UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PGMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

HIPERBOLICIDADE E PROPRIEDADE DE ESPECIFICAÇÃO

MARCUS VINÍCIUS DA CONCEIÇÃO MORRO

Salvador-Bahia
Fevereiro de 2013

Hiperbolicidade e Propriedade de Especificação

Marcus Vinícius da Conceição Morro

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo César Rodrigues Pinto Varandas.

Salvador-Bahia

Fevereiro de 2013

Morro, Marcus Vinícius da Conceição.

Hiperbolicidade e Propriedade de ESpecificação / Marcus Vinícius da Conceição Morro. – Salvador: UFBA, 2013.

35 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Paulo César Rodrigues Pinto Varandas.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2013.

Referências bibliográficas.

1. Propriedade de Especificação. 2. Difeomorfismo. 3. Hiperbolicidade. 4. Mistura Topológica. I. Varandas, Paulo César Rodrigues Pinto. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 517.938

Hiperbolicidade e Propriedade de Especificação

Marcus Vinícius da Conceição Morro

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 25 de fevereiro de 2013.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Paulo César Rodrigues Pinto Varandas (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Jérôme François Alain Jean Rousseau
UFBA

Profa. Dra. Katrin Grit Gelfert
UFRJ

Agradecimentos

Agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para este trabalho e, em especial, ao Professor Paulo Varandas pela orientação e a disposição sempre que foi procurado.

A CAPES pela bolsa concedida durante os dois anos de curso.

Aos colegas acadêmicos que colaboraram na elaboração deste trabalho, dentre eles, Anderson Cruz, Ângela Soldatelli, Kátia Rocha, Luiz Alberto, Roberto Sant'Anna, Thiago Bomfim. Agradeço aos demais colegas de classe que contribuíram de alguma forma nestes dois anos de estudo, Darlan, Edward, Elaine, Elen, Jaqueline, Raimundo.

A todos os funcionários do IM-UFBA, pela disposição e profissionalismo. Em especial ao Professor Vitor Araújo pela simpatia e solicitude com que sempre me atendeu. Ao Professor Kleyber Cunha que me ajudou com referências bibliográficas.

Aos Professores Katrin Gelfert e Jorôme Rousseau por aceitarem participar da comissão julgadora da dissertação e pelas correções e sugestões para texto.

Agradeço a Larissa por me ajudar com correções no texto.

Por fim, um agradecimento especial para minha mãe Rose.

"Um pouco mais de conhecimento iluminar nosso caminho pode."

Mestre Yoda (Star Wars - Episódio 3).

Resumo

Seja f um difeomorfismo de uma variedade fechada C^∞ M. Neste trabalho, apresentamos a noção de propriedade de especificação C^1-estável para um conjunto f-invariante Λ de M, e apresentamos a prova de que $f|_\Lambda$ satisfaz a propriedade de especificação C^1-estável se e somente se Λ é um conjunto elementar hiperbólico.

Palavras-chave: Propriedade de Especificação; Difeomorfismo; Hiperbolicidade; Mistura Topológica.

Abstract

Let f be a diffeomorphism of a closed C^∞ manifold M. In this work, we introduce the notion of the C^1-stable specification property for a closed f-invariant set Λ of M, and we present a proof that $f|_\Lambda$ satisfies a C^1-stable specification property if and only if Λ is a hyperbolic elementary set.

Keywords: Property Specification; Diffeomorphism; Hyperbolicity; Topologically Mixing.

Sumário

Introdução

A existência de pontos periódicos é muitas vezes necessária no estudo de sistemas dinâmicos. Por exemplo, na definição de Devaney [5] para sistema caótico temos a exigência da densidade de pontos periódicos. A noção propriedade de especificação, devida a Bowen [2], pode ser usada para a dedução de boas propriedades topológicas, entre elas a existência de pontos periódicos, nos dando uma primeira motivação pra estudá-la. A propriedade de especificação tornou-se muito importante no estudo de teoria ergódica de sistemas dinâmicos em espaços métricos compactos (ver [4] e [8]). Neste trabalho, apresentamos um estudo da propriedade de especificação do ponto de vista da teoria geométrica de sistemas dinâmicos feito em [12].

A definição de especificação pode ser feita de diversas formas equivalentes. A forma de definir a propriedade de especificação que escolhemos é apresentada com detalhes na Seção 1.2. Moralmente, dizemos que uma transformação f satisfaz a propriedade de especificação se dado um erro $\epsilon > 0$, para um número arbitrário de segmentos de órbitas arbitrariamente grandes, podemos encontrar uma órbita periódica que acompanha cada um dos segmentos com o erro de ϵ e muda de um segmento para outro em uma quantidade fixa de tempo que depende apenas de ϵ.

Se f satisfaz a propriedade de especificação, então f é topologicamente misturadora (na Seção 1.2 apresentamos a definição de topologicamente misturadora e a prova deste resultado, a qual também pode ser encontrada em [4]). Prova-se que se f é topologicamente misturadora, então é transitiva, isto é, há uma órbita densa.

No caso de transformações do intervalo contínuas, a propriedade de mistura topológica implica em especificação. Este resultado é devido a Blokh [1]. Por outro lado, Buzzi mostra em [3] que se tirarmos a hipótese de continuidade, não temos equivalência entre mistura topológica e propriedade de especificação. Em [3] é apresentado o seguinte contraexemplo: embora todas as transformações $T_\beta : [0,1] \to [0,1]$ definidas por:

$$T_\beta : x \mapsto \{\beta x\},$$

onde $\{\cdot\} \in [0,1[$ representa a parte fracionária, sejam topologicamente misturadoras, para todo $\beta > 1$, o conjunto de $\beta > 1$ tais que T_β satisfaz a propriedade de especificação é denso, mas tem medida de Lesbegue nula.

Um homeomorfismo f é expansivo se existe uma constante $c > 0$ de tal modo que para qualquer $x, y \in X$, $d(f^n(x), f^n(y)) \leq c$ $(n \in \mathbb{Z})$ implica $x = y$. É provado em [4, Preposição 23.20] que se um homeomorfismo f expansivo tem a propriedade de sombreamento (para definição ver Seção 1.2) e é topologicamente misturador, então f satisfaz a propriedade especificação.

Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto f-invariante fechado. Seja $U \subset M$ uma vizinhança compacta de Λ, definamos

$$\Lambda_f(U) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U).$$

Um conjunto Λ é localmente maximal em U se houver uma vizinhança compacta U de Λ tal que $\Lambda = \Lambda_f(U)$. Dizemos que $f|_{\Lambda_f(U)}$ satisfaz a propriedade de especificação C^1-estável se houver uma vizinhança compacta U de Λ e uma C^1-vizinhança $\mathcal{U}(f)$ de f tal que Λ é localmente maximal em U e para qualquer $g \in \mathcal{U}(f)$, $g|_{\Lambda_g(U)}$ satisfaz a propriedade de especificação. No caso $\Lambda = M$, dizemos que f satisfaz a propriedade de especificação C^1-estável.

Um conjunto localmente maximal Λ é um conjunto básico (respectivamente conjunto elementar) se $f|_\Lambda$ é transitiva (respectivamente topologicamente misturadora). Pode-se mostrar que se Λ é um conjunto básico hiperbólico (ver Seção 1.1), então os pontos periódicos são densos nele. Cada conjunto elementar é um conjunto básico.

O principal resultado apresentado neste trabalho, demonstrado por Sakai, Sumi, e Yamamoto em [12], é o seguinte

Teorema A. Seja Λ um conjunto f-invariante fechado. Então $f|_{\Lambda_f(U)}$ satisfaz a propriedade de especificação C^1-estável se e somente se Λ é um conjunto elementar hiperbólico.

Em [10] este resultado é estendido para transformações C^1-regulares (transformações diferenciáveis não invertíveis cujas derivadas são sobrejetivas). Entretanto para transformações não invertíveis não podemos aplicar a mesma definição de hiperbolicidade que usamos para difeomorfismos. A exigência de subespaços estáveis e instáveis invariantes é muito forte. Mais precisamente, não se pode esperar que os subespaços instáveis se sejam transformados de maneira invariante, visto que pode haver vários pontos com mesma imagem.

A demonstração de que se Λ é um conjunto elementar hiperbólico então $f|_{\Lambda_f(U)}$ satisfaz a propriedade de especificação C^1-estável, decorre da já conhecida estabilidade de conjuntos hiperbólicos e do fato de hiperbolicidade mais a propriedade de topologicamente misturadora implicarem na propriedade de especificação. Em [12] é feita a demonstração de que se $f|_{\Lambda_f(U)}$ satisfaz a propriedade de especificação C^1-estável então Λ é um conjunto elementar hiperbólico. Para tal é utilizado um resultado devido a Mañé [9] que afirma que sob a hipótese de transitividade robusta (ver Seção 2.3) as seguintes condições são equivalentes:

(1) existe uma C^1-vizinhança $\mathcal{U}(f)$ de f tal que para qualquer $g \in \mathcal{U}(f)$, qualquer ponto periódico de $\Lambda_g(U)$ é hiperbólico e tem o mesmo índice;

(2) existe uma C^1-vizinhança $\mathcal{U}(f)$ de f tal que para qualquer $g \in \mathcal{U}(f)$, $\Lambda_g(U)$ é hiperbólico.

Observe que negar (1) é o mesmo que dizer que f pode ser aproximada por transformações C^1 com pontos periódicos não hiperbólicos ou com índices distintos. Assim, um roteiro para a prova da parte do Teorema A feita em [12] é o seguinte:

1 Mostrar que se $f|_{\Lambda_f(U)}$ satisfaz a propriedade de especificação C^1-estável, então para qualquer g C^1-próxima de f tal que $g|_{\Lambda_f(U)}$ satisfaz a propriedade de especificação, então todo ponto periódico hiperbólico para g em $\Lambda_g(U)$ possui o mesmo índice;

2 Mostrar que se existe uma g C^1-próxima de f e um ponto periódico $p \in \Lambda_g(U)$ que não é hiperbólico para g, então podemos encontrar uma φ C^1-próxima de f com q_1 e q_2 pontos periódicos hiperbólicos para φ em $\Lambda_\varphi(U)$ com índices distintos;

3 Aplicar o resultado de Mañé citado acima e concluir que se $f|_{\Lambda_f(U)}$ satisfaz a especificação C^1-estável, então existe uma C^1-vizinhança $\mathcal{U}(f)$ de f tal que para toda $g \in \mathcal{U}(f)$ $g|_{\Lambda_g(U)}$ é hiperbólica, pois por 1 e 2 teremos que para qualquer $g \in \mathcal{U}(f)$, qualquer ponto periódico de $\Lambda_g(U)$ é hiperbólico e tem o mesmo índice.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No primeiro capítulo, listamos definições e resultados de Dinâmica Hiperbólica necessários no decorrer do texto. No segundo capítulo, apresentamos a demonstração do Teorema A, apresentando a estabilidade de conjuntos hiperbólicos e a demonstração de que hiperbolicidade mais a propriedade de topologicamente misturadora implicarem na propriedade de especificação e apresentamos as demonstrações feitas em [12]. Por fim, no terceiro capítulo comentamos a extensão do Teorema A para o caso não invertível feita em [10] e falamos sobre uma versão da propriedade de especificação sobre o ponto de vista da Teoria da Medida.

Capítulo 1

Noções preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados de dinâmica hiperbólica e propriedade de especificação a serem utilizados neste trabalho. As definições e resultados apresentados neste capítulo podem ser encontrados em [7] e [11].

1.1 Hiperbolicidade

Nesta seção a presentamos a definição de conjunto hiperbólico e resultados relacionados.

Dizemos que uma transformação linear $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é *hiperbólica* se todos os autovalores de A possuem norma diferente de 1. Portanto um ponto fixo p para uma transformação $f : M \to M$ é hiperbólico se Df_p for uma transformação hiperbólica. Se todos os autovalores de Df_p têm norma maior do que 1, dizemos que p é hiperbólico de tipo fonte. Se todos os autovalores de Df_p têm norma menor do que 1, dizemos que p é hiperbólico de tipo poço. Se p é hiperbólico e Df_p tem autovalores com norma maior do que 1 e autovalores com norma menor do que 1, dizemos que p é ponto fixo de tipo sela. Se p é um ponto periódico de período k, dizemos que p é um ponto periódico hiperbólico (respectivamente de tipo fonte, poço ou sela) se p é um ponto fixo hiperbólico para f^k (respectivamente de tipo fonte, poço ou sela).

