *é a entrada* j *do autovetor à esquerda do Teorema de Perron-Frobenius para matriz* $M_{ij} = e^{\beta_n A(i,j)}$. *Então,* V *é uma sub-ação calibrada.*

Demonstração. Para obter este resultado, consideremos a equação de autovetores para cada β e para cada $1 \le j \le d$, temos:

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{l_i^{\beta A} e^{\beta A(i,j)}}{\lambda_{\beta A} l_j^{\beta A}} = 1.$$

Para cada j e β_n, existe um $i_n = i_n^j$, tal que $\frac{l_{i_n}^{\beta A} e^{\beta A(i_n,j)}}{\lambda_{\beta A} l_j^{\beta A}}$ atinge o possível valor máximo entre os $i \in \{1, 2, ..., d\}$.

Para j fixado, existe $i_j \in \{1, 2, ..., d\}$ tal que o valor i_n^j é atingido um número infinito de vezes.

Recordando que $\lim_{\beta \to \infty} \frac{\mathcal{P}(\beta)}{\beta} = \lim_{\beta \to \infty} \frac{\log \lambda_{\beta A}}{\beta} = m(A)$, segue que

$$0 = \frac{1}{\beta_n} \log \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{l_i^{\beta_n A} e^{\beta_n A(i,j)}}{\lambda_{\beta_n A} l_j^{\beta_n A}} \right) \le \frac{1}{\beta_n} \log \left(d \frac{l_{i_j}^{\beta_n A} e^{\beta_n A(i_j,j)}}{\lambda_{\beta_n A} l_j^{\beta_n A}} \right) \le$$

$$\frac{1}{\beta_n} \left(\log d + \log l_{i_j}^{\beta_n A} + \log e^{\beta_n A(i_j,j} - \log \lambda_{\beta_n A} - \log l_j^{\beta_n A} \right).$$

Agora, tomando o limite, $\beta_n \to \infty$, da equação acima (para cada j fixado), temos:

$$0 \le A(i_j, j) + V(i_j) - V(j) - m(A) \Rightarrow V(j) + m(A) \le A(i_j, j) + V(i_j) \le \max_{i \in \{1,...,d\}} \{A(i,j) + V(i)\}.$$

E no caso em que dado um j existam i e $\varepsilon > 0$ tais que

$$V(j) + m(A) + \varepsilon < A(i_j, j) + V(i_j),$$

teríamos que

$$1 < \frac{l_i^{\beta_n A} e^{\beta_n A(i,j)}}{\lambda_{\beta_n A} l_j^{\beta_n A}}$$

para n suficientemente grande. Mas isso é uma contradição.

Logo, $V(j) = \max_{i \in \{1,...,d\}} \{A(i,j) + V(i) - m(A)\}$, e assim concluimos que V é uma sub-ação calibrada. □

No caso em que A possua uma única probabilidade maximizante, então existe o limite

$$\lim_{\beta \to \infty} \frac{1}{\beta} \log l^{\beta A} = V.$$

Consequentemente, (tomando $l^{\beta A} = H_\beta$) um ponto de acumulação para $\frac{1}{\beta} \log H_\beta$ é uma sub-ção calibrada. Agora, para cada i e cada x temos

$$m(A) + V(x) = \max_{i \in \{1,...,d\}} \{A(ix) + V(ix)\} \ge V(ix) + A(ix)$$

$$\Rightarrow A(ix) \leq m(A) + V(x) - V(ix),$$

logo existe uma função não negativa g tal que

$$A(y) = m(A) + V \circ \sigma(y) - V(y) + g(y).$$

Note que, pela Proposição 1.6.11 temos que g é Lipschitz.

Suponha que u seja uma sub-ação calibrada. Então é fácil ver que $u + c$, onde c é uma constante, também é uma sub-ação calibrada. Dizemos que a sub-ação calibrada é única, se é única a menos de uma constante aditiva. Pode-se mostrar que, no caso de haver mais do que uma probabilidade maximizante, a sub-ação calibrada não é única.

Uma sub-ação calibrada u satisfaz

$$u(\sigma(x)) - u(x) - A(x) + m(A) \geq 0$$

.

Como já vimos, se ν é uma medida σ-invariante, temos que para uma função contínua $u : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\int [u(\sigma(x)) - u(x)] d\nu = 0.$$

Suponha μ uma medida A-maximizante e u uma sub-ação calibrada para A. Então para todo x no suporte de μ, temos:

$$u(\sigma(x)) - u(x) - A(x) + m(A) = 0.$$

De fato, $g(x) = u(\sigma(x)) - u(x) - A(x) + m(A) \geq 0$, e a integral $\int g(x) d\mu(x) = 0$.

Desta forma, se sabemos o valor de $m(A)$, então a sub-ação calibrada u para A ajuda a identificar o suporte das probabilidades maximizantes. A igualdade a zero na equação acima pode ser verdade fora do união dos suportes das probabilidades maximizando μ. Sabe-se que genericamente na topologia Hölder em A a igualdade é verdadeira apenas no suporte da probabilidade maximizante.

O estudo das propriedades ergódicas para probabilidades maximizantes é o propósito da Otimização Ergódica.

Voltando as questões do início do capítulo, lembrando que

$$V = \lim_{\beta_n \to \infty} \frac{1}{\beta_n} \log H_{\beta_n}$$

e daí V é a seleção quando a temperatura tende a zero.

No caso geral em que o potencial A é Hölder, temos que uma sub-ação calibrada para A que não é seleção. As que são seleção, são especiais dentre as sub-ações calibradas.

Exemplo 2.1.3. *Vamos estudar a convergência e a seleção da temperatura zero para* $\Omega = \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$.

Suponha que A é dependa de duas coordenadas.

Suponha que $A(1,1)$ é estritamente maior que qualquer outro $A(i,j)$. Sabemos que A é localmente constante em Ω e portanto A é contínua, daí temos a garantia de uma medida maximizante e nesse caso, como $A(1,1) > A(i,j)$, o suporte desta medida está contida em δ_{1^∞}. Como A depende de duas coordenadas temos a garantia da seleção da sub-ação calibrada. Um resultado similar acontece se $A(2,2) > A(i,j)$.

Suponha agora que $A(1,1) = 0 = A(2,2)$ e $A(1,2), A(2,1) < 0$.

Com a notação anterior, $H_i^\beta = l_i^\beta$ com $i = 1,2$. O cálculo do autovetor à direita r_i^β de βA é igual ao autovetor à esquerda da matriz βA^t, daí temos o sistema:

$$(\lambda_\beta A - 1)H_1^\beta = e^{\beta A(2,1)} H_2^\beta$$

$$(\lambda_\beta A - 1)H_2^\beta = e^{\beta A(1,2)} H_1^\beta.$$

O traço da matriz com entradas $e^{\beta A(i,j)}$ é 2 e o seu determinante é $1 - e^{\beta(A(1,2)+A(2,1))}$. Logo, temos o autovalor máximo

$$\lambda_{\beta A} = 1 + \sqrt{e^{\beta(A(1,2)+A(2,1))}}.$$

Podemos tomar $H_2^\beta = 1$ e daí temos que $H_1^\beta = e^{\frac{\beta}{2}(A(1,2)-A(2,1))}$. Nesse caso, $V(2) = \lim_\beta \dfrac{1}{\beta} \log H_2^\beta = 0$, mais ainda, $V(1) = \lim_\beta \dfrac{1}{\beta} \log H_1^\beta = \lim_\beta \dfrac{1}{\beta} \log e^{\frac{\beta}{2}(A(1,2)-A(2,1))}$. Isso implica que $V(1) = \frac{1}{2}\left(A(2,1) - A(1,2)\right)$. E nesse caso, temos a seleção da sub-ação calibrada assumindo a normalização $H_2^\beta = 1$, para todo β.

Note que com a observação feita acima, concluimos que $l_1^\beta = r_2^\beta$ e $l_2^\beta = r_1^\beta$. Vamos assumir que $r_1^\beta + r_2^\beta = 1$ e $l_1^\beta r_1^\beta + l_2^\beta r_2^\beta = 1$.

Portanto, $\mu_\beta([1]) = l_1^\beta r_1^\beta = \frac{1}{2} = l_2^\beta r_2^\beta = \mu_\beta([1])$. Nesse caso temos então que a probabilidade

$$\frac{1}{2}\delta_{1^\infty} + \frac{1}{2}\delta_{2^\infty}$$

é o limite à temperatura zero.

Teorema 2.1.4. *Existe subshift $X \subset \{1,2\}^{\mathbb{N}}$, de modo que, para o potencial Lipschitz*

$$A(y) = -d(y, X),$$

a sequência $\mu_{\beta A}$ não converge (na topologia-fraca) com $\beta \to \infty$.*

Esse é um exemplo conhecido que não há convergência para os estados de equilibrio. A demonstração pode ser encontrada em [16].

Para uma dada medida maximizante, o que podemos dizer sobre o seu suporte? É fácil ver que, se existe uma única medida maximizante, temos a convergência pois há um único possível ponto de acumulação. Nesse caso, a questão não é muito interessante.

Vamos então supor que existam pelo menos duas medidas maximizante diferentes $\mu_{max,1}$ e $\mu_{max,2}$. Por linearidade, qualquer combinação convexa de ambas medidas

$$\mu_{max,t} = t\mu_{max,1} + (1-t)\mu_{max,2},$$

$t \in [0,1]$, também é uma medida A-maximizante. A questão da seleção é, então, determinar por que a família (ou, até mesmo uma subfamília) escolhida converge para um limite específico, se há tantas opções possíveis.

2.2 Grandes Desvios

No estudo de Grandes Desvios quando a temperatura vai para zero estamos interessados em limites da seguinte forma:

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \log \mu_\beta(C),$$

onde C é um cilindro fixado em Ω. Em princípio, esse limite não existe.

Definição 2.2.1. *Dizemos que existe uma Lei de Grandes Desvios para uma família de um parâmetro μ_β, $\beta > 0$, se existe uma função não-negativa I, onde $I : \Sigma \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ que é semi-contínua inferiormente e satisfaz a propriedade que para qualquer cilindro $C \subseteq \Sigma$*

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \log \mu_\beta(C) = -\inf_{x\in C} I(x).$$

Caso tal função I exista, é importante identificar tal função.

Teorema 2.2.2. *Suponha que A admita uma única medida maximizante. Seja V uma sub-ação calibrada. Então, para qualquer cilindro $[i_0 i_1 ... i_n]$ temos*

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \log \mu_\beta([i_0 i_1 ... i_n]) = -\inf_{x\in[i_0 i_1 ... i_n]} I(x)$$

onde

$$I(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [V\circ\sigma - V - (A - m(A))]\sigma^n(x).$$

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [4] utilizando involução do núcleo. E para uma prova sem utilizar esta ferramenta, pode ser encontrada em [14].

No caso em que o potencial A depende de duas coordenadas e possui uma única probabilidade maximizante, pelo teorema acima citado, temos que

$$I(x) = I(x_0 x_1 x_2 ...) = \sum_{j=0}^{\infty} [V(x_{j+1} - V(x_j) - (A(x_j, x_{j+1}) - m(A))].$$

Exemplo 2.2.3. *Assuma que o potencial A depende somente de duas coordenadas.*

Já vimos que

$$\mu_\beta([x_0x_1...x_{n-1}]) = l^\beta_{x_0} e^{\beta S_n(A)(x) - n\log\lambda_{\beta A}} r^\beta_{x_{n-1}},$$

onde $l^\beta = (l^\beta_1, ..., l^\beta_d)$ e $r^\beta = (r^\beta_1, ..., r^\beta_d)$ são respectivamente o autovetor à esquerda e à direita da matriz de entradas $e^{\beta A(i,j)}$ e $\lambda_{\beta A}$ é o raio espectral dessa matriz.

