Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Dissertação de Mestrado

Classes de espaços definidas por estrelas e atribuições de vizinhanças abertas

Heides Lima de Santana

Salvador-Bahia
Março de 2014

Classes de espaços definidas por estrelas e atribuições de vizinhanças abertas

Heides Lima de Santana

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Samuel Gomes da Silva.

Salvador-Bahia

Abril de 2014

Santana, Heides Lima.

Classes de espaços definidas por estrelas e atribuições de vizinhanças abertas / Heides Lima de Santana. – Salvador: UFBA, 2014.

100 f.

Orientador: Prof. Dr. Samuel Gomes da Silva.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2014.

Referências bibliográficas.

1. Topologia Geral. 2. Teoria de conjuntos. 3. Topologia. I. Silva, Samuel Gomes da. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 510.22

: 515.122

Classes de espaços definidas por estrelas e atribuições de vizinhanças abertas

Heides Lima de Santana

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 16 de abril de 2014.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Samuel Gomes da Silva (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Marcelo Dias Passos
UFBA

Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi
USP

À minha mãe e
meu primo Claudir.

Agradecimentos

Agradeço a meus pais e minha companheira Jessica por estarem sempre ao meu lado.

Agradeço ao meu orientador, o Prof. Samuel Gomes da Silva, pela falta de paciência e pela dedicação durante minha orientação.

Agradeço aos professores Marcelo Dias Passos e Leandro Fiorini Aurichi por aceitarem o convite para participar da banca examinadora da minha defesa.

Agradeço aos meus colegas do mestrado Júlio, Felipe, Jacqueline, Mariana, Gledson e Sara pelo companheirismo. Também aos meus amigos de Salvador John Pinho, Anderson França e Rafael Leito pelos poucos momentos divertidos. Aos meus amigos distantes Helber Santos, Helder Santos, Lázaro Fernando, Emiliano Neto, Ernesto Matsumoto e Adriana Dias por me incentivarem na graduação.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro concedido a mim durante todo o meu mestrado.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo introduzir os espaços estrela $\mathcal{P}$ e os espaços dualmente $\mathcal{P}$, onde $\mathcal{P}$ é uma propriedade topológica, e apresentar alguns resultados - por exemplo “todo espaço topológico é estrela discreto”e “ser compacto é equivalente a ser dualmente compacto”. Definiremos uma importante classe relacionada aos espaços estrela - os D-espaços - e mostraremos que todo espaço métrico é um D-espaço. Apresentaremos alguns espaços, como o Tychonoff Plank, os ψ-espaços generalizados e versões de Σ-produtos, os quais serão úteis para vários contra-exemplos mostrando que não vale a recíproca de certos teoremas. Por exemplo, é verdade que ”Lindelöf implica dualmente Lindelöf”, mas não é verdade que ”dualmente Lindelöf implica Lindelöf”. Investigamos ainda classes específicas de espaços, como os P-espaços e os espaços de Moore, e para essas classes de espaços obtemos equivalências para certas propriedades que não são equivalentes em geral.

Palavras-chave: Espaços estrela-$\mathcal{P}$; Espaços dualmente-$\mathcal{P}$; Lindelöf; enumerabilidade.

Abstract

In this work we introduce the star P spaces and the dually P spaces, where P is a topological property, and we presente some results - e.g., “every topological space is dually discrete”and ”being compact is equivalent to being dually compact”. We define an important class of spaces, related to the star spaces - the D-spaces - and we show that every metric space is a D-space. We present some spaces, as the Tychonoff Plank, the generalized ψ-spaces and versions of Σ-products, which will be useful for showing that some reciprocal statements of certain theorems do not hold. For instance, it is true that ”Lindelöf implies dually Lindelöf”, but it is not true that “dually Lindelöf implies Lindelöf”. We investigate further specific classes of spaces, as the P-spaces and the Moore spaces, and we get for such classes some equivalences which are not true in the general case.

Sumário

Introdução **1**

1 Noções preliminares de Teoria dos Conjuntos e Topologia Geral **4**

1.1 Noções Conjuntistas 4

1.2 Noções Topológicas 10

1.2.1 ψ-espaços 31

1.2.2 Tychonoff Plank 35

2 Classes definidas por estrelas e atribuições de vizinhanças abertas **38**

2.1 Espaços estrela $\mathcal{P}$ 38

2.2 Espaços dualmente $\mathcal{P}$ 44

2.2.1 Propriedades auto-duais 46

2.3 D-espaços 51

2.4 Propriedades estrela e pseudocompacidade 58

3 Enumerabilidade e propriedades definidas por estrelas **65**

3.1 Espaços estrela enumeráveis 65

3.2 Espaços estrela Lindelöf e tenuamente Lindelöf 68

4 Casos particulares e contra-exemplos **74**

4.1 Estrela enumerável, estrela Lindelöf e extent enumerável 74

4.2 Espaços estrela e famílias discretas 77

4.3 ψ-espaços generalizados 81

Referências **85**

Índice Remissivo **87**

Lista de Figuras

2.1 Diagrama de implicações entre enumeravelmente compacto e pseudocompacto 64

Introdução

Dada uma família $\mathcal{U}$ de subconjuntos de um conjunto X e um subconjunto A de X, definimos a *estrela de A com relação a $\mathcal{U}$* como sendo o seguinte conjunto:

$$St(A,\mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : A \cap U \neq \emptyset\}.$$

Nesse caso se $St(A,\mathcal{U}) = X$ temos que A é dito um núcleo-estrela de $\mathcal{U}$.

Desde meados dos anos 90 do séc. XX é muito frequentemente investigado o caso particular em que X é um espaço topológico e $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta do espaço; o estudo de propriedades topológicas definidas ou caracterizadas por estrelas com relação a coberturas abertas esteve presente nas linhas de investigação de inúmeros pesquisadores respeitados na área desde então. Muitas informações sobre propriedades definidas por estrelas podem ser encontradas no survey [19], de autoria de M. Matveev, o qual contribuiu muito para essa teoria. Em co-autoria com M. Bonanzinga, Matveev também fez uma atualização dos problemas em aberto nessa área em 2007, para a segunda edição do *Open Problems in Topology* ([9]).

Sejam $\mathcal{P}$ uma propriedade topológica e X um espaço topológico. Diz-se que X é estrela $\mathcal{P}$ se para todo $\mathcal{U}$ cobertura aberta de X existe $A \subseteq X$ com a propriedade $\mathcal{P}$ tal que

$$St(A,\mathcal{U}) = X.$$

Na linguagem de núcleo, X é estrela $\mathcal{P}$ se toda cobertura aberta possui um núcleo que satisfaz $\mathcal{P}$. Com isso, chamaremos de "propriedade estrela" qualquer propriedade da forma "estrela $\mathcal{P}$" para qualquer propriedade $\mathcal{P}$.

Muitos pesquisadores, atualmente, fazem pesquisa nas propriedades definidas por estrelas com relações a coberturas e na noção de espaços *estrela* $\mathcal{P}$ (família parametrizada de classes de espaços introduzida em 2007 por van Mill, Tkachuk e Wilson em [22]). A Profa. Ofelia Alas (USP/Brasil), juntamente com colaboradores habituais, principalmente Lucia Junqueira (USP/Brasil) e Richard Wilson (UAM/México), vêm obtendo vários resultados nessa recente teoria de espaços estrela $\mathcal{P}$ (ver [3] e [5]), na maioria das vezes trabalhando com propriedades topológicas $\mathcal{P}$ que sejam de alguma forma relacionadas com a propriedade de Lindelöf; por exemplo, $\mathcal{P}$ = enumerável, $\mathcal{P}$ = σ-compacto, ou mesmo, evidentemente, $\mathcal{P}$ = Lindelöf.

Introduziremos, além dos espaços estrela $\mathcal{P}$, também os espaços *dualmente* $\mathcal{P}$: para definir tal família de classes de espaços, temos que inicialmente definir o que é uma *ONA* (de *open neighbourhood assignment*, ou, em português, *atribuição de vizinhanças abertas*).

Dado um espaço topológico X, uma atribuição de vizinhanças abertas, ou ONA, para X é uma família de abertos $\mathcal{O} = \{O_x : x \in X\}$ satisfazendo $x \in O_x$ para todo $x \in X$. Um subespfaço $Y \subset X$ é dito ser um *núcleo* de uma dada ONA $\mathcal{O}$ no caso de valer a igualdade

$$\bigcup_{x \in Y} O_x = X.$$

Introduzidos estes termos, podemos definir os espaços dualmente $\mathcal{P}$: um espaço X é dito ser dualmente $\mathcal{P}$ se para toda ONA $\mathcal{O}$ existe um subespaço Y de X que satisfaz $\mathcal{P}$ e que é núcleo de $\mathcal{O}$. Apesar da definição ser semelhante à dos espaços estrela $\mathcal{P}$, existem diferenças bastante drásticas. Por exemplo, não é difícil verificar que todo espaço topológico é estrela discreto; no entanto, não é verdade que todo espaço topológico seja dualmente discreto – embora tal classe seja bastante grande, no sentido de que é difícil construir exemplos de espaços topológicos que não sejam dualmente discretos (ver discussão na introdução de [5]).

Uma subclasse bastante importante da classe dos espaços dualmente discretos é a dos D-espaços, que são os espaços nos quais toda ONA possui um núcleo que é fechado e discreto. Para a classe dos D-espaços, também as comparações com a classe dos espaços de Lindelöf são estudadas com muito interesse, já que um dos principais problemas da Topologia Geral desde o final dos anos 70 envolve tais comparações; não se sabe se todos os espaços de Lindelöf são D-espaços. Tal questão: "ser Lindelöf implica ser D-espaço?" foi apresentada por van Douwen e Pfeffer em 1979 no artigo [21], e essa questão vem chamando a atenção de muitos pesquisadores fortes na área nos últimos anos, como por exemplo Frank Tall (U of T/Canadá).

Todas as classes de espaços já citadas neste parágrafo possuem, ainda, relação com o problema da preservação da propriedade de Lindelöf por produtos topológicos (ver [8]). Em 2011, os pesquisadores Ofelia Alas, Leandro Aurichi, Lucia Junqueira e Frank Tall (em [2]) mostraram, ainda, que a questão da preservação da propriedade de Lindelöf por produtos também está intimamente ligada a questões envolvendo os chamados *pequenos cardinais*, que são objetos de pesquisa permanente por parte do orientador professor Dr. Samuel G. da Silva.

O presente trabalho está dividido em quatro capítulos:

No capítulo um, apresentaremos as noções de Teoria de Conjuntos e Topologia Geral, no qual exibiremos alguns teoremas e proposições úteis para os capítulos seguintes.

No capítulo dois, faremos vários resultados dos espaços estrela $\mathcal{P}$ e espaços dualmente $\mathcal{P}$. Por exemplo, todo espaço topológico é estrela discreto. Um espaço topológico tal que toda cobertura aberta possui um núcleo fechado e discreto é dito um D-espaço. A classe dos D-espaços é restrita, como comentamos, não se sabe se ela inclui os espaços de Lindelöf. Mostraremos que todo espaço métrico é um D-espaço. Se o espaço for T_1 então todo espaço topológico é estrela discreto e fechado.

No capítulo três, estudaremos principalmente o artigo [5]. Mostraremos vários resultados relacionado a enumerabilidade, Lindelöf e propriedades definidas por estrelas. Como, por exemplo, ser separável implica ser estrela enumerável e ser estrela enumerável implica ser estrela Lindelöf. Daremos vários exemplos e contra-exemplos.

No capítulo quatro, definiremos os P-espaços e os espaços de Moore. Veremos que algumas propriedades são equivalentes nesses espaços. Como, por exemplo, separável, estrela enumerável e estrela Lindelöf são equivalentes em um espaço de Moore. Além disso, definiremos os ψ-espaços generalizados e apresentaremos respostas de duas questões propostas por [5].

Capítulo 1

Noções preliminares de Teoria dos Conjuntos e Topologia Geral

Na presente seção, são apresentadas algumas definições e proposições da teoria de conjuntos que serão úteis nos capítulos seguintes. Algumas proposições por serem elementares não faremos a demonstração.

A sigla ZF, da teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel, significa a axiomática usual da teoria dos conjuntos, conferir [17], e adicionando o axioma da escolha temos ZFC.

1.1 Noções Conjuntistas

Um conjunto A diz-se **equipotente** a um conjunto B, e denota-se por $A \approx B$, se existe uma função $f : A \longrightarrow B$ bijetiva. Um conjunto A é **dominado** por um conjunto B, e denota-se por $A \preccurlyeq B$, se existir uma função injetora $f : A \longrightarrow B$.

Sejam X e I conjuntos, a função $\xi : I \longrightarrow X$ é uma **indexação** de X por I se ξ é sobrejetora, se ξ for também injetora (logo bijetora), será dita uma **enumeração**. Para cada $i \in I$, $\xi(i) = \xi_i$ é a i-ésima coordenada de ξ. Com isso temos as seguintes definições:

Definição 1.1. Seja X um conjunto. Diz-se que X é **finito** se existir um $n < \omega$ tal que $X \approx n$. Caso contrário, diz-se que X é **infinito**.

Definição 1.2. Um conjunto X é dito **enumerável** se existe uma função sobrejetiva dos números naturais em X. Se uma função sobrejetiva de $\mathbb{N}$ em X for ainda injetiva, portanto bijetiva, então X é infinito enumerável.

Teorema 1.3 (Schröder–Bernstein–Cantor). *Dados X e Y conjuntos, se $X \preccurlyeq Y$ e $Y \preccurlyeq X$, então $X \approx Y$.* □

Definição 1.4. Sejam $\mathbb{P}$ um conjunto e $\leq$ uma relação binária sobre $\mathbb{P}$. Diz-se $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ é uma **pré-ordem**, ou que $\leq$ é uma pré-ordem sobre $\mathbb{P}$, se valer as seguintes condições:

(i) $\leq$ é reflexiva, i.e., $\forall x \in \mathbb{P}$ tem-se $x \leq x$.

(ii) $\leq$ é transitiva, i.e., $\forall x, y, z \in \mathbb{P}$ se $x \leq y$ e $y \leq z$ tem-se $x \leq z$.

Definição 1.5. Diz-se que $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ é uma **ordem parcial**, ou que $\leq$ é uma ordem parcial sobre $\mathbb{P}$, se $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ é uma pré-ordem e vale a seguinte condição:

(iii) $\leq$ é antissimétrica, i.e., $\forall x, y \in \mathbb{P}$ se $x \leq y$ e $y \leq x$ tem-se $x = y$.

Definição 1.6. Diz-se que $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ é uma **ordem total**, ou que $\leq$ é uma ordem total sobre $\mathbb{P}$, se $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ for uma ordem parcial e vale a seguinte condição:

(iv) $\leq$ é tricotômica, i.e., $\forall x, y \in \mathbb{P}$ $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Consideramos a relação binária $<$ sobre $\mathbb{P}$ que é definida pela seguinte sentença: para todo $x, y \in \mathbb{P}$, $x < y$ se, e somente se, $x \leqslant y$ e $x \neq y$. Neste caso, diz-se que $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ é uma **ordem parcial estrita**, ou que $<$ é uma ordem parcial estrita sobre $\mathbb{P}$.

Sejam $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ uma ordem parcial e $C \subseteq \mathbb{P}$. Diremos que C é uma **cadeia** segundo $\leqslant$ se a ordem induzida por $\leqslant$ sobre C for uma ordem total.

Assumiremos conhecidos as noções de máximos e mínimos, maximal e minimal, limitantes superiores e inferiores e supremo e ínfimo.

Definição 1.7. Uma ordem parcial $\langle X, \leqslant \rangle$ é um **boa ordem** se todo subconjunto não vazio de X tiver elemento mínimo.

Definição 1.8. Diz-se que um conjunto x é **transitivo** se e somente se todo elemento de x é um subconjunto de x.

Definição 1.9. Um conjunto x é um **ordinal** se, e somente se, x é transitivo e bem ordenado por $\in$.

Dado uma boa ordem existe um único ordinal isomorfo a essa boa ordem. Assim, podemos definir:

Definição 1.10. Sejam $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ uma boa ordem estrita e α o único ordinal que é isomorfo a $\langle \mathbb{P}, < \rangle$. Diz-se que α é o **tipo de ordem** de $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ e denotamos da seguinte forma $\alpha = \mathrm{t.\,o.}\,(\mathbb{P}, <)$. Além disso, diz-se que o único isomorfismo de ordem de $\mathrm{t.\,o.}\,(\mathbb{P}, <)$ sobre $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ é a **enumeração canônica** de $\mathbb{P}$.

Note que $On = \{x : x \text{ é ordinal }\}$ é uma classe e não um conjunto, pois se fosse um conjunto seria um ordinal e assim $On \in On$, contrariando a tricotomia estrita entre ordinais. Notaremos os ordinais por letras gregas minúsculas, como α, β. Vale observar que a sentença "$\alpha \in \beta$" é o mesmo que "$\alpha < \beta$" e a sentença "$\alpha \in \beta$ ou $\alpha = \beta$" é "$\alpha \leqslant \beta$", a qual é equivalente a $\alpha \subseteq \beta$. Pode-se mostrar, para qualquer ordinal α, que $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$, que também é um ordinal e, mais ainda, se $\alpha \leqslant \beta \leqslant \alpha + 1$ então $\alpha = \beta$ ou $\beta = \alpha + 1$. Com isso, diz-se que α é um **ordinal sucessor** se existir um ordinal γ tal que $\alpha = \gamma + 1$. Os elementos do sucessor de α são os elementos de α e mais o próprio α. Se $\alpha \neq \emptyset$ e α não for sucessor, diremos que α é um **ordinal limite** ou seja, $\alpha = sup\{\beta : \beta < \alpha\}$. Ainda, α é limite se, e só se, $\alpha = \bigcup \alpha$.

Dado um ordinal α, diremos que α é um número natural, se para todo $\gamma \leqslant \alpha$ temos que $\gamma = \emptyset$ ou γ é sucessor. Veja que $\emptyset$ é um número natural. Com isso, definimos ω como o conjunto dos número naturais, além disso, ω é o menor ordinal limite.

Proposição 1.11. *Se X é um conjunto de ordinais então $sup(X) = \bigcup X$ e se $X \neq 0$, $min(X) = \bigcap X$.* $\square$

Definição 1.12. Sejam X um conjunto e $\phi : X \to \bigcup X$ uma função. Diz-se que ϕ é uma **função-escolha** para X, se para todo $x \in X$, $\phi(x) \in x$.

Sendo necessário fazer infinitas escolhas arbitrárias, será preciso então utilizar o Axioma da Escolha.

Definição 1.13 (Axioma da escolha - **AC**)**.** Toda família infinita de conjuntos não vazios admite uma função-escolha.

Definição 1.14 (Lema de Zorn)**.** Seja $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ uma ordem parcial não vazia. Se toda cadeia tem limitante superior então $\mathbb{P}$ possui um elemento maximal.

O seguinte teorema vale em ZF.

Teorema 1.15. *Dado um conjunto X, tem-se que X pode ser bem ordenado se, e somente se, valer que X pode ser enumerado por um ordinal.* $\square$

Observe que o Axioma da escolha é equivalente à asserção "Todo conjunto pode ser bem ordenado". Isso é mostrado por recursão transfinita, o que motiva as próximas definições.

Teorema 1.16 (Indução transfinita sobre δ)**.** *Seja δ um ordinal limite. Se $C \subseteq \delta$ tal que*

$$\forall\ \alpha < \delta[(\alpha \subseteq C) \longrightarrow \alpha \in C],$$

então $C = \delta$.

Teorema 1.17 (Indução transfinita sobre On)**.** *Se $\boldsymbol{C} \subseteq On$ tal que*

$$\forall\ \alpha < On[(\alpha \subseteq \boldsymbol{C}) \longrightarrow \alpha \in \boldsymbol{C}],$$

então $\boldsymbol{C} = On$.

Para A e B conjuntos, definimos

$${}^{B}A = A^{B} = \{f : f \text{ é uma função}, dom(f) = B \text{ e } im(f) \subseteq A\}.$$

Note que, ${}^{B}A \subseteq \mathcal{P}(B \times A)$. Para a um conjunto e β um ordinal definimos ${}^{<\beta}a = \bigcup\{{}^{\xi}a : \xi < \beta\}$. Com isso, temos o seguinte teorema:

Teorema 1.18 (Recursão transfinita sobre δ)**.** *Sejam a um conjunto e $F :{}^{<\delta} a \longrightarrow\ a$. Então existe uma única $g : \delta \longrightarrow a$ tal que*

$$g(\beta) = F(g \upharpoonright \beta)\ \forall\ \beta < \delta.$$

Teorema 1.19 (Recursão transfinita sobre On)**.** *Seja $F : V \longrightarrow V$ função classe. Então existe um única $G : On \longrightarrow V$ tal que*

$$G(\alpha) = F(G \upharpoonright \alpha)\ \forall\ \alpha \in V.$$

Observe que, dada uma boa ordem $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$, existe um único isomorfismo de ordem de $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ sobre o ordinal t.o.$(\mathbb{P}, <)$ e isso implica que $\mathbb{P}$ é equipotente a pelo menos um ordinal. Assim, definiremos em ZFC:

Definição 1.20. Definimos a **cardinalidade** de um conjunto X com

$$|X| := min\{\alpha : \alpha \approx X\}.$$

Definição 1.21. Um ordinal κ é um **cardinal** se, e somente se, $|\kappa| = \kappa$.

Uma definição equivalente é: κ é cardinal se, e somente se, $\forall\ \beta\ < \kappa\,(\beta \not\approx \kappa)$. Denotaremos cardinais com as gregas κ, θ e λ. Veja, por exemplo, que os números naturais são cardinais. Além disso, se um conjunto é equipotente a ω sua cardinalidade é $\aleph_0$ e se for equipotente a $\mathbb{R}$ sua cardinalidade é $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

Agora, definiremos aritmética cardinal

Definição 1.22. Sejam $\kappa,\ \lambda$ então
a) $\kappa + \lambda = |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|$.
b) $\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|$.
c)$\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa|$

Exemplo 1.23. $\kappa^0 = 1$, pois existe somente a função vazia, $\phi : \emptyset \to \kappa$, de $\emptyset$ em κ.

Para qualquer conjunto X definimos $[X]^{<\omega} = \{Y \subseteq X : Y \text{é finito}\}$, $[X]^\omega = \{Y \subseteq X : Y \text{é infinito e enumerável}\}$ e $[X]^{\leqslant\omega} = \{Y \subseteq X : Y \text{é enumerável}\}$.

Proposição 1.24. *Se κ e λ são cardinais ambos diferentes de zero, ao menos um deles infinito, então* $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = max\{\kappa, \lambda\}$. □

Proposição 1.25. *Seja $2 \leqslant \kappa \leqslant \lambda$ cardinais, com λ infinito. Então $2^\lambda = \kappa^\lambda = \lambda^\lambda$.* □

Definição 1.26. Sejam α e β ordinais, com β ordinal limite. Uma função $f : \alpha \to \beta$ é **cofinal** em β se $sup(im(f)) = \beta$.

Em termos de conjuntos temos que se $\langle \mathbb{P}, \leqslant\rangle$ é uma pré-ordem dizemos que $X \subseteq \mathbb{P}$ é cofinal em $\mathbb{P}$ se para todo $y \in \mathbb{P}$ existe $x \in X$ tal que $y \leqslant x$.

Definição 1.27. A **cofinalidade** de β é o ordinal:

$$cf(\beta) = min\{\alpha : \alpha \text{ é ordinal e existe } f : \alpha \longrightarrow \beta \text{ cofinal}\}$$

.

Definição 1.28. Seja $\langle \mathbb{P}, \leqslant\rangle$ uma ordem parcial dizemos que $X \subseteq \mathbb{P}$ é **ilimitado** em $\mathbb{P}$ se para todo $y \in \mathbb{P}$ existe $x \in X$ tal que $x \nleqslant y$.

Observe que cofinal implica ilimitado. Mas, em ordem total, são equivalentes. Observe que se δ é ordinal limite a definição usual de cofinalidade é equivalente a:

$$cf(\delta) = min\{|A| : A \subseteq \delta \text{ e } A \text{ é cofinal em } \delta\}.$$

Utilizando os Axiomas das Partes e da Substituição, pode-se para cada conjunto X construir o conjunto $H(X) := \{\alpha : \alpha \text{ é ordinal e } \alpha \preceq X\}$, chamado de *a função de Hartogs* de X. Prova-se que $H(X)$ é o menor cardinal que não é dominado por X. Também, $H(\omega)$ é o primeiro cardinal não enumerável, denotado por $H(\omega) = \omega_1$, que pode ser ainda descrito como sendo o conjunto de todos os ordinais enumeráveis. Analogamente, $H(\omega_1) = \omega_2$, $H(\omega_2) = \omega_3$ e assim por diante.

Como a aplicação da função de Hartogs num cardinal κ resulta no menor cardinal maior do que κ, fica definido tal cardinal como o sucessor de κ^+. Ademais, um cardinal κ é dito um cardinal sucessor de existe um cardinal λ tal que $\kappa = \lambda^+$.

Exemplo 1.29. Para todo ordinal γ temos que $|\gamma| \leqslant \gamma < |\gamma|^+$.

Definição 1.30. Seja α um ordinal. Diz-se que α é **regular** se α for limite e $cf(\alpha) = \alpha$. Diz-se que é **singular** se α for limite e $cf(\alpha) < \alpha$.

Pode se mostrar que a cofinalidade de ordinal é um cardinal. Com isso, pode-se definir cardinal regular e singular:

Definição 1.31. Seja κ um cardinal, diz-se que κ é um **cardinal regular** se κ for ordinal regular e que κ é um **cardinal singular** se κ for ordinal singular.

Com a definição acima, a cofinalidade de um ordinal limite é sempre um cardinal regular.

Proposição 1.32. *$cf(\omega_1) = \omega_1$, ou seja, ω_1 é regular .* □

Pode-se provar que todo cardinal sucessor é regular.

Proposição 1.33. *Para todo $\alpha < \kappa$ seja $\{Y_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma família crescente (segundo a inclusão). Se $B \subseteq \kappa$ é cofinal em κ então:*

$$\bigcup_{\alpha\ <\ \kappa} Y_\alpha = \bigcup_{\alpha\ \in\ B} Y_\alpha.$$

Demonstração: Por $B \subseteq \kappa$ temos que $\bigcup_{\alpha\ \in\ B} Y_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\ <\ \kappa} Y_\alpha$. Para outro lado, seja $x \in \bigcup\limits_{\alpha\ <\ \kappa} Y_\alpha$, então existe $\alpha' < \kappa$ tal que $x \in Y_{\alpha'}$. Como B é cofinal em κ ($sup\ (B) = \kappa$) existe $\xi \in B$ tal que $\alpha' < \xi$ e como $\{Y_\alpha : \alpha < \kappa\}$ é crescente temos que $Y_{\alpha'} \subseteq Y_\xi$. Logo,

$$x \in Y_\xi \subseteq \bigcup_{\alpha\ \in\ B} Y_\alpha \Longrightarrow \bigcup_{\alpha\ <\ \kappa} Y_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\ \in\ B} Y_\alpha.$$

Portanto vale $\bigcup_{\alpha < \kappa} Y_\alpha = \bigcup_{\alpha \in B} Y_\alpha$. □

Proposição 1.34. *Se $\mathcal{F} = \{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ é uma família crescente e $\lambda = cf(\kappa)$ então existe $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, $|\mathcal{F}| = \lambda$ tal que $\bigcup \mathcal{F}' = \bigcup \mathcal{F}$.*

Demonstração: Sejam $f : \lambda \to \kappa$ cofinal e estritamente crescente e

$$\mathcal{F}' = \{X_\alpha : \alpha < im(f)\}.$$

Veja que $|\mathcal{F}'| = \lambda$, pois, f é cofinal e estritamente crescente. Tomando $B = im(f)$, cofinal em κ, e pela proposição 1.33 temos que $\bigcup \mathcal{F}' = \bigcup \mathcal{F}$. □

1.2 Noções Topológicas

Assumiremos já conhecidos algumas noções básicas de topologia como bases locais, bases de espaços, subbases, densos entre outras. Algumas proposições por serem elementares não faremos a demonstração.

Definição 1.35. Seja X um espaço topológico. Diz-se que:

(i) X é **primeiro-enumerável** se, para todo $x \in X$, existir uma base local enumerável para x.

(ii) X é **segundo-enumerável** se X possui uma base enumerável.

(iii) X é **terceiro-enumerável** (ou separável) se X possui um subconjunto denso enumerável.

Definição 1.36. Seja X um espaço topológico. Diz-se que:

(i) X é T_0 se para todo $x, y \in X$, se $x \neq y$, existe um aberto U em X tal que $x \in U$ e $y \notin U$ ou existe um aberto V em X tal que $y \in V$ e $x \notin V$.

(ii) X é T_1 se valer a seguinte condição: para todo $x, y \in X$, se $x \neq y$, existe um aberto U em X tal que $x \in U$ e $y \notin U$ e existe um aberto V em X tal que $y \in V$ e $x \notin V$.

(iii) X é T_2 (ou **Hausdorff**) se valer a seguinte condição: para todo $x, y \in X$, se $x \neq y$, existem abertos U e V em X tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

(iv) X é T_3 se para todo $x \in X$ e todo F fechado em X, se $x \notin F$, existem abertos U e V em X tais que $x \in U$, $F \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$.

(v) X é **regular** se X for T_1 e T_3.

(vi) X é $T_{3\frac{1}{2}}$ se valer a seguinte condição: para todo $x \in X$ e todo F fechado em X, se $x \notin F$, então existe uma função contínua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ e $f[F] \subseteq \{1\}$.

(vii) X é T_4 se para todos F, G fechados e disjuntos em X, existem U e V abertos disjuntos em X tais que $F \subseteq U$, $G \subseteq V$.

(viii) X é **completamente regular** (ou **Tychonoff**) se X for $T_{3\frac{1}{2}}$ e T_1.

(viii) X é **normal** se X for T_1 e T_4.

Vale observar que:

$$\text{Normal} \Longrightarrow \text{Tychonoff} \Longrightarrow \text{Regular} \Longrightarrow \text{Hausdorff} \Longrightarrow \mathrm{T}_1 \Longrightarrow \mathrm{T}_0.$$

Sendo X um conjunto totalmente ordenado por $\leqslant$, definimos os seguintes intervalos $[a,b] = \{x \in X : a \leqslant x \leqslant b\}$, $]a,b] = \{x \in X : a < x \leqslant b\}$, $]a,b[= \{x \in X : a < x < b\}$, $]-\infty, a[= \{x \in X : x < a\}$ e $]a, +\infty[= \{x \in X : a < x\}$.

Definição 1.37. Se $(X, \leqslant)$ é um conjunto totalmente ordenado, chamamos de **topologia da ordem** sobre X a topologia gerada pela subbase

$$\{]-\infty, a[: a \in X\} \cup \{]a, +\infty[: a \in X\}.$$

No caso de um ordinal $\gamma > 0$ a topologia da ordem sobre γ é a gerada pela base

$$\{\{0\}\} \cup \{]\alpha, \beta] : \alpha < \beta < \gamma\}.$$

Veja que um ordinal α é sempre Hausdorff, pois, para quaisquer $\xi_1, \xi_2 \in \alpha, \xi_1 < \xi_2$ temos que $[0, \xi_1] \cap]\xi_1, \xi_2] = \emptyset$. Na verdade, toda topologia da ordem é normal.

Definição 1.38. Seja X um espaço topológico, uma família de subconjuntos abertos $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é chamada de **cobertura aberta** de X se $\bigcup \mathcal{U} = X$.

Uma subcobertura de uma dada cobertura $\mathcal{U}$ é um subconjunto de $\mathcal{U}$ que ainda é uma cobertura.

Se τ é uma topologia do espaço X, então para qualquer subespaço $Y \subseteq X$ temos que a topologia do subespaço Y é dada por $\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$.

Definição 1.39. Um ponto $x \in X$ é **ponto de acumulação** de $A \subseteq X$ se para qualquer vizinhança V de x tem-se $V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

Denotamos como A' como o conjunto dos pontos de acumulação de A.

Definição 1.40. Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ família de subconjuntos de X. Diz-se que:

(i) $\mathcal{V}$ **refina** $\mathcal{U}$ se, para todo $V \in \mathcal{V}$, existir um $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U$.

(ii) Suponha que $\mathcal{U}$ seja uma cobertura aberta de X. Diz-se que $\mathcal{V}$ é um **refinamento aberto** de $\mathcal{U}$ se $\mathcal{V}$ for uma cobertura aberta de X e $\mathcal{V}$ refina $\mathcal{U}$.

(iii) X é um espaço **discreto** se τ é a topologia discreta, ou seja, $\tau = \mathcal{P}(X)$.

Proposição 1.41. *Sejam $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X e $\mathcal{V}$ um refinamento aberto de $\mathcal{U}$. Se $\mathcal{V}$ tem subcobertura finita então $\mathcal{U}$ tem subcobertura finita.*
Demonstração: Suponha que $\{V_1, ..., V_n\}$ seja uma subcobertura finita de $\mathcal{V}$ que cobre X, para cada V_i nessa subcobertura podemos fixar um aberto U_i de $\mathcal{U}$ tal que $V_i \subseteq U_i$ para todo i, temos que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} V_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \subseteq X.$$

Portanto, $\{U_1, ..., U_n\}$ é uma subcobertura finita de $\mathcal{U}$. $\square$

Proposição 1.42. *Seja ω_1 com a topologia da ordem. Dado $X = \{x_\alpha : \alpha < \xi\} \subseteq \omega_1$ com a enumeração canônica, onde $\xi = t.o.(X)$, temos que:*
(a) Se β é um ordinal sucessor então x_β é um ponto isolado do subespaço X;
(b) Se X é ilimitado então $\xi = \omega_1$.
Demonstração:
(a) Vale pois se $\beta = \delta + 1$ para algum $\delta \in \omega_1$ então $(x_\delta, x_{\delta+1}] \cap X = \{x_\beta\}$.
(b) Temos que $\xi = t.o.(X) \leqslant \omega_1$ sempre vale. Mas se $\xi < \omega_1$ temos que X seria enumerável e, como ω_1 é regular, não poderia ser ilimitado. $\square$

Proposição 1.43. *Se S é o conjunto de todos os pontos isolados de ω_1 então $|S| = \aleph_1$.*
Demonstração: Como $S \subseteq \omega_1$ temos que $|S| \leqslant \aleph_1$. por outro lado, se considerarmos a função injetora $\varphi : \omega_1 \to S$ tal que $\varphi(\alpha) = \alpha + 1$ temos que $\aleph_1 = |\omega_1| \leqslant |S|$. Portanto, $|S| = \aleph_1$. $\square$

Pelas duas últimas proposições, temos que: dado um conjunto com a enumeração canônica $X = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ ilimitado em ω_1 então X contém um subconjunto $A = \{x_\alpha : \alpha \in S\}$ que é discreto e não-enumerável, onde S é o mesmo da proposição acima.