O conceito de ponto hiperbólico é extendido para conjuntos com a seguinte definição.

Definição 1.1.1. Sejam M uma variedade Riemanniana e $Dif^1(M)$ o espaço de difeomorfismos de M dotado da topologia C^1. $f \in Dif^1(M)$. Dizemos que $\Lambda \subset M$ é um *conjunto (uniformemente) hiperbólico* se:

(i) Λ é compacto e f-invariante;

(ii) existe $c > 0$ e existe $0 < \lambda < 1$ tal que para todo $x \in \Lambda$

$$\begin{cases} T_xM = E^s_x \oplus E^u_x & \text{decomposição } Df\text{-invariante} \\ Df(x) \cdot E^s_x = E^s_{f(x)} & \\ Df(x) \cdot E^u_x = E^u_{f(x)}; & \end{cases}$$

(iii)

$$\begin{cases} \|Df^n(x)|_{E^s_x}\| \leq c.\lambda^n \\ \|Df^{-n}(x)|_{E^u_x}\| \leq c.\lambda^n \end{cases}, \forall n \geq 1, \forall x \in \Lambda.$$

Caso $\Lambda = M$ dizemos que f é *Anosov.*

A seguinte proposição nos diz que existe uma métrica Riemanniana na qual a constante c da Definição 1.1.1 pode ser tomada igual a 1.

Proposição 1.1.2. *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico. Existe uma métrica Riemanniana adaptada $<,>$ de forma que:*

$$\|Df^n(x)|_{E^s_x}\| \leq \lambda^n \text{ e } \|Df^{-n}(x)|_{E^u_x}\| \leq \lambda^n.$$

Além disso, a métrica pode ser tomada C^∞.

Para uma prova da proposição 1.1.2 ver [11] Teorema 1.1 sa Seção 7.3.1.

Proposição 1.1.3. *Seja Λ um conjunto hiperbólico para $f : U \to M$. As dimensões dos subespaços E^u_x e E^s_x são localmente constantes e estes subespaços variam continuamente com x.*

Demonstração. Seja dim$M = s$. Segue da Proposição 1.1.2 que para quaisquer $x \in \Lambda$, $\xi \in E^s_x$ e $n \geq 0$,

$$\|Df^n_x\xi\| \leq \lambda^n\|\xi\| \tag{1.1.1}$$

e estas desigualdades caracterizam o subespaço E^s_x. Seja Seja $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset M$ tal que $\lim_{m\to\infty} x_m = x$. Tomando subsequências se necessário podemos assumir que dim$E^s_{x_m}$ é igual a uma constante k e escolhemos uma base ortonormal $\left(\xi^{(1)}_m, \ldots, \xi^{(k)}_m\right)$ em cada $E^s_{x_m}$ tais que $\xi^{(i)}_m \to \xi^{(i)} \in T_xM$, $i = 1, \ldots, k$. Por continuidade da transformação Df^n, tomando o limite em m, as desigualdades (1.1.1) para $\xi = \xi^{(i)}_m$ implicam que

$$\|Df^n_x\xi^{(i)}\| \leq \lambda^n\|\xi^{(i)}\| = \lambda^n, \ \forall n \geq 1.$$

Assim $\xi^{(i)} \in E^s_x$, dim$E^s_x \geq k$ e, se definirmos $\lim_{m\to\infty} E^s_{x_m}$ como sendo o subespaço gerado por $\{\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(k)}\}$, $E^s_x \supset \lim_{m\to\infty} E^s_{x_m}$.

Analogamente, os vetores $\eta \in E_x^u$ são caracterizados pelas desigualdades

$$\|Df_x^{-n}\xi\| \leq \lambda^n \|\xi\|$$

para todo $n \geq 0$, e uma repetição do argumento anterior nos dá, com uma definição análoga para $\lim_{m\to\infty} E_{x_m}^u$,

$$E_x^u \supset \lim_{m\to\infty} E_{x_m}^u \text{ e } \dim E_x^u \geq s-k.$$

Isto implica que $E_x^s = \lim_{m\to\infty} E_{x_m}^s$, $E_x^u = \lim_{m\to\infty} E_{x_m}^u$. □

Como corolário da proposição 1.1.3 temos o seguinte resultado sobre transversalidade dos subespaços E_x^u e E_x^s.

Corolário 1.1.4. *Os subespaços E_x^s e E_x^u são uniformemente transversais, isto é, existe $\alpha_0 > 0$ tal que para quaisquer $x \in \Lambda$, $\xi \in E_x^s$, $\eta \in E_x^u$ o ângulo entre ξ e η é pelo menos α_0.*

Para uma demonstração do Corolário 1.1.4 ver [7] Corolário 6.4.5.

Teorema 1.1.5. *Seja p um ponto fixo hiperbólico para $f \in Dif^1(M)$. Então existe $\mathcal{U}(f)$ vizinhança de f na topologia C^1 tal que todo $g \in \mathcal{U}(f)$ possui um único ponto fixo hiperbólico p_g próximo de p. A p_g denominamos* continuação *de p.*

Uma prova do Teorema 1.1.5 pode ser vista em [11] Teorema 6.4.

Dados $x \in M$ e $\epsilon > 0$ defina

$$W_\epsilon^s(x,f) = \{y \in M : d\left(f^n(y), f^n(x)\right) \leq \epsilon, \forall n \geq 0\}$$

$$W_\epsilon^u(x,f) = \left\{y \in M : d\left(f^{-n}(y), f^{-n}(x)\right) \leq \epsilon, \forall n \geq 0\right\}.$$

Para simplificar a notação, quando a função f estiver subentendida, podemos escrever $W_\epsilon^s(x)$ e $W_\epsilon^u(x)$ no lugar de $W_\epsilon^s(x,f)$ e $W_\epsilon^u(x,f)$.

Teorema 1.1.6 (Teorema da Variedade Estável)**.** *Seja $f \in Dif^k(M)$ e $\Lambda \subset M$ conjunto hiperbólico para f. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que:*

(i) $W_\epsilon^s(x,f)$ é um disco C^k-mergulhado com mesma dimensão de E_x^s e

$$T_x\left(W_\epsilon^s(x,f)\right) = E_x^s$$

(ii) $W_\epsilon^s(x,f)$ varia continuamente, na topologia C^k, em x

(iii) $W^s(x,f) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}\left(W_\epsilon^s\left(f^n(x),f\right)\right)$ é uma subvariedade C^k-imersa e varia continuamente com x em compactos.

Para uma demonstração do Teorema 1.1.6 ver [7] Teorema 6.4.9, onde vemos também que existe um teorema análogo para $W^u_\epsilon(x,f)$. Neste caso definimos

$$W^u(x,f) = \bigcup_{n\geq 0} f^n\left(W^s_\epsilon\left(f^{-n}(x),f\right)\right).$$

Seja M uma variedade C^∞ fechada. Denote por d a distância em M induzida a partir de uma métrica Riemanniana sobre o fibrado tangente TM. Sejam $f \in Dif^1(M)$ e $Per(f)$ o conjunto de pontos periódicos de f. Denote por $\mathcal{O}_f(p)$, a f-órbita periódica de $p \in Per(f)$. Se $p \in Per(f)$ é uma sela hiperbólica com período $\pi(p) > 0$, então pelo Teorema da Variedade Estável (Teorema 1.1.6), aplicado a $\Lambda = \mathcal{O}_f(p)$ que é um conjunto hiperbólico, existem a variedade estável local $W^s_\epsilon(p)$ e a variedade instável local $W^u_\epsilon(p)$ de p para algum $\epsilon = \epsilon(p) > 0$. Por (iii) do Teorema da Variedade Estável, se $d(f^n(x), f^n(p)) \leq \epsilon$ para qualquer $n \geq 0$, então $x \in W^s(p)$ (uma propriedade semelhante vale também para $W^u(p)$ com respeito a f^{-1}). A variedade estável $W^s(p)$ de p é definida como no Teorema 1.1.6 e a variedade instável $W^u(p)$ de p é definido de modo análogo. A dimensão da variedade estável $W^s(p)$ é chamado às vezes o índice de p, e denotamos por ind(p). Seja p um ponto periódico para f com período k, definimos

$$W^u(\mathcal{O}_f(p)) := \bigcup_{n=0}^{k-1} W^u(f^n(p))$$

$$W^s(\mathcal{O}_f(p)) := \bigcup_{n=0}^{k-1} W^s(f^n(p)).$$

Proposição 1.1.7. *Seja Λ um conjunto hiperbólico para $f \in Dif^1(M)$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que para quaisquer $x, y \in \Lambda$ a interseção $W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y)$ consiste, no máximo de um ponto $[x,y]$ e existe $\delta > 0$ tal que sempre que $d(x,y) < \delta$ para alguns $x, y \in \Lambda$ temos $W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Suponha que existam $z_1, z_2 \in W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y)$ para todo $\epsilon > 0$. Pela definição temos

$$d(f^n(z_i) f^n(x)) < \epsilon \ \forall n \geq 0,\ i = 1,2$$

e

$$d(f^{-n}(z_i) f^{-n}(y)) < \epsilon \quad \forall n \geq 0, \quad i = 1,2.$$

Pela desigualdade triangular temos que

$$d(f^n(z_1), f^n(z_2)) < 2\epsilon$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ e para todo $\epsilon > 0$. Em particular para $n = 0$ temos que

$$d(z_1, z_2) < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ temos que $z_1 = z_2$. Portanto existe $\epsilon > 0$ tal que para quaisquer $x, y \in \Lambda$ a interseção $W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y)$ consiste, no máximo de um ponto.

Agora tome ϵ de maneira que valha o Teorema da variedade Estável. Temos que

$$T_x\left(W^s_\epsilon(x)\right) = E^s_x \text{ e } T_x\left(W^u_\epsilon(x)\right) = E^u_x.$$

Pela Proposição 1.1.3 tomando $\delta > 0$ suficientemente pequeno os subespaços E^u_x e E^u_y estarão próximos. Pelo Corolário 1.1.4 subespaços E^s_x e E^u_x são transversais, logo teremos que E^u_x e E^u_y também serão transversais se δ for suficientemente pequeno.

Assim $W^s_\epsilon(x)$ e $W^u_\epsilon(y)$ serão transversais e se $d(x, y) < \delta$ teremos que $W^u_\epsilon(y)$ é uma pequena perturbação de $W^u_\epsilon(x)$. Como $W^s(x)$ intersecta $W^u(x)$, temos pela transversalidade que $W^s_\epsilon(x)$ e $W^u_\epsilon(y)$ também se intersectam e esta interseção será apenas um ponto. □

Definição 1.1.8. Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto f-invariante compacto, e denotamos por $f|_\Lambda$ a restrição de f ao conjunto Λ. Seja $U \subset M$ uma vizinhança compacta de Λ, e ponha

$$\Lambda_f(U) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U).$$

Um conjunto Λ é *localmente maximal em* U se houver uma vizinhança compacta U de Λ tal que $\Lambda = \Lambda_f(U)$.

Uma propriedade técnica importante que segue da maximalidade local é a presença de uma *estrutura de produto local*: dizemos que um conjunto hiperbólico Λ tem uma estrutura de produto local se, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, os pontos de interseção dados pela Proposição 1.1.7 estão sempre contidos em Λ.

Proposição 1.1.9. *Um conjunto hiperbólico localmente maximal tem uma estrutura de produto local.*

Demonstração. Tomemos ϵ tal que a ϵ-vizinhança U de Λ satisfaz $\Lambda = \Lambda_f(U)$. Então todos os pontos $[x, y]$ obtidos na Proposição 1.1.7 estão em U e portanto em Λ. □

1.2 Especificação

Nesta seção falamos de sombreamento e apresentamos as definições de propriedade de especificação e propriedade de especificação C^1-estável.