Pelo estudo de Grades Desvios, naturalmente podemos tomar:

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \log \mu_\beta([x_0x_1...x_{n-1}]) = [A(i_0, i_1) + A(i_1, i_2) + ... + A(i_{n-2}, i_{n-1})]$$

$+$

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \log l^\beta_{i_0} - \lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \log r^\beta_{i_n-1} - nm(A).$$

O principal problema na discussão é a existência dos limites quando $\beta \to \infty$. No caso em que existam os limites

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \log l^\beta = V$$

e

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \log r^\beta = V^*,$$

temos a seguinte expressão explícita:

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \log \mu_\beta([x_0x_1...x_{n-1}]) = [A(i_0, i_1)+A(i_1, i_2)+...+A(i_{n-2}, i_{n-1})]+V(i_0)-V^*(i_{n-1})-nm(A).$$

Existe uma necessidade de compreender melhor a relação entre l^β e r^β.

2.3 Órbitas Maximizantes

Um importante questionamento é sobre o tipo de trajetórias das probabilidades maximizantes. Do Teorema Ergódico de Birkoff nós sabemos que no caso em que μ é uma medida maximizante e ergódica, para μ-qtp

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} A \circ \sigma^j(x) = \int A d\mu = m(A).$$

Nesse caso dizemos que essa órbita a partir de x é A-maximizante.

Temos os segintes questionamentos:

1. Como podemos detectar uma certa órbita A-maximizante?

2. Como podemos relacionar medidas maximizantes como órbitas maximizantes?

3. Quais propriedades das órbitas A-maximizantes?

Veremos que esse ponto de vista vai produzir métodos que ajudarão a resolver a desigualdade cohomológica:

$$A \geq m(A) + V \circ \sigma - V.$$

Definição 2.3.1. *Um cobordo é uma função da forma $\psi \circ \sigma - \psi$.*

Suponha que μ é σ-invariante. Então, $\int \psi \circ \sigma d\mu = \int \psi d\mu$ logo $\int (\psi \circ \sigma - \psi) d\mu = 0$. Portanto se μ é σ-invariante, então a integral do cobordo sobre μ é zero.

Teorema 2.3.2. *Genericamente na topologia C^0 o potencial A tem uma única medida maximizante. Esta medida não é suportada numa órbita periódica.*

Demonstração. O conjunto $C^0(\Omega)$ é separável.

Seja $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência densa e enumerável em $C^0(\Omega)$. Temos que duas medidas distintas, digamos μ e ν, deve dar valores diferentes para as integrais de alguns ψ_n.

Isso significa,

$$\left\{A; \#\mathcal{M}_{max(A)>1}\right\} = \left\{A; \exists n \text{ e existem } \mu, \nu \in \mathcal{M}_{max(A)} \text{ tais que } \int \psi_n d\nu \neq \int \psi_n d\mu\right\}$$

$$= \bigcup_n \left\{A; \exists \nu, \mu \in \mathcal{M}_{max(A)} \text{ tais que } \int \psi_n d\nu \neq \int \psi_n d\mu\right\}$$

$$= \bigcup_n \bigcup_m \left\{A; \exists \nu, \mu \in \mathcal{M}_{max(A)} \text{ tais que } \left|\int \psi_n d\nu - \int \psi_n d\mu\right| \geq \frac{1}{m}\right\}.$$

Defina $F_{n,m} = \bigcup_n \bigcup_m \left\{A; \exists \nu, \mu \in \mathcal{M}_{max(A)} \text{ tais que } \left|\int \psi_n d\nu - \int \psi_n d\mu\right| \geq \frac{1}{m}\right\}$. Queremos provar que os $F_{n,m}$ são fechados com interior vazio. Para isso vamos usar o seguinte lema:

Lema 2.3.3. *Sejam (A_k) sequência de potenciais contínuos convergindo para A. Seja μ_k uma medida maximizante para A_k e μ um ponto de acumulação (na topologia fraca*). Então $\lim_{k\to\infty} m(A_k) = m(A)$ e μ é uma medida A-maximizante.*

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ e k suficientemente grande,

$$A - \varepsilon \leq A_k \leq A + \varepsilon \Rightarrow m(A - \varepsilon) \leq m(A_k) \leq m(A + \varepsilon) \Rightarrow m(A) - \varepsilon \leq m(A_k) \leq m(A) + \varepsilon.$$

Logo,

$$\lim_{k\to\infty} m(A_k) = m(A) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int A_k d\mu_k = m(A)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int A_{k_n} d\mu_{k_n} = m(A) \Rightarrow \int A d\mu = m(A).$$

Portanto μ é A-maximizante.

Para provar que $F_{n,m}$ é fechado em $C^0(\Omega)$ considere $A_k \to A$ (na topologia forte) e duas sequências (μ_k) e (ν_k) de medidas A_k-maximizante tais que

$$\left| \int \psi_n d\nu_k - \int \psi_n d\mu_k \right| \geq \frac{1}{m}.$$

Escolhemos uma subsequência de μ_k e ν_k tais que ambas converge na topologia fraca*. Pelo Lema anterior, os dois limites, digamos μ e ν respectivamente, são A-maximizantes e satisfazem

$$\left| \int \psi_n d\nu - \int \psi_n d\mu \right| \geq \frac{1}{m},$$

portanto $F_{n,m}$ são fechados.

Vamos provar agora que $F_{n,m}$ tem interior vazio. Para isso, definamos a função

$$\xi : \varepsilon \mapsto m(A + \varepsilon\psi_n).$$

Seja $t \in (0,1)$, logo

$$\xi\,(tx + (1-t)y) = m(A + (tx + (1-t)y)\psi_n) \leq m(A + (tx)\psi_n) + m(A + (1-t)y\psi_n) =$$

$$\xi(tx) + \xi\,((1-t)y) \leq t\xi(x) + (1-t)\xi(y),$$

logo ξ é uma função convexa. Sabemos que uma função convexa é diferenciável em todos os pontos (exceto num conjunto enumerável) o que prova que existem infinitos ε acumulados no 0, tais que $A + \varepsilon\psi_n \notin F_{n,m}$. Concluindo assim, que os conjutos $F_{n,m}$ têm interior vazio.

Falta provar que genericamente a única medida maximizante não é suportada em uma órbita periódica. Vamos considerar uma órbita periódica $\mathcal{O}$ e $\mu_{\mathcal{O}}$ a medida invariante associada. Se A é tal que $\mu_{\mathcal{O}}$ não é A-maximizante, então para todo A_ε (ε-próximo de A), $\mu_{\mathcal{O}}$ também não é A_ε-maximizante (pelo Lema anterior). Isso prova que o conjunto de A tal que $\mu_{\mathcal{O}}$ é A-maximizante é um conjunto fechado em $C^0(\Omega)$.

Para provar que tem interior vazio, vamos considerar A tal que $\mu_{\mathcal{O}}$ é A-maximizante e alguma medida μ perto de $\mu_{\mathcal{O}}$ (na topologia fraca*). Essa medida pode ser escolhida de tal forma que satisfaça

$$\int A d\mu \geq m(A) - \varepsilon,$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Temos que existe um conjunto K_ε, tal que $\mu_{\mathcal{O}}(K_\varepsilon) < \varepsilon$ e $\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$, e então, podemos encontrar uma função contínua $0 \leq \phi_\varepsilon \leq 1$, nula na órbita periódica $\mathcal{O}$ e tal que

$$\int \phi_\varepsilon d\mu > 1 - 2\varepsilon.$$

Então para ε suficientemente pequeno,

$$\int (A + 2\varepsilon\phi_\varepsilon) d\mu_{\mathcal{O}} < m(A) - \varepsilon + 2\varepsilon - 4\varepsilon^2 \leq \int (A + 2\varepsilon\phi_\varepsilon) d\mu.$$

Isso prova que $\mu_{\mathcal{O}}$ não é $(A + 2\varepsilon\phi_\varepsilon)$-maximizante, assim o conjunto dos potenciais que tem $\mu_{\mathcal{O}}$ como medida maximizante, tem interior vazio.

Como existem muitas órbitas periódicas enumeráveis, isso prova que genericamente uma órbita periódica não é maximizante. $\square$

Nessa mesma linha temos os seguintes resultados:

Teorema 2.3.4 (Contreras,Gonzalo (2014)). *Genericamente na topologia Lipschitz, o potencial A possui uma única medida maximizante que está suportada em uma órbita periódica.*

A prova desse teorema pode ser encontrada em [9].

Mais ainda:

Teorema 2.3.5 (ver [17]). *Seja μ uma medida maximizante para um potencial Lipschitz A. Suponha que μ não está suportada em uma órbita periódica. Então, para cada $\varepsilon > 0$ existe A_ε (ε-próximo de A) com a topologia Lipschitz tal que μ não é A_ε-maximizante.*

Teorema 2.3.6 (ver [10]). *Seja A Lipschitz com uma única medida, μ, A-maximizante. Suponha que μ tem suporte periódico. Então, $\exists \varepsilon > 0$ e A_ε (ε-próximo de A), com μ é a única medida A_ε-maximizante.*

Esses dois últimos Teoremas citados mostram que a única possibilidade para uma medida maximizante ser maximizante para uma pequena pertubação na norma Lipschitz, é ser suportada por uma órbita periódica.

Por outro lado, é extremamente simples de obter um exemplo que não tenha unicidade de medida maximizantes. Seja $\mathbb{K}$ um conjunto compacto σ-invariante que contenha o suporte de pelo menos duas medidas invariante (em outras palavras $\mathbb{K}$ não é exclusivamente ergódico). Defina então

$$A(x) := -d(x, \mathbb{K}).$$

Temos que A é Lipschitz e uma medida suportada no conjunto $\mathbb{K}$ é A-maximizante.

2.4 Critério da Entropia

Consideremos $A : \Omega \to \mathbb{R}$ um potencial Lipschitz. Note que nesse caso específico os resultados também valem para potenciais Hölder. Definindo $\mathcal{M}_{max(A)}$ como o conjunto das medidas A-maximizantes.

Definição 2.4.1. *O conjunto Mather de A é a união do suporte de todas medidas A-maximizantes.*

Teorema 2.4.2. *Um ground state tem entropia maximal dentre o conjunto de medidas maximizantes, ou seja, um ponto de acumulação μ_∞ para μ_β, quando $\beta \to \infty$, satisfaz*

$$h_{\mu_\infty} = \max\left\{h_\nu; \nu \in \mathcal{M}_{\max(A)}\right\}.$$

Demonstração. Primeiro, note que $\mathcal{M}_{\max(A)}$ é fechado e compacto em $\mathcal{M}_\sigma$. A entropia é semi-contínua superiormente, então existem medidas em $\mathcal{M}_{\max(A)}$ com entropia maximal. Seja μ_∞ essa medida, então $h_{max} = h_{\mu_\infty}$.

Então, nós temos:

$$h_{\max} + \beta m(A) = h_{\mu_\infty} + \int \beta A d\mu_\infty \leq \mathcal{P}(\beta),$$

como $\beta \mapsto \mathcal{P}(\beta)$ possui uma assíntota quando $\beta \to \infty$, ou seja, existe uma função h tal que

$$\mathcal{P}(\beta) = h + \beta m(A) + \mathcal{R}(\beta),$$

com $\lim\limits_{\beta\to\infty} \mathcal{R}(\beta) = 0$, segue que,

$$h_{\max} + \beta m(A) \leq h + \beta m(A) + \mathcal{R}(\beta)$$

$$h_{\max} \leq h.$$

Logo μ_∞ um ponto de acumulação para μ_β, E como já vimos na Proposição 1.6.10, μ_∞ é A-maximizante. Por outro lado,

$$h + \beta m(A) + \mathcal{R}(\beta) = \mathcal{P}(\beta) = h_{\mu_\beta} + \beta \int A d\mu_\beta \leq h_{\mu_\beta} + \beta m(A)$$

$$h_{\max} \geq h_{\mu_\infty} \geq \limsup_{\beta\to\infty} h_{\mu_\beta} \geq h \geq h_{\max}.$$

Portanto $h_{\mu_\infty} = h_{\max}$.

□

Na Mecânica Estatística $h_{\max}$ é chamado de entropia residual: É a entropia do sistema da temperatura zero, quando se atinge o ground state.

Consequentemente, se o conjunto Mather admite uma única medida de máxima entropia, então μ_β converge para esta medida quando $\beta \to \infty$.

Vimos que $\beta \mapsto \mathcal{P}(\beta)$ admite uma assíntota quando $\beta \to \infty$. Na realidade a assíntota é dada por

$$h_{\max} + \beta m(A).$$

E o teorema acima citado justifica o estudo do conjunto de órbitas maximizantes.