Proposição 1.44. *Sejam X um espaço topológico e $Y \subseteq X$ um subespaço, são equivalentes:*

(i) Y *é discreto.*

(ii) Para todo $y \in Y$*, existe* U_y *vizinhança aberta de* y *tal que* $U_y \cap Y = \{y\}$.

(iii) $\forall\ y \in Y, \{y\}$ *é um aberto em* Y.

□

Proposição 1.45. *Seja $A \subseteq X$ e U uma subconjunto aberto de X. Então $U \cap A = \emptyset$ se, e somente se, $U \cap \overline{A} = \emptyset$.*

Definição 1.46. Seja X um espaço topológico. $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é dita **pontualmente finita (enumerável)**, se para todo $x \in X$ o conjunto $\{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$ é finito (enumerável).

Definição 1.47. Uma família $\mathcal{U}$ de subconjuntos de um espaço topológico X é dita **localmente finita**, se para todo $x \in X$ existe U vizinhança aberta de x em X tal que o conjunto $\{V \in \mathcal{U} : V \cap U \neq \emptyset\}$ é finito.

Definição 1.48. Uma família $\mathcal{U}$ de subconjuntos de um espaço topológico X é dita **discreta**, se para todo $x \in X$ existe U vizinhança aberta de x tal que $|\{V \in \mathcal{U} : V \cap U \neq \emptyset\}| \leqslant 1$.

Definição 1.49. Uma família de subconjuntos de um espaço topológico X é dito **σ-localmente finita** (σ-discreto) se pode ser representado como uma união enumerável de famílias localmente finitas (discretas).

Definição 1.50. Um espaço X é dito **localmente enumerável** se para todo ponto em X existe um sistema fundamental de vizinhanças abertas enumeráveis.

Note que, na definição acima, é imediato verificar que é equivalente exigir que cada ponto possua uma vizinhança enumerável.

Proposição 1.51. *Se $\mathcal{U}$ é uma família discreta de X e $Y \subseteq X$, então $\{U \cap Y : U \in \mathcal{U}\}$ é uma família discreta de Y.* □

Proposição 1.52. *Veja que:*

$$\textit{discreta} \Longrightarrow \textit{localmente finito} \Longrightarrow \textit{pontualmente finito}.$$

$\square$

Com relação a famílias localmentes finitas, veja que se $\mathcal{F}$ é uma família localmente finita de subconjuntos de um espaço X, indexada da forma $\mathcal{F} = \{F_i : i \in I\}$, então assumiremos que a indexação é tal que para cada $x \in X$ existe U vizinhança aberta tal que $x \in U$ e $\{i \in I : U \cap F_i \neq \emptyset\}$ é finito.

Proposição 1.53. *Se $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ é uma família localmente finita de subconjuntos não-vazios de X, então para qualquer $j \in I$ fixado, $\{U \in \mathcal{U} : U = U_j\}$ é finito.*

Demonstração: Seja $j \in I$ fixado e suponha que $\{U \in \mathcal{U} : U = U_j\}$ não seja finito, assim existiriam infinitos conjuntos que coincidiriam com U_j. Isso implica que $\mathcal{U}$ não seria pontualmente finita consequentemente, pelo comentário antes da proposição, não é localmente finita. $\square$

Com argumentos análogos aos acima temos a seguinte proposição:

Proposição 1.54. *Se $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ é uma família localmente finita de subconjuntos não-vazios de X e $A \subseteq X$ é um subespaço tal que $\mathcal{U}' = \{U_i \cap A : i \in I\}$ é uma família (localmente finita) de subconjuntos não-vazios de A, então vale a seguinte propriedade: para cada $U \in \mathcal{U}'$, a família $\mathcal{F}_{U'} = \{U \in \mathcal{U} : U \cap A = U'\}$ é finita.*

Proposição 1.55. *Se $\mathcal{F}$ é uma família localmente finita, então*

$$\bigcup_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} = \overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F} = \overline{\bigcup \mathcal{F}}.$$

Demonstração:
($\subseteq$) Como $F \subseteq \bigcup \mathcal{F}$ temos que $\overline{F} \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{F}}$ e assim $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{F}}$.
($\supseteq$) Por outro lado, seja $x \in \overline{\bigcup \mathcal{F}}$, por $\mathcal{F}$ ser localmente finita existe U aberto que intersecta somente um número finito de elementos de $\mathcal{F}$ que podemos supor, sem perda de generalidade, que sejam $F_1, ..., F_n$, i. e., $\{F \in \mathcal{F} : U \cap F \neq \emptyset\} = \{F_1, F_2, ..., F_n\}$. Assim, para algum $i \in \{1, 2, ..., n\}$ temos que $x \in \overline{F_i}$. De fato, se $x \notin \overline{F_1}, ..., x \notin \overline{F_n}$ existem $V_1, V_2, \ldots, V_n$ vizinhanças abertas de x tais que $V_1 \cap F_1 = \emptyset$, $V_2 \cap F_2 = \emptyset$, $\ldots$, $V_n \cap F_n = \emptyset$. Considerando $W = U \cap V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_n$ temos que W é uma vizinhança aberta de x e pela construção $W \cap (\bigcup \mathcal{F}) = \emptyset$, absurdo, pois $x \in \overline{\bigcup \mathcal{F}}$. Portanto, existe $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $x \in \overline{F_i}$ e assim $x \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$. $\square$

A proxima proposição será muito útil, principalmente na seção dos D-espaços.

Proposição 1.56. *Um subconjunto $Y \subseteq X$ é um subespaço discreto em X se, e só se, Y não contém ponto de acumulação. Além disso, o subespaço Y é fechado e discreto em X se, e somente se, Y não possui ponto de acumulação.* $\square$

Proposição 1.57. *Sejam X um espaço topológico T_1 e $F_1, F_2, ..., F_n$ uma família finita de fechados e discretos. Então $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ é fechado e discreto.*

Demonstração: Como cada F_i é fechado e discreto, F_i não possui ponto de acumulação, assim $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ não possui pontos de acumulação, pois se existisse x que fosse ponto de acumulação de $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ também seria de algum dos F_i, mas por finitude local F_i não possui ponto de acumulação. Portanto, $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ é fechado e discreto. $\square$

Segue pela última proposição, já que um finito é fechado e discreto num espaço T_1, que:

Proposição 1.58. *Sejam X um espaço topológico T_1, $A \subseteq X$ um fechado e discreto e $F \subseteq X$ finito. Então $A \cup F$ é fechado e discreto em X.*

Proposição 1.59. *Sejam X um espaço topológico e os conjuntos $A, B \subseteq X$ tal que $A \subseteq B \subseteq X$. Se A for discreto em B então A é discreto em X.*

Demonstração: Suponha que A seja discreto em B. Assim vai existir uma família de abertos de B, digamos $\{V_x : x \in A\}$ tal que $A \cap V_x = \{x\}$, para todo $x \in A$. Mais ainda, V_x é um aberto em B e é da forma $B \cap U_x$ para algum aberto U_x de X. Logo temos que

$$\{x\} = A \cap V_x = A \cap (B \cap U_x) = A \cap U_x.$$

Assim, A é discreto em X. $\square$

Proposição 1.60. *Dados X espaço topológico T_1, $x \in X$ e $A \subseteq X$, são equivalentes:*

(i) $x \in X$ é ponto de acumulação de A.

(ii) Toda vizinhança aberta V de x possui infinitos pontos de A.

Demonstração:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Seja $x \in X$ um ponto de acumulação de A e suponha, por absurdo, que não valha (ii), ou seja, existe $V \subseteq X$, uma vizinhança aberta de x, tal que $V \cap A$ seja finito. Assim $V \cap (A \setminus \{x\})$ é finito e também é fechado (pois X é T_1). Assim, temos que $U = V \setminus (V \cap (A \setminus \{x\}))$ é uma vizinhança aberta de x que não intersecta $A \setminus \{x\}$, absurdo, pois x é ponto de acumulação de A.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Segue direto pela definição de ponto de acumulação. $\square$

Proposição 1.61. *Dados X espaço topológico, são equivalentes:*

(i) X *é* T_1.

(ii) $x \in X$ *é ponto de acumulação de* A *se, e somente se, qualquer vizinhança aberta* V *de* x *possui infinitos pontos de* A.

Demonstração:
$(i) \Rightarrow (ii)$ Esse lado é a proposição 1.60.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Supondo (ii) e que X não seja T_1 assim existe um unitário que não é fechado, ou seja, $\{y\} \neq \overline{\{y\}}$ que é equivalente a $\{y\} \subsetneq \overline{\{y\}}$. Logo tomando $A = \{y\}$ existe $x \in \overline{\{y\}}$ com $x \neq y$ que é ponto de acumulação de A, contrariando a hipótese.

Proposição 1.62. *Sejam* X *um espaço* T_1 *e* $A \subseteq X$. *Então,* $\{\{x\} : x \in A\}$ *é localmente finita se, e somente se,* A *é fechado e discreto em* X.
Demonstração:
$(\Rightarrow)$ Suponha que $A \subseteq X$ e $\mathcal{A} := \{\{x\} : x \in A\}$ seja localmente finita e A não seja fechado e discreto, com isso, A possui um ponto de acumulação x, assim para toda vizinhança aberta U de x que possui infinitos pontos de A temos que $\{\{x\} \in \mathcal{A} : \{x\} \cap U \neq \emptyset\}$ é infinito, mas $\mathcal{A}$ é localmente finita, absurdo. Portanto, A é fechado e discreto.
$(\Leftarrow)$ Suponha que A seja fechado e discreto, assim A não possui ponto de acumulação. Dado $x \in X$, existe V vizinhança de x tal que $V \cap A$ é finito e assim $\{\{x\} : \{x\} \cap A \neq \emptyset\}$ é finita logo $\mathcal{A}$ é localmente finita. □

Proposição 1.63. *Seja* $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ *uma família localmente finita de um espaço topológico* X T_1. *Para cada* $\alpha \in I$, *se fixado um elemento* $x_\alpha \in U_\alpha$, *então o conjunto* $A = \{x_\alpha : \alpha \in I\}$ *é um subconjunto fechado e discreto em* X.
Demonstração: Seja $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ uma família localmente finita de X. Para cada $\alpha \in I$ fixemos um elemento $x_\alpha \in U_\alpha$, assim com X é T_1 e a família $\{\{x_\alpha\} : x_\alpha \in A\}$ é localmente finita, pois $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ é localmente finita, temos, pela proposição 1.62, que A é fechado e discreto em X. □

Definição 1.64. Seja X um espaço topológico.

(i) Diz-se que X é **compacto** se para toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X existir uma subcobertura finita $\mathcal{U}$' de $\mathcal{U}$.

(ii) Diz-se que X é **enumeravelmente compacto** se para toda cobertura aberta enumerável $\mathcal{U}$ de X existir uma subcobertura finita $\mathcal{U}$' de $\mathcal{U}$.

(iii) Diz-se que X é **Lindelöf** se toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X possui uma subcobertura enumerável.

(iv) Diz-se que X é ω_1**-Lindelöf** se toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X de tamanho $\aleph_1$ possui uma subcobertura enumerável.

(v) Um espaço topológico X é dito **linearmente Lindelöf** se toda cobertura aberta de X linearmente ordenada por $\subsetneq$ possui uma subcobertura enumerável.

(vi) Diz-se que X é **paracompacto** se toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X possui um refinamento aberto localmente finito.

(vii) Diz-se que X é **metacompacto** se toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X possui um refinamento aberto pontualmente finito.

(viii) Diz-se que X é **metalindelöf** se toda cobertura aberta de X possui um refinamento aberto pontualmente enumerável.

(ix) Diz-se que X é σ**-compacto** se é união enumerável de compactos.

(x) Diz-se que X é $\aleph_1$**-compacto** se todo subconjunto não enumerável de X tiver um ponto de acumulação.

(xi) Diz-se que X é **pseudocompacto** se toda função real contínua, $f : X \to \mathbb{R}$, é limitada.

Pelas definições acima, dado um espaço topológico X, tem-se que X é compacto se, e somente se, X for enumeravelmente compacto e Lindelöf. Além disso, um subespaço $A \subseteq X$ é compacto se, e só se, dado qualquer família $\mathcal{V}$ de abertos de X que cobre A existe uma subfamília finita $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ que cobre A.

Proposição 1.65. *Todo subespaço fechado de um espaço topológico compacto é compacto.* $\square$

A proposição acima também vale para enumeravelmente compacto.

Proposição 1.66. *Um subespaço compacto de um espaço T_2 é fechado.*
Demonstração: É exatamente 3.1.8 de [10]. $\square$

Proposição 1.67. *Seja X um espaço de Hausdorff. Se $D \subsetneq X$ é um subconjunto denso próprio então D não é compacto.*

Demonstração: Suponha que $D \subsetneq X$ seja compacto, por X ser T_2 temos que D é fechado, pela proposição 1.66, logo $D = \overline{D}$. Mas, por D ser denso em X temos que

$$D = \overline{D} = X$$

absurdo, pois D é um subconjunto denso próprio de X. Portanto, D não é compacto. □

Proposição 1.68. *Se X é compacto, então é pseudocompacto.* □

Proposição 1.69. *Um espaço topológico compacto e T_2 é normal.* □

Proposição 1.70. *A imagem contínua de um compacto é compacto.* □

Observe que, Y é imagem contínua de X se existe $f : X \to Y$ contínua e sobrejetiva. Outrossim, a proposição acima vale trocando a palavra compacto por enumeravelmente compacto ou Lindelöf.

Proposição 1.71. *Todo espaço topológico compacto (enumeravelmente compacto) e discreto é finito.* □

Proposição 1.72. *Todo espaço topológico Lindelöf e discreto é enumerável.* □

Proposição 1.73. *Todo espaço topológico σ-compacto é Lindelöf.*
Demonstração: Sejam X um espaço σ-compacto e $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta qualquer de X. Mostraremos que essa cobertura possui uma subcobertura enumerável. De fato, temos que $X = \bigcup\{K_n : n \in \omega\}$ onde cada K_n é compacto, assim, para cada $n \in \omega$, vai existir $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}$ finito tal que $K_n \subseteq \bigcup \mathcal{U}_n$. Assim, $\mathcal{U}' = \bigcup\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ é enumerável (pois, é união enumerável de finitos), $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ e $X \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$, pois, dado $x \in X$, vai existir $n \in \omega$ tal que $x \in K_n \subseteq \bigcup \mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}'$. Portanto, $\mathcal{U}$ possui uma subcobertura enumerável, isto é, X é Lindelöf. □

Proposição 1.74. *Se X é Lindelöf e $Y \subseteq X$ é fechado e discreto então F é enumerável.*
Demonstração: Suponha que X seja Lindelöf e $Y \subseteq X$ seja um fechado e discreto de X. Se Y não for enumerável, por ser discreto existe $\{V_y : y \in Y\}$ família de abertos de X tal que $V_y \cap F = \{y\}$, para todo $y \in Y$. Assim, temos que $\mathcal{U} = \{X \setminus Y\} \cup \{V_y : y \in Y\}$ é uma cobertura aberta X que não admite subcobertura enumerável, pois a família $\{V_y : y \in Y\}$ é não-enumerável e cada elemento não pode ser descartado, contradição. Portanto, tal Y é enumerável. □

Proposição 1.75. *Todo espaço topológico enumerável é Lindelöf.*

Demonstração: De fato, seja X espaço topológico se X for finito temos que $\mathcal{P}(X)$ também é finito implicando X ser Lindelöf. Caso X seja infinito enumerável podemos escrever $X := \{x_n : n < \omega\}$. Fixemos uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ qualquer de X, daí cada ponto de X pertence a no mínimo um aberto de $\mathcal{U}$, assim podemos escolhemos um único aberto U_{x_n} para cada ponto $x_n \in X$, daí a família desses abertos $\mathcal{U}' = \{U_{x_n} : x_n \in X\} \subseteq \mathcal{U}$ é uma subcobertura enumerável de X. Portanto, X é Lindelöf. $\square$

Teorema 1.76. *Seja X um espaço topológico T_1. São equivalentes:*

(i) X é enumeravelmente compacto.

(ii) Todo subconjunto infinito de X possui ponto de acumulação.

Demonstração:
$(i) \Rightarrow (ii)$ Suponha que X seja enumeravelmente compacto e que exista $A \subseteq X$ infinito e sem ponto de acumulação, daí, por 1.56, A será fechado e discreto. Por A ser fechado e estar contido em um enumeravelmente compacto vai ser, pela proposição 1.65, enumeravelmente compacto. Como A é discreto e enumeravelmente compacto, pela proposição 1.71, A é finito, absurdo, pois A foi tomado infinito. Logo, A possui ponto de acumulação.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Suponha que todo subconjunto infinito de X possui ponto de acumulação e X não seja enumeravelmente compacto. Assim, existe uma cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ sem subcobertura finita. Assim, existe $x_1 \notin U_1$, pois não possui subcobertura finita, também existe $x_2 \notin U_1 \cup U_2 \cup \{x_1\}$. Logo, consegue-se construir uma sequência tal que

$$x_n \notin \bigcup_{k \leqslant n} U_k \cup \{x_1, x_2, ..., x_{n-1}\}$$

Mostraremos que o conjunto infinito $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ não possui ponto de acumulação. De fato, dado $x \in X$, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_m$. Pela construção de A temos que para todo $k > m \implies x_k \notin U_k$ logo

$$A \cap U_m \subseteq \{x_1, x_2, ..., x_{m-1}\}$$

Por X ser T_1, pela proposição 1.60, temos que x não é ponto de acumulação de A. Como x foi arbitrário, temos que A não possui ponto de acumulação, contrariando a suposição inicial. Portanto X é enumeravelmente compacto. $\square$

Veja que na ida do teorema acima não usa T_1. Logo, segue da demonstração do teorema que:

Corolário 1.77. *Seja X um espaço topológico.*

(i) *Se X é enumeravelmente compacto então, todo subconjunto fechado e discreto de X é finito.*

(ii) *Se X é compacto então, todo subconjunto fechado e discreto de X é finito.*

Proposição 1.78. *Seja X não linearmente Lindelöf. O cardinal* $\lambda = min\{|\mathcal{U}| \ : \mathcal{U}$ *é cobertura aberta bem ordenada por* $\subsetneq$ *sem subcobertura enumerável*$\}$ *é regular.*

Demonstração: Seja $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \zeta\}$ uma cobertura aberta bem ordenada por $\subsetneq$ sem subcobertura enumerável com a enumeração canônica, onde ζ é o tipo de ordem de $\langle \mathcal{U}, \subseteq \rangle$ e $|\mathcal{U}| = |\zeta| = \lambda$.

Tome $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ cofinal em $\mathcal{U}$ de tamanho $|\mathcal{U}'| = cf(\zeta)$, por ser cofinal e $\mathcal{U}$ crescente temos, pela proposição 1.34, que

$$\bigcup \mathcal{U}' = \bigcup \mathcal{U} = X.$$

Assim, $\mathcal{U}'$ não pode ter subcobertura enumerável, pois se tivesse $\mathcal{U}$ também teria o que seria um absurdo. Logo, $\lambda \leqslant cf(\zeta)$, pela definição de λ, assim $\lambda \leqslant cf(\zeta) \leqslant |\zeta| = \lambda$, ou seja, λ é regular. □

Proposição 1.79. *Seja X não compacto. O cardinal* $\theta = min\{|\mathcal{U}| \ : \mathcal{U}$ *é cobertura aberta sem subcobertura finita* $\}$ *é regular.*

Demonstração: Seja $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \theta\}$ uma cobertura aberta sem subcobertura finita tal que $|\mathcal{U}| = \theta$. Considere para cada $\alpha \in \theta$ o conjunto $V_\alpha = \bigcup_{\xi \leqslant \alpha} U_\xi$. Veja que $\bigcup_{\xi \leqslant \alpha} U_\xi \neq X$ para todo $\alpha \in \theta$, pois $\alpha < \theta$ e θ é o tamanho mínimo de uma cobertura de X sem subcobertura finita. Assim, se $\{U_\xi : \xi \leqslant \alpha\}$ fosse cobertura, teria subcobertura finita, absurdo, pois essa subcobertura finita seria subcobertura finita de $\mathcal{U}$.

Suponha que $cf(\theta) = \kappa < \theta$, daí pela proposição 1.34 existe $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$, $|\mathcal{U}'| = \kappa$ tal que $\bigcup \mathcal{U}' = \bigcup \mathcal{U} = X$. Como $|\mathcal{U}'| < \theta$ temos que $\mathcal{U}'$ possui uma subcobertura finita, digamos $\mathcal{U}''$. Mas, $\mathcal{U}'' \subseteq \mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ assim $\mathcal{U}''$ seria uma subcobertura finita de $\mathcal{U}$, mas $\mathcal{U}$ foi tomado de tamanho mínimo sem subcobertura finita, contradição. Portanto, $cf(\theta) = \theta$. □

Teorema 1.80 (Teorema de Tychonoff)**.** *Produto cartesiano de compactos é compacto.*

Definição 1.81. Seja X um espaço topológico. Uma sequência $\{x_n\}$ em X **converge** para um ponto x se, e somente se, para todo V vizinhança aberta de x o conjunto $\{n : x_n \notin V\}$

é finito.

Analogamente, podemos definir convergência de conjuntos: Um conjunto enumerável A converge para um ponto x, se para qualquer vizinhança aberta U de x, $A \setminus U$ é finito.

Definição 1.82. Seja X um espaço topológico. Diz-se que $S \subseteq X$ é uma **sequência convergente** se é da forma $\{x_n : n < \omega\} \cup \{x\}$ onde x_n converge para x.

Proposição 1.83. *Seja X um espaço topológico. Se $S \subseteq X$ é uma sequência convergente então S é compacto.*

Demonstração: Seja $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ um cobertura aberta de S. Fixamos $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$, com isso, um quantidade finita de elementos, digamos $\{x_0, x_1, ..., x_k\}$ de S não pertence a U. Para cada um desses pontos fixamos um único aberto $U_0, U_1, ..., U_k$ de $\mathcal{U}$ tais que $x_i \in U_i$ para todo $i \in \{1, ..., k\}$. Assim, obtemos uma subcobertura finita $\mathcal{U}' = \{U_0, U_1, ..., U_k\} \cup \{U\}$ de $\mathcal{W}$ que cobre S. Portanto, S é compacto. $\square$

Definição 1.84. Seja $\langle X, \tau \rangle$ um espaço topológico. A topologia τ é dita **metrizável** se, e somente se, existe uma métrica d em X tal que τ é a topologia induzida pela métrica d sobre X.

Por exemplo, a topologia discreta é metrizável, pela métrica zero-um.

Veja que sequências convergentes em espaços que não sejam de Hausdorff não precisam ser metrizáveis. Por exemplo, existem exemplos de espaços T_1 onde uma sequência tem dois limites distintos: Seja $\{x_1, x_2, ...\}$ um sequência que converge para x e y com $x \neq y$. Tomando a nova sequência $\{y, x_1, x_2, ...\}$ que converge para x temos que essa sequência converge mas não é metrizável, pois metrizável é T_2 e essa sequência não é T_2.

Proposição 1.85. *Seja X um espaço topológico T_2. Se $S \subseteq X$ é uma sequência convergente então S é metrizável.*

Demonstração: Temos dois casos:

Se x_n é eventualmente constante existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m$ tem-se $x_n = x_m$, nesse caso S é finito, como X é T_2 temos que S é discreto e com isso metrizável.

Se x_n não é eventualmente constante, temos que S é infinito. Nesse caso podemos tomar uma subsequência z_{n_k} onde todos os termos são distintos, nesse caso $S = \{x_n : n \geqslant 1\} \cup \{x\} = \{z_{n_k} : n \geqslant 1\} \cup \{x\}$. Como podemos construir um homeomorfismo entre S e $\{\frac{1}{n} : n \geqslant 1\} \cup \{0\}$, que é metrizável, por ser um subespaço da reta temos que S é metrizável.

O seguinte teorema pode ser encontrado [10]:

Teorema 1.86. *Seja M um espaço métrico, são equivalentes:*

(*i*) *M é segundo-enumerável;*

(*ii*) *M é separável;*

(*iii*) *M é Lindelöf.* $\square$

Definição 1.87. Uma família $\mathcal{F} = \{F_s : s \in S\}$ tem a **propriedade da interseção finita** (pif), se para cada $S' \subseteq S$ finito, não vazio, temos que $\bigcap\{F_s : s \in S'\} \neq \emptyset$.

Definição 1.88. Uma família $\mathcal{F} = \{F_s : s \in S\}$ tem a **propriedade da interseção enumerável** (pie), se para cada $S' \subseteq S$ enumerável, não vazio, temos que $\bigcap\{F_s : s \in S'\} \neq \emptyset$.

Proposição 1.89. *Um espaço X é compacto se, e somente se, toda família, não vazia, de subconjuntos fechados, não vazios, de X que satisfaz a pif tem intersecção não vazia.* $\square$

Proposição 1.90. *Um espaço X é enumeravelmente compacto se, e somente se, toda família enumerável, não vazia, de subconjuntos fechados de X que satisfaz a pif tem intersecção não vazia.* $\square$

Proposição 1.91. *Um espaço X é Lindelöf se, e somente se, toda família de subconjuntos fechados de X, que satisfazendo a pie tem intersecção não vazia.* $\square$

Proposição 1.92. *Dados X e Y espaços topológicos, uma função contínua e injetora $f : X \longrightarrow Y$, um ponto $z \in X$ e um $A \subseteq X$, se z for um ponto de acumulação de A em X, então $f(z)$ é um ponto de acumulação de $f[A]$ em Y.* $\square$

Em [10] temos o seguinte:

Teorema 1.93 (Extensão de Tietze)**.** *Seja X um espaço topológico normal e $A \subseteq X$ fechado em X. Se $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então existe $g : X \to \mathbb{R}$ contínua tal que $g(x) = f(x)$, para todo $x \in A$.* $\square$

Definição 1.94. Um espaço X é **tenuamente compacto** se toda família localmente finita de abertos não vazios é finita.

Definição 1.95. Um espaço X é **tenuamente Lindelöf** se toda família localmente finita de abertos não vazios de X é enumerável.

Definição 1.96. Um espaço X satisfaz a condição **DCCC** (discrete countable chain condition) se toda família discreta de abertos não vazios de X é enumerável.

Definição 1.97. Um espaço X é **DFCC** (discrete finite chain condition) se toda família discreta de abertos não vazios de X é finita.

Também por [10], temos as seguintes equivalências para um espaço pseudocompacto.

Teorema 1.98. *Um espaço topológico Tychonoff são equivalentes*

(i) X *é pseudocompacto.*

(ii) X *é tenuamente compacto.*

(iii) Toda cobertura aberta localmente finita de X *é finita.*

(iv) Toda cobertura aberta localmente finita de X *possui subcobertura finita.*

Por [19] temos o seguinte teorema:

Teorema 1.99. *Seja* X *um espaço topológico Tychonoff. Então são equivalentes*

(i) X *é pseudocompacto.*

(ii) X *é tenuamente compacto.*

(iii) DFCC.

□

Também, segue por [10], 3.8.11 que:

Proposição 1.100. *Se* X *é regular e Lindelöf então é paracompacto.* □

Proposição 1.101. *Seja X um espaço de Tychonoff e pseudocompacto. Se X é não compacto então não é Lindelöf.*

Demonstração: Seja X Tychonoff. Mostraremos que se X é Lindelöf e pseudocompacto então é compacto. Suponha que X seja Lindelöf e pseudocompacto, assim dado $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X qualquer, por X ser regular, pela proposição 1.100, X é paracompacto, assim temos que $\mathcal{U}$ possui um refinamento aberto localmente finito $\mathcal{V}$. Por X ser pseudocompacto, pela proposição 1.98, $\mathcal{V}$ possui uma subcobertura finita, daí por 1.41, $\mathcal{U}$ possui uma subcobertura finita, portanto, X é compacto. $\square$

Corolário 1.102. *Seja X um espaço Tychonoff. Se X é uma união enumerável de pseudocompactos, então é tenuamente Lindelöf.*

Demonstração: Suponha que $X = \bigcup_{n \in \omega} X_n$ onde cada X_n é pseudocompacto. Seja $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in I\}$ uma família localmente finita de subconjuntos abertos não vazios de X. A cada $n \in \omega$, seja $I_n = \{\alpha \in I : V_\alpha \cap X_n \neq \emptyset\}$ e considere $\mathcal{V}_n = \{V_\alpha \cap X_n : \alpha \in I_n\}$ uma família localmente finita de abertos não vazios de X_n. Por X_n ser pseudocompacto temos pelo teorema 1.98 que $\mathcal{V}_n$ é finita para cada $n \in \omega$.

Afirmamos que, para cada n, I_n é finito, antes veja que cada $V_\alpha \cap X_n$ só possui finitos elementos, como cada $\mathcal{V}_n$ é finita temos, pela proposição 1.53, que I_n é uma união finita de finitos, logo finito, e portanto $I = \bigcup_{n<\omega} I_n$ é enumerável. Portanto, X é tenuamente Lindelöf. $\square$

Teorema 1.103. *Seja X um espaço topológico.*

(i) *Se X é enumeravelmente compacto, então é pseudocompacto.*

(ii) *Se X é normal, então X é pseudocompacto se, e somente se, é enumeravelmente compacto.*

Demonstração:
(i) Se X é enumeravelmente compacto seja $f : X \to \mathbb{R}$, contínua, então $f(X)$ é enumeravelmente compacto em $\mathbb{R}$. Em espaços métricos ser enumeravelmente compacto é equivalente a ser compacto, assim $f(X)$ é limitado em $\mathbb{R}$.
(ii) Se X não for enumeravelmente compacto existe $A = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \subseteq X$, com $x_i \neq x_j$, sem ponto de acumulação, daí fechado e discreto. Definindo $f : X \to \mathbb{R}$ como $f(x_i) = i$, por A ser discreto temos que f é contínua, e por A ser fechado, pelo teorema de Tietze, existe $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $g \restriction A = f$. Com isso temos que g é ilimitada e portanto X não é pseudocompacto. $\square$

Proposição 1.104. *Uma função f é contínua se, e somente se, $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$ para todo $A \subseteq X$.*

Um caso particular da proposição acima é que se $f : X \longrightarrow Y$ é continua e sobrejetiva e $D \subseteq X$ é denso então $f[D]$ é denso em Y. Pois, $Y = f[X] = f[\overline{D}] \subseteq \overline{f[D]} \subseteq Y$ e assim $Y = \overline{f[D]}$

Proposição 1.105. *Seja X um espaço topológico, se existe $D \subsetneq X$ denso e enumeravelmente compacto então X é pseudocompacto.*

Demonstração: Como enumeravelmente compacto implica pseudocompacto, pelo teorema 1.103 (i), basta mostrar que se existe $D \subsetneq X$ denso e pseudocompacto então X é pseudocompacto. Ora, pela Proposição 1.104, se $f : X \to R$ é contínua e $Y = im(f)$, então $Y = f[X] = f[\overline{D}] \subseteq \overline{f[D]}$. Mas, em um espaço métrico um conjunto e seu fecho possuem o mesmo diâmetro (e note que $f[D]$ é limitado). Assim, Y é necessariamente limitado, daí X é pseudocompacto. □

Proposição 1.106. *Se X é primeiro enumerável e $D \subseteq X$ é denso tal que todo subconjunto infinito de D possui ponto de acumulação em X, então X é pseudocompacto.*

Demonstração: Se X não for pseudocompacto, existe $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ilimitada. Por D ser denso $f[D]$ é ilimitado. Assim, existe $x_1 \in D$ com $|f(x_1)| > 1$, $x_2 \in D$ com $|f(x_2)| > 2$, ..., $x_n \in D$ com $|f(x_n)| > n$. Tomando o subconjunto infinito $D' = \{x_n : n \geqslant 1\}$ de D, afirmamos que D' não possui ponto de acumulação (o que já contradiz a hipótese). De fato, se $z \in X$ é ponto de acumulação de D' então existe, por X ser primeiro enumerável, uma subsequência z_n em D' que converge para z, com isso $f(z_n) \longrightarrow f(z)$, mas $f(z_n)$ é ilimitada e não pode convergir, um absurdo. Portanto, X é pseudocompacto. □

Definição 1.107. Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade.

(i) Diz-se que $\mathcal{P}$ é **preservada por imagens contínuas** se, para todo X satisfazendo $\mathcal{P}$ e para toda $f : X \to Y$ contínua e sobrejetiva, então Y satisfaz $\mathcal{P}$.

(ii) Diz-se que $\mathcal{P}$ é **produtiva** se dada $\{X_i : i \in I\}$ família de espaços satisfazendo $\mathcal{P}$, então $\prod_{i \in I} X_i$ satisfaz $\mathcal{P}$.

(iii) Diz-se que $\mathcal{P}$ é **compactamente produtiva** se sempre que X satisfaz $\mathcal{P}$ e Y é compacto então $X \times Y$ satisfaz $\mathcal{P}$.

(iv) Diz-se que $\mathcal{P}$ é **hereditária** se para todo espaço topológico X que satisfaz $\mathcal{P}$ tem-se que todo subespaço $Y \subseteq X$ satisfaz $\mathcal{P}$. □

Temos por [10], 3.8.10 e 3.10.14, as duas seguintes proposições:

Proposição 1.108. *A propriedade de Lindelöf é compactamente produtiva, i. e., o produto de um Lindelöf e um compacto é Lindelöf.* □

Proposição 1.109. *A propriedade de ser enumeravelmente compacto é compactamente produtiva.* □

Pode-se mostrar também que, σ-compacto é compactamente produtiva:

Proposição 1.110. *A propriedade de ser σ-compacto é compactamente produtiva.*
Demonstração: Para todo $A \subseteq X$ compacto, se Y é compacto, então $A \times Y$ é compacto e como X é σ-compacto $X = \bigcup\{K_n : n \in \omega\}$, logo $X \times Y = \bigcup\{K_n : n \in \omega\} \times Y = \bigcup\{K_n \times Y : n \in \omega\}$. □

Com relação a hereditariedade, ser compacto, ser enumeravelmente compacto e ser Lindelöf são propriedades topológicas hereditárias para subespaços fechados. Com base nos axiomas de separação temos:

Proposição 1.111. *T_i para $i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$ é uma propriedade topológica hereditária e produtiva.* □

Vale observar que normalidade não é hereditária, de fato, apresentaremos um contra-exemplo para tal fato. Mas quando se trata de subespaços fechados a normalidade é hereditária.