Definição 1.2.1. Para $d > 0$, uma sequência de pontos $\{x_i\}_{i=j_1}^{j_2} \subset X$, com $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$ e $j_1 \leq j_2$, é chamada uma δ-*pseudo-órbita* de f se $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$ para todo $j_1 \leq i < j_2$, $i \in \mathbb{Z}$. Nós dizemos que f possui a *propriedade de sombreamento* se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer δ-*pseudo-órbita* $\{x_i\}_{i=j_1}^{j_2}$ de f, existe $y \in X$ satisfazendo $d(f^i(y), x_i) < \epsilon$ para todo $j_1 \leq i < j_2$, $i \in \mathbb{Z}$ (veja Figura 1.2.1).

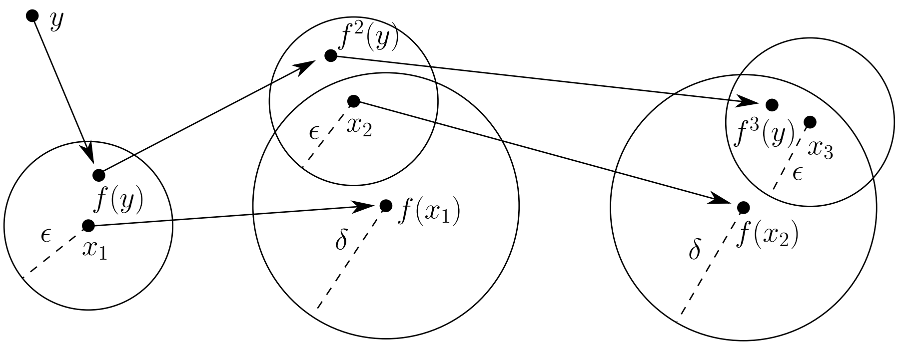

Figura 1.2.1: Propriedade de sombreamento

Teorema 1.2.2 (Lema de Sombreamento)**.** *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico para f. Dado $\epsilon > 0$, então existem $\eta, \delta > 0$ tais que se $\{x_i\}_{i=j_1}^{j_2}$ for uma δ-pseudo órbita para f com $d(x_i, \Lambda) < \eta$, então existe $y \in M$ com $d(y, \Lambda) < \eta$ tal que y ϵ-sombreia $\{x_i\}$. Ademais se $j_1 = -\infty$ e $j_2 = \infty$, então y é único.*

Para uma demonstração do Teorema 1.2.2 ver [11] Teorema 3.1 na Seção 9.3.

Definição 1.2.3. Seja (X, d) um espaço métrico compacto. Um homeomorfismo $f : X \to X$ satisfaz a *propriedade de especificação* se para qualquer $\epsilon > 0$ existe um inteiro $M = M(\epsilon) > 0$ tal que para qualquer $k \geq 2$, para todos os k pontos $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$, para quaisquer inteiros $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \cdots < a_k \leq b_k$ com $a_i - b_{i-1} \geq N$ para $2 \leq i \leq k$, existe um ponto $y \in X$ tal que $d(f^j(y), f^j(x_i)) \leq \epsilon$ para $a_i \leq j \leq b_i$, $1 \leq i \leq k$ (veja Figura 1.2.2). Além disso, se y pode ser tomando periódico com período q, para qualquer $q \geq M + b_m - a_1$, dizemos que f satisfaz a *propriedade de especificação forte.*

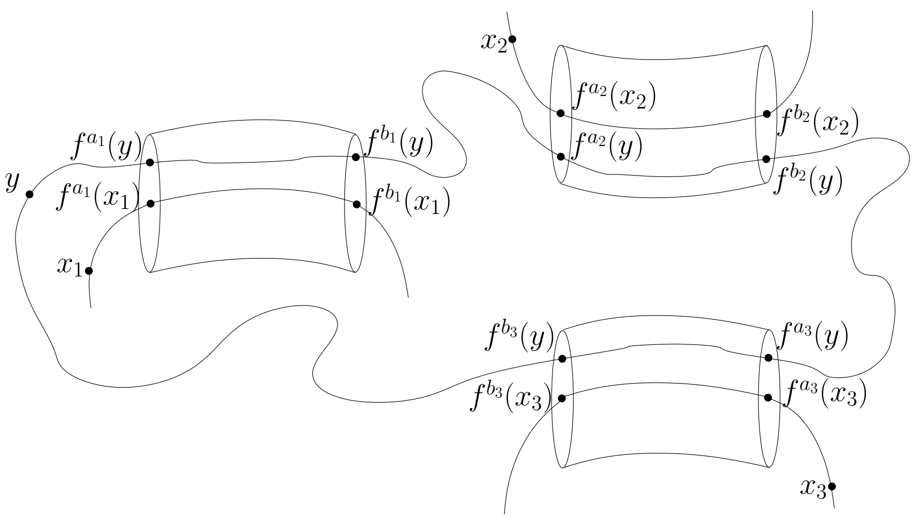

Figura 1.2.2: Propriedade de especificação

Em outras palavras, um homeomorfismo satisfaz a propriedade de especificação forte se é possível sombrear segmentos de órbitas, suficientemente espaçados, por uma órbita periódica com um erro pré-definido.

Exemplo 1.2.4. Considere a transformação de translação à esquerda σ definida no conjunto $\Sigma = \{1, 2, \ldots, r\}^{\mathbb{N}}$ que associa cada elemento $(x_n) \in \Sigma$ ao elemento $\sigma((x_n)) = (y_n) \in \Sigma$, onde $y_n = x_{n+1}$, ou seja, se $(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, então $\sigma((x_n)) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$, onde $x_i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$. A transformação σ é também conhecida como *shift unidimensional de r símbolos*. Considere a métrica em Σ dada por

$$d((x_n),(y_n)) = \begin{cases} 2^{-k} & \text{se } x_n = y_n \text{ para } 1 \leq n \leq k \text{ e } x_{k+1} \neq y_{k+1} \\ 0 & \text{se } x_n = y_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Podemos verificar que (Σ, d) é um espaço métrico. Vamos mostrar que σ possui a propriedade de especificação. De fato, seja $\epsilon > 0$, tome $M \in \mathbb{N}^*$ tal que $2^{-M} < \epsilon$. Para qualquer $k \geq 2$, dados k pontos $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \Sigma$ e dados quaisquer inteiros $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \cdots < a_k \leq b_k$ com $a_i - b_{i-1} \geq M$. Para facilitar vamos escrever cada x_i na forma

$$x_i = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{a_i}^i, \ldots, x_{b_i}^i, \ldots, x_{b_i+N}^i, \ldots).$$

Para construir o ponto y da propriedade de especificação pomos

$$y = (y_1, y_2, \ldots)$$

de modo que

$$y_n = x_n^i \text{ para } a_i \leq n \leq b_i + M.$$

Observe que desta forma a condição $d(\sigma^j(y), \sigma^j(x_i)) \leq \epsilon$ para $a_i \leq j \leq b_i$, $1 \leq i \leq k$ é satisfeita. Vamos verificar para $i = 1$, os outros casos são análogos. Temos que

$$\begin{aligned} \sigma^{a_1}(y) &= (y_{a_1+1}, y_{a_1+2}, \ldots) \\ &= (x_{a_1+1}^1, \ldots, x_{b_1}^1, \ldots, x_{b_1+M}^1, \ldots, \\ &\quad\ x_{a_2}^2, \ldots, x_{b_2}^2, \ldots, x_{b_2+M}^2, \ldots, \\ &\quad\ x_{a_k}^k, \ldots, x_{b_k}^k, \ldots, x_{b_k+M}^k, \ldots,) \end{aligned}$$

e ainda que

$$\sigma^{a_1}(x_1) = (x_{a_1+1}^1, \ldots, x_{b_1}^1, \ldots, x_{b_1+M}^1, \ldots,).$$

Assim temos as $b_1 + M - a_1$ primeiras entradas de $\sigma^{a_1}(y)$ e $\sigma^{a_1}(x_1)$ são iguais, portanto

$$d(\sigma^j(y), \sigma^j(x_1)) \leq 2^{-(b_1+M-a_1-j)} \leq 2^{-M} < \epsilon, \ \forall 0 \leq j \leq b_1 - a_1.$$

Repetindo este argumento para $x_2, \ldots, x_k$, vemos que y satisfaz $d(\sigma^j(y), \sigma^j(x_i)) \leq \epsilon$ para $a_i \leq j \leq b_i$, $1 \leq i \leq k$ e portanto σ satisfaz a propriedade de especificação.

Definição 1.2.5. Dizemos que f é *transitiva* se para quaisquer abertos não vazios $U, V \subset X$ existe um inteiro $N > 0$ tal que $f^N(U) \cap V \neq \emptyset$. E dizemos que f satisfaz a propriedade de *mistura topológica* (ou que f é *topologicamente misturadora*) se para quaisquer abertos não vazios $U, V \subset X$ existe um inteiro $N > 0$ tal que para qualquer $n \geq N$, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Uma condição equivalente a f ser transitiva é a existência de um ponto x cuja órbita por f, isto é, o conjunto $\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, é densa em X. De fato temos o seguinte resultado:

Proposição 1.2.6. *Seja X espaço métrico compacto, são equivalentes*

(a) $f : X \to X$ é transitiva

(b) existe $x \in X$ tal que $\mathcal{O}_f(x)$ é densa em X

(c) o conjunto $H = \{x \in X : \mathcal{O}_f(x)$ é densa em $X\}$ é um conjunto G_δ(interseção enumerável de abertos) denso em X

Demonstração. $(b) \Rightarrow (a)$: se $\mathcal{O}_f(x)$ é densa em X, e se $U, V \neq \emptyset$ são abertos em X, existe inteiros m, n tais que $f^n(x) \in U$ e $f^m(x) \in V$. Assim $f^{m-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.

$(c) \Rightarrow (b)$ é trivial.

$(a) \Rightarrow (c)$: Sejam $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma base enumerável de conjuntos abertos para X, e $E = X \backslash H$. Se $x \in E$, existe um B_j tal que $f^n(x)$ não pertence a B_j para todo $n \geq 1$. Assim

$$E = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}\left(X \backslash B_j\right).$$

Os conjuntos $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}\left(B_j\right)$ são abertos e densos em X, seus complementos $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}\left(X \backslash B_j\right)$ são fechados com interior vazio e, portanto, $X \backslash E$ é um conjunto G_δ denso. $\square$

Note que se f satisfaz a propriedade de especificação, então f é topologicamente misturadora. De fato, seja $f : X \to X$ satisfazendo a propriedade de especificação. Sejam $U, V \subset X$ abertos não vazios, $p \in U$ e $q \in V$. Tome $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $B_\epsilon(p) \subset U$ e $B_\epsilon(q) \subset V$. Temos que existe $N = N(\epsilon) > 0$, como na propriedade de especificação, e seja $n \geq N$ qualquer. Ponha $x_1 = p$, $x_2 \in f^{-n}(\{q\})$ (vamos supor que f é sobrejetiva, mas não necessariamente injetiva), $a_1 = b_1 = 0$ e $a_2 = b_2 = n$. Pela propriedade de especificação, existe $y \in X$ tal que

$$d(f^0(y), f^0(x_1)) = d(y, p) \leq \epsilon$$

e

$$d(f^n(y), f^n(x_2)) = d(f^n(y), q) \leq \epsilon,$$

ver Figura 1.2.3.

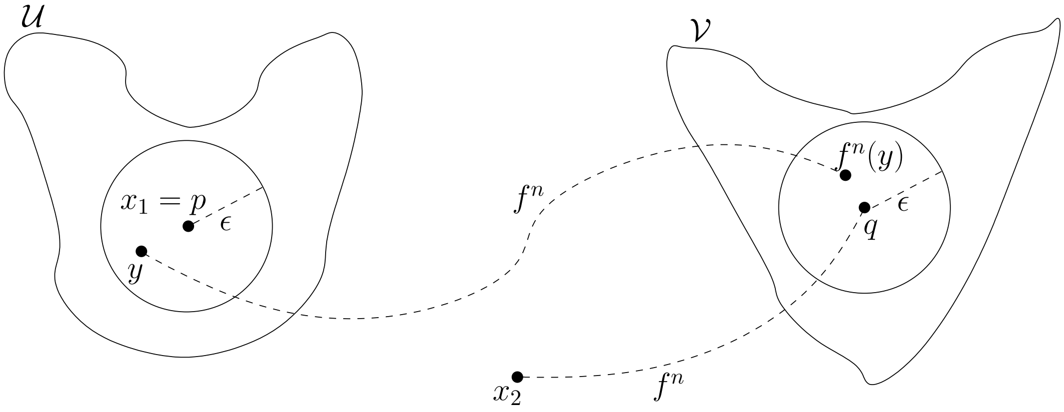

Figura 1.2.3: Propriedade de especificação implica em mistura topológica.