2.5 O Conjunto de Aubry

Definição 2.5.1. *Tomemos A Lipschitz. O potencial de Mañe é definido por:*

$$S_A(x,y) :=$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\sup\left\{\sum_{i=0}^{n-1}[A(\sigma^i(z))-m(A)]; n\in\mathbb{N}, \sigma^n(z)=y, d(z,x)<\varepsilon\right\}\right].$$

De certo modo, o potencial de Mañe $S_A(x,y)$ descreve o "caminho ideal"indo de x até y, segundo a dinâmica e maximizando o "custo"dado por A. Para ε fixado, o supremo não pode ser atingido por um pedaço finito da órbita.

Para um ponto x fixado, a função $y\mapsto S_A(x,y)$ é Hölder. Com efeito, com x fixado temos

$$|S_A(x,y_1)-S_A(x,y_2)| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}[A(\sigma^i(z_1))-A(\sigma^i(z_2))]\right|$$
$$\leq \sum_{i=0}^{n-1}\left|[A(\sigma^i(z_1))-A(\sigma^i(z_2))]\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} kd(\sigma^i(z_1),\sigma^i(z_2))^\alpha$$

.

Teorema 2.5.2. *Existe um conjunto invariante $\mathcal{A}$, chamado conjunto de Aubry, que satisfaz as propriedades:*

1. *$\mathcal{A}$ contém o conjunto Mather, ou equivalentemente, uma medida A-maximizante tem seu suporte em $\mathcal{A}$;*
2. *Restrito a $\mathcal{A}$, $A-m(A)$ é um cobordo Lipschitz.*

Demonstração. Definamos

$$\mathcal{A} := \{x\in\Omega; S_A(x,x)=0\}.$$

Vamos verificar que $\mathcal{A}$ satisfaz as condições acima citadas.

Consideremos as seguintes equações. Vamos escolher uma sub-ação calibrada qualquer V. Isso significa que

$$V(\sigma(x)) \geq A(x)-m(A)+V(x),$$

logo existe uma função Lipschitz não-positiva g tal que

$$A(x)=m(A)+V\circ\sigma(x)-V(x)+g(x). \quad (I)$$

Seja $z\in\Omega$. Por (I) temos que

$$S_n\left(A-m(A)\right)(z) = S_n(g)(z)+V\circ\sigma^n(z)-V(z) \quad (II).$$

Agora, tome y e considere z tal que $\sigma^n(z) = y$. Isso nos dá,

$$S_n\left(A - m(A)\right)(z) = S_n(g)(z) + V \circ \sigma^n(z) - V(z) \leq g(z) + V(y) - V(z) \leq V(y) - V(z).$$

Portanto, para todo x, y, a continuidade de V mostra que

$$S_A(x,y) \leq g(x) + V(y) - V(x) \leq V(y) - V(x).$$

Em particular

$$S_A(x,x) \leq 0. \quad (III)$$

O conjunto de Aubry contém o conjunto Mather.

Vamos mostrar que, se μ é A-maximizante e ergódica, então $supp(\mu) \subset \mathcal{A}$ e em particular $\mathcal{A} \neq \phi$.

Considere x um ponto genérico para μ (e também no suporte de μ). Como V é Lipschitz, então por (II) usando $z := x$ temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n\left(A - m(A)\right)(x) = \int A d\mu - m(A) = m(A) - m(A) = 0,$$

logo a função g satisfaz $\int g d\mu = 0$. Uma vez que g é contínua e μ ergódica, temos que $g|_{supp(\mu)} \equiv 0$ (qtp). Isso implica que

$$A(x) = m(A) + V \circ \sigma(x) - V(x), \forall x \in supp(\mu).$$

Pelo Teorema de Recorrência de Poincaré, x retorna infinitas vezes tão perto quanto se queira de si próprio. Logo dado um $\varepsilon = \frac{1}{2^N}$, tem infinitos n_i tais que $x = x_0x_1...x_{n_i-1}x_0x_1...x_{N-1}...$, ou seja, a palavra $x_0...x_{N-1}$ aparece várias vezes em $x = x_0x_1...$. Isso nos dá que, para tais n_i a palavra $z = x_0x_1...x_{n_i-1}x$, coincidindo com x há pelo menos $n_i + N$ dígitos. Como A e g são Lipschitz, $|S_{n_i}(A)(z) - S_{n_i}(A)(x)| \leq C\frac{1}{2^N}$ e $|S_{n_i}(g)(z) - S_{n_i}(g)(x)| \leq C\frac{1}{2^N}$.

Como para μ-qtp, $x \in supp(\mu), g \circ \sigma^k(x) = 0, \forall k$ e V é Lipschitz, nós temos, com $\sigma^{n_i}(z) = x$ e $d(z,x) \leq \frac{1}{2^{n_i+N}}$, $|S_{n_i}(A - m(A))(z)| = |S_{n_i}(V \circ \sigma(z) - V(z))| = \left|\sum_{i=0}^{n_i-1} V \circ \sigma^{i-1}(z) - V \circ \sigma^i(z)\right| = |V(x) - V(z)| \leq C\frac{1}{2^N}$. Segue que $S_A(x,x) \geq 0$ e de (III) concluimos que $S_A(x,x) = 0$, e assim $x \in \mathcal{A}$.

Vamos provar agora que $(A - m(A))|_{\mathcal{A}}$ é um cobordo. Seja $x \in \mathcal{A}$, temos que

$$0 \leq S_A(x,x) \leq g(x) \leq 0$$

isso implica que $g \equiv 0$ em $\mathcal{A}$. Portando $A - m(A) = V \circ \sigma - V$, logo $A - m(A)$ é um cobordo em $\mathcal{A}$.

Vamos verificar agora que $\mathcal{A}$ é σ-invariante.

Tomemos $x \in \mathcal{A}$. Fixado $\varepsilon_0 > 0$ e suponha que z é tal que $\sigma^n(z) = x$ e $d(x,z) < \varepsilon_0$. Então $S_n(A)(z) = \sum_{i=0}^{n-1} A \circ \sigma^i(z) = \sum_{i=1}^{n} A \circ \sigma^{i-1}(z) = A(\sigma(z)) + ... + A(\sigma^{n-1}(z)) + A(x) + A(z) - A(x) = S_n(A)(\sigma(z)) + A(z) - A(x)$. Note que, $d(\sigma(z), \sigma(x)) = 2d(z,x) < 2\varepsilon$ e $|A(z) - A(x)| \leq cd(x,z) < 2c\varepsilon$.

Tomando o supremo sobre todos os possíveis n, para ε fixado, e em seguida fazemos $\varepsilon \to 0$, vem

$$S_A(x,x) = S_A(\sigma(x), \sigma(x)).$$

Portanto $\mathcal{A}$ é σ-invariante. □

Proposição 2.5.3. *O conjunto de Aubry é compacto.*

Demonstração. Como vimos,

$$S_A(x,x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\sup \left\{ S_n(g)(z);\ n \in \mathbb{N}, \sigma^n(z) = x, d(z,x) < \varepsilon \right\} \right].$$

A função g é não-positiva, logo $S_n(g)$ também é não-positiva.

Lema 2.5.4. $S_A(x,x) = 0$ *se, e somente se, para todo* n*, existe* z *tal que* $\sigma^n(z) = x$ *e* $S_n(g)(z) = 0$.

Agora, o fato de g ser Lipschitz mostra que essa condição é fechada. Se x não satisfaz essa condição, então existe n tal que para todo z, com $\sigma^n(z) = x$, temos $S_n(g)(z) < 0$ e isso é obviamente verdade para todo x' perto de x. Portanto, o conjunto dos x tal que $S_A(x,x) = 0$ é fechado.

Vamos provar o Lema citado.

Se a volta não é satisfeita, então escolhemos n_0 tal que para toda pré-imagem por n_0 z de x, $S_{n_0}(g)(z) < 0$. O conjunto da pré-imagem por n_0 é finito, logo existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo z

$$\sigma^{n_0}(z) = x \Rightarrow S_{n_0}(g)(z) < -\varepsilon.$$

Agora, para $n > n_0$ e z tal que $\sigma^n(z) = x$,

$$S_n(g)(z) = S_{n-n_0}(g)(\sigma^{n-n_0}(z)) \leq S_{n_0}(g)(\sigma^{n-n_0}(z)) < -\varepsilon,$$

assim $S_A(x,x) \leq -\varepsilon < 0$.

Por outro lado, suponha que $S_A(x,x) = 0$. Escolhendo n_0 e tomando a sequência n-pré-imagem z_n de x convergindo para x tal que $S_n(g)(z_n) \to 0$, com $n \to \infty$. Definamos uma nova sequência $\xi_n := \sigma^{n-n_0}(z_n)$. É fácil ver que ξ_n é a n_0 pré-imagem de x e daí, existe z tal que $\sigma^{n_0}(z) = x$, e para infinitos n, temos $\xi_n = z$. Portando, considerando-se apenas esses n's temos

$$0 \geq S_{n_0}(g)(z) \geq S_n(g)(z_n),$$

o último termo vai para 0, quando $n \to \infty$. Portanto $S_{n_0}(g)(z) = 0$, e isso vale para todos os n. □

2.5.1 Estudo do Conjunto de Aubry para Potenciais Localmente Constantes

Vamos considerar um potencial A depende de duas coordenadas, vamos denotar $A(i,j)$ para $A(x), x \in [ij]$.

Fato 2.5.5. *H_β é constante no cilindro $[i]$.*

Demonstração. Como $\mathcal{L}_\beta H_\beta = \lambda_\beta H_\beta$, podemos expressar H_β por

$$H_\beta(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathcal{L}(\xi)(x)}{\lambda_\beta^k}$$

onde $\mathcal{L}(\xi)(x_0x_1x_2...) = \sum_{i\in\{1,...d\}} e^{\beta A(i,x_0)} 1(ix_0x_1...) = \sum_{i\in\{1,...d\}} e^{\beta A(i,x_0)}$. Iterando k vezes sobre o operador $\mathcal{L}$, temos

$$\mathcal{L}^k(\xi)(x_0x_1x_2...) = \sum_{i_m\in\{1,...d\}_{m\in\{1,...,k\}}} e^{\beta(A(i_k,i_{k-1})+...+A(i,x_0))}.$$

Portanto, $H_\beta(x_0x_1...)$ depende apenas de x_0. Por isso, é constante em cada cilindro de tamanho 1.

□

E o mesmo podemos concluir para $\frac{1}{\beta}\log H_\beta$ e também para qualquer ponto de acumulação V, quando $\beta \to \infty$.

Se $x \in \Omega$ e z é tal que $\sigma^n(z) = x$ e mais ainda $d(x,z) < 1$, então $V(x) = V(z)$. Daí,

$$S_n(A - m(A))(z) = S_n(g)(z) + S_n(V\circ\sigma - V)(z) = S_n(g)(z) \le 0.$$

Se $y \in \mathcal{A}$, temos $g|_{\mathcal{A}} \equiv 0$, então $S_n(A - m(A))(y) = V\circ\sigma^n(y) - V(y)$. Se $\sigma^n(y)$ e y, estão no mesmo cilindro de tamanho 1, então

$$S_n(A - m(A))(y) = 0.$$

Além disso, se z é uma órbita periódica dada pela concatenação de $y_0y_1...y_{n-1}$, então temos que

$$S_n(A - m(A))(z) = S_n(A - m(A))(y)$$

porque todas as transições $z_iz \to z_{i+1}$ são as mesmas para y (para $i \le n-1$). Isso mostra que $m(A)$ é atingido por órbitas periódicas.

Definição 2.5.6. *Uma órbita periódica obtida pela concatenação de $z_0...z_{n-1}$ diz-se simples, se todos os dígitos z_i são distintos.*

Por exemplo, 123123123... é uma órbita periódica simples de comprimento 3, mas por outro lado, 121412141214... não é uma órbita periódica simples.

Uma órbita periódica simples de comprimento n, fornece n blocos, que são as palavras que produzem os n pontos da órbita periódica. Do exemplo anterior, 123123123..., os blocos são $123, 231$ e 312.