Definição 1.112. Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Diz-se que A é um conjunto $\boldsymbol{G_\delta}$ em X se existir uma família enumerável $\{U_n : n < \omega\}$ de subconjuntos abertos de X tal que $A = \bigcap_{n<\omega} U_n$.

Segue pela definição acima que qualquer conjunto aberto é G_δ.

A versão a seguir é tal que basta usar o axioma da escolha enumerável em sua demonstração. Também resolve vários problemas sem necessitar de fazer referência a clubs e estacionários.

Lema 1.113 (Versão do Pressing Down Lemma)**.** *Se $f : \omega_1 \to \omega_1$ é regressiva, i. e., $\forall\, \alpha \in \omega_1 \setminus \{0\}$ vale $f(\alpha) < \alpha$ então existe $A \subseteq \omega_1$ ilimitado tal que $f \restriction A$ é constante.* □

Corolário 1.114. *Se $f : \omega_1 \to \mathbb{R}$ é contínua, então existe $\beta < \omega_1$ que é tal que $f \restriction [\beta, \omega_1[$ é constante.*

Em palavras, toda função contínua de ω_1 em $\mathbb{R}$ é constante em um segmento final.

Definição 1.115. Dada uma família $\mathcal{U}$ de subconjuntos de um conjunto X e um subconjunto A de X, definimos a **estrela** de A com relação a $\mathcal{U}$ o seguinte conjunto

$$St(A,\mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : A \cap U \neq \emptyset\}.$$

No caso em que $St(A,\mathcal{U}) = X$ o subconjunto A é dito **núcleo** estrela de $\mathcal{U}$.

Observe que para $x \in X$ temos que $St(\{x\},\mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : U \cap \{x\} \neq \emptyset\} = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : x \in \mathcal{U}\}$. Por conveniência denotaremos $St(x,\mathcal{U})$ em vez de $St(\{x\},\mathcal{U})$. No capítulo seguinte mostraremos que para todo espaço topológico X e toda cobertura $\mathcal{U}$ de X existe $A \subseteq X$ discreto com $St(A,\mathcal{U}) = X$.

Proposição 1.116. *Sejam X um conjunto, $A, B \subseteq X$ e $\mathcal{U}$ uma famílias de abertos de X. Então valem:*

(*i*) $A \subseteq St(A,\mathcal{U})$.

(*ii*) *Se $A \subseteq B$, então $St(A,\mathcal{U}) \subseteq St(B,\mathcal{U})$*

(*iii*) *Se $\mathcal{V}$ refina $\mathcal{U}$, então $St(A,\mathcal{V}) \subseteq St(A,\mathcal{U})$.*

(*iv*) *$St(A,\mathcal{U})$ é aberto.*

(*v*) $St(\cup\mathcal{V},\mathcal{U}) = \bigcup\{St(V,\mathcal{U}); V \in \mathcal{V}\}$.

(*vi*) *Se D é denso em A, então $St(D,\mathcal{U}) = St(A,\mathcal{U})$. Em particular, se D é denso em X, então $St(D,\mathcal{U}) = X$*

Demonstração:
(*i*), (*ii*), (*iii*) e (*iv*) são imediatas.
(*v*) ($\subseteq$) Seja $x \in St(\cup\mathcal{V},\mathcal{U})$ assim existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$ e $U \cap \bigcup\mathcal{V} \neq \emptyset$, com isso existe um $V \in \mathcal{V}$ tal que $U \cap V \neq \emptyset$. Isso implica que $x \in St(V,\mathcal{U})$ e assim $x \in \bigcup\{St(V,\mathcal{U}); V \in \mathcal{V}\}$.
($\supseteq$) Seja $x \in \bigcup\{St(V,\mathcal{U}); V \in \mathcal{V}\}$ então $x \in St(V,\mathcal{U})$ para algum $V \in \mathcal{V}$. Como $V \subseteq \bigcup\mathcal{V}$ pelo item (*ii*) temos que $x \in St(V,\mathcal{U}) \subseteq St(\cup\mathcal{V},\mathcal{U})$. Portanto, $x \in St(\cup\mathcal{V},\mathcal{U})$
(*vi*) ($\subseteq$) Esse lado é imediato por (*ii*).
$St(D,\mathcal{U}) = St(A,\mathcal{U})$

(vi) $(\subseteq)$ segue pelo item (ii).
$(\supseteq)$ Seja $x \in St(A,\mathcal{U})$, assim existe um aberto $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$ e $U \cap A \neq \emptyset$. Como $U \cap A$ é um aberto de A temos que $U \cap A$ intersecta D assim $U \cap D \neq \emptyset$ isso implica que $x \in U \subseteq St(D,\mathcal{U})$. $\square$

Uma aplicação da proposição acima é o seguinte:

Proposição 1.117. Sejam X, T_1, $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X e $A \subseteq X$ satisfazendo:

$$x, y \in A, x \neq y \ \Rightarrow \ x \notin St(y,\mathcal{U}).$$

Então $\{\{x\} : x \in A\}$ é localmente finita.
Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\{\{x\} : x \in A\}$ não seja localmente finita, pela proposição 1.62, existe $z \in X$ que é ponto de acumulação de A. Assim para toda vizinhança aberta U de z tal que $U \cap (A \setminus \{z\})$ é infinito. Portanto, fixamos uma vizinhança U assim existem $x, y \in U \cap (A \setminus \{z\})$ temos que $x \in St(y,\mathcal{U})$, absurdo, por hipótese $x \notin St(y,\mathcal{U})$. $\square$

Introduziremos, além dos espaços estrela $\mathcal{P}$, também os espaços *dualmente* $\mathcal{P}$: para definir tal família de classes de espaços, temos que inicialmente definir *ona* (de *open neighbourhood assignment*, ou, em português, *atribuição de vizinhanças abertas*).

Definição 1.118. Dado um espaço topológico X, uma **atribuição de vizinhanças abertas**, ou ona, para X é uma família de abertos $\mathcal{O} = \{O_x : x \in X\}$ satisfazendo $x \in O_x$ para todo $x \in X$.

Um subespaço $Y \subseteq X$ é dito ser um **núcleo** de uma dada ona $\mathcal{O}$ se

$$\bigcup_{x \in Y} O_x = X.$$

Uma ona nada mais é que uma função $f : X \to \tau \setminus \{\emptyset\}$ que a cada $x \in X, x \in f(x)$ onde cada $f(x) = U \in \tau$ é um vizinhança aberta de x.

Definição 1.119. Uma espaço topológico X é **separado a direita** se existe $<^*$ boa-ordem sobre X e uma sequência separante $\{U_x : x \in X\}$ que é uma ona e é tal que

$$x \notin U_y, \ \forall \ y <^* x.$$

Com a definição acima temos que cada segmento inicial é aberto. Pois, se $S_z = pred\{X, z, <^*\}$ é um segmento inicial então para qualquer $y <^* z$ temos que existe um U_y

aberto da sequência separante tal que $y \in U_y \subseteq S_y \subseteq S_z \Longrightarrow S_z$ é aberto.

Veja que os ordinais são separados à direita.

Definiremos algumas funções cardinais que desempenham um papel importante em propriedades topológicas, por exemplo fazer comparações quantitativas entre espaços topológicos.

Definição 1.120. Define-se o **extent** de um conjunto X como sendo:

$$ext(X) = e(X) = sup\ \{\ |F| : F \subseteq X \text{ é fechado e discreto em } X\} + \omega.$$

Definição 1.121. Define-se o **spread** de X como sendo:

$$s(X) = sup\{\ |D| : D \subseteq X \text{ é discreto em } X\} + \omega.$$

Definição 1.122. Define-se o **grau de Lindelöf** de X como sendo:

$$L(X) = min\{\kappa \geqslant \omega : \text{Toda cobertura aberta de } X \text{ tem subcobertura de cardinalidade menor ou igual a } \kappa\}.$$

Proposição 1.123. $e(X) \leqslant L(X)$.
Demonstração: Sejam $e(X) = \lambda$ e $L(X) = \kappa$. Suponha, por absurdo, que $\lambda > \kappa$. Veja que λ é o supremo dos fechados e discretos logo κ não é cota superior, com isso considere $F = \{x_\alpha : \alpha < \theta\} \subseteq X$ um subconjunto fechado e discreto em X de tamanho θ onde $\kappa < \theta$. Por F ser discreto existe uma família de abertos $\{U_x : x \in F\}$ tal que $U_x \cap F = \{x\}$ para todo $x \in F$. Como F é fechado temos que $X \setminus F$ é aberto. Assim podemos considerar a cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U_x : x \in F\} \cup \{X \setminus F\}$ de X que só possui subcobertura de tamanho θ. Mas isso é um absurdo, pois neste caso X possui uma cobertura $\mathcal{U}$ que não tem subcobertura de tamanho κ. Portanto $e(X) \leqslant L(X)$. $\square$

Proposição 1.124. *Dado um ordinal $\alpha > 0$, tem-se que α é compacto se, e somente se, α for sucessor.*
Demonstração:
($\Rightarrow$) Seja $\alpha = \beta + 1$ um ordinal sucessor. Considere $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta qualquer de α. Assim, seja $U_1 \in \mathcal{U}$ um aberto que cobre β, assim vai existir $\xi_1 < \beta$ tal que $]\xi_1, \beta] \subseteq U_1$. Agora, seja $U_2 \in \mathcal{U}$ tal que $\xi_1 \in U_2$, assim vai existir $\xi_2 < \xi_1$ tal que $]\xi_2, \xi_1] \subseteq U_2$. Assim por diante temos que pela boa ordem de α que não existe sequência decrescente infinita, portanto vai existir $n < \omega$ tal que $\xi_n = 0$ assim $0 \notin]0, \xi_{n-1}]$, com isso basta tomar um

aberto U_{n+1} na cobertura $\mathcal{U}$ com $0 \in U_{n+1}$ e a família $\{U_1, U_2, ..., U_{n+1}\}$ vai ser uma subcobertura finita de $\mathcal{U}$. Como tal $\mathcal{U}$ foi arbitrário temos que α é compacto.
($\Leftarrow$) Por contrapositiva. Se α for limite, considere a cobertura aberta $\mathcal{U} = \{[0, \xi[: \xi < \alpha\}$. Tal cobertura não possui subcobertura finita, assim α não é compacto. $\square$

Segue imediatamente da proposição acima que:

Proposição 1.125. *O espaço ω_1 não é compacto.* $\square$

Proposição 1.126. *O espaço ω_1 é enumeravelmente compacto.*
Demonstração: Como ω_1 satisfaz todos os axiomas de separação, basta verificar que todo subconjunto infinito tem ponto de acumulação. Seja A um subconjunto infinito de ω_1. Então A é bem ordenado, pela ordem induzida de ω_1. Considere então $A = \{x_\xi : \xi < \zeta\}$ $(\zeta \geqslant \omega)$ com a enumeração canônica, i. e., $\xi \mapsto x_\xi$ é um isomorfismo de ordem. Agora, considere $\{x_n : n < \omega\}$ os primeiros ω elementos de A e seja $\zeta = sup\{x_n : n < \omega\}$, daí por ω_1 ser regular temos que $\zeta < \omega_1$, assim ζ é um ordinal limite enumerável e o ponto de acumulação de $\{x_n : n < \omega\} \subseteq A$. Daí todo subconjunto infinito de ω_1 possui ponto de acumulação e pelo teorema 1.76 temos que ω_1 é enumeravelmente compacto. $\square$

Observe que na demonstração acima usamos essencialmente o fato de ω_1 ser regular, então pode-se demonstrar que qualquer ordinal regular não enumerável é enumeravelmente compacto.

Como ω_1 é enumeravelmente compacto, pela proposição 1.109, tal propriedade é compactamente produtiva, assim temos:

Proposição 1.127. *$\omega_1 \times (\omega + 1)$ é enumeravelmente compacto.* $\square$

Definição 1.128. Seja (X, τ) um espaço topológico, a **topologia** G_δ em X é o refinamento σ, gerada pela base

$$\mathcal{B} = \{W \subseteq X : W \text{ é conjunto } G_\delta \text{ em } \tau\}.$$

Veja que $\mathcal{B}$ é base, de fato, claramente $\bigcup \mathcal{B} = X$. Para quaisquer $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$, $U_1 = \bigcap \mathcal{V}_1$ e $U_2 = \bigcap \mathcal{V}_2$ onde $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ são famílias enumeráveis de abertos, como $U_1 \cap U_2 = \bigcap(\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)$, temos que $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ é enumerável e com isso $U_1 \cap U_2$ é um G_δ. Portanto, $\mathcal{B}$ é base.

Como um aberto é intersecção do unitário dele mesmo então é um G_δ e assim é imediato que $\tau \subseteq \sigma$.

A topologia G_δ em $\omega_1 + 1$ é conhecida como a ω-modificação de $\omega_1 + 1$. Com isso, afirmamos que, na ω-modificação do espaço ordenado ω_1+1, todo ponto $\beta<\omega_1$ é isolado. Se $\beta<\omega_1$ é um ordinal sucessor existe $\alpha<\omega_1+1$ tal que $\beta=\alpha+1$ e assim $\{\beta\}=]\alpha,\alpha+2[$. Se $\beta<\omega_1$ é um ordinal limite temos que β é enumerável e que $cf(\beta)=\omega$ assim existe uma função $f:\omega\to\beta$ cofinal e estritamente crescente tal que $\{\beta\}=\bigcap_{n\,\in\,\omega}(f(n),\beta]$, que pela topologia G_δ é aberto. Finalmente, se tomarmos enumeráveis vizinhanças básicas de ω_1 que são da forma $]\xi_n,\omega_1]$ para $\xi_n\in\omega_1$ definindo $\xi=sup\{\xi_n : n\ \in\ \omega\}<\omega_1$ e assim temos que $\omega_1\in(\xi+1,\omega_1]\subseteq\bigcap_{n<\omega_1}(\xi_n,\omega_1]$. Portanto, vizinhanças básicas de ω_1 são da forma $(\zeta,\omega_1]$, para alguma $\zeta<\omega_1$, ou seja, são as mesmas tanto na usual como na ω-modificação.

Observe que ω_1+1 com a topologia da ordem é compacto pela proposição 1.124 e consequentemente é enumeravelmente compacto e Lindelöf. Agora, na ω-modificação temos que ω_1+1 não é enumeravelmente compacto, pois, $\{\{n\}:n<\omega\}\cup[\omega,\omega_1]$ é uma cobertura enumerável de ω_1+1 que não possui subcobertura finita. Com isso, temos também que ω_1+1 não é compacto. Por fim, o mais interessante é que ω_1+1 é Lindelöf, como veremos na proposição seguinte.

Proposição 1.129. ω_1+1 *com a* ω*-modificação é Lindelöf.*
Demonstração: Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de ω_1+1 , a qual podemos supor de abertos básicos. Seja $U_0\in\mathcal{U}$ um aberto tal que $\omega_1\in U_0$. Assim resta em $(\omega_1+1)\setminus U_0$ um quantidade enumerável de pontos. Assim para cada $x_i\in(\omega_1+1)\setminus U_0$ fixemos um único aberto $U_{x_i}\in\mathcal{U}$ que o contenha assim $\mathcal{U}'=U_0\cup\{U_{x_i};i\in\omega\}$ é uma subcobertura enumerável de $\mathcal{U}$ que cobre ω_1+1. Como $\mathcal{U}$ foi arbitrário temos que ω_1+1 é Lindelöf.$\square$

Para finalizar essa seção, observe que a ω-modificação em ω_1+1 é equivalente, i. e., homeomorfo, a lindelöfzação por um ponto de um discreto de tamanho $\aleph_1$.

1.2.1 ψ-espaços

Vamos definir os ψ-espaços. Tais espaços também são conhecidos como espaços de Mrówka. São úteis em topologia para contra-exemplos, pois esses espaços possuem várias propriedades, como por exemplo são completamente regulares, pseudocompactos (no caso de famílias almost disjoint maximais), não enumeravelmente compactos (no caso de famílias almost disjoint infinitas), entre outras.

Definição 1.130. Seja $\mathcal{A}$ uma família de subconjuntos infinitos de ω, $\mathcal{A}\subseteq[\omega]^\omega$. Diz-se que $\mathcal{A}$ é uma **família almost disjoint** (ad), se a interseção de qualquer dois elementos distintos de $\mathcal{A}$ é finita. Falamos que uma família almost disjoint $\mathcal{A}$ é maximal (mad), se para qualquer família almost disjoint $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ temos que $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Definição 1.131. Seja $\mathcal{A}$ uma família almost disjoint, definimos $\psi(\mathcal{A})$ como o espaço topológico cujo suporte é o conjunto $\mathcal{A} \cup \omega$ com a topologia gerada pela seguinte base

$$\{\{n\} : n \in \omega\} \cup \{\{A\} \cup (A \setminus F) : A \in \mathcal{A} \text{ e } F \in [\omega]^{<\omega}\}.$$

Ou seja, cada ponto em ω é isolado e cada $A \in \mathcal{A}$ tem vizinhanças básicas da forma $\{A\} \cup (A \setminus F)$, para F finito.

Proposição 1.132. *Sejam $\mathcal{A}$ uma família almost disjoint não vazia e $X = \psi(\mathcal{A})$, então:*

(i) *X é Hausdorff;*

(ii) *X é primeiro enumerável;*

(iii) *X é localmente compacto;*

(iv) *X é separável;*

(v) *X é zero-dimensional;*

(vi) *$\mathcal{A}$ é fechado e discreto em $\psi(\mathcal{A})$;*

(vii) *$\psi(\mathcal{A})' = \mathcal{A}$.*

Demonstração:
(i) Sejam $x, y \in \psi(\mathcal{A})$. Se $x \in \omega$ e $y \in \omega$, $\{x\}$ e $\{y\}$ são vizinhanças disjuntas que separam x e y. Se, $x \in \omega$ e $y \in \mathcal{A}$. Então $\{x\}$ e $\{y\} \cup y \setminus \{x\}$ são vizinhanças disjuntas que separam x e y. Por fim, se $x, y \in \mathcal{A}$, $z = x \cap y$ é finito, e portanto, $\{x\} \cup (x \setminus x \cap y)$ e $\{y\} \cup (y \setminus x \cap y)$ são vizinhanças disjuntas que separam x e y. Portanto, após analisar todos os casos, temos que $\psi(\mathcal{A})$ é T_2.

(ii) Para pontos em ω as bases locais em cada ponto são enumeráveis, pois são pontos isolados. Para $A \in \mathcal{A}$ temos que $\mathcal{B}_A = \{\{A\} \cup A \setminus F : F \in [\omega]^{<\omega}\}$ é uma base local enumerável de A, já que $[\omega]^{<\omega}$ é enumerável.

(iii) Seja U um aberto básico da forma $\{A\} \cup (A \setminus F)$, com $A \in \mathcal{A}$ e $F \subseteq \omega$ finito mostraremos que U é compacto, de fato, seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de U constituída de abertos básicos. Fixe V um aberto de $\mathcal{U}$ que cobre A. Então V é da forma $\{A\} \cup (A \setminus G)$, onde $G \subseteq \omega$ é finito. Assim, o conjunto $U \setminus V$ é finito. Fixando, para cada ponto $p \in U \setminus V$ um aberto U_p da cobertura $\mathcal{U}$, assim temos uma subfamília finita de $\mathcal{U}$ que cobre U, logo

U é subespaço compacto. Para os pontos de ω é imediato. Portanto, $\psi(\mathcal{A})$ é localmente compacto.

(iv) Basta vermos que ω é denso em X. De fato, dado um ponto $A \in \psi(\mathcal{A})$ arbitrário, se $A \in \omega$ nada a demonstrar. Se $A \in \mathcal{A}$ então qualquer vizinhança básica de A intersecta ω, pois são da forma $\{A\} \cup (A \setminus F)$, com $F \subseteq \omega$ finito, e, como A é um subconjunto infinito de ω, $A \setminus F$ é não vazio, logo intersecta ω.

(v) Pelo item (i), X é Hausdorff e pela demonstração do item (iii), os abertos que compõem a base do espaço $\psi(\mathcal{A})$ são compactos. Como subconjuntos compactos em espaços T_2 são fechados, pela proposição 1.66, temos que os abertos da base canônica de X são abertos-fechados. Portanto, X é zero-dimensional.

(vi) Para todo $A \in \mathcal{A}$ temos $(\{A\} \cup A) \cap \mathcal{A} = \{A\}$, logo $\mathcal{A}$ é discreto. $\mathcal{A}$ é fechado, pois $\omega = \psi(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{A}$ é aberto, de fato, dado $n < \omega$ temos que $n \in \{n\} \subseteq \omega$, pois $\{n\}$ é um aberto básico de n. Portanto, $\mathcal{A}$ é fechado e discreto.

(vii) Primeiramente, observe que, para $n \in \omega$ temos que $\{n\}$ é isolados, logo n não pode ser ponto de acumulação. Como $\mathcal{A}$ é infinito temos que $\psi(\mathcal{A})' \subseteq \mathcal{A}$, por outro lado, se $A \in \mathcal{A}$ e U é uma vizinhança qualquer de A, temos que $A \in \{A\} \cup (A \setminus F) \subseteq U$ para alguma $F \subseteq \omega$ finito. Assim, $A \setminus U \subseteq A \setminus (A \setminus F) = F$. Isso implica que $A \longrightarrow A$, ou seja, A é limite de uma sequência em $\psi(\mathcal{A})$. Portanto, $A \in \psi(\mathcal{A})'$ e assim temos que $\psi(\mathcal{A})' = \mathcal{A}$. □

Proposição 1.133. *Seja X um espaço topológico. Se X é T_0 e zero-dimensional, então X é Tychonoff.*

Demonstração: Suponha que X seja um espaço T_0 e zero-dimensional, assim dados $x, y \in X$, como o espaço é T_0 podemos supor, sem perda de generalidade, que existe U vizinhança aberta de x tal que $y \notin V$. Por ser zero-dimensional, podemos tomar uma vizinhança básica B, da base de abertos-fechados, tal que $x \in B \subseteq U$. Temos que $X \setminus B$ também é um aberto e contém y. Logo, temos dois abertos disjuntos que separam os dois pontos, logo o espaço é T_2, portanto T_1.

Vamos mostrar agora que, se X é zero-dimensional então é $T_{3\frac{1}{2}}$. Dados um fechado F e um ponto p fora de F, fixe uma vizinhança básica U de p contida no aberto $X \setminus F$. Agora, defina a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in U \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus U \end{cases}$$

Essa função é localmente constante e, portanto, X é $T_{3\frac{1}{2}}$. $\square$

Segue pela proposição acima que $\psi(\mathcal{A})$ é Tychonoff.

Tem-se que os $\psi(\mathcal{A})$ são localmente compactos mas não necessariamente são compactos. Como veremos no próximo teorema.

Teorema 1.134. *Seja $\mathcal{A}$ uma família almost disjoint infinita, então $\psi(\mathcal{A})$ não é enumeravelmente compacto.*

Demonstração: Pelo item (vi) da proposição 1.132, o conjunto $\mathcal{A}$ é fechado e discreto em $\psi(\mathcal{A})$ e, por hipótese, $\mathcal{A}$ é almost disjoint infinita. Assim $\mathcal{A}$ é um subespaço fechado e discreto infinito, logo, por 1.76, $\psi(\mathcal{A})$ não é enumeravelmente compacto. $\square$

Teorema 1.135. *Se $\psi(\mathcal{A})$ é enumeravelmente compacto, então $\bigcup \mathcal{A}$ é cofinito.*

Demonstração: Por contrapositiva. Suponha que $\bigcup \mathcal{A}$ seja coinfinito, assim temos que $B = \omega \setminus \bigcup \mathcal{A}$ é infinito e tomando a cobertura enumerável:

$$\mathcal{U} := \{\mathcal{A} \cup \bigcup \mathcal{A}\} \cup \{\{n\} : n \in B\}$$

que não possui subcobertura finita pois $\{\{n\} : n \in B\}$ é infinito e nenhum elemento pode ser descartado. Com isso temos que $\psi(\mathcal{A})$ não é enumeravelmente compacto. $\square$

Pelos dois teoremas acima temos que para $\psi(\mathcal{A})$ ser enumeravelmente compacto $\mathcal{A}$ tem que ser finito e $\bigcup \mathcal{A}$ cofinito. Além disso, vale a volta como mostra o seguinte teorema.

Teorema 1.136. *Seja $\mathcal{A}$ uma família almost disjoint. Se $\mathcal{A}$ for finito e $\bigcup \mathcal{A}$ for cofinito então $\psi(\mathcal{A})$ é enumeravelmente compacto.*

Demonstração: Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X, como $\mathcal{A}$ é finita para todo $A \in \mathcal{A}$ fixemos $U_A \in \mathcal{U}$ tal que $A \in U_A$ assim $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} U_A$. Temos que $\omega \setminus \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} U_A\right) \subseteq \omega \setminus \bigcup \mathcal{A}$ e por $\bigcup \mathcal{A}$ ser finito temos que $\omega \setminus \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} U_A\right)$ também é finito. Para todo $x \in \omega \setminus \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} U_A\right)$ fixamos um aberto da $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$, assim temos que $\mathcal{U}' = \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} U_A\right) \cup \left(\bigcup_{x \in \omega \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{A}}} U_x\right)$ é uma subcobertura enumerável logo $\psi(\mathcal{A})$ é enumeravelmente compacto. $\square$

Proposição 1.137. *Seja $\mathcal{A}$ uma família almost disjoint maximal finita, então $\psi(\mathcal{A})$ é enumeravelmente compacto.*

Demonstração: Como $\mathcal{A}$ é finito basta mostrarmos que $\bigcup \mathcal{A}$ é cofinito e a proposição segue pelo teorema acima. De fato, Se $\bigcup \mathcal{A}$ fosse coinfinito $\omega \setminus \bigcup \mathcal{A}$ seria infinito assim $\mathcal{A} \cup \{\omega \setminus \bigcup \mathcal{A}\} \subseteq [\omega]^\omega$. Veja que, $\mathcal{A} \cup \{\omega \setminus \bigcup \mathcal{A}\}$ é almost disjoint, de fato, se dados $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \cup \{\omega \setminus \bigcup \mathcal{A}\}$ distintos se A_1, A_2 pertencem a $\mathcal{A}$ então $|A_1 \cap A_2| < \omega$ e se $A_1 \in \mathcal{A}$

e $A_2 \in \{\omega \setminus \bigcup \mathcal{A}\}$ então $|A_1 \cap A_2| < \omega$. Mas, $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{A} \cup \{\omega \setminus \bigcup \mathcal{A}\}$,pois se $\omega \setminus \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{A}$ então $\omega \setminus \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{A}$ que é absurdo, pois é $\mathcal{A}$ é finito. Portanto, $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{A} \cup \{\omega \setminus \bigcup \mathcal{A}\}$, absurdo, pois $\mathcal{A}$ é maximal. □

Teorema 1.138. *Seja $\mathcal{A}$ família almost disjoint maximal, então $\psi(\mathcal{A})$ é pseudocompacto.*
Demonstração: Suponha que $\mathcal{A}$ seja uma família almost disjoint maximal, como $\psi(\mathcal{A})$ é primeiro enumerável e ω é um subconjunto denso de $\psi(\mathcal{A})$ e todo subconjunto infinito possui ponto de acumulação em $\psi(\mathcal{A})$, pois se $B \subseteq \omega$ é infinito então, pela maximalidade de $\mathcal{A}$, para algum $A \in \mathcal{A}$ tem-se $|A \cap B| = \aleph_0$, donde o ponto A é ponto de acumulação do subconjunto B. Logo, pela proposição 1.106, $\psi(\mathcal{A})$ é pseudocompacto. □

Teorema 1.139. *Se $\psi(\mathcal{A})$ é pseudocompacto, então $\mathcal{A}$ é uma família almost disjoint maximal.*
Demonstração: Se $\mathcal{A}$ não fosse maximal, existiria $B \subseteq \omega$ infinito tal que $\mathcal{A} \cup \{B\}$ é almost disjoint, ou seja, $|B \cap A| < \omega$, $\forall\ A \in \mathcal{A}$. Fixamos $c \in \mathbb{R}$ e definimos $f : \psi(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{se } x \notin B \\ x & \text{se } x \in B \end{cases}$$

que é ilimitada em B e por ser localmente constante em X, de fato, nos pontos isolados de X é claramente constante e para algum $A \in \mathcal{A}$, $\{A\} \cup (A \setminus (A \cap B))$ é uma vizinhança de A na qual a função é constante. Em ambos os casos f é localmente constante. Assim, f será contínua. Logo, não é pseudocompacto. □

Vale observar que a família $\mathcal{A}$, nos dois teoremas acima, não necessariamente tem que ser infinita.

1.2.2 Tychonoff Plank

Definiremos dois espaços que são importantes contra-exemplos em topologia: O Tychonoff plank e Tychonoff plank deletado. Por exemplo, servem para mostrar que a normalidade não é hereditária.

Definição 1.140 (Tychonoff Plank)**.** O **Tychonoff Plank** é definido, com a topologia produto, como sendo o espaço

$$T := (\omega_1 + 1) \times (\omega + 1)$$

e o Tychonoff Plank deletado o espaço

$$T_\infty := (\omega_1 + 1) \times (\omega + 1) \setminus \{\langle \omega_1, \omega \rangle\}.$$

Proposição 1.141. *T é Hausdorff, em particular T_∞ também.*

Demonstração: Primeiramente, $\omega_1 + 1$ e $\omega + 1$ são ordinais, com isso, são Hausdorff. Assim, temos que T é Hausdorff, pois pela proposição 1.111 Hausdorff é produtiva e pela mesma proposição Hausdorff é hereditário, assim T_∞ é Hausdorff. □

Pela proposição acima, pela proposição 1.124, pelo teorema de Tychonoff e pela 1.69 temos que T é normal. A proposição seguinte mostra que a normalidade não é hereditária.

Proposição 1.142. *T_∞ não é normal.*

Demonstração: Sejam $A = \{\langle \omega_1, n\rangle : n < \omega\}$ e $B = \{\langle \alpha, \omega\rangle : \alpha < \omega_1\}$ subconjuntos de T_∞. Veja que A e B são fechados, pois, $T_\infty \setminus A$ e $T_\infty \setminus B$ são abertos. Para ver isso temos dois casos: Se $\langle \alpha, i\rangle \in T_\infty \setminus A$ onde $i < \omega$ e $\alpha < \omega_1$ temos, por ω_1 ser separado a direita, que existe U_α vizinhança aberta de α tal que $\beta \notin U_\alpha$ para todo $\beta > \alpha$, com isso $\langle \alpha, i\rangle \in U_\alpha \times \{i\} \subseteq T_\infty \setminus A$; Se $\langle \alpha, \omega\rangle \in T_\infty \setminus A$ para $\alpha < \omega_1$ temos, pelo mesmo argumento acima, que existe U_α tal que $\langle \alpha, \omega\rangle \in U_\alpha \times]m, \omega] \subseteq T_\infty \setminus A$ para algum $m < \omega$. Logo, $T_\infty \setminus A$ é aberto. Analogamente $T_\infty \setminus B$ é aberto e concluímos que A e B são fechados.

Mostraremos que não existem abertos que separam A e B. De fato, seja $U \subseteq T_\infty$ uma vizinhança aberta qualquer de A, para cada $\langle \omega_1, n\rangle$ existe um aberto básico $(\alpha, \omega_1] \times \{n\}$ que o contém. Seja $\alpha_n = min\{\alpha < \omega_1 : (\alpha, \omega_1] \times \{n\} \subseteq U\}$. Com isso, $\{\langle \alpha, n\rangle : \alpha_n < \alpha \leqslant \omega_1\} \subseteq U$. Tomando $\overline{\alpha} = sup\{\alpha_n\}$ temos que $(\overline{\alpha}, \omega_1] \times [0, \omega) \subseteq U$. Sejam $\beta = \overline{\alpha} + 1$ e V_β uma vizinhança básica do ponto $\langle \beta, \omega\rangle$ que pertence a B. Afirmamos que $V_\beta \cap U \neq \emptyset$, de fato, por V_β ser uma vizinhança de $\langle \beta, \omega\rangle$ existem $k < \omega$ e U_β uma vizinhança de β tal que $U_\beta \times \ (k, \omega] \subseteq V_\beta$, daí o ponto $\langle \beta, k+1\rangle \in U_\beta \cap U$. Portanto, $V_\beta \cap U \neq \emptyset$ e temos que T_∞ é não normal. □

Proposição 1.143. *T_∞ não é enumeravelmente compacto.*

Demonstração: Como T_∞ é T_1 e $A = \{\langle \omega_1, n\rangle : n < \omega\} \subseteq T_\infty$ é um subconjunto infinito sem ponto de acumulação temos, pelo teorema 1.76, que T_∞ não é enumeravelmente compacto. □

Mostraremos que T_∞ é pseudocompacto. Para isso, lembre que em qualquer espaço topológico, uma sequência $x_n \to x_0$ se, e somente se, para toda vizinhança V de x_0 o conjunto $\{n : x_n \notin V\}$ é finito.

Proposição 1.144. *T_∞ é pseudocompacto.*

Demonstração: Sejam $L_n = \{(\alpha, n) : 0 \leqslant \alpha \leqslant \omega_1\}$ e $L_\omega = \{(\alpha, \omega) : 0 \leqslant \alpha < \omega_1\}$ em T_∞ e $f : T_\infty \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Queremos mostrar que f é limitada.

Pelo corolário 1.114 para todo $n \in \omega+1$ existe $\gamma_n < \omega_1$ tal que $f(\langle \alpha, n\rangle) = x_n$ para todo $\gamma_n \leqslant \alpha \leqslant \omega_1$ e para ω existe $\gamma_\omega < \omega_1$ tal que $f(\langle \alpha, \omega\rangle) = x_\omega$ para todo $\gamma_\omega \leqslant \alpha < \omega_1$.