Logo temos que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ e, como n foi arbitrário, temos que f é topologicamente misturadora. É fácil ver que se f é topologicamente misturadora, então é transitiva.

Definição 1.2.7. Dizemos que $f|_{\Lambda_f(U)}$ satisfaz a *propriedade de especificação C^1-estável* se houver uma vizinhança compacta U de Λ e uma C^1-vizinhança $\mathcal{U}(f)$ de f tal que Λ é localmente maximal em U e para qualquer $g \in \mathcal{U}(f)$, $g|_{\Lambda_g(U)}$ satisfaz a propriedade de especificação. O conjunto

$$\Lambda_g(U) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} g^n(U).$$

é chamado a continuação de $\Lambda_f(U)$. No caso $\Lambda = M$, dizemos que f satisfaz a propriedade de especificação C^1-estável.

Um conjunto localmente maximal Λ é um conjunto básico (respectivamente conjunto elementar) se $f|_\Lambda$ é transitiva (respectivamente topologicamente misturadora). Claramente cada conjunto elementar é um conjunto básico.

Teorema 1.2.8 (Lema do Fecho de Anosov)**.** *Seja Λ um conjunto hiperbólico para $f : M \to M$ e $\Lambda \subset U$ vizinhança. Então existem uma vizinhança aberta $V \supset \Lambda$ e $C, \epsilon_0 > 0$ tais que para $0 < \epsilon < \epsilon_0$ e qualquer ϵ-pseudo-órbita periódica $(x_0, \ldots, x_m) \subset V$ existe um ponto $y \in U$ tal que $f^m(y) = y$ e $d(f^k(y), x_k) < C\epsilon$ para $k \in \{0, \ldots, m-1\}$.*

Para a demonstração do Teorema 1.2.8 ver [7] Teorema 6.4.15.

Dizemos que $x \in M$ é um ponto não-errante de $f \in Dif(M)$ se para toda vizinhança U de x existe $n \neq 0$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. O conjunto dos pontos não-errantes de f é denotado por $\Omega(f)$. O conjunto $Per(f)$ dos pontos periódicos de f está sempre contido em $\Omega(f)$. Dizemos que $f \in Dif(M)$ satisfaz o *Axioma A* se $\Omega(f)$ é hiperbólico e $\overline{Per(f)} = \Omega(f)$.

Teorema 1.2.9 (Decomposição espectral). *Sejam M uma variedade riemanniana, $U \subset M$ um aberto, $f : U \to M$ um difeomorfismo e $\Lambda \subset U$ um conjunto hiperbólico compacto localmente maximal para f. Então existem conjuntos fechados disjuntos $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ e uma permutação σ de $\{1, \ldots, m\}$ tal que $\Omega(f|_\Lambda) = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i$, $f(\Omega_i) = \Omega_{\sigma(i)}$ e quando $\sigma^k(i) = i$ a transformação $f^k|_{\Omega_i}$ é topologicamente misturadora.*

Para demonstração do Teorema 1.2.9 ver [7] Teorema 18.3.1.

Considere os conjuntos Ω_i dados pelo Teorema 1.2.9. Dizemos que f não tem ciclos se para cada família $\Omega_{i_1}, \ldots, \Omega_{i_n}$ tal que a variedade estável de Ω_{i_j} tem interseção não vazia com a variedade instável de $\Omega_{i_{j+1}}$ para todo $1 \leq j < n$, tem-se que a variedade estável de Ω_{i_n} não intersecta a variedade instável de Ω_{i_1}. A Figura 1.2.4 mostra um exemplo de um ciclo.

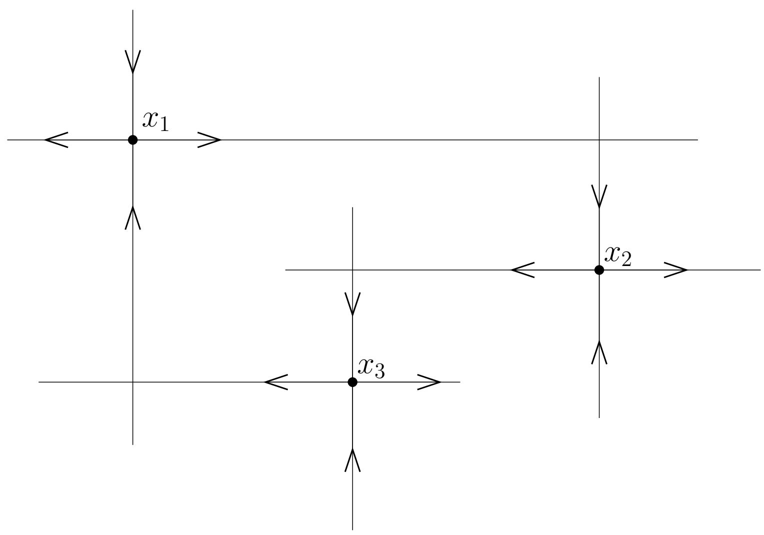

Figura 1.2.4: Exemplo de um 3-ciclo.

O seguinte resultado é um corolário do Teorema da Decomposição Espectral.

Corolário 1.2.10. *Seja Λ um conjunto hiperbólico compacto localmente maximal para f. Se $f|_\Lambda$ satisfaz a propriedade de mistura topológica, então os pontos periódicos de f são densos em Λ e a variedade instável de qualquer ponto periódico é densa em Λ.*

Para prova do Corolário 1.2.10 ver [7] Corolário 18.3.2.

Um difeomorfismo f é dito ser *Kupka-Smale* se os pontos periódicos de f são hiperbólicos, e se $p, q \in Per(f)$, então, $W^s(p)$ é transversal à $W^u(q)$. É bem conhecido que o conjunto de difeomorfismos Kupka-Smale é C^1-residual em $Dif^1(M)$ (ver [11] Teorema 1.1 da Seção 10.1).

1.3 Algumas noções de Topologia Diferencial

Nesta seção apresentamos algumas de Topologia Diferencial a serem utilizadas na demonstração da estabilidade de conjuntos hiperbólicos na Seção 2.1.

Sejam M uma variedade diferenciável e $\Lambda \subset M$. Definimos os seguintes conjuntos:

$$\Gamma(\Lambda) := \{X : \Lambda \to T_\Lambda M \text{ campos tais que } X(p) = (p, v_p), \text{ com } v_p \in T_p X\};$$

$$\Gamma^b(\Lambda) = \{\text{campos limitados em } \Gamma(\Lambda)\};$$

$$\Gamma^0(\Lambda) = \{\text{campos contínuos em } \Gamma(\Lambda)\}.$$

$\Gamma^b(\Lambda)$ e $\Gamma^0(\Lambda)$ são espaços vetoriais completos com a norma $\|\cdot\|_\infty$. Estes espaços de Banach modelam variedades de espaços de funções como definimos a seguir:

$$A(\Lambda) := \{F : \Lambda \to M \text{ transformação}\};$$

$$A^b(\Lambda) = \{F : \Lambda \to M \text{ transformação limitada}\};$$

$$A^0(\Lambda) = \{F : \Lambda \to M \text{ transformação contínua}\}.$$

Exemplo 1.3.1. Pondo $M = \mathbb{R}^n$. E considerando a carta global $\Phi : A^0(\Lambda) \to \Gamma^0(\Lambda)$ tal que $\Phi(F)(x) = F(x) - x$ (ou seja, uma função F define um campo X usando $F - id$).

Exemplo 1.3.2 (Caso geral)**.** Seja $(M, < \cdot, \cdot >)$ uma variedade Riemanniana. Temos que para todo $p \in M$ e todo $v \in T_pM$ existe uma única γ_v geodésica em M tal que $\gamma_v(0) = p$ e $\gamma_v'(0) = v$.

Defina a aplicação exponencial $\exp_p : T_pM \to M$, onde $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$, que é um difeomorfismo local em 0. Consideramos então a carta de $A^0(\Lambda)$ em $\Gamma^0(\Lambda)$ dada por $\Phi : A^0(\Lambda) \to \Gamma^0(\Lambda)$, com $\Phi(F) : \Lambda \to T_\Lambda M$ dada por $\Phi(F)(x) = (\exp_x)^{-1}(F(x))$, para todo $F \in A^0(\Lambda)$ e todo $x \in \Lambda$, que está bem definida caso F seja C^0-próxima da identidade i_Λ. Logo Φ é uma carta local na vizinhança de i_Λ.

Capítulo 2

Hiperbolicidade e Especificação

Neste capítulo apresentamos a prova do principal resultado deste trabalho, que diz que propriedade de especificação C^1-estável é equivalente a propriedade de mistura topológica mais hiperbolicidade. Na primeira seção apresentamos a prova de que conjuntos hiperbolicos são estruturalmente estáveis. Na segunda seção apresentamos a prova de que hiperbolicidade mais mistura topológica implicam em especificação. E na terceira seção apresentamos a prova feita em [12] de que propriedade de especificação C^1-estável implica em hiperbolicidade. As principais referências para os resultados apresentados neste capítulo foram [6], [7], [9] e [12].

2.1 Estabilidade de conjuntos hiperbólicos

Nesta seção mostraremos a estabilidade estrutural de conjuntos hiperbólicos.

Lema 2.1.1 (Lema de expansividade)**.** *Seja $\Lambda \subset M$ conjunto hiperbólico para $f \in Dif^1(M)$. Então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que, se $x \neq y$ então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $d\left(f^n(x), f^n(y)\right) > \epsilon_0$. A constante ϵ_0 é dita constante de expansividade de Λ.*

Demonstração. Utilizaremos o Lema de Sombreamento (Teorema 1.2.2). Seja $\epsilon > 0$ qualquer. Defina $\tilde{\delta} = \min\{\delta, \epsilon\}$, em que δ é dado pelo Lema de Sombreamento, vejamos que $\tilde{\delta}$ é uma constante de expansividade. Por absurdo, suponha que existam $x \neq y$ tais que $d(f^n(x), f^n(y)) < \tilde{\delta}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Portanto x sombreia a órbita de y. Como $\{f^n(y)\}_{j_1=-\infty}^{j_2=\infty}$ é uma δ-pseudo órbita, pelo Lema de Sombreamento existe um único ponto que a ϵ-acompanha. Mas y sombreia sua própria órbita, logo $x = y$. $\square$

Teorema 2.1.2 (Robustez de conjuntos hiperbólicos)**.** *Seja Λ conjunto hiperbólico para f. Então, existem U vizinhança de Λ e $\mathcal{U}(f) \subset Dif^1(M)$ vizinhança de f, tais que se $g \in \mathcal{U}(f)$ e $\Lambda_g \subset U$ é compacto g-invariante, então Λ_g é conjunto hiperbólico para g.*

Uma prova deste resultado pode ser vista em [7] Teorema 18.2.1.

Teorema 2.1.3 (Estabilidade de conjuntos hiperbólicos)**.** *Sejam $f \in Dif^k(M)$ e $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico para f. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $\mathcal{N} \subset Dif^k(M)$ vizinhança de f tal que: se $g \in \mathcal{N}$ existe $h_g : \Lambda \to M$ homeomorfismo sobre a imagem tal que*

$$\begin{cases} h_g \circ f = g \circ h_g \\ h_g \textit{ é } \epsilon\text{-}C^0\textit{-próxima da identidade} \\ \Lambda_g = h_g(\Lambda) \textit{ é conjunto hiperbólico.} \end{cases}$$

Λ_g é chamada de continuação hiperbólica de Λ.

Demonstração. Aqui iremos utilizar as definições feitas na Seção 1.3, mais precisamente com o caso geral apresentado no Exemplo 1.3.2. Como Λ é f-invariante, temos que $F : A^0(\Lambda) \to A^0(\Lambda)$, dada por $F(h) = f^{-1} \circ h \circ f$, com $h : \Lambda \to M$, tem i_Λ como ponto fixo. F é a candidata para buscar conjugações.

