



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



ORIENTADOR: PROF. DR. MANUEL STADLBAUER

A TAXA DE DECAIMENTO E TRANSPORTE OTIMAL

ALFREDO CALDERÓN CÉSPEDES

Salvador-Bahia

Janeiro de 2015

A Taxa de Decaimento e Transporte Otimal.

Alfredo Calderón Céspedes

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de mestre em matemática.

Orientador: **Prof. Dr. Manuel Stadlbauer**

Salvador-BA
Janeiro/2015

Calderón Céspedes, Alfredo.

A Taxa de Decaimento e Transporte Otimal / Alfredo Calderón Céspedes. – Salvador, 2015.

Número de páginas: 50 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Manuel Stadlbauer.

Dissertação de Mestrado – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Colegiado do Curso de Matemática, 2015.

Palavras Chaves: 1. Perron-Frobenius, Teorema de. 2. Ruelle, Teorema de. 3. Cadeia topológica de Markov. 4. Sistemas dinâmicos aleatórios. I. Stadlbauer, Manuel. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDD : 514

CDU : 515.1

A TAXA DE DECAIMENTO E TRANSPORTE OTIMAL

ALFREDO CALDERÓN CÉSPEDES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada o dia 30 de Janeiro de 2015.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Manuel Stadlbauer (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Vítor Araújo
UFBA

Prof. Dr. Teófilo Nascimento
UNEB

*A minha incondicional
família...*

Agradecimentos

A minha família, professores, muitos colegas e amigos que não só estiveram presentes no processo de desenvolvimento deste trabalho, muitos deles foram indispensáveis para a conclusão do mesmo. Preciso agradecer especialmente a minha mãe pelo apoio incondicional, pois ficando tão longe eu sempre senti ela perto de mim, aos professores da UFBA e outras instituições que me ajudaram quando mais precisei, antes e durante o meu processo de formação (particularmente aos professores que aceitaram conformar a banca, Vítor Araújo e Teófilo Nascimento), aos meus coleguinhas “da 18” que viraram família ao final, devo minha vida e minha formação a vocês (não colocarei nomes por medo a esquecer alguém), aos meus amigos e família do Chile que nunca esqueceram de mim, realmente foi importante sentir que não estava sozinho num país estrangeiro; e para concluir preciso agradecer ao meu orientador Manuel que me apoiou e me ajudou com cada passo complicado do desenvolvimento deste trabalho, um profissional competente que me deu segurança e hoje um amigo além das matemáticas.

Finalmente, preciso agradecer as fundações financiadoras que fizeram possível este trabalho: Capes e FAPESB.

“A matemática é a ciência da ordem e da medida, de belas cadeias de raciocínio, todas simples e fáceis...”

R. Descartes

Resumo

Apresentamos uma nova aplicação do recentemente popularizado método de acoplamentos (ou transporte ótimo) para obter decaimento exponencial de correlações. A modo de introdução, enunciamos os teoremas de Perron-Frobenius e de Ruelle, como versões prévias ao nosso resultado e como objetos de comparação. Nosso objetivo é provar o teorema de Ruelle num contexto mais geral como sendo as cadeias contáveis topológicas de Markov randomizadas (completas), para isso vamos introduzir o método de acoplamentos que faz uso de uma contração da métrica de Wasserstein sobre as medidas de probabilidade definidas num espaço de full-shift aleatório. Vamos ver que tal método mostra varias vantagens em relação aos clássicos métodos conhecidos para provar decaimento de correlações.

Abstract

We present a new application of the recently popularized coupling method (or optimal transport) in order to get exponential decay of correlations. As an introduction, we will state the theorems of Perron-Frobenius and Ruelle for comparison to our result. Our goal is to prove Ruelle's theorem in the a broader context of random countable Markov chains, for this we'll introduce the coupling method. This method uses a contraction in the Wasserstein metric on probability measures defined in a random full-shift space. We will see that this method shows several advantages over classical methods known for proving decay of correlations.

Sumário

Glossário	v
1 Introdução geral	1
1.1 Enunciado do teorema de Perron-Frobenius	2
1.2 Métrica projetiva sobre o quadrante não negativo de \mathbb{R}^N	4
1.2.1 Construção da métrica projetiva	5
1.2.2 Contração dada pela métrica projetiva	7
1.3 Prova do teorema de Perron	11
1.4 Aplicação: problemas de controle para potências	14
1.5 Organização do texto	16
2 O teorema de Ruelle determinístico e aleatório	17
2.1 Ferramentas determinísticas básicas e o teorema de Ruelle-Sarig	17
2.2 Uma versão aleatória do operador de Ruelle	20
2.3 Métrica de Wasserstein e construção do transporte	26
2.3.1 O método de acoplamento	27
2.4 Uma versão aleatória do teorema de Ruelle	34
3 Exemplos de aplicação e perspectivas futuras	41
3.1 Aplicação ao decaimento de correlações	41
3.2 Aplicações de Markov no intervalo	42
3.3 Solução numérica para um problema particular	44
Bibliografia	47
Índice Remissivo	49

Glossário

$(B)_{i,j}$	o coeficiente na posição (i, j) da matriz B ;
$(a_{i,j})_{i,j=1}^N$	uma matriz de dimensão $N \times N$, cujo coeficiente na posição (i, j) é $a_{i,j}$;
$(v)_i$	a coordenada na posição i do vetor v ;
$M_N(\mathbb{C})$	o conjunto das matrizes de dimensão $N \times N$ com coeficientes em \mathbb{C} ;
$M_N(\mathbb{R})$	o conjunto das matrizes de dimensão $N \times N$ com coeficientes em \mathbb{R} ;
$\text{diam}(A)$	$\sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$, onde d é uma métrica ;
$\text{ess-inf } f$	$\sup\{t \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[f^{-1}(-\infty, t)] = 0\}$, onde (Ω, \mathbb{P}) é um espaço de medida e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mens. ;
$\text{ess-sup } f$	$\inf\{t \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[f^{-1}(t, \infty)] = 0\}$, onde (Ω, \mathbb{P}) é um espaço de medida e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mens. ;
\mathbb{N}_0	o conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$;
$\text{mdc}(A)$	$\max\{k \in \mathbb{N} : k \text{ divide a } m, \forall m \in A\}$, onde $A \subset \mathbb{Z}$;
$\text{supp } \mu$	$\{x \in X : \exists \mathcal{N}_x \in \mathcal{B}$ vizinhança de x tal que $\mu(\mathcal{N}_x) > 0\}$, onde (X, \mathcal{B}, μ) é um espaço de medida e \mathcal{B} os borelianos sobre o espaço X ;

Capítulo 1

Introdução geral

Dada uma matriz A não negativa, o teorema de Perron-Frobenius diz que A possui um autovalor real, positivo e maximal. Existem vários casos em que um sistema dinâmico define uma ação natural sobre um espaço de funções, em particular, quando o sistema dinâmico que estudamos é dado pelo *shift*, nossa ação natural sobre um certo espaço de funções é exatamente o operador de Ruelle, o qual deve ser restrito a um certo espaço de Banach para obter propriedades parecidas às da matriz $A \geq 0$. A relação entre os resultados de Perron e de Ruelle é dada pela matriz de transição que define o sistema dinâmico do subshift (de tipo finito), pois se tal matriz é topologicamente mixing temos que para alguma potência ela é positiva, portanto, ela é aperiódica (hipótese forte do teorema de Perron). Desta forma, fica claro que um teorema é a motivação do outro e em certo sentido, também é uma generalização do outro. De fato, o teorema de Perron-Frobenius é um resultado para uma matriz não negativa de dimensão finita, a qual pode ser vista como um operador Ruelle associado a um potencial localmente constante, enquanto o teorema de Ruelle-Sarig é um resultado para um operador quase compacto agindo em um espaço de dimensão infinita associado a um potencial Hölder contínuo. Isto explica também a similitude de algumas das aplicações destes teoremas, como por exemplo, a construção de medidas/densidades invariantes.

Nosso objetivo principal neste trabalho será enunciar uma generalização dos teoremas anteriores no contexto de fibrados, provar tal resultado usando o método de acoplamentos e concluir que o método de cones (usualmente usado para provar o teorema de Perron) não é um método adequado para este caso, pois precisa de uma sofisticada adaptação para sua utilização sobre um fibrado aleatório. Neste primeiro capítulo enunciamos o teorema de Perron-Frobenius e explicamos o método espectral clássico dos cones de Birkhoff para provar decaimento de correlações. Isso vai permitir-nos fazer uma pequena comparação em relação ao método de acoplamentos explicado no capítulo 2. É bom deixar claro que não vamos aprofundar na adaptação do método de cones em fibrados, só vamos explicar o método clássico usado para mostrar o teorema de Perron (para ver uma adaptação em fibrados veja [1]).

1.1 Enunciado do teorema de Perron-Frobenius

O teorema de Perron-Frobenius descreve as propriedades dos autovalores maximais e dos autovetores correspondentes quando A é uma matriz quadrada com entradas reais não negativas. Um **autovalor maximal** real ou complexo λ^* de uma matriz $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^N \in M_N(\mathbb{C})$ é tal que $|\lambda| \leq |\lambda^*|$ para cada autovalor λ de A . Além disso, uma matriz A é **não negativa** se $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ e $a_{i,j} \geq 0$ para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ (que denotamos por $A \geq 0$), e **positiva** se $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ e $a_{i,j} > 0$ para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ (que denotamos por $A > 0$). A matriz A é chamada **irredutível** se

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\} \exists m_{i,j} \in \mathbb{N} : (A^{m_{i,j}})_{i,j} > 0,$$

isto é, o coeficiente na posição (i, j) da matriz $A^{m_{i,j}}$ é positivo. Se $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ é tal que $(A^n)_{i,i} = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, então i é chamado um **estado desviado**. Além disso, A é chamada **aperiódica** se existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $A^M > 0$.

1 Definição: Seja $A \in M_N(\mathbb{C})$ uma matriz irredutível e não negativa. Para cada $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ definimos o **período** $q(j)$ como

$$q(j) = \text{mdc}\{n ; (A^n)_{j,j} > 0\}.$$

Dizemos que A é uma matriz **q -periódica** se $q = q(j)$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ (isto é, o período $q(j)$ não depende de j).

1 Exemplo: Considere $A \in M_N(\mathbb{R})$ dada por:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A_{q-1} \\ A_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

onde $q \geq 2$ e $A_j \in M_m(\mathbb{C})$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ são matrizes não negativas (com $qm = N$) tais que cada produto circular

$$\prod_{l=j}^{j+q-1 \pmod{q}} A_l,$$

é uma matriz aperiódica para todo $j \in \{1, 2, \dots, q\}$. A matriz A definida assim é q -periódica e irredutível, de fato, basta notar que

$$A^q = \begin{pmatrix} \prod_{l=1}^{q \pmod{q}} A_l & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \prod_{l=2}^{q+1 \pmod{q}} A_l & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \prod_{l=q}^{2q-1 \pmod{q}} A_l \end{pmatrix}$$

Como todo produto circular é aperiódico, existem $k_1, k_2, \dots, k_q \in \mathbb{N}$ tais que

$$\left[\prod_{l=j}^{j+q-1 \pmod{q}} A_l \right]^{k_j} \text{ é uma matriz positiva para cada } j \in \{1, 2, \dots, q\}.$$

Seja $k = \max\{k_i : i = 1, 2, \dots, q\}$, então temos que A^{qk} é uma matriz com cada bloco (de dimensão $m \times m$) na sua diagonal positivo. Assim, para cada par $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(A^{qk+n})_{i,j} > 0$, isto mostra que A é irredutível. O fato de que A é q -periódica segue da seguinte proposição.

1 Proposição: Seja $A \in M_N(\mathbb{C})$ uma matriz irredutível não negativa e sejam os períodos $q(j)$, com $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ (veja a definição 1). Então, $q = q(j)$ não depende de j e,

$$A \text{ é aperiódica} \iff q = 1.$$

Se $q \geq 2$, dizemos que q é o período da matriz irredutível A .

Prova: Primeiro provemos que o período $q(j)$ não depende de j . Como A é irredutível existem $m_{i,j}, m_{j,i} \in \mathbb{N}$ tais que $(A^{m_{i,j}})_{i,j} > 0$ e $(A^{m_{j,i}})_{j,i} > 0$. Dado $m \in \mathbb{N}$, temos que

$$(A^{m_{i,j}+m+m_{j,i}})_{i,i} = \sum_{k,l=1}^N (A^{m_{i,j}})_{i,k} (A^m)_{k,l} (A^{m_{j,i}})_{l,i} \geq (A^{m_{i,j}})_{i,j} (A^m)_{j,j} (A^{m_{j,i}})_{j,i}.$$

Assim, concluímos que $(A^m)_{j,j} > 0 \implies (A^{m_{i,j}+m+m_{j,i}})_{i,i} > 0$, em outras palavras, se $q(j)$ divide m então $q(i)$ divide $m_{i,j} + m + m_{j,i}$. Agora, suponha que $(A^{m_{i,j}+m+m_{j,i}})_{i,i} > 0$, por um argumento similar ao anterior, temos que

$$(A^{2m_{i,j}+m+2m_{j,i}})_{j,j} \geq (A^{m_{i,j}})_{i,j} (A^{m_{i,j}+m+m_{j,i}})_{i,i} (A^{m_{j,i}})_{j,i} > 0.$$

Indutivamente obtemos $(A^{k m_{i,j}+m+k m_{j,i}})_{j,j} > 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$, portanto, $q(j)$ divide $k(m_{i,j} + m_{j,i}) + m$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Concluímos então que $q(j)$ divide $m_{i,j} + m_{j,i}$ e $q(j)$ divide m . Pela simetria do argumento anterior, temos que $q(i)$ divide m se e somente se $q(j)$ divide $m_{i,j} + m + m_{j,i}$, portanto, $q := q(j)$ não depende de j .

(\implies) Suponha que A é aperiódica, então existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $A^k > 0$ para cada $k \geq M$, assim o período q de A divide a cada $k \geq M$, portanto, $q = 1$.

(\impliedby) Seja $D(j) := \{n \geq 1 : (A^n)_{j,j} > 0\}$. Por hipótese, temos que $\text{mdc}[D(j)] = q = 1$ e pela identidade de Bezout, existem $n_1, n_2, \dots, n_m \in D(j)$ e $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\sum_{i=1}^m a_i n_i = 1.$$

Sem perda de generalidade, vamos supor que existe um inteiro positivo $k \leq m$ tal que $a_i > 0$ para cada $i \leq k$, e $a_i < 0$ em outro caso. Então, deste modo temos que

$$K := \sum_{i=k+1}^m |a_i| n_i \implies K + 1 = \sum_{i=1}^k a_i n_i.$$

Como $D(j)$ é fechado por somas e cada $n_i \in D(j)$, temos que $K, K+1 \in D(j)$. Pelo algoritmo de divisão, para cada $n \geq K(K-1)$, existem $q, r \in \mathbb{N}$ tais que $n = qK + r$ e $q \geq K-1 \geq r$, deste modo

$$n = qK + r(K+1-K) = (q-r)K + r(K+1).$$

Como $q-r \geq 0$ e $K, K+1 \in D(j)$, temos que $n \in D(j)$. Em outras palavras, concluímos que $\mathbb{N} \cap [K(K-1), \infty) \subset D(j)$, portanto, A é aperiódica. $\#$

Dada uma matriz $A \in M_N(\mathbb{C})$, a **multiplicidade geométrica** $m_g(\lambda)$ de um autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ da matriz A é a dimensão do espaço vetorial $V_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^N : (A - \lambda\mathbb{I})v = 0\}$ (ou auto-espaço de λ), onde \mathbb{I} é o operador identidade em \mathbb{C}^N . A **multiplicidade algébrica** $m_a(\lambda)$ de um autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ da matriz A é a multiplicidade de λ como zero do polinômio característico $p(z) = \det(A - z\mathbb{I})$. Sabemos que a multiplicidade algébrica coincide com a dimensão do espaço vetorial $V_\lambda^g = \{v \in \mathbb{C}^N : \exists d \geq 1 \text{ tal que } (A - \lambda\mathbb{I})^d v = 0\}$ conhecido como auto-espaço generalizado de λ . No caso geral, sempre vale que $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

2 Teorema: (Perron - Frobenius, [3]) Para $N \geq 1$, seja $A \in M_N(\mathbb{R})$ uma matriz não negativa e sem estados desviados. Então A admite um autovalor real, positivo e maximal λ_A (chamado autovalor de Perron), o qual tem associado um autovetor com coordenadas não negativas. Se A é irredutível, então a multiplicidade algébrica de λ_A é igual a 1, o correspondente autovetor é positivo e não existem outros autovetores com coordenadas não negativas para todo autovalor de A . Se A é aperiódica, então λ_A é o único autovalor de módulo maximal.

Nós vamos provar o teorema 2 sob condições fortes (matriz aperiódica), o qual foi o caso tratado por Perron. É possível reduzir as hipóteses via uma decomposição espectral, questão que não vamos aprofundar neste trabalho. O método vai ser mostrar que um operador associado a uma matriz aperiódica A tem um único ponto fixo sobre um conveniente cone de vetores, pois isto dá uma boa escolha de métrica projetiva. O fator de contração vai dar uma limitação superior para a distância entre o autovalor maximal de A e o módulo do(s) seguinte(s) autovalor(es) maior(es). Devemos agora descrever isto da forma mais simples possível, começando com a discussão da métrica projetiva.

1.2 Métrica projetiva sobre o quadrante não negativo de \mathbb{R}^N

Considere a métrica $\|\cdot\|_1$ sobre \mathbb{R}^N dada por:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i|, \quad \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Definimos os conjuntos

$$\begin{aligned} \Delta &:= \{x \in \mathbb{R}^N : x_i \geq 0 \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, N \text{ e } \|x\|_1 = 1\} \\ \mathcal{C} &:= \{x \in \mathbb{R}^N : x_i \geq 0 \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, N\} \setminus \{\mathbf{0}\}. \end{aligned}$$

O conjunto Δ é chamado **simplexo não negativo** $(N - 1)$ -dimensional e o conjunto \mathcal{C} é chamado **cone não negativo em \mathbb{R}^N sem a origem**.

1.2.1 Construção da métrica projetiva

Agora vamos construir uma distância sobre Δ que chamaremos **métrica projetiva**. Note que Δ pode-se identificar com o conjunto \mathcal{C}/\sim (onde $x \sim y \Leftrightarrow x = \lambda y$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}_+$, e $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$) mediante a aplicação bijetora $f : \mathcal{C}/\sim \rightarrow \Delta$ dada por

$$f(\bar{x}) = \frac{y}{\|y\|_1}, \quad \text{onde } y \in \bar{x}, \forall \bar{x} \in \mathcal{C}/\sim.$$

Para cada $x, y \in \mathcal{C}$ definimos

$$\alpha(x, y) = \alpha_{\mathcal{C}}(x, y) := \sup \{ \lambda \in \mathbb{R}_+ : y - \lambda x \in \mathcal{C} \} \in [0, \infty[,$$

e definimos

$$\beta(x, y) := \frac{1}{\alpha(y, x)}, \quad \forall x, y \in \mathcal{C}.$$

1 Observação: Note que

$$\alpha(x, x) = \sup \{ \lambda \in \mathbb{R}_+ : (1 - \lambda)x \in \mathcal{C} \} = 1,$$

e que temos um tipo de “desigualdade triangular”:

$$\alpha(x, z) \geq \alpha(x, y)\alpha(y, z). \tag{1.2}$$

De fato, como $\mathcal{C} \cup \{\mathbf{0}\}$ é um conjunto fechado, temos que

$$y - \alpha(x, y)x \in \mathcal{C} \cup \{\mathbf{0}\} \quad \text{e} \quad z - \alpha(y, z)y \in \mathcal{C} \cup \{\mathbf{0}\}.$$

Como

$$\begin{aligned} z - \alpha(x, y)\alpha(y, z)x &= z - \alpha(x, y)\alpha(y, z)x + \alpha(y, z)y - \alpha(y, z)y \\ &= z - \alpha(y, z)y + \alpha(y, z)(y - \alpha(x, y)x) \in \mathcal{C} \cup \{\mathbf{0}\}, \end{aligned}$$

e dado que $\lambda = \alpha(x, z)$ é o valor supremo tal que $z - \lambda x \in \mathcal{C} \cup \{\mathbf{0}\}$, podemos concluir que

$$\alpha(x, z) \geq \alpha(x, y)\alpha(y, z).$$

Para cada $x, y \in \mathcal{C}$ definimos também

$$\Gamma(x, y) = \Gamma_{\mathcal{C}}(x, y) := \alpha(x, y)\alpha(y, x) = \frac{\alpha(x, y)}{\beta(x, y)}. \tag{1.3}$$

2 Observação: É claro que $\Gamma(x, y) = \Gamma(y, x)$ para cada $x, y \in \mathcal{C}$ (condição de simetria). A desigualdade triangular (1.2) para α implica que

$$\Gamma(x, z) \geq \Gamma(x, y)\Gamma(y, z),$$

e dado que $\Gamma(x, x) = 1$ para cada $x \in \mathcal{C}$, então concluímos que

$$\Gamma(x, x) = 1 \geq (\Gamma(x, y))^2 \Rightarrow \Gamma(x, y) \leq 1, \quad \forall x, y \in \mathcal{C}.$$

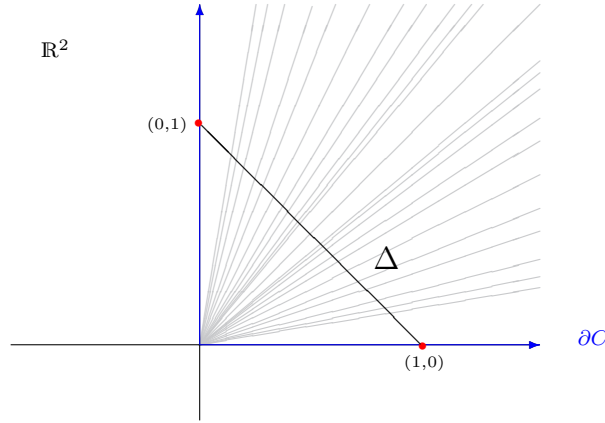
2 Definição: Dados $x, y \in \mathcal{C}$, definimos sua **pseudo-distância projetiva** como

$$\Theta_{\mathcal{C}}(x, y) := -\log \Gamma(x, y) = \log \beta(x, y) - \log \alpha(x, y) \in [0, \infty]. \quad (1.4)$$

3 Observação: Notamos que

$$\Theta_{\mathcal{C}}(x, y) = \infty \Leftrightarrow x, y \in \partial\mathcal{C} \text{ e } \bar{x} \neq \bar{y}.$$

Por exemplo, se $N = 2$, para $x = (1, 0)$ e $y = (0, 1)$ temos que $\alpha(x, y) = 0$, portanto, $\Gamma(x, y) = 0$ e segue que $\Theta_{\mathcal{C}}(x, y) = \infty$.