Note que, podemos definir $\gamma = sup\{\gamma_t : t \in \omega + 1\} + 1$, se $\xi > \gamma$ considere a sequência $\langle \xi, n\rangle$ que converge para $\langle \xi, \omega\rangle$. Por f ser contínua temos que

$$f(\langle \xi, n\rangle) = x_n \longrightarrow f(\langle \xi, \omega\rangle) = x_\omega.$$

Podemos definir $\hat{f} : (\omega_1+1) \times (\omega+1) \to \mathbb{R}$, extensão da f, pondo $\hat{f}(\langle \omega_1, \omega\rangle) = x_\omega$. Afirmação: $\hat{f}$ é contínua. Inicialmente, mostraremos que se $z_n = \langle \alpha_n, m_n\rangle$ é uma sequência que converge para $p = \langle \omega_1, \omega\rangle$ então existe $m < \omega$ tal que $\alpha_n = \omega_1$ para todo $n \geqslant m$, ou seja, apenas um número finito de termos da sequência é menor que ω_1. Para ver isso, suponha que exista infinitos termos da sequência α_n, das primeiras coordenadas de z_n, que seriam menor que ω_1, denote por A o conjunto desses termos, assim existe $\beta < \omega_1$ tal que $A \subseteq \beta$ e seja $V =]\beta + 1, \omega_1]$ uma vizinhança de ω_1 tal que o conjunto de índices de A está contido em $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin V\}$, como A é infinito temos que $\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \notin V\}$ é infinito, isso implica que $\alpha_n \nrightarrow \omega_1$, absurdo. Portanto, existe $m < \omega$ tal que $\alpha_n = \omega_1$ para todo $n \geqslant m$. Agora, podemos supor, sem perda de generalidade, que z_n é da forma $\langle \omega_1, m_n\rangle$ e converge para p. Ora, tomando o $\gamma < \omega_1$, novamente por 1.114 temos que f em $\langle \omega_1, m_n\rangle$ coincide com os valores da f em $\langle \xi, m_n\rangle$ para todo $\xi > \gamma$. Como $f(\langle \xi, m_n\rangle) = x_{m_n}$ converge para x_ω, então também temos que

$$\hat{f}(z_n) = f(z_n) \to x_\omega = \hat{f}(p).$$

Donde $\hat{f}$ é contínua no ponto p.

Assim, como $\hat{f} : (\omega_1 + 1) \times (\omega + 1) \to \mathbb{R}$ é continua e $(\omega_1 + 1) \times (\omega + 1)$ é um compacto temos que $\hat{f}$ é limitada, portanto $(\omega_1 + 1) \times (\omega + 1)$ é pseudocompacto. Como $\hat{f}$ é uma extensão de f, e $\hat{f}$ é limitada, então f também é limitada. E assim concluímos que T_∞ é pseudocompacto. $\square$

Capítulo 2

Classes definidas por estrelas e atribuições de vizinhanças abertas

Neste capítulo introduziremos o conceito de espaços estrela $\mathcal{P}$ e espaço dualmente $\mathcal{P}$. Apresentaremos alguns resultados e exemplos desses espaços. Definiremos os espaços auto-duais, os D-espaços e veremos algumas propriedades de estrelas com relação a pseudocompacidade.

Duas caracterizações interessantes com relação aos espaços dualmente $\mathcal{P}$ e estrela $\mathcal{P}$, quando $\mathcal{P}$ é a propriedade de ser finito, são para espaços T_2:

"Enumeravelmente compacto é equivalente a estrela finito"

e

"compacto é equivalente a dualmente finito."

Isso mostra que estrela $\mathcal{P}$ e dualmente $\mathcal{P}$ são noções bem diferentes.

Observe que a propriedade de ser fechado e discreto não é propriedade topológica. Assim, quando designarmos que um espaço possui um núcleo fechado e discreto (com relação a ona ou estrela) fica subentendido o seguinte abuso de linguagem: que o espaço possui um núcleo-discreto que é fechado.

2.1 Espaços estrela $\mathcal{P}$

Lembremos a definição de estrela: Dadas uma família $\mathcal{U}$ de subconjuntos de um conjunto X e um subconjunto A de X, definimos a **estrela** de A com relação a $\mathcal{U}$ o seguinte conjunto

$$St(A,\mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : A \cap U \neq \emptyset\}.$$

No caso em que $St(A,\mathcal{U}) = X$ o subconjunto A é dito núcleo da estrela de $\mathcal{U}$

Com isso, definimos estrela $\mathcal{P}$.

Definição 2.1. Sejam $\mathcal{P}$ uma propriedade topológica e X um espaço topológico. X é dito **estrela** $\mathcal{P}$ (ou estrela determinado por $\mathcal{P}$) se para qualquer cobertura aberta $\mathcal{U}$ do espaço X existe um subconjunto $Y \subseteq X$ que satisfaz $\mathcal{P}$ e $St(Y,\mathcal{U}) = X$. Isto é, X é estrela $\mathcal{P}$ se toda cobertura aberta de X possui um núcleo que satisfaz $\mathcal{P}$.

Temos duas propriedades muito úteis sobre espaços estrela $\mathcal{P}$:

Proposição 2.2. *Seja X um conjunto, então valem:*

(i) *Se X satisfaz uma propriedade topológica $\mathcal{P}$ então X é estrela $\mathcal{P}$.*

(ii) *Sejam $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ propriedades topológicas em X. Se $\mathcal{P}_1 \Longrightarrow \mathcal{P}_2$ então estrela $\mathcal{P}_1 \Longrightarrow$ estrela $\mathcal{P}_2$.*

Demonstração:
(i) Imediato pois basta tomar como núcleo da estrela o próprio espaço X.
(ii) Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X. Como X tem a propriedade $\mathcal{P}_1$ pelo item (i) temos que X é estrela $\mathcal{P}_1$, ou seja, X possui um subconjunto que é núcleo da estrela e satisfaz $\mathcal{P}_1$. Como $\mathcal{P}_1 \Longrightarrow \mathcal{P}_2$ temos que tal núcleo da ona satisfaz $\mathcal{P}_2$, portanto X é estrela $\mathcal{P}_2$. □

Como um espaço finito é compacto e compacto é pseudocompacto temos, pela proposição acima, as seguintes proposições:

Proposição 2.3. *Seja X um espaço topológico. Se X é estrela finito então X estrela compacto.* □

Proposição 2.4. *Se um espaço topológico é estrela compacto, então é estrela pseudocompacto.* □

Os seguintes lemas serão usados para demonstrar que todo espaço topológico é estrela discreto.

Lema 2.5. *Sejam $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta e A um conjunto com a propriedade*

$$\forall\ x, y \in A,\ x \neq y \implies x \notin St(y,\mathcal{U}). \qquad (\star)$$

Então A é discreto.

Demonstração: Para ver que A é discreto observamos antes que: dados $x, y \in A, x \neq y$, temos que $x \notin St(y,\mathcal{U}) \Leftrightarrow y \notin St(x,\mathcal{U})$. De fato, suponha que $x \notin St(y,\mathcal{U})$ e $y \in St(x,\mathcal{U})$ daí existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x, y \in U$ e assim $x, y \in U \subseteq St(y,\mathcal{U})$ em particular $x \in St(y,\mathcal{U})$, contrariando o fato que x não está na estrela de y. Portanto, $x \notin St(y,\mathcal{U}) \Leftrightarrow y \notin St(x,\mathcal{U})$.

Assim, para todo $x \in A$ temos que $St(x,\mathcal{U}) \cap A = \{x\}$, ou seja, a família $\{St(x,\mathcal{U}) : x \in A\}$ testemunha que A é discreto. $\square$

Lema 2.6. *Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X então existe $A \subseteq X$ maximal para a propriedade $(\star)$.*

Demonstração: Faremos a demonstração usando o lema de Zorn. Considere $\mathbb{P} := \{Y \subseteq X : Y$ satisfaz a propriedade $(\star)$ $\}$ e seja a ordem parcial $\langle \mathbb{P}, \subseteq \rangle$ que é diferente de vazio, pois, $\emptyset \in \mathbb{P}$.

Dado $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}$ uma cadeia. Temos as seguintes afirmações:

Afirmação 1: $\bigcup \mathcal{C}$ satisfaz $(\star)$. De fato, dados $x, y \in \bigcup \mathcal{C}$ distintos existem $C_x, C_y \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C_x$ e $y \in C_y$ por ser cadeia temos, s.p.g., que $C_x \subseteq C_y$ daí $x, y \in C_y$. Por $C_y \in \mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}$ temos que C_y satisfaz $(\star)$ assim $x \notin St(y,\mathcal{U})$, portanto $\bigcup \mathcal{C}$ também satisfaz.

Afirmação 2: $\bigcup \mathcal{C}$ é um limitante superior de $\mathcal{C}$. De fato, para qualquer $C \in \mathcal{C}$ temos que $C \in \mathcal{C} \subseteq \bigcup \mathcal{C}$ assim $\bigcup \mathcal{C}$ é um limitante superior.

Portanto, pelo lema de Zorn, temos que $\langle \mathbb{P}, \subseteq \rangle$ possui elemento maximal A. $\square$

Teorema 2.7. *Sejam X espaço topológico, $\mathcal{U}$ cobertura aberta de X e $A \subseteq X$ é maximal para a propriedade $(\star)$ então $St(A,\mathcal{U}) = X$.*

Demonstração: Seja $A \subseteq X$ nas condições do enunciado e suponha que $St(A,\mathcal{U}) \neq X$. Assim podemos fixar $x \in X \setminus St(A,\mathcal{U})$ e definir o conjunto $B = A \cup \{x\}$. Mostraremos que esse conjunto satisfaz $(\star)$, de fato, sejam b_1, b_2 em B distintos se $b_1 \neq x$ e $b_2 \neq x$ então $b_1, b_2 \in A$ e segue que $b_1 \notin St(b_2,\mathcal{U})$. Agora suponha, sem perda de generalidade, que $b_1 = x$ e $b_2 \neq x$ assim temos que $b_1 \notin St(A,\mathcal{U})$, por outro lado $b_2 \in A$ e como $St(b_2,\mathcal{U}) \subseteq St(A,\mathcal{U})$ temos que $b_1 \notin St(b_2,\mathcal{U})$. Portanto B satisfaz $(\star)$. Assim, como $A \subseteq B$, temos que B é um conjunto maior que o maximal A para a propriedade $(\star)$, um absurdo. Portanto $St(A,\mathcal{U}) = X$. $\square$

Segue pelos dois resultados anteriores que para um dado espaço topológico e uma cobertura obtemos um núcleo discreto. Assim é imediato o seguinte

Corolário 2.8. *Todo espaço topológico é estrela discreto.* □

Corolário 2.9. *Todo espaço topológico T_1 é um estrela fechado e discreto.*
Demonstração: Seja X T_1, pelo teorema 2.7 temos que X é estrela discreto, ou seja, para qualquer cobertura $\mathcal{U}$, existe $A \subseteq X$ discreto tal que $St(A,\mathcal{U}) = X$. Para mostrar que A é fechado e discreto, para o conjunto A exibido na demonstração da proposição 1.117 temos que $\{\{x\} : x \in A\}$ é localmente finita e assim pela proposição 1.62 tal A é fechado e discreto. Portanto X é estrela fechado e discreto. □

Exibiremos outra demonstração para o corolário 2.8, usando recursão transfinita. Primeiramente, definimos uma função escolha

$$h : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X,\ h(Y) \in Y,\ \forall\, Y \in \mathcal{P}(X) \setminus \emptyset.$$

Seja $h(X) = x_0$. Se $X \backslash St(x_0,\mathcal{U}) \neq \emptyset$ escolhemos $h(X \backslash St(x_0,\mathcal{U})) = x_1$, se $St(\{x_0, x_1\},\mathcal{U}) \neq X$ escolhemos $h(X \setminus St(\{x_0, x_1\},\mathcal{U})) = x_2$ e assim sucessivamente. Podemos definir por recursão transfinita $\mathcal{F} : O_n \to X$ pondo, para todo $\zeta \in O_n$,

$$\mathcal{F}(\zeta) = x_\zeta = \begin{cases} h(X \setminus St(\{x_\alpha, \alpha < \zeta\},\mathcal{U})) & \text{se } X \setminus St(\{x_\alpha, \alpha < \zeta\},\mathcal{U}) \neq \emptyset \\ x_0 & \text{se } X \setminus St(\{x_\alpha, \alpha < \zeta\},\mathcal{U}) = \emptyset. \end{cases}$$

Assim, vai existir um ordinal $\beta < |X|^+$ tal que $X \setminus St(\{x_\alpha, \alpha < \beta\},\mathcal{U}) = \emptyset$, pois se $X \setminus St(\{x_\alpha, \alpha < |X|^+\},\mathcal{U}) \neq \emptyset$, X teria um subconjunto maior que si mesmo, absurdo, assim o mínimo onde a diferença dá vazio é menor ou igual a $|X|^+$. Com isso $\beta < |X|^+$, pois se $\beta = |X|^+$ teríamos que $\{x_\alpha : \alpha < |X|^+\}$ seria maior que X um absurdo. Portanto, existe $\beta < |X|^+$ tal que $St(\{x_\alpha : \alpha < \beta\},\mathcal{U}) = X$.

Além disso, o conjunto $A = \{x_\alpha : \alpha < \beta\}$ satisfaz a propriedade $(\star)$. De fato, sejam $x_{\xi_1}, x_{\xi_2} \in A$ distintos, logo temos, sem perda de generalidade, que $\xi_1 < \xi_2$. E pela construção obtemos que $x_{\xi_2} \notin St(\{x_\alpha, \alpha < \xi_1\},\mathcal{U})$ e como $St(x_{\xi_2},\mathcal{U}) \subseteq St(\{x_\alpha : \alpha < \xi_2\},\mathcal{U})$ temos que $x_{\xi_2} \notin St(x_{\xi_1},\mathcal{U})$. Portanto, A é discreto. Como $X = St(A,\mathcal{U})$ temos que qualquer espaço topológico é estrela discreto.

Fizemos a demonstração que todo espaço topológico é estrela discreto utilizando primeiro o lema de Zorn e depois função escolha, i. e., em ambas demonstrações usamos fortemente o axioma da escolha. O seguinte teorema, válido em ZF, mostra que esse resultado é equivalente ao axioma da escolha.

Teorema 2.10 ([18])**.** *As seguintes condições são equivalentes:*

(i)) *O Axioma da Escolha.*

(ii) Todo espaço topológico é estrela discreto.

Demonstração:
$(i) \Rightarrow (ii)$ Esta implicação foi feita, pois, nas demonstrações acima 2.7,2.6 e 2.8.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Mostraremos que se $\mathcal{A}$ é uma família infinita de conjuntos não vazios, então $\mathcal{A}$ admite uma função-escolha, ou seja, construiremos $\varphi : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$ tal que $\varphi(A) \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Suponha, sem perda de generalidade, que $\mathcal{A} = \{X_i : i \in I\}$ seja disjunta. Considere $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, munido com a topologia gerada pela base $\{X_i : i \in I\}$. Veja que $\mathcal{A}$ é uma cobertura de X assim vai existir $F \subseteq X$ discreto tal que $St(F, \mathcal{A}) = X$, note que este fato garante que todos os $X_i's$ intersectam F. Por F ser discreto existe uma família $\{V_x : x \in F\}$, de abertos, tais que $V_x \cap F = \{x\}$ com isso temos que cada V_x coincide com um único X_i para algum $i \in I$. Portanto podemos definir $\varphi : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$ tal que a cada $A \in \mathcal{A}$ associa ao único ponto de $A \cap F$. Observe que $\varphi(A) \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}$ assim obtemos uma função escolha para a família $\mathcal{A}$. $\square$

O seguinte teorema foi uma interessante caracterização dos espaços enumeravelmente compactos, atribuída por Fleischman, por volta de 1970.

Teorema 2.11. *Seja X espaço topológico Hausdorff. Então X é enumeravelmente compacto se, e somente se, X é estrela finito.*
Demonstração: $(\Rightarrow)$ Por X ser T_2, em especial T_1, temos que pelo teorema 2.9 que X possui um núcleo fechado e discreto e pelo corolário 1.77 tal fechado e discreto é finito. Portanto X é estrela finito.
$(\Leftarrow)$ Por contrapositiva. Se X não for enumeravelmente compacto, então existe um subconjunto infinito $Y = \{y_n : n \geqslant 1\}$ em X sem ponto de acumulação, ou seja, Y é fechado e discreto. Seja $\{Y_i : i \in \omega\}$ uma partição de Y tal que $|Y_i| = i, \forall\, i \in \omega$. Tal partição, por exemplo, pode ser da forma $Y_1 = \{y_1\}, Y_2 = \{y_2, y_3\}, Y_3 = \{y_4, y_5, y_6\}$ e assim por diante. Observe que por Y ser discreto existem abertos $\{W_n : n \in \omega\}$ tais que $W_n \cap Y = \{y_n\}$. Por X ser T_2, podemos, sem perda de generalidade, supor que os abertos que separam os pontos de cada Y_i são disjuntos. Assim para j fixo, temos que os abertos de $\{W_m : y_m \in Y_j\}$ são 2-a-2 disjuntos, além disso, o único aberto de $\{W_n : n \in \omega\}$ que contém o elemento y_m é W_m, para cada m.

Afirmamos que X não é estrela finito, de fato, considere $\mathcal{U} = \{X \setminus Y\} \cup \{W_i : i \geqslant 1\}$ a cobertura aberta de X e seja F um subconjunto finito qualquer de X. Podemos tomando $Y_i \subseteq Y$ tal que $|Y_i| = i > |F|$. Assim, como a família de abertos disjuntos que separam os pontos de Y_i é maior que F, pois tem tamanho i, temos que existe $t \in \{n : y_n \in Y_i\}$ tal que $W_t \cap F = \emptyset$. Logo, como W_t é o único aberto que contém o elemento y_t temos que $y_t \notin St(F, \mathcal{U})$. Portanto, X não é estrela finito. $\square$

Teorema 2.12. *Seja X um espaço topológico. Se X é Lindelöf, então X é estrela enumerável.*

Demonstração:

Suponha X Lindelöf e seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X. Por ser Lindelöf existe $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ enumerável que cobre X. Fixando um ponto em cada elemento de $\mathcal{U}'$ obtemos um conjunto que é núcleo enumerável. Portanto X é estrela enumerável. □

Como visto no teorema 2.11, para espaços T_2, enumeravelmente compacto é equivalente a estrela finito. Mas na implicação enumeravelmente compacto $\Longrightarrow$ estrela finito necessita que o espaço seja somente T_1. Em [10], temos o teorema 5.3.2, que diz, Se X é um espaço topológico T_2, enumeravelmente compacto e metacompacto então é compacto. O seguinte resultado mostra um enfraquecimento da hipótese do referido teorema.

Teorema 2.13. *Se X é estrela finito e metacompacto, então é compacto.*

Demonstração: Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta qualquer de X e seja $\mathcal{V}$ refinamento aberto pontualmente finito de $\mathcal{U}$. Por X ser estrela finito existe $B \subseteq X$ finito tal que $St(B, \mathcal{V}) = X$. Como $\mathcal{V}$ é pontualmente finito $\mathcal{V}' = \{V \in \mathcal{V} : V \cap B \neq \emptyset\}$ é finito, pois $\mathcal{V}'$ pode ser escrito como $\bigcup_{x \in B}\{V \in \mathcal{V} : x \in V\}$ que é finito, por ser união finita de finitos. Como $X \subseteq \bigcup \mathcal{V}'$ temos que $\mathcal{V}'$ é subcobertura finita de $\mathcal{V}$ que cobre X. Como $\mathcal{V}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$ para cada $V \in \mathcal{U}$ fixemos um $U_V \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U_V$, daí $\{U_V : V \in \mathcal{V}'\}$ é uma subcobertura finita de $\mathcal{U}$ que cobre X. □

Com argumentos parecidos ao do teorema acima temos o seguinte:

Teorema 2.14 ([14])**.** *Se X é um espaço metacompacto e estrela enumerável, então é Lindelöf.* □

Observe que o teorema anterior vale para metalindelöf.

Diz-se que X é **estrela sc**, ou estrela determinado por sequências convergentes, se toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ existe uma sequência convergente $S \subseteq X$ tal que $St(S,\mathcal{U}) = X$.

Teorema 2.15. *Seja X um espaço topológico T_1. Então:*

$$\textit{Enumeravelmente compacto} \Longrightarrow \textit{Estrela finito} \Longrightarrow \textit{Estrela sc} \Longrightarrow \textit{Estrela compacto.}$$

Demonstração: A primeira implicação, segue pelo teorema 2.11.

A segunda, se X é estrela finito, então possui um núcleo-finito e como um subconjunto finito é imagem de uma sequência eventualmente constante então é um sequência convergente assim temos que X é estrela sc.

A terceira, seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X. Por X ser estrela sc existe $S = \{x_n : n < \omega\} \cup \{x\} \subseteq X$ sequência convergente, onde x é o limite de x_n, tal que $St(S,\mathcal{U}) = X$. Temos que, pela proposição 1.83, uma sequência convergente é compacto. Com isso temos que X é estrela compacto. Como $\mathcal{U}$ foi arbitrária e existe S compacto tal que $St(S,\mathcal{U}) = X$ temos que X é estrela compacto. $\square$

A seguinte proposição é um contra-exemplo para a volta da segunda implicação do teorema 2.15 acima.

Proposição 2.16 ([22]). *O Tychonoff Plank deletado é estrela sc e não é enumeravelmente compacto.*

Demonstração: Seja o espaço Tychonoff Plank deletado $T_\infty = (\omega_1 + 1) \times (\omega + 1) \setminus \{\langle \omega_1, \omega \rangle\}$, pela proposição 1.143 temos que T_∞ não é enumeravelmente compacto.

Mostraremos que é estrela sc. Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de T_∞, fixe $U_n \in \mathcal{U}$ tal que $\langle \omega_1, n \rangle \in U_n$. Seja $\alpha_n = min\{\alpha < \omega_1 : (\alpha, \omega_1] \times \{n\} \subseteq U_n\}$. Considere $\alpha = sup\{\alpha_n\} + 1$. O conjunto $S' = \{\alpha\} \times (\omega + 1)$ é claramente uma sequência convergente tal que $W = \bigcup\{U_n : n \in \omega\} \subseteq St(S',\mathcal{U})$, de fato, se $p = \langle \alpha', n' \rangle \in W \implies \exists\ U'_n \in W$ tal que $p \in U'_n$ e pela definição de α temos que $\langle \alpha, n' \rangle \in U'_n$ e $\langle \alpha, n' \rangle \in S'$ logo $p \in St(S',\mathcal{U})$. Agora, $T_\infty \setminus W$ é fechado em $\omega_1 \times (\omega + 1)$ e com isso é enumeravelmente compacto, pois, $\omega_1 \times (\omega + 1)$ é enumeravelmente compacto, por 1.127. Assim existe $F \subseteq T_\infty$ finito tal que $T_\infty \setminus W \subseteq St(F,\mathcal{U})$. Portanto, $S = S' \cup F$ é sequência convergente com $St(S,\mathcal{U}) = T_\infty$.$\square$

Um contra-exemplo para a volta da terceira implicação do último teorema pode ser encontrado em [22], teorema 3.6, onde diz que existe um espaço, de Hausdorff, estrela compacto que não é estrela determinado por compacto metrizável, com isso não é estrela sc, pois sequências convergentes em espaços de Hausdorff são compactos metrizáveis, por 1.83 e 1.85 .

2.2 Espaços dualmente $\mathcal{P}$

Lembre que, se X é um espaço topológico uma ona para X é uma família de abertos $\mathcal{O} = \{O_x : x \in X\}$ satisfazendo $x \in O_x$ para todo $x \in X$. Com isso, definimos os espaços dualmente $\mathcal{P}$.

Definição 2.17. Um espaço X é **dualmente** $\mathcal{P}$ se para toda atribuição de vizinhanças abertas $\{O_x : x \in X\}$ existe $A \subseteq X$ tal que A satisfaz $\mathcal{P}$ e $\bigcup\{O_x : x \in A\} = X$.

Com argumentos análogos a proposição 2.2, temos:

Proposição 2.18. *Seja X conjunto, então valem:*

(i) Se X satisfaz $\mathcal{P}$ então X é dualmente $\mathcal{P}$.

(ii) Sejam $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ propriedades topológicas em X. Se $\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2$ então dualmente $\mathcal{P}_1 \Rightarrow$ dualmente $\mathcal{P}_2$. □

Observe que sempre que tivermos uma cobertura aberta de um espaço temos, através de escolhas em cada ponto, uma ona, tal ona será um subcobertura da cobertura. Por outro lado, toda ona é também uma cobertura.

Vimos que todo espaço topológico é estrela discreto, é importante observar que a mesma noção não vale para ona, ou seja, não vale que qualquer espaço topológico é dualmente discreto.

Teorema 2.19. *Um espaço topológico X é compacto se, e somente se, é dualmente finito.*
Demonstração: Suponha que X seja compacto e seja $\mathcal{O} = \{O_x : x \in X\}$ uma ona de X. Assim existe $F \subseteq X$ finito tal que $\bigcup\{O_x : x \in F\} = X$, isto é, X é dualmente finito. Reciprocamente, suponha que X seja dualmente finito e seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta qualquer de X, em particular $\mathcal{U}$ admite uma ona $\mathcal{O}$, que é uma subcobertura de $\mathcal{U}$, que cobre X. Por ser dualmente-finito existe $F \subseteq X$ tal que $\bigcup\{U_x : x \in F\} = X$, como $\{U_x : x \in F\}$ é uma subcobertura finita de $\mathcal{U}$ temos que X é compacto. □

Um espaço é Lindelöf se, e só se, para qualquer ona $\{O_x : x \in X\}$, com argumentos análogos ao teorema anterior, existe $Y \subseteq X$ enumerável tal que $\bigcup\{O_x : x \in Y\} = X$, ou seja, X é dualmente enumerável.

Proposição 2.20 ([22])**.** *ω_1 é dualmente discreto.*
Demonstração: Seja $\mathcal{V} = \{O_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ uma ona para ω_1. Para todo $\alpha < \omega_1, \alpha \neq \emptyset$ defina $f : \omega_1 \setminus \{\emptyset\} \to \omega_1$ tal que $f(\alpha) = min\{\xi < \omega_1 : \xi < \alpha \text{ e } (\xi, \alpha] \subseteq O_\alpha\}$. A função f está bem definida se considerarmos a base da topologia de ω_1 e é claramente regressiva. Logo, pelo corolário 1.114, temos que existe $A \subseteq \omega_1$ ilimitado e $\beta < \omega_1$ tal que $f(\alpha) = \beta$, para todo $\alpha \in A$. Com isso pela proposição 1.43 temos que existe $B \subseteq A \setminus (\beta + 1)$ discreto e não enumerável.

Assim, $]\beta, \omega_1[= \omega_1 \setminus (\beta + 1) \subseteq \{O_\alpha : \alpha \in B\}$, pois para algum $\zeta \in]\beta, \omega_1[$, existe $\gamma \in B$ com $\zeta < \gamma$ tal que $\zeta \in]\beta, \gamma] \subseteq O_\gamma \subseteq \bigcup\{O_\alpha : \alpha \in B\}$. Além disso, por $\beta + 1 = [0, \beta]$ ser compacto e por compacto se dualmente finito, teorema 2.19, existe $F \subseteq \beta + 1$ finito tal que $\beta + 1 = \bigcup\{O_\alpha : \alpha \in F\}$. Portanto, $D = F \cup B$ é núcleo discreto da ona para ω_1. □

2.2.1 Propriedades auto-duais

Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade topológica e definimos $\mathcal{P}^* = \{X : X$ é dualmente $\mathcal{P}\}$. Uma propriedade é dita auto-dual se $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$, ou seja, para todo espaço X vale que, X satisfaz $\mathcal{P}$ se, e somente se, X é dualmente $\mathcal{P}$. Nessa subseção, apresentaremos alguns resultados do artigo [22] exceto em menção contrária. Além disso, assumiremos T_1 nessa subseção.

Teorema 2.21. *X é compacto se, e somente se, é dualmente compacto.*
Demonstração:
($\Rightarrow$) É imediato pela proposição 2.18.
($\Leftarrow$) Suponha que X seja dualmente compacto e não seja compacto. Considere

$$\theta = min\{|\mathcal{U}| \ : \mathcal{U} \text{ é cobertura aberta sem subcobertura finita}\}$$

Tal cardinal, pela proposição 1.79 é regular. Considere uma cobertura $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \theta\}$ de forma crescente, ou seja, para todo $\alpha < \theta$ temos que $U_\alpha \subseteq U_\beta$, $U_\alpha \neq X$ para todo $\alpha < \theta$ e $|\mathcal{U}| = \theta$. Para cada $x \in X$ atribuímos $O_x = U_{\alpha(x)}$ onde $\alpha(x) := min\{\beta < \theta : x \in U_\beta\}$. Assim obtemos a ona $\{O_x : x \in X\}$. Por X ser dualmente compacto, existe $K \subseteq X$ compacto tal que $\bigcup\{O_x : x \in K\} = X$. Além disso, veja que $\mathcal{U}$ é também uma familia de abertos de X que cobre K, logo $\mathcal{U}$ possui uma subcobertura finita que cobre K. Como tomamos a cobertura de forma crescente existe U_α tal que $K \subseteq U_\alpha$. Além disso, $O_x \subseteq U_\alpha$ para todo $x \in K$, de fato, para algum $x \in K$ temos que $x \in O_x = U_{\alpha(x)}$, $\alpha(x) = min\{\beta < \lambda : x \in U_\beta\} \leq \alpha$ e assim $U_{\alpha(x)} \subseteq U_\alpha$. Isso implica que $X = \bigcup\{O_x : x \in K\} \subseteq U_\alpha$. Absurdo, pois supomos que $U_\alpha \neq X$ para todo $\alpha < \theta$. Portanto, X é compacto. □

Teorema 2.22. *X é linearmente Lindelöf se, e somente se, é dualmente linearmente Lindelöf.*
Demonstração:
($\Rightarrow$) É imediato pela proposição 2.18.
($\Leftarrow$) Suponha que X seja dualmente linearmente Lindelöf e não seja linearmente Lindelöf. Defina
$\lambda = min\{|\mathcal{U}| \ : \mathcal{U}$ é cobertura aberta bem ordenada por $\subsetneq$ sem subcobertura enumerável$\}$.

Pela proposição 1.78 temos que λ é um cardinal regular não enumerável. Seja $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$ cobertura aberta bem ordenada por $\subsetneq$ sem subcobertura enumerável com $|\mathcal{U}| = \lambda$ e com a enumeração canônica crescente, i. e., $\alpha < \beta \Longrightarrow U_\alpha \subseteq U_\beta$ e $U_\alpha \neq X$ para todo $\alpha < \lambda$. Considere, $O_x = U_{\alpha(x)}$ onde $\alpha(x) = min\{\beta < \lambda : x \in U_\beta\}$. Assim, temos a ona $\mathcal{O} = \{O_x : x \in X\}$. Por ser dualmente linearmente Lindelöf, existe $K \subseteq X$ linearmente Lindelöf tal que $X = \bigcup\{O_x : x \in K\}$. Note que, $\mathcal{U}$ é uma família crescente de abertos de X que cobre K, assim, como K é linearmente Lindelöf, existe $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ tal que $K \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$ e $|\mathcal{U}'| \leqslant \aleph_0 < \lambda$. Temos que $\mathcal{U}'$ é crescente e existe um subconjunto enumerável $A \subseteq \lambda$, logo limitado em λ, tal que $\mathcal{U}' = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$. Assim, existe um $\alpha < \lambda$ tal que $K \subseteq U_\alpha$ e $O_x \subseteq U_\alpha$, para todo $x \in K$, pois para algum $x \in K$ temos que $x \in O_x = O_{\alpha(x)}$ e $\alpha(x) \leqslant \beta,\ \forall\ \beta \in \{\beta < \lambda : x \in U_\beta\}$, em particular, $\alpha \in \{\beta < \lambda : x \in U_\beta\}$ logo $U_\alpha(x) \subseteq U_\alpha$, assim temos que $X = \bigcup_{x\ \in\ K} O_x \subseteq U_\alpha$, um absurdo, pois $U_\alpha \neq X$ para todo $\alpha < \lambda$. Portanto, X é linearmente Lindelöf. □

Lema 2.23. *Se X é separado a direita e $|X| = \aleph_1$, então X não é hereditariamente Lindelöf.*

Demonstração: Suponha que X seja separado a direita, assim vai existir uma ona $\{U_x : x \in X\}$ tal que $x \notin U_y,\ \forall\ y <^* x$. Considere X com a enumeração canônica $X = \{X_\alpha : \alpha \in \zeta\}$ satisfazendo a boa ordem $<^*$ onde $|\zeta| = \aleph_1 = |X|$, isso implica que $\zeta \in [\omega_1, \omega_2[$. Seja $A = \{X_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ mostraremos que A não é Lindelöf, daí segue que X não é hereditariamente Lindelöf. Pra isso, basta observar que $\mathcal{U} = \{U_\alpha \cap A : \alpha < \omega_1\}$ é cobertura aberta de A que não tem subcobertura enumerável, de fato, seja $B \subseteq \omega_1$ enumerável, daí existe $\xi = sup\ (B) < \omega_1$ pois ω_1 é regular. Tomando x_γ com $\gamma > \xi$ e por X ser separado a direita temos que $x_\gamma \notin \bigcup_{\alpha \in B} U_\alpha \cap A$. Daí $\mathcal{U}$ não possui subcobertura enumerável, assim A não é Lindelöf. □

Teorema 2.24. *Se X é dualmente hereditáriamente Lindelöf, então é Lindelöf.*

Demonstração:

Supondo X dualmente hereditariamente Lindelöf e seja $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ com $\omega \leqslant \lambda$ uma cobertura qualquer de X. Para cada $x \in X$ seja $\alpha(x) := min\{\alpha \leqslant \lambda : x \in U_\alpha\}$ daí tomando $O_x = U_{\alpha(x)}$ temos que $\mathcal{O} = \{O_x : x \in X\}$ é uma ona de X. Por hipótese, existe $Y \subseteq X$ hereditariamente Lindelöf e núcleo da ona $\mathcal{O}$, ou seja, $\bigcup\{O_y : y \in Y\} = X$.