Então, o conjunto de Aubry $\mathcal{A}$ é constituido da seguinte maneira:

1. Liste todas as órbitas periódicas simples. Este é um conjuto finito;

2. Escolha os de tal modo que as médias de Birkhoff sejam máximas. Esse valor máximo é $m(A)$. Essa órbita periódica simples é também chamada maximizante;

3. Considere os blocos associados para todos essa órbita periódica simples maximizante;

4. O conjunto $\mathcal{A}$ é o subshift tipo finito construído a partir desses blocos:

(a) Dois blocos podem ser combinados, se eles têm um dígito comum: "Em um dos laços simples colas um outro círcuito simples."Os blocos $x_0x_1...x_n$ e $x_ny_1...y_k$ prodruz a órbita periódica $x_0x_1...x_ny_1...y_kx_nx_0x_1...x_ny_1...y_kx_n...$.

Exemplo 2.5.7. *É fácil ver que* 123 *e* 345 *produz uma nova órbita* 123453123453....

(b) $\mathcal{A}$ é o fecho do conjunto de todas as órbitas periódicas obtidas por esse processo.

Para mais detalher ver [3]

Também podemos definir $\mathcal{A}$ a partir de sua matriz de transição. Se i não aparece em qualquer bloco, temos que $T_{ij} = 0, \forall j$. Se i aparece em um bloco, $T_{ij} = 1$, se ij aparece em um bloco (para $j \neq i$). Se i for ponto fixo de um bloco (que significa que o $iii...$ é uma órbita maximizante), defina $T_{ii} = 1$. Definamos $T_{ij} = 0$ nos outros casos. Então, $\mathcal{A} = \Sigma_T$.

Exemplo 2.5.8. *Se os blocos são (até permutações)* abc, cde, fgh, gi *e* fj *a matriz de transição restrita a essas letras é*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O conjunto $\mathcal{A}$ é um subshift de tipo finito. Ele pode, assim, ser decomposto em componentes irredutíveis, digamos $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_r$. Cada componente admite uma única medida de máxima entropia, digamos $\mu_1, ..., \mu_r$. Seja h_i a entropia associada. Vamos assumir que a ordem foi escolhida de modo que

$$h_1 \geq h_2 \geq ... \geq h_r.$$

Nesse caso, a entropia topológica para $\mathcal{A}$ é h_1. Mais precisamente, tomemos j_0 tal que

$$h_1 = h_2 = ... = h_{j_0} > h_{j_0+1} \geq h_{j_0+2}...$$

Então, $\mathcal{A}$ admite exatamente j_0 medidas ergódicas de entropia maximal h_1. Um ground state é a combinação convexa dos j_0 medidas ergódicas.

Nesse caso especial, se prova que há apenas um ground state.

Teorema 2.5.9. *(ver[6],[7]) Se A depende apenas duas coordenadas, então μ_β converge, com $\beta \to \infty$.*

Exemplo 2.5.10. *No exemplo anterior, $\mathcal{A}$ possui duas componentes irredutíveis. A primeira tem entropia $\frac{1}{3}\log 2 \approx 0,23$. A segunda tem entropia aproximadamente $0,398$. Nesse caso o ground state é a única medida de máxima entropia, que tem o suporte na segunda componente irredutível.*

Um segundo ponto de vista para o problema de seleção é; para todo β, a probabilidade μ_β tem suporte total. Pode-se dizer que uma medida, em nosso caso μ_β, pode ser representado pelo seu conjunto de pontos genéricos. Este conjunto de pontos é denso em Ω, ver [3]

Capítulo 3

Barreira Peierl's

3.1 Definição

Anteriormente vimos que, se A depende apenas de duas coordenadas o conjunto de Aubry $\mathcal{A}$ é um subshift de tipo finito. Ele tem, portanto, bem definida componentes irredutíveis, cada um sendo o suporte de uma medida única de máxima entropia. E no caso mais geral do potencial A, não há razões para que $\mathcal{A}$ seja um subshift tipo finito. Na verdade, pode ser qualquer subconjunto invariante como foi mostrado acima: escolhendo qualquer conjunto compacto $\mathcal{A}$ e tomando $A := -d(.,\mathcal{A})$.

Não é óbvio definir os componentes irredutíveis de $\mathcal{A}$ e como determinar as medidas de máxima entropia.

Definição 3.1.1. *A barreira Peierl's entre x e y é definida como*

$$h(x,y) := \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\left\{S_n(A-m(A))(z); \sigma^n(z)=y \text{ e } d(x,z)<\varepsilon\right\}.$$

Vimos que $A = m(A) + V\circ\sigma - V + g$, onde V é uma sub-ação calibrada (obtida pela convergência da subsequência de $\frac{1}{\beta}\log H_\beta$) e g é uma função Lipschitz não-positiva. Substituindo essa expressão para A na definição acima chegamos

$$\begin{aligned} h(x,y) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\left\{S_n(g)(z) + V(y) - V(z); \sigma^n(z)=y \text{ e } d(x,z)<\varepsilon\right\} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\left\{S_n(g)(z); \sigma^n(z)=y \text{ e } d(x,z)<\varepsilon\right\} + V(y) - V(x). \end{aligned}$$

Isso mostra que, para calcular $h(x,y)$, temos que encontrar uma sequência de pré-imagens para y que converge tão rápido quanto possível para x. Veremos mais tarde que é de muita importância que se tenha a igualdade $h(x,y)+h(y,x) = h(x,x)$.

Teorema 3.1.2. *Para todo x, a barreira Peierl's $y\mapsto h(x,y)$ é uma sub-ação calibrada Lipschitz. Mais ainda, $h(x,x)=0$ se, somente se, x pertence a $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Tomemos x e y. Consideremos z tal que $\sigma^n(z) = y$ e $d(x,z) < \varepsilon$. Note que em Ω, z é a concatenação $z_0 \ldots z_{n-1}y$. Para y' próximo de y (isto é $y_0 = y'_0$), vamos considerar $z' := z_0 \ldots z_{n-1}y'$. Como g é Lipschitz, é fácil ver que

$$|S_n(g)(z) - S_n(g)(z')| \leq C.d(y,y').$$

Se considerarmos a sequência de z realizando o $\limsup$ e fazendo $\varepsilon \to 0$, temos

$$h(x,y) \leq h(x,y') + C.d(y,y').$$

Analogamente, mostramos que $h(x,y') \leq h(x,y) + C.d(y,y')$, e portanto, $y \mapsto h(x,y)$ é Lipschitz.

Vamos mostrar agora que essa função é uma sub-ação calibrada. Consideremos y, n e ε, tais que, $\sigma^n(z) = y$ ($\Rightarrow \sigma^{n+1}(z) = \sigma(y)$) e $d(x,z) < \varepsilon$. Daí,

$$S_{n+1}(A - m(A))(z) = S_n(A - m(A))(z) + A(y) - m(A). \quad (3.1)$$

Tomando uma sequência de z realizando o $\limsup$ para $h(x,y)$, mas agora tomaremos o limite na subsequência, e considerando $\varepsilon \to 0$, então temos

$$h(x,y) + A(y) - m(A) \leq h(x,\sigma(y)).$$

Isso prova que $y \mapsto h(x,y)$ é uma sub-ação. Falta provar que fixado $y' = \sigma(y)$, a igualdade é realizada por uma das pré-imagens de y'. Isso decorre de tomar os $z's$ e os $n's$ da equação (3.1) que realizam o $\limsup$ para o lado esquerdo da igualdade. Então, temos

$$h(x,y') \leq h(x,y) + A(y) - m(A),$$

com $\sigma(y) = y'$. A medida que a desigualdade inversa é válida, assim segue a igualdade.

Ambas as definições do potencial de Mañe e barreira de Peierl's são muito semelhantes, exceto que, no primeiro caso, consideramos o supremo e no outro caso, nós consideramos o $\limsup$. Daí,

$$h(x,y) \leq S_A(x,y),$$

e então, $h(x,x) = 0$ implica que $S_A(x,x) = 0$ assim x pertence $\mathcal{A}$.

Vamos provar agora a recíproca. Tome $x \in \mathcal{A}$. Considere $\rho > 0$ suficientemente pequeno e ε_0, tais que, para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\sup_n \{S_n(A - m(A))(z); \sigma^n(z) = x \text{ e } d(x,z) < \varepsilon\} \geq -\rho. \quad (3.2)$$

Assumimos, para simplificar, que x não é periódico (mas a prova pode ser facilmente estendida para qualquer caso).

A desigualdade (3.2) vale para todos os ε.Vamos construir uma subsequência (n_k) por indução. Tomando ε qualquer e considerando n_0 realizando o supremo até $-\rho$:

$$S_{n_0}(A - m(A))(z_0) > -2\rho \text{ com } \sigma^{n_0}(z_0) = x \text{ e } d(x, z_0) < \varepsilon.$$

Agora da desigualdade (4.2) e usando o fato de x não é periódico (logo essa distância é positiva),

$$\varepsilon_1 < \min\{d(x, z); \sigma^n(z) = y, n \leq n_0\}.$$

Tomando $n_1 > n_0$ e z_1, tais que

$$S_{n_1}(A - m(A))(z_1) > -2\rho \text{ com } \sigma^{n_1}(z_1) = x \text{ e } d(x, z_1) < \varepsilon_1.$$

Repetindo o mesmo processo indutivamente com

$$\varepsilon_{k+1} < \min\{d(x, z); \sigma^n(z) = y, n \leq n_k\}.$$

Vem

$$-2\rho < S_{n_k}(A - m(A))(z_k), \text{ com } \sigma^{n_k}(z_k) = y \text{ e } d(x, z_k) < \varepsilon$$

portanto

$$-2\rho \leq \limsup_{n\to\infty}\{S_n(A - m(A))(z); \sigma^n(z) = x \text{ e } d(x, z) < \varepsilon\}.$$

Isso vale para todos os $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, e assim $h(x, x) \geq -2\rho$. Agora, fazendo $\rho \to 0$ temos que $h(x, x) \geq 0$. E como $h(x, x) \leq 0$ é sempre verdade, segue então $h(x, x) = 0$. $\square$

3.2 Componentes Irredutíveis

Vamos mostrar que a barreira de Peierl's permite definir componentes "irredutíveis"do conjunto de Aubry.

Lema 3.2.1. *Para todo x, y e z $h(x, y) \geq h(x, z) + h(z, y)$.* (3.3)

Lema 3.2.2. *Para todo $x \in \mathcal{A}$, $h(x, \sigma(x)) + h(\sigma(x), x) = 0$.*

Demonstração. Do Lema anterior e do Teorema 3.1.2 temos que

$$h(x, \sigma(x)) + h(\sigma(x), x) \leq h(x, x) = 0.$$

Como a barreira de Peierl's é uma sub-ação calibrada segue que

$$h(x, \sigma(x)) \geq A - m(A) + h(x, x) = A - m(A).$$

Seja $\varepsilon > 0$ e consideremos y, uma pre-imagem de x, ε-próximo de $\sigma(x)$. Suponha que $y = y_0 y_1 \ldots y_{n-1} x$. Então, $x' = x_0 y_0 y_1 \ldots y_{n-1} x$ é uma pré-imagem de x $\frac{\varepsilon}{2}-$ próximo de x. Em particular, $A(x') = A(x) \pm C\varepsilon$. E esse fato é equivalente a ter $x' \to x$ ou $y \to \sigma(x)$.

Assumimos que esses valores são escolhidos de tal maneira que $S_{n+1}(A-m(A))(x')$ converge para o lim sup, se n vai para $+\infty$. Agora,

$$S_{n+1}(A-m(A))(x') = A(x') - m(A) + S_n(A-m(A))(y).$$

Fazendo $n \to +\infty$ e $\varepsilon \to 0$, o termo do lado direito é menor que $h(\sigma(x), x) + A(x) - m(A)$ e o lado esquerdo vai para $h(x,x) = 0$. Portanto segue que,

$$0 \leq h(\sigma(x), x) + A(x) - m(A) \leq h(\sigma(x), x) + h(x, \sigma(x)).$$

□

Lema 3.2.3. *Sejam x, y e z em $\mathcal{A}$. Se $h(x,y) + h(y,x) = 0$ e $h(y,z) + h(z,y) = 0$, então $h(x,z) + h(z,x) = 0$.*

Demonstração. Basta usar o Lema 3.2.1 para mostrar que $h(x,z) + h(z,x) \geq 0$. E usar o fato que $h(x,z) + h(z,x) \leq h(x,x) = 0$. □

O Lema acima mostra que $h(x,y) + h(y,x) = 0$ é uma relação transitiva. Uma vez que é, obviamente, simétrica e reflexiva, então é uma relação de equivalência em $\mathcal{A}$.