3 Proposição: $(\Delta, \Theta_{\mathcal{C}})$ é um espaço métrico.

Prova: Para ver que $\Theta_{\mathcal{C}}$ é uma distância sobre o quociente $\Delta \simeq \mathcal{C}/\sim$, a única propriedade que precisamos provar é

$$\Theta_{\mathcal{C}}(x, y) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}, \quad (1.5)$$

ou equivalentemente,

$$\Gamma(x, y) = 1 \Leftrightarrow x = \lambda y \text{ para algum } \lambda \geq 0.$$

Notemos primeiro que se $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ e $x, y \in \mathcal{C}$, então

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda_1 x, \lambda_2 y) &= \sup \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+ : \lambda_2 y - \lambda \lambda_1 x \in \mathcal{C} \right\} \\ &= \sup \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+ : \lambda_2 \left(y - \lambda \frac{\lambda_1}{\lambda_2} x \right) \in \mathcal{C} \right\} \\ &= \sup \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+ : y - \lambda \frac{\lambda_1}{\lambda_2} x \in \mathcal{C} \right\} \\ &= \sup \left\{ \lambda \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{R}_+ : y - \lambda x \in \mathcal{C} \right\} \\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sup \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+ : y - \lambda x \in \mathcal{C} \right\}, \end{aligned}$$

portanto, concluímos que

$$\alpha(\lambda_1 x, \lambda_2 y) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \alpha(x, y). \quad (1.6)$$

Além disso, pode-se verificar que a propriedade (1.6) vale também para a função β . A implicação (\Leftarrow) da afirmação (1.5) é dada por

$$\begin{aligned} \bar{x} = \bar{y} &\Rightarrow y = \lambda x \text{ para algum } \lambda \geq 0 \\ &\stackrel{(1.6)}{\Rightarrow} \begin{cases} \alpha(x, y) = \alpha(x, \lambda x) = \lambda \alpha(x, x) = \lambda \\ \alpha(y, x) = \alpha(\lambda x, x) = \frac{1}{\lambda} \alpha(x, x) = \frac{1}{\lambda} \end{cases} \\ &\Rightarrow \Gamma(x, y) = 1, \end{aligned}$$

e segue o resultado. Para o recíproco (\Rightarrow) temos que

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathcal{C}}(x, y) = 0 &\Rightarrow \Gamma(x, y) = 1 \\ &\Rightarrow \alpha(x, y)\alpha(y, x) = 1 \\ &\stackrel{(1.6)}{\Rightarrow} \alpha(\lambda_1 x', \lambda_2 y')\alpha(\lambda_2 y', \lambda_1 x') = \alpha(x', y')\alpha(y', x') = 1, \end{aligned}$$

onde $x' = x/\lambda_1$ e $y' = y/\lambda_2$. Isso último diz que podemos assumir: $\alpha(x, y) = 1 = \alpha(y, x)$. Assim, temos que

$$x - y \in \mathcal{C} \cup \{\mathbf{0}\} \quad \text{e} \quad y - x \in \mathcal{C} \cup \{\mathbf{0}\},$$

portanto, $x - y \in (\mathcal{C} \cup \{\mathbf{0}\}) \cap (-\mathcal{C} \cup \{\mathbf{0}\}) = \{\mathbf{0}\}$. Logo, vale a afirmação (1.5) e $\Theta_{\mathcal{C}}$ define uma distância sobre o conjunto $\Delta \simeq \mathcal{C}/\sim$. #

3 Definição: A distância $\Theta_{\mathcal{C}}$ definida sobre Δ é chamada **métrica projetiva** sobre o cone positivo \mathcal{C} .

4 Observação: Notemos que

$$\{i : x_i = 0\} \neq \{i : y_i = 0\} \quad \Rightarrow \quad \Gamma(x, y) = 0,$$

e que, doutro modo, vale também que

$$\alpha(x, y) = \inf_{i : x_i \neq 0} \left\{ \frac{y_i}{x_i} \right\} \quad \Rightarrow \quad \Gamma(x, y) = \inf_{i, j : x_i y_j \neq 0} \left\{ \frac{x_j y_i}{x_i y_j} \right\}.$$

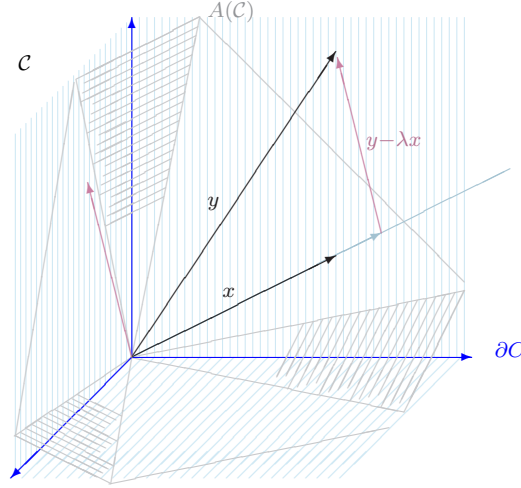
1.2.2 Contração dada pela métrica projetiva

4 Definição: Seja $A \in M_N(\mathbb{R})$ uma matriz não negativa com a propriedade de que nenhuma das suas colunas é o vetor zero (por exemplo, se A não admite estados desviados), então $A(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ e podemos definir um operador $L_A : \Delta \rightarrow \Delta$ dado por

$$L_A x = \frac{Ax}{\|Ax\|_1}.$$

5 Observação: O aspecto interessante da métrica projetiva Θ_C é que o operador L_A define uma contração em relação desta métrica (portanto, o operador é contínuo): Como $x - \lambda y \in \mathcal{C}$ implica $A(x - \lambda y) = Ax - \lambda Ay \in \mathcal{C}$, temos que

$$\{\lambda \in \mathbb{R}_+ : y - \lambda x \in \mathcal{C}\} \subset \{\lambda \in \mathbb{R}_+ : A(y - \lambda x) \in \mathcal{C}\},$$



Representação gráfica da contenção de cones: $A(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$

e pela definição de α :

$$\begin{aligned} \alpha(Ax, Ay) &= \sup \{ \lambda \in \mathbb{R}_+ : Ay - \lambda Ax \in \mathcal{C} \} \\ &= \sup \{ \lambda \in \mathbb{R}_+ : A(y - \lambda x) \in \mathcal{C} \} \\ &\geq \sup \{ \lambda \in \mathbb{R}_+ : y - \lambda x \in \mathcal{C} \} = \alpha(x, y). \end{aligned}$$

Uma consequência disso é

$$\begin{aligned} \alpha(Ay, Ax) \geq \alpha(y, x) &\Rightarrow \frac{1}{\alpha(Ay, Ax)} \leq \frac{1}{\alpha(y, x)} \\ &\Rightarrow \beta(Ax, Ay) \leq \beta(x, y), \end{aligned}$$

e daí, obtemos que

$$\begin{aligned} \Theta_C(L_A x, L_A y) &= \Theta_C \left(\frac{Ax}{\|Ax\|_1}, \frac{Ay}{\|Ay\|_1} \right) \\ &= \log \beta \left(\frac{Ax}{\|Ax\|_1}, \frac{Ay}{\|Ay\|_1} \right) - \log \alpha \left(\frac{Ax}{\|Ax\|_1}, \frac{Ay}{\|Ay\|_1} \right) \\ &\stackrel{(1.6)}{=} \log \left(\frac{\|Ax\|_1}{\|Ay\|_1} \beta(Ax, Ay) \right) - \log \left(\frac{\|Ax\|_1}{\|Ay\|_1} \alpha(Ax, Ay) \right) \\ &= \log \left(\frac{\|Ax\|_1}{\|Ay\|_1} \right) + \log \beta(Ay, Ax) - \log \left(\frac{\|Ax\|_1}{\|Ay\|_1} \right) - \log \alpha(Ax, Ay) \\ &\leq \log \beta(x, y) - \log \alpha(x, y) = \Theta_C(x, y). \end{aligned}$$

Para uma matriz B positiva, obtemos uma desigualdade estrita na propriedade de contração uniforme para L_B . Primeiro, observamos que o diâmetro da imagem de Δ por L_B é finito:

$$\text{diam}(L_B \Delta) = \sup_{x, y \in \Delta} \{ \Theta_C(L_B x, L_B y) \} < \infty. \quad (1.7)$$

Isso é equivalente a mostrar que a transformação L_B é projetivamente limitada, isto é,

$$\delta = \inf_{x,y \in \Delta} \{ \Gamma_C(L_B x, L_B y) \} > 0, \quad (1.8)$$

pois nós temos que

$$\begin{aligned} \text{diam}(L_B \Delta) &= \sup_{x,y \in \Delta} \{ \Theta_C(L_B x, L_B y) \} \\ &= \sup_{x,y \in \Delta} \{ -\log \Gamma_C(Bx, By) \} \\ &= -\log \left(\inf_{x,y \in \Delta} \{ \Gamma_C(Bx, By) \} \right) \\ &= -\log \delta = \log(1/\delta) < \infty. \end{aligned}$$

A condição (1.8) coincide com:

$$\delta = \min_{1 \leq i,j,r,s \leq N} \frac{B_{i,s} B_{j,r}}{B_{j,s} B_{i,r}} > 0,$$

e notemos que isso implica que $\delta < 1$. Para ver o anterior, vemos que

$$Bx = \begin{pmatrix} \sum_{s=1}^N B_{1,s} x_s \\ \vdots \\ \sum_{s=1}^N B_{N,s} x_s \end{pmatrix} \Rightarrow (Bx)_j = \sum_{s=1}^N B_{j,s} x_s.$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} (Bx)_j (By)_i &= \left(\sum_{s=1}^N B_{j,s} x_s \right) \left(\sum_{r=1}^N B_{i,r} y_r \right) = \sum_{s=1}^N \sum_{r=1}^N B_{j,s} B_{i,r} x_s y_r \\ (Bx)_i (By)_j &= \left(\sum_{s=1}^N B_{i,s} x_s \right) \left(\sum_{r=1}^N B_{j,r} y_r \right) = \sum_{s=1}^N \sum_{r=1}^N B_{i,s} B_{j,r} x_s y_r, \end{aligned}$$

assim, podemos ver que essa escolha de δ implica que

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^N \sum_{r=1}^N B_{i,s} B_{j,r} x_s y_r &\geq \sum_{s=1}^N \sum_{r=1}^N \delta B_{j,s} B_{i,r} x_s y_r \\ &= \delta \sum_{s=1}^N \sum_{r=1}^N B_{j,s} B_{i,r} x_s y_r, \end{aligned}$$

que é equivalente a

$$(Bx)_i (By)_j \geq \delta (Bx)_j (By)_i \Rightarrow \frac{(Bx)_i (By)_j}{(Bx)_j (By)_i} \geq \delta,$$

para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$. Da observação (4) temos que

$$\inf_{x,y \in \Delta} \{ \Gamma_C(Bx, By) \} = \delta = \min_{1 \leq i,j \leq N} \left\{ \frac{(Bx)_i (By)_j}{(Bx)_j (By)_i} \right\} > 0.$$

4 Proposição: Seja $B \in M_N(\mathbb{R})$ uma matriz positiva. Então o operador L_B é uma contração, isto é, existe $c \in (0, 1)$ tal que

$$\Theta_{\mathcal{C}}(L_B x, L_B y) \leq c \Theta_{\mathcal{C}}(x, y), \quad \forall x, y \in \Delta. \quad (1.9)$$

Prova: Para mostrar essa afirmação, fixamos $x, y \in \Delta$ e escrevemos

$$\alpha_1 = \alpha(x, y) \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \alpha(y, x) = \frac{1}{\beta(x, y)},$$

portanto, com essas notações temos que

$$\Theta_{\mathcal{C}}(x, y) = \log(\beta(x, y)) - \log(\alpha(x, y)) = -\log(\alpha_2) - \log(\alpha_1) = -\log(\alpha_1 \alpha_2).$$

Notemos que é suficiente considerar o caso $\alpha_1 \alpha_2 \neq 0$. Por definição temos que $y - \alpha_1 x \in \mathcal{C}$ e

$$\frac{x}{\alpha_2} - y = \frac{x}{\alpha(y, x)} - y = \frac{1}{\alpha(y, x)}(x - \alpha(y, x)y) \in \mathcal{C},$$

a limitação projetiva $\delta > 0$ implica que existem $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ com $\lambda_1 \lambda_2 \geq \delta$ tais que

$$\begin{aligned} \alpha(L_B(y - \alpha_1 x), L_B(x/\alpha_2 - y)) &\geq \lambda_1 \\ \text{e } \alpha(L_B(x/\alpha_2 - y), L_B(y - \alpha_1 x)) &\geq \lambda_2, \end{aligned}$$

portanto, temos que

$$\begin{aligned} L_B(x/\alpha_2 - y) - \lambda_1 L_B(y - \alpha_1 x) &\in \mathcal{C} \\ \text{e } L_B(y - \alpha_1 x) - \lambda_2 L_B(x/\alpha_2 - y) &\in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Dessa forma, fazendo alguns cálculos (veja observação 6), obtemos

$$\begin{aligned} L_B x - \frac{1 + \lambda_1}{\frac{1}{\alpha_2} + \lambda_1 \alpha_1} L_B y &\in \mathcal{C} \\ L_B y - \frac{\alpha_1 + \frac{\lambda_2}{\alpha_2}}{1 + \lambda_2} L_B x &\in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Esso significa que

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathcal{C}}(L_B x, L_B y) &= -\log(\alpha(L_B x, L_B y)\alpha(L_B y, L_B x)) \leq -\log\left(\frac{\frac{\alpha_1}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_2}}{1 + \frac{1}{\lambda_2}} \cdot \frac{1 + \lambda_1}{\frac{1}{\alpha_2} + \lambda_1 \alpha_1}\right) \\ &= \log\left(\frac{\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} + \lambda_1}{\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2}}\right) - \log\left(\frac{1 + \lambda_1}{1 + \frac{1}{\lambda_2}}\right) \\ &= \int_0^{-\log(\alpha_1 \alpha_2)} \frac{\left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_2}\right) e^t}{\left(e^t + \frac{1}{\lambda_2}\right) (e^t + \lambda_1)} dt \\ &\leq -\log(\alpha_1 \alpha_2) \frac{1 - \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}}{1 + \sqrt{\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}}} \\ &\leq \frac{1 - \sqrt{\delta}}{1 + \sqrt{\delta}} \Theta_{\mathcal{C}}(x, y), \end{aligned}$$

e como $0 < \delta < 1$, provamos a propriedade (1.9) de contração uniforme. #

6 Observação: Sem perda de generalidade, vamos supor que

$$\|Bx\|_1 = \|By\|_1 = 1.$$

Lembramos que na prova da proposição 4 temos

$$\frac{B(x/\alpha_2 - y)}{\|B(x/\alpha_2 - y)\|_1} - \lambda_1 \frac{B(y - \alpha_1 x)}{\|B(y - \alpha_1 x)\|_1} \in \mathcal{C},$$

isto implica que

$$Bx - \frac{1 + \tilde{\lambda}_1}{\frac{1}{\alpha_2} + \alpha_1 \tilde{\lambda}_1} By = L_B x - \frac{1 + \tilde{\lambda}_1}{\frac{1}{\alpha_2} + \tilde{\lambda}_1 \alpha_1} L_B y \in \mathcal{C},$$

onde

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1 \|B(x/\alpha_2 - y)\|_1}{\|B(y - \alpha_1 x)\|_1}.$$

Analogamente, pode-se mostrar que

$$L_B y - \frac{\alpha_1 + \frac{\tilde{\lambda}_2}{\alpha_2}}{1 + \tilde{\lambda}_2} L_B x \in \mathcal{C},$$

onde

$$\tilde{\lambda}_2 = \frac{\lambda_2 \|B(y - \alpha_1 x)\|_1}{\|B(x/\alpha_2 - y)\|_1}.$$

Assim, temos que $\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 = \lambda_1 \lambda_2 \geq \delta$.

1.3 Prova do teorema de Perron

Assumimos primeiro que A é aperiódica. Seja $M \in \mathbb{N}$ tal que $B = A^M$ é positiva. Considere o operador $L_A : \Delta \rightarrow \Delta$ como foi definido antes e note que $L_B = L_A^M$. Pela proposição (4) temos que existe $c < 1$ tal que

$$\Theta_{\mathcal{C}}(L_A^M x, L_A^M y) \leq c \Theta_{\mathcal{C}}(x, y), \quad \forall x, y \in \Delta. \quad (1.10)$$

Provaremos que a propriedade (1.10) garante que L_A possui um único ponto fixo x_A no interior de Δ . Para construir tal ponto fixo, notamos que $\text{diam}(L_A^M \Delta) < \infty$ (veja (1.7)) e observe que

$$\begin{aligned} \text{diam}(L_A^{M+n} \Delta) &= \sup_{x, y \in L_A^{M+n} \Delta} \Theta_{\mathcal{C}}(x, y) = \sup_{x, y \in L_A^n(L_A^M \Delta)} \Theta_{\mathcal{C}}(x, y) \\ &= \sup_{x, y \in L_A^M \Delta} \Theta_{\mathcal{C}}(L_A^n x, L_A^n y). \end{aligned}$$

Como $n = M \cdot \lfloor \frac{n}{M} \rfloor + k$ ($k < M$ e $\lfloor t \rfloor$ denota a parte inteira de $t \in \mathbb{R}$) temos que

$$\begin{aligned} \text{diam}(L_A^{M+n}\Delta) &= \sup_{x,y \in L_A^M \Delta} \Theta_C(L_A^n x, L_A^n y) = \sup_{x,y \in L_A^M \Delta} \Theta_C\left(L_A^{M \cdot \lfloor \frac{n}{M} \rfloor + k} x, L_A^{M \cdot \lfloor \frac{n}{M} \rfloor + k} y\right) \\ &= \sup_{x,y \in L_A^M \Delta} \Theta_C\left(L_A^{M \cdot \lfloor \frac{n}{M} \rfloor} (L_A^k x), L_A^{M \cdot \lfloor \frac{n}{M} \rfloor} (L_A^k y)\right) \\ &\leq c^{\lfloor \frac{n}{M} \rfloor} \sup_{x,y \in L_A^M \Delta} \Theta_C(L_A^k x, L_A^k y) \\ &= c^{\lfloor \frac{n}{M} \rfloor} \sup_{x,y \in L_A^{M+k} \Delta} \Theta_C(x, y) \\ &\leq c^{\lfloor \frac{n}{M} \rfloor} \sup_{x,y \in L_A^M \Delta} \Theta_C(x, y), \end{aligned}$$

e concluímos então que

$$\sup_{x,y \in L_A^M \Delta} \Theta_C(L_A^n x, L_A^n y) \leq c^{\lfloor \frac{n}{M} \rfloor} \sup_{x,y \in L_A^M \Delta} \Theta_C(x, y),$$

portanto, a sequência de diâmetros converge exponencialmente rápido para zero, isto é, a sequência $L_A^n \Delta$ converge para um conjunto unitário $\{x_A\} \subset \Delta$ quando $n \rightarrow \infty$. Assim, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Theta_C(x_A, L_A^n x_A) < \frac{\epsilon}{c+1}, \quad \forall n \geq N,$$

então, para $m > N$ tem-se que

$$\begin{aligned} \Theta_C(x_A, L_A x_A) &\leq \Theta_C(x_A, L_A^m x_A) + \Theta_C(L_A^m x_A, L_A x_A) \\ &\leq \Theta_C(x_A, L_A^m x_A) + c \Theta_C(L_A^{m-1} x_A, x_A) = \frac{\epsilon}{c+1} + c \frac{\epsilon}{c+1} = \epsilon. \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$, concluímos que $\Theta_C(x_A, L_A x_A) = 0$ e, portanto, $L_A x_A = x_A$. Para ver que x_A é o único ponto fixo basta notar que se $y \neq x_A$ temos

$$\begin{aligned} \Theta_C(L_A^M x_A, L_A^M y) < \Theta_C(x_A, y) &\Rightarrow \Theta_C(x_A, L_A^M y) < \Theta_C(x_A, y) \\ &\Rightarrow L_A^M y \neq y. \end{aligned}$$

Como todo autovetor v de A no quadrante positivo possui um autovalor $\lambda > 0$ (consequência direta da aperiodicidade de A), temos que $\frac{v}{\|v\|}$ é um ponto fixo do operador L_A e, pelo feito anteriormente, temos que A possui um único autovetor x_A no quadrante positivo, com um autovalor real e positivo λ_A .