Veja que $P = \{\alpha(y) : y \in Y\}$ é enumerável. De fato, se P não for enumerável pode-se obter $A \subseteq Y$ com $|A| = \aleph_1$ e $\alpha(x) \neq \alpha(y)$, para todo $x \neq y \in A$ (basta escolher um representante para cada índice). Seja $<^*$ a boa ordem em A definida de modo que

$$x <^* y \Leftrightarrow \alpha(x) < \alpha(y).$$

Temos que A é separado a direita com sequência separante $\{O_x \cap A : x \in A\}$, pois se $y <^* x$ temos, pela construção que não pode ocorrer $x \in O_y \cap A$, pois $O_y = U_{\alpha(y)}$ e assim $x \in U_{\alpha(y)}$ onde teríamos $\alpha(x) \leq \alpha(y)$, que é um absurdo, pois $y <^* x \Leftrightarrow \alpha(y) < \alpha(x)$. Portanto, $\{O_x \cap A : x \in A\}$ é a sequência separante de A. Porem, pelo lema 2.23 não poderia existir um hereditariamente Lindelöf separado à direita de tamanho $\aleph_1$. Portanto, P é enumerável.

Existe $Z \subseteq Y$ com $|Z| \leq \aleph_0$, tal que $\{\alpha(z) : z \in Z\} = \{\alpha(y) : y \in Y\}$, pois basta tomar a inversa à direita da indexação. Com isso, para cada $y \in Y$ temos que existe $z \in Z$ tal que $\alpha(z) = \alpha(y)$, assim: $O_y = U_{\alpha(y)} = U_{\alpha(z)} = O_z$ e $\bigcup\{O_z : z \in Z\} = \bigcup\{O_y : y \in Y\} = X$. Logo, $\{O_z : z \in Z\}$ é uma subcobertura enumerável de $\mathcal{U}$, portanto X é Lindelöf. $\square$

Corolário 2.25. *Seja X espaço topológico qualquer, então são equivalentes:*

(a) X é dualmente enumerável.

(b) X é dualmente hereditariamente Lindelöf.

(c) X é Lindelöf.

Demonstração:
$(a) \implies (b)$ Considere X dualmente enumerável e $\mathcal{O} = \{O_x : x \in X\}$ uma ona qualquer de X daí existe $Y \subseteq X$ enumerável tal que $\bigcup\{O_x : x \in Y\} = X$. Temos que Y é enumerável então Lindelöf, por 1.75. Mostraremos que Y é hereditariamente Lindelöf, daí X será dualmente hereditariamente Lindelöf. De fato, seja $Z \subseteq Y$, qualquer, Z também é enumerável isso implica que Z é Lindelöf. Portanto, Y é hereditariamente Lindelöf.
$(b) \implies (c)$ É o teorema anterior.
$(c) \implies (a)$ Seja $\mathcal{O} = \{O_x : x \in X\}$ ona qualquer de X, como tal ona também é cobertura e por X ser Lindelöf existe $A \subseteq X$ enumerável tal que $\bigcup\{O_x : x \in A\} = X$ isso implica que X é dualmente enumerável. $\square$

As propriedades hereditariamente Lindelöf e linearmente Lindelöf são auto-duais, mas um espaço que seja dualmente Lindelöf não necessariamente é Lindelöf, como veremos a seguir.

Lema 2.26. *Se $A \dot\cup B = X$, então $2^X \cong 2^A \times 2^B$.*
Demonstração: Basta considerar $f : 2^X \to 2^A \times 2^B$ tal que $x \mapsto (x \restriction A, x \restriction B)$. f é bijetiva, é contínua e aberta, assim concluímos que f é um homeomorfismo. $\square$

O espaço do proximo teorema é uma espécie de versão não enumerável de Σ-produto.

Teorema 2.27 ([6])**.** *Existe um espaço Tychonoff dualmente σ-compacto que é pseudo-compacto mas não compacto.*

Demonstração: Seja $\kappa_0 = \aleph_0$, se $n \in \omega$ e se a cardinalidade de κ_n está definida, seja $\kappa_n + 1 = 2^{\kappa_n}$. Com isso, obtemos uma sequência de cardinais e assim definimos $\kappa = sup\{\kappa_n : n \in \omega\}$.

No espaço 2^κ considere o espaço $X = \{x \in 2^\kappa : |x^{-1}(1)| < \kappa\}$. Com isso, $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$ onde $X_n = \{x \in X : |x^{-1}(1)| < \kappa_n\}$, para todo $n \in \omega$. Seja o ponto $\mu_A \in 2^A$, com $A \subseteq \kappa$ qualquer, definido por $\mu_A(a) = 0$, $\forall\ a \in A$.

Fixemos uma ona $\mathcal{O} = \{O_x : x \in X\}$. Mostraremos que existe $S \subseteq X$ σ-compacto tal que $\bigcup_{x\in S} O_x = X$. Mas, é suficiente encontrar um σ-compacto $S_n \subseteq X$ tal que $X_n \subseteq \bigcup_{x\in S_n} O_x$ para todo $n \in \omega$.

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que toda O_x é um aberto básico da topologia produto, ou seja, existe $A_x \subseteq \kappa$ finito tal que $O_x = \{y \in X : y \upharpoonright A_x = x \upharpoonright A_x\}$ para todo $x \in X$.

Fixemos $m \in \omega$, mostraremos que existe $S_m \subseteq X$ σ-compacto tal que $X_m \subseteq \bigcup_{x\in S_m} O_x$. Seja $Y_n = \{x \in X : A_x \subseteq \kappa_n\}$ para todo $n \in \omega$ e assim $X = \bigcup_{n\in\omega} Y_n$, para ver isso, se dado $x \in X$ então $x \in X_n$ para algum $n \in \omega$ assim vai existir $A_x \subseteq \kappa_n$ tal que $x \in Y_n$, assim $x \in \bigcup_{n\in\omega} Y_n$. Logo, é suficiente mostrar que existe um compacto $P_{mn} \subseteq X$ tal que $Z_{mn} = X_m \cap Y_n \subseteq \bigcup_{x\in P_{mn}} O_x$ para cada $n \in \omega$. Assim, fixe $n \in \omega$; para todo $x \in X_m$ seja $\varphi : X_m \to 2^{\kappa_n}$, com $x \mapsto \varphi(x)$ onde para todo $\alpha < \kappa_n, \varphi(x)(\alpha) = x(\alpha)$, i. e., $\varphi(x) = x \upharpoonright \kappa_n$. Daí, $|\varphi(Z_{mn})| \leqslant 2^{\kappa_n} = \kappa_{n+1}$, assim existe $H_{mn} \subseteq Z_{mn}$ com $|H_{mn}| \leqslant \kappa_{n+1}$ e $\varphi(H_{mn}) = \varphi(Z_{mn})$.

Seja $j = max\{n+1, m\}$, dado que $|x^{-1}(1)| < \kappa_n$ para qualquer $x \in H_{mn}$ o conjunto $B = \bigcup\{x^{-1}(1) : x \in H_{mn}\}$ tem cardinalidade no máximo κ_j, pois, $|B| \leqslant |H_{mn}| \cdot sup\{|x^{-1}(1)| : x \in H_{mn}\} \leqslant \kappa_{n+1} \cdot \kappa_m = max\{\kappa_{n+1}, \kappa_m\} = \kappa_{max\{n+1,m\}} = j$. Se $A = \kappa \setminus B$, temos que $H_{mn} \subseteq 2^B \times \{\mu_A\} \subseteq X$. Assim, P_{mn} definida como o fecho de H_{mn} em X é compacto, pois, $2^B \times \{\mu_A\}$ é fechado e compacto em X e P_{mn} é fechado em $2^B \times \{\mu_A\}$ que é compacto portanto P_{mn} é compacto.

Dado $y \in Z_{mn}$ existe $x \in H_{mn}$ tal que $\varphi(x) = \varphi(y)$, de fato,

$$x \upharpoonright A_x = \varphi(x) \upharpoonright A_x = x \upharpoonright \kappa_n \upharpoonright A_x = y \upharpoonright \kappa_n \upharpoonright A_x = \varphi(y) \upharpoonright A_x = y \upharpoonright A_x.$$

Isso prova que $y \in O_x$.

Assim, $Z_{mn} \subseteq \bigcup_{x\in H_{mn}} O_x \subseteq \bigcup_{x\in P_{mn}} O_x$ para todo $m, n \in \omega$. Portanto, $P = \bigcup\{P_{mn} : m, n \in \omega\} \subseteq X$ é σ-compacto e $X = \bigcup_{x\in P} O_x$. Com isso, X é dualmente σ-compacto. Mais ainda, X é pseudocompacto, pois, $X_0 = \{x \in X : |x_{-1}(1)| \leqslant \omega\}$ é um subespaço denso enumeravelmente compacto de X, de fato, para ver que X_0 é denso em X, seja $[p] = \{f \in^\kappa 2 : p \subseteq f\}$ um aberto básico de X. Daí vai existir algum $x \in X$ tal que $x \in [p]$, basta fazer x coincidir no domínio de p e valer zero fora dele. Para mostrar que X_0 é enumeravelmente compacto seja $A \subseteq X_0$, enumerável infinito $A = \{x_n : n < \omega\}$, afirmamos que A tem ponto de acumulação em X_0, de fato, para cada n seja $B_n = x_n^{-1}(1)$ e $E = \bigcup_{n\in\omega} B_n$, B enumerável. Como $A \subseteq 2^E \times \{\mu_{\kappa\setminus E}\}$ e $2^E \times \{\mu_{\kappa\setminus E}\}$ é compacto assim A tem ponto de acumulação digamos a em $2^E \times \{\mu_{\kappa\setminus E}\}$. Mas, se $a \in 2^E \times \{\mu_{\kappa\setminus E}\}$, então $a^{-1}(1) \subseteq E$ e como $a^{-1}(1)$ é enumerável temos que $a^{-1}(1) \in X_0$ assim A tem ponto de acumulação em X_0. Portanto, X_0 é denso em X e enumeravelmente compacto, assim, pela proposição 1.105, X é pseudocompacto.

Ainda, $X \neq 2^\kappa$ e X é denso em 2^κ, pois, para algum $[p]$ aberto básico em 2^κ basta considerar f onde coincide no domínio de p e zero fora do domínio, assim, $f \in X$ pois $f^{-1}(1) \subseteq dom(p)$. Assim, proposição 1.67, X é não compacto. □

Como um espaço pseudocompacto e não compacto não é Lindelöf, pela proposição 1.101, e por σ-compacto implicar Lindelöf temos o seguinte corolário.

Corolário 2.28. *Existe um espaço que é dualmente Lindelöf mas não é Lindelöf. Em particular, ser Lindelöf não é auto-dual.* □

Teorema 2.29. *Seja κ um cardinal infinito e E_k a classe dos espaços X tal que $e(X) \leqslant \kappa$. Então E_k é auto-dual.*

Demonstração: Suponha que X pertença a classe dualmente E_k e não pertença a classe E_k. Assim, existe $D \subseteq X$ fechado e discreto com $|D| = \kappa^+$. Se $e(X) > \kappa$, existe um fechado e discreto de tamanho κ^+ Agora, definamos a ona $\mathcal{O} = \{O_x : x \in X\}$ da seguinte maneira:

Se $x \in X \setminus D$ seja $O_x = X \setminus D$.

Se $x \in D$ seja O_x, aberto qualquer tal que $D \cap O_x = \{x\}$.

Temos que por X ser dualmente E_k existe $Y \subseteq X$ tal que $e(Y) \leqslant \kappa$ e $\bigcup\{O_x : x \in Y\} = X$. Se $y \in D$, então temos que $y \in O_x$ se, e somente se, $y = x$. De fato, se dado $y \in D$ com $y \in O_x$ então temos, pela definição da ona, que $O_x \cap D = \{x\}$ onde obtemos que $y \in \{x\}$ que implica $y = x$. Com isso temos que $D \subseteq Y$, mas como $|D| = \kappa^+$ e assim $e(Y) > \kappa$ (pois um fechado e discreto de X que esteja contido em Y vai ser um fechado e discreto de Y), absurdo, pois $e(Y) \leqslant \kappa$. Portanto, X pertence a classe E_k. □

Teorema 2.30. *Seja X espaço topológico Tychonoff. X é pseudocompacto se, e somente se, X é dualmente pseudocompacto.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) É imediato pela proposição 2.18.

($\Leftarrow$) Suponha que X seja dualmente pseudocompacto e não pseudocompacto. Existe, pela proposição 1.99, uma família discreta, logo, localmente finita $\{U_n : n \in \omega\} \subseteq \tau \setminus \{\emptyset\}$. Escolhemos um $x_n \in U_n$, para todo $n \in \omega$, daí $W = X \setminus \{x_n : n \in \omega\}$ e $U = \bigcup_{n\in\omega} U_n$ são

subconjuntos abertos de X. Definamos a ona $\mathcal{O} = \{O_x : x \in X\}$ da seguinte maneira:
Se $x \in U$, $\exists!\ n \in \omega$ com $x \in U_n$. Seja $O_x = U_n$.
Se $x \in X \setminus U$, seja $O_x = W$.

Como X é dualmente pseudocompacto existe $P \subseteq X$ pseudocompacto tal que $\bigcup\{O_x : x \in P\} = X$. Tem-se que, $P \cap U_n \neq \emptyset\ \forall\ n$, pois, cada x_n pertence a um único U_n. Com isso, temos que $\{U_n \cap P : n \in \omega\} \subseteq \tau_P \setminus \{\emptyset\}$ é uma família discreta infinita de subconjuntos abertos de P que é suposto pseudocompacto, absurdo por 1.99. Portanto X é pseudocompacto. □

2.3 D-espaços

Nessa seção definiremos os D-espaços, apresentaremos alguns resultados relativos aos D-espaços, mostraremos que todo espaço métrico é um D-espaço e faremos alguns exemplos.

Definição 2.31. Um espaço topológico X é dito um **D-espaço**, se para toda cobertura aberta de X possui um núcleo fechado e discreto. Ou seja, para qualquer ona $\{O_x : x \in X\}$, existe $A \subseteq X$ fechado e discreto tal que $\bigcup\{O_x : x \in A\}$=X

Uma proposição básica sobre D-espaço é:

Proposição 2.32. *Se X é um espaço topológico T_1 e compacto, então é D-espaço.*
Demonstração: Seja $\mathcal{O} = \{U_x : x \in X\}$ uma ona de X. Por X ser compacto, existe $F \subseteq X$ tal que $\bigcup\{U_x : x \in F\} = X$, i. e., F é um núcleo finito da ona. Daí, por T_1 temos que F é fechado e discreto, ou seja, F é núcleo fechado e discreto. Portanto, X é um D-espaço. □

Faremos duas demonstrações que espaços métricos são D-espaços. A primeira faz uso do teorema de metrização de Nagata-Smirnov 4.4.7 de [10] "X é um espaço métrico se, e somente se, X é regular e possui uma base σ-localmente finita". Então basta mostrarmos o seguinte teorema, cuja demonstração foi uma sugestão da Professora Ofelia Alas.

Teorema 2.33. *Seja X espaço regular com base σ-localmente finita então X é um D-espaço.*

Demonstração: Seja $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{V}_n$, onde cada $\mathcal{V}_n$ é uma família de abertos localmente finita, uma base de X. Considere $\mathcal{O} = \{O_x : x \in X\}$ uma ona de X qualquer e defina:

$$A_1 = \{x \in X \ \ : \exists\ B \in \mathcal{V}_1,\ x \in B \subseteq O_x\}.$$

Para cada $x \in A_1$ fixemos $B_x \in \mathcal{V}_1$ tal que $x \in B_x \subseteq O_x$, assim podemos considerar: $\mathcal{C}_1 = \{B_x \in \mathcal{V}_1 : x \in A_1\}$. Note que $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{V}_1$ e que $\{B_x : x \in A_1\}$ é localmente finita pois $\mathcal{V}_1$ é localmente finita. Restringindo a indexação a um subconjunto C_1 de A_1, se necessário, para que se tenha $\{B_x : x \in C_1\} = \mathcal{C}_1$. Com isso, $\{\{x\} : x \in C_1\}$ é também localmente finita e assim pela proposição 1.62 o subconjunto C_1 é fechado e discreto e

$$A_1 \subseteq \bigcup_{x \in C_1} O_x$$

.

Agora, defina:

$$A_2 = \{x \in X \setminus \left(\bigcup\{O_y : y \in C_1\}\right) \ : \exists\, B \in \mathcal{V}_2,\ x \in B \subseteq O_x\}.$$

Assim como no caso A_1, para cada $x \in A_2$ fixemos $B_x \in \mathcal{V}_2$ tal que $x \in B_x \subseteq O_x$, assim podemos considerar: $\mathcal{C}_2 = \{B_x \in \mathcal{V}_2 : x \in A_2\}$. Note que $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{V}_2$ e que $\mathcal{C}_2$ é localmente finita pois $\mathcal{V}_2$ é localmente finita. Restringindo a indexação a um subconjunto C_2 de A_2, se necessário, para que se tenha $\{B_x : x \in C_2\} = \mathcal{C}_2$. Podemos concluir, como no caso de C_1, que C_2 é fechado e discreto e assim:

$$A_1 \cup A_2 \subseteq \bigcup_{x \in C_1 \cup C_2} O_x.$$

Prosseguindo dessa forma definimos:

$$A_n = \{x \in X \setminus \left(\bigcup\{O_y : y \in \bigcup_{i<n} C_i\}\right) \ : \exists\, B \in \mathcal{V}_n,\ x \in B \subseteq O_x\}.$$

E obtemos C_n tal que $\bigcup\{A_k : k \leqslant n\} \ \subseteq\ \bigcup\{O_x : x \in \ \bigcup_{k \leqslant n} C_k\}$

Afirmação 1: Definindo $C = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} C_n$, temos que $X = \bigcup\limits_{x \in\ C} O_x$.

Pois, tomando $x \in X$, e definindo $n_x = min\{n : \exists\, B \in \mathcal{V}_n$ tal que $x \in B \subseteq O_x\}$, temos que:

Se $x \in \bigcup \left\{O_y : y \in \bigcup\limits_{i<n_x} C_i\right\} \implies x \in \bigcup\limits_{y \in\ C} O_y$.

Se $x \notin \bigcup \left\{O_y : y \in \bigcup\limits_{i<n_x} C_i\right\}$, por construção, $x \in A_{n_x}$.

Afirmação 2: $C = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} C_n$ é fechado e discreto.

De fato, veremos primeiro que é discreto. Observe que $U_j = W_j \setminus \left(\bigcup\limits_{k<j} C_k\right)$, onde $W_i = \bigcup_{x \in C_i} O_x$, é aberto em X. Para $x \in C$, existe $j \geqslant 1$ tal que $x \in C_j$ e assim $x \in O_x \subseteq W_j \subseteq U_j$. Se $y \in C_i$ e $i < j$ temos, pela construção do U_j, que $y \notin U_j$. Se $y \in C_i$

e $i > j$, por $y \in A_i$ temos que $y \notin A_k, k < i$ e $C_i \subseteq A_i$ temos que $y \notin U_j$. Portanto, para cada ponto de C pertence a um único aberto da ona. Logo, para cada $x \in C$ o aberto $U_x = (U_j \setminus (C_j \setminus \{x\})$ é tal que $U_x \cap C = \{x\}$. Portanto, C é discreto.

Mostraremos que C é fechado, seja $z \notin C \Longrightarrow \exists\, m$ tal que $z \in O_m$, daí $U_m \setminus C_m$ é um subconjunto aberto tal que $z \in U_m \setminus C_m \subseteq X \setminus C$ implicando que C é fechado.

Pela afirmação 1, C é núcleo da ona $\mathcal{O}$ e, pela afirmação 2, C é fechado e discreto, portanto, X é fechado e discreto. $\square$

Com esse teorema temos que um espaço métrico, por ser regular e possuir uma base σ-localmente finita, é um D-espaço.

Mostraremos, de outra maneira, que todo espaço métrico é um D-espaço. Para isso precisamos da seguinte definição, onde notaremos $\varepsilon(X, \tau) = \{(x, T) \in X \times \tau : x \in T\}$.

Definição 2.34 ([11]). *Um espaço topológico (X, τ) é dito **ν-espaço** se existe $\nu : \varepsilon(X, \tau) \to \omega$ tal que para toda ona $\mathcal{O}$ e todo $Y \subseteq X$, se existe um limitante $k \in \omega$ tal que $\nu(y, O(y)) \leqslant k$ para todo $y \in Y$ então $\overline{Y} \subseteq \mathcal{O}[Y] = \bigcup\{O(y) : y \in Y\}$.*

Sejam $X = \{x_\alpha : \alpha < \lambda\}$ um conjunto bem ordenado e $\mathcal{O}$ uma ona de X. Definimos D_α por indução em α:

(1) $D_0 = \emptyset$;

(2) Se $\alpha = \beta + 1$, e $x_\beta \in \mathcal{O}[D_\beta]$, então $D_\alpha = D_\beta$;

(3) Se $\alpha = \beta + 1$, e $x_\beta \notin \mathcal{O}[D_\beta]$, então $D_\alpha = D_\beta \cup \{x_\beta\}$;

(4) Se α for limite, então $D_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta$.

(5) $D = \displaystyle\bigcup_{\beta<\lambda} D_\beta$

Veja que, pela construção, $x_\beta \in \mathcal{O}[D_{\beta+1}]$, com isso $X = \mathcal{O}[D]$. Além disso, temos, por finitude local, a seguinte proposição:

Proposição 2.35 ([11]). *Sejam X um espaço topológico T_1 e A um subconjunto de X. Se para cada $p \in X$ existe uma vizinhança aberta W de p tal que $|W \cap A| \leqslant 1$, então A é fechado e discreto.* $\square$

Lema 2.36 ([11]). *Se $\overline{D_\beta} \subseteq \mathcal{O}[D_\beta]$ para todo $\beta < \lambda$ então $D = \bigcup_{\alpha<\lambda} D_\alpha$ é fechado e discreto.*

Demonstração: Fixemos $p \in X$, arbitrário, e seja γ o mínimo tal que $p \in \mathcal{O}[D_\gamma]$. Observe que $\gamma = \beta + 1$, pois, é o mínimo dos indices dos D_β para $\beta < \lambda$ em que p pertence. Assim temos que $p \in \mathcal{O}[D_{\beta+1}] \setminus \mathcal{O}[D_\beta]$. Por hipótese $\overline{D_\beta} \subseteq \mathcal{O}[D_\beta]$ daí $p \in \mathcal{O}[D_{\beta+1}] \setminus \mathcal{O}[D_\beta] \subseteq \mathcal{O}[D_{\beta+1}] \setminus \overline{D_\beta} = W_p$. Se $x_\delta \in D = \bigcup\{D_\alpha : \alpha < \lambda\}$ e $\delta < \beta$, então $x_\delta \in D_{\delta+1} \subseteq D_\beta \subseteq \overline{D_\beta} \Longrightarrow x_\delta \notin W_p$. Se $x_\delta \in D$ e $\beta < \delta$, então $x_\delta \notin W_p$, pois $W_p \subseteq \mathcal{O}[D_{\beta+1}] \subseteq \mathcal{O}[D_\delta]$ e $x_\delta \notin \mathcal{O}[D_\delta]$ ($x_\delta \in \mathcal{O}[D_{\delta+1}]$). Assim, $D \cap W_p \subseteq \{x_\beta\} \Longrightarrow |D \cap W_p| \leqslant 1$ e , como p foi tomado arbitrário, pela proposição 2.35 temos que D é fechado e discreto.
□

Lema 2.37 ([11]). *Espaços métricos são ν-espaços.*
Demonstração: Seja, X uma espaço métrico, defina

$$\begin{aligned} \nu(x,U) &= min\left\{n \in \ \omega : B(x, \tfrac{1}{n+1}) \subseteq U\right\} \\ &= min\left\{n \in \ \omega : \{y \in X : d(x,y) < \tfrac{1}{n+1}\} \subseteq U\right\}. \end{aligned}$$

Note que $\left\{n \in \ \omega : B(x, \frac{1}{n+1}) \subseteq U\right\} \neq \emptyset$. Fixemos $\mathcal{O}$ uma ona de X, $Y \subseteq X$ e k como na definição 2.34. Seja $z \in X \setminus \mathcal{O}[Y]$, daí para cada $y \in Y$ existem, por hipótese,

$$O_y \text{ e } \nu(y, O_y) = min\left\{n \in \ \omega : B(y, \tfrac{1}{n+1}) \subseteq O(y)\right\} \leqslant k.$$

Para todo $y \in Y$, $B(y, \frac{1}{k+1}) \subseteq O(y) \Longrightarrow Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} B(y, \frac{1}{k+1}) \subseteq \mathcal{O}[Y]$. Assim, como $z \notin \mathcal{O}[Y]$, não existe $O \in \{O(y) : y \in Y\}$ tal que $z \in O$, assim temos que

$$d(z,y) \geqslant \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} \Longrightarrow B(z, 1/n+2) \cap Y = \emptyset \Longrightarrow z \notin \overline{Y}$$

e portanto $\overline{Y} \subseteq \mathcal{O}[Y]$. □

Teorema 2.38 ([11]). *Todo ν-espaço é um D-espaço.*
Demonstração: Seja $X = \{x_\alpha : \alpha < \lambda\}$ ν-espaço e considere uma ona $\mathcal{O} = \{O_x; x \in X\}$ qualquer de X. Pode-se definir $\nu^* : X \to \omega$, tal que $\nu^*(x) = \nu(x, O(x))$, assim para cada $k \in \omega$ a imagem inversa $\{(\nu^*)^{-1}(k) : k \in \omega\}$ forma uma partição de X. Assim, bem ordenemos X da seguinte maneira: Para $x, y \in X$ se $x, y \in X_i = (\nu^*)^{-1}(k)$, como em cada partição X_i existe uma relação r_i que o bem ordena, temos que $x \ r_i \ y$, se $x \in X_i$ e $y \in X_j$ com, sem perda de generalidade, $i < j$ então $x < y$. Feita essa ordenação temos que

$$\nu(x_\beta, O(x_\beta)) < \nu(x_\alpha, O(x_\alpha)) \Longrightarrow \beta < \alpha$$

Relembrando como definimos $D = \displaystyle\bigcup_{\alpha<\lambda} D_\alpha$, sendo

(1) $D_0 = \emptyset$;
(2) $\alpha = \beta + 1$ se $x_\beta \notin \mathcal{O}[D_\beta]$ então $D_\alpha = D_\beta \cup \{x_\beta\}$, se $x_\beta \in \mathcal{O}[D_\beta]$ então $D_\alpha = D_\beta$;
(3) Se α for limite $D_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta$;

Veja, também, que $X = \mathcal{O}[D]$, pois $\forall\ x_\alpha \in X, x_\alpha \in \mathcal{O}[D_{\alpha+1}] \subseteq \mathcal{O}[D]$.

Agora, só basta mostrar que D é fechado e discreto. Tome $Y = D_\beta$ para $\beta < \lambda$ fixado. Para algum $z_\gamma \in D_\beta$, $\nu(x_\beta, O(x_\beta)) < \nu(z_\gamma, O(z_\gamma))$ não pode ocorrer, pois, se ocorresse teríamos pela boa ordenação que $\beta < \gamma$, contradição, pois, os elementos de D_β, por construção, são da forma x_ζ para $\zeta < \beta$ logo para todo $z_\gamma \in D_\beta$ temos que $\nu(z_\gamma, O(z_\gamma)) < \nu(x_\beta, O(x_\beta))$. Assim, basta definir $\nu(x_\beta, O(x_\beta)) = k$ como na definição de ν-espaço e obtemos, que $\overline{D_\beta} \subseteq \mathcal{O}[D_\beta]$ daí aplicando o lema 2.38 temos que D é fechado e discreto e como $X = \bigcup\{O_x : y \in D\}$ temos que X é D-espaço. $\square$

Pelos últimos resultados temos que todo espaço métrico é um D-espaço.

Exemplo 2.39. $\mathbb{R}$ é um D-espaço.

A ideia para a verificação do seguinte exemplo foi retirada de uma palestra da Profa. Ofelia Alas.

Exemplo 2.40. A reta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_s$, que não é metrizável, é um D-espaço. De fato, tem-se que a reta de Sorgenfrey é a reta real com a topologia cuja base é dada por $\mathcal{B} := \{\ [a,b[\ : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$. Veja que por $\mathbb{R}_s = \bigoplus_{k \in\ \mathbb{Z}} [k, k+1[_{\mathbb{R}_s}$, $[0, +\infty[= \bigoplus_{n \in\ \mathbb{N}} [n, n+1[\ _{\mathbb{R}_s}$ e cada $[n, n+1[\ _{\mathbb{R}_s} \cong [k, k+1[\ _{\mathbb{R}_s} \cong [0, 1[\ _{\mathbb{R}_s}$ e, mais ainda $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$, assim temos que $\mathbb{R}_s$ é homeomorfo ao seu subespaço $[0, +\infty[_{\mathbb{R}_s}$. Assim, vamos mostrar que $[0, +\infty[\ _{\mathbb{R}_s}$ é um D-espaço.

Considere $\{O_x : x \in X\}$ uma ona qualquer em X, daí para cada $x \in X$ temos que existe $b_x \in [0, +\infty[$, o maior possível, eventualmente podendo ser $+\infty$, tal que $x \in [x, b_x[\ \subseteq O_x$.

Seja as seguintes propriedades para um subconjunto D fechado e discreto contido em $[0, +\infty[$:

(1) $0 \in D$;

(2) $x, y \in D,\ x \neq y,$ então $[x, b_x[\ \cap\ [y, b_y[\ = \ \emptyset$;

(3) $\displaystyle\bigcup_{x\ \in\ D} [x, b_x[$ é um intervalo da forma $[0, c\ [$ onde c pode ser $+\infty$;

Considere

$$\mathcal{C} = \{D \subseteq [0, +\infty[: \text{fechado e discreto satisfazendo (1), (2) e (3)}\}.$$

Ordenemos $\mathcal{C}$ pela inclusão $\subseteq$. Observe que $\mathcal{C} \neq \emptyset$ pois $\{0\} \in \mathcal{C}$. Seja $(D_i)_{i\ \in\ I}$ uma cadeia em $\mathcal{C}$ que é limitada superiormente por $D = \displaystyle\bigcup_{i\ \in\ I} D_i$, primeiramente verificaremos que $D \in \mathcal{C}$, i. e., D satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $D \subseteq [0, +\infty[$. Esse item é imediato pela definição de $\mathcal{C}$.

(ii) D satisfaz (1), (2) e (3). Fazendo um por vez:

(1) $0 \in D$ pois $0 \in D_i$ para todo $i \in I$. Logo vale (1).

(2) Sejam $x, y \in D$ daí existem $i, j \in I$ tal que $x \in D_i$ e $y \in D_j$ por $(D_i)_{i \in I}$ ser cadeia temos, sem perda de generalidade, que $D_i \subseteq D_j$ daí $x, y \in D_j$ e vale que $[x, b_x[\cap [y, b_y[= \emptyset$ para $x, y \in D$. Logo vale (2).

(3) Para cada $i \in I$ seja c_i nas condições de (3) para cada D_i e considere $c = sup\, \{c_i : i \in I\}$ afirmamos que

$$\bigcup_{x \in D} [x, b_x[= [0, c[$$

Pois, para algum $x \in D$ $\exists i \in I$ tal que $x \in D_i$ daí $[x, b_x[\subseteq [o, c_i[\subseteq [0, c[$. Por outro lado, para $t \in [0, c[$, $t < c$ daí $\exists i \in I$ tal que $t < c_i$ implicando que $t \in [0, c_i[= \bigcup_{x \in D_i} [x, b_x[$ assim para algum x temos que $t \in [x, b_x[\subseteq \bigcup\limits_{x \in D} [x, b_x[$. Logo vale (3).

Portanto, D satisfaz os items (1), (2) e (3). Finalmente:

(iii) D é fechado e discreto.

Primeiro verificaremos que D é discreto, de fato, a família $\{[x, b_x[: x \in D\}$ testemunha que D é discreto. E é fechado pois, tomando $y \notin D$, como $\bigcup\limits_{x \in D_i} [x, b_x[= [0, c[$ temos dois casos. Se $y \in [c, +\infty[$ temos que $y \in]c, +\infty[\subseteq [0, +\infty[\setminus D$. Se $y \in [0, c[$, então por (2) existe um único b_x tal que $y \in]x, b_x[\subseteq [0, +\infty[\setminus D$ isso mostra que D é fechado. Em qualquer caso, y é ponto interior do complementar de D. Portanto, D é fechado e discreto.

Agora, pelo Lema de Zorn, existe $\mathbf{D} \in \mathcal{C}$ maximal (fechado e discreto) tal que

$$\bigcup_{x \in \mathbf{D}} [x, b_x[= [0, c[$$

Além disso, temos que $c = +\infty$. De fato, se $c < +\infty$ então $\mathbf{D} \subseteq [0, c[$ e podemos obter $b_c < +\infty$ tal que $c \in [c, b_c[\subseteq O_c$ isso implica que

$$\mathbf{D} \cup \{c\} = \bigcup_{x \in \mathbf{D}} [x, b_x[\cup [c, b_c[= \bigcup_{x \in \mathbf{D} \cup \{c\}} [x, b_x[$$

daí $\mathbf{D} \cup \{c\}$ é um fechado e discreto que, pela proposição 1.58, está contido em $[0, +\infty[$ e verifica (1), (2) e (3) pelos mesmo argumento que usamos em (ii). Portanto temos um $\mathbf{D} \cup \{c\} \in \mathcal{C}$ maior que $\mathbf{D}$ que é maximal de $\mathcal{C}$, absurdo. Portanto, temos que $\mathbf{D}$ é um fechado e discreto maximal em $[0, +\infty[$ tal que

$$\bigcup_{x \in \mathbf{D}} O_x = [0, +\infty[.$$

Isso implica que $\mathbb{R}_s$ é D-espaço.

As seguintes proposições são apresentadas no artigo [12] como comentários.

Proposição 2.41 ([12])**.** *Se X é um D-espaço, então $e(X) = L(X)$.*
Demonstração: Segue por 1.123 que $e(X) \leqslant L(X)$. Mostraremos que $e(X) \geqslant L(X)$. De fato, denote $e(X) = \lambda$ e $L(X) = \kappa$, se tivéssemos $e(X) < L(X)$ existiria uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ que não possuiria subcobertura de tamanho $\leqslant \lambda$. A cada $x \in X$ fixemos $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$ e considere a ona do espaço X dada por $\mathcal{O} = \{U_x : x \in X\} \subseteq \mathcal{U}$. Se $F \subseteq X$ é um fechado e discreto então $|F| \leqslant \lambda$ e sabendo que a ona $\mathcal{O}$ não possui núcleo de tamanho $\leqslant \lambda$, consequentemente $\mathcal{O}$ não tem um núcleo fechado e discreto, pois sequer tem uma subcobertura de tamanho $\leqslant \lambda$. Com isso, temos que X não é um D-espaço. Assim, $e(X) \geqslant L(X)$. Portanto $e(X) = L(X)$. $\square$

Com mesmos argumentos, pode se mostrar que se $s(X) < L(X)$ então X não é dualmente discreto. Pois, se $s(X) < L(X)$ existe uma cobertura aberta que não tem subcobertura menor ou igual a $s(X)$, daí pode-se conseguir uma ona $\mathcal{O}$ que não tem núcleo menor ou igual a $s(X)$, logo tal ona não pode ter núcleo discreto, pois os discretos tem tamanho no máximo $s(X)$.