Definição 3.2.4. *As classes de equivalência para a relação*

$$h(x,y) + h(y,x) = 0,$$

são chamadas de compenestes irredutíveis de $\mathcal{A}$.

Note que x e $\sigma(x)$ pertencem a mesma classe, e portanto isso prova que as classes são invariantes. A continuidade para barreira Peierl's foi provado, no que diz respeito à segunda variável para uma primeira variável fixada.

Se o potencial é localmente constante, já vimos no capítulo anterior que o conjunto de Aubry, $\mathcal{A}$, é um subshift tipo finito. Vamos verificar que a noção acima citada e componente irredutível coincidem.

Temos visto que os componentes irredutíveis de um subshift de tipo finito são exatamente as componentes transitivas. Usaremos essa descrição para mostrar que os componentes irredutíveis do conjuntos de Aubry (no sentido de barreira da Peierl's) são os componentes irredutíveis (em relação ao subshifts).

Lema 3.2.5. *Suponha que A dependa apenas de duas coordenadas. Seja x e y pertencentes a Ω. Suponha ainda que $d(z,x) \leq \frac{1}{4}, \sigma^n(z) = y$, e mais ainda, que existe $1 \leq k < n$, tal que, $d(\sigma^n(z), x) \leq \frac{1}{4}$. Então,*

$$S_n(A-m(A))(z) \leq S_{n-k}(A-m(A))(\sigma^k(z)).$$

Do Lema acima, afirmamos que, para cada x e y,

$$h(x,y) = S_A(x,y) = \max\left\{S_n(A - m(A))(z); \sigma^n(z) = y \text{ e } d(z,x) \leq \frac{1}{4}\right\}. \quad (3.5)$$

Demonstração. Vamos considerar uma sub-ação calibrada V (E já sabemos que V depende de uma única coordenada). Lembrando que para todo λ,

$$A(\lambda) = m(A) + V \circ \sigma(\lambda) - V(\lambda) + g(\lambda), \quad (3.4)$$

com g uma função não-negativa (que também depende de duas coordenadas). Agora temos,

$$S_k(A - m(A))(z) = S_k(g)(z) + V \circ \sigma^k(z) - V(z) = S_k(g)(z) = S_k(g)(z) \leq 0.$$

□

Lema 3.2.6. *(ver [3]) Para $y \in \Omega$ fixado. A aplicação $x \mapsto h(x,y)$ é contínua.*

Esse Lema nos mostra que todos os componentes irredutíveis de Aubry, no sentido da definição de (3.2) é fechado.Também é invariante.

Vamos considerar alguns componentes e pegar dois conjuntos abertos U e V (para os componente), vamos supor ainda que a igualdade (3.4) vale. Consideremos $x \in U \cap \mathcal{A}$ e $y \in V \cap \mathcal{A}$. Por definição,

$$h(x,y) + h(y,x) = 0.$$

Pela igualdade (3.5), $h(x,y)$ é atingido por $S_n(A - m(A))(z)$ e $h(y,x)$ é realizado por $S_m(A - m(A))(z')$. Mais ainda, também podemos supor que z pertence a U e z' pertence a V.

Na verdade, se não for o caso, pode-se seguir sempre as pré-imagens de x em que a componente $\mathcal{A}$ são exatamente o conjunto $g^{-1}(\{0\})$.

A partir das duas folhas de órbitas que são $z, \sigma(z), ..., \sigma^n(z)$ e $z', \sigma(z'), ..., \sigma^m(z)$ podemos construir uma órbita periódica. Denotemos por ξ o ponto dessa órbita periódica em U. Daí, é fácil ver que

$$h(y,\xi) = h(y,x) = S_m(A - m(A))(z')$$

e,

$$h(\xi,y) = h(x,y) = S_n(A - m(A))(z).$$

Isso monstra que ξ pertence a $\mathcal{A}$ e a mesma componente de y. Portanto, $\sigma^{-m}(U) \cap V \neq \varnothing$ e a componente é transitiva.

Das propriedades da barreira de Peierl's temos o seguinte resultado: uma sub-ação calibrada é inteiramente determinada por seus valores no conjunto de Aubry.

Teorema 3.2.7. *Uma sub-ação calibrada u satisfaz para todo y*

$$u(y) = \sup_{x \in \mathcal{A}} [h(x,y) + u(x)].$$

Demonstração. Ver Teorema 10 de [11]. □

Além disso, o componente irredutível tem uma importância especial:

Teorema 3.2.8. *Se x e z estão no mesmo componente irredutível de $\mathcal{A}$, então para todo y,*

$$h(x,y) + u(x) = h(z,y) + u(z).$$

Demonstração. Lembramos duas desigualdades e uma igualdade importante:

$$h(x,y) \geq h(x,z) + h(z,y),$$

$$u(x) \geq h(z,x) + u(z),$$

$$0 = h(x,z) + h(z,x).$$

Então,

$$u(x) + h(x,y) \geq u(x) + h(x,z) + h(z,y)$$

$$= u(x) - h(z,x) + h(z,y) + u(z) - u(z)$$

$$= u(x) - u(z) - h(z,x) + h(z,y) + u(z)$$

$$\geq h(z,y) + u(z).$$

Trocando os papéis de x e z obtemos que a desigualdade contrária também é válida.

□

Lembrando que para um determinado $\beta > 0$, o estado de equilíbrio μ_β é também uma medida de Gibbs obtida pelo produtto da auto-função H_β e da auto-probabilidade ν_β. Vale lembrar também que qualquer ponto de acumulação para a família $\frac{1}{\beta} \log H_\beta$ é uma sub-ação calibrada.

A unicidade da medida maximizante nos dá uma resposta parcial a estas perguntas:

Teorema 3.2.9. *Suponha que exista uma única medida A-maximizate. Então toda sub-ação calibrada é igual a uma constante aditiva.*

Demonstração. No caso em que $\mathcal{A}$ é unicamente ergódica e, portanto, tem uma única componente irredutível, se x_0 é um ponto de $\mathcal{A}$, os Teoremas 3.2.8 e 3.2.7 monstram que uma sub-ação calibrada é inteiramente determinada pelo seu valor em x_0. □

Ressaltando que mesmo nesse caso simples, a convergência de $\frac{1}{\beta}\log H_\beta$, quando $\beta \to \infty$, não é claro.

Teorema 3.2.10. *Suponha que* $\Omega = \{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ *e* A *satisfaça*

$$A(x) := \begin{cases} -d(x, 1^\infty) \ \textit{se} \ x = 1...., \\ -3d(x, 2^\infty) \ \textit{se} \ x = 2..., \\ -\alpha < 0 \ \textit{se} \ x = 3.... \end{cases}$$

Então, $\nu_\beta \to \delta_{1^\infty}$, *quando* $\beta \to \infty$, *e mais ainda,* $\frac{1}{\beta}\log H_\beta$ *converge.*

Demonstração. Ver [15]. □

Este teorema mostra que o nivelamento é um critério de seleção: o conjunto de Aubry, nesse caso, é reduzido a $\{1^\infty\} \cup \{2^\infty\}$ e as duas únicas medidas maximizantes ergódicas são as medidas de Dirac δ_{1^∞} e δ_{2^∞}. O potencial é "mais simples"em 1^∞ e em 2^∞. Portanto, esse Teorema diz que o local onde o potencial é mais plano recebe toda a massa no limite da auto-medida, com $\beta \to \infty$. Nesse caso, isso é suficiente para determinar todas as sub-ações calibradas. Veremos também que o problema da seleção da sub-ação calibrada está relacionada à multiplicidade de um autovetor no formalismo Max-Plus.

Capítulo 4

Álgebra Max-Plus

4.1 Motivação

A álgebra Max-Plus é essencialmente álgebra de números reais com duas operações binárias: $a \oplus b = \max\{a, b\}$ e $a \otimes b = a + b$. Existem muitas motivações distintas para introduzir este objeto matemático, sendo alguns deles, por exemplo, de problemas no funcionamento de uma linha de produção numa fábrica. Vamos imaginar, por exemplo, uma fábrica onde algum trabalhador i precisa esperar por algum de seus colegas j e k para terminar suas tarefas, que leva os tempos, respectivamente, T_{ij} e T_{ik}, a fim de fazer o seu trabalho (o trabalhador i), que leva o tempo a_i. Por isso, na fábrica, o tempo total de trabalho é dado por $a_i + \max\{T_{ij}, T_{ik}\}$; reescrevendo esse valor com a notação da álgebra Max-Plus temos $a \otimes (T_{ij} \oplus T_{ik})$.Isso mostra que, num sistema maior que envolve um número maior de trabalhadores e etapas distintas, a álgebra Max-Plus é uma maneira prática e elegante de formular o problema da distribuição de tarefas em ordem. Podemos usar as técnicas desta teoria, a fim de tornar o processo total mais eficiente.

De um ponto de vista puramente matemático podemos também ver esta álgebra, por exemplo, como a estrutura do crescimento exponencial de funções reais. Dada uma função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ define-se o crescimento exponencial de h como o limite (se, é claro, existe o limite)

$$e(h) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \log h(x).$$

Para fixar as idéias, considere um caso simples,

$$f(x) = e^{ax} \text{ e } g(x) = e^{bx}.$$

Nesse caso, segue da definição que $e(f) = a$ e $e(g) = b$. Agora, qual é o crescimento exponencial de fg ou $f + g$? Para $fg = e^{ax}e^{bx} = e^{(a+b)x}$, daí temos que a função fg cresce com uma taxa de $a + b$, ou seja, $e(f) + e(g)$. Logo, $e(fg) = e(f) + e(g) = e(f) \otimes e(g)$. Agora, para $f + g$, temos que $f + g = e^{ax} + e^{bx} = e^{\max\{x,y\}}(1 + o(1))$. Portanto, $e(f + g) =$

$\max\{e(f), e(g)\} = e(f) \oplus e(g)$. Por essa razão, não é uma surpresa que esta técnica apareça também na definição do limite à temperatura zero, onde estamos exatamente falando sobre a comparação de determinadas taxas de crescimento exponencial. (Para mais estudos ver [1], [2],[8] e [11])

4.2 Propriedades

Consideremos para nosso estudo

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup -\infty$$

com a convenção que $x + (-\infty) = -\infty$ para todo $x \in \bar{\mathbb{R}}$.

Vamos munir esse conjunto com duas operações:

$$a \oplus b = \max\{a, b\}$$

$$a \otimes b = a + b.$$

Com essa notação, a convenção acima é reescrita como $x \otimes -\infty = -\infty$ e temos também $a \oplus -\infty = a$ para todo $a \in \bar{\mathbb{R}}$, mostrando assim que $-\infty$ é elementro neutro para a operação binária $\oplus$. E é fácil ver que 0 é elemento neutro para a operação $\otimes$.

A chamada álgebra Max-Plus é então o semi-anel superior $\bar{\mathbb{R}}$ definida pelas operações $\oplus$ e $\otimes$.

Lema 4.2.1. *Sejam a, b e c elementos de $\bar{\mathbb{R}}$, então valem as seguintes propriedades:*

1. *Associatividade:* $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$ *e* $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$*;*
2. *Comutatividade:* $a \otimes b = b \otimes a$ *e* $a \oplus b = b \oplus a$*;*
3. *Distributividade:* $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$*;*
4. *Inverso multiplicativo: Se* $a \neq -\infty$*, então existe um único* b *tal quel* $a \otimes b = 0$*;*
5. *Elemento absorvente:* $a \otimes (-\infty) = (-\infty) \otimes a = -\infty$;
6. *Idempotente aditivo:* $a \oplus a = a$.

Note que ja provamos a existência de elemento neutro para $\oplus$ e $\otimes$.