Para ver que todo autovalor de A possui modulo estritamente menor que λ_A , considere $u \in \mathbb{C}^N$ tal que $Au = \mu u$, para algum $\mu \in \mathbb{C}$ com $|\mu| \geq \lambda_A$. Observe que o vetor $u^\circ \in \mathbb{R}^N$ dado por $u^\circ = (|u_1|, |u_2|, \dots, |u_N|)$ satisfaz:

$$\lambda_A u^\circ \leq |\mu| u^\circ = (\mu u)^\circ = (Au)^\circ \leq A u^\circ.$$

Já que a matriz transposta A^t também é aperiódica, o autovetor y_A para o autovalor λ_A também tem coordenadas positivas (pois λ_A é autovalor de A se e somente se λ_A é autovalor de A^t). Usando $\langle v, w \rangle$ para denotar o produto escalar $\sum_{i=1}^N v_i w_i$ de dois vetores $v, w \in \mathbb{C}^N$, temos por definição de y_A ,

$$\begin{aligned} \langle y_A, Au^\circ - \lambda_A u^\circ \rangle &= \langle y_A, Au^\circ \rangle - \langle y_A, \lambda_A u^\circ \rangle \\ &= \langle A^t y_A, u^\circ \rangle - \langle y_A, \lambda_A u^\circ \rangle \\ &= \langle \lambda_A y_A, u^\circ \rangle - \langle y_A, \lambda_A u^\circ \rangle = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Já que cada coordenada de y_A é positiva e cada coordenada de $Au^\circ - \lambda_A u^\circ$ é não negativa, então (1.11) implica que $Au^\circ = \lambda_A u^\circ$, em particular u° e x_A são colineares. Resumindo, mostramos que

$$\lambda_A u^\circ = |\mu| u^\circ = (Au)^\circ = Au^\circ,$$

portanto, $(A^M u)^\circ = A^M u^\circ$, isto é, denotando $B := A^M > 0$, temos que

$$\left| \sum_{j=1}^N B_{i,j} u_j \right| = \sum_{j=1}^N B_{i,j} |u_j|, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (1.12)$$

Dado que $u_j = z_j |u_j|$ para algum $z_j \in \mathbb{C}$ com $|z_j| = 1$ e já que $\bar{B}(0; 1) \subset \mathbb{C}$ é estritamente convexo, tem-se por (1.12) que existe $z \in \mathbb{C}$ com $|z| = 1$ tal que $u_j = z |u_j|$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, N\}$. Assim, u e x_A são colineares e $\mu = \lambda_A$. Isto mostra que a multiplicidade geométrica $m_g(\lambda_A)$ é igual a 1. Agora, suponha que $m_a(\lambda_A) > 1$, isto é, existe x'_A com

$$(\lambda_A \mathbb{I} - A)x'_A \neq 0 \quad \text{e} \quad (\lambda_A \mathbb{I} - A)^2 x'_A = 0.$$

Assim, pode-se mostrar que

$$\left\| \frac{A^n x'_A}{\lambda_A^n} \right\|_1 = \left\| \frac{n}{\lambda_A} A x'_A - (n-1)x'_A \right\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

e portanto, a norma (como operador) de A^n/λ_A^n não é limitada. Mas isso é impossível, já que a matriz “normalizada” \tilde{A} dada por

$$\tilde{A}_{i,j} := \frac{A_{i,j}(x_A)_j}{\lambda_A(x_A)_i},$$

tem a seguinte propriedade: seja $w = (1, 1, \dots, 1)^t$, então para cada i temos,

$$(\tilde{A}w)_i = \sum_{j=1}^N \frac{A_{i,j}(x_A)_j}{\lambda_A(x_A)_i} = \frac{1}{\lambda_A(x_A)_i} (Ax_A)_i = \frac{1}{\lambda_A(x_A)_i} (\lambda_A x_A)_i = 1,$$

portanto, $\tilde{A}w = w$. Desta forma, concluímos que $\|\tilde{A}^n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Além disso, notemos que

$$\frac{(A^n)_{i,j}}{\lambda_A^n} = \frac{(x_A)_i}{(x_A)_j} (\tilde{A})_{i,j}^n \leq (\tilde{A})_{i,j}^n \sup_{i,j} \frac{(x_A)_i}{(x_A)_j} < \infty,$$

o que contradiz o fato de A^n/λ_A^n não ser limitado. Isto mostra o teorema de Perron. #

7 Observação: Notemos que a primeira parte desta demonstração é exatamente a prova do teorema do ponto fixo de Banach.

1.4 Aplicação: problemas de controle para potências

Nesta seção vamos falar sobre o que são os problemas de controle para potências, como levá-los a um contexto matricial e como o teorema de Perron-Frobenius ajuda a determinar uma solução para tais problemas.

Para introduzir a definição de um problema de controle para potências, vamos supor que você está num restaurante com alguns amigos sentados numa mesa. Você quer falar com todos os seus amigos na mesa, tomara com um nível confortável de voz, mas o barulho da sua mesa faz que outras pessoas, em outras mesas próximas, precisem falar mais alto para que eles possam se ouvir uns aos outros de forma mais clara. Esse novo barulho de mesas próximas faz que se torne mais difícil ouvir a conversa entre os seus amigos (na sua mesa), portanto, os seus amigos vão precisar falar ainda mais alto para se comunicar, e assim por diante. O que nós queremos é achar um nível de voz ótima em cada mesa para que todos possam falar confortavelmente. Num problema de controle para potências, o que nós queremos é

$$\frac{p_i}{\sum_{j \neq i} G_{i,j} p_j} \geq R_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad (1.13)$$

onde $G_{i,j} \geq 0$ denota a porcentagem de aumento ou diminuição que afeta o som vindo à i -ésima mesa desde a j -ésima mesa. Por exemplo, um valor de 0.5 sugere que o som que você ouve estando do lado da mesa j perde metade do seu volume no seu caminho para a mesa i . Além disso, $p_j > 0$ é o nível de voz desejado na j -ésima mesa e R_i é a razão aceitável de barulho que pessoas na mesa i estão fazendo dividido pelo barulho das outras mesas que as pessoas na mesa i escutam. A equação (1.13) indica simplesmente que queremos que a razão de barulho seja maior ou igual ao valor da razão aceitável, assim todos na mesa i podem conversar entre si confortavelmente. Se tal razão for inferior ao valor R_i , então isso significa que as pessoas na mesa i não podem-se ouvir devido ao barulho causado pelas outras mesas.

Para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, pela equação (1.13), tem-se que

$$p_i \geq R_i \sum_{j \neq i} G_{i,j} p_j,$$

isto significa que podemos reescrever o nosso problema de modo matricial como segue

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & R_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & G_{1,2} & G_{1,3} & \cdots & G_{1,m} \\ G_{2,1} & 0 & G_{2,3} & \cdots & G_{2,m} \\ G_{3,1} & G_{3,2} & & \cdots & G_{3,m} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ G_{m,1} & G_{m,2} & G_{m,3} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix}$$

onde a desigualdade se verifica para cada coordenada. Definimos

$$A := \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & R_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & G_{1,2} & G_{1,3} & \cdots & G_{1,m} \\ G_{2,1} & 0 & G_{2,3} & \cdots & G_{2,m} \\ G_{3,1} & G_{3,2} & & \cdots & G_{3,m} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ G_{m,1} & G_{m,2} & G_{m,3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

e definimos $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)^T$. Sabemos que A é uma matriz com entradas na diagonal iguais a zero e vamos supor que ela é aperiódica (a menos que determinadas propriedades de simetria na segunda matriz do produto tenham como consequência que o período de A não seja 1). A equação acima nos diz que $Ap \leq p$, e dado que A é uma matriz não negativa e aperiódica, pelo teorema de Perron-Frobenius existe um vetor positivo v e um valor real $\lambda > 0$ tais que $Av = \lambda v$, assim temos que

$$Av \leq v \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \leq 1,$$

e portanto, vamos supor que $\lambda \leq 1$. Um teorema útil dado por Semyon Gershgorin vai nos ajudar a encontrar uma limitação aceitável (por acima) para os R_i 's.

5 Teorema: (Gershgorin,[6]) *Seja $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^m \in M_m(\mathbb{C})$ e para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ defina*

$$r_i := \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|,$$

então o conjunto dos autovalores de A esta contido na união das m bolas fechadas bi-dimensionais $\bar{B}(a_{i,i}; r_i)$ (chamadas círculos de Gershgorin). Além disso, enumerando de modo certo o conjunto dos autovalores $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$, temos que $|\lambda_i - a_{i,i}| \leq r_i$.

2 Exemplo: *Considere a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

e notemos que $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$. Os autovalores de A são 5 e -1 , e os círculos de Gershgorin são $\bar{B}(3; 2)$ e $\bar{B}(1; 4)$. É claro que $5 \in \bar{B}(3; 2)$ e $-1 \in \bar{B}(1; 4)$.

Aplicando o teorema de Gershgorin ao nosso problema de controle para potências, temos que

$$|\lambda_i - a_{i,i}| = |\lambda_i| \leq r_i = \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| = R_i \sum_{j \neq i} G_{i,j}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad (1.14)$$

pois $a_{i,i} = 0$ para cada i . Pelo teorema de Perron-Frobenius sabemos que $\lambda \leq 1$, onde λ é o autovalor maximal de A , portanto, temos que $|\lambda_i| \leq 1$ para cada i .

Se estabelecemos que

$$R_i \leq \frac{1}{\sum_{j \neq 1} G_{i,j}}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\},$$

então podemos ver que isto nos dá uma limitação aceitável para os R_i 's. Pelo anterior e por (1.14), temos que

$$|\lambda_i| \leq R_i \sum_{j \neq 1} G_{i,j} \leq 1, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\},$$

assim, todas as nossas condições de limitação para os autovalores de A valem, temos uma limitação para os R_i 's e v é o nosso vetor solução desejado.

Para resumir, se o raio espectral de A é menor ou igual que 1, então o vetor próprio v da equação $Av = \lambda v$ vai cumprir com a desigualdade $Ap \leq p$ e vai ser o vetor solução que representa a nível de voz desejado. Além disso, isto é verdade se cada R_i não exceda o valor $\frac{1}{\sum_{j \neq 1} G_{i,j}}$. No caso de não ter esta ultima condição, não temos certeza se a nossa solução cumpre com o desejado.

1.5 Organização do texto

No capítulo 2 vamos provar uma versão aleatória do teorema de Ruelle determinístico, para isso, vamos enunciar uma versão determinística de tal teorema (o teorema 6), definir as ferramentas aleatórias para generalizar essa ideia sobre fibrados e enunciar um importante resultado cuja prova explica o método de acoplamentos (veja o teorema 8). Os passos anteriores são necessários para provar tal versão aleatória do teorema de Ruelle (o teorema 11) o qual é o resultado principal deste trabalho.

Finalmente, no capítulo 3 calculamos numericamente as autofunções do operador de Ruelle associado a um sistema dinâmico bem comportado e definido por uma aplicação de Markov. É necessário deixar claro que tal sistema dinâmico não é exatamente aleatório como os sistemas gerais nos que baseamos a nossa teoria, mas dá para aplicar o nosso teorema principal e obter uma ideia sobre a convergência das autofunções no sistema aleatoriamente perturbado quando o suporte da medida de probabilidade tende para um conjunto unitário.

Capítulo 2

O teorema de Ruelle determinístico e aleatório

Apresentamos o resultado que vamos a generalizar no seguinte capítulo: o teorema de Ruelle. Tal teorema será enunciado em sua versão geral para subshift de tipo contável, trabalho que foi desenvolvido em grande parte por O. Sarig.

2.1 Ferramentas determinísticas básicas e o teorema de Ruelle-Sarig

Seja (X, \mathcal{B}, m) um espaço de medida. Uma transformação mensurável $T : X \rightarrow X$ é **não-singular** se, dado $C \in \mathcal{B}$ vale que

$$m(T^{-1}(C)) = 0 \iff m(C) = 0.$$

Frequentemente, se vale a condição anterior, vamos dizer também que a medida m é não singular em relação T . Dizemos que T **preserva a medida** se $m(T^{-1}(C)) = m(C)$ para cada $C \in \mathcal{B}$ (em tal caso, se diz que m é **T-invariante**). Além disso, T é uma transformação **ergódica** se

$$\text{Dado } A \in \mathcal{B} \text{ com } m(T^{-1}(A) \triangle A) = 0 \implies m(A) = 0 \text{ ou } m(A^c) = 0.$$

Um conjunto $A \in \mathcal{B}$ tal que $m(T^{-1}(A) \triangle A) = 0$ é chamado **T-invariante**.

5 Definição: Seja \mathcal{S} um conjunto contável e seja $\mathbb{A} = (A_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in \mathcal{S}} \in M_{\mathcal{S} \times \mathcal{S}}(\{0,1\})$ uma matriz que não tem linhas nem colunas nulas (a matriz \mathbb{A} é chamada matriz de transição). Seja $\mathbf{X} = \mathcal{S}^{\mathbb{N}_0}$, então o **subshift contável** (de tipo finito ou enumerável) definido pela matriz de transição \mathbb{A} é a restrição $\sigma_{\mathbb{A}}$ da aplicação **full-shift** $\sigma : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$; $(x_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \mapsto (x_{i+1})_{i \in \mathbb{N}_0}$ ao conjunto fechado e σ -invariante,

$$\mathbf{X}_{\mathbb{A}} = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in \mathbf{X} : A_{x_i, x_{i+1}} = 1, \forall i \in \mathbb{N}_0\}.$$

O conjunto $\mathbf{X}_{\mathbb{A}}$ é munido com a topologia gerada pela coleção dos **n-cilindros**:

$$[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}] := \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in \mathbf{X}_{\mathbb{A}} : x_i = a_i, \forall i \in [0, n-1] \cap \mathbb{N}_0\}.$$

O par $(\mathbf{X}_{\mathbb{A}}, \sigma_{\mathbb{A}})$ é chamado de **cadeia topológica de Markov**.

8 Observação: Notemos que a topologia definida sobre $\mathbf{X}_{\mathbb{A}}$ (a topologia produto) é metrizável, de fato, uma métrica que gera tal topologia é

$$\mathbf{d}(x, y) = \mathbf{d}((x_i)_{i \in \mathbb{N}_0}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}_0}) = \begin{cases} 2^{-\min\{n : x_n \neq y_n\}} & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y. \end{cases}$$

É um fato conhecido que, com respeito a esta métrica, o espaço $\mathbf{X}_{\mathbb{A}}$ é completo e separável.

Definimos $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X}_{\mathbb{A}})$ como a σ -álgebra de Borel gerada pelos abertos do espaço $\mathbf{X}_{\mathbb{A}}$. Uma **palavra de comprimento n** sobre um alfabeto \mathcal{S} (contável) é um elemento $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathcal{S}^n$ (quando o comprimento não é importante, usamos a notação \underline{a} para denotar uma palavra de qualquer comprimento e $[\underline{a}]$ para denotar um cilindro qualquer). Uma palavra $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ é chamada **\mathbb{A} -admissível** se

$$A_{a_0, a_1} \cdot A_{a_1, a_2} \cdot A_{a_2, a_3} \cdot \dots \cdot A_{a_{n-2}, a_{n-1}} = 1.$$

Dados $a, b \in \mathcal{S}$, usamos a notação $a \xrightarrow{n} b$ para afirmar que existe uma palavra \mathbb{A} -admissível de comprimento $n + 1$ que começa em a e termina em b .

6 Definição: Dizemos que o espaço $\mathbf{X}_{\mathbb{A}}$ é **topologicamente mixing** se

$$\forall a, b \in \mathcal{S} \exists N_{a,b} \in \mathbb{N} : a \xrightarrow{n} b, \text{ para cada } n \geq N_{a,b}.$$

Além disso, dizemos que uma cadeia topológica de Markov $(\mathbf{X}_{\mathbb{A}}, \sigma_{\mathbb{A}})$ possui a **propriedade de grandes imagens e pré-imagens (g.i.p.)** se o espaço $\mathbf{X}_{\mathbb{A}}$ é topologicamente mixing e existe $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ finito tal que

$$\forall c \in \mathcal{S} \exists a, b \in \mathcal{F} : \text{ as palavras } (c, a) \text{ e } (b, c) \text{ são } \mathbb{A}\text{-admissíveis.}$$

Seja $(\mathbf{X}_{\mathbb{A}}, \sigma_{\mathbb{A}})$ uma cadeia topológica de Markov e seja $\phi : \mathbf{X}_{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação. Dizemos que ϕ é **α -Hölder contínua** se existe $M > 0$ tal que

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq M [\mathbf{d}(x, y)]^{\alpha}, \quad \forall x, y \in \mathbf{X}_{\mathbb{A}}.$$

Definimos a **n -ésima variação de ϕ** como

$$\text{var}_n(\phi) = \sup_{\substack{x, y \in \mathbf{X}_{\mathbb{A}} \\ \text{t.q. } x_i = y_i \\ 0 \leq i \leq n-1}} \{|\phi(x) - \phi(y)|\}$$

e dizemos que ϕ tem **variação somável** se

$$\sum_{n=2}^{\infty} \text{var}_n(\phi) < \infty$$

Seja ν uma medida σ -finita e não-singular definida sobre o espaço $(\mathbf{X}_{\mathbb{A}}, \mathcal{B})$. É possível definir uma medida $\nu \circ \sigma_{\mathbb{A}}$ sobre o espaço $\mathbf{X}_{\mathbb{A}}$ dada por

$$(\nu \circ \sigma_{\mathbb{A}})[E] = \sum_{a \in \mathcal{S}} \nu(\sigma_{\mathbb{A}}(E \cap [a])), \quad \forall E \in \mathcal{B}.$$

Note que, em geral, tem-se que $(\nu \circ \sigma_{\mathbb{A}})[E] \neq \nu(\sigma_{\mathbb{A}}(E))$. Pode-se mostrar que $\nu \ll (\nu \circ \sigma_{\mathbb{A}})$ e pelo teorema de Radon-Nikodym, podemos definir o que é uma medida conforme: Se $\phi : \mathbf{X}_{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação \mathcal{B} -mensurável, dizemos que ν é uma medida **ϕ -conforme** se:

1. $\nu([a]) < \infty$ para cada cilindro $[a] \subset \mathbf{X}_{\mathbb{A}}$;
2. Existe $\lambda > 0$ tal que

$$\frac{d\nu}{d(\nu \circ \sigma_{\mathbb{A}})} = \lambda^{-1} \exp(\phi).$$

Além disso, o **operador de Ruelle** associado a ϕ é definido por

$$L_{\phi}(f)(x) = \sum_{\substack{y \in \mathbf{X}_{\mathbb{A}} \\ \text{t.q. } \sigma_{\mathbb{A}}(y)=x}} \exp(\phi(y))f(y), \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(\nu), \quad \forall x \in \mathbf{X}_{\mathbb{A}}.$$

Se ϕ é uma aplicação Hölder-contínua, definimos o **operador dual de Ruelle** associado a ϕ como o operador tal que

$$\int f dL_{\phi}^*(\mu) = \int L_{\phi}(f) d\mu,$$

para cada $f : \mathbf{X}_{\mathbb{A}} \rightarrow [0, \infty)$ contínua e integrável. Essa definição de operador dual garante que ele é único, por consequência do clássico teorema de Lusin (para uma definição mais geral do operador dual veja página 32 de [3]).

9 Observação: Quando \mathcal{S} é um conjunto infinito, pode acontecer que $\#\{y : \sigma_{\mathbb{A}}(y) = x\} = \infty$ e que a soma na definição de L_{ϕ} seja divergente. Pode-se mostrar que o operador de transferência $\hat{\sigma}_{\mathbb{A}}$ para uma medida não-singular ν (veja [9] para definição e propriedades de operador de transferência) é o operador de Ruelle associado a $\phi = \log \frac{d\nu}{d\nu \circ \sigma_{\mathbb{A}}}$, e como

$$\int_{\mathbf{X}_{\mathbb{A}}} L_{\phi}(f) d\nu \leq \int_{\mathbf{X}_{\mathbb{A}}} |L_{\phi}(f)| d\nu = \int_{\mathbf{X}_{\mathbb{A}}} |\hat{\sigma}_{\mathbb{A}}(f)| d\nu = \|\hat{\sigma}_{\mathbb{A}}(f)\|_1 \leq \|f\|_1 < \infty,$$

temos que a soma na definição do operador de Ruelle (associado a $\phi = \log \frac{d\nu}{d\nu \circ \sigma_{\mathbb{A}}}$) é absolutamente convergente para quase todo $x \in \mathbf{X}_{\mathbb{A}}$.

7 Definição: Seja $\mathbf{X}_{\mathbb{A}}$ topologicamente mixing e suponha que $\phi : \mathbf{X}_{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função \mathcal{B} -mensurável que é de variação somável. Definimos a **pressão de Gurevich** (veja [5]) associada a ϕ como

$$P_G(\phi, a) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(Z_n(\phi, a)),$$

onde $a \in \mathcal{S}$ e

$$Z_n(\phi, a) := \sum_{\sigma_{\mathbb{A}}^n(x)=x} \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \sigma_{\mathbb{A}}^k(x)\right) \mathbf{1}_{[a]}(x),$$

onde $\mathbf{1}_{[a]}$ é a função indicatriz em relação ao cilindro $[a]$. Pode-se mostrar que $P_G(\phi, a)$ existe para cada $a \in \mathcal{S}$ e que não depende de a , portanto, escrevemos $P_G(\phi)$ para denotar a pressão de Gurevich associada a ϕ .