Proposição 2.42 ([12])**.** *Um subconjunto fechado de um D-espaço é um D-espaço.*
Demonstração: Sejam um subespaço fechado $F \subseteq X$ e $\mathcal{O} = \{U_x : x \in F\}$ uma ona arbitrária de F. Note que, cada aberto U_x é da forma $V_x \cap F$, onde V_x é um aberto de X. Considere $\{W_x : x \in X\}$, onde $W_x = V_x$, se $x \in F$, e $W_x = X \setminus F$ se $x \notin F$. Veja que $\{W_x : x \in X\}$ é uma ona de X. Por hipótese X é um D-espaço, assim existe $A \subseteq X$ fechado e discreto em X tal que $\bigcup\{W_x : x \in A\} = X$.

Como $A \cap F$ é claramente fechado e discreto em Y

Afirmamos que $\bigcup\{U_x : x \in A \cap F\} = F$. ($\subseteq$) Esse inclusão é imediata, pois cada aberto U_x está contido em F.
($\supseteq$) Tome $z \in F$, existe $x \in A$ tal que $z \in W_x$. Tal x também pertencer a F, pois se $x \in X \setminus F$, $W_x = X \setminus F$, um absurdo, pois $z \in F \cap W_x$, logo $x \in A \cap F$. Como $z \in W_x (= V_x)$ e $z \in F$ temos que $z \in V_x \cap F = U_x$, com isso $x \in \bigcup\{U_x : x \in A \cap F\}$. Vale a afirmação, ou seja, F é um D-espaço. $\square$

Proposição 2.43 ([12])**.** *Seja X um espaço topológico T_1, se X for enumeravelmente compacto e D-espaço, então é compacto.*

Demonstração: Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X. Fixemos para todo $x \in X$ um único $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$ obtemos a ona $\{U_x : x \in X\}$. Como X é D-espaço, temos que existe um F fechado e discreto em X tal que $\bigcup\{U_x : x \in F\} = X$. Mas, como X é enumeravelmente compacto, pela teorema 1.76, F é finito, isso implica que $\{U_x : x \in F\}$ é uma subcobertura finita de $\mathcal{U}$ que cobre X, logo X é compacto. □

Corolário 2.44. *Seja X um espaço topológico T_1, se X for enumeravelmente compacto e não compacto, então não é D-espaço.* □

Segue, imediatamente pelo corolário acima que o ordinal ω_1 não é um D-espaço (pois é enumeravelmente compacto e não compacto). Mas como vimos em 2.20, é dualmente discreto.

□

2.4 Propriedades estrela e pseudocompacidade

Nesta seção, apresentaremos dois caminhos de implicações entre espaços enumeravelmente compactos e pseudocompactos. Um desses caminho foi feito em [20], com relação a n-starcompacto. Apresentaremos, ainda, um exemplo de um espaço pseudocompacto que não é estrela enumeravelmente compacto, ou seja, mostrando que não vale a recíproca.

Em [19] temos que:

$$\text{pseudocompacto} \Longrightarrow \text{tenuamente compacto} \Longrightarrow \text{DFCC}.$$

Onde a primeira implicação vale a recíproca para espaços Tychonoff e a segunda para espaços regulares.

Teorema 2.45. *Seja X um espaço topológico Tychonoff. Então X é pseudocompacto se, e somente se, X é estrela pseudocompacto.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Segue pela proposição 2.2.

($\Leftarrow$) Suponha que X seja estrela pseudocompacto e não pseudocompacto, assim por 1.99 existe $\{U_n : n < \omega\}$ família discreta infinita de abertos. Tomando $x_n \in U_n$ para cada $n \in \omega$ e definindo $F = \{x_n : n < \omega\}$, temos que F é um subconjunto fechado e discreto de X, pois a família dos unitários é localmente finita e pela proposição 1.62 F é fechado e discreto. Assim $\mathcal{U} = \{X \setminus F\} \cup \{U_n : n \in \omega\}$ é uma cobertura aberta de X. Por X ser estrela pseudocompacto existe $A \subseteq X$ pseudocompacto tal que $St(A,\mathcal{U}) = X$. Daí, como cada A deve intersectar U_n já que U_n é o único aberto que contém x_n, temos que $\{U_n : A \cap U_n \neq \emptyset\}$ é uma família discreta infinita de abertos de A, isso implica, pela proposição 1.99, que A não pode ser pseudocompacto, absurdo. Portanto X é pseudocompacto. $\square$

Utilizando, nessa ordem, 2.11, 2.3, 2.4 e 2.45 obtemos:

Teorema 2.46. *Seja X um espaço topológico Tychonoff, então*

$$X \text{ é enumeravelmente compacto} \Longleftrightarrow X \text{ é estrela finito} \Longrightarrow X \text{ é estrela compacto}$$

$$\Longrightarrow X \text{ é estrela pseudocompacto} \Longleftrightarrow X \text{ é pseudocompacto.}$$

$\square$

Se X for Normal, pelo teorema 1.103 temos que:

$$X \text{ é enumeravelmente compacto} \Longleftrightarrow X \text{ é pseudocompacto,}$$

ou seja, as propriedades topológicas do teorema acima coincidem.

Pela definição de estrela, 2.1, temos que $St(A,\mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : U \cap A \neq \emptyset\}$. Assim podemos definir indutivamente

$$St^n(A,\mathcal{U}) = St(St^{n-1}(A,\mathcal{U}),\mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : U \cap St^{n-1}(A,\mathcal{U}) \neq \emptyset\}.$$

Por convenção adotaremos $St^0(A,\mathcal{U}) = A$

As seguintes definições e resultados são do artigo do van Douwen [20]. Ainda, essas definições aparecerão no capítulo 4 com outras terminologias.

Definição 2.47. Um espaço X é dito **n-starcompacto** se para toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X, existe $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ subfamília finita tal que $St^n(\bigcup\mathcal{V},\mathcal{U}) = X$.

Definição 2.48. Um espaço X é dito **espaço ! fortemente n-starcompacto** se para toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X, existe $F \subseteq X$ subconjunto finito tal que $St^n(F,\mathcal{U}) = X$.

Observe que um espaço estrela finito coincide com fortemente 1-starcompacto. Com isso, para espaços T_2, pelo teorema 2.11, temos que espaços enumeravelmente compactos são exatamente os fortemente 1-starcompactos.

Proposição 2.49. *Sejam X um espaço topológico, $A, B \subseteq X$ e $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ coberturas abertas de X, então valem:*

(*i*) *Se* $A \subseteq B$ *então* $St^n(A,\mathcal{U}) \subseteq St^n(B,\mathcal{U})$ *para* $n \in \mathbb{N}$

(*ii*) *Para todo* $n \in \mathbb{N}$, $St^n(A,\mathcal{U}) \subseteq St^{n+1}(A,\mathcal{U})$.

(*iii*) *Para todo* $n \in \mathbb{N}$, $x \in St^n(A,\mathcal{U}) \iff \exists\, U_n, U_{n-1}, ..., U_1 \in \mathcal{U}$ *tais que* $x \in U_n$, $U_j \cap U_{j-1} \neq \emptyset$, $\forall\ 2 \leqslant j \leqslant n$ *e* $U_1 \cap A \neq \emptyset$.

Demonstração: (*i*) e (*ii*) seguem por 1.116.
(*iii*) Para $n = 1$ é imediato. Como ilustração, mostraremos que vale para $n = 2$, ou seja,

$$x \in St^2(A,\mathcal{U}) \iff \exists\, U_2, U_1 \in \mathcal{U} \text{ tais que } x \in U_2,\ U_1 \cap U_2 \neq \emptyset \text{ e } U_1 \cap A \neq \emptyset.$$

De fato, se $x \in St^2(A,\mathcal{U}) = St(St(A,\mathcal{U}),\mathcal{U})$ existem $U_2 \in \mathcal{U}$ com $x \in U_2$ e $y \in U_2 \cap St(A,\mathcal{U})$, daí existe $U_1 \in St(A,\mathcal{U})$ com $U_1 \cap A \neq \emptyset$ e $y \in U_1$. Isso implica que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Reciprocamente, suponha que $U_2, U_1 \in \mathcal{U}$ com $x \in U_2$, $U_1 \cap A \neq \emptyset$ e $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Como $U_1 \cap A \neq \emptyset \Longrightarrow U_1 \in \{U \in \mathcal{U} : U \cap A \neq \emptyset\} \Longrightarrow U_1 \subseteq St(A,\mathcal{U})$ e por $\emptyset \neq U_1 \cap U_2 \subseteq St(A,\mathcal{U}) \cap U_2 \Longrightarrow U_2 \in \{U \in \mathcal{U} : U \cap St(A,\mathcal{U}) \neq \emptyset\} \Longrightarrow U_2 \subseteq St^2(A,\mathcal{U})$ assim $x \in St^2(A,\mathcal{U})$.

Tendo ilustrado para $n = 2$, vamos provar para todo $n \geqslant 2$ usando indução. Suponha (*iii*) verdadeiro para n, ou seja, $x \in St^n(A,\mathcal{U}) \iff \exists\, U_n, U_{n-1}, ..., U_1 \in \mathcal{U}$ tais que $x \in U_n$, $U_j \cap U_{j-1} \neq \emptyset$, para todo $2 \leqslant j \leqslant n$ e $U_1 \cap A \neq \emptyset$. Mostraremos que vale para $n+1$, i. é., $x \in St^{n+1}(A,\mathcal{U}) \iff \exists\, U_{n+1}, U_n, U_{n-1}, ..., U_1 \in \mathcal{U}$ tais que $x \in U_{n+1}$, $U_1 \cap A \neq \emptyset$ e $U_j \cap U_{j-1} \neq \emptyset$, para todo $2 \leqslant j \leqslant n$.

De fato, Se $x \in St^{n+1}(A,\mathcal{U})$ existem $U_{n+1} \in \mathcal{U}$ com $x \in U_{n+1}$ e $y \in U_{n+1} \cap St^n(A,\mathcal{U})$, em particular, como $y \in St^n(A,\mathcal{U})$ daí, por hipótese de indução existe $U_n, U_{n-1}, ..., U_1 \in \mathcal{U}$ com $y \in U_n$, $U_1 \cap A \neq \emptyset$ e $U_j \cap U_{j-1} \neq \emptyset$, para todo $2 \leqslant j \leqslant n$. Além disso, $U_n \cap U_{n+1} \neq \emptyset$. Portanto, temos que $U_{n+1}, U_n, U_{n-1}, ..., U_1 \in \mathcal{U}$ tais que $x \in U_{n+1}$, $U_1 \cap A \neq \emptyset$ e $U_j \cap U_{j-1} \neq \emptyset$, par todo $2 \leqslant j \leqslant n+1$. Reciprocamente, Suponha que existam $U_{n+1}, U_n, U_{n-1}, ..., U_1 \in \mathcal{U}$ tais que $x \in U_{n+1}$, $U_1 \cap A \neq \emptyset$ e $U_j \cap U_{j-1} \neq \emptyset$, para todo $2 \leqslant j \leqslant n+1$. Por $U_n \cap U_{n+1} \neq \emptyset$ existe um $y \in U_n \cap U_{n+1}$, em particular como $y \in U_n$ e, pelo suposição, temos que existe $U_n, U_{n-1}, ..., U_1 \in \mathcal{U}$ tais que $y \in U_{n+1}$, $U_1 \cap A \neq \emptyset$ e $U_j \cap U_{j-1} \neq \emptyset$, para todo $2 \leqslant j \leqslant n$ que, por hipótese de indução, implica que $y \in St^n(A,\mathcal{U})$. Mas, como $y \in U_n \cap St^n(A,\mathcal{U})$ temos que $U_n \subseteq St^n(A,\mathcal{U})$ e assim $\emptyset \neq U_{n+1} \cap U_n \subseteq U_{n+1} \cap St^n(A,\mathcal{U})$ com isso temos que $U_{n+1} \subseteq \{U \in \mathcal{U} : U \cap St^n(A,\mathcal{U})$ que implica $x \in St^{n+1}(A,\mathcal{U})$. Portanto, vale para $n+1$. $\square$

Proposição 2.50. *Se* X *é fortemente n-starcompacto, então é n-starcompacto.*

Demonstração: Suponha X fortemente n-starcompacto e seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X qualquer. Por hipótese, existe $F \subseteq X$ finito tal que $St^n(F,\mathcal{U}) = X$. Para cada $x \in F$ escolhemos $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$. Assim, $\mathcal{V} = \{U_x : x \in F\}$ é subconjunto finito de $\mathcal{U}$, assim

$$X \subseteq St^n(F,\mathcal{U}) \subseteq St^n\left(\bigcup\mathcal{V},\mathcal{U}\right) \subseteq X.$$

Onde obtemos $St^n(\bigcup\mathcal{V},\mathcal{U}) = X$, ou seja, X é n-starcompacto. □

Proposição 2.51. *Se X é n-starcompacto então é fortemente n+1-starcompacto.*

Demonstração: Suponha X é n-starcompacto e seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X qualquer, daí existe $\mathcal{V} = \{V_i : 1 \leqslant i \leqslant k\} \subseteq \mathcal{U}$ finito tal que $St^n(\bigcup\mathcal{V},\mathcal{U}) = X$. Para todo $V_i \in \mathcal{V}$, fixemos um elemento $x_i \in V_i$ e seja $B = \{x_i : 1 \leqslant i \leqslant k\}$. B é finito e note que

$$\bigcup\mathcal{V} \subseteq St(B,\mathcal{U}).$$

De fato, pela construção $\{V_1, V_2, ..., V_n\} \subseteq \{U \in \mathcal{U} : B \cap U \neq \emptyset\}$ logo $\bigcup\mathcal{V} \subseteq St(B,\mathcal{U})$. Consequentemente, por (ii) da proposição 2.49 temos que

$$\bigcup\mathcal{V} \subseteq St^n(B,\mathcal{U}).$$

Sendo X n-starcompacto, pelo fato acima obtemos

$$X \subseteq St^n\left(\bigcup\mathcal{V},\mathcal{U}\right) \subseteq St^n(St(B,\mathcal{U}),\mathcal{U}) \subseteq St^{n+1}(B,\mathcal{U}) \subseteq X.$$

Portanto, $St^{n+1}(B,\mathcal{U}) = X$, i. e., X é fortemente n+1-starcompacto. □

Lema 2.52. *Se X é regular e existe $D \subseteq X$ fechado e discreto tal que $|D| = w(X) \geqslant \omega$, então X não é 1-starcompacto.*

Demonstração: Seja $\mathcal{B}$, base de X de tamanho mínimo, $|\mathcal{B}| = |D| = w(X)$. Para todo $x \in D$ existe uma família $\{U_x : x \in D\}$ tal que $x \in U_x$ e $U_x \cap D = \{x\}$. Por X ser regular, existe A_x vizinhança aberta de x tal que $x \in A_x \subseteq \overline{A_x} \subseteq U_x$. Existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq \overline{B_x} \subseteq A_x \subseteq U_x$, assim temos $\overline{B_x} \cap D = \{x\}$. Agora, para todo $y \in X \setminus D$ existe V_y aberto básico tal que $y \in V_y$ e $\overline{V_y} \cap D = \emptyset$, pois, $X \setminus D$ é aberto, daí existe A_y aberto tal que $y \in A_y \subseteq \overline{A_y} \subseteq X \setminus D$. Existe $V_y \in \mathcal{B}$ tal que $y \in V_y \subseteq \overline{V_y} \subseteq A_y \subseteq X \setminus D$, como $\overline{V_y} \subseteq X \setminus D$ temos que $\overline{V_y} \cap D = \emptyset$ e $V_y \cap D = \emptyset$. Seja $\mathcal{U} = \{B_x : x \in D\} \cup \{V_y : y \in X \setminus D\}$, observe que $|\mathcal{B}| \geqslant |\mathcal{U}| \geqslant |\{B_x : x \in D\}| = |D| = |\mathcal{B}|$, portanto, $|\mathcal{U}| = |\mathcal{B}|$.

Agora defina

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq \mathcal{U} : \text{F é subconjunto finito de } \mathcal{U}\},$$

e observe que $|\mathcal{F}| = |[\mathcal{U}]^{<\omega}| = |\mathcal{U}|$. Fixemos $F \in \mathcal{F}, F = \{U_1, U_2, ..., U_n\}$ temos que $\overline{\bigcup F} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}$ e pela definição da cobertura $\mathcal{U}$

$$\left|\overline{\bigcup F} \cap D\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i} \cap D\right| < n.$$

Portanto,

$$\text{para todo } F \in \mathcal{F}, \overline{\bigcup F} \text{ encontra } D \text{ em no máximo finitos pontos.} \qquad (\dagger)$$

Enumeremos $\mathcal{F}$ como $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ onde $\kappa = w(X)$ e suponha que para $\beta < \alpha$ tomamos $x_\beta \in D$ tal que $x_\beta \notin \overline{\bigcup F_\beta}$ e $x_\beta \neq x_\gamma$ para $\beta \neq \gamma$ e $\gamma < \alpha < \kappa$.

Assim é possível construir, por indução transfinita, uma família $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de elementos distintos de D tal que $x_\alpha \notin \overline{\bigcup F_\alpha}$. De fato, para $\alpha = 0$ temos que $\overline{\bigcup F_0}$ possui, no máximo, finitos pontos de D, por ($\dagger$). Como D é infinito podemos tomar $x_0 \in D \backslash \overline{\bigcup F_0}$. Para $\alpha > 0$, por hipótese de indução assumiremos $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ construído, daí

$$D \setminus (\{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \overline{\bigcup F_\alpha}) \neq \emptyset$$

Assim basta tomar

$$x_\alpha \in D \setminus (\{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \overline{\bigcup F_\alpha}) \text{ onde } x_\beta \neq x_\alpha \text{ para todo } \beta < \alpha \text{ e } x_\alpha \notin \overline{\bigcup F_\alpha}.$$

Agora, defina para cada $x \in D$

$$U_x = \begin{cases} B_x \cap (X \setminus \overline{\bigcup F_\alpha}) & \text{para } x = x_\alpha,\ \alpha < \kappa \\ B_x & \text{c.c.} \end{cases}$$

Cada U_x é aberto e contém x. Consideramos $\mathcal{U}' = \{U_x : x \in D\} \cup \{V_y : y \in X \backslash D\}$ cobertura aberta de X, se dado $G \subseteq \mathcal{U}'$ finito, $G = \{U_{x_1}, U_{x_2}, ..., U_{x_n}\} \cup \{V_{x_1}, V_{x_2}, ..., V_{x_m}\}$. Daí, existe $F = \{B_{x_1}, B_{x_2}, ..., B_{x_n}\} \cup \{V_{x_1}, V_{x_2}, ..., V_{x_m}\} \in \mathcal{F}$ tal que $\bigcup G \subseteq \bigcup F$. Para algum $\alpha < \kappa$, $F = F_\alpha$ daí $x_\alpha \notin \overline{\bigcup F_\alpha}$.

Mas,

$$x_\alpha \in St\left(\bigcup G, \mathcal{U}\right) \iff U_{x_\alpha} \cap \bigcup G \neq \emptyset.$$

Daí, como $U_{x_\alpha} = B_{x_\alpha} \backslash \overline{\bigcup F_\alpha}$ temos que $U_{x_\alpha} \cap \bigcup G \subseteq U_{x_\alpha} \cap \bigcup F_\alpha = \emptyset$ o que implica $x_\alpha \notin St(\bigcup G, \mathcal{U})$ e assim $St(\bigcup G, \mathcal{U}') \neq X$. Como tal finito foi arbitrário temos que X não é 1-starcompacto. □

O seguinte exemplo segue imediatamente pelo lema acima.

Exemplo 2.53. Os espaços $\psi(\mathcal{A})$ com $\mathcal{A}$ infinito não são 1-starcompactos, com isso, pela proposição 2.50, não são fortemente 1-starcompactos, ou seja, não são estrela finitos.

Proposição 2.54. *Se X é estrela compacto, então é 1-starcompacto.*

Demonstração: Suponha que X seja estrela compacto e seja $\mathcal{U}$ cobertura aberta de X, qualquer. Então, existe $K \subseteq X$ compacto tal que $St(K, \mathcal{U}) = X$. Mas, $\mathcal{U}$ é uma família de abertos de X que cobre K. Existe $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ família finita de abertos de X que cobre K tomando $\mathcal{V} = \mathcal{U}'$ obtemos que $St(\bigcup \mathcal{V}, \mathcal{U}) = X$. □

Definição 2.55. Um espaço X é dito **ω-starcompacto** se para toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X, existem $n \in \mathbb{N}^*$ e $A \subseteq X$ finito tal que $St^n(A,\mathcal{U}) = X$.

Proposição 2.56. *Se X é ω-starcompacto, então é pseudocompacto.*

Demonstração: Suponha que X seja ω-starcompacto e $f : X \to \mathbb{R}$ contínua. Considere a cobertura aberta de X dada por $\mathcal{U} = \{f^{-1}(k, k+2) : k \in \mathbb{Z}\}$. Existem $n \in \mathbb{N}^*$ e $F \subseteq X$ finito tais que $St^n(F,\mathcal{U}) = X$, pela mesmo argumento da demonstração da proposição 2.50, existe $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ finito tal que $St^n(\bigcup \mathcal{V},\mathcal{U}) = X$. Definimos:

$$M = max\{k + 2 : f^{-1}(k, k + 2) \in \mathcal{V}\} \text{ e } m = min\{k : f^{-1}(k, k + 2) \in \mathcal{V}\}.$$

Afirmação: $f[X] \subseteq (m-2n, M+2n)$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. De fato, defina $U_j = f^{-1}(k_j, k_j+2)$ e seja qualquer $x \in X$, então pelo item (iii) de 2.49 existe $U_j \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_n$ com $U_j \cap U_{j-1} \neq \emptyset$, para todo $2 \leqslant j \leqslant n$ e $U_1 \cap (\bigcup \mathcal{V}) \neq \emptyset$. Pela construção, $f(\bigcup \mathcal{V}) \subseteq (n, M)$ e para $x \in U_n = f(k_n, k_n+2)$ tem-se que $f(x) \in (k_n, k_n+2) \subseteq (n, M)$ e como $U_n \cap U_{n-1} \neq \emptyset$ temos que $f(x) \in (k_n - 2, k_n + 2 + 2)$, prosseguindo dessa forma obtemos $f(x) \in (k_1 - 2n, k_1 + 2 + 2n)$ e assim pela definição de m e M temos que $f(x) \in (m - 2n, M + 2n)$. Portanto vale a afirmação.

Logo, como $f[X]$ é limitado por $(m - 2n, M + 2n)$ em X temos que X é pseudocompacto. □

O seguinte teorema é um contra-exemplo que não vale a recíproca de "estrela enumeravelmente compacto $\Longrightarrow$ pseudocompacto."Em particular, não vale a volta de "enumeravelmente compacto $\Longrightarrow$ pseudocompacto."

Teorema 2.57. *Existe um pseudocompacto primeiro enumerável que não é estrela enumeravelmente compacto.*

Demonstração: Seja $\psi(\mathcal{A})$, o ψ-espaço para $\mathcal{A}$ família almost disjoint maximal. Temos que $\psi(\mathcal{A})$ é primeiro enumerável, Tychonoff, em particular regular, e pelo teorema 1.138 é pseudocompacto.

Afirmamos que $\psi(\mathcal{A})$ não é estrela enumeravelmente compacto. De fato, suponha, por absurdo, que seja estrela enumeravelmente compacto, então para toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ de $\psi(\mathcal{A})$ temos que existe $B \subseteq \psi(\mathcal{A})$ enumeravelmente compacto tal que $St(B\mathcal{U}) = \psi(\mathcal{A})$. Observe que B é enumerável, pois se não fosse enumerável teríamos $\mathcal{A} \cap B$ um subconjunto fechado e discreto infinito de B, o que não pode pelo teorema 1.76. Assim, se B é enumeravelmente compacto e enumerável então B é compacto. Com isso, $\psi(\mathcal{A})$ teria que ser estrela compacto, consequentemente, pela proposição 2.54, 1-starcompacto, mas pelo lema 2.52 temos que $\psi(\mathcal{A})$ não é 1-starcompacto, absurdo. Portanto, vale a afirmação. □

Veja que um $\psi(\mathcal{A})$ com $\mathcal{A}$ infinito e maximal é pseudocompacto mas não é enumeravelmente compacto, pela proposição 1.134. Porém, acabamos de mostrar que sequer estrela enumeravelmente compacto ele pode ser.

Temos assim o seguinte diagrama:

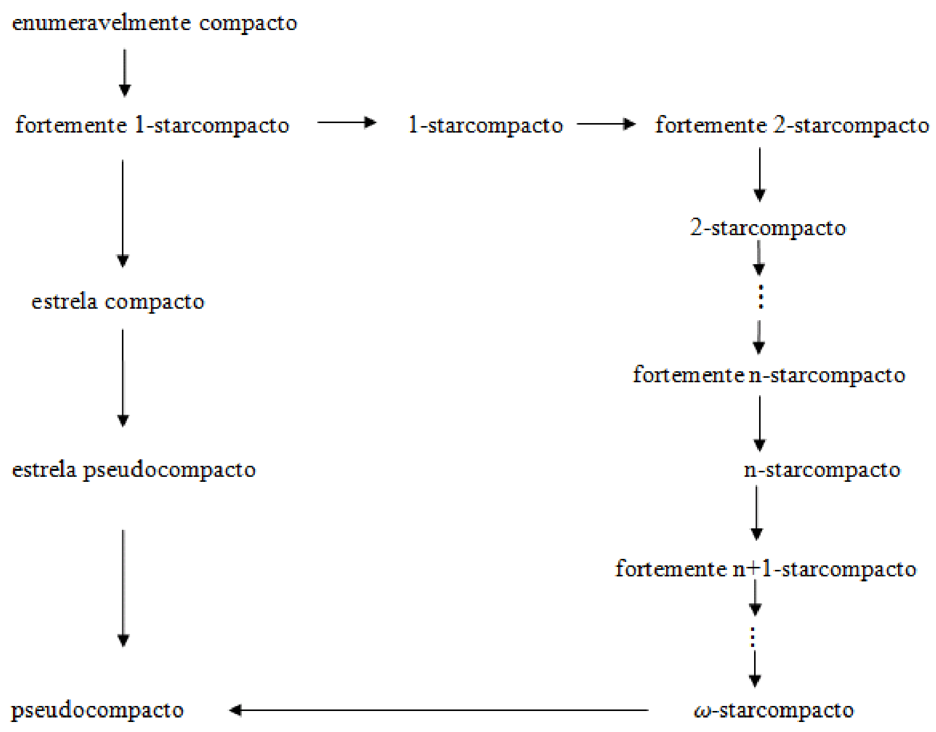

Figura 2.1: Diagrama de implicações entre enumeravelmente compacto e pseudocompacto

Capítulo 3

Enumerabilidade e propriedades definidas por estrelas

Nesse capítulo apresentaremos alguns dos principais resultados do artigo [5]. Destacando as principais caracterizações e propriedades de espaços estrela com relação às propriedades Lindelöf e enumerabilidade.

3.1 Espaços estrela enumeráveis

Teorema 3.1. *Se X um espaço topológico T_1 com extent enumerável então é estrela enumerável.*

Demonstração: Seja qualquer cobertura de X e, por 2.9, existe $F \subseteq X$ fechado e discreto que núcleo estrela da cobertura e por $e(X) \leqslant \omega$ temos que $|F| \leqslant \omega$, ou seja, F é enumerável e núcleo estrela de X, isso implica que X é estrela enumerável. $\square$

Os dois seguintes teoremas relacionam espaços estrela com funções contínuas e produto cartesiano. Responde, por exemplo, à seguinte pergunta: "a imagem de um estrela Lindelöf é estrela Lindelöf"?.

Teorema 3.2. *Se $\mathcal{P}$ é uma propriedade preservada por imagens contínuas então a propriedade estrela $\mathcal{P}$ também é preservada*

Demonstração: Seja $f : X \to Y$ contínua e sobrejetiva. Suponha que X seja estrela $\mathcal{P}$ e mostraremos que Y é estrela $\mathcal{P}$. Seja $\mathcal{V}$ uma cobertura aberta qualquer de Y, considere, $\mathcal{U} = \{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{V}\}$ é uma cobertura aberta de X. Por X ser estrela $\mathcal{P}$ existe $A \subseteq X$, A satisfazendo $\mathcal{P}$, tal que $St(A,\mathcal{U}) = X$. Afirmamos que $St(f[A],\mathcal{V}) = Y$, de fato, dado $y \in Y$ arbitrário existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$ e $x \in St(A,\mathcal{U})$, daí existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \in f^{-1}(V)$ e $f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$ daí $f(x) = y \in V$ e existe $z \in f^{-1}(V) \cap A$ onde temos que $f(z) \in V \cap f[A]$ isso implica que $V \cap f[A] \neq \emptyset$ assim $y \in V \subseteq St(f[A], \mathcal{V})$. Portanto, como $f[A]$ satisfaz $\mathcal{P}$, Y é estrela $\mathcal{P}$. $\square$

Com relação a pergunta, a imagem de um estrela Lindelöf é estrela Lindelöf, temos que é verdade, pois sabemos que Lindelöf é preservada por funções contínuas.

Teorema 3.3. *Se $\mathcal{P}$ é propriedade compactamente produtiva então estrela $\mathcal{P}$ também é.*
Demonstração: Suponha que X seja estrela $\mathcal{P}$ e sejam K um compacto e $\mathcal{U}$ uma cobertura por abertos básicos de $X \times K$. Para todo $x \in X$ existe W_x subconjunto aberto de X tal que $W_x \times K$ é coberto por um número finito de elementos de $\mathcal{U}$, a saber,

$$W_x \times K \subseteq \bigcup \{U_{k_x} \times V_{k_x} : 1 \leqslant k_x \leqslant n_x\}$$

com

$$W_x \subseteq \bigcap \{U_{k_x} : 1 \leqslant k_x \leqslant n_x\}.$$

Agora, definimos $\mathcal{W} = \{W_x : x \in X\}$, por X ser estrela $\mathcal{P}$ existe $A \subseteq X$ satisfazendo $\mathcal{P}$ tal que $St(A, \mathcal{W}) = X$.

Note que $A \times K$ satisfaz $\mathcal{P}$ por hipótese. Afirmamos agora que $St(A \times K, \mathcal{U}) = X \times K$. De fato, $St(A \times K, \mathcal{U}) \subseteq X \times K$. Por outro lado, seja $(s, t) \in X \times K$ como $St(A, \mathcal{W}) = X$ vai existir $W_x \in \mathcal{W}$ e $a \in A$ tal que $s \in W_x$ e $a \in W_x$. Daí como $W_x \times K$ é coberto por um número finito de elementos de $\mathcal{U}$ temos que vai existir $k_s \leqslant n_x$ tal que $(s, t) \in U_{k_s} \times V_{k_s}$ e como $(a, t) \in U_{k_x} \times V_{k_x} \cap (A \times K)$ obtemos que $(s, t) \in St(A \times K, \mathcal{U})$. Assim vale a afirmação. Portanto estrela $\mathcal{P}$ é compactamente produtiva. $\square$

Observe que na demonstração acima tomamos $\mathcal{U}$ uma cobertura por abertos básicos. É possível, pois se $\mathcal{W}$ é uma cobertura qualquer de X, então podemos tomar $\mathcal{U}$ família de abertos básicos que é um refinamento de $\mathcal{W}$ e cobre X. Contudo, com relação a estrela, se tivermos um dado núcleo A então $X = St(A, \mathcal{W}) \subseteq St(A, \mathcal{U}) \subseteq X$.

Pelas proposições 1.108, 1.110 temos, respectivamente, os seguintes corolários

Corolário 3.4. *O produto de um estrela Lindelöf e um compacto é estrela Lindelöf.* $\square$

Corolário 3.5. *O produto de um estrela σ-compacto e um compacto é estrela σ-compacto.* $\square$

Fazendo analogia ao último teorema, a hereditariedade não é preservada por estrela, i. e., se $\mathcal{P}$ é hereditariamente preservada não podemos afirmar que estrela $\mathcal{P}$ é hereditariamente preservada. Como contra-exemplo: Sejam $X = [0, 1]$ um compacto que é estrela finito e $Y = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ um discreto que não é estrela finito. Pois,

$\mathcal{U} = \{\{y\} : y \in Y\}$ é uma cobertura de Y daí para todo $Z \subseteq Y$ finito $St(Z,\mathcal{U}) = Z \neq X$.

Lema 3.6. *O espaço $\psi(\mathcal{A})$ é estrela enumerável.*
Demonstração: Veja que ω é denso em $\psi(\mathcal{A})$, pelo item (iv) de 1.132, então pelo item (vi) de 1.116 temos que $St(\omega,\mathcal{U}) = St(\psi(\mathcal{A}),\mathcal{U})$. $\square$

Exemplo 3.7. O produto de um estrela enumerável e um compacto não necessariamente é estrela enumerável. De fato, sejam $X = \psi(\mathcal{A}) = \omega \cup \mathcal{A}$, o ψ-espaço com $\mathcal{A}$ família almost disjoint, onde $|\mathcal{A}| = \kappa > \omega$. Enumere $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Veja que $\psi(\mathcal{A})$ é separável pelo item (iv) de 1.132 e é estrela enumerável pelo lema 3.6. Seja $Y = \{y_\alpha : \alpha < \kappa\} \cup \{\infty\}$ a compactificação por um ponto de um espaço discreto com κ pontos. Cada $\{y_\alpha\}$ é aberto e cada conjunto aberto de $\{\infty\}$ é cofinito. Com essa topologia Y é compacto e T_2. Assim, definimos a cobertura de $X \times Y$ da seguinte forma:

$$\mathcal{U} = \{\psi(\mathcal{A}) \times \{y_\alpha\} : \alpha < \kappa\} \cup \{(A_\alpha \cup \{A_\alpha\}) \times (Y \setminus \{y_\alpha\}) : \alpha < \kappa\} \cup \{\{n\} \times Y : n \in \omega\}.$$

Mostremos que X não é estrela-enumerável, para isso observe que $(A_\alpha, y_\alpha) \in U \in \mathcal{U}$ se, e somente se, U é da forma $X \times \{y_\alpha\}$. Pois, seja $B \subseteq X$ subconjunto enumerável qualquer, então existe $\xi < \kappa$ tal que $B \cap (X \times \{y_\xi\}) = \emptyset$ e pela observação acima $(A_\alpha, y_\alpha) \notin St(B,\mathcal{U})$. Portanto, X não é estrela enumerável.