Demonstração. Temos que

$$a \oplus (b \oplus c) = \max\{a, b \oplus c\} = \max\{a, \max\{b, c\}\} =$$

$$\max\{a, b, c\} = \max\{a \oplus b, c\} = (a \oplus b) \oplus c.$$

Para $\otimes$ a demonstração da associatividade é trivial. Com isso, provamos os primeiro item. A comutatividade segue das propriedades do máximo e da soma de números reais.

Considerando agora

$$a \otimes (b \oplus c) = a + \max\{b, c\} = \max\{a + b, a + c\} = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c),$$

assim provando o terceiro item.

Para o inverso multiplicativo, basta notar que, para qualquer a podemos tomar $b = -a$ e assim

$$a \otimes b = a + (-a) = 0.$$

Note que o item 7 segue da convenção tomada e para o último item basta ver que $\max\{a, a\} = a$. $\square$

Na álgebra linear, temos as seguintes aplicações.

Um vetor de dimensão d é um elemento de $\bar{\mathbb{R}}^d$, que será denotado por $v = (v_1, v_2, ..., v_d)$.

Dados dois vetores u e v em $\bar{\mathbb{R}}^d$ e $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$, definimos a soma de dois vetores como

$$u \oplus v = (u_1 \oplus v_1, u_2 \oplus v_2, ..., u_d \oplus v_d),$$

e o produto por escalar será definido por

$$\lambda \otimes u = (\lambda \otimes u_1, \lambda \otimes u_2, ..., \lambda \otimes u_d).$$

Dadas duas matrizes $m \times n$, A e B, definimos $A \oplus B$ como a matriz cujas entradas são

$$(A \oplus B)_{ij} := A_{ij} \oplus B_{ij} = \max\{A_{ij}, B_{ij}\}.$$

E dado $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$, defina a matriz $\lambda \otimes A$ como

$$(\lambda \otimes A)_{ij} = \lambda \otimes A_{ij} = \lambda + A_{ij}.$$

Não é difícil ver que as operações de matrizes acima satisfazem as seguinte propriedades:

Lema 4.2.2. *Dadas matrizes $m \times n$ A, B e C, e algum $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$ temos:*

1. *Existe uma matriz $[-\infty]$ tal que $A \oplus [-\infty] = A$,*

2. $A \oplus B = B \oplus A$,

3. $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$,

4. $\lambda \otimes A = A \otimes \lambda$,

5. $\lambda \otimes (A \oplus B) = (\lambda \otimes A) \oplus (\lambda \otimes B)$.

Dadas uma matriz $m \times n$ A e uma matriz $n \times l$ B, com m, n e l inteiros maiores ou iguais a 1, vamos definir o produto AB como

$$(AB)_{ij} = \bigoplus_k (A_{ik} \otimes B_{kj}) = \max_k (A_{ik} + B_{kj}).$$

Lema 4.2.3. *Nas condições citadas acima, temos as seguintes propriedades:*

$$(AB)C = A(BC),$$

$$\lambda \otimes AB = A(\lambda \otimes B) = AB \otimes \lambda.$$

Se $m = n$ dizemos que a matriz A é uma matriz quadrada de ordem n, com n inteiro e $n \geq 1$. Consideremos a matrix

$$I_n = \begin{bmatrix} 0 & -\infty & -\infty & \dots & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & \dots & -\infty \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\infty & -\infty & -\infty & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que, $(AI_n)_{ij} = \max\limits_k \{A_{ik} + (I_n)_{kj}\} = A_{ij}$, logo $AI_n = I_nA = A$, qualquer que seja matriz A de ordem n.

Agora vamos considerar A uma matriz de ordem n com entradas em $\bar{\mathbb{R}}$ e um vetor coluna v.

Nós definimos o produto Av por

$$(Av)_i = \bigoplus_j (A_{ij} \otimes v_j) = \max_j (A_{ij} + v_j).$$

Para um dado $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$ também definimos

$$\lambda v = (\lambda \otimes v_1, \lambda \otimes v_2, ..., \lambda \otimes v_n) = (\lambda + v_1, \lambda + v_2, ..., \lambda + v_n).$$

É natural se perguntar sobre autovalores e autovetores Max-Plus para A, ou seja, $Av = \lambda v$. Essa notação pode ser transcrita em termos de nossas operações de estudo

$$\max_j (A_{ij} + v_j) = \lambda + v_i, \text{ para } i \in \{1, ..., n\}.$$

Exemplo 4.2.4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max(1,-1) \\ \max(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Temos também,
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max(0,0) \\ \max(1,-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. *Nesse caso, vemos que $\lambda = 1$ é o autovalor associado a dois autovetores distintos.*

Exemplo 4.2.5. *Considere agora,*

$$\begin{bmatrix} -\infty & a \\ b & -\infty \end{bmatrix}$$

tem autovalor $\lambda = \frac{a+b}{2}$ *e autovetor* $v = \begin{bmatrix} x \\ x + \frac{(b-a)}{2} \end{bmatrix} = x \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b-a}{2} \end{bmatrix}, \forall x$

O resultado mais importante, no que diz respeito ao nosso estudo, é que as matrizes com entradas reais têm autovalor único.

Teorema 4.2.6. *Seja* A *uma matriz* $d \times d$ *com todas suas entradas* $a_{ij} \in \mathbb{R}$. *Então existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e um vetor* v *tais que*

$$Av = \lambda v.$$

Mais ainda, o autovalor λ *é único.*

Demonstração. Primeiramente, note que se $Mu = \mu u$, então $\lambda Mu = \lambda \otimes \mu u = (\lambda + \mu)u$. Note também que

$$\lambda M = \begin{bmatrix} \lambda + m_{11} & \lambda + m_{12} & ... & \lambda + m_{1d} \\ \lambda + m_{21} & \lambda + m_{22} & ... & \lambda + m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda + m_{d1} & \dots & \dots & \lambda + m_{dd} \end{bmatrix}.$$

Por isso, podemos supor sem perda de generalidade que as entradas de A são todas não-negativas. Logo, temos

$$0 \leq A_{ij} \leq L.$$

Agora, definamos a aplicação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como

$$(Tx)_i = \max_j (A_{ij} + x_j) - \min_k (\max_j (A_{kj} + x_j)).$$

A expressão acima depende continuamente do vetor x e temos também que $(Tx)_i \geq 0$. Por outro lado, temos

$$(Tx)_i \leq \max_j (L + x_j) - \min_k (\max_j (0 + x_j)) = \max_j (L + x_j) - \max_j (x_j) = L + x_k - x_k = L.$$

Em particular, isso prova que a região $\{x_j; 0 \leq x_j \leq L\}$ é enviada em si própria por T. Como T é contínua, pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, existe um ponto fixo v para T.

Portanto,

$$v = T(v)$$

isso implica que

$$v_i = (Tv)_i = \max_j(A_{ij} + v_j) - \min_k(\max_j(A_{kj} + v_j)).$$

Tomando $\lambda = \min_k(\max_j(A_{kj} + v_j))$. Então, da expressão acima vem

$$v = \max_j(A_{ij} + v_j) - \lambda \Rightarrow \max_j(A_{ij} + v_j) = \lambda + v$$

e assim concluimos que

$$Av = \lambda v,$$

na Max-Plus, assim provando a existência.

Para unicidade, suponha por absurdo, que temos dois autovalores distindo λ e μ. Em outras palavras, existe vetores v e u, tais que

$$Av = \lambda v \text{ e } Au = \mu u.$$

Sem perda de generalidade, suponha que $\lambda < \mu$. É possível ter um t suficientemente grande tal que $tv \geq u$ (no sentido que $tv_i \geq u_i$, para $i \in \{1, ..., d\}$). Então,

$$tv \oplus u = \max_i\{tv_i, u_i\} = tv_i, \forall i \Rightarrow tv \oplus u = tv.$$

Logo,

$$A^n(tv \oplus u) = A^n(tv) \oplus A^n(u) = A^n(tv) \Rightarrow$$

$$tA^n(v) \oplus A^n(u) = tA^n(v) \Rightarrow$$

$$t\lambda^n v \oplus \mu^n u = t\lambda^n v,$$

isso é equivalente a dizer que para todo n temos $t\lambda^n v \geq \mu^n u$ e isso é uma contradição, pois $\lambda < \mu$. Então, temos que $\lambda = \mu$ e o autovalor é único na Max-Plus. $\square$

Se tirarmos a hipótese das entradas serem reais, a situação é bastante diferente.Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\infty & -\infty \\ 1 & 1 & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & 2 & 2 \\ -\infty & -\infty & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Temos então que

$$A \begin{bmatrix} -\infty \\ -\infty \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\infty \\ -\infty \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \otimes \begin{bmatrix} -\infty \\ -\infty \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\-\infty\\-\infty\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\-\infty\\-\infty\end{bmatrix}=1\otimes\begin{bmatrix}1\\1\\-\infty\\-\infty\end{bmatrix}.$$

Assim, 1 e 2 são autovalores Max-Plus, mostrando que não há unicidade de autovalores para matrizes com entradas iguais a $-\infty$.

Existem algumas variações da álgebra Max-Plus, uma delas a álgebra Min-Plus , onde a operação binária $\oplus$ é substituída por $a \oplus b = \min(a, b)$. Essa álgebra também é conhecida como álgebra tropical. Neste contexto é interessante, por exemplo, estudar o comportamento de polinômios como

$$p(x) = a_0 \oplus (a_1 \otimes x) \oplus (a_2 \otimes x \otimes x) = \min\{a_0, a_1 + x, a_2 + 2x\}.$$

Seu gráfico, por exemplo, é uma união dos segmentos (alguns deles de comprimento infinito). A investigação geométrica desses objetos é conhecido como geometrica tropical.

4.3 Um Exemplo Explícito

Vamos considerar o caso particular $\Omega = \{1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$ e A potencial não-positivo que depende apenas de duas coordenadas. Para cada par (i, j) seja $A(i, j) = -\varepsilon_{ij}$, onde $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$, e para qualquer outro par $\varepsilon_{ij} > 0$.

Note que há apenas duas medidas ergódicas A-maximizantes, que são δ_{1^∞} e δ_{2^∞}. O conjuntos de Aubry é exatamente a união desses dois pontos fixos e cada um é componente irredutível.

Vamos relembrar que para cada β, o único estado de equilíbrio é dado por

$$\mu_\beta = H_\beta \nu_\beta,$$

com H_β e ν_β sendo autovetores para o operador de tranferência e seu dual, com raio espectral igual a $e^{\mathcal{P}(\beta)}$.

Como já vimos anteriormente, $\frac{d\mathcal{P}}{d\beta}(\beta) = \int A d\mu_\beta \leq 0$, pois $A \leq 0$ num conjunto de medida positva (para μ_β e $\forall \beta$). Temos também que a assíntota para $\mathcal{P}(\beta)$ é da forma

$$h_{\max} + \beta m(A)$$

onde $h_{\max}$ é a entropia residual. No nosso caso, $m(A) = 0$ e $h_{\max} = 0$. Portanto, $\lim\limits_{\beta\to\infty} \mathcal{P}(\beta) = 0$. Esse é o primeiro papel da álgebra Max-Plus, determinar a forma como a pressão vai para 0 quando $\beta \to \infty$.

Proposição 4.3.1. *Existe uma função positiva g e um $\rho > 0$ tal que*

$$\mathcal{P}(\beta) = g(\beta)e^{-\rho\beta}.$$

Demonstração. Vamos considerar um ponto de acumulação $-\rho$ para $\frac{1}{\beta}\log\mathcal{P}(\beta)$. Provaremos que este $-\rho$ é único, isto é, que não depende da subsequência escolhida.

Considerando a subsequência que realiza a expressão para $-\rho$, sempre podemos extrair outra subsequência de tal forma que $\frac{1}{\beta}\log H_\beta$ converge. Denotaremos por V esse limite, e como já vimos V é uma sub-ação calibrada (por simplicidade vamos escrever $\beta \to \infty$ mesmo considerando subsequências). Mais ainda, V e H_β dependem de uma única coordenada, então podemos escrever $V(i)$ e $H_\beta(i)$ para $V(x)$ e $H_\beta(x)$, com $x \in [i]$.