6 Teorema: (Ruelle-Sarig, [2], [5]) *Sejam $(\mathbf{X}_{\mathbb{A}}, \sigma_{\mathbb{A}})$ uma cadeia topológica de Markov (com $\mathbf{X}_{\mathbb{A}}$ topologicamente mixing) e $\phi : \mathbf{X}_{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{B} -mensurável. Suponha que $\sigma_{\mathbb{A}}$ possui a propriedade g.i.p., que a aplicação $\log \phi$ é Hölder contínua, que $\|L_{\phi}(\mathbb{1})\|_{\infty} < \infty$ e que ϕ é Hölder contínuo. Então, para $\rho = e^{P_G(\phi)}$ valem as seguintes afirmações:*

1. *Existe uma medida de probabilidade $\nu : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ tal que*

$$L_{\phi}^*(\nu) = \rho \nu ;$$

2. *A medida de probabilidade ν é $[\rho/\phi]$ -conforme;*

3. *Existe uma função $h : \mathbf{X}_{\mathbb{A}} \rightarrow (0, \infty)$ Hölder-contínua tal que*

$$L_{\phi}(h) = \rho h \quad e \quad \int h d\nu = 1 ;$$

4. *ν e h são unicamente definidas;*

5. *$\sigma_{\mathbb{A}}$ é ergódica em relação à medida ν ;*

6. *Para cada $f : \mathbf{X}_{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tem-se que*

$$\left\| \frac{L_{\phi}^n(f)}{\rho^n h} - \int f d\nu \right\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 ;$$

7. *Para cada $a \in \mathcal{S}$ existem $C > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\frac{1}{C} \leq Z_n(\phi, a) e^{-nP_G(\phi)} \leq C ,$$

para todo $n \geq N$;

No que segue, provaremos uma versão análoga do teorema de Ruelle no contexto de “cadeias topológicas de Markov contáveis randomizadas”, para isso usamos o método de *acoplamentos* ou *transporte ótimo* que descrevemos e aplicamos na seção 2.3.

2.2 Uma versão aleatória do operador de Ruelle

Definimos um **sistema fibrado aleatório** como uma coleção $(Y, T, \Omega, \theta, \mathbb{P}, \pi)$, onde Y é polonês, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, $T : Y \rightarrow Y$ uma aplicação contínua, $\theta : \Omega \rightarrow \Omega$ uma transformação não singular e $\pi : Y \rightarrow \Omega$ é mensurável e sobrejetora satisfazendo $\pi \circ T = \theta \circ \pi$ (π é semi-conjugação), isto é, que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{T} & Y \\ \pi \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi \\ \Omega & \xrightarrow{\theta} & \Omega \end{array}$$

Assim, T preserva as fibras $Y_{\omega} = \pi^{-1}(\{\omega\})$, no sentido que $T(Y_{\omega}) \subset Y_{\theta(\omega)}$; a restrição de T^n ($n \geq 1$) à fibra Y_{ω} é denotada por T_{ω}^n , portanto, $T_{\omega}^n : Y_{\omega} \rightarrow Y_{\theta^n(\omega)}$.

8 Definição: Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\theta : \Omega \rightarrow \Omega$ uma transformação não-singular, invertível e que preserva a medida. Além disso, consideramos uma variável aleatória $\ell : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ e, para quase todo $\omega \in \Omega$, seja $\mathbb{A}_\omega = (A_{i,j}(\omega))_{i,j=1}^\infty \in M_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(\{0, 1\})$ dada por

$$A_{i,j}(\omega) = \mathbf{1}_{[1, \ell_\omega](i)} \cdot \mathbf{1}_{[1, \ell_{\theta\omega}](j)}, \quad \forall i, j \in \mathbb{N},$$

isto é,

$$\mathbb{A}_\omega = \left(\begin{array}{c|ccc} \overbrace{1 \ 1 \ \dots \ 1}^{\ell_{\theta\omega}-1} & 0 & \dots & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ \hline 1 & \dots & 1 & 0 \ \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \ \ddots \\ \vdots & & \vdots & \end{array} \right) \Bigg\}^{\ell_\omega-1}$$

e tal que a aplicação $\omega \mapsto \mathbb{A}_\omega$ é mensurável (onde $\mathbf{1}$ denota a função indicatriz). Definimos o **espaço de full-shift aleatório** em relação a $\omega \in \Omega$ como

$$\begin{aligned} X_\omega &= \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}_0} : A_{x_i, x_{i+1}}(\theta^i \omega) = 1, \ \forall i \in \mathbb{N}_0\} \\ &= \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}_0} : x_i < \ell_{\theta^i \omega}, \ \forall i \in \mathbb{N}_0\}. \end{aligned}$$

Como vemos, é possível definir o espaço de full-shift aleatório sem usar a matriz de transição \mathbb{A}_ω , mas esta é a forma de generalizar a definição no caso de um espaço de subshift aleatório. Definimos o **shift completo aleatório** (ou full-shift aleatório) $\sigma_\omega : X_\omega \rightarrow X_{\theta\omega}$ dado por

$$\sigma_\omega((x_i)_{i \in \mathbb{N}_0}) = (x_{i+1})_{i \in \mathbb{N}_0}.$$

Seja $X = \{(x, \omega) : x \in X_\omega\}$, o anterior dá origem a uma aplicação global $\sigma : X \rightarrow X$ (sistema fibrado aleatório) tal que

$$\sigma(x, \omega) = (\sigma_\omega(x), \theta\omega).$$

Isto define o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \pi \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi \\ \Omega & \xrightarrow{\theta} & \Omega \end{array} \quad \curvearrowright \quad \begin{array}{ccc} X_\omega & \xrightarrow{\sigma_\omega} & X_{\theta\omega} \\ \pi \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi \\ \{\omega\} & \xrightarrow{\theta} & \{\theta\omega\} \end{array}$$

onde π é uma aplicação mensurável e sobrejetora tal que $\pi^{-1}(\{\omega\}) = X_\omega$ para quase todo $\omega \in \Omega$. O quintuplo $(X, \sigma, \Omega, \mathbb{P}, \theta)$ é chamado **cadeia topológica de Markov randomizada completa (CMRC)**.

9 Definição: Dizemos que um elemento $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$ é uma **palavra finita de comprimento n** (ou n -palavra). Uma n -palavra $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ é chamada ω -**admissível** se

$$a_i \leq \ell_{\theta^i \omega} - 1, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Denotamos por \mathcal{W}_ω^n ao conjunto de todas as n -palavras ω -admissíveis. Dada uma n -palavra $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ e $\omega \in \Omega$, definimos o **cilindro** em relação a ω e a :

$$[a]_\omega = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]_\omega = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X_\omega : x_i = a_i, \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}.$$

Quando o comprimento não é importante, usamos a notação \underline{a} para denotar uma palavra de qualquer comprimento e $[\underline{a}]_\omega$ para denotar um cilindro qualquer em X_ω .

10 Observação: Dada $(X, \sigma, \Omega, \mathbb{P}, \theta)$ uma CMRC, temos condições (análogas) como topologicamente mixing e propriedade de grandes imagens e pre-imagens (ver definição 6) que sempre valem para cada fibra X_ω .

Sabemos que X_ω é um espaço polonês (espaço métrico separável e completo) em relação à topologia τ_c gerada pelos cilindros. Além disso, a topologia τ_c é metrizável. De fato, para cada $r \in (0, 1)$ a distância (não aleatória) sobre X_ω dada por

$$d_r((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}) = r^{\min\{i : x_i \neq y_i\}},$$

é tal que $\tau_{d_r} = \tau_c$. Por outro lado, a estrutura mensurável do espaço $X = \{(x, \omega) : x \in X_\omega\}$ depende e é induzida pela estrutura mensurável do espaço $\mathbb{N}^{\mathbb{N}_0} \times \Omega$, portanto, é possível fazer a seguinte definição:

10 Definição: Para quase todo $\omega \in \Omega$ considere uma medida de probabilidade $\mu_\omega : \mathbb{N}^{\mathbb{N}_0} \rightarrow [0, 1]$ tal que $\mu_\omega(X_\omega) = 1$. Dizemos que $\mu = \{\mu_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ é uma **medida de probabilidade randomizada** se para cada $B \in \mathcal{B}$ a aplicação $\omega \mapsto \mu_\omega(B)$ é mensurável, e $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ é dada por

$$\mu(B) = \int \mu_\omega(B) d\mathbb{P}(\omega), \quad \forall B \in \mathcal{B},$$

onde \mathcal{B} é a σ -álgebra de Borel do espaço de full-shift contável $\mathbb{N}^{\mathbb{N}_0}$ (neste caso, a matriz de transição é $\mathbb{A} = (1)_{i,j=1}^\infty$).

11 Definição: Seja $(X, \sigma, \Omega, \mathbb{P}, \theta)$ uma CMRC e seja $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação mensurável dada por $\phi(x, \omega) = \phi_\omega(x)$, onde cada $\phi_\omega : X_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação mensurável (dizemos que $\phi = \{\phi_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ definida deste modo é uma **aplicação fibrada**). Definimos a **n -ésima variação de ϕ em relação a ω** como

$$\begin{aligned} \text{var}_n^\omega(\phi) &:= \sup_{\substack{x, y \in X_\omega \\ \text{t.q. } x_i = y_i \\ 0 \leq i \leq n-1}} \{|\phi_\omega(x) - \phi_\omega(y)|\} \\ \text{var}_0^\omega(\phi) &:= \sup_{x, y \in X_\omega} \{|\phi_\omega(x) - \phi_\omega(y)|\}. \end{aligned}$$

Além disso, dizemos que ϕ é **Hölder contínua com índice $m \in \mathbb{N}_0$ e constante r** (ou m -Hölder contínua, quando a constante r seja subentendida) se existem $r \in (0, 1)$ e uma variável aleatória $k : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ tal que $\int \log k d\mathbb{P} < \infty$ e

$$\text{var}_n^\omega(\phi) \leq k_\omega r^n, \quad \forall n \geq m, \text{ e quase todo } \omega \in \Omega.$$

Além disso, dizemos que ϕ é **Lipschitz** se ela é 0-Hölder contínua (note que a definição de aplicação fibrada m -Hölder contínua é local, exceto quando $m = 0$).

11 Observação: Lembrando as definições usuais, dado $\omega \in \Omega$ vamos supor que $f : X_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ é Hölder contínua. Considere $x, y \in [(v_0, v_1, \dots, v_{n-1})]_\omega$, então existem $c_\omega > 0$ e $\alpha \in (0, 1)$ tais que

$$|f(x) - f(y)| \leq c_\omega d_r(x, y)^\alpha \leq c_\omega (r^n)^\alpha = c_\omega (r^\alpha)^n,$$

como $r^\alpha \in (0, 1)$, temos que f é Lipschitz sobre o espaço métrico (X_ω, d_{r^α}) .

12 Definição: Dada uma aplicação fibrada ϕ Hölder contínua, para quase todo $\omega \in \Omega$ definimos o **operador de Ruelle** associado a ϕ por

$$\mathcal{L}_\phi^\omega(f)(x) = \sum_{\substack{y \in X_\omega \\ \text{t.q. } \sigma_\omega(y) = x}} \exp(\phi_\omega(y)) f(y), \quad \forall x \in X_{\theta\omega},$$

onde $f : X_\omega \rightarrow [0, \infty]$ é Lipschitz (tal aplicação ϕ , associada ao operador de Ruelle, é chamada **potencial**). Analogamente, seja $\{\mu_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ uma medida de probabilidade randomizada, então para quase todo $\omega \in \Omega$ definimos o **operador dual de Ruelle** $[\mathcal{L}_\phi^\omega]^*$ (associado ao potencial ϕ) como o operador tal que

$$\int f d[\mathcal{L}_\phi^\omega]^*(\mu_{\theta\omega}) = \int \mathcal{L}_\phi^\omega(f) d\mu_{\theta\omega},$$

para cada $f : X_\omega \rightarrow [0, \infty]$ Lipschitz.

Dado $\omega \in \Omega$, definimos a n -ésima composição da transformação σ_ω como sendo

$$\sigma_\omega^n := \sigma_{\theta^{n-1}\omega} \circ \sigma_{\theta^{n-2}\omega} \circ \dots \circ \sigma_{\theta\omega} \circ \sigma_\omega.$$

Sejam $\omega \in \Omega$ e $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathcal{W}_\omega^n$, definimos o **homeomorfismo local de σ** composto n vezes em relação a ω e a ,

$$\sigma_{\omega, a}^n := \sigma_{\theta^{n-1}\omega} \circ \sigma_{\theta^{n-2}\omega} \circ \dots \circ \sigma_{\theta\omega} \circ \sigma_\omega \Big|_{[a]_\omega},$$

onde $\sigma_{\omega, a}^n : [a]_\omega \rightarrow \sigma_{\theta^{n-1}\omega}([a_{n-1}]_{\theta^{n-1}\omega})$. Notemos que

$$\sigma_{\theta^{n-1}\omega}([a_{n-1}]_{\theta^{n-1}\omega}) = \{y \in X_{\theta^{n-1}\omega} : \exists x \in [a_{n-1}]_{\theta^{n-1}\omega} \text{ com } \sigma_{\theta^{n-1}\omega}(x) = y\}.$$

Dado qualquer $y \in X_{\theta^{n-1}\omega}$ considere $x = (a_{n-1}, y) \in [a_{n-1}]_{\theta^{n-1}\omega}$ e vale que $\sigma_{\theta^{n-1}\omega}(x) = y$, assim temos que $\sigma_{\theta^{n-1}\omega}([a_{n-1}]_{\theta^{n-1}\omega}) = X_{\theta^{n-1}\omega}$, e portanto, $\sigma_{\omega, a}^n : [a]_\omega \rightarrow X_{\theta^{n-1}\omega}$ define um homeomorfismo.

12 Observação: Para que a composição do operador de Ruelle também tenha sentido, definimos

$$[\mathcal{L}_\phi^\omega]^n := \mathcal{L}_\phi^{\theta^{n-1}\omega} \circ \dots \circ \mathcal{L}_\phi^{\theta\omega} \circ \mathcal{L}_\phi^\omega,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Por um argumento de indução, pode-se mostrar que a n -ésima potencia do operador de Ruelle é dada por

$$[\mathcal{L}_\phi^\omega]^n(f)(x) = \sum_{\sigma_\omega^n(y)=x} e^{S_n\phi_\omega(y)} f(y),$$

onde $f : X_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ e onde

$$S_n\phi_\omega := \sum_{i=0}^{n-1} \phi_{\theta^i\omega} \circ \sigma_\omega^i,$$

para cada potencial $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$. Tal expressão é conhecida como **somas de Birkhoff** do potencial ϕ . Analogamente, definimos a n -ésima potencia do operador dual de Ruelle como segue

$$\left([\mathcal{L}_\phi^\omega]^*\right)^n := [L_\phi^\omega]^{n,*} := [L_\phi^\omega]^* \circ \dots \circ [L_\phi^{\theta^{n-2}\omega}]^* \circ [L_\phi^{\theta^{n-1}\omega}]^*.$$

Dada uma aplicação fibrada $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz, podemos achar uma estimacão para as suas somas de Birkhoff $S_n f_\omega$. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathcal{W}_\omega^m$, para $n \leq m$, $x, y \in [a]_\omega$ e um potencial f $(m-n+1)$ -Hölder contínuo tal que a sua variável aleatória k associada cumpre com $\int k d\mathbb{P} < \infty$, então

$$\begin{aligned} |S_n f_\omega(x) - S_n f_\omega(y)| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} f_{\theta^i\omega} \circ \sigma_\omega^i(x) - \sum_{i=0}^{n-1} f_{\theta^i\omega} \circ \sigma_\omega^i(y) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |f_{\theta^i\omega} \circ \sigma_\omega^i(x) - f_{\theta^i\omega} \circ \sigma_\omega^i(y)| \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} |f_{\theta^i\omega}(\sigma_{\omega,a}^i(x)) - f_{\theta^i\omega}(\sigma_{\omega,a}^i(y))| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \text{var}_{m-i}^{\theta^i\omega}(f) = \sum_{i=1}^n \text{var}_{m-n+i}^{\theta^{n-i}\omega}(f) \\ &\leq \sum_{i=1}^n k_{\theta^{n-i}\omega} r^{m-n+i} \leq r^{m-n} \sum_{i=1}^n k_{\theta^{n-i}\omega} r^i \leq r^{m-n} \sum_{i=1}^{\infty} k_{\theta^{n-i}\omega} r^i. \quad (2.1) \end{aligned}$$

Notemos que o lado direito da última desigualdade é finito \mathbb{P} -q.t.p., de fato, pelo teorema de convergência monótona e dado que \mathbb{P} é θ -invariante,

$$\begin{aligned} \int r^{m-n} \sum_{i=1}^{\infty} k_{\theta^{n-i}\omega} r^i d\mathbb{P}(\omega) &= r^{m-n} \sum_{i=1}^{\infty} r^i \int k_{\theta^{n-i}\omega} d\mathbb{P}(\omega) \\ &= r^{m-n} \frac{r}{1-r} \int k_\omega d\mathbb{P}(\omega) = \frac{r^{m-n+1}}{1-r} \int k d\mathbb{P} < \infty. \quad (2.2) \end{aligned}$$

Em particular, para um potencial $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder contínuo com índice menor o igual a $m - n + 1$ (e as considerações feitas acima), temos que

$$\left[\exp \left(\sum_{i=1}^{\infty} k_{\theta^{n-i}\omega} r^i \right) \right]^{-r^{m-n}} \leq e^{S_n \varphi_\omega(x) - S_n \varphi_\omega(y)} \leq \left[\exp \left(\sum_{i=1}^{\infty} k_{\theta^{n-i}\omega} r^i \right) \right]^{r^{m-n}}.$$

Defina a variável aleatória $B : \Omega \rightarrow (0, \infty)$ dada por

$$B_\omega := \exp \left(\sum_{i=1}^{\infty} k_{\theta^{-i}\omega} r^i \right),$$

e notemos que $\int \log B \, d\mathbb{P} < \infty$. Assim,

$$(B_{\theta^n \omega})^{-1} \leq (B_{\theta^n \omega})^{-r^{m-n}} \leq e^{S_n \varphi_\omega(x) - S_n \varphi_\omega(y)} \leq (B_{\theta^n \omega})^{r^{m-n}} \leq (B_{\theta^n \omega}). \quad (2.3)$$

De (2.1) temos que existe uma constante $L^\omega > 0$ tal que $|S_n f_\omega(x) - S_n f_\omega(y)| \leq L^\omega r^{m-n}$, isto é, o valor $|S_n f_\omega(x) - S_n f_\omega(y)|$ está numa vizinhança da origem e, portanto, pelo teorema de Taylor temos que existe uma constante $C_n^\omega > 0$ tal que

$$S_n f_\omega(x) - S_n f_\omega(y) \leq e^{S_n \varphi_\omega(x) - S_n \varphi_\omega(y)} - 1 \leq C_n^\omega (S_n f_\omega(x) - S_n f_\omega(y)). \quad (2.4)$$

Assim, temos que

$$C_n^\omega = \sup_{x, y \in [a]_\omega} \frac{e^{S_n \varphi_\omega(x) - S_n \varphi_\omega(y)} - 1}{S_n f_\omega(x) - S_n f_\omega(y)}.$$

Como $(e^t - 1)/t$ define uma função crescente, pela desigualdade (2.3) temos que

$$S_n f_\omega(x) - S_n f_\omega(y) \leq \ln B_{\theta^n \omega} \quad \Rightarrow \quad C_n^\omega = \frac{e^{\ln B_{\theta^n \omega}} - 1}{\ln B_{\theta^n \omega}} = \frac{B_{\theta^n \omega} - 1}{\ln B_{\theta^n \omega}}.$$

Concluimos, por (2.3) e (2.4), que

$$\begin{aligned} e^{S_n \varphi_\omega(x) - S_n \varphi_\omega(y)} - 1 &\leq \frac{B_{\theta^n \omega} - 1}{\ln B_{\theta^n \omega}} (S_n f_\omega(x) - S_n f_\omega(y)) \\ &\leq \frac{B_{\theta^n \omega} - 1}{\ln B_{\theta^n \omega}} r^{m-n} \ln B_{\theta^n \omega} = (B_{\theta^n \omega} - 1) d_r(\sigma_\omega^n(x), \sigma_\omega^n(y)). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dadas estas considerações, agora estamos em posição de definir as ferramentas com as que vamos trabalhar no que segue. Considere $(X, \sigma, \Omega, \mathbb{P}, \theta)$ uma CMRC e um potencial $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as propriedades:

1. φ é um potencial 2-Hölder contínuo tal que a sua variável aleatória associada k é tal que $\int k \, d\mathbb{P} < \infty$, e $\text{var}_1^\omega(\varphi) < \infty$ para quase todo $\omega \in \Omega$;
2. $\omega \mapsto \mathcal{L}_\varphi^\omega(\mathbf{1}_{X_\omega})$ é uma aplicação integrável.

Se $\mathcal{L}_\varphi^\omega(\mathbf{1}_{X_\omega}) = \mathbf{1}_{X_{\theta\omega}}$ para quase todo $\omega \in \Omega$, então as condições 1 e 2 podem ser trocadas por

1. φ é um potencial 2-Hölder contínuo e $\text{var}_1^\omega(\varphi) < \infty$ para quase todo $\omega \in \Omega$;

No que segue, o potencial φ será considerado com estas propriedades dependendo das hipóteses nas que trabalhemos (por exemplo, se $\mathcal{L}_\varphi^\omega(\mathbf{1}_{X_\omega}) = \mathbf{1}_{X_{\theta\omega}}$, então φ cumpre com $\hat{1}$).