Vamos mostrar que F é de classe C^1 numa vizinhança de i_Λ. Para isso, consideramos então a carta de $A^0(\Lambda)$ em $\Gamma^0(\Lambda)$ dada por $\Phi : A^0(\Lambda) \to \Gamma^0(\Lambda)$, com $\Phi(G) : \Lambda \to T_\Lambda M$ dada por $\Phi(G)(x) = (\exp_x)^{-1}(G(x))$, para todo $G \in A^0(\Lambda)$ e todo $x \in \Lambda$, que está bem definida caso G seja C^0-próxima da identidade i_Λ. Desta forma temos que $\Phi^{-1} : \Gamma^0(\Lambda) \to A^0(\Lambda)$ dada por $\Phi^{-1}(H)(x) = \exp_x(H(x))$ está bem definida numa vizinhança da identidade i_Λ. Seja $\widetilde{F} : \Gamma^0(\Lambda) \to \Gamma^0(\Lambda)$, a composta dada por $\widetilde{F}(X)(x) = \Phi\left(F\left(\Phi^{-1}(X)\right)\right)(x)$ (ver figura 2.1.1).

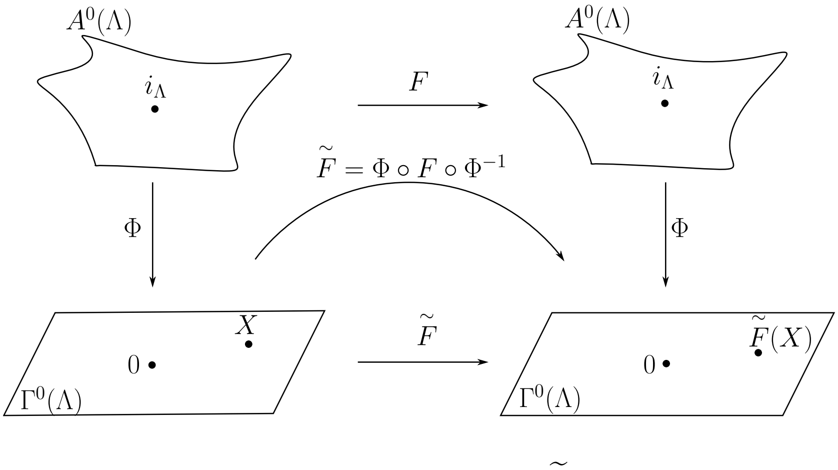

Figura 2.1.1: Função $\widetilde{F}$

Assim temos que

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(X)(x) &= \Phi\left(F\left(\Phi^{-1}(X(x))\right)\right) \\ &= \Phi\Big[f^{-1}\big[\Phi^{-1}\big(X\left(f(x)\right)\big)\big]\Big] \\ &= (\exp_x)^{-1}\Big[f^{-1}\big[\exp_x\big(X\left(f(x)\right)\big)\big]\Big] \end{aligned}$$

Como a transformação $(\exp_x)^{-1} \circ f^{-1} \circ \exp_x : \Gamma^0(\Lambda) \to \Gamma^0(\Lambda)$ é C^1, pois é composição de transformações C^1, temos que $\widetilde{F}$ é C^1, logo F é C^1.

Ademais, temos que $DF(i_\Lambda) : \Gamma^0(\Lambda) \to \Gamma^0(\Lambda)$, com

$$DF(i_\Lambda)(X)(x) = Df^{-1}\left(f(x)\right) \cdot X\left(f(x)\right) \in T_xM.$$

Afirmação 2.1.4. Λ é conjunto hiperbólico se, e somente se, i_Λ é ponto fixo hiperbólico para F.

Demonstração. (da Afirmação 2.1.4) Supondo que Λ é conjunto hiperbólico, temos que para todo $x \in \Lambda$ existe decomposição $T_xM = E^s_x \oplus E^u_x$, Df-invariante, com as propriedades de contração e expansão da definição de hiperbolicidade. Tome $\Gamma^0(\Lambda) = \Gamma^s(\Lambda) \oplus \Gamma^u(\Lambda)$, onde

$$\Gamma^s(\Lambda) = \left\{x \in \Gamma^0(\Lambda) : X(x) \in E^s_x, \, \forall x \in \Lambda\right\}$$

$$\Gamma^u(\Lambda) = \left\{x \in \Gamma^0(\Lambda) : X(x) \in E^u_x, \, \forall x \in \Lambda\right\}.$$

Assim sendo, se $X \in \Gamma^s(\Lambda)$ temos $DF(i_\Lambda) \cdot X \in \Gamma^s(\Lambda)$ e

$$\|DF(i_\Lambda) \cdot X(x)\| = \|Df^{-1}\left(f(x)\right) \cdot X\left(f(x)\right)\| \geq \lambda^{-1}\|X\left(f(x)\right)\|.$$

Analogamente, se $X \in \Gamma^u(\Lambda)$ então $DF(i_\Lambda) \cdot X \in \Gamma^u(\Lambda)$ e

$$\|DF(i_\Lambda) \cdot X(x)\| = \|Df^{-1}\left(f(x)\right) \cdot X\left(f(x)\right)\| \leq \lambda\|X\left(f(x)\right)\|.$$

Portanto, $\Gamma^s(\Lambda)$ é direção expansora para $DF(i_\Lambda)$ e $\Gamma^u(\Lambda)$ é direção contratora para $DF(i_\Lambda)$. Daí i_Λ é ponto fixo hiperbólico para F.

Suponhamos agora que i_Λ é ponto fixo hiperbólico para F. Definamos

$$E^s_x = \{X(x) : X \in \Gamma^u(\Lambda)\}$$

$$E^u_x = \{X(x) : X \in \Gamma^s(\Lambda)\}.$$

Seguindo a prova da parte anterior "de baixo para cima" concluímos a prova da afirmação. □

Continuamos agora a prova do Teorema. Pelo Teorema 1.1.5 aplicado a $F : A^0(\Lambda) \to A^0(\Lambda)$ no ponto fixo hiperbólico i_Λ, sabemos que existe $\hat{\mathcal{U}}$ vizinhança C^1 de f tal que, se $G \in \hat{\mathcal{U}}$, existe $g \in A^0(\Lambda)$ (único) ponto fixo hiperbólico para G C^0-próxima de i_Λ. Tome agora $F_g : A^0(\Lambda) \to A^0(\Lambda)$ tal que $F_g(h)(x) = g^{-1}\Big(h\big(f(x)\big)\Big)$.

Se g é C^k-próxima de f então F_g é C^k-próxima de F e podemos aplicar o anterior. Assim sendo, existe $\mathcal{U} = \text{viz}(f) \subset Dif^k(M)$ tal que, para todo $g \in \mathcal{U}$ existe único h_g C^0-próxima de i_Λ ponto fixo hiperbólico para F_g. Deste modo temos, $h_g \circ f|_\Lambda = g \circ h_g$ e como

Λ é compacto f-invariante, temos que $h_g(\Lambda)$ um compacto g-invariante, C^0-próximo a Λ. Assim pelo Teorema 2.1.2 temos que $\Lambda_g = h_g(\Lambda)$ é conjunto hiperbólico.

Falta provar que $h_g : \Lambda \to h_g(\Lambda)$ é homeomorfismo. De fato, como Λ é compacto e M é Hausdorff basta provar que h_g é bijeção. Como $h_g : \Lambda \to h_g(\Lambda)$ é claramente sobrejetiva, vejamos que é injetiva:

$$h_g = g^{-1} \circ h_g \circ f = g^{-n} \circ h_g \circ f^n,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Portanto

$$h_g(x) = h_g(y) \Leftrightarrow h_g\left(f^n(x)\right) = h_g\left(f^n(y)\right),$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Tome $\epsilon = \frac{\epsilon_0}{3}$, onde ϵ_0 é a constante de expansividade de f. Então, se h_g é ϵ-C^0-próxima da identidade temos que

$$\begin{aligned} d\left(f^n(x), f^n(y)\right) \leq d\left(f^n(x), h_g\left(f^n(x)\right)\right) + d\left(h_g\left(f^n(x)\right), h_g\left(f^n(y)\right)\right) + \\ + d\left(h_g\left(f^n(y)\right), f^n(y)\right) < \epsilon_0, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Mas isto implica que $x = y$. Logo h_g é homeomorfismo, o que completa a prova do Teorema. □

2.2 Hiperbolicidade e Especificação

Mostramos primeiro que num conjunto hiperbólico topologicamente misturadora todas as variedades instáveis são uniformemente densas.

Proposição 2.2.1. *Se Λ é um conjunto hiperbólico compacto localmente maximal para f e $f|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$ é topologicamente misturadora, então dado $\alpha > 0$ existe $N = N(\alpha) \in \mathbb{N}$ tal que para $x, y \in \Lambda$ e $n \geq N$ temos $f^n\left(W^u_\alpha(x)\right) \cap W^s_\alpha(y) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Relembramos que um conjunto Y num espaço métrico X é dito ϵ-denso se X é uma ϵ-vizinhança de Y, ou seja, se para todo $y \in Y$ existir $x \in X$ tal que $d(x, y) < \epsilon$. Pela Proposição 1.1.9, temos uma estrutura de produto local, isto é, existe $\delta^* > 0$ tal que $W^s_\delta(x) \cap W^u_\delta(y)$ consiste no máximo de um ponto quando $0 < \delta < \delta^*$, e uma função $\epsilon(\delta)$ tal que $d(x, y) < \epsilon(\delta) \Rightarrow W^s_\delta(x) \cap W^u_\delta(y) \neq \emptyset$. Seja $\delta := \min\{\delta^*, \alpha/2, \epsilon(\alpha/2)/4\}$. Para escolhermos N tomemos um conjunto $\epsilon(\alpha/2)/2$-denso $\{p_k | k = 1, \ldots, r\}$ de pontos periódicos (com período t_k). Pelo corolário 1.2.10, a variedade instável de cada ponto periódico em Λ é densa em Λ e portanto para todo k existe m_k tal que $f^{mt_k}\left(W^u_\delta(p_k)\right)$ é $\epsilon(\delta)$-denso para todo $m \geq m_k$. Seja $N = \prod_{k=1}^r m_k t_k$ e notemos que $f^N\left(W^u_\delta(p_k)\right)$ é $\epsilon(\delta)$-denso para todo o $k \in \{1, \ldots, r\}$.

Mostramos agora que N é como pretendido: para $x, y \in \Lambda$ tomemos j tal que $d(x, p_j) < \epsilon(\alpha/2)/2$, $z \in f^N\left(W_\delta^u(p_j)\right)$ tal que $d(y, z) \leq \epsilon(\delta)$ e $w \in W_\delta^u(z) \cap W_\delta^s(y)$ (ver figura 2.2.1). Então $f^{-N}(w) \in W_\delta^u\left(f^{-N}(z)\right) \subset W_{2\delta}^u(p_j) \subset W_{\epsilon(\alpha/2)/2}^u(p_j)$ e logo $d\left(f^{-N}(w), x\right) \leq \epsilon(\alpha/2)$, pela desigualdade triangular. Assim existe $v \in W_{\alpha/2}^s\left(f^{-N}(w)\right) \cap W_{\alpha/2}^u(x)$ e

$$f^N(v) \in f^N\left(W_{\alpha/2}^u(x)\right) \cap W_{\alpha/2}^s(w) \subset f^N\left(W_\alpha^u(x)\right) \cap W_\alpha^s(y) \neq \emptyset,$$

pois $\delta < \alpha/2$ (veja Figura 2.2.1).

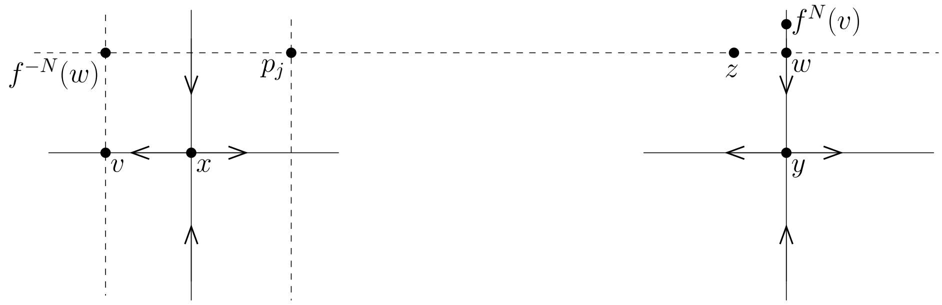

Figura 2.2.1: Densidade das variedades instáveis e estáveis.