O exemplo acima é apresentado em [20], mostra que estrela enumerável não é compactamente produtiva, em particular, enumerável também não. Esses resultados motivam o seguinte teorema.

Teorema 3.8. Se X é estrela enumerável e Y é um compacto e separável então $X \times Y$ é estrela enumerável.
Demonstração: Suponha X estrela enumerável e Y compacto e separável. Seja $\mathcal{U}$ cobertura por abertos básicos de X, para todo $x \in X$ existe $\mathcal{W}_x$ aberto tal que

$$W_x \times K \subseteq \bigcup \{U_k(x) \times V_k(x) : 1 \leqslant \alpha \leqslant k(x)\}$$

com

$$W_x \subseteq \bigcap \{U_\alpha(x) : 1 \leqslant \alpha \leqslant k(x)\}.$$

Assim, $\mathcal{W} = \{W_x : x \in X\}$ é uma cobertura de X, por hipótese, existe $A \subseteq X$ enumerável tal que $St\,(A, \mathcal{W})$. Por Y ser compacto separável existe um subconjunto denso enumerável $D \subseteq X$.

Afirmamos que $St(A \times D,\mathcal{U}) = X \times Y$. É imediato que $St(A \times D,\mathcal{U}) \subseteq X \times Y$. Por outro lado, seja $(s,t) \in X \times K$, existe $U_j(x) \times V_j(x) \in \mathcal{U}$ tal que $(s,t) \in U_j(x) \times V_j(x)$

como $s \in X$ existem $a \in A$ e $W_x \in \mathcal{W}$ com $s \in W_x$ e $a \in W_x \cap A$. E como D é denso existe $d \in V_j(x) \cap D$ tal que $(a,d) \in A \times D$, observe que $(a,d) \in U_j(x) \times V_j(x)$ logo $(a,d) \in U_j(x) \times V_j(x) \cap A \times D$ assim $(s,t) \in U_j(x) \times V_j(x) \subseteq St\,(A, \mathcal{W})$. Como $A \times D$ é enumerável, pois é produto de dois enumeráveis, temos que $X \times Y$ é estrela enumerável.
□

Proposição 3.9. *Um espaço X é estrela enumerável se, e somente se, é estrela separável.*
Demonstração:
($\Rightarrow$) Suponha que X seja estrela enumerável. Assim existe $A \subseteq X$ enumerável tal que $St(A,\mathcal{U}) = X$. Mas, A também é denso nele mesmo e assim é separável. Portanto, X é estrela separável.
($\Leftarrow$) Suponha X estrela separável e seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta qualquer de X, assim existe $Z \subseteq X$ separável tal que $St(Z,\mathcal{U}) = X$. Por Z ser separável existe $D \subseteq Z$, denso enumerável. Assim, para algum $x \in X$ existe $z \in Z$ tal que $x \in St(z,\mathcal{U})$ daí existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x, z \in U$. Por D ser denso em Z e $U \cap Z$ ser um aberto de Z existe $d \in D$ tal que $d \in U \cap D$, em particular, $x \in U \subseteq St(D,\mathcal{U})$. Como x foi arbitrário temos que $St(D,\mathcal{U}) = X$. □

3.2 Espaços estrela Lindelöf e tenuamente Lindelöf

Proposição 3.10. *Para um espaço topológico, temos que*

$$\textit{estrela enumerável} \Longrightarrow \textit{estrela } \sigma\textit{-compacto} \Longrightarrow \textit{estrela Lindelöf.}$$

Demonstração: A primeira implicação segue pois um unitário é compacto. A segunda implicação pela proposição 1.73 e 2.2. □

Os próximos dois teoremas são contra-exemplos que mostram que não valem as recíprocas das implicações da proposição anterior.

Teorema 3.11. *Existe um espaço Tychonoff que é estrela Lindelöf e não é estrela σ-compacto.*
Demonstração: Sejam $Y = \omega_1 + 1$ com a ω-modificação, $X = \omega_2 + 1$ e $Z = (X \times Y) \setminus \{(\omega_2, \omega_1)\}$.
Afirmação 1: Um subespaço compacto em Y é finito. De fato, se um subconjunto $A \subseteq \omega_1 + 1$ fosse infinito teríamos dois casos: Se $\omega_1 \notin A$, A seria um conjunto discreto infinito logo não compacto. Se $\omega_1 \in A$ o conjunto A é da forma $\{\alpha_\xi : \xi < \omega\} \cup A'$, onde $\{\alpha_n : n < \omega\}$

são os ω primeiros pontos de A na enumeração canônica. Tomando $\beta = sup\{\alpha_n : n < \omega\}$ temos que a cobertura $\{\{\alpha_n\} : n < \omega\} \cup \{(\beta, \omega_1]\}$ testemunha que A não é compacto.

Afirmamos 2: que Z é estrela-Lindelöf. De fato, seja $\mathcal{V}$ uma cobertura aberta de $X \times Y$. Para todo $\alpha \in \omega_1 \subseteq Y$ fixemos $V_\alpha \in \mathcal{V}$ tal que $(\omega_2, \alpha) \in V_\alpha$ e existe $\beta_\alpha \in \omega_2$ com $]\beta_\alpha, \omega_2] \times \{\alpha\} \subseteq V_\alpha$. Sejam $\beta = sup\{\beta_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ e $A = \{\beta + 1\} \times Y$ assim $S =]\beta + 1, \omega_2] \times \omega_1 \subseteq St(A, \mathcal{V})$. Segue por 1.129 que A é Lindelöf, pois é isomorfo a Y.

Ainda, veja que

$$Z \setminus S = [0, \beta + 1] \times Y \cup \omega_2 \times \{\omega_1\}.$$

Temos que $[0, \beta + 1] \times Y$ é Lindelöf, pois Y é Lindelöf e Lindelöf é compactamente produtiva. Assim, pelo teorema 2.12 temos que $[0, \beta + 1] \times Y$ é estrela-enumerável, logo, existe $C \subseteq [0, \beta + 1] \times Y$ enumerável (logo Lindelöf), que é núcleo da estrela. Ainda$\omega_2 \times \{\omega_1\}$, é enumeravelmente compacto, pois é isomorfo a ω_2 que é enumeravelmente compacto pela proposição 1.126. Além disso, pelo teorema 2.11 é estrela finito assim existe $F \subseteq \omega_2 \times \{\omega_1\}$ finito (logo Lindelöf), que é núcleo da estrela. Assim

$$Z \setminus S \subseteq St(C, \mathcal{V}) \cup St(F, \mathcal{V}).$$

Portanto $A \cup C \cup F$ é núcleo Lindelöf de $\mathcal{V}$, ou seja, $Z = St(A \cup C \cup F, \mathcal{V})$ é estrela Lindelöf.

Mostraremos que Z não é estrela σ-compacto, para isso, considere a cobertura aberta $\mathcal{U} = \{\omega_2 \times Y\} \cup \{X \times \{\alpha\} : \alpha \in \omega_1\}$ e as afirmações abaixo.

Afirmação 3: Veja que se $C \subseteq Z$ é um compacto então $C \subseteq X \times F$, onde F é finito em Y. De fato, se um subconjunto $C \subseteq Z$ intersectasse infinitos níveis de α em Y também seria infinito, assim C seria não compacto em Y consequentemente $C \subseteq Z$ não seria compacto.

Afirmação 4: Todo subespaço σ-compacto de Z está contido em $X \times L$, com L enumerável. De fato, se $K \subseteq X \times Y$ for σ-compacto então $K = \bigcup\{K_{x_n} \times K_{y_n} : n \in \omega\}$ onde cada $K_{x_n} \times K_{y_n}$ é compacto em Z com K_{x_n} compacto em X e K_{y_n} compacto em Y. Pela afirmação 2, para todo n, $K_{x_n} \times K_{y_n} \subseteq X \times F_i$ onde F_i é finito assim

$$\bigcup\{K_{x_n} \times K_{y_n} : n \in \ \omega\} \subseteq \bigcup_{n \in \ \omega} (X \times F_i) = X \times \bigcup_{n \in \ \omega} F_i.$$

e, como $L = \bigcup_{n \in \ \omega} F_i$ é uma união enumerável de finitos, temos que L é enumerável.

Assim, para qualquer K σ-compacto temos que existe L enumerável tal que $K \subseteq X \times L$, logo, $St(K, \mathcal{U}) \subseteq St(X \times L, \mathcal{U})$. Assim, teremos que $St(X \times L, \mathcal{U}) \neq Z$. Pois, lembre que $\mathcal{U}$ é da forma $\{\omega_2 \times Y\} \cup \{X \times \{\alpha\} : \alpha \in \omega_1\}$ e $\{X \times \{\alpha\} : \alpha \in \omega_1\}$ é uma família de abertos de tamanho ω_1 onde nenhum elemento pode ser descartado, i. e., são os únicos que possuem cada $(\omega_2, \alpha), \forall \ \alpha \in \ \omega_1$. Como L é enumerável, $|L| < \omega_1$, existe

$\xi \in \omega_1 \setminus L$ tal que $(\omega_2, \xi) \in X \times \{\xi\} \in \{X \times \{\alpha\} : \alpha \in \omega_1\}$ mas $(\omega_2, \xi) \notin St(X \times L, \mathcal{U})$ pois $X \times \{\xi\} \cap X \times L = \emptyset$. Com isso, Z não é estrela σ-compacto. Concluindo a demonstração. □

Teorema 3.12. *Existe um espaço Tychonoff que é estrela σ-compacto e não estrela enumerável.*

Demonstração: Sejam $\psi(\mathcal{A})$, o ψ-espaço com $\mathcal{A}$ mad e $|\mathcal{A}| = \mathfrak{c}$, Y a compactificação por um ponto de um subespaço discreto de tamanho $\mathfrak{c}$ e $X = \psi(\mathcal{A}) \times Y$. Veja que $\psi(\mathcal{A})$ é separável pelo item (iv) de 1.132 e é estrela enumerável pelo lema 3.6. Logo, $\psi(\mathcal{A})$ é estrela σ-compacto, pela proposição 3.10. Como Y é compacto pelo corolário 3.5 temos que X é estrela-σ-compacto. E como já visto no exemplo 3.7 X não é estrela enumerável. □

Teorema 3.13. *Seja X um espaço topológico T_1. Se X é estrela Lindelöf, então X é tenuamente Lindelöf.*

Demonstração: Suponha que X seja estrela Lindelöf. Se X não for tenuamente Lindelöf, existe $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ uma família localmente finita de abertos não vazios de X não enumerável. Para cada $\alpha \in I$, fixe $x_\alpha \in U_\alpha$ e considere $A = \{x_\alpha : \alpha \in I\}$ um subconjunto fechado e discreto em X, pela proposição 1.63.

O subconjunto A é não enumerável, de fato, se fosse enumerável existiria um único elemento de A que seria elemento de infinitos elementos de $\mathcal{U}$, daí $\mathcal{U}$ não seria localmente finita, o que é um absurdo.

Agora, a cada $\alpha \in I$ fixamos um único aberto V_α com $V_\alpha \subseteq U_\alpha$ e $V_\alpha \cap A = \{x_\alpha\}$. Assim seja $\mathcal{W} = \{V_\alpha : \alpha \in I\}$ e considere $\mathcal{V} = \mathcal{W} \cup \{X \setminus A\}$ uma cobertura aberta de X. Veja que $\mathcal{V}$ não possui núcleo Lindelöf, de fato, seja $Y \subseteq X$ tal que $St(Y, \mathcal{V}) = X$, obrigatoriamente $Y \cap V_\alpha \neq \emptyset$, para todo $\alpha \in I$. Tomando $y_\alpha \in V_\alpha \cap Y$ para todo $\alpha \in I$ e considere $B = \{y_\alpha : \alpha \in I\}$ um subconjunto que é fechado e discreto em X, em particular fechado e discreto em Y, isso implica que Y possui um fechado e discreto infinito não enumerável, pela proposição 1.123, Y não é Lindelöf. Portanto nenhum núcleo de X pode ser Lindelöf. Mas, isso é um absurdo, pois supusemos X estrela Lindelöf, assim, temos que X necessariamente é tenuamente Lindelöf. □

Corolário 3.14. *Um espaço com uma partição não-enumerável de abertos não é estrela Lindelöf.*

Demonstração: Suponha que X seja um espaço com uma partição não-enumerável $\mathbb{P} = \{P_i : i \in I\}$, tal partição é localmente finita, pois, cada $x \in X$ pertence a um único elemento da partição. Pelo teorema acima temos que X não é estrela enumerável. □

Teorema 3.15. *O produto de um Lindelöf e um enumeravelmente compacto não necessariamente é estrela Lindelöf.*

Demonstração: Seja $Y = \omega_1 + 1$ com a ω-modificação e $X = \omega_1 \times Y$. Com isso, $\mathcal{P} = \{U_\alpha : \alpha \in \omega_1\} \cup \{V\}$, onde $U_\alpha =]\alpha, \omega_1[\times \{\alpha\} = \{\langle \xi, \alpha \rangle : \alpha < \xi < \omega_1\}$ e $V = \{\langle \alpha, \beta \rangle : \alpha \in \omega_1, \beta \in Y \text{ e } \alpha \leqslant \beta\}$, é uma partição não-enumerável de subconjuntos abertos de X. Primeiro temos que $\mathcal{P}$ é aberta, pois, U_α é aberto para todo $\alpha \in \omega_1$ e V é aberto, de fato, se $p = \langle \xi, \zeta \rangle \in V$ com $\xi \leqslant \zeta$ assim $W = [0, \xi] \times \{\zeta\} \subseteq V$, pois, $[0, \xi] \times \{\zeta\} \cap]\xi, \omega_1[\times \{\zeta\} = \emptyset$. Agora, veremos que $\mathcal{P}$ é uma partição, de fato, $\bigcup \mathcal{P} = X$, pois, se dado $p = \langle \alpha, \beta \rangle \in X$ se $\alpha \leqslant \beta$ então $\langle \alpha, \beta \rangle \in V \subseteq \bigcup \mathcal{P}$ e se $\alpha > \beta$ então $\langle \alpha, \beta \rangle \in]\beta, \omega_1[\times \{\beta\} = U_\beta \subseteq \bigcup \mathcal{P}$, logo, $\bigcup \mathcal{P} = X$. Ainda, $\mathcal{P}$ é não-enumerável e dois a dois disjuntos, assim concluímos que, pelo corolário 3.14, X não é estrela-Lindelöf. □

Teorema 3.16. *Se X é tenuamente Lindelöf e Y é separável então $X \times Y$ é tenuamente Lindelöf.*

Demonstração: Suponha que X seja tenuamente Lindelöf, Y separável e que $X \times Y$ não seja tenuamente Lindelöf. Assim, existe $\mathcal{C}$ uma família localmente finita de abertos de $X \times Y$ que é não enumerável, sem perda de generalidade suponha $|\mathcal{C}| = \aleph_1$. Suponha ainda que $\mathcal{C} = \{U_\alpha \times V_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ seja uma família de abertos básicos onde U_α é aberto em X e V_α é aberto em Y. Por Y ser separável existe $D \subseteq Y$ denso enumerável, fixe $d \in D$ e seja

$$\mathcal{U}_d = \{U_\alpha : \alpha \in \omega_1 \ e \ d \in V_\alpha\}.$$

Veja que $\mathcal{U}_d$ é localmente finita, pois se dado $x \in X$, por $\mathcal{C}$ ser localmente finita, existe $U \times V$ uma vizinhança aberta de $\langle x, d \rangle$ tal que $F = \{\alpha : U_\alpha \times V_\alpha \cap U \times V\}$ é finito. Afirmamos que $\{U_\alpha : \alpha \in F\}$, com isso segue que $\mathcal{U}_d$ é localmente finita. De fato, U é um aberto de X tal que $\widetilde{\mathcal{U}_d} := \{W \in \mathcal{U}_d : U \cap W \neq \emptyset\}$ é finito, pois para algum $W \in \widetilde{\mathcal{U}_d}$ existe $\beta \in \omega_1$ tal que $W = U_\beta$ e $d \in V_\beta$ com isso $U_\beta \times V_\beta \cap U \times V \neq \emptyset$, pois $d \in V_\beta \cap V$ e $U_\beta \cap U \neq \emptyset$ pela definição do conjunto $\widetilde{\mathcal{U}_d}$. Portanto $\beta \in F$ e assim $\widetilde{\mathcal{U}_d} \subseteq \{U_\alpha : \alpha \in F\}$. Portanto, $\{U_\alpha : \alpha \in F\}$ é finita.

Como X é tenuamente Lindelöf temos que $\mathcal{U}_d$ é enumerável. Considere $B = \{\alpha < \omega_1 : d \in V_\alpha\}$ é enumerável, pois para cada $U \in \mathcal{U}_d$ apenas um número finito de índices em B pode indexar U, caso contrário se existisse infinitos indices em B indexando U implicaria que $\mathcal{U}_d$ não seria pontualmente finita consequentemente não seria localmente finita, absurdo, pois $\mathcal{U}_d$ é localmente finita. Portanto, B é enumerável.

Assim, $\omega_1 = \bigcup_{d \in D} \{\alpha \in \omega_1 : d \in V_\alpha\}$, pois, se dado $\delta \in \omega_1$ existe $U_\delta \times V_\delta \in \mathcal{C}$ e por D ser denso em Y existe $d^* \in D \cap V_\delta$ tal que $\delta \in \{\alpha \in \omega_1 : d \in V_\alpha\} \subseteq \bigcup_{d \in D} \{\alpha \in \omega_1 : d \in V_\alpha\}$.

Mas, ω_1 é não enumerável e $\bigcup_{d \in D} \{\alpha \in \omega_1 : d \in V_\alpha\}$ é enumerável, um absurdo.

Portanto $X \times Y$ é tenuamente Lindelöf. $\square$

Lema 3.17. *Seja X um espaço topológico. Se $D \subseteq X$ é um subconjunto aberto, denso e tenuamente Lindelöf então X é tenuamente Lindelöf.*

Demonstração: Suponha que $D \subseteq X$ seja um subconjunto aberto, denso e tenuamente Lindelöf. Seja $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ uma família localmente finita de subconjuntos abertos não vazio de X. Com isso, seja $\mathcal{U}' = \{U_i' : i \in I\}$ onde $U_i' = D \cap U_i$ para todo $i \in I$ uma família localmente finita de subconjuntos abertos não vazios de D. Cada elemento de $\mathcal{U}'$ é aberto por D ser subespaço e não vazio por D ser denso. Por hipótese, $\mathcal{U}'$ é enumerável.

Afirmamos que $\mathcal{U}$ também é enumerável. De fato, a cada $U' \in \mathcal{U}'$ seja $\mathcal{F}_{U'} = \{U \in \mathcal{U} : U \cap D = U'\}$ que, pela proposição 1.54, é finito. Como $\mathcal{U} = \bigcup_{U' \in \mathcal{U}'} \mathcal{F}_{U'}$, temos que $\mathcal{U}$ é enumerável, pois é uma união enumerável de finitos. $\square$

Teorema 3.18. *Seja um espaço topológico T_1, as seguintes implicações valem*

$$\begin{gathered}\omega_1\textit{-Lindelöf} \implies \textit{Extent Enumerável} \implies \textit{Estrela Enumerável} \implies \\ \textit{Estrela } \sigma\textit{-compacto} \implies \textit{Estrela Lindelöf} \implies \textit{Tenuamente Lindelöf.}\end{gathered}$$

Demonstração: Mostraremos que, se X é ω_1-Lindelöf, então $e(X) = \aleph_0$. De fato, suponha que X seja ω_1-Lindelöf e que $e(X) > \aleph_0$. Tome F um fechado e discreto tal que $|F| = \aleph_1$ e para todo $x \in F$ fixe U_n, um aberto de X, tal que $x \in U_x$. Assim, $\mathcal{U} = \{U_x ; x \in F\} \cup \{X \setminus F\}$ é uma cobertura aberta de X de tamanho $|\mathcal{U}| = \aleph_1$ que não possui subcobertura de tamanho menor ou igual a $\aleph_1$, isso implica que X não pode ser ω_1-Lindelöf, contrariando a hipótese. Portanto, X tem extent enumerável.

Mostraremos que, se X tem extent enumerável, então X é estrela-enumerável. De fato, seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta qualquer de X, por 2.9, $\mathcal{U}$ possui um núcleo F que é fechado e discreto, i.e., $St(F, \mathcal{U}) = X$. Como $e(x) = \aleph_0$, temos que F é enumerável e portanto X é estrela-enumerável.

A terceira e a quarta implicações foram feitas em 3.10.

A última implicação segue por 3.13. $\square$

A seguir, daremos exemplos que mostram que não valem as recíprocas das implicações do teorema acima.

Um espaço que tenha $e(X) = \aleph_0$ e não seja ω_1-Lindelöf é o ω_1 com a topologia da ordem. De fato, como ω_1 é enumeravelmente compacto então os fechados e discretos de ω_1 são finitos isso implica que $e(X) = \aleph_0$. Mas, ω_1 não é ω_1-Lindelöf, pois, $\mathcal{U} = \{[0, \xi[: \xi < \omega_1\}$ é uma cobertura de tamanho ω_1 sem subcobertura enumerável.

Na segunda implicação, um contra-exemplo é $\psi = \mathcal{A} \cup \omega$ com $|\mathcal{A}| = \kappa$ onde $\aleph_1 \leqslant \kappa < \mathfrak{c}$. ψ é estrela-enumerável pois ω é denso em ψ. Mas, $e(\psi) = \kappa$, pois, pela proposição 1.132, $\mathcal{A}$ é um fechado e discreto, nesse caso, de tamanho κ.

Na terceira e quarta implicações são, respectivamente, os teoremas 3.12 e 3.11.

Para a última implicação, um contra-exemplo que mostra que existe um espaço que é tenuamente Lindelöf e mas não é estrela-Lindelöf é a seguinte proposição:

Proposição 3.19. *O espaço $X = (\omega_1 \times \omega) \cup (S \times \{\omega\})$ onde S é o conjunto de todos os pontos isolados de ω_1 é tenuamente Lindelöf mas não é estrela-Lindelöf.*

Demonstração: Mostremos que X é tenuamente Lindelöf. De fato, note que, pela proposição 1.43, $|S| = \aleph_1$ e $\omega_1 \times \omega$ é aberto em X, pois, se dado $\langle \alpha, \beta \rangle \in \omega_1 \times \omega$, então $\langle \alpha, \beta \rangle \in [0, \alpha] \times [0, \beta] \subseteq \omega_1 \times \omega$, onde temos que é aberto X.

Veja que $\omega_1 \times \omega$ é denso em X, pois, se $x \in X$, temos dois casos: Se $x \in S \times \{\omega\}$, x é da forma $\langle \alpha, \omega \rangle$ para algum $\alpha \in \omega_1$, assim para alguma vizinhança V_x de x, temos que existe $\xi \in \omega$ tal que $\langle \alpha, \xi \rangle \in \{\alpha\} \times (\xi, \omega] \subseteq V_x$, mas $\langle \alpha, \xi \rangle \in \omega_1 \times \omega$ isso implica que $\omega_1 \times \omega$ é denso em X. Se $x \in \omega_1 \times \omega$ temos imediatamente que $\omega_1 \times \omega$ é denso em X, Portanto $\omega_1 \times \omega$ é denso em X. Mostraremos que $\omega_1 \times \omega$ é tenuamente Lindelöf. Temos que $\omega_1 \times \omega$ é uma união enumerável de pseudocompactos, pois $\omega_1 \times \omega = \bigcup_{n \in \omega} \omega_1 \times \{n\}$ e cada $\omega_1 \times \{n\} \cong \omega_1$ que é pseudocompacto, pelo teorema 1.103. Pelo 1.102 temos que $\omega_1 \times \omega$ é tenuamente Lindelöf. Assim, pelo lema 3.17, X é tenuamente Lindelöf.

Agora, mostraremos que X não é estrela-Lindelöf, para isso considere a cobertura aberta

$$\mathcal{U} = \{\{\alpha\} \times (\omega + 1) : \alpha \in S\} \cup \{\omega_1 \times \omega\}$$

mostraremos que se $St(L, \mathcal{U}) = X$ então L não é Lindelöf. De fato, se $St(L, \mathcal{U}) = X$, para $L \subseteq X$ então $\mathcal{U}$ seria uma família de subconjuntos abertos de X que cobre L, mas, os elementos de $\{\{\alpha\} \times (\omega + 1) : \alpha \in S\}$ são os únicos que possuem os $\langle \alpha, \omega \rangle$ para $\alpha \in S$ e $|\{\{\alpha\} \times (\omega + 1) : \alpha \in S\}| = \aleph_1$, assim, $\mathcal{U}$ não possui subcobertura enumerável isso implica que L não pode ser Lindelöf. Portanto, X não é estrela-Lindelöf. $\square$

Capítulo 4

Casos particulares e contra-exemplos

Nesse capítulo definiremos os espaços de Moore, os P-espaços e os ψ-espaços generalizados. Apresentaremos algumas propriedades desses espaços.

Em especial, por 3.18 e 3.13 temos que

$$e(X) \leq \omega \Longrightarrow \text{Estrela enumerável} \Longrightarrow \text{estrela Lindelöf} \Longrightarrow \text{DCCC}.$$

Mas, nesse capítulo mostraremos que, se o espaço for um P-espaço e normal, então todas as propriedades são equivalentes.

Também, por 3.9 e 3.18, temos que:

$$\text{Separável} \Longrightarrow \text{estrela enumerável} \Longrightarrow \text{estrela Lindelöf}.$$

Mostraremos que, se o espaço for um espaço de Moore, então todas as propriedades são equivalentes.

Além disso, os ψ-espaços generalizados serão úteis para apresentar a resposta (que são contra-exemplos para certas conjecturas) de duas questões proposta no artigo [5].

4.1 Estrela enumerável, estrela Lindelöf e extent enumerável

Nessa seção estão alguns resultados de [3], onde são feitas comparações entre estrela enumerável, estrela Lindelöf e extent enumerável.

Definição 4.1. Um espaço X é dito um **P-espaço** se todo subconjunto G_δ de X é aberto em X.

Note que, em um P-espaço, as interseções enumeráveis de subconjuntos abertos são abertos, isso é equivalente a: uniões enumeráveis de subconjuntos fechados são fechados.

Definição 4.2. Sejam $\langle X, \tau \rangle$ um espaço topológico e A um subconjunto de X. Diz-se que uma família $\mathcal{U}$ é uma **expansão aberta** de A se $\mathcal{U} = \{U_a : a \in A\}$, $U_a \in \tau$ e $a \in U_a$ para todo $a \in A$.

Analogamente, observe que se $\mathcal{F}$ é uma família disjunta então $\mathcal{U} = \{U_F : F \in \mathcal{F}\}$ onde $U_F \in \tau$ e $F \subseteq U_F$ é uma expansão aberta de $\mathcal{F}$

Definição 4.3. Seja $\kappa \geqslant \omega$, um espaço topológico é dito **fracamente κ-metalindelöf** se para todo subconjunto fechado e discreto $D \subseteq X$ com $|D| = \kappa$ existe um conjunto $D' \subseteq D$ tal que $|D'| = \kappa$ e D' tem uma expansão aberta pontualmente enumerável.

Definição 4.4. Seja $\kappa \geqslant \omega$, um espaço topológico é dito **fracamente κ-coletivamente Hausdorff** se para todo subconjunto fechado e discreto $D \subseteq X$ com $|D| = \kappa$ existe um conjunto $D' \subseteq D$ tal que $|D'| = \kappa$ e D' tem uma expansão aberta disjunta.

É fácil ver que fracamente κ-coletivamente Hausdorff implica fracamente κ-metalindelöf. Observe também que poderíamos definir κ-metalindelöf e κ-coletivamente Hausdorff, sem o fracamente, nesses casos não precisava existir tal $D' \subseteq D$. Assim, κ-coletivamente Hausdorff implica fracamente κ-coletivamente Hausdorff e κ-metalindelöf implica fracamente κ-metalindelöf.

Proposição 4.5. *Se X é um P-espaço regular então X é $\aleph_1$-coletivamente Hausdorff, em particular, fracamente $\aleph_1$-coletivamente Hausdorff.*

Demonstração: Seja $D = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ um subconjunto de X fechado e discreto de tamanho $\aleph_1$. Por ser discreto, existe uma família $\{V_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tal que $V_\alpha \cap D = \{x_\alpha\}$. Por regularidade, para cada $\alpha < \omega_1$, existe U_α aberto de D tal que

$$x_\alpha \ \in \subseteq \ U_\alpha \subseteq \overline{U_\alpha} \subseteq V_\alpha.$$

Considere $W_\beta = U_\beta \setminus \left(\bigcup_{\alpha \, < \, \beta} \overline{U_\alpha} \right)$, para $\beta < \omega_1$, e veja que W_β é aberto em X, pois X é um P-espaço. Assim a família $\{W_\beta : \beta < \omega_1\}$ é uma expansão aberta disjunta de X, ou seja, X é $\aleph_1$-coletivamente Hausdorff. $\square$

Definição 4.6. Um espaço topológico é dito **coletivamente normal** se é T_1 e famílias discretas de fechados possuem expansão aberta disjunta.

Claramente temos que coletivamente normal implica normal.

Proposição 4.7 (folklore; ver [13])**.** *Se X é um espaço topológico Lindelöf e regular, então é coletivamente normal.* □

Lema 4.8. *Sejam X um espaço topológico e D um subconjunto fechado e discreto de X tal que $E \subseteq D$ seja um subconjunto não-enumerável que admite uma expansão aberta pontualmente enumerável. Então X não é estrela enumerável.*

Demonstração: Seja $D \subseteq X$ um subconjunto fechado e discreto. Suponha que $E \subseteq D$ seja um subconjunto não-enumerável que admita uma expansão aberta pontualmente enumerável e que X seja estrela enumerável. Sejam $\{W_d : d \in E\}$ uma expansão aberta pontualmente enumerável de E e $\{U_d : d \in E\}$ uma família que testemunha que E é discreto, assim a família dada por $\mathcal{V} = \{V_d : d \in E\}$ onde $V_d = W_d \cap U_d$ é uma expansão aberta pontualmente enumerável de E tal que $V_d \cap E = \{d\}$ para todo $d \in E$.

Agora, considere $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \cup \{X \setminus E\}$ que é uma cobertura aberta de X. Como supomos que X é estrela enumerável, existe $A \subseteq X$ enumerável tal que $St(A, \mathcal{V}') = X$.

Claramente, $\mathcal{V}'$ é pontualmente enumerável. A cada $a \in A$ seja $E_a = \{d \in E : a \in V_d\}$ que é enumerável, pois $\mathcal{V}'$ é pontualmente enumerável, e seja $E' = \bigcup_{a \in A} E_a$, que também é enumerável. Assim, existe algum $z \in E \setminus E'$ tal que $z \notin St(A, \mathcal{V}') = X$ que é um absurdo. Portanto, X não é estrela enumerável. □

Corolário 4.9. *Seja X um espaço fracamente $\aleph_1$-metalindelöf. Então são equivalentes:*

(a) X é estrela enumerável.

(b) $e(X) \leqslant \omega$.

Demonstração:
(a) $\Longrightarrow$ (b) Por contrapositiva. Se $e(X) > \omega$, fixemos $F \subseteq X$ fechado e discreto que podemos supor, sem perda de generalidade, que $|F| = \omega_1$. Por X ser fracamente $\aleph_1$-metalindelöf existe $F' \subseteq F$ fechado e discreto tal que $|F'| = \omega_1$ e $\mathcal{U} = \{U_a : a \in F'\}$ uma expansão aberta pontualmente enumerável de F'. Assim pelo lema 4.8 temos que X não é estrela enumerável.
(b) $\Longrightarrow$ (a) Já feito em 3.18. □

Como um espaço fracamente $\aleph_1$-coletivamente Hausdorff é fracamente $\aleph_1$-metalindelöf temos que:

Corolário 4.10. *Seja X um espaço fracamente $\aleph_1$-coletivamente Hausdorff. Então X é estrela enumerável se, e somente se, $e(X) \leqslant \omega$.* $\square$

Pela proposição 4.5, um P-espaço regular é fracamente $\aleph_1$-coletivamente Hausdorff e pelo corolário acima, temos que, se X é um P-espaço regular, então X é estrela enumerável se, e somente se, $e(X) \leqslant \omega$. $\square$

Teorema 4.11. *Seja X um P-espaço normal, então são equivalentes:*

(i) *X é estrela enumerável.*

(ii) *X é estrela Lindelöf.*

(iii) *DCCC.*

(iv) $e(X) \leq \omega$.

Demonstração:
(i) $\Longrightarrow$ (ii) Imediato.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Segue pelo teorema 3.13.
(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Por contrapositiva. Suponha que exista $D \subseteq X$ fechado e discreto de tamanho $\aleph_1$. Por um P-espaço ser fracamente $\aleph_1$-coletivamente Hausdorff existe $\{U_d : d \in D\}$ uma expansão aberta disjunta de D. Por X ser normal, existe G subconjunto aberto de X tal que

$$D \subseteq G \subseteq \overline{G} \subseteq U = \bigcup\{U_d : d \in D\}.$$

Tomando $V_d = G \cap U_d$ para todo $d \in D$ temos que a família $\{V_d : d \in D\}$ é uma expansão aberta discreta de D. De fato, se $x \in U$, existe $d' \in D$ tal que $U_{d'}$ é o único que possui x. Se $x \in U$, $X \setminus \overline{G}$ é uma vizinhança aberta de x que não intersecta nenhum dos V_d para $d \in D$.

Portanto, temos que $\{V_d : d \in D\}$ é uma família discreta de subconjuntos abertos de X que é não enumerável.
(iv) $\Longrightarrow$ (i) Segue pelo teorema 3.1. $\square$

4.2 Espaços estrela e famílias discretas

Apresentaremos alguns resultados de estrela com relação a famílias discretas. Todos os resultados são de [14], exceto em menção contrária.