A autofunção H_β é um autovetor para $\mathcal{L}_\beta$, daí temos:

$$\begin{cases} e^{\mathcal{P}(\beta)}H_\beta(1) = e^{\beta A(1,1)}H_\beta(1) + e^{\beta A(2,1)}H_\beta(2) + e^{\beta A(3,1)}H_\beta(3) \\ e^{\mathcal{P}(\beta)}H_\beta(2) = e^{\beta A(1,2)}H_\beta(1) + e^{\beta A(2,2)}H_\beta(2) + e^{\beta A(3,2)}H_\beta(3) \end{cases}$$

Substituindo os valores para A obtemos as duas seguintes equações:

$$\begin{cases} (e^{\mathcal{P}(\beta)} - 1)H_\beta(1) = e^{-\beta\varepsilon_{21}}H_\beta(2) + e^{-\beta\varepsilon_{31}}H_\beta(3) \quad (4.1a) \\ (e^{\mathcal{P}(\beta)} - 1)H_\beta(2) = e^{-\beta\varepsilon_{12}}H_\beta(1) + e^{\beta\varepsilon_{32}}H_\beta(3) \quad (4.1b) \end{cases}$$

Como $\mathcal{P}(\beta) \to 0$, isso implica que (pela Regra de L'Hospital) $\frac{e^{\mathcal{P}(\beta)}-1}{\mathcal{P}(\beta)} \to 1$, e assim, $\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta}\log(e^{\mathcal{P}(\beta)} - 1) = \lim_{\beta\to\infty}\left[\frac{1}{\beta}\log\frac{e^{\mathcal{P}(\beta)} - 1}{\mathcal{P}(\beta)} + \frac{1}{\beta}\log\mathcal{P}(\beta)\right] = -\rho.$

Tomando $\frac{1}{\beta}\log$ e fazendo $\beta \to \infty$ no segundo sistema, temos:

$$\begin{cases} -\rho + V(1) = \max(-\varepsilon_{21}V(2), -\varepsilon_{31}V(3)) \quad (4.2a) \\ -\rho + V(2) = \max(-\varepsilon_{12}V(1), -\varepsilon_{32}V(3)) \quad (4.2a) \end{cases},$$

podendo ser reescrito da seguinte forma:

$$-\rho \otimes \begin{pmatrix} V(1) \\ V(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\infty & -\varepsilon_{21} & -\varepsilon_{31} \\ -\varepsilon_{12} & -\infty & -\varepsilon_{32} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} V(1) \\ V(2) \\ V(3) \end{pmatrix} \quad (4.3).$$

Agora, usando o Teorema 3.2.7 podemos escrever $V(3)$ em termos de $V(1)$ e $V(2)$. Daí, temos

$$V(3) = \max(V(1) + h(1^\infty, 3), V(3) + h(3^\infty, 3)),$$

onde h é a barreira de Peirl's e 3 é qualquer palavra no cilindro [3]. Usando o fato que

$$h(x, y) = S_A(x, y) = \max_n \left\{ S_n(A - m(A))(z); \sigma^n(z) = y \text{ e } d(z, x) \leq \frac{1}{4} \right\},$$

concluimos que

$$h(1^\infty, 3) = S_A(1^\infty, 3) = \max_n \left\{ S_n(A)(z); \sigma^n(z) = 3 \text{ e } d(z, 1^\infty) \leq \frac{1}{4} \right\} = -\varepsilon_{13}$$

(analogamente concluimos também que $h(2^\infty,3)=-\varepsilon_{23}$). Segue que,

$$\begin{pmatrix} V(1)\\ V(2)\\ V(3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\infty\\ -\infty & 0\\ -\varepsilon_{13} & -\varepsilon_{23}\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} V(1)\\ V(2)\end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Daí, podemos concluir que

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon_{13}-\varepsilon_{31} & -\varepsilon_{21}\oplus(-\varepsilon_{31}-\varepsilon_{23})\\ -\varepsilon_{12}\oplus(-\varepsilon_{32}-\varepsilon_{13}) & -\varepsilon_{23}-\varepsilon_{32}\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} V(1)\\ V(2)\end{pmatrix} = -\rho\otimes\begin{pmatrix} V(1)\\ V(2)\end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Logo, $-\rho$ é um autovalor para matriz $\begin{pmatrix} -\varepsilon_{13}-\varepsilon_{31} & -\varepsilon_{21}\oplus(-\varepsilon_{31}-\varepsilon_{23})\\ -\varepsilon_{12}\oplus(-\varepsilon_{32}-\varepsilon_{13}) & -\varepsilon_{23}-\varepsilon_{32}\end{pmatrix}$. E sabemos que esse autovalor é único (pois a matriz possui entradas reais). Isso prova que $\frac{1}{\beta}\log\mathcal{P}(\beta)$ admite um único ponto de acumulação quando $\beta\to\infty$, portanto converge. Defina $g(\beta):=\mathcal{P}(\beta)e^{\rho\beta}$, temos o que queriamos. $\square$

Vale ressaltar que o álgebra Max-Plus permite determinar o valor de $-\rho$, mas a função $g(\beta)$ permanece desconhecida. Para a convergência ou não de $\mu_\beta, \beta\to\infty$, é necessário um melhor entendimento do comportamento de $g(\beta)$.

Seguindo o raciocínio que fizemos antes, obtemos

$$-\rho = \max\begin{cases} A(1,3)+A(3,1) = -\varepsilon_{13}-\varepsilon_{31},\\ A(3,2)+A(2,3) = -\varepsilon_{32}-\varepsilon_{23},\\ \frac{A(2,1)+A(1,2)}{2} = -\frac{\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21}}{2},\\ \frac{A(2,1)+A(1,3)+A(3,2)}{2} = -\frac{\varepsilon_{21}+\varepsilon_{13}+\varepsilon_{32}}{2},\\ \frac{A(1,2)+A(2,3)+A(3,1)}{2} = -\frac{\varepsilon_{12}+\varepsilon_{23}+\varepsilon_{31}}{2},\\ \frac{A(2,3)+A(3,1)+A(1,3)+A(3,2)}{2}.\end{cases} \quad (4.6)$$

Vale ressaltar que a última parcela é a média das duas primeiras, então $-\rho \geq \frac{A(2,3)+A(3,1)+A(1,3)+A(3,2)}{2}$, assim $-\rho\geq A(1,3)+A(3,1)$ e $-\rho\geq A(3,2)+A(2,3)$ sempre.

Vamos concluir a prova da convergência de μ_β. Lembrando que qualquer ponto de acumulação deve ser da forma

$$\alpha\delta_{1^\infty}+(1-\alpha)\delta_{2^\infty},$$

com $\alpha\in[0,1]$. Portanto, é suficiente provar que $\frac{\mu_\beta([1])}{\mu_\beta([2])}$ converge quando $\beta\to\infty$, para concluir que μ_β converge.

Em primeiro lugar, temos algumas equações para medida ν_β. Lembrando que essa medida é βA-conforme. Logo, como $[1]=\bigsqcup_{n=1}^{\infty}([1^n2]\sqcup[1^n3])$ temos:

$$\nu_\beta([1]) = \nu_\beta\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty}([1^n2]\sqcup[1^n3])\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\nu_\beta([1^n2])+\nu_\beta([1^n3])\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{\beta S_n(A)(1^n 2) - n\mathcal{P}(\beta)} \nu_\beta([2]) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\beta S_n(A)(1^n 3) - n\mathcal{P}(\beta)} \nu_\beta([3]).$$

Como A depende de duas coordenadas e $A(1,1) = 0$ segue que

$$\nu_\beta([1]) = \frac{e^{-\beta\varepsilon_{12} - \mathcal{P}(\beta)}}{1 - e^{-\mathcal{P}(\beta)}} \nu_\beta([2]) + \frac{e^{-\beta\varepsilon_{13} - \mathcal{P}(\beta)}}{1 - e^{-\mathcal{P}(\beta)}} \nu_\beta([3]).$$

Sabendo que $\nu_\beta([1]) + \nu_\beta([2]) + \nu_\beta([3]) = 1$, estão temos um sistema para $\nu_\beta([1])$ e $\nu_\beta([2])$. Agora, repetimos o mesmo processo para o cilindro $[2] = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} ([2^n 1] \sqcup [2^n 3])$, obteremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \left(e^{\mathcal{P}(\beta)} - 1 + e^{-\beta\varepsilon_{13}}\right) \nu_\beta([1]) + \left(e^{-\beta\varepsilon_{12}} - e^{-\beta\varepsilon_{13}}\right) \nu_\beta([2]) = e^{-\beta\varepsilon_{13}} \\ \left(e^{-\beta\varepsilon_{23}} - e^{-\beta\varepsilon_{23}}\right) \nu_\beta([1]) + \left(e^{\mathcal{P}(\beta)} - 1 + e^{-\beta\varepsilon_{23}}\right) \nu_\beta([2]) = e^{-\beta\varepsilon_{23}} \end{cases} \quad (4.7)$$

O determinante desse sistema é

$$\Delta(\beta) = \left(e^{\mathcal{P}(\beta)} - 1\right)^2 + \left(e^{\mathcal{P}(\beta)} - 1\right)\left(e^{-\beta\varepsilon_{13}} - e^{-\beta\varepsilon_{23}}\right) + e^{-\beta(\varepsilon_{23} + \varepsilon_{12})} + e^{-\beta(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13})} - e^{\beta(\varepsilon_{21} + \varepsilon_{12})},$$

e segue que

$$\frac{\nu_\beta([1])}{\nu_\beta([2])} = \frac{\left(e^{\mathcal{P}(\beta)} - 1\right)e^{-\beta\varepsilon_{13}} + e^{-\beta(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23})}}{\left(e^{\mathcal{P}(\beta)} - 1\right)e^{-\beta\varepsilon_{23}} + e^{-\beta(\varepsilon_{21} + \varepsilon_{13})}}. \quad (4.8)$$

Por outro lado, usando as equações $(4.1a)$ e $(4.1b)$, temos:

$$\frac{H_\beta(1)}{H_\beta(2)} = \frac{\left(e^{\mathcal{P}(\beta)} - 1\right)e^{-\beta\varepsilon_{31}} + e^{-\beta(\varepsilon_{21} + \varepsilon_{32})}}{\left(e^{\mathcal{P}(\beta)} - 1\right)e^{-\beta\varepsilon_{32}} + e^{-\beta(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{31})}}.$$

Portanto, usando as duas equações temos que

$$\frac{\mu_\beta([1])}{\mu_\beta([2])} = \frac{H_\beta(1)}{H_\beta(2)} \frac{\nu_\beta([1])}{\nu_\beta([2])} = \frac{\left(e^{\mathcal{P}(\beta)} - 1\right)e^{-\beta\varepsilon_{31}} + e^{-\beta(\varepsilon_{21} + \varepsilon_{32})}}{\left(e^{\mathcal{P}(\beta)} - 1\right)e^{-\beta\varepsilon_{32}} + e^{-\beta(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{31})}} \frac{\left(e^{\mathcal{P}(\beta)} - 1\right)e^{-\beta\varepsilon_{13}} + e^{-\beta(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23})}}{\left(e^{\mathcal{P}(\beta)} - 1\right)e^{-\beta\varepsilon_{23}} + e^{-\beta(\varepsilon_{21} + \varepsilon_{13})}}$$

$$= \frac{\left(\left(e^{\mathcal{P}(\beta)} - 1\right)e^{\beta(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} - \varepsilon_{13})} + e^{\beta(\varepsilon_{21} - \varepsilon_{23})}\right)}{\left(\left(e^{\mathcal{P}(\beta)} - 1\right)e^{\beta(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} - \varepsilon_{23})} + e^{\beta(\varepsilon_{12} - \varepsilon_{13})}\right)} \otimes \frac{\left(\left(e^{\mathcal{P}(\beta)} - 1\right)e^{\beta(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} - \varepsilon_{31})} + e^{\beta(\varepsilon_{12} - \varepsilon_{32})}\right)}{\left(\left(e^{\mathcal{P}(\beta)} - 1\right)e^{\beta(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} - \varepsilon_{32})} + e^{\beta(\varepsilon_{21} - \varepsilon_{31})}\right)}.$$