2.3 Métrica de Wasserstein e construção do transporte

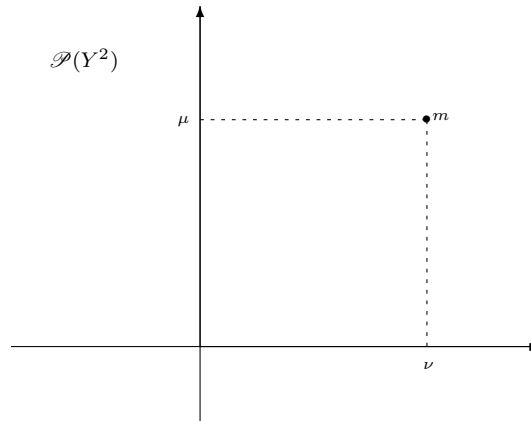
13 Definição: Seja Y um espaço métrico separável e completo, e sejam μ, ν duas medidas de probabilidade definidas sobre Y . Dizemos que

$$\Pi(\mu, \nu) := \{m \in \mathcal{P}(Y^2) : \pi_1^*(m) = \mu \text{ e } \pi_2^*(m) = \nu\},$$

é o conjunto dos **transportes ou acoplamentos** de μ e ν , onde $\mathcal{P}(Y^2)$ é o conjunto de todas as medidas de probabilidade de Borel definidas sobre Y^2 e π_1^*, π_2^* são as projeções canônicas que definem as medidas marginais de cada transporte, isto é,

$$\pi_1^*(m)(A) = m(\pi_1^{-1}(A)) \quad \text{e} \quad \pi_2^*(m)(A) = m(\pi_2^{-1}(A)),$$

para cada $A \subset Y$ conjunto mensurável.



7 Proposição: (Villani, [10]) Seja d uma métrica compatível com a topologia de Y . Defina

$$W(\mu, \nu) := \inf_{m \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{Y^2} d(x, y) dm,$$

então W define uma métrica sobre o espaço das medidas de probabilidade (de Borel) sobre Y .

14 Definição: Definimos W como a **métrica de Wasserstein** (também conhecida como métrica Kantorovich-Rubinstein) sobre o espaço das medidas de probabilidade (de Borel) definidas sobre Y .

Pode-se mostrar que a convergência de medidas na métrica de Wasserstein é uma convergência fraca, isto é uma consequência direta da dualidade de Monge-Kantorovich,

$$W(\mu, \nu) = \sup_{D(f) \leq 1} \left\{ \int f d\mu - \int f d\nu \right\},$$

onde

$$D(f) := \sup_{x, y \in Y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}.$$

Uma propriedade muito importante da métrica W é que aquele infimo na sua definição sempre é atingido por algum transporte chamado **transporte ótimo**, que em geral, não é único (veja [10]).

2.3.1 O método de acoplamento

A seguinte proposição é o resultado principal deste trabalho e é onde explicamos detalhadamente o método de acoplamento e a adaptação dele às nossas ferramentas aleatórias. As variáveis aleatórias envolvidas são definidas como segue. Seja $\beta \in (0, 1)$, r dado pela Hölder continuidade de φ e considere B_ω como foi definida em (2.3). Para $\omega \in \Omega$ defina

$$\alpha_\omega := \frac{B_\omega}{\beta} \quad \text{e} \quad \tilde{d}_\omega(x, y) := \min \{1, \alpha_\omega d_r(x, y)\}.$$

Isto nos dá um modo de definir a métrica de Wasserstein W_ω e o coeficiente de Lipschitz $\tilde{D}_\omega(f)$ de uma aplicação fibrada f em relação à distância \tilde{d}_ω sobre o espaço X_ω , isto é,

$$\tilde{D}_\omega(f) := \sup_{x, y \in X_\omega} \frac{|f_\omega(x) - f_\omega(y)|}{\tilde{d}_\omega(x, y)}.$$

Considere a variável aleatória $n_\omega : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ tal que para quase todo $\omega \in \Omega$,

$$n_\omega \geq \left\lfloor -\frac{\log \alpha_\omega}{\log r} \right\rfloor + 1,$$

e notar que com essa condição tem-se que

$$n_\omega > -\frac{\log \alpha_\omega}{\log r} \quad \Rightarrow \quad \alpha_\omega r^{n_\omega} < 1,$$

pois $\log r < 0$. O próximo resultado nos dá uma contração fibrada pelo operador de Ruelle.

8 Teorema: *Sejam $(X, \sigma, \Omega, \mathbb{P}, \theta)$ uma CMRC e um potencial $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ definidos como antes e tais que $\mathcal{L}_\varphi^\omega(\mathbb{1}_{X_\omega}) = \mathbb{1}_{X_{\theta\omega}}$ para quase todo $\omega \in \Omega$. Além disso, suponha que $f = \{f_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ é uma aplicação fibrada Lipschitz contínua com constante r igual à constante de φ , e $\{\mu_\omega\}_{\omega \in \Omega}$, $\{\nu_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ duas medidas de probabilidade randomizadas. Então para quase todo $\omega \in \Omega$ temos que existe $t_\omega \in (0, 1)$ tal que*

$$i \quad \tilde{D}([\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1}(f_\omega)) \leq t_\omega \cdot \tilde{D}_\omega(f);$$

$$ii \quad W_\omega([\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\mu_{\theta^{n_\omega+1}\omega}), [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\nu_{\theta^{n_\omega+1}\omega})) \leq t_\omega W_{\theta^{n_\omega+1}\omega}(\mu_{\theta^{n_\omega+1}\omega}, \nu_{\theta^{n_\omega+1}\omega}).$$

Prova: Primeiro vamos provar a contração [i] para $\mathcal{L}_\varphi^\omega$ localmente. Para uma aplicação fibrada f Lipschitz contínua temos para quase todo $\omega \in \Omega$ e todo $x, y \in X_\omega$,

$$\frac{|f_\omega(x) - f_\omega(y)|}{\tilde{d}_\omega(x, y)} \leq \frac{|f_\omega(x) - f_\omega(y)|}{d_r(x, y)} = \alpha_\omega \frac{|f_\omega(x) - f_\omega(y)|}{\alpha_\omega d_r(x, y)} \leq \alpha_\omega \frac{|f_\omega(x) - f_\omega(y)|}{\tilde{d}_\omega(x, y)},$$

assim, concluímos que $\tilde{D}_\omega(f) \leq D_\omega(f) \leq \alpha_\omega \tilde{D}_\omega(f)$. Isto nos diz que f_ω é também Lipschitz contínua sobre X_ω respeito à métrica \tilde{d}_ω , para quase todo $\omega \in \Omega$. Sejam $x, y \in [a_0]_{\theta^{n_\omega}}$ para algum $a_0 \in \mathcal{W}_{\theta^{n_\omega}}^1$,

$$\begin{aligned}
 & \left| [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^n(f_\omega)(x) - [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^n(f_\omega)(y) \right| \\
 &= \left| \sum_{\substack{\sigma_{\omega,v}^n(z_1)=x \\ v \in \mathcal{W}_\omega^n}} e^{S_n \varphi_\omega(z_1)} f_\omega(z_1) - \sum_{\substack{\sigma_{\omega,v}^n(z_2)=y \\ v \in \mathcal{W}_\omega^n}} e^{S_n \varphi_\omega(z_2)} f_\omega(z_2) \right| \\
 &\leq \sum_{v \in \mathcal{W}_\omega^n} \left| e^{S_n \varphi_\omega \circ \sigma_{\omega,v}^{-n}(x)} f_\omega \circ \sigma_{\omega,v}^{-n}(x) - e^{S_n \varphi_\omega \circ \sigma_{\omega,v}^{-n}(y)} f_\omega \circ \sigma_{\omega,v}^{-n}(y) \right| \\
 &= \sum_{v \in \mathcal{W}_\omega^n} \left| e^{S_n \varphi_\omega \circ \sigma_{\omega,v}^{-n}(x)} f_\omega \circ \sigma_{\omega,v}^{-n}(x) - e^{S_n \varphi_\omega \circ \sigma_{\omega,v}^{-n}(y)} f_\omega \circ \sigma_{\omega,v}^{-n}(y) \right. \\
 &\quad \left. + e^{S_n \varphi_\omega \circ \sigma_{\omega,v}^{-n}(x)} f_\omega \circ \sigma_{\omega,v}^{-n}(y) - e^{S_n \varphi_\omega \circ \sigma_{\omega,v}^{-n}(y)} f_\omega \circ \sigma_{\omega,v}^{-n}(y) \right| \\
 &\leq \sum_{v \in \mathcal{W}_\omega^n} e^{S_n \varphi_\omega \circ \sigma_{\omega,v}^{-n}(x)} \left| f_\omega \circ \sigma_{\omega,v}^{-n}(x) - f_\omega \circ \sigma_{\omega,v}^{-n}(y) \right| \\
 &\quad + \sum_{v \in \mathcal{W}_\omega^n} e^{S_n \varphi_\omega \circ \sigma_{\omega,v}^{-n}(y)} \left| f_\omega \circ \sigma_{\omega,v}^{-n}(y) \right| \left| e^{S_n \varphi_\omega(\sigma_{\omega,v}^{-n}(x)) - S_n \varphi_\omega(\sigma_{\omega,v}^{-n}(y))} - 1 \right|.
 \end{aligned}$$

Notemos que $\sigma_{\omega,v}^{-n}(x), \sigma_{\omega,v}^{-n}(y) \in [v]_\omega$, portanto, pela desigualdade (2.5) temos que

$$\begin{aligned}
 \left| [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^n(f_\omega)(x) - [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^n(f_\omega)(y) \right| &\leq \sum_{v \in \mathcal{W}_\omega^n} e^{S_n \varphi_\omega \circ \sigma_{\omega,v}^{-n}(x)} \left| f_\omega(\sigma_{\omega,v}^{-n}(x)) - f_\omega(\sigma_{\omega,v}^{-n}(y)) \right| \\
 &\quad + \sum_{v \in \mathcal{W}_\omega^n} e^{S_n \varphi_\omega \circ \sigma_{\omega,v}^{-n}(y)} \left| f_\omega \circ \sigma_{\omega,v}^{-n}(y) \right| (B_{\theta^{n_\omega}} - 1) d_r(x, y) \\
 &\leq \sum_{v \in \mathcal{W}_\omega^n} e^{S_n \varphi_\omega \circ \sigma_{\omega,v}^{-n}(x)} D_\omega(f) d_r(\sigma_{\omega,v}^{-n}(x), \sigma_{\omega,v}^{-n}(y)) \\
 &\quad + (B_{\theta^{n_\omega}} - 1) d_r(x, y) [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^n(|f_\omega|)(y) \\
 &\leq D_\omega(f) r^n d_r(x, y) [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^n(\mathbb{1}_{X_\omega})(x) \\
 &\quad + \|f_\omega\|_\infty (B_{\theta^{n_\omega}} - 1) d_r(x, y) [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^n(\mathbb{1}_{X_\omega})(y).
 \end{aligned}$$

Como $\mathcal{L}_\varphi^\omega(\mathbb{1}_{X_\omega}) = \mathbb{1}_{X_{\theta\omega}}$, temos que

$$\left| [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^n(f_\omega)(x) - [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^n(f_\omega)(y) \right| \leq (D_\omega(f) r^n + \|f_\omega\|_\infty (B_{\theta^{n_\omega}} - 1)) d_r(x, y). \quad (2.6)$$

Pela hipótese, nós temos que $\mathcal{L}_\varphi^\omega(c) = c$ para cada $c \in \mathbb{R}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\inf\{f_\omega(x) : x \in X_\omega\} = 0$. Então

$$|f_\omega(x)| - |f_\omega(y)| \leq |f_\omega(x) - f_\omega(y)| \leq \tilde{D}_\omega(f) \tilde{d}_\omega(x, y) \leq \tilde{D}_\omega(f),$$

e concluímos que $\|f_\omega\|_\infty \leq \tilde{D}_\omega(f)$. Notemos que por construção $r^{n_\omega} \alpha_\omega < 1$ e supondo que $\tilde{d}_{\theta^{n_\omega}\omega}(x, y) < 1$, da equação (2.6) obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{|\mathcal{L}_\varphi^\omega{}^{n_\omega}(f_\omega)(x) - \mathcal{L}_\varphi^\omega{}^{n_\omega}(f_\omega)(y)|}{\tilde{d}_{\theta^{n_\omega}\omega}(x, y)} &\leq \frac{(D_\omega(f) r^{n_\omega} + \|f_\omega\|_\infty (B_{\theta^{n_\omega}\omega} - 1)) d_r(x, y)}{\alpha_{\theta^{n_\omega}\omega} d_r(x, y)} \\ &= \frac{D_\omega(f) r^{n_\omega} + \|f_\omega\|_\infty (B_{\theta^{n_\omega}\omega} - 1)}{\alpha_{\theta^{n_\omega}\omega}} \\ &\leq \frac{\alpha_\omega \tilde{D}_\omega(f) r^{n_\omega} + \tilde{D}_\omega(f) (B_{\theta^{n_\omega}\omega} - 1)}{\alpha_{\theta^{n_\omega}\omega}} \\ &\leq \frac{(\alpha_\omega r^{n_\omega} + B_{\theta^{n_\omega}\omega} - 1) \tilde{D}_\omega(f)}{\alpha_{\theta^{n_\omega}\omega}} \\ &\leq \frac{B_{\theta^{n_\omega}\omega} \tilde{D}_\omega(f)}{\alpha_{\theta^{n_\omega}\omega}} = \beta \tilde{D}_\omega(f), \end{aligned}$$

isto mostra [i] localmente. Agora, dados $x, y \in X_\omega$ vamos contruir um transporte $\mathcal{Q}_{x,y}^\omega \in \Pi([\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_x), [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_y))$ com uma limitação inferior uniforme sobre uma vizinhança da diagonal, considerando ramos inversos passando através do cilindro $[1]_\omega$. Defina para quase todo $\omega \in \Omega$,

$$C_\omega := \inf_{x \in X_{\theta\omega}} e^{\varphi_\omega \circ \sigma_{\omega,1}^{-1}(x)}.$$

Note que

$$C_\omega \leq e^{\varphi_\omega \circ \sigma_{\omega,1}^{-1}(y)} \leq \sum_{a \in \mathcal{W}_\omega^1} e^{\varphi_\omega \circ \sigma_{\omega,a}^{-1}(y)} = \mathcal{L}_\varphi^\omega(\mathbf{1}_{X_\omega})(y) \leq 1, \quad (2.7)$$

para quase todo $\omega \in \Omega$ e todo $y \in X_{\theta\omega}$. Vamos contruir um transporte das medidas $[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_x)$ e $[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_y)$ mediante uma decomposição do potencial. Para $x \in X_{\theta^{n_\omega+1}\omega}$ e $v = (v_0, v_1, \dots, v_{n_\omega-1}) \in \mathcal{W}_\omega^{n_\omega}$, defina

$$\begin{aligned} \phi_{(v,1)}^{(1)} &:= \inf_{y \in X_{\theta^{n_\omega+1}\omega}} e^{S_{n_\omega+1} \varphi_\omega \circ \sigma_{\omega,(v,1)}^{-n_\omega-1}(y)}, \\ \phi_{(v,1)}^{(2)}(x) &:= e^{S_{n_\omega+1} \varphi_\omega \circ \sigma_{\omega,(v,1)}^{-n_\omega-1}(x)} - \phi_{(v,1)}^{(1)}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \phi_{(v,1)}^{(1)} &= \inf_{y \in X_{\theta^{n_\omega+1}\omega}} e^{S_{n_\omega+1} \varphi_\omega \circ \sigma_{\omega,(v,1)}^{-n_\omega-1}(y)} \\ &= \inf_{y \in X_{\theta^{n_\omega+1}\omega}} \exp\left(\sum_{i=0}^{n_\omega} \varphi_{\theta^i \omega} \circ \sigma_\omega^i(\sigma_{\omega,(v,1)}^{-n_\omega-1}(y))\right) \\ &= \inf_{y \in X_{\theta^{n_\omega+1}\omega}} \exp\left(\varphi_{\theta^{n_\omega}\omega} \circ \sigma_\omega^{n_\omega}(\sigma_{\omega,(v,1)}^{-n_\omega-1}(y)) + \sum_{i=0}^{n_\omega-1} \varphi_{\theta^i \omega} \circ \sigma_\omega^i(\sigma_{\omega,(v,1)}^{-n_\omega-1}(y))\right). \end{aligned}$$

Como $\sigma_{\omega,(v,1)}^{-n_\omega-1}(y) \in [v, 1]_\omega$, temos que

$$\begin{aligned} \sigma_\omega^{n_\omega}(\sigma_{\omega,(v,1)}^{-n_\omega-1}(y)) &= \sigma_\omega^{n_\omega} \circ \left(\sigma_{\theta^{n_\omega}\omega} \circ \sigma_{\theta^{n_\omega-1}\omega} \circ \dots \circ \sigma_{\theta\omega} \circ \sigma_\omega|_{[v,1]_\omega}\right)^{-1} \\ &= \sigma_\omega^{n_\omega} \circ \underbrace{\sigma_{\omega,v_0}^{-1} \circ \sigma_{\theta\omega,v_1}^{-1} \circ \dots \circ \sigma_{\theta^{n_\omega-1}\omega,v_{n_\omega-1}}^{-1}}_{\sigma_{\omega,v}^{-n_\omega}} \circ \sigma_{\theta^{n_\omega}\omega,1}^{-1} = \sigma_{\theta^{n_\omega}\omega,1}^{-1}. \end{aligned}$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned}\sigma_{\omega,(v,1)}^{-n_\omega-1} &= \sigma_{\omega,v_0}^{-1} \circ \sigma_{\theta\omega,v_1}^{-1} \circ \dots \circ \sigma_{\theta^{n_\omega-1}\omega,v_{n_\omega-1}}^{-1} \circ \sigma_{\theta^{n_\omega}\omega,1}^{-1} \\ &= \left(\sigma_{\theta^{n_\omega-1}\omega} \circ \sigma_{\theta^{n_\omega-2}\omega} \circ \dots \circ \sigma_{\theta\omega} \circ \sigma_\omega \Big|_{[v]_\omega} \right)^{-1} \circ \sigma_{\theta^{n_\omega}\omega,1}^{-1} \\ &= \sigma_{\omega,v}^{-n_\omega} \circ \sigma_{\theta^{n_\omega}\omega,1}^{-1}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\phi_{(v,1)}^{(1)} &= \inf_{y \in X_{\theta^{n_\omega+1}\omega}} \exp \left(\varphi_{\theta^{n_\omega}\omega} \circ \sigma_{\theta^{n_\omega}\omega,1}^{-1}(y) + \sum_{i=0}^{n_\omega-1} \varphi_{\theta^i\omega} \circ \sigma_\omega^i(\sigma_{\omega,v}^{-n_\omega} \circ \sigma_{\theta^{n_\omega}\omega,1}^{-1}(y)) \right) \\ &= \inf_{y \in X_{\theta^{n_\omega+1}\omega}} \exp(\varphi_{\theta^{n_\omega}\omega} \circ \sigma_{\theta^{n_\omega}\omega,1}^{-1}(y) + S_{n_\omega}\varphi_\omega \circ \sigma_{\omega,v}^{-n_\omega} \circ \sigma_{\theta^{n_\omega}\omega,1}^{-1}(y)) \\ &\geq \inf_{y \in X_{\theta^{n_\omega+1}\omega}} \exp(\varphi_{\theta^{n_\omega}\omega} \circ \sigma_{\theta^{n_\omega}\omega,1}^{-1}(y)) \cdot \inf_{y \in X_{\theta^{n_\omega+1}\omega}} \exp(S_{n_\omega}\varphi_\omega \circ \sigma_{\omega,v}^{-n_\omega} \circ \sigma_{\theta^{n_\omega}\omega,1}^{-1}(y)) \\ &= C_{\theta^{n_\omega}\omega} \cdot \inf_{y \in [1]_{\theta^{n_\omega}\omega}} \exp[S_{n_\omega}\varphi_\omega(\sigma_{\omega,v}^{-n_\omega}(y))] \\ &\stackrel{(2.3)}{\geq} B_{\theta^{n_\omega}\omega}^{-1} C_{\theta^{n_\omega}\omega} \sup_{y \in [1]_{\theta^{n_\omega}\omega}} \exp[S_{n_\omega}\varphi_\omega(\sigma_{\omega,v}^{-n_\omega}(y))] .\end{aligned}\tag{2.8}$$

Dados $x, y \in X_{\theta^{n_\omega+1}\omega}$, definimos a medida de probabilidade $\mathcal{Q}_{x,y}^\omega$ sobre $X_\omega \times X_\omega$ por

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{x,y}^\omega &:= \sum_{v \in \mathcal{W}_\omega^{n_\omega}} \phi_{(v,1)}^{(1)} \delta_{(\sigma_{\omega,(v,1)}^{-n_\omega-1}(x), \sigma_{\omega,(v,1)}^{-n_\omega-1}(y))} \\ &\quad + \frac{1}{1 - \sum_{v \in \mathcal{W}_\omega^{n_\omega}} \phi_{(v,1)}^{(1)}} \cdot \sum_{a,b \in \mathcal{W}_\omega^{n_\omega+1}} \phi_a^{(2)}(x) \phi_b^{(2)}(y) \delta_{(\sigma_{\omega,a}^{-n_\omega-1}(x), \sigma_{\omega,b}^{-n_\omega-1}(y))}.\end{aligned}$$