Para $x, y \in \Lambda$, $n \geq N$ notemos que

$$f^n\left(W_\alpha^u(x)\right) \cap W_\alpha^s(y) \supset f^N\left(W_\alpha^u\left(f^{n-N}(x)\right)\right) \cap W_\alpha^s(y) \neq \emptyset.$$

O que termina a demonstração da Proposição. $\square$

Teorema 2.2.2 (Teorema de Especificação)**.** *Seja Λ um conjunto hiperbólico compacto localmente maximal para um difeomorfismo f e $f|_\Lambda$ é topologicamente misturadora. Então $f_{|\Lambda}$ possui a propriedade de especificação.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Pela Proposição 1.1.9 existe $\delta^* > 0$ tal que $W_\delta^s(x) \cap W_\delta^u(y)$ consiste no máximo de um ponto quando $0 < \delta < \delta^*$, e uma função $\epsilon(\delta)$ tal que

$$d(x, y) < \epsilon(\delta) \Rightarrow W_\delta^s(x) \cap W_\delta^u(y) \neq \emptyset.$$

Para $\beta \leq \min\{\epsilon, \delta^*\}$ e $\alpha = \beta/3$ tomamos o $N = N(\alpha)$ dado pela Proposição 2.2.1. Seja $M \geq N$ tal que $\lambda^M < 1/2$, onde λ é como na definição de hiperbolicidade (Definição 1.1.1). Considere m pontos quaisquer $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \Lambda$ e quaisquer inteiros

$$a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \cdots < a_m \leq b_m$$

tais que $a_i - b_{i-1} \geq M$ para $2 \leq i \leq m$. Seja $y_1 = x_1$ e definimos $y_2, y_3, \ldots, y_m$ do seguinte modo: dado y_k, pela Proposição 2.2.1 existe y_{k+1} tal que

$$f^{a_{k+1}}(y_{k+1}) \in f^{a_{k+1}-b_k}\left(W_\alpha^u\left(f^{b_k}(y_k)\right)\right) \cap W_\alpha^s\left(f^{a_{k+1}}(x_{k+1})\right),$$

pois $a_{k+1} - b_k \geq N$ por hipótese (ver figura 2.2.2).

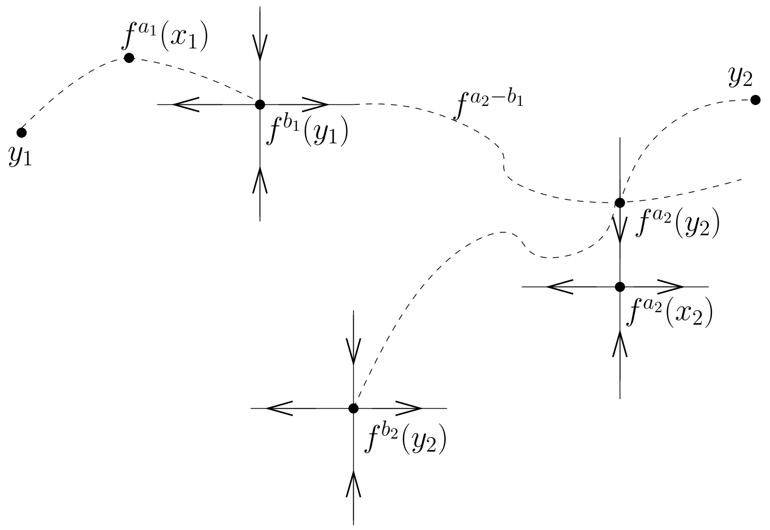

Figura 2.2.2: Construção dos pontos $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Para mostrar que a órbita de $y := y_m$ é como desejamos notamos que

$$d\left(f^n(y_k), f^n(x_k)\right) = d\left(f^n(y_k), f^{n-a_k}\left(f^{a_k}(x_k)\right)\right) \leq \alpha = \beta/3,$$

uma vez que por construção $f^{a_k}(y_k) \in W^s_\alpha\left(f^{a_k}(x_k)\right)$. Ficará então demonstrado o pretendido usando a desigualdade triangular assim que mostrarmos a seguinte:

Afirmação 2.2.3. $d\left(f^n(y), f^n(y_k)\right) \leq 2\beta/3$ para $a_k \leq n \leq b_k$, $k = 1, \ldots, m$.

Demonstração. (da Afirmação 2.2.3) Mostraremos que $f^{b_k}(y) \in W^u_{2\beta/3}\left(f^{b_k}(y_k)\right)$. Como

$$\sum \lambda^{Mj} < \sum (1/2)^j < 2$$

e $\alpha = \beta/3$, isto segue se tivermos

$$f^{b_k}(y_{k+r}) \in W^u_{\alpha+\alpha\lambda^M+\cdots+\alpha\lambda^{M(r-1)}}\left(f^{b_k}(y_k)\right).$$

Para $r = 1$ isto é válido por construção. Como $f^{b_{k+r}}(y_{k+r+1}) \in W^u_\alpha\left(f^{b_{k+r}}(y_{k+r})\right)$ e $b_{k+r} - b_k \geq rM$, temos $f^{b_k}(y_{k+r+1}) \in W^u_{\alpha\lambda^{Mr}}\left(f^{b_k}(y_{k+r})\right)$ e logo obtemos a afirmação por indução. □

Continuando a prova do Teorema 2.2.2, para mostrarmos que a órbita que sombreia pode ser tomada periódica assumimos que $\beta \leq \min\{\epsilon/2C, \epsilon, 2\delta^*\}/2$, onde C é como Lema do Fecho de Anosov (Teorema 1.2.8) e tomamos M correspondente como anteriormente. Seja $q \geq M + b_m - a_1$ o período desejado, vamos considerar mais um seguimento de órbita para sombrearmos juntamente com os m segmentos iniciais. Tome $x_{m+1} = x_1$, $a_{m+1} = a_1 + q$ e $b_{m+1} \geq a$ Obtemos assim um ponto $y' := f^{a_1}(y) \in \Lambda$ tal que

$$d\left(y', f^q(y')\right) \leq d\left(y', f^{a_1}(x_1)\right) + d\left(f^q(y'), f^{a_1}(x_1)\right) \leq \frac{\epsilon}{2C}$$

e portanto, pelo Lema do Fecho de Anosov, um ponto $z \in \Lambda$ com período q tal que $d\left(f^{n+a_1}(z), f^n(y')\right) < \epsilon/2$ para todo $0 \leq n \leq q$. O teorema segue da desigualdade triangular. $\square$

2.3 Robustez da propriedade de especificação

Nesta seção apresentamos o principal resultado demonstrado em [12].

Teorema A. Seja Λ um conjunto f-invariante fechado. Então $f|_{\Lambda_f(U)}$ satisfaz a propriedade de especificação C^1-estável se e somente se Λ é um conjunto elementar hiperbólico.

Definição 2.3.1. Sejam M uma variedade C^∞ fechada e $f \in Dif^1(M)$. Seja Λ um conjunto f-invariante fechado. Um conjunto $\Lambda_f(U)$ é robustamente transitivo se Λ é localmente maximal em U e existe uma C^1-vizinhança $\mathcal{U}(f)$ de f tal que para qualquer $g \in \mathcal{U}(f)$, $g|_{\Lambda_g(U)}$ é transitiva.

Lembre-se que cada sistema dinâmico satisfazendo a propriedade de especificação é transitivo. Observe neste ponto que não há poços e fontes para um homeomorfismo transitivo.

O seguinte resultado devido a Mañé [9] é utilizado na demonstração do Teorema A:

Teorema 2.3.2. *Seja $\Lambda_f(U)$ robustamente transitivo. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(1) existe uma C^1-vizinhança $\mathcal{U}(f)$ de f tal que para qualquer $g \in \mathcal{U}(f)$, qualquer ponto periódico de $\Lambda_g(U)$ é hiperbólico e tem o mesmo índice;

(2) existe uma C^1-vizinhança $\mathcal{U}(f)$ de f tal que para qualquer $g \in \mathcal{U}(f)$, $\Lambda_g(U)$ é hiperbólico.

Vamos explicar o resultado com mais precisão. Denote por $\Lambda_i(f)$ o fecho do conjunto de pontos periódicos hiperbólicos de f com índice i. Na verdade, é provado em [9, Teorema B] que se houver uma C^1-vizinhança $\mathcal{U}(f)$ de f tal que para qualquer $g \in \mathcal{U}(f)$, todos os pontos periódicos de g são hiperbólicos e $\Lambda_i(f) \cap \Lambda_j(f) = \emptyset$ para

$0 \leq i \neq j \leq \dim M$, então, f satisfaz tanto o Axioma A e a condição de não possuir ciclos. Como a prova é desenvolvida em uma vizinhança de $\bigcup_{i=0}^{\dim M} \Lambda_i(f)$, podemos ver que o resultado vale também para o nosso sistema dinâmico semi-local $f|_{\Lambda_f(U)}$. Assim, a afirmação (1) implica a afirmação (2) uma vez que $g|_{\Lambda_g(U)}$ é transitiva para todos g C^1-próxima de f.

Observe que a prova de que se Λ é um conjunto elementar hiperbólico então $f|_{\Lambda_f(U)}$ satisfaz a propriedade de especificação C^1-estável do Teorema A prontamente decorre da estabilidade local de um conjunto hiperbólico. Assim, para provar o Teorema 2.3, pelo Teorema 2.3.2, é suficiente mostrar a seguinte proposição, cuja demonstração será feita na próxima seção.

Proposição 2.3.3. *Se $f|_{\Lambda_f(U)}$ satisfaz a propriedade de especificação C^1-estável, então existe uma C^1-vizinhança $\mathcal{U}(f)$ de f tal que para qualquer $g \in \mathcal{U}(f)$, qualquer ponto periódico de $g|_{\Lambda_g(U)}$ é hiperbólico e tem o mesmo índice.*

2.3.1 Especificação robusta e índices de pontos periódicos

Provemos a Proposição 2.3.3, preparamos alguns lemas que precisamos. Nesta seção, sejam $f \in Dif^1(M)$ e Λ um conjunto f-invariante fechado.

Lema 2.3.4. *Sejam $p, q \in \Lambda \cap Per(f)$ selas hiperbólicas. Se $f|_\Lambda$ satisfaz a propriedade de especificação, então, $W^u(\mathcal{O}_f(p)) \cap W^s(\mathcal{O}_f(q)) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Sejam $p, q \in \Lambda \cap Per(f)$ selas hiperbólicas, e sejam $\epsilon(p)$ e $\epsilon(q) > 0$ como no Teorema da Variedade Estável para p e q, respectivamente. Fixe $\epsilon = \min\{\epsilon(p), \epsilon(q)\}$, e seja $N = N(\epsilon) > 0$ como na definição da propriedade de especificação aplicada a $f|_\Lambda$. Para qualquer $n \geq N$ definimos $x_1 = f^{-n}(p)$, $x_2 = f^{-N-n}(q)$, e colocamos $a_1 = 0$, $b_1 = n$, $a_2 = N + n$ e $b_2 = N + 2n$. Claramente, $a_2 - b_1 = N$. Como $f|_\Lambda$ satisfaz a propriedade de especificação, para qualquer $n \geq N$ existe $z_n \in \Lambda$ tal que

(i) $d(f^j(z_n), f^j(f^{-n}(p))) \leq \epsilon$ para $0 \leq j \leq n$,

(ii) $d(f^j(z_n), f^j(f^{-N-n}(q))) \leq \epsilon$ para $n \leq j \leq N + 2n$.

Em outras palavras, temos que z_n sombreia $f^{-n}(p)$ por n iterados e depois de N iterados sombreia $f^{-N-n}(q)$ também por n iterados.