Proposição 4.3.2. *A função g admite um limite quando β vai pra $+\infty$.*

Demonstração. Tomando ν_β a automedida para o Operador de Transferência Dual. Temos

$$e^{\mathcal{P}(\beta)} = \int \mathcal{L}_\beta(\chi) d\nu_\beta = (1 + e^{-\beta\varepsilon_{21}} + e^{-\beta\varepsilon_{31}})\nu_\beta([1]) + (1 + e^{-\beta\varepsilon_{12}} + e^{-\beta\varepsilon_{32}})\nu_\beta([2])$$
$$+ (e^{-\beta\varepsilon_{13}} + e^{-\beta\varepsilon_{23}} + e^{-\beta\varepsilon_{33}})\nu_\beta([3]). \quad (4.9)$$

$$\text{Vamos definir} \begin{cases} X := e^{\mathcal{P}(\beta)}, \\ A := e^{-\beta\varepsilon_{13}}, \\ A' := e^{-\beta\varepsilon_{23}}, \\ B := e^{-\beta(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23})}, \\ B' := e^{-\beta(\varepsilon_{21} + \varepsilon_{13})}, \\ C := e^{-\beta(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21})}, \\ a : e^{-\beta\varepsilon_{21}} + e^{-\beta\varepsilon_{31}}, \\ b := e^{-\beta\varepsilon_{12}} + e^{-\beta\varepsilon_{32}}, \\ c := e^{-\beta\varepsilon_{13}} + e^{-\beta\varepsilon_{23}} + e^{-\beta\varepsilon_{33}}. \end{cases}$$

Do sistema (4.7) obtemos os valores de $\nu_\beta([1])$ e $\nu_\beta([2])$, logo obtemos o valor de $\nu_\beta([3])$. Substituindo em (4.9) temos:

$$X = \frac{(1+a)(A(X-1)+B)+(1+b)(A'(X-1)+B')+c((X-1)^2-C)}{(X-1)^2+(A+A')(X-1)+B+B'-C}.$$

Isso pode ser escrito por

$$X-1 = \frac{a(A(X-1)+B)+b(A'(X-1)+B')+(c-1)((X-1)^2-C)}{(X-1)^2+(A+A')(X-1)+B+B'-C}, \quad (4.10)$$

isso implica que

$$(X-1)^3+(A+A'+1-c)(X-1)^2+(B+B'-C-aA-bA')(X-1)+C(c-1)-aB-bB' = 0. \quad (4.11)$$

É fácil ver que $A, A', B, B', ...$ vão exponencialmente rápido para 0, quando $\beta \to \infty$, $X-1$ comporta-se como $g(\beta)e^{-\rho\beta}$ (pois $g(\beta)e^{-\rho\beta} = \mathcal{P}(\beta)$ e $\lim\limits_{\beta\to\infty} \dfrac{X-1}{\mathcal{P}(\beta)} = 1$), e mais ainda g é sub-exponencial. Podemos assim usar o desenvolvimento de Taylor para substituir $X-1$ por $g(\beta)e^{-\rho\beta}$ e manter em cada uma das somas em (4.11) a maior termo (maior aqui significa que estamos comparando-o com os outros termos, se não houver uma somas, mas também com os termos de outras somas).

Por exemplo, é claro que $(A+A'+1-c)(X-1)^2$ tem como termo dominante $g^2(\beta)e^{-2\rho\beta}$, enquanto que $(X-1)^3$ tem como termo dominante $g^3(\beta)e^{-3\rho\beta}$ que por sua vez é menor que $g^2(\beta)e^{-2\rho\beta}$.

No mesmo sentido, podemos notar que o termo B é eliminado pela parcela bA', assim como B' é eliminado por aA. O termo $X-1$ é igual a:

$$e^{-\beta(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{23})}+e^{-\beta(\varepsilon_{21}+\varepsilon_{13})}-e^{-\beta(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21})}-e^{-\beta(\varepsilon_{21}+\varepsilon_{13})}-e^{-\beta(\varepsilon_{13}+\varepsilon_{31})}-e^{-\beta(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{23})}-e^{-\beta(\varepsilon_{23}+\varepsilon_{32})}$$

$$= -e^{-\beta(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21})}-e^{-\beta(\varepsilon_{13}+\varepsilon_{31})}-e^{-\beta(\varepsilon_{23}+\varepsilon_{32})}.$$

Nate-se que este termo será multiplicado por $g(\beta)e^{-\rho\beta}$ e comparado a $g^2(\beta)e^{-2\rho\beta}$. O fato que $\rho \leq \frac{\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21}}{2}$ mostra que o termo $-e^{-\beta(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21})}$ também pode ser esquecido, porque vai fornecer um valor exponencialmente menor do que $g^2(\beta)e^{-2\rho\beta}$.

O termo sem $(X-1)$ é (com a mudança de sinal)

$$e^{-\beta(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{23})} \oplus e^{-\beta(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{23}+\varepsilon_{21})} \oplus e^{-\beta(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{23}+\varepsilon_{31})} \oplus e^{-\beta(\varepsilon_{21}+\varepsilon_{12}+\varepsilon_{13})} \oplus e^{-\beta(\varepsilon_{21}+\varepsilon_{13}+\varepsilon_{32})}$$

$$= e^{-\beta(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{23})} \oplus e^{-\beta(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{23}+\varepsilon_{31})} \oplus e^{-\beta(\varepsilon_{21}+\varepsilon_{12}+\varepsilon_{13})}$$

do formalismo Max-Plus. Comparando todos esses termos com o termo $g^2(\beta)e^{-2\rho\beta}$, recordando de uma equação: comparando os termos 2ρ e o termo ρ, leva a comparar $-\rho$ com $-(\varepsilon_{13}+\varepsilon_{31}) \oplus (-\varepsilon_{23}+\varepsilon_{32})$, e comparando o termo 2ρ, com os termos sem ρ, levando a comparar -2ρ com $-(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21}) \oplus (-\varepsilon_{12}-\varepsilon_{23}-\varepsilon_{31}) \oplus (-\varepsilon_{21}-\varepsilon_{31}-\varepsilon_{32})$.

Agora, considerando o termo dominante em escala exponencial (4.11) produz uma igualdade da forma

$$\tilde{a}g^2(\beta) - \tilde{b}g(\beta) - \tilde{c} = \text{ termo exponencialmente pequeno,} \quad ()$$

onde $\tilde{a}$ é 0 ou 1, $\tilde{b} \in 0,1,2,3$ e $\tilde{c} \in 0,1,2,3$ e nem todos coeficientes $\tilde{a}, \tilde{b}$ e $\tilde{c}$ são zero. Como g é positivo e todos os coeficientes não são nulos, temos que, necessariamente, $\tilde{a} = 1$. Agora, considere qualquer ponto de acumulação G para $g(\beta)$, com $\beta \to +\infty$, temos que

$$G^2 - \tilde{b}G - \tilde{c} = 0.$$

Essa equação admite todas as suas raízes em $\mathbb{R}$, e, pelo menos uma delas é não-negativa. Mas, o ponto-chave aqui é que as raízes formam um conjunto finito, e este conjunto contém o conjunto de pontos de acumulação de $g(\beta)$ com $\beta \to +\infty$. Por outro lado, g é uma função contínua, assim, o conjunto de pontos de acumulação de g é um intervalo. Isto mostra que ele é reduzido para um único ponto, e então $g(\beta)$ converge quando $\beta \to +\infty$. $\square$

Lembrando que, $\mathcal{P}(\beta)$ vai para 0 quando β vai para $+\infty$, e então $e^{\mathcal{P}(\beta)} - 1$ tem o mesmo comportamento que $g(\beta)e^{-\beta\rho}$. Substituindo na equação de $\frac{\mu_\beta([1])}{\mu_\beta([2])}$, temos que:

$$\frac{\mu_\beta([1])}{\mu_\beta([2])} = \frac{\left(g(\beta)e^{\beta(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21}-\varepsilon_{13}-\rho)} + e^{\beta(\varepsilon_{21}-\varepsilon_{23})}\right)}{\left(g(\beta)e^{\beta(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21}-\varepsilon_{23}-\rho)} + e^{\beta(\varepsilon_{12}-\varepsilon_{13})}\right)} \otimes \frac{\left(g(\beta)e^{\beta(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21}-\varepsilon_{31}-\rho)} + e^{\beta(\varepsilon_{12}-\varepsilon_{32})}\right)}{\left(g(\beta)e^{\beta(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21}-\varepsilon_{32}-\rho)} + e^{\beta(\varepsilon_{21}-\varepsilon_{31})}\right)}.$$

Sabemos, que $g(\beta)$ converge para um limite não-negativo, então a igualdade acima admite um limite quando $\beta \to +\infty$ (em $[0, +\infty]$). Se o limite é 0, isso significa que μ_β vai para δ_{2^∞}, se o limite é $+\infty$ significa que μ_β vai para δ_{1^∞}, se é igual a $\alpha \in (0, +\infty)$, então μ_β converge para $\frac{\alpha}{\alpha+1}\delta_{1^\infty} + \frac{1}{\alpha+1}\delta_{2^\infty}$.

Referências Bibliográficas

[1] Akian, M., Gaubert, S., Guterman, A., Linear independence over tropical semirings and beyond. (English summary) Tropical and idempotent Mathematics, 1-38, Contemp. Math., 495, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2009).

[2] Akian, M., Babat, R., Guterman, A., Handbook of Linear Algebra, Leslie Hogben (Editor), Section 25, 25-1 to 25-17, Chapmann and Hall, (2006).

[3] Baraviera, A., Leplaideur, R., Lopes, A., Ergodic Optimzation, Zero Temperature Limits and the Max-Plus Algebra. 29° Colóquio Brasileiro de Matemáticaa, IMPA, (2013).

[4] Baraviera, A., Lopes, A., Thieullen, P., A Large Deviation Principle for Equilibrium States of Hölder Potencials: The Zero Temperature Case. Stochastics and Dynamics 6 (2006), 77 - 96.

[5] Brémont, J., Gibbs measures at temperature zero. Nonlinearity, 16(2), 419-426, 2003.

[6] Chazottes, J., Gambaudo, J., Ulgade, E., Zero-temperature limit of one dimensional Gibbs states via renormalization: the case of locally constant potentials, Erg. Theo. and Dyn. Sys. 31 (2011), no. 4, 1109-1161.

[7] Chou, W., Duffin, R. J., An additive eigenvalue problem of physics related to linear programming, Advances in Applied Mathematics 8, 486-498, 1987.

[8] Chou, W., Grifiths, R., Ground states of one-dimensional systems using effective potentials, Phys. Rev. B 34 (1986) 6219-6234.

[9] Contreras, G., Groud States are Generically a Periodic Orbit, (2014).

[10] Contreras, G., Lopes, A. O., Thieullen, Ph.,Lyapunov minimizing measures for expanding maps of the circle, Ergodic Theory and Dynamical Systems, Vol 21, 1379-1409, 2001.

[11] Garibaldi, E., Lopes, A., On Aubry-Mather theory for symbolic Dynamics, Ergodic Theory and Dynamical Systems, Vol 28 , Issue 3, 791-815 (2008).

[12] Oliveira, K. Viana, M. *Fundamentos de Teoria Ergódica*, SBM, (2014).

[13] Leplaideur, R., A dynamical proof for convergence of Gibbs measures at temperature zero, Nonlinearity, 18, N 6, 2847-2880, 2005.

[14] Lopes, A., Mengue, J.; Selection of Measure and a Large Deviation Principle for the General One-dimensional XY model, preprint, UFRGS, 2011.

[15] Leplaideur, R., Flatness is a criterion for selection of maximizing measures. J. Stat. Phys. 147 (2012), no. 4, 728-757.

[16] Lopes,A., Oliveira, E. R. , Smania, D., Ergodic Transport Theory and Piecewise Analytic Subactions for Analytic Dynamics, Bull. of the Braz. Math Soc. Vol 43 (3) 467-512 (2012)

[17] Yuan, G., Hunt, B., Optimal orbits of hyperbolic systems, Nonlinearity 12 (1999) , no. 4, 1207 - 1224.