Assumimos que $\mathcal{Q}_{x,y}^\omega$ é uma medida de probabilidade e que é um acoplamento das medidas $[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_x)$ e $[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_y)$ (veja páginas 353 e 354 de [4]). Por construção, temos novamente que

$$\tilde{d}_\omega(\sigma_{\omega,v}^{-n_\omega}(x), \sigma_{\omega,v}^{-n_\omega}(y)) \leq \alpha_\omega d_r(\sigma_{\omega,v}^{-n_\omega}(x), \sigma_{\omega,v}^{-n_\omega}(y)) \leq \alpha_\omega r^{n_\omega} < 1,\tag{2.9}$$

para cada $v \in \mathcal{W}_\omega^{n_\omega}$ e $x, y \in [1]_{\theta^{n_\omega}\omega}$. Assim, por (2.8) e $[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega}(\mathbb{1}_{X_\omega}) = \mathbb{1}_{X_{\theta^{n_\omega}\omega}}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{x,y}^\omega(\{(x', y') : \tilde{d}_\omega(x', y') \leq \alpha_\omega r^{n_\omega}\}) &= \sum_{v \in \mathcal{W}_\omega^{n_\omega}} \phi_{(v,1)}^{(1)} + \frac{1}{1 - \sum_{v \in \mathcal{W}_\omega^{n_\omega}} \phi_{(v,1)}^{(1)}} \cdot \sum_{a,b \in \mathcal{W}_\omega^{n_\omega+1}} \phi_a^{(2)}(x) \phi_b^{(2)}(y) \\ &\geq B_{\theta^{n_\omega}\omega}^{-1} C_{\theta^{n_\omega}\omega} \sum_{v \in \mathcal{W}_\omega^{n_\omega}} \sup_{y \in [1]_{\theta^{n_\omega}\omega}} \exp[S_{n_\omega}\varphi_\omega(\sigma_{\omega,v}^{-n_\omega}(y))] \\ &\geq B_{\theta^{n_\omega}\omega}^{-1} C_{\theta^{n_\omega}\omega} \sup_{y \in [1]_{\theta^{n_\omega}\omega}} \sum_{v \in \mathcal{W}_\omega^{n_\omega}} \exp[S_{n_\omega}\varphi_\omega(\sigma_{\omega,v}^{-n_\omega}(y))] \\ &= B_{\theta^{n_\omega}\omega}^{-1} C_{\theta^{n_\omega}\omega} \sup_{y \in [1]_{\theta^{n_\omega}\omega}} [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega}(\mathbb{1}_{X_\omega})(y) = B_{\theta^{n_\omega}\omega}^{-1} C_{\theta^{n_\omega}\omega}.\end{aligned}$$

Agora, vamos usar essa estimacão para obter uma contrao uniforme de $\tilde{D}_\omega(f)$. Para isto, defina

$$\Delta^\omega := \{(x', y') \in X_\omega^2 : \tilde{d}_\omega(x', y') \leq \alpha_\omega r^{n_\omega}\}.$$

Então, para $x, y \in X_{\theta^{n_\omega+1\omega}}$ temos que

$$\begin{aligned}
W_\omega([\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_x), [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_y)) &\leq \int_{\Delta^\omega} \tilde{d}_\omega(x', y') d\mathcal{Q}_{x,y}^\omega(x', y') \\
&\quad + \int_{X_\omega^2 \setminus \Delta^\omega} \tilde{d}_\omega(x', y') d\mathcal{Q}_{x,y}^\omega(x', y') \\
&\stackrel{(2.9)}{\leq} \alpha_\omega r^{n_\omega} \mathcal{Q}_{x,y}^\omega(\Delta^\omega) + 1 - \mathcal{Q}_{x,y}^\omega(\Delta^\omega) \\
&= 1 - (1 - \alpha_\omega r^{n_\omega}) \mathcal{Q}_{x,y}^\omega(\Delta^\omega) \\
&\leq 1 - (1 - \alpha_\omega r^{n_\omega}) B_{\theta^{n_\omega\omega}}^{-1} C_{\theta^{n_\omega\omega}} =: s_{\theta^{n_\omega\omega}} < 1.
\end{aligned}$$

Pela dualidade de Monge-Kantorovich, para $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ com $\tilde{D}_\omega(f) < \infty$,

$$\begin{aligned}
|[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1}(f_\omega)(x) - [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1}(f_\omega)(y)| &= \left| \int [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1}(f_\omega) d\delta_x - \int [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1}(f_\omega) d\delta_y \right| \\
&= \left| \int f_\omega d[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_x) - \int f_\omega d[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_y) \right| \\
&= \tilde{D}_\omega(f) \left| \int \frac{f_\omega}{\tilde{D}_\omega(f)} d[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_x) - \int \frac{f_\omega}{\tilde{D}_\omega(f)} d[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_y) \right| \\
&\leq \tilde{D}_\omega(f) W_\omega([\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_x), [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_y)) \\
&\leq \tilde{D}_\omega(f) s_{\theta^{n_\omega\omega}}.
\end{aligned}$$

Pelo feito anteriormente, temos que

$$\frac{|[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1}(f_\omega)(x) - [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1}(f_\omega)(y)|}{\tilde{d}_{\theta^{n_\omega+1\omega}}(x, y)} \leq \begin{cases} \beta \tilde{D}_\omega(f) & \text{se } \tilde{d}_{\theta^{n_\omega+1\omega}}(x, y) < 1 \\ s_{\theta^{n_\omega\omega}} \tilde{D}_\omega(f) & \text{se } \tilde{d}_{\theta^{n_\omega+1\omega}}(x, y) = 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

Assim, para $t_\omega = \max\{\beta, s_{\theta^{n_\omega\omega}}\}$ temos que

$$\tilde{D}_{\theta^{n_\omega+1\omega}}([\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1}(f_\omega)) \leq t_\omega \cdot \tilde{D}_\omega(f),$$

o que prova a afirmação [i] do teorema. Para provar [ii] notemos que a dualidade de Monge-Kantorovich implica que

$$\begin{aligned}
W_\omega([\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_x), [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_y)) &= \sup_{\tilde{D}_\omega(f) \leq 1} \left\{ \int f d[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_x) - \int f d[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_y) \right\} \\
&= \sup_{\tilde{D}_\omega(f) \leq 1} \left\{ \int [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1}(f) d\delta_x - \int [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1}(f) d\delta_y \right\} \\
&= \sup_{\tilde{D}_\omega(f) \leq 1} \left\{ [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1}(f)(x) - [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1}(f)(y) \right\} \\
&\stackrel{(2.10)}{\leq} t_\omega \tilde{d}_{\theta^{n_\omega+1\omega}}(x, y) \tilde{D}_\omega(f) \leq t_\omega \tilde{d}_{\theta^{n_\omega+1\omega}}(x, y). \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Já que $\mu_{\theta^{n_\omega+1\omega}}$ e $\nu_{\theta^{n_\omega+1\omega}}$ são medidas de probabilidade sobre $X_{\theta^{n_\omega+1\omega}}$, sabemos que existe um acoplamento $\mathcal{Q} \in \Pi(\mu_{\theta^{n_\omega+1\omega}}, \nu_{\theta^{n_\omega+1\omega}})$ (um transporte otimal) tal que

$$W_{\theta^{n_\omega+1\omega}}(\mu_{\theta^{n_\omega+1\omega}}, \nu_{\theta^{n_\omega+1\omega}}) = \int \tilde{d}_{\theta^{n_\omega+1\omega}}(x, y) d\mathcal{Q}(x, y).$$

Além disso, seja $P_{x,y} \in \Pi([\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_x), [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_y))$ um transporte otimal das medidas $[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_x)$ e $[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_y)$. Utilizando uma construção semelhante à feita para $\mathcal{Q}_{x,y}^\omega$, pode-se mostrar que dado $\epsilon > 0$ existem $\delta > 0$ e um transporte $P_{x,y}^\epsilon \in \Pi([\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_{x'}), [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_{y'}))$ construído a partir de $P_{x,y}$ de um modo contínuo, tal que

$$\left| \int \tilde{d}_{\theta^{n_\omega+1}\omega}(x, y) dP_{x,y} - \int \tilde{d}_{\theta^{n_\omega+1}\omega}(x, y) dP_{x,y}^\epsilon \right| \leq \epsilon, \quad \forall x', y' : d_r(x, x'), d_r(y, y') < \delta.$$

Em particular, $(x', y') \mapsto W_\omega([\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_{x'}), [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_{y'}))$ é contínua e existe uma família localmente contínua de acoplamentos $\{P_{x',y'}^\epsilon : x', y' \in X_{\theta^{n_\omega+1}\omega}\}$, a qual está ϵ próxima a tal métrica de Wasserstein. Seja \mathcal{Q}^ϵ definida por $d\mathcal{Q}^\epsilon(x, y) := P_{x,y}^\epsilon d\mathcal{Q}(x, y)$, então pode-se mostrar facilmente que $\mathcal{Q}^\epsilon \in \Pi([\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\mu_{\theta^{n_\omega+1}\omega}), [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\nu_{\theta^{n_\omega+1}\omega}))$. Assim,

$$\begin{aligned} W_\omega([\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\mu_{\theta^{n_\omega+1}\omega}), [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\nu_{\theta^{n_\omega+1}\omega})) &= \int \tilde{d}_{\theta^{n_\omega+1}\omega}(x, y) d\mathcal{Q}^\epsilon(x, y) \\ &\leq \iint \tilde{d}_{\theta^{n_\omega+1}\omega}(x, y) dP_{x,y} d\mathcal{Q}(x, y) + \epsilon \\ &= \int W_\omega([\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_x), [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega+1,*}(\delta_y)) d\mathcal{Q}(x, y) \\ &\quad + \epsilon \\ &\stackrel{(2.11)}{\leq} t_\omega \int \tilde{d}_{\theta^{n_\omega+1}\omega}(x, y) d\mathcal{Q}(x, y) + \epsilon \\ &= t_\omega W_{\theta^{n_\omega+1}\omega}(\mu_{\theta^{n_\omega+1}\omega}, \nu_{\theta^{n_\omega+1}\omega}) + \epsilon. \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos que vale a afirmação [ii]. #

13 Observação: A prova revela que o método de acoplamento contrasta com os métodos espectrais (como aquele usado na prova do teorema de Perron, mas adaptado para fibrados - veja [1]), pois é imediatamente aplicável a ferramentas sobre fibrados.

9 Corolário: Sejam $(X, \sigma, \Omega, \mathbb{P}, \theta)$ uma CMRC e um potencial $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ definidos como antes e tais que $\mathcal{L}_\varphi^\omega(\mathbb{1}_{X_\omega}) = \mathbb{1}_{X_{\theta\omega}}$ para quase todo $\omega \in \Omega$. Então existem constantes $t \in (0, 1)$, $c > 0$ e sequência aleatória $\{l_n^\omega\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{N}$ tais que

i Dadas medidas de probabilidade randomizadas μ, ν e $n \in \mathbb{N}$,

$$W_\omega([\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{l_n^\omega,*}(\mu_{\theta^{l_n^\omega}\omega}), [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{l_n^\omega,*}(\nu_{\theta^{l_n^\omega}\omega})) \leq c t^n W_{\theta^{l_n^\omega}\omega}(\mu_{\theta^{l_n^\omega}\omega}, \nu_{\theta^{l_n^\omega}\omega}),$$

para quase todo $\omega \in \Omega$.

ii Dada uma aplicação fibrada f e $n \in \mathbb{N}$,

$$D([\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{l_n^\omega}(f_\omega)) \leq c t^n D_\omega(f),$$

para quase todo $\omega \in \Omega$.

Se B_ω é uniformemente limitada, então o corolário vale para $c = 2 \operatorname{ess-sup}_{\omega \in \Omega} B_\omega$.

Prova: Aplicando o teorema 8, escolhemos $\beta = 1/2$, $C > 0$ e $B \geq 1$ tais que $\mathbb{P}(\Omega_{B,C}) > 0$, onde

$$\Omega_{B,C} := \{\omega \in \Omega : B_\omega \leq B, C_\omega \geq C\}.$$

Note que isto implica que $\alpha_\omega = 2B_\omega$. Redefina

$$n_\omega := \min \{n \in \mathbb{N} : \theta^n \omega \in \Omega_{B,C}, n \geq \lfloor -\log_r(2\alpha_\omega) \rfloor + 1\}.$$

que existe e é finito pela ergodicidade de θ . De (2.7) segue que

$$t := 1 - \frac{C}{2B} \geq 1 - \frac{C_\omega}{2B} \geq 1 - \frac{1}{2B} \geq \frac{1}{2} = \beta,$$

além disso, por construção temos que $\alpha_\omega r^{n_\omega} < 1/2$, então

$$t \geq 1 - \frac{C_{\theta^{n_\omega} \omega}}{2B_{\theta^{n_\omega} \omega}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{C_{\theta^{n_\omega} \omega}}{B_{\theta^{n_\omega} \omega}} \geq 1 - (1 - \alpha_\omega r^{n_\omega}) \frac{C_{\theta^{n_\omega} \omega}}{B_{\theta^{n_\omega} \omega}} = s_{\theta^{n_\omega} \omega},$$

e portanto, concluímos que $t \geq t_\omega$ para quase todo $\omega \in \Omega$. A sequência $\{l_n^\omega\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ é definida recursivamente como segue:

$$\begin{aligned} l_0^\omega &:= n_\omega \\ l_n^\omega &:= l_{n-1}^\omega + n_{\theta^{l_{n-1}^\omega + 1} \omega} + 1. \end{aligned}$$

Assim, considerando $\omega_i := \theta^{l_i^\omega + 1} \omega$ temos que

$$\theta^{l_n^\omega} \omega = \theta^{l_{n-1}^\omega + n_{\omega_{n-1}} + 1} \omega = \theta^{n_{\omega_{n-1}}} (\theta^{l_{n-1}^\omega + 1} \omega) \in \Omega_{B,C}.$$

Em particular,

$$\alpha_{\theta^{l_n^\omega} \omega} = 2B_{\theta^{l_n^\omega} \omega} \leq 2B =: c.$$

Agora, notemos que

$$l_n^\omega = n + n_\omega + \sum_{i=0}^{n-1} n_{\omega_i}, \quad \forall n \geq 1,$$

e notemos que

$$[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{l_n^\omega, *} (\mu_{\theta^{l_n^\omega} \omega}) = [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega + 1, *} \circ [\mathcal{L}_\varphi^{\theta^{n_\omega + 1} \omega}]^{n_{\omega_0} + 1, *} \circ \dots \circ [\mathcal{L}_\varphi^{\theta^{l_{n-1}^\omega + 1} \omega}]^{n_{\omega_{n-1}}, *} (\mu_{\theta^{l_n^\omega} \omega}).$$

Além disso, para uma aplicação fibrada f vale que

$$[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{l_n^\omega} (f_\omega) = [\mathcal{L}_\varphi^{\theta^{l_{n-1}^\omega + 1} \omega}]^{n_{\omega_{n-1}}} \circ [\mathcal{L}_\varphi^{\theta^{l_{n-2}^\omega + 1} \omega}]^{n_{\omega_{n-2}} + 1} \circ \dots \circ [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n_\omega + 1} (f_\omega).$$

Pela afirmação [ii] do teorema 8, temos que

$$\begin{aligned} W_\omega([\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{l_n^\omega, *} (\mu_{\theta^{l_n^\omega} \omega}), [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{l_n^\omega, *} (\nu_{\theta^{l_n^\omega} \omega})) &\leq t_\omega t_{\omega_0} t_{\omega_1} \cdot \dots \cdot t_{\omega_{n-2}} \cdot \\ &W_{\omega_{n-1}}([\mathcal{L}_\varphi^{\theta^{l_{n-1}^\omega + 1} \omega}]^{n_{\omega_{n-1}}, *} (\mu_{\theta^{l_n^\omega} \omega}), [\mathcal{L}_\varphi^{\theta^{l_{n-1}^\omega + 1} \omega}]^{n_{\omega_{n-1}}, *} (\nu_{\theta^{l_n^\omega} \omega})) \\ &\leq t^n \cdot \\ &W_{\omega_{n-1}}([\mathcal{L}_\varphi^{\theta^{l_{n-1}^\omega + 1} \omega}]^{n_{\omega_{n-1}}, *} (\mu_{\theta^{l_n^\omega} \omega}), [\mathcal{L}_\varphi^{\theta^{l_{n-1}^\omega + 1} \omega}]^{n_{\omega_{n-1}}, *} (\nu_{\theta^{l_n^\omega} \omega})) \\ &\leq c t^n W_{\theta^{l_n^\omega} \omega}(\mu_{\theta^{l_n^\omega} \omega}, \nu_{\theta^{l_n^\omega} \omega}). \end{aligned}$$

Analogamente, mostramos que

$$D([\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{l_n^\omega}(f_\omega)) \leq c t^n D_\omega(f),$$

e segue o corolário. #

Com esse resultado é possível expressar a contração fibrada mais explicitamente.

10 Corolário: *Sejam $(X, \sigma, \Omega, \mathbb{P}, \theta)$ uma CMRC e um potencial $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ definidos como antes e tais que $\mathcal{L}_\varphi^\omega(\mathbf{1}_{X_\omega}) = \mathbf{1}_{X_{\theta\omega}}$ para quase todo $\omega \in \Omega$. Então existe uma constante $s \in (0, 1)$ e uma variável aleatória $c^* : \Omega \rightarrow (0, \infty)$ tais que*

$$W_\omega([\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n,*}(\mu_{\theta^n\omega}), [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n,*}(\nu_{\theta^n\omega})) \leq c_\omega^* s^n W_{\theta^n\omega}(\mu_{\theta^n\omega}, \nu_{\theta^n\omega}),$$

onde μ, ν são medidas de probabilidade randomizadas e $n \in \mathbb{N}$.

Prova: Como na prova do corolário anterior, considere o conjunto de medida positiva $\Omega_{B,C}$ e a sequência aleatória $\{l_n^\omega\}_{n \in \mathbb{N}}$. Tomando $t = 1 - C/(2B)$ como antes, do corolário 9 tem-se que

$$W_\omega([\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{l_n^\omega,*}(\mu_{\theta^{l_n^\omega}\omega}), [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{l_n^\omega,*}(\nu_{\theta^{l_n^\omega}\omega})) \leq 2B t^n W_{\theta^{l_n^\omega}\omega}(\mu_{\theta^{l_n^\omega}\omega}, \nu_{\theta^{l_n^\omega}\omega}).$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, escolha $k \in \mathbb{N}$ tal que $l_k^\omega \leq n \leq l_{k+1}^\omega$. Se $K := \lfloor -\log(2B)/\log t \rfloor + 1$, aplicando o teorema ergódico duas vezes e a fórmula de retorno de Kac (veja [13]), tem-se que

$$\frac{1}{n} \log t^k = \frac{l_k^\omega}{n} \frac{k}{l_k^\omega} \log t \xrightarrow{k, n \rightarrow \infty} \frac{1}{K \mathbb{P}(\Omega_{B,C})} \log t.$$

Por outro lado, notemos que se trocamos k por $k + 1$ o limite não muda. Assim, para cada $s \in (0, 1)$ com $\log s > \log t / [K \mathbb{P}(\Omega_{B,C})]$, existe uma variável aleatória c^* tal que

$$W_\omega([\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n,*}(\mu_{\theta^n\omega}), [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{n,*}(\nu_{\theta^n\omega})) \leq c_\omega^* s^n W_{\theta^n\omega}(\mu_{\theta^n\omega}, \nu_{\theta^n\omega}),$$

o que mostra o corolário. #

2.4 Uma versão aleatória do teorema de Ruelle

15 Definição: *Dada uma aplicação fibrada $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz, para quase todo $\omega \in \Omega$ defina*

$$\|g_\omega\|_L^\omega := D_\omega(g) + \|g_\omega\|_\infty = D_\omega(g) + \sup_{x \in X_\omega} |g_\omega(x)|,$$

a norma aleatória de Lipschitz.

11 Teorema: (Stadlbauer, [14]) *Sejam $(X, \sigma, \Omega, \mathbb{P}, \theta)$ uma CMRC e um potencial φ definidos como antes. Então existe uma variável aleatória $\lambda : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ com $\int \log \lambda d\mathbb{P} < \infty$, uma aplicação fibrada $h = \{h_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ e uma medida de probabilidade randomizada $\mu = \{\mu_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ tais que valem:*

i Para quase todo $\omega \in \Omega$, $h_\omega : X_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função estritamente positiva que satisfaz

$$\mathcal{L}_\varphi^\omega(h_\omega) = \lambda_\omega h_{\theta\omega} \quad \text{e} \quad \int h_\omega d\mu_\omega = 1 ;$$

ii Existe $M > 0$ tal que $|h_\omega(x)| \leq M$ para quase todo $x \in X_\omega$. Além disto, existe uma variável aleatória $B : \Omega \rightarrow [1, \infty)$ com $\int \log B d\mathbb{P} < \infty$ tal que a função $\log h_\omega$ é 1-Hölder contínua em relação às constantes $B_\omega - 1$ e a mesma constante de Hölder r de φ ;

iii Para quase todo $\omega \in \Omega$, tem-se que

$$[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^*(\mu_{\theta\omega}) = \lambda_\omega \mu_\omega ;$$

iv A medida ν de probabilidade definida por

$$\nu(A) = \iint_A h_\omega d\mu_\omega d\mathbb{P}, \quad \forall A \subset X \text{ mensurável},$$

é σ -invariante e ergódica;

v μ é a única medida de probabilidade randomizada tal que

$$[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^*(\mu_{\theta\omega}) = \lambda_\omega \mu_\omega, \quad \text{para quase todo } \omega \in \Omega.$$

Além disso, h é a única aplicação fibrada não trivial positiva (a unicidade com exceção de mutiplicação por escalar) tal que

$$\mathcal{L}_\varphi^\omega(h_\omega) = \lambda_\omega h_{\theta\omega}$$

para quase todo $\omega \in \Omega$;

vi Existem $t \in (0, 1)$, $c > 0$ e uma seqüência aleatória $\{l_n^\omega\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ tais que para cada aplicação fibrada $f = \{f_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ Lipschitz, cada $n \in \mathbb{N}$ e quase todo $\omega \in \Omega$, tem-se que

$$\left\| \frac{[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{l_n^\omega}(f_\omega)}{\Lambda_{l_n^\omega}(\omega) h_{\theta^{l_n^\omega}\omega}} - \int f_\omega d\mu_\omega \right\|_L^{\theta^{l_n^\omega}\omega} \leq 2c t^n D_\omega(f) ;$$

vii Existem $t \in (0, 1)$, uma variável aleatória $K : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ e uma seqüência $\{l_n^\omega\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ tais que para cada aplicação fibrada $f = \{f_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ Lipschitz, cada $n \in \mathbb{N}$ e quase todo $\omega \in \Omega$, tem-se que

$$\left\| \frac{[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{l_n^\omega}(f_\omega)}{\Lambda_{l_n^\omega}(\omega) h_{\theta^{l_n^\omega}\omega}} - \int f_\omega d\mu_\omega \right\|_L^{\theta^{l_n^\omega}\omega} \leq c K_\omega \cdot t^n \|f_\omega\|_L^\omega ;$$

viii Existem $s \in (0, 1)$ e duas variáveis aleatórias $K, c^* : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ tais que para cada aplicação fibrada $f = \{f_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ Lipschitz, cada $n \in \mathbb{N}$ e quase todo $\omega \in \Omega$, tem-se que

$$\left\| \frac{[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^n(f_\omega)}{\Lambda_n(\omega) h_{\theta^n \omega}} - \int f_\omega d\mu_\omega \right\|_L^{\theta^n \omega} \leq c_\omega^* K_\omega s^n \|f_\omega\|_L^\omega.$$

Para provar tal teorema precisamos indicar alguns resultados previos.