O item (i) implica que

$$d(f^{-i}(f^n(z_n)), f^j(f^{-i}(p))) \leq \epsilon \text{ para } 0 \leq i \leq n$$

e (ii) implica que

$$d(f^i(f^N(f^n(z_n))), f^i(q)) \leq \epsilon \text{ para } 0 \leq i \leq n.$$

Ponha $w_n = f^n(z_n)$ e seja $w = \lim_{n\to\infty} w_n$, tomando uma subsequência se necessário (ver figura 2.3.1).

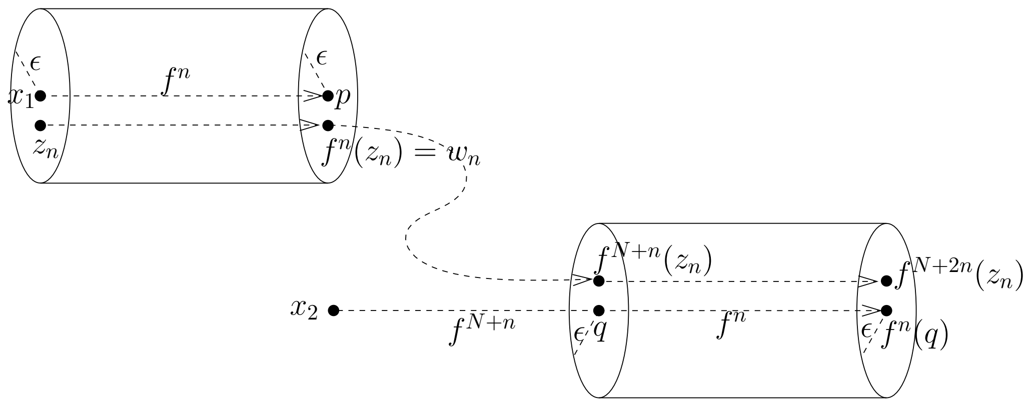

Figura 2.3.1: Construção da sequência w_n.

Então, uma vez que

$$d(f^{-i}(w_n), f^{-i}(p)) \leq \epsilon \leq \epsilon(p) \text{ e } d(f^i(f^N(w_n)), f^i(q)) \leq \epsilon \leq \epsilon(q)$$

para $0 \leq i \leq n$, como n foi tomado arbitrariamente, temos que $w \in W^u_{\epsilon(p)}(p) \subset W^u(p)$ e $f^N(w) \in W^s_{\epsilon(q)}(q)$, isto é, $w \in W^s(f^{-N}(q))$ (veja figura 2.3.2).

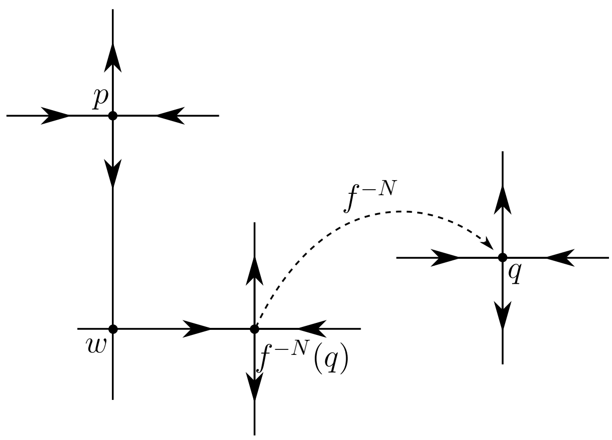

Figura 2.3.2: Interseção das variedades instável e estável de órbitas de selas hiperbólicas.

Daí

$$w \in W^u(p) \cap W^s(f^{-N}(q)) \subset W^u(\mathcal{O}_f(p)) \cap W^s(\mathcal{O}_f(q)).$$

□

O próximo Lema foi demonstrado em [12].

Lema 2.3.5. *Seja $f|_{\Lambda_f(U)}$ satisfazendo o propriedade de especificação C^1-estável, e seja $\mathcal{U}(f)$ uma C^1-vizinhança de f tal que para qualquer $g \in \mathcal{U}(f)$, $g|_{\Lambda_g(U)}$ satisfaz a propriedade de especificação. Então, para quaisquer selas hiperbólicas $p, q \in \Lambda_g(U) \cap Per(g)$, com $g \in \mathcal{U}(f)$, vale $ind(p) = ind(q)$.*

Demonstração. Seja $f|_{\Lambda_f(U)}$ satisfazendo a propriedade de especificação C^1-estável, e seja $\mathcal{U}(f)$ uma C^1-vizinhança de f tal que para qualquer $g \in \mathcal{U}(f)$, $g|_{\Lambda_g(U)}$ satisfaz a propriedade de especificação. Fixe $g \in \mathcal{U}(f)$ qualquer, e sejam $p, q \in \Lambda_g(U) \cap Per(g)$ selas hiperbólicas. Pelo Teorema 1.1.5 existe uma C^1-vizinhança $\mathcal{V}(g) \subset \mathcal{U}(f)$ de g tal que, para qualquer $\varphi \in \mathcal{V}(g)$, existem as continuações p_φ e q_φ (de p e q) em $\Lambda_\varphi(U)$, respectivamente. Note que como $\Lambda_f(U) = \Lambda \subset \operatorname{int} U$, podemos supor que $\Lambda_g(U) \subset \operatorname{int} U$ para qualquer $g \in \mathcal{U}(f)$, reduzindo $\mathcal{U}(f)$ se necessário.

A prova do lema é feita por contradição. Suponhamos que $\operatorname{ind}(p) < \operatorname{ind}(q)$, e, portanto, $\dim W^s(p, g) + \dim W^u(q, g) < \dim M$ (o outro caso é semelhante). Aqui $W^s(p, g)$ e $W^u(q, g)$ são as variedades estável e instável de p e q com respeito a g. Tome um difeomorfismo Kupka-Smale $\varphi \in \mathcal{V}(g)$, tal difeomorfismo existe, pois, como foi dito na Seção 1.2, tais difeomorfismos formam um conjunto residual em $Dif^1(M)$. Sejam p_φ e q_φ as continuações de p e q em $\Lambda_\varphi(U)$. Então, $W^s(p_\varphi, \varphi)$ e $W^u(q_\varphi, \varphi)$ são transversais, logo

$$W^s(p_\varphi, \varphi) \cap W^u(q_\varphi, \varphi) = \emptyset$$

visto que $\dim W^s(p, g) = \dim W^s(p_\varphi, \varphi)$ e $\dim W^u(q, g) = \dim W^u(q_\varphi, \varphi)$, pois φ é uma pequena perturbação de g. Por outro lado, uma vez que $\varphi \in \mathcal{U}(f)$, $\varphi|_{\Lambda_\varphi(U)}$ satisfaz a propriedade de especificação de maneira que $W^s(p_\varphi, \varphi) \cap W^u(q_\varphi, \varphi) \neq \emptyset$ pelo Lema 2.3.5. Esta é uma contradição. □

A existência de pontos periódicos não hiperbólicos de f facilmente nos dá dois pontos periódicos hiperbólicos com índices diferentes para alguma g C^1-próxima de f (ver Lema 2.3.7 abaixo). Para mostrar este fato usamos o seguinte resultado perturbativo na topologia C^1 conhecido como *Lema de Franks.*

Lema 2.3.6 (Franks, [6]). *Sejam M variedade compacta e $f : M \to M$ um difeomorfismo. Seja θ um conjunto finito de pontos em M, seja $Q = \bigoplus_{x\in\theta} T_x M$ e seja $Q' = \bigoplus_{x\in\theta} T_{f(x)} M$. Se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno e $G : Q \to Q'$ é um isomorfismo tal que $\|G - df\| < \dfrac{\epsilon}{10}$ então existe um difeomorfismo $g : M \to M$, ϵ-próximo de f na topologia C^1, tal que $dg_x = G|_{T_x M}$ para qualquer $x \in \theta$. Ademais se R é um conjunto compacto de M disjunto de θ, podemos exigir que $f(x) = g(x)$ para $x \in R$.*

Demonstração. Vamos assumir por simplicidade que a métrica Riemanniana em M vem de um mergulho $M \to \mathbb{R}^m$ e da métrica usual no $\mathbb{R}^m$. Seja exp a restrição a $Q \cup Q'$

da transformação exponencial de TM para M determinada pela métrica (exp sempre representa $\exp_x$ para algum $x \in \theta \cup f(\theta)$, esta notação facilitará a notação da derivada da transformação $\exp_x$). Seja R é um conjunto compacto de M disjunto de θ.

Agora escolhemos $\delta > 0$ satisfazendo as seguintes condições:

1. Se $\theta \cup f(\theta) = \{x_i\}_{i=1}^n$ e $\widehat{B}_i = \{v | v \in T_{x_i}M \text{ e } \|v\| \leq \delta\}$ então $\exp : \widehat{B}_i \to M$ é um mergulho, e se $B_i = \exp(\widehat{B}_i)$ então B_i e B_j são disjuntos quando $i \neq j$. Também fazemos δ tão pequeno que, para todo i, R é disjunto de B_i.

2. $\|\exp(v) - v\| < \dfrac{\epsilon}{10}$ se $v \in \widehat{B}_i$ (lembrando que $\|\cdot\|$ é a norma em $\mathbb{R}^m$ na qual M é mergulhada).

3. $\|d\exp_v\| < 1 + \dfrac{\epsilon}{10}$ se $v \in \widehat{B}_i$ e $\|d\exp_x^{-1}\| < 1 + \dfrac{\epsilon}{10}$ se $x \in B_i$.

4. $\widehat{f} : \widehat{B}_i \to Q'$ definida por $\widehat{f}(v) = \exp^{-1} \circ f \circ \exp(v)$ satisfaz $\|G(u) - \widehat{f}(u)\| < \dfrac{\epsilon}{10}\|u\|$ e $\|G(v) - d\widehat{f}_u(v)\| < \dfrac{\epsilon}{10}\|v\|$ quando $u \in \widehat{B}_i$ e $\widehat{B}_i \subset Q$ (isto é possível porque $df_{x_i} = d\widehat{f}_{x_i}$ e , $\|G - df_{x_i}\| < \dfrac{\epsilon}{10}$).

5. Se $K = \sup\limits_{x \in M} \|df_x\|$ então $\|d\exp_u - d\exp_v\| < \dfrac{\epsilon}{10K}$ se $u, v \in \widehat{B}_i$.

Escolhamos uma função σ C^∞ de valores reais tal que $0 \leq \sigma(x) \leq 1$, $\sigma(x) = 0$ se $|x| \geq \delta$, $\sigma(x) = 1$ se $|x| \leq \dfrac{\delta}{4}$, e $0 \leq \sigma'(x) < \dfrac{2}{\delta}$ para todo x. A Figura 2.3.3 nos dá uma ideia de como pode ser a função σ.

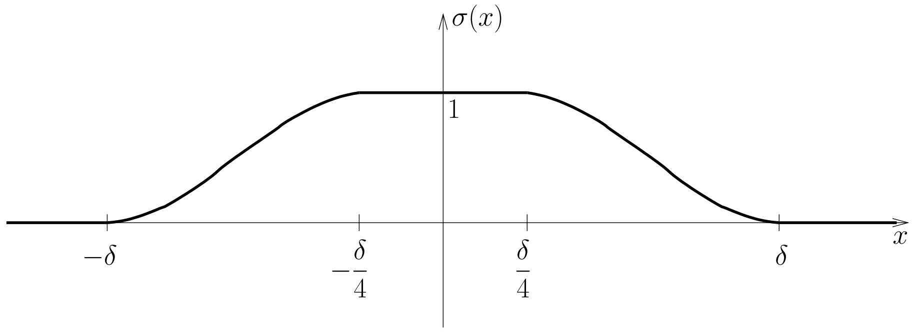

Figura 2.3.3: A função σ é dita ser do tipo função de relevo.

Seja $\rho : TM \to \mathbb{R}$ definida por $\rho(v) = \sigma(\|v\|)$. Definamos a função $\widehat{g} : \bigcup\limits_{x_i \in \theta} \widehat{B}_i \to TM$ por

$$\widehat{g}(v) = \rho(v)G(v) + (1 - \rho(v))\,\widehat{f}(v) \tag{2.3.1}$$

e definimos a função $g : M \to M$ por

$$g(x) = \exp \circ \widehat{g} \circ \exp^{-1}(x) \tag{2.3.2}$$

se $x \in \bigcup_{x_i \in \theta} B_i$ e $g(x) = f(x)$ caso contrário. Vamos mostrar que g é ϵ-próxima de f na topologia C^1.