Definição 4.12 ([10]). Uma família de subconjuntos abertos $\{\mathcal{U}_n : n \geqslant 1\}$ de um espaço topológico X é dita um **desenvolvimento** se para todo $x \in X$ e toda vizinhança aberta U de x existe $m \geqslant 1$ tal que $x \in St(x,\mathcal{U}_m) \subseteq U$.

Com base na definição acima, se um espaço possui um desenvolvimento então todo ponto $x \in X$ possui uma base local da forma $\mathcal{B}_x = \{St(x,\mathcal{U}_n) : n \geqslant 1\}$ para todo $x \in X$.

Com base na definição de desenvolvimento definimos os espaços de Moore.

Definição 4.13 ([3]). X é um **espaço de Moore** se X é regular e possui um desenvolvimento.

Pela definição anterior e pelo fato da regularidade ser hereditária, temos a seguinte proposição:

Proposição 4.14. *Se X é um espaço de Moore e Y um subespaço de X, então Y é um espaço de Moore.* □

Seja a propriedade:

(Φ): Toda família discreta de subconjuntos fechados de X é enumerável.

Proposição 4.15. *Se X é um espaço topológico com a propriedade (Φ), então é estrela enumerável.*

Demonstração: Por contrapositiva. Suponha que X não seja estrela enumerável, assim existe $\mathcal{U}$ cobertura aberta tal que $St(A,\mathcal{U}) \neq X$, para todo $A \subseteq X$ enumerável. Fixe $a \in X$ qualquer e $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ uma função escolha, por indução transfinita seja

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_\alpha = f(X \setminus St(\{x_\beta : \beta < \alpha\},\mathcal{U})), \quad \forall\ \alpha < \omega_1. \end{cases}$$

Tal indução é possível pois $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ é enumerável para todo $\alpha < \omega_1$. Agora, considere $F_\alpha = \overline{\{x_\alpha\}}$, para $\alpha < \omega_1$. Afirmamos que $F_\alpha \cap \bigcup\{St(x_\beta,\mathcal{U}) : \beta \neq \alpha\} = \emptyset$. De fato, se $\beta < \alpha$ pela construção temos que $\{x_\alpha\} \cap St(x_\beta,\mathcal{U}) = \emptyset$. Se $\beta > \alpha$ temos que $x_\beta \in X \setminus St(x_\alpha,\mathcal{U}) = \emptyset$, mas $x_\beta \notin St(x_\alpha,\mathcal{U})$ se, e somente se, $x_\alpha \notin St(x_\beta,\mathcal{U})$, com isso as vizinhanças de x_β não intersectam $\{x_\alpha\}$, portanto $\{x_\alpha\} \cap St(x_\beta,\mathcal{U}) = \emptyset$. Logo pela proposição 1.45, temos que $F_\alpha \cap \bigcup\{St(x_\beta,\mathcal{U}) : \beta \neq \alpha\} = \emptyset$.

Seja $x \in X$, se $x \in \bigcup\{St(x_\alpha,\mathcal{U}) : \alpha < \omega_1\}$, então existe $\alpha < \omega_1$ tal que $x \in St(x_\alpha,\mathcal{U})$, assim para cada $\beta \neq \alpha$ temos que $F_\beta \cap \bigcup St(x_\alpha,\mathcal{U}) = \emptyset$. Se $x \notin \bigcup\{St(x_\alpha,\mathcal{U}) :$

$\alpha < \omega_1\}$ então $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \cap St(x,\mathcal{U}) = \emptyset$. Portanto, pela proposição 1.45, para cada $\alpha < \omega_1$ temos que $St(x,\mathcal{U}) \cap F_\alpha = \emptyset$. Assim, $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ é uma família discreta, pois $\{St(x,\mathcal{U}) : x \in X\}$ testemunha que é discreta, e é não-enumerável. □

Observe que a demonstração do proposição acima não faz uso de axiomas de separação.

Teorema 4.16. *Seja X um espaço coletivamente normal. Então as seguintes condições são equivalentes.*

(i) X satisfaz (Φ).

(ii) X é estrela enumerável.

(iii) X é tenuamente Lindelöf.

Demonstração:
(i) $\Longrightarrow$ (ii) Segue pela proposição 4.15.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Suponha que X seja estrela enumerável. Pelo teorema 3.18 X é estrela Lindelöf. Temos que X é coletivamente normal, em particular T_1, assim pelo teorema 3.13 temos que X é tenuamente Lindelöf.
(iii) $\Longrightarrow$ (i): Suponha que X seja tenuamente Lindelöf. Seja $\mathcal{F}$ uma família discreta de subconjuntos fechados de X. Como o espaço é coletivamente normal, existe uma expansão aberta disjunta

$$\mathcal{U} = \{U_F : F \in \mathcal{F}\}, \text{ com } F \subseteq U_F \text{ para todo } F \in \mathcal{F}.$$

Sejam $F = \bigcup \mathcal{F}$ que é fechado e $U = \bigcup \mathcal{U}$ uma vizinhança aberta de F, por normalidade, existe $G \subseteq X$ aberto tal que

$$F \subseteq G \subseteq \overline{G} \subseteq U$$

Com o mesmo argumento da proposição 4.5 e considerando $V_F = U_F \cap G$ obtemos a família discreta de subconjuntos abertos $\mathcal{V} = \{V_F : F \in \mathcal{F}\}$ que também é localmente finita e pelo item (iii), $\mathcal{V}$ é enumerável. Com isso, $\mathcal{F}$ é enumerável. Portanto, X satisfaz (Φ). □

No artigo [7], encontra-se o seguinte lema: Um espaço topológico tal que toda família discreta de subconjuntos fechados não vazios seja enumerável então toda cobertura aberta pontualmente enumerável possui uma subcobertura enumerável. A seguinte proposição é um fortalecimento desse lema.

Proposição 4.17. *Se X é estrela enumerável então toda cobertura pontualmente enumerável tem subcobertura enumerável.*

Demonstração: Suponha que X seja estrela enumerável e seja $\mathcal{U}$ uma cobertura pontualmente enumerável. Por X ser estrela enumerável existe $A \subseteq X$ enumerável tal que $St(A,\mathcal{U}) = X$. Com isso, $\mathcal{U}' = \{U \in \mathcal{U} : U \cap A \neq \emptyset\}$ é uma subcobertura enumerável de $\mathcal{U}$, pois $\mathcal{U}'$ pode ser escrito como $\bigcup_{a \in A} \mathcal{U}_a$ onde $\mathcal{U}_a = \{U \in \mathcal{U} : a \in U\}$, que é uma união enumerável de enumerável, portanto enumerável. □

Teorema 4.18 ([10])**.** *[Critério de metrização de Bing] Um espaço topológico é metrizável se, e somente se, é coletivamente normal e possui um desenvolvimento.* □

Teorema 4.19. *Seja X um espaço com desenvolvimento. Então X é estrela enumerável se, e somente se, é separável.*

Demonstração: Se X é separável então é estrela separável e pela proposição 3.9 é estrela enumerável. Por outro lado, suponha que X seja estrela enumerável e seja $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ um desenvolvimento de X. Existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, um subconjunto A_n enumerável tal que $St(A_n,\mathcal{U}_n) = X$. Tomando $A = \bigcup A_n$, temos que A é enumerável. Além disso, A é denso em X, de fato, seja G um subconjunto aberto não vazio de X e $x \in G$, assim existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $St(x,\mathcal{U}_n) \subseteq G$. Veja que $St(x,\mathcal{U}_n) \cap A_n \neq \emptyset$, pois $x \in St(x,\mathcal{U}_n) \subseteq St(A_n,\mathcal{U}_n)$ e assim existe $U \in \mathcal{U}_n$ tal que $x \in U$ e $U \cap A_n \neq \emptyset$. Como $U \subseteq St(x,\mathcal{U}_n)$ temos que $\emptyset \neq U \cap A_n \subseteq St(x,\mathcal{U}_n)$. portanto, $St(x,\mathcal{U}_n) \cap A_n \neq \emptyset$ isso implica que $G \cap A_n \neq \emptyset$ e consequentemente $G \cap A \neq \emptyset$, assim temos que A é denso em X. Logo, X é separável. □

O proximo teorema mostra que em um espaço de Moore temos que separável, estrela enumerável e estrela Lindelöf são equivalentes.

Teorema 4.20 ([3])**.** *Seja X um espaço de Moore, então são equivalentes:*

(i) *X é separável.*

(ii) *X é estrela enumerável.*

(iii) *X é estrela Lindelöf.*

Demonstração:

(i) $\Longrightarrow$ *(ii)* Segue pelo teorema anterior.

(ii) $\Longrightarrow$ *(iii)* Segue pelo teorema 3.18.

(iii) $\Longrightarrow$ *(i)* Suponha que X seja estrela Lindelöf mostraremos que X é separável. Por X ser um espaço de Moore podemos fixar um desenvolvimento $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ em X. Assim, para todo $n \in \omega$, por X ser estrela Lindelöf, existe L_n que é núcleo-Lindelöf de $\mathcal{U}_n$. Veja

que cada subconjunto Lindelöf L_n é, pela proposição 4.14, um espaço de Moore. Por L_n ser Lindelöf, pela proposição 4.7, L_n é coletivamente normal. Assim, pelo critério de Bing, 4.18, temos que cada L_n é metrizável e pelo teorema 1.86 pode-se obter, para cada L_n, um subconjunto D_n denso e enumerável em L_n.
Afirmamos que $D = \bigcup_{n \in \omega} D_n$ é denso em X. De fato, fixe $x \in X$ e seja U uma vizinhança aberta de x. Por X ser um espaço de Moore, existe $m \in \omega$ tal que $x \in St(x,\mathcal{U}_m) \subseteq U$. Como L_m é Lindelöf e núcleo-estrela de $\mathcal{U}_m$ existe $z \in L_m$ e $V \in \mathcal{U}_m$ tal que $\{x, z\} \subseteq V$. Note que $V \subseteq St(x,\mathcal{U}_m) \subseteq U$ e $V \cap L_m \neq \emptyset$. Como $V \cap L_m$ é um aberto de L_m e D_m é denso em L_m temos que $V \cap D_m \neq \emptyset$ e assim $V \cap D \neq \emptyset$, portanto D é denso em X.

Como D é enumerável, por ser união enumerável de enumerável, e denso em X, pela afirmação, temos que X é separável. $\square$

4.3 ψ-espaços generalizados

Nessa seção seguimos o artigo [1]. Apresentaremos os ψ-espaços generalizados que será útil para apresentar a resposta de duas questões propostas por [5].

No capítulo 2, definimos n-starcompacto e fortemente-n-starcompacto (definições 2.47 e 2.48, respectivamente). Seguindo o artigo [1] temos uma definição mais moderna:

Definição 4.21. Para cada $n \in \mathbb{N}^+$, diz-se que um espaço topológico X tem a propriedade $\mathcal{C}_n$ $(\mathcal{L}_n)$, se para toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X a cobertura $\{St^{(n)}(x,\mathcal{U}) : x \in X\}$ tem uma subcobertura finita (enumerável). Diz-se que X tem a propriedade $\mathcal{C}_{n\frac{1}{2}}$ $(\mathcal{L}_{n\frac{1}{2}})$, se para toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X a cobertura $\{St^{(n)}(U,\mathcal{U}) : U \in \mathcal{U}\}$ tem uma subcobertura finita (enumerável).

Observe que a definição de $\mathcal{C}_n$ é a mesma que fortemente n-starcompacto (2.48) e $\mathcal{C}_{n\frac{1}{2}}$ é a mesma que n-starcompacto (2.47). Como fortemente n-starcompacto implica n-starcompacto, 2.50, temos que $\mathcal{C}_n \Longrightarrow \mathcal{C}_{n\frac{1}{2}}$. Analogamente temos que $\mathcal{L}_n \Longrightarrow \mathcal{L}_{n\frac{1}{2}}$.

Definição 4.22 (ψ-espaços generalizados)**.** Suponha que $\lambda \leqslant \kappa$ são cardinais infinitos e $\mathcal{A} \in [\kappa]^\lambda$ seja uma família almost disjoint maximal (mad). Seja $\psi(\mathcal{A})$ o espaço topológico cujo suporte é o conjunto $\mathcal{A} \cup \kappa$ com a topologia gerada pela seguinte base

$$\{\{\alpha\} : \alpha \in \kappa\} \cup \{\{A\} \cup (A \setminus F) : A \in \mathcal{A} \text{ e } F \in [\kappa]^{<\lambda}\}.$$

Ou seja, cada ponto em κ é isolado e cada $A \in \mathcal{A}$ tem vizinhanças básicas da forma $\{A\} \cup (A \setminus F)$, para $F \in [\kappa]^{<\lambda}$.

Daqui para frente, sempre que usarmos κ, λ e $\mathcal{A}$ subentende-se que são os mesmos da hipótese da definição anterior. Ainda, por conveniência, assumiremos que $\mathcal{A}$ é disjunta de κ, $\bigcup \mathcal{A} = \kappa$ e $|\mathcal{A}| \geqslant \kappa$.

Proposição 4.23. *Suponha que X seja localmente enumerável. Então são equivalentes:*

(i) *X é estrela enumerável.*

(ii) *X é estrela Lindelöf.*

(iii) *X tem a propriedade $\mathcal{L}_{1\frac{1}{2}}$.*

Demonstração:
$(i) \Rightarrow (ii)$ Segue pelo teorema 3.18.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Suponha que X seja estrela Lindelöf e seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X. Por X ser estrela Lindelöf existe $L \subseteq X$ Lindelöf tal que $St(L,\mathcal{U}) = X$. Como $\mathcal{U}$ também é uma família de abertos que cobre L, existe uma subfamília $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ enumerável tal que $L \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$, com isso

$$X = St(L,\mathcal{U}) \subseteq St\left(\bigcup \mathcal{U}',\mathcal{U}\right) = \bigcup \{St(U,\mathcal{U}) : U \in \mathcal{U}'\} \subseteq X.$$

Daí, como $\{St(U,\mathcal{U}) : U \in \mathcal{U}'\}$ é uma subcobertura enumerável de $\{St(U,\mathcal{U}) : U \in \mathcal{U}\}$ temos que X tem a propriedade $\mathcal{L}_{1\frac{1}{2}}$.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Suponha que X tem a propriedade $\mathcal{L}_{1\frac{1}{2}}$ e seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X. Por hipótese X é localmente enumerável, logo podemos refinar tal cobertura, se necessário, a uma subcobertura $\mathcal{U}'$ onde os abertos são enumeráveis. Assim, por X ser $\mathcal{L}_{1\frac{1}{2}}$ temos que a cobertura $\{St(U,\mathcal{U}) : U \in \mathcal{U}'\}$ possui uma subcobertura enumerável $\{St(U,\mathcal{U}) : U \in \mathcal{U}''\}$, onde $\mathcal{U}'' \subseteq \mathcal{U}'$ é uma subfamília enumerável. Veja que $A = \bigcup \mathcal{U}''$ que é claramente enumerável. Assim, como

$$X \subseteq \bigcup \{St(U,\mathcal{U}) : U \in \mathcal{U}''\} = St(\bigcup \mathcal{U}'',\mathcal{U}) \subseteq X$$

temos que $St(A,\mathcal{U}) = X$. Portanto X é estrela enumerável. $\square$

Observe que se $\lambda = \aleph_0$, então o espaço $\psi(\mathcal{A})$ é localmente enumerável.

A demonstração da seguinte proposição pode ser encontrada em [16], 2.20.

Proposição 4.24 (Pospisil; ver [16])**.** *Se X é Hausdorff, então $|X| \leqslant d(X)^{\chi(X)}$.* $\square$

Proposição 4.25. *Se X é Hausdorff, primeiro-enumerável e $e(X) > \mathfrak{c}$, então X não é estrela enumerável.*

Demonstração: Suponha que X seja estrela enumerável. Seja $F \subseteq X$ um subconjunto fechado e discreto de tamanho $\mathfrak{c}^+$. Para cada $x \in F$ seja $\{U_{x,n} : n < \omega\}$ uma base local enumerável em x tal que $U_{x,n} \cap F = \{x\}$ para todo $n < \omega$. Para cada $n < \omega$ seja $\mathcal{U}_n = \{U_{x,n} : x \in F\} \cup \{X \setminus F\}$ uma cobertura aberta de X, como supomos que X é estrela enumerável existe $Y_n \subseteq X$ enumerável tal que $St(Y_n, \mathcal{U}_n) = X$. Considerando $Y = \bigcup_{n<\omega} Y_n$ que é enumerável. Note que como Hausdorff é hereditário Y é Hausdorff, como Y é denso em Y temos que $d(\overline{Y}) = \aleph_0$ e como Y é primeiro enumerável temos que $\chi(\overline{Y}) = \aleph_0$ assim obtemos, pela proposição 4.24, que $|\overline{Y}| \leqslant \mathfrak{c}$. Desde que $U_{x,n}$ é o único aberto em $\mathcal{U}_n$ que contém x temos claramente que $Y_n \cap U_{x,n} \neq \emptyset$ para todo $n < \omega$. Com isso, segue que $x \in \overline{Y}$ e assim $F \subseteq \overline{Y}$. Como $|F| = \mathfrak{c}^+$ deveríamos ter $|\overline{Y}| \geqslant \mathfrak{c}^+$, absurdo, pois $|\overline{Y}| \leqslant \mathfrak{c}$. Portanto, X não é estrela enumerável. □

Os ψ-espaços generalizados que serão estudados são tomado com $\lambda = \omega$.

Proposição 4.26. *O espaço $\psi(\mathcal{A})$ é primeiro enumerável, Tychonoff, pseudocompacto e satisfaz a propriedade $\mathcal{C}_2$.*

Demonstração: Para ver que é primeiro enumerável, Tychonoff e pseudocompacto é análogo à 1.138,1.133 e 1.132. Mostraremos que X satisfaz a propriedade $\mathcal{C}_2$, de fato, seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de $\psi(\mathcal{A})$, é suficiente mostrar que existe $F \subseteq X$ finito tal que $\kappa \subseteq St(F, \mathcal{U})$, pois κ é denso em $\psi(\mathcal{A})$ e $\psi(\mathcal{A}) \subseteq St(\kappa, \mathcal{U}) \subseteq St^2(F, \mathcal{U}) \subseteq \psi(\mathcal{A})$. Suponha que não exista $F \subseteq X$ tal que $\kappa \subseteq St(F, \mathcal{U})$, assim fixe $\alpha \in \kappa$ qualquer e $f : \mathcal{P}(\kappa) \setminus \{\emptyset\} \to \kappa$ uma função escolha, por indução transfinita seja

$$\begin{cases} \alpha_0 = \alpha \\ \alpha_i = f(\kappa \setminus St(\{\alpha_j, j < i\}, \mathcal{U})), \quad \forall\, i < \omega. \end{cases}$$

e considere $A = \{\alpha_n : n < \omega\}$.

Pela maximalidade de $\mathcal{A}$ existe $E \in \mathcal{A}$ tal que $|E \cap A| = \aleph_0$. Assim seja $V \in \mathcal{U}$ tal que $E \in \{E\} \cup (E \setminus F) \subseteq V$ e assim como $(E \setminus F) \cap A$ é infinito temos que $V \cap A$ também é infinito, logo existe $m < n < \omega$ tal que $\alpha_m, \alpha_n \in V$. Isso implica que $\alpha_n \in St(\alpha_m, \mathcal{U})$, um absurdo, pois pela indução transfinita $\alpha_n \notin St(\alpha_m, \mathcal{U})$. Portanto, existe $F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $\kappa \subseteq St(F, \mathcal{U})$, o que implica que $St^2(F, \mathcal{U}) = \psi(\mathcal{A})$. □

Proposição 4.27. *Seja $\aleph_0 \leqslant \kappa \leqslant \mathfrak{c}$. Existe uma família mad $\mathcal{A} \subseteq [\kappa]^\omega$ tal que $\psi(\mathcal{A})$ é estrela enumerável.*

Demonstração: Suponha que $\aleph_0 \leqslant \kappa \leqslant \mathfrak{c}$. Considere $\mathcal{C} \subseteq [\omega]^\omega$ e $\mathcal{D} \subseteq [\kappa \setminus \omega]^\omega$ com $\mathcal{D}$ famílias mad tais que $|\mathcal{C}| = |\mathcal{D}| = \mathfrak{c}$. Fixemos uma bijeção $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ e defina

$\mathcal{A} = \{C \cup f(C) : C \in \mathcal{C}\}$, uma família de tamanho $\mathfrak{c}$.

Afirmamos que $\mathcal{A}$ é almost disjoint, de fato, sejam $C \cup f(C), (C' \cup f(C') \in \mathcal{A}$, onde $C, C' \subseteq \omega$ e $f(C), f(C') \subseteq \kappa \setminus \omega$, assim:

$$|(C \cup f(C)) \cap (C' \cup f(C'))| = |(C \cap C') \cup (f(C) \cap C') \cup (C \cap f(C')) \cup (f(C) \cap f(C'))|$$

Como $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são almost disjoint temos que $|(C \cap C')| < \omega$ e $|(f(C) \cap f(C'))| < \omega$ e como $C, C' \subseteq \omega$ e $f(C), f(C') \subseteq \kappa \setminus \omega$ temos que $|(f(C) \cap C')| = |(C \cap f(C'))| = 0$, assim:

$$|(C \cup f(C)) \cap (C' \cup f(C'))| < \omega.$$

Portanto, $\mathcal{A}$ é almost disjoint.

Agora, mostraremos que $\mathcal{A}$ é maximal. Seja $A \in [\kappa]^{\omega}$, por $|A| = \aleph_0$ vale que $|A \cap \omega| = \aleph_0$ ou $|A \cap (\kappa \setminus \omega)| = \aleph_0$.

Considere os casos:

Caso (I): $|A \cap \omega| = \aleph_0$, pois $\mathcal{C}$ é mad em ω, assim $A \cap \omega$ vai ter interseção infinita com um elemento $C \in \mathcal{C}$, pois $\mathcal{C}$ é mad. Assim, $\aleph_0 \leqslant |C \cap (\omega \cap A)| = |(C \cap \omega) \cap A| = |C \cap A| \subseteq |(C \cup f(C)) \cap A|$.

Caso (II): $|A \cap (\kappa \setminus \omega)| = \aleph_0$, pois $\mathcal{D}$ é mad em $\kappa \setminus \omega$, assim $A \cap (\kappa \setminus \omega)$ vai ter interseção infinita com um elemento $D \in \mathcal{D}$, onde $D = f(C)$ para algum $C \in \mathcal{C}$. Com isso, analogamente ao caso (I), temos que $\aleph_0 \leqslant |(C \cup f(C)) \cap A|$.

Em ambos os casos, A tem interseção infinita com algum elemento de $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ isso implica que $\mathcal{A}$ é maximal.

Agora, mostraremos que $\psi(\mathcal{A})$ é estrela enumerável. Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura de abertos básicos de $\psi(\mathcal{A})$. Primeiramente veja que $\mathcal{A} \subseteq St(\omega, \mathcal{U})$, pois se dado $G \in \mathcal{A}$ temos que $(\{G\} \cup (G \setminus F)) \cap \omega \neq \emptyset$ assim $G \in St(\omega, \mathcal{U})$. Além disso, sendo $\mathcal{A}$ mad e $\bigcup \mathcal{A} = \kappa$ temos que $St(\omega, \mathcal{U})$ é cofinita, pois se $\kappa \setminus St(\omega, \mathcal{U})$ fosse infinita então esse conjunto intersectaria um elemento de $\mathcal{D}$ num conjunto infinito (pela maximalidade de $\mathcal{D}$), o que é um absurdo, pois qualquer ponto $\mathcal{D}$ já foi coberto por $St(\omega, \mathcal{U})$, a menos de um número finito de pontos de $\kappa \setminus \omega$, logo $St(\omega, \mathcal{U})$ é cofinita. Assim, vai existir $F \subseteq \kappa \setminus \omega$ finito tal que $St(\omega \cup F, \mathcal{U}) = \psi(\mathcal{A})$. Portanto, $\psi(\mathcal{A})$ é estrela enumerável. $\square$

Na proposição acima, observamos que não podemos afirmar em geral que $St(\omega, \mathcal{U}) = \psi(\mathcal{A})$ para toda cobertura aberta $\mathcal{U}$. Pois podemos fixar $F \in [\kappa \setminus \omega]^{<\omega}$ e considere $\mathcal{U} = \{\{E\} \cup (E \setminus F) : E \in \mathcal{A}\} \cup \{\{\alpha\} : \alpha < \kappa\}$, assim temos que $St(\omega, \mathcal{U}) \cap F = \emptyset$. Assim $St(\omega, \mathcal{U}) \neq \psi(\mathcal{A})$. Acertamos esse detalhe na demonstração, já que Aiken, afirmou que $St(\omega, \mathcal{U}) = \psi(\mathcal{A})$.

Proposição 4.28. *Seja $\aleph_0 < \kappa \leqslant \mathfrak{c}$. Existe uma família mad $\mathcal{A} \subseteq [\kappa]^\omega$ tal que $\psi(\mathcal{A})$ não é estrela enumerável.*

Demonstração: Seja $\mathcal{A}_0 \subseteq [\kappa]^\omega$ uma família almost disjoint disjunta de tamanho κ. Estendendo $\mathcal{A}_0$ a uma família almost disjoint maximal $\mathcal{A}$ temos que $\psi(\mathcal{A})$ não é estrela enumerável, de fato, se $Y \subseteq \psi(\mathcal{A})$ é um subconjunto enumerável então $St(Y,\mathcal{U}) \neq \psi(\mathcal{A})$. Sendo Y enumerável, Y intersecta no máximo enumeráveis elementos de $\mathcal{A}_0$. Isso implica que existe $A \in \mathcal{A}_0$ que não intersecta Y assim $A \notin St(Y,\mathcal{U})$. Portanto, $St(Y,\mathcal{U}) \neq \psi(\mathcal{A})$ para todo Y enumerável, logo $\psi(\mathcal{A})$ não é estrela enumerável. $\square$

Proposição 4.29. *Se $\kappa > \mathfrak{c}$, então $\psi(\mathcal{A})$ não é $\mathcal{L}_{1\frac{1}{2}}$. Portanto, por 4.23, não é estrela enumerável nem estrela Lindelöf.*

Demonstração: Suponha que $\kappa > \mathfrak{c}$. Pela proposição 4.26 o espaço $\psi(\mathcal{A})$ é Hausdorff e primeiro enumerável. Assim, se mostrarmos que $e(\psi(\mathcal{A})) > \mathfrak{c}$ então, pela proposição 4.25, temos que $\psi(\mathcal{A})$ não é estrela enumerável. Finalmente, usando a proposição 4.23, temos que $\psi(\mathcal{A})$ não é $\mathcal{L}_{1\frac{1}{2}}$.

Portanto mostraremos que $e(\psi(\mathcal{A})) > \mathfrak{c}$. De fato, pela proposição 1.132 temos que $\mathcal{A}$ é fechado e discreto assim necessáriamente $e(\psi(\mathcal{A})) \geqslant |\mathcal{A}|$ e como supomos que $|\mathcal{A}| \geqslant \kappa$ obtemos que:

$$e(\psi(\mathcal{A})) \geqslant |\mathcal{A}| \geqslant \kappa > \mathfrak{c}.$$

$\square$

Pelas proposições acima pode-se responder às seguintes questões propostas por [5], que são:

(1) Um espaço primeiro enumerável tenuamente compacto é estrela Lindelöf?

(3) Um espaço pseudocompacto Tychonoff é estrela Lindelöf?

Para a questão (3), a resposta é negativa. Pois o $\psi(\mathcal{A})$, pelas proposições 4.26 e 4.28, é Tychonoff, pseudocompacto e não estrela Lindelöf. Consequentemente, temos a resposta negativa para a questão (1), pois um espaço que é Tychonoff e pseudocompacto é tenuamente compacto, pelo teorema 1.98. Assim o $\psi(\mathcal{A})$, que é primeiro-enumerável, pela proposição 4.26, serve como contra-exemplo.

Referências

[1] Aiken, L. P., *star-covering properties: Generalized ψ-spaces, countability conditions, reflection*. Topology and its Applications **158**, (2011), 1732-1737.

[2] Alas, O. ; Aurichi, A. ; Junqueira, L. R. ; Tall, F. D., *Non-productively Lindelöf spaces and small cardinals*, Houston Journal of Mathematics **37**, 4 (2011), 1373–1381.

[3] Alas, O. T. ; Junqueira, L. R.; van Mill, J. ; Tkachuk, V. V. ; Wilson, R. G., *On the extent of star countable spaces*, Central European Journal of Mathematics **9**, 3 (2011), 603–615.

[4] Alas, O. T. ; Junqueira, L. R. ; Wilson, R. G., *Dually discrete spaces*. Topology and its Applications **155**, 13 (2008), 1420-1425.

[5] Alas, O. T. ; Junqueira, L. R. ; Wilson, R. G., *Countability and star covering properties*, Topology and its Applications, **158**, 4 (2011), 620-626.

[6] Alas, O. T. ; Tkachuk, V. V. ; Wilson, R. G., *Covering Properties and neighborhood assingments*, Topology Proceedings, v. 30, p. 25-38, 2006.

[7] Aquaro, G., *Point countable covering in countably compact spaces*, General topology and its relations to modern analysis and algebra II, (1967), 39-41.

[8] Aurichi, L.; Tall, F. D., *Lindelöf spaces which are indestructible, productive or D*, Topology and its Applications **159**, 1 (2012), 331–340.

[9] Bonanzinga, M.; Matveev, M. V., *Problems on star-covering properties*. Em: *Open Problems in Topology II*, pp.9–14, editado por E. Pearl. Elsevier Science, Amsterdam, 2007.

[10] Engelking, Ryszard. *General Topology*. rev. compl. ed. Berlin: Heldermann, 1989. (Sigma Series in Pure Mathematics, **6**)

[11] Fleissner, W. G. ; Stanley, A. M., *D-spaces*, Topology and its Applications **114**, (2001), 261–271.

[12] Gruenhage, G., *A survey of D-spaces*. Contemporary Math, 533, (2011), 13–28.

[13] Hodel, R. E., *Metrizability of topological spaces*. Pacific Journal of Mathematics, vol. 55, n^o 2, 1974.

[14] Ikenaga, S., *A class which contains Lindelöf spaces, separable spaces and countably compact spaces*. Memoirs of Numazu College of Technology, 1983, 18, 105–108.

[15] JECH, Thomas J. *Set Theory*. New York: Academic Press, 1978. (Pure and Applied Mathematics, a Serie of Monographs and Textbooks, **79**).

[16] Juhász, I.; Verbeek, A.; Kroonenberg, N. S., *Cardinal function in topology*. Mathematical Centre Tracts, vol. 34, Mathematisch Centrum Amsterdam, 1971.

[17] Kunen, Kenneth. *Set Theory: an introduction to independence proofs*. Amsterdam: North-Holland, 1980. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, **102**)

[18] Matveev, M. V., *Some question on property (a)*. Question and Answers in General Topology, **15**, 1997.

[19] Matveev, M. V., *A survey on star covering properties*. Topology Atlas, Preprint 330, 1998 (http://at.yorku.ca/topology/).

[20] van Douwen, E. K. ; E.K., G.M.Reed, A.W.Roscoe andI.J. Tree. *Star covering properties*, Pacific J. Math. **81**, (1979) 2, 371–377.

[21] van Douwen, E. K. ; Pfeffer, W. F. *Some properties of the Sorgenfrey line and related spaces*, Topology and its Applications, 39 (1991), 71-103.

[22] van Mill, J. ; Tkachuk, V. V.; Wilson, R. G., *Classes defined by stars and neighbourhood assignments*, Topology and its Applications **154**, 10 (2007), 2127–2134.

Índice Remissivo

ν-espaço, 53

atribuição de vizinhanças abertas, 28
Axioma da escolha, 6

boa ordem, 5

cardinal, 8
cardinal regular, 9
cardinal singular, 9
cardinalidade, 7
cobertura aberta, 11
cofinal, 8
cofinalidade, 8
conjunto
    $\boldsymbol{G_\delta}$, 26
    dominado, 4
    enumerável, 4
    ilimitado, 8
    transitivo, 5

D-espaço, 51
DCCC, 23
desenvolvimento, 78
DFCC, 23

enumeração canônica, 6
espaço
    $\aleph_1$-compacto, 17
    ω_1-Lindelöf, 17
    ω-starcompacto, 63
    ψ-espaços generalizados, 81
    coletivamente normal, 76
    compacto, 16, 17
    de Moore, 78
    dualmente $\mathcal{P}$, 44
    enumeravelmente compacto, 16
    estrela $\mathcal{P}$, 39
    fracamente κ-coletivamente Hausdorff, 75
    fracamente κ-metalindelöf, 75
    Hausdorff, 10
    Lindelöf, 17
    linearmente Lindelöf, 17
    localmente enumerável, 13
    metacompacto, 17
    metalindelöf, 17
    n-starcompacto, 59
    Normal, 11
    P-espaço, 75
    paracompacto, 17
    pseudocompacto, 17
    regular, 11
    tenuamente compacto, 23
    tenuamente Lindelöf, 23
    Tychonoff, 11
espaço discreto, 12
estrela, 27
expansão aberta, 75
extent, 29

família
    σ-discreta, 13
    σ-localmente finita, 13
    almost disjoint, 31
    almost disjoint maximal, 32
    discreta, 13

localmente finita, 13
pontualmente finita e enumerável, 13
fortemente n-starcompacto, 59
função-escolha, 6

indexação, 4
indução transfinita, 7

Lema de Zorn, 6

ordem
parcial, 5
parcial estrita, 5
total, 5
ordinal, 5
ordinal regula, 9
ordinal singular, 9

ponto de acumulação, 12
pré-ordem, 5
primeiro-enumerável, 10
propriedade
$\mathcal{C}_n$, 81
$\mathcal{C}_{n\frac{1}{2}}$, 81
$\mathcal{L}_n$, 81
$\mathcal{L}_{n\frac{1}{2}}$, 81
compactamente produtiva, 25
da intersecção enumerável, 22
da intersecção finita, 22
hereditária, 25
preservada por imagens contínuas, 25
produtiva, 25

recursão transfinita, 7

segundo-enumerável, 10
separado a direita, 28
sequência convergente, 21
spread, 29

terceiro-enumerável, 10
tipo de ordem, 6
topologia
G_δ, 30
da ordem, 11
discreta, 12
metrizável, 21
Tychonoff Plank, 35
Tychonoff Plank deletado, 36

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170-110
<http://www.pgmat.ufba.br>