12 Teorema: ([11], teo. 4.3) *Sejam $(X, \sigma, \Omega, \mathbb{P}, \theta)$ uma CMRC e um potencial φ definidos como antes. Então existem uma variável aleatória $\lambda : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ com $\int \log \lambda d\mathbb{P} < \infty$ e uma medida de probabilidade randomizada $\{\mu_\omega\}_{\omega \in \Omega}$, tal que*

$$\frac{d\mu_\omega}{d(\mu_{\theta\omega} \circ \sigma_\omega)}(x) = \lambda_\omega^{-1} e^{\varphi_\omega(x)}, \quad \forall x \in X_\omega,$$

e para cada $\omega \in \Omega$.

14 Observação: *Sejam $a \in \mathcal{W}_\omega^1$ e $A \subset [a]_\omega$, então o teorema anterior implica que*

$$\mu_{\theta\omega}(\sigma_\omega(A)) = \lambda_\omega \int_A e^{-\varphi_\omega} d\mu_\omega,$$

para quase todo $\omega \in \Omega$. Assim, $\{\mu_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ é uma medida aleatória conforme. Notamos que a conformidade neste caso dá uma caracterização de $\{\mu_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ em relação aos autovalores do operador $[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^*$, o qual atua sobre o espaço de medidas de Radon (ver o teorema 6.1 de [7]), isto é,

$$[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^*(\mu_{\theta\omega}) = \lambda_\omega \mu_\omega.$$

15 Observação: *É possível reescrever o teorema anterior em função da pressão de Gurevich $P_G(\varphi)$ adaptada para aplicações fibradas, mas a proposição 5.2 em [7] garante que sob as nossas condições temos que*

$$P_G(\varphi) = \int \log \lambda_\omega d\mathbb{P}(\omega),$$

portanto, podemos enunciar os nossos resultados sem introduzir o conceito de pressão.

16 Observação: *Seja $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathcal{W}_\omega^n$. Da prova do teorema 12 em [11] pode-se deduzir uma estimativa para $\mu_\omega([a]_\omega)$ (veja observação 4.6 em [11]). Defina*

$$\Lambda_n(\omega) := \lambda_\omega \cdot \lambda_{\theta\omega} \cdot \dots \cdot \lambda_{\theta^{n-1}\omega}.$$

Assim, para quase todo $\omega \in \Omega$ e cada $n \in \mathbb{N}$,

$$(B_{\theta^n \omega})^{-1} \leq \Lambda_n(\omega) \frac{\mu_\omega([a]_\omega)}{e^{S_n \varphi_\omega(x)}} \leq B_{\theta^n \omega}, \quad \forall x \in X_\omega,$$

com B_ω definido como antes (ver página 25). O anterior é chamado **propriedade de Gibbs** da medida $\{\mu_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ numa CMRC.

Prova: [do teorema 11] A prova de [iii] decorre da observação 15 e [iv] segue da proposição 7.3 em [11], portanto, podemos assumir que λ e μ são conhecidos. Primeiro vamos provar as condições de regularidade [i] e [ii] para uma aplicação fibrada h que vamos construir como segue:

(1) *Construção de h_ω .* Para $\omega \in \Omega$ e $k \in \mathbb{N}$ defina

$$f_{\omega,k} := \frac{[\mathcal{L}_\varphi^{\theta^{-k}\omega}]^k(\mathbb{1}_{X_{\theta^{-k}\omega}})}{\Lambda_k(\theta^{-k}\omega)}.$$

Dados $a \in \mathcal{W}_\omega^1$ e $x, y \in [a]_\omega$, por um argumento similar ao dado na primeira parte da prova do teorema 8, temos que

$$\begin{aligned} |f_{\omega,k}(x) - f_{\omega,k}(y)| &= \Lambda_k(\theta^{-k}\omega)^{-1} |[\mathcal{L}_\varphi^{\theta^{-k}\omega}]^k(\mathbb{1}_{X_{\theta^{-k}\omega}})(x) - [\mathcal{L}_\varphi^{\theta^{-k}\omega}]^k(\mathbb{1}_{X_{\theta^{-k}\omega}})(y)| \\ &\leq \Lambda_k(\theta^{-k}\omega)^{-1} (B_\omega - 1) d_r(x, y) [\mathcal{L}_\varphi^{\theta^{-k}\omega}]^k(\mathbb{1}_{X_{\theta^{-k}\omega}})(y) \\ &= f_{\omega,k}(y) (B_\omega - 1) d_r(x, y), \end{aligned}$$

pela desigualdade anterior e porque $\int \log B_\omega d\mathbb{P} < \infty$ (ver definição de B_ω e desigualdade (2.2)), segue que $\log f_{\omega,k}$ é 1-Hölder contínuo com parâmetro $B_\omega - 1$, de fato, temos que

$$|\log f_{\omega,k}(x) - \log f_{\omega,k}(y)| = \left| \log \frac{f_{\omega,k}(x)}{f_{\omega,k}(y)} \right| \leq \left| \frac{f_{\omega,k}(x)}{f_{\omega,k}(y)} - 1 \right| \leq (B_\omega - 1) d_r(x, y).$$

Por outro lado, pela observação 16, para quase todo $\omega \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathcal{W}_{\theta^{-k}\omega}^k$ e $x \in [a]_\omega$ tem-se que

$$\Lambda_k(\theta^{-k}\omega)^{-1} e^{S_k \varphi_{\theta^{-k}\omega} \circ \sigma_{\theta^{-k}\omega, a}^{-k}(x)} \leq B_\omega \mu_{\theta^{-k}\omega}([a]_{\theta^{-k}\omega}).$$

Deste modo, temos que

$$\begin{aligned} \frac{[\mathcal{L}_\varphi^{\theta^{-k}\omega}]^k(\mathbb{1}_{X_{\theta^{-k}\omega}})(x)}{\Lambda_k(\theta^{-k}\omega)} &= \Lambda_k(\theta^{-k}\omega)^{-1} \sum_{v \in \mathcal{W}_{\theta^{-k}\omega}^k} e^{S_k \varphi_{\theta^{-k}\omega} \circ \sigma_{\theta^{-k}\omega, v}^{-k}(x)} \leq B_\omega \sum_{v \in \mathcal{W}_{\theta^{-k}\omega}^k} \mu_{\theta^{-k}\omega}([v]_{\theta^{-k}\omega}) \\ &= B_\omega \mu_{\theta^{-k}\omega}(X_{\theta^{-k}\omega}) = B_\omega, \end{aligned}$$

e assim obtemos que $f_{\omega,k}(x) \leq B_\omega$ para quase todo $\omega \in \Omega$ e $k \in \mathbb{N}$. Como consequência do corolário 4.7 em [11], temos que existe $\Omega^* \subset \Omega$ tal que $f_{\omega,k}(x)$ é limitado por embaixo sempre que $\theta^{-k}\omega \in \Omega^*$. Assim, defina a aplicação fibrada $h = \{h_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ tal que

$$h_\omega(x) := \liminf_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \theta^{-k}\omega \in \Omega^*}} f_{\omega,k}(x), \quad \forall x \in X_\omega.$$

Notemos que h_ω é limitada por cima e por baixo, para quase todo $\omega \in \Omega$ (a limitação depende de ω).

(2) *Propriedades de h_ω .* Notemos que para cada $x \in X_\omega$ temos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_\varphi^\omega(h_\omega)(x) &\stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \theta^{-k}\omega \in \Omega^*}} \mathcal{L}_\varphi^\omega(f_{\omega,k})(x) = \liminf_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \theta^{-k}\omega \in \Omega^*}} \mathcal{L}_\varphi^\omega \left(\frac{[\mathcal{L}_\varphi^{\theta^{-k}\omega}]^k(\mathbb{1}_{X_{\theta^{-k}\omega}})}{\Lambda_k(\theta^{-k}\omega)} \right) (x) \\
 &= \lambda_\omega \liminf_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \theta^{-k}\omega \in \Omega^*}} \frac{[\mathcal{L}_\varphi^{\theta^{-k}\omega}]^{k+1}(\mathbb{1}_{X_{\theta^{-k}\omega}})(x)}{\Lambda_{k+1}(\theta^{-k}\omega)} \\
 &= \lambda_\omega \liminf_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \theta^{-k+1}\omega \in \Omega^*}} \frac{[\mathcal{L}_\varphi^{\theta^{-k+1}\omega}]^k(\mathbb{1}_{X_{\theta^{-k+1}\omega}})(x)}{\Lambda_k(\theta^{-k+1}\omega)} \\
 &= \lambda_\omega \liminf_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \theta^{-k+1}\omega \in \Omega^*}} f_{\theta\omega,k}(x) = \lambda_\omega h_{\theta\omega}(x),
 \end{aligned}$$

e assim concluímos que $\mathcal{L}_\varphi^\omega(h_\omega) \leq \lambda_\omega h_{\theta\omega}$. Desta forma, para $\omega \in \Omega$ e $n \in \mathbb{N}$, pela conformidade de μ tem-se que

$$\begin{aligned}
 \int h_\omega d\mu_\omega &= \int f_{\theta^n\omega,n} d\mu_{\theta^n\omega} = \int \Lambda_n(\omega)^{-1} [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^n(h_\omega) d\mu_{\theta^n\omega} \\
 &\leq \int \Lambda_n(\omega)^{-1} \mathcal{L}_\varphi^{\theta^{n-1}\omega} \circ \dots \circ \mathcal{L}_\varphi^{\theta^2\omega} \circ \mathcal{L}_\varphi^{\theta\omega}(\lambda_\omega h_{\theta\omega}) d\mu_{\theta^n\omega} \\
 &\leq \int \Lambda_n(\omega)^{-1} \lambda_\omega \cdot \lambda_{\theta\omega} \mathcal{L}_\varphi^{\theta^{n-1}\omega} \circ \dots \circ \mathcal{L}_\varphi^{\theta^2\omega}(h_{\theta^2\omega}) d\mu_{\theta^n\omega} \\
 &\leq \int \Lambda_n(\omega)^{-1} \lambda_\omega \cdot \lambda_{\theta\omega} \cdot \dots \cdot \lambda_{\theta^{n-1}\omega} h_{\theta^n\omega} d\mu_{\theta^n\omega} \\
 &= \int h_{\theta^n\omega} d\mu_{\theta^n\omega} \leq B_{\theta^n\omega}.
 \end{aligned}$$

Pela ergodicidade da transformação θ , segue que $\int h_\omega d\mu_\omega \leq \text{ess-inf}_{\omega \in \Omega} B_\omega$. Pelo mesmo argumento dado na prova de proposição 7.3 em [7], concluímos que $\mathcal{L}_\varphi^\omega(h_\omega) = \lambda_\omega h_{\theta\omega}$. Das estimações anteriores também temos que $\{\log h_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ é 1-Hölder contínua com parâmetro $B_\omega - 1$ e que $\|h_\omega\|_\infty < B_\omega$ para quase todo $\omega \in \Omega$. Para ver que $h_\omega > 0$, segue da sua Hölder continuidade que

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\theta^{-1}\omega} h_\omega(x) &= \mathcal{L}_\varphi^{\theta^{-1}\omega}(h_{\theta^{-1}\omega})(x) = \sum_{\sigma_{\theta^{-1}\omega}(y)=x} e^{\varphi_{\theta^{-1}\omega}(y)} h_{\theta^{-1}\omega}(y) \\
 &\geq \inf_{y \in [1]_{\theta^{-1}\omega}} e^{\varphi_{\theta^{-1}\omega}(y)} h_{\theta^{-1}\omega}(y) > 0.
 \end{aligned}$$

Assim, $\inf h_\omega > 0$ para quase todo $\omega \in \Omega$. Combinando as limitações superior e inferior obtidas anteriormente, e pela positividade de $\mathcal{L}_\varphi^\omega$, temos que $0 < \inf h_\omega \leq \sup h_\omega < \infty$, para quase todo $\omega \in \Omega$. Isto prova [i] e [ii] do teorema 11.

(3) *Normalizando o operador.* A parte [ii] implica que $\log h_\omega$ é 1-Hölder contínua, e portanto, $\log h_{\theta\omega} \circ \sigma_\omega$ é 2-Hölder contínua. Já que h_ω é limitada por cima e por baixo, temos que $\text{var}_n^\omega(\log h_{\theta\omega} \circ \sigma_\omega(x)) < \infty$ para quase todo $x \in X_\omega$. Defina o potencial $\tilde{\varphi}$ como segue,

$$\tilde{\varphi}_\omega(x) := \varphi_\omega(x) + \log h_\omega(x) - \log h_{\theta\omega} \circ \sigma_\omega(x) - \log \lambda_\omega,$$

para cada $x \in X_\omega$ e quase todo $\omega \in \Omega$. Notemos que este potencial cumpre com a propriedade $(\hat{1})$, de fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^\omega(f)(x) &= \sum_{\sigma_\omega(y)=x} e^{\tilde{\varphi}_\omega(y)} f(y) = \frac{1}{\lambda_\omega} \sum_{\sigma_\omega(y)=x} e^{\varphi_\omega(y)} \frac{h_\omega(y)}{h_{\theta\omega} \circ \sigma_\omega(y)} f(y) \\ &= \frac{1}{\lambda_\omega h_{\theta\omega}(x)} \sum_{\sigma_\omega(y)=x} e^{\varphi_\omega(y)} h_\omega(y) f(y) \\ &= \frac{1}{\lambda_\omega h_{\theta\omega}(x)} \mathcal{L}_\varphi^\omega(h_\omega f)(x), \end{aligned}$$

e portanto, concluímos que $\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^\omega(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Deste modo, pode-se mostrar indutivamente que

$$\Lambda_n(\omega) h_{\theta^n \omega} [\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^\omega]^n(f) = [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^n(h_\omega f) \quad (2.12)$$

para quase todo $\omega \in \Omega$, cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $f : X_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ função Lipschitz e limitada. Dado que $\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^\omega(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, para a medida $\nu = \{\nu_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ dada por $d\nu_\omega = h_\omega d\mu_\omega$, temos que $[\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^\omega]^*(\nu_{\theta\omega}) = \nu_\omega$. Sejam $t \in (0, 1)$, $c > 0$ e $\{l_n^\omega\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{N}$ como no corolário 9. Para uma função $f : X_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz com $\tilde{D}(f) \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X_{\theta^{l_n^\omega} \omega}$, pela dualidade de Monge-Kantorovich e pela parte [i] do corolário 9, tem-se que

$$\begin{aligned} \left| [\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^\omega]^{l_n^\omega}(f)(x) - \int f d\nu_\omega \right| &= \left| \int f d[\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^\omega]^{l_n^\omega, *}(\delta_x) - \int f d[\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^\omega]^{l_n^\omega, *}(\nu_{\theta^{l_n^\omega} \omega}) \right| \\ &\leq W_\omega([\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^\omega]^{l_n^\omega, *}(\delta_x), [\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^\omega]^{l_n^\omega, *}(\nu_{\theta^{l_n^\omega} \omega})) \\ &\leq ct^n W_{\theta^{l_n^\omega} \omega}(\delta_x, \nu_{\theta^{l_n^\omega} \omega}) \\ &\leq ct^n \int \tilde{d}_{\theta^{l_n^\omega} \omega}(x, y) d\nu_{\theta^{l_n^\omega} \omega}(y) \leq ct^n. \end{aligned}$$

Assim, temos que $\| [\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^\omega]^{l_n^\omega}(f) - \int f d\nu_\omega \|_\infty \leq ct^n$. Combinando isto com a parte [ii] do corolário 9, obtemos [vi] do teorema 11. Além disso, segue da parte [i] do corolário 9 que ν é a única medida de probabilidade tal que $[\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^\omega]^*(\nu_{\theta\omega}) = \nu_\omega$.

(4) *Transferindo os resultados.* Da igualdade (2.12), temos que

$$\frac{[\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^\omega]^n(f)}{\Lambda_n(\omega) h_{\theta^n \omega}} - \int f d\mu_\omega = [\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^\omega]^n(f/h_\omega) - \int \frac{f}{h_\omega} d\nu_\omega, \quad (2.13)$$

para cada $f : X_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz. Assim, é possível provar as partes [vii] e [viii] do teorema 11 estimando $\tilde{D}(f/h_\omega)$. Então,

$$\begin{aligned} \tilde{D}(f/h_\omega) &\leq 2 \sup_{x, y \in X_\omega} \frac{\left| \frac{f(x)}{h_\omega(x)} - \frac{f(y)}{h_\omega(y)} \right|}{\tilde{d}_\omega(x, y)} \\ &\leq \left\| \frac{1}{h_\omega} \right\|_\infty \sup_{x, y \in X_\omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{\tilde{d}_\omega(x, y)} + \|f\|_\infty \sup_{x, y \in X_\omega} \frac{\left| \frac{1}{h_\omega(x)} - \frac{1}{h_\omega(y)} \right|}{\tilde{d}_\omega(x, y)} \\ &= \|1/h_\omega\|_\infty \left(\tilde{D}(f) + \|f\|_\infty \sup_{x, y \in X_\omega} \frac{|e^{\log h_\omega(x) - \log h_\omega(y)} - 1|}{\tilde{d}_\omega(x, y)} \right) \\ &\stackrel{(2.5)}{\leq} \|1/h_\omega\|_\infty \|f\|_L^\omega \max \{1, \|h_\omega\|_\infty \|1/h_\omega\|_\infty, B_\omega - 1\}, \end{aligned}$$

pois $\log h_\omega$ é 1-Hölder contínua. Defina então

$$K_\omega := 2 \|1/h_\omega\|_\infty \max \{1, \|h_\omega\|_\infty \|1/h_\omega\|_\infty, B_\omega - 1\},$$

para quase todo $\omega \in \Omega$. Pela igualdade (2.13) e por [vi] temos que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{l_n^\omega}(f)}{\Lambda_{l_n^\omega}(\omega) h_{\theta^{l_n^\omega}}} - \int f d\nu_\omega \right\|_L^{\theta^{l_n^\omega}} &= \left\| [\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^\omega]^{l_n^\omega}(f/h_\omega) - \int \frac{f}{h_\omega} d\nu_\omega \right\|_L^{\theta^{l_n^\omega}} \\ &\leq 2ct^n \tilde{D}(f/h_\omega) \leq ct^n K_\omega \|f\|_L^\omega, \end{aligned}$$

o que mostra a parte [vii]. Para provar [viii], notamos que dada uma função $f : X_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz com $D(f) \leq 1$, o corolário 10 implica

$$\begin{aligned} \left| [\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^\omega]^{l_n^\omega}(f)(x) - \int f d\nu_\omega \right| &\leq W_\omega([\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^\omega]^{n,*}(\delta_x), [\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^\omega]^{n,*}(\nu_{\theta^{l_n^\omega}})) \\ &\leq c_\omega^* s^n W_{\theta^{l_n^\omega}}(\delta_x, \nu_{\theta^{l_n^\omega}}) \leq c_\omega^* s^n. \end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} |[\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^\omega]^{l_n^\omega}(f)(x) - [\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^\omega]^{l_n^\omega}(f)(y)| &\leq W_\omega([\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^\omega]^{n,*}(\delta_x), [\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^\omega]^{n,*}(\delta_y)) \\ &\leq c_\omega^* s^n W_{\theta^{l_n^\omega}}(\delta_x, \delta_y) = c_\omega^* s^n \tilde{d}_\omega(x, y), \end{aligned}$$

portanto, concluímos que $D([\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^\omega]^{l_n^\omega}(f)) \leq c_\omega^* s^n$. Como consequência das últimas duas desigualdades, da igualdade (2.13) e da estimação para $D(f/h_\omega)$, temos que vale [viii].

(5) *Unicidade.* Finalmente, a unicidade da medida μ segue da unicidade da medida ν , que é $\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^\omega$ -invariante. Assim, vale [v] e isto conclui a prova do teorema 11. #

Capítulo 3

Exemplos de aplicação e perspectivas futuras

Nosso objetivo será usar o teorema 4.1 em [14] (resultado um pouco mais geral ao desenvolvido neste trabalho) para calcular numericamente as autofunções do operador de Ruelle associado a uma transformação aleatoriamente perturbada que seja suficientemente bem comportada. Para aplicar tal teorema é necessário definir alguns conceitos que vão ser importantes no momento de conectar o problema que queremos solucionar com a nossa teoria.

3.1 Aplicação ao decaimento de correlações

Sejam $(X, \sigma, \Omega, \mathbb{P}, \theta)$ uma CMRC e um potencial $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ definidos como antes e tais que $\mathcal{L}_\varphi^\omega(\mathbb{1}_{X_\omega}) = \mathbb{1}_{X_{\theta\omega}}$ para quase todo $\omega \in \Omega$. O teorema 11 também permite deduzir decaimento exponencial de correlações utilizando a seguinte identidade fundamental

$$\int f_\omega \cdot g_{\theta^n \omega} \circ \sigma_\omega^n d\mu_\omega = \int [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^n(f_\omega) \cdot g_{\theta^n \omega} d\mu_{\theta^n \omega},$$

para quase todo $\omega \in \Omega$ e aplicações fibradas f, g tais que f é Lipschitz e $\int |g_{\theta^n \omega}| d\mu_{\theta^n \omega} < \infty$. O teorema 11 implica que $\|[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^n(f_\omega) d\mu_\omega\|_\infty$ converge para 0 exponencialmente rápido. Assim, para aplicações fibradas f Lipschitz contínua com $\int f_\omega d\mu_\omega = 0$ q.t.p. e g com $\int |g_\omega| d\mu_\omega < \infty$, nós obtemos a seguinte estimacão para o decaimento de correlações:

$$\begin{aligned} \left| \int f_\omega \cdot g_{\theta^n \omega} \circ \sigma_\omega^n d\mu_\omega \right| &\leq \int |[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^n(f_\omega) \cdot g_{\theta^n \omega}| d\mu_{\theta^n \omega} \\ &\leq \|[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^n(f_\omega)\|_\infty \int |g_{\theta^n \omega}| d\mu_{\theta^n \omega} \\ &\leq 2c t^n D_\omega(f) \int |g_{\theta^n \omega}| d\mu_{\theta^n \omega}. \end{aligned}$$

Tal estimacão pode ser muito prática para estimar numericamente as autofunções h_ω quando as hipóteses do problema são suficientemente boas.

Seria bom falar sobre a importância do decaimento de correlações. Geralmente, quando existe decaimento temos que o sistema dinâmico comporta-se assintoticamente como um processo independente. Além disso, se a taxa de decaimento é exponencial, o sistema vai assumir o estado de equilíbrio com velocidade exponencial, é possível garantir a existência de medidas invariantes e dá para mostrar uma versão do teorema de limite central, que é uma propriedade mais forte que ergodicidade ou mixing (no sentido de medidas).

3.2 Aplicações de Markov no intervalo

Na literatura existem varias definições diferentes do que é uma aplicação de Markov, a seguinte é a mais adequada para a aplicação que queremos desenvolver.

16 Definição: *Uma transformação sobrejetora $T : I \rightarrow I$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo (limitado ou não), é chamada uma **aplicação de Markov** em relação a uma família contável $\{I_k\}_{k \in K}$ de intervalos abertos disjuntos, se e somente se, valem as seguintes afirmações:*

1. T é definida sobre o conjunto I^* , onde

$$I^* := \bigcup_{k \in K} I_k,$$

e tem-se que $\bar{I}^* = I$;

2. Para cada $k \in K$, a função $T_k := T|_{I_k}$ é estritamente monótona, diferenciável e T'_k é localmente Lipschitz tal que pode-se definir sobre \bar{I}_k ;

3. Para cada $j, k \in K$, se $T(I_j) \cap I_k \neq \emptyset$, então $I_k \subset T(I_j)$;

4. Para cada $(j, k) \in K^2$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_k \subset T^n(I_j)$;

5. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\inf_{t \in I^*} |(T^n)'|(t) > 1$ (T é expansora).

17 Observação: *Se λ denota a medida de Lebesgue definida sobre I , temos que λ é não singular em relação a T (pois T é injetora). Se T é uma aplicação de Markov, para $I_0, I_1, \dots, I_{n-1} \in \{I_k\}_{k \in K}$ defina*

$$[I_0, I_1, \dots, I_{n-1}] := \bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i}(I_i).$$

Suponha que $[I_0, I_1, \dots, I_{n-1}] \neq \emptyset$, então

$$\begin{aligned} T([I_0, I_1, \dots, I_{n-1}]) &= \bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i+1}(I_i) = T(I_0) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n-1} T^{-i+1}(I_i) \right] \\ &= \bigcap_{i=0}^{n-2} T^{-i}(I_{i+1}) = [I_1, I_2, \dots, I_{n-1}], \end{aligned}$$

pois $I_1 \subset T(I_0)$. O anterior sugere que existe uma conexão entre uma aplicação de Markov e uma cadeia topológica de Markov, de fato, a aplicação $\tau : X_{\mathbb{A}} \rightarrow I$ tal que

$$\tau(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [I_{x_0}, I_{x_1}, \dots, I_{x_{n-1}}],$$

define uma conjugação entre o sistema dinâmico expansor T e o subshift $\sigma_{\mathbb{A}} : X_{\mathbb{A}} \rightarrow X_{\mathbb{A}}$ (onde o espaço de full-shift é $X = K^{\mathbb{N}_0}$) de tipo finito com matriz de transição $\mathbb{A} \in M_{K \times K}(\{0, 1\})$ dada por

$$A_{j,k} = 1 \iff I_k \cap T(I_j) \neq \emptyset,$$

para cada par $j, k \in K$. Pode-se mostrar que $\tau(x)$ esta bem definido, de fato, é claro que $[I_{x_0}, I_{x_1}, \dots, I_{x_{n-1}}] \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, e considere $y_1, y_2 \in [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] \subset X_{\mathbb{A}}$ tal que $d(y_1, y_2) = r^n$ ($0 < r < 1$). Defina $t_1 := \tau(y_1)$ e $t_2 := \tau(y_2)$, deste modo, $T^i(t_1)$ e $T^i(t_2)$ estão no mesmo cilindro $[I_{x_i}, I_{x_{i+1}}, \dots, I_{x_{n-1}}]$ para cada $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Seja $c > 1$ tal que $T'(t) > c$ para cada $t \in I^*$, então

$$|\tau(y_1) - \tau(y_2)| \leq \text{diam}[I_{x_0}, I_{x_1}, \dots, I_{x_{n-1}}] \leq c^{-n} \text{diam } I,$$

o que mostra que

$$\text{diam}[I_{x_0}, I_{x_1}, \dots, I_{x_{n-1}}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Assim, concluímos que $\lim_{n \rightarrow \infty} [I_{x_0}, I_{x_1}, \dots, I_{x_{n-1}}]$ é um conjunto unitário e τ esta bem definida. Além disso, τ é invertível exceto numa quantidade enumerável de pontos e $\tau^{-1} : I \rightarrow X_{\mathbb{A}}$ é dada por

$$\tau^{-1}(t) = (x_i)_{i \in \mathbb{N}_0}, \quad \text{onde } x_i = k \text{ se } T^i(t) \in I_k,$$

que também esta bem definida. O seguinte diagrama resume o anterior:

$$\begin{array}{ccc} X_{\mathbb{A}} & \xrightarrow{\sigma_{\mathbb{A}}} & X_{\mathbb{A}} \\ \tau \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \tau \\ I & \xrightarrow{T} & I \end{array}$$

Com a ideia da ultima observação queremos generalizar a definição de *aplicação de Markov* para o caso de um fibrado aleatório, onde cada fibra é um intervalo. Considere o fibrado aleatório $(Y, T, \Omega, \theta, \mathbb{P}, \pi)$ tal que $Y_{\omega} = I_{\omega}$, onde cada $I_{\omega} \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Assim, dizemos que T é uma **aplicação de Markov** em relação a uma família $\{\{I_k^{\omega}\}_{k \in K}\}_{\omega \in \Omega}$, com $\{I_k^{\omega}\}_{k \in K}$ uma família contável de intervalos abertos disjuntos para cada $\omega \in \Omega$, se e somente se, valem as seguintes afirmações:

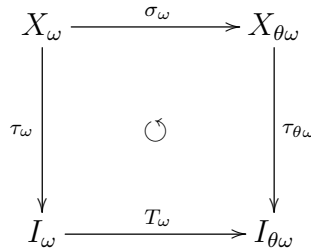
1. T_{ω} é definida sobre o conjunto I_{ω}^* , onde

$$I_{\omega}^* := \bigcup_{k \in K} I_k^{\omega},$$

e tem-se que $\bar{I}_{\omega}^* = I_{\omega}$;

2. Para cada $k \in K$, a função $T_{\omega,k} := T_\omega|_{I_k^\omega}$ é estritamente monótona, diferenciável e $T'_{\omega,k}$ é localmente Lipschitz tal que pode-se definir sobre \bar{I}_k^ω ;
3. Para cada $j, k \in K$, se $T_\omega(I_j^\omega) \cap I_k^{\theta\omega} \neq \emptyset$, então $I_k^{\theta\omega} \subset T_\omega(I_j^\omega)$;
4. Para cada $(j, k) \in K^2$, existe $n_\omega \in \mathbb{N}$ tal que $I_k^{\theta^{n_\omega}\omega} \subset T_\omega^n(I_j^\omega)$;
5. Existe $n_\omega \in \mathbb{N}$ tal que $\inf_{t \in I_\omega^*} |(T_\omega^{n_\omega})'(t)| > 1$;

e as afirmações valem para quase todo $\omega \in \Omega$. De modo análogo, para cada $\omega \in \Omega$ temos uma conjugação $\tau_\omega : X_\omega \rightarrow I_\omega$ tal que



3.3 Solução numérica para um problema particular

Sabemos que é possível identificar o toro unidimensional S^1 com o intervalo quociente $[-1, 1]/\sim$, onde $t_1 \sim t_2$ se e somente se $t_1 \equiv t_2 \pmod{2}$, em outras palavras só estamos identificando o -1 com 1 no intervalo. No que segue vamos esquecer a relação de equivalência \sim e vamos pensar S^1 como $[-1, 1]$ simplesmente. Considere a família de aplicações $S_\alpha : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ ($\alpha \in [0, 1]$) tais que

$$S_\alpha(x) = \begin{cases} 2t + 2 & \text{se } t \in [-1, -1/2] \\ \tau_\alpha^{-1}(t) & \text{se } t \in (-1/2, 1/2) \\ 2t - 2 & \text{se } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

onde $\tau_\alpha : (-1, 1) \rightarrow (-1/2, 1/2)$ é dado por

$$\tau_\alpha(t) = \left(1 - \frac{1}{2}|t|^\alpha\right) t.$$

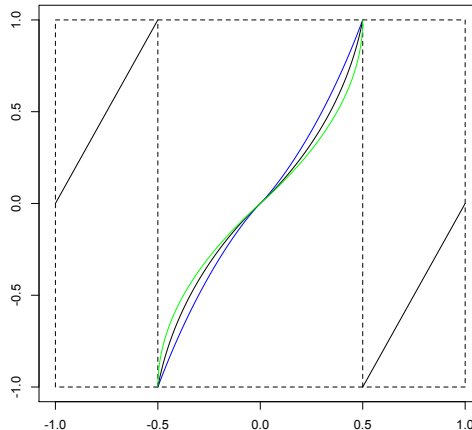


Gráfico de S_α para parâmetros $\alpha = 0.33, 0.66, 1$.

Dados $\epsilon > 0$ e o espaço de probabilidade (Ω, \mathbb{P}) , seja $\rho_\omega : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ a rotação/soma aleatória em $\pm\epsilon$, então para cada $\omega \in \Omega$ defina a transformação $T_\omega : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ dada por

$$T_\omega(t) = \rho_\omega \circ S_\alpha(t).$$

Defina $I_\omega := [-1, 1]$ e considere a seguinte família de intervalos abertos disjuntos

$$\mathcal{P}_\omega := \{I_1, I_2, I_3, I_4\} = \{(-1, 1/2), (-1/2, 0), (0, 1/2), (1/2, 1)\}.$$

As propriedades (1) e (2) de uma aplicação de Markov são facilmente comprováveis neste caso. Notemos que

$$T_\omega(I_1) \cap I_1 = T_\omega(I_1) \cap I_2 = T_\omega(I_4) \cap I_3 = T_\omega(I_4) \cap I_4 = \emptyset,$$

e que para cada $(i, j) \in \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2)\} =: D$, temos que

$$T_\omega(I_i) \cap I_j = I_j \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad I_j \subset T_\omega(I_i),$$

portanto, a propriedade (3) também vale. Além disso, $T_\omega^2(I_i) = [0, 1]$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ e temos a propriedade (4). Finalmente, também temos que, para cada $\omega \in \Omega$, existe $\delta_\omega > 1$ tal que $|(T_\omega^2)'(t)| > \delta_\omega$ para cada $t \in I^*$, assim concluímos que T é uma aplicação de Markov. Usando o conjunto D visto anteriormente é possível definir a matriz

$$\mathbb{A} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Desta forma, o sistema T_ω é conjugado com o subshift de tipo finito $\sigma_{\mathbb{A}} : X_{\mathbb{A}} \rightarrow X_{\mathbb{A}}$ (onde $X = \{1, 2, 3, 4\}^{\mathbb{N}_0}$) mediante a aplicação $\tau_\omega : X_{\mathbb{A}} \rightarrow I_\omega$, para cada $\omega \in \Omega$. Defina também o potencial φ dado por

$$\varphi_\omega := \log |T_\omega' \circ \tau_\omega|.$$

Pode-se mostrar que φ é Hölder contínua (pois T_ω' é localmente Lipschitz em quase todo ponto e τ_ω é Hölder contínua). Dadas as considerações anteriores, e tomando ν a medida de Lebesgue definida sobre $X_{\mathbb{A}}$, temos que para cada $a \in \mathcal{W}_\omega^1$,

$$\nu(\sigma_{\mathbb{A}}(E)) \stackrel{[9]}{=} \int_E e^{-\varphi_\omega} d\nu, \quad \forall E \subset [a]_\omega \text{ mens.} \quad \Rightarrow \quad [\mathcal{L}_\varphi^\omega]^*(\nu) = 1 \cdot \nu,$$

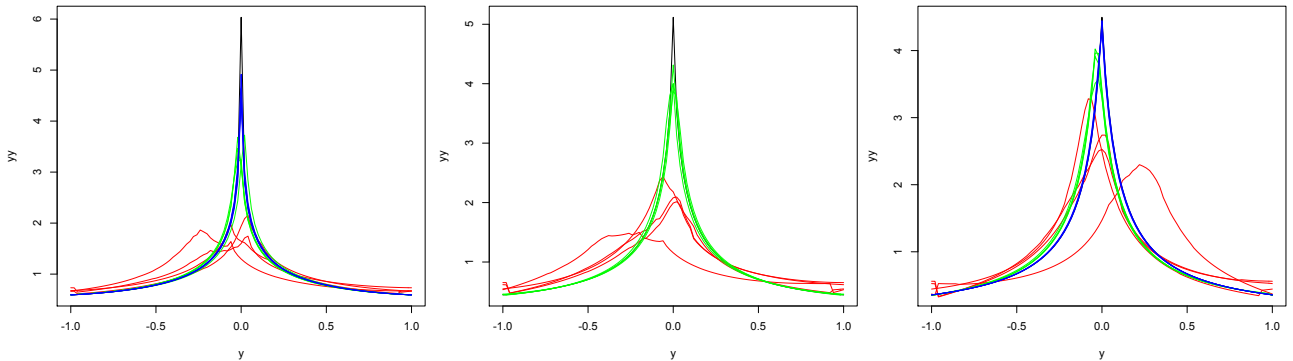
O teorema 4.1 em [14] garante unicidade da variável aleatória λ , da medida de probabilidade randomizada μ e do potencial h , portanto, dado o fato anterior, podemos assumir conhecidos $\mu = (\nu)_{\omega \in \Omega}$ e $\lambda \equiv 1$. Além disso, existem $t \in (0, 1)$, uma variável aleatória $K : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ e uma sequência $\{l_n^\omega\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ tais que para cada função $f : X_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz, cada $n \in \mathbb{N}$ e quase todo $\omega \in \Omega$, temos que

$$\left\| \frac{[\mathcal{L}_\varphi^\omega]^{l_n^\omega}(f)}{h_{\theta^{l_n^\omega}}} - \int f d\nu \right\|_L^{\theta^{l_n^\omega}} \leq c K_\omega \cdot t^n \|f\|_L^\omega. \quad (3.1)$$

A vantagem de ter decaimento exponencial de correlações em relação a subsequências é que as constantes t e c são explicitamente dadas (por exemplo, c não depende de ω), o que poderia dar origem a uma análise detalhada da estabilidade estocástica de aplicações aleatoriamente perturbadas, como as estudadas em [12]. Dado que as contrações nos pontos (6) e (7) do teorema 11 são derivadas dos retornos a um conjunto com parâmetros limitados, c pode-se escolher como qualquer valor maior que $\text{ess-inf } 2B_\omega$, mesmo que a escolha afeta a sequência $\{l_n^\omega\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. Em particular, tal sequência só pode ser controlada em casos especiais, por exemplo, quando trabalhamos numa CMRC e B é uniformemente limitada. Além disso, notemos que a variável aleatória K não depende da construção $\{l_n^\omega\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, de fato, K_ω só depende de B_ω e h_ω como segue:

$$K_\omega = 2 \|1/h_\omega\|_\infty \cdot \max \{ \|h_\omega\|_\infty \|1/h_\omega\|_\infty - 1, B_\omega - 1, 1 \}.$$

Usando uma estimação como a dada na subseção 3.1, é possível usar também a equação (3.1) para calcular numericamente as autofunções h_ω (as constantes K_ω também podem ser estimadas usando o método Monte-Carlo). Os seguintes gráficos mostram a função h^* (em preto) para o sistema não aleatoriamente perturbado (dada pelo teorema de Ruelle-Sarig) e mostra as funções h_ω calculadas numericamente para diferentes valores de $\text{supp } \mathbb{P}$,



A simulação mostra que existe uma convergência “estável” $h_\omega \rightarrow h^*$ quando $\text{supp } \mathbb{P}$ tende a um conjunto unitário. Concluimos este trabalho com as seguintes perguntas: Qual será o tipo da convergência $h_\omega \rightarrow h^*$? Qual será sua velocidade?

Referências Bibliográficas

- [1] T. Bogenschütz e V. M. Gundlach. Ruelles transfer operator for random subshifts of finite type. *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, 15(3):413-447, 1995
- [2] O. M. Sarig. Thermodynamic formalism for countable Markov shifts. *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, 19(6):1565-1593, 1999.
- [3] V. Baladi. Positive Transfer Operators and Decay of Correlations, *Advanced Series in Nonlinear Dynamics* 16. 2000.
- [4] M. Hairer. Exponential mixing properties of stochastic PDEs through asymptotic coupling. *Probab. Theory Relat. Fields* 124, 345–380, 2002.
- [5] O. M. Sarig. Existence of Gibbs measures for countable Markov shifts. *Proc. Am. Math. Soc.*, 131(6):1751–1758, 2003.
- [6] R. S. Varga. Gershgorin and his circles. *Springer*, 2004.
- [7] M. Denker, Y. Kifer, e M. Stadlbauer. Thermodynamic formalism for random countable Markov shifts. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 22(1-2):131-164, 2008.
- [8] M. Hairer e J. C. Mattingly. Spectral gaps in Wasserstein distances and the 2D stochastic Navier-Stokes equations. *Ann. Probab.*, 36(6):2050–2091, 2008.
- [9] O. Sarig. Lecture Notes on Thermodynamic Formalism for Topological Markov Shifts. *Penn State. Spring*, 2009.
- [10] C. Villani. Optimal transport, old and new. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* 388. *Springer-Verlag, Berlin*, 2009.
- [11] M. Stadlbauer. On random topological Markov chains with big images and preimages. *Stoch. Dyn.*, 10(1):77-95, 2010.
- [12] W. Shen e S. van Strien. On stochastic stability of expanding circle maps with neutral fixed points. *Dynamical Systems* 28, 423–452, 2013.
- [13] M. Hochman. Notes on ergodic theory. *Classroom notes*, 2013.
- [14] M. Stadlbauer. Coupling methods and random topological Markov chains. *Prepublicação*, 2014.

Índice Remissivo

- Acoplamento, 26
- Aplicação
 - de full-shift, 17
 - de full-shift aleatório, 21
 - de Markov, 42, 43
 - de subshift contável, 17
 - fibrada, 22
- Autovalor
 - maximal, 2
- Cadeia topológica
 - de Markov, 17
 - de Markov randomizada completa, 21
- Cilindro, 17, 22
- Círculos
 - de Gershgorin, 15
- Cone
 - não negativo, 5
- Conjunto
 - invariante, 17
- Continuidade
 - de Hölder para um potencial, 23
 - de Hölder para uma aplicação, 18
 - de Lipschitz para um potencial, 23
- Contração, 10
- Dualidade
 - de Monge-Kantorovich, 26
- Espaço
 - de full-shift aleatório, 21
 - topologicamente mixing, 18
- Estado
 - desviado, 2
- Função
 - potencial, 23
- Homeomorfismo
 - local para um fibrado, 23
- Matriz
 - aperiódica, 2
 - de transição, 17, 21
 - irreduzível, 2
 - não negativa, 2
 - positiva, 2
 - q -periódica, 2
- Medida
 - de Gibbs, 36
 - de probabilidade randomizada, 22
 - invariante, 17
 - não singular, 17
- Métrica
 - de Wasserstein, 26
 - projetiva, 5–7
- Multiplicidade
 - algébrica, 4
 - geométrica, 4
- Operador
 - de Ruelle, 19, 23
 - dual de Ruelle, 19, 23
 - projetivamente limitado, 9
- Palavra
 - admissível, 18
 - de qualquer comprimento, 22
 - finita, 22
 - ω -admissível, 22
- Período, 2
- Pressão
 - de Gurevich, 19
- Propriedade
 - de Gibbs, 36
 - de grandes imagens e pre-imagens, 18
- Pseudo-métrica projetiva, 6

Simplex

 não negativo, 5

Sistema

 fibrado aleatório, 20

Somas

 de Birkhoff, 24

Transformação

 ergódica, 17

 não singular, 17

 que preserva a medida, 17

Transporte, 26

Variação

 de uma aplicação, 18

 de uma aplicação fibrada, 22

 somável, 18