Se $x \notin \bigcup_{x_i \in \theta} B_i$, $f(x) = g(x)$ e se $x \in \bigcup_{x_i \in \theta} B_i$, pela condição (2)

$$\begin{aligned}
\|f(x) - g(x)\| &= \|\exp \circ \widehat{f} \circ \exp^{-1}(x) - \exp \circ \widehat{g} \circ \exp^{-1}(x)\| \\
&= \|\exp \circ \widehat{f} \circ \exp^{-1}(x) - \widehat{f} \circ \exp^{-1}(x) + \widehat{f} \circ \exp^{-1}(x) \\
&\quad - \exp \circ \widehat{g} \circ \exp^{-1}(x) + \widehat{g} \circ \exp^{-1}(x) - \widehat{g} \circ \exp^{-1}(x)\| \\
&= \underbrace{\|\exp \circ \widehat{f} \circ \exp^{-1}(x) - \widehat{f} \circ \exp^{-1}(x)\|}_{<\epsilon/10} \\
&\quad + \underbrace{\|\exp \circ \widehat{g} \circ \exp^{-1}(x) + \widehat{g} \circ \exp^{-1}(x)\|}_{<\epsilon/10} \\
&\quad + \|\widehat{f} \circ \exp^{-1}(x) - \widehat{g} \circ \exp^{-1}(x)\| \\
&\leq \frac{\epsilon}{5} + \|\widehat{f} \circ \exp^{-1}(x) - \widehat{g} \circ \exp^{-1}(x)\|.
\end{aligned}$$

Assim, se $v = \exp^{-1}(x)$,

$$\begin{aligned}
\|f(x) - g(x)\| &= \frac{\epsilon}{5} + \|\widehat{f}(v) - \widehat{g}(v)\| \\
&= \frac{\epsilon}{5} + \|\widehat{f}(v) - \rho(v)G(v) - (1 - \rho(v))\, \hat{f}\| \\
&= \frac{\epsilon}{5} + \rho(v)\|\widehat{f}(v) - G(v)\| \\
&\leq \frac{\epsilon}{5} + \frac{\epsilon}{10}\|v\|\rho(v) < \epsilon \ \text{ (por (4))}.
\end{aligned}$$

Vamos agora checar a diferença das derivadas. Se $v \in \bigcup_{x \in \theta} \widehat{B}_i$,

$$d\widehat{g}_v(u) = \rho(v)G(u) + d\rho_v(u)G(v) + (1 - \rho(v))\, d\widehat{f}_v(u) - d\rho_v(u)\widehat{f}(v).$$

Então

$$\begin{aligned}
\|d\widehat{f}_v(u) - d\widehat{g}_v(u)\| &= \|\rho(v)\left(d\widehat{f}_v(u) - G(u)\right) + d\rho_v(u)\left(\widehat{f}(v) - G(v)\right)\| \\
&\leq \rho(v)\|d\widehat{f}_v(u) - G(u)\| + \|d\rho_v(u)\left(\widehat{f}(v) - G(v)\right)\|.
\end{aligned}$$

Se $\|v\| > \delta$, $\rho(v) = 0$; se $\|v\| \leq \delta$, por (4) temos

$$\|d\widehat{f}_v(u) - G(u)\| < \frac{\epsilon}{10}\|u\|.$$

Se $\|v\| \geq \delta$, $d\rho_v(u) = 0$; se $\|v\| < \delta$, $\|d\rho_v\| < \dfrac{2}{\delta}$ e

$$\|d\widehat{f}_v(u) - G(u)\| < \frac{\epsilon}{10}\|u\| < \frac{\epsilon\delta}{10}.$$

Assim

$$\left\|d\rho_v(u)\left(\widehat{f}(v) - G(v)\right)\right\| < \frac{2}{\delta}\frac{\epsilon\delta}{10}\|u\| = \frac{\epsilon}{5}\|u\|.$$

Portanto

$$\|d\widehat{f}_v(u) - d\widehat{g}_v(u)\| \leq \frac{\epsilon}{10}\|u\| + \frac{\epsilon}{5}\|u\| = \frac{3\epsilon}{10}\|u\|.$$

Sejam $y = \exp^{-1}(x)$, $z = \widehat{f}(y)$ e $w = \widehat{g}(y)$. Agora por (3) e (5)

$$\begin{aligned}
\|df_x(v) - dg_x(v)\| &= \|d\exp_z \circ d\widehat{f}_y \circ \exp_x^{-1}(v) - d\exp_w \circ d\widehat{g}_y \circ \exp_x^{-1}(v)\| \\
&\leq \|d\exp_z \circ d\widehat{f}_y \circ \exp_x^{-1}(v) - d\exp_w \circ d\widehat{f}_y \circ \exp_x^{-1}(v)\| \\
&\quad + \|d\exp_w \circ d\widehat{f}_y \circ \exp_x^{-1}(v) - d\exp_w \circ d\widehat{g}_y \circ \exp_x^{-1}(v)\| \\
&\leq \frac{\epsilon}{10K}K\|d\exp_x^{-1}(v)\| + \left(1 + \frac{\epsilon}{10}\right)\frac{3\epsilon}{10}\|d\exp_x^{-1}(v)\|.
\end{aligned}$$

Assim

$$\|df_x(v) - dg_x(v)\| \leq \left[\frac{\epsilon}{10} + \left(1 + \frac{\epsilon}{10}\right)\frac{3\epsilon}{10}\right]\left(1 + \frac{\epsilon}{10}\right)\|v\| < \epsilon\|v\|.$$

Deste modo encontramos uma função g C^1-próxima de f tal que $dg_x = G_{|T_xM}$ para qualquer $x \in \theta$ e $g(x) = f(x)$ para todo x fora de um compacto R disjunto de θ. O que encerra a demonstração do Lema. □

Note que na demonstração Lema 2.3.6 foi importante que a cota $\frac{2}{\delta}$ para a σ' fosse pequena. Um enunciado para o Lema 2.3.6 envolvendo topologia C^2 envolveria a segunda derivada de σ que teria uma cota ruim, já que δ é pequeno.

O próximo Lema foi demonstrado em [12].

Lema 2.3.7. *Seja Λ localmente maximal em U. Seja $\mathcal{U}(f)$ vizinhança de f dada e tome $g \in \mathcal{U}(f)$. Se $p \in \Lambda_g(U) \cap Per(g)$ não é hiperbólico, então existe $\varphi \in \mathcal{U}(f)$ possuindo pontos periódicos hiperbólicos q_1 e q_2 em $\Lambda_\varphi(U)$ com diferentes índices.*

Demonstração. Seja Λ localmente maximal em U, e seja $\mathcal{U}(f)$ uma C^1-vizinhança de f dada e tome $g \in \mathcal{U}(f)$ (observe que $\mathcal{U}(f)$ também é uma C^1-vizinhança de g). Suponha que $p \in \Lambda_g(U) \cap Per(g)$ não é hiperbólico. Mostramos que existe $\varphi \in \mathcal{U}(f)$ possuindo uma curva C^1 φ^k-invariante em U (para algum $k > 0$), cujos pontos extremos são ambos hiperbólicos com índices diferentes.

Afirmação 2.3.8. Com uma pequena modificação do mapa g com respeito à topologia C^1, podemos assumir que $Sp(D_pg^{\pi(p)}) \cap S^1 = \{\lambda, \overline{\lambda}\}$, onde $Sp(D_pg^{\pi(p)})$ é o conjunto dos autovalores de $D_pg^{\pi(p)}$ e S^1 é a esfera unitária em $\mathbb{C}$ (e, portanto, os outros autovalores de $D_pg^{\pi(p)}$ são com módulo inferior a 1 ou superior a 1).

Demonstração. (da Afirmação 2.3.8) De fato, como p é periódico de período $\pi(p)$, existe uma decomposição em autoespaços $T_pM = \bigoplus_{\gamma \in Sp(D_pg^{\pi(p)})} E(\gamma)$. Escreva

$$Sp(D_pg^{\pi(p)}) \cap S^1 = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}.$$

Sabemos que para um operador linear qualquer A, se $\gamma \in Sp(A)$ então $\overline{\gamma} \in Sp(A)$, então podemos assumir sem perda de generalidade que $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. Sejam $d, \epsilon > 0$ de modo que $0 < |1-\epsilon| \|D_{g^{\pi(p)-1}(p)} g\| < d$. Defina o operador $L : T_pM \to T_pM$ como

$$\begin{cases} L_{|\oplus_\gamma E(\gamma)} = D_{g^{\pi(p)-1}(p)} g & \text{com } \gamma \in Sp(D_p g^{\pi(p)}) \backslash \{\lambda_3, \dots, \lambda_k\} \\ L_{|\oplus_{\hat{\gamma}} E(\hat{\gamma})} = \epsilon \cdot D_{g^{\pi(p)-1}(p)} g & \text{com } \hat{\gamma} \in \{\lambda_3, \dots, \lambda_k\}. \end{cases}$$

É fácil ver que $\|L - D_{g^{\pi(p)-1}(p)} g\| = |1-\epsilon| \cdot \|D_{g^{\pi(p)-1}(p)} g\| < d$. Assim, se d é pequeno, podemos aplicar o Lema 2.3.6 a g no ponto $g^{\pi(p)-1}(p)$ e encontramos uma função $\tilde{g}$ próxima de g tal que $\tilde{g} = g$ fora de uma vizinhança U de $g^{\pi(p)-1}(p)$ e $D_{g^{\pi(p)-1}(p)} \tilde{g} = L$. Note que podemos tomar U de forma que $g^i(p) \notin U$ para $i \neq \pi(p) - 1$. Além disso temos que $\widetilde{g}^{\pi(p)-1}(p) = g^{\pi(p)-1}(p)$, logo

$$\tilde{g}\left(\widetilde{g}^{\pi(p)-1}(p)\right) = \tilde{g}\left(g^{\pi(p)-1}(p)\right) = g\left(g^{\pi(p)-1}(p)\right) = g^{\pi(p)}(p) = p.$$

Dado $v \in T_pM$, temos que

$$\begin{aligned} D_p \tilde{g}^{\pi(p)} \cdot v &= D_{\tilde{g}^{\pi(p)-1}(p)} \tilde{g} \cdot D_{\tilde{g}^{\pi(p)-2}(p)} \tilde{g} \cdot \ldots \cdot D_{\tilde{g}(p)} \tilde{g} \cdot D_p \tilde{g} \cdot v \\ &= L \cdot D_{g^{\pi(p)-2}(p)} g \cdot \ldots \cdot D_{g(p)} g \cdot D_p g \cdot v. \end{aligned}$$

Logo se $v \in E(\gamma)$ com $\gamma \in Sp(D_p g^{\pi(p)}) \backslash \{\lambda_3, \dots, \lambda_k\}$, temos que

$$\begin{aligned} D_p \tilde{g}^{\pi(p)} \cdot v &= L \cdot D_{g^{\pi(p)-2}(p)} g \cdot \ldots \cdot D_{g(p)} g \cdot D_p g \cdot v \\ &= D_{g^{\pi(p)-1}(p)} g \cdot D_{g^{\pi(p)-2}(p)} g \cdot \ldots \cdot D_{g(p)} g \circ D_p g \cdot v \\ &= \gamma v. \end{aligned}$$

E se $v \in E(\hat{\gamma})$ com $\hat{\gamma} \in \{\lambda_3, \dots, \lambda_k\}$, temos que

$$\begin{aligned} D_p \tilde{g}^{\pi(p)} \cdot v &= L \cdot D_{g^{\pi(p)-2}(p)} g \cdot \ldots \cdot D_{g(p)} g \circ D_p g \cdot v \\ &= \epsilon \cdot D_{g^{\pi(p)-1}(p)} g \cdot D_{g^{\pi(p)-2}(p)} g \cdot \ldots \cdot D_{g(p)} g \cdot D_p g \cdot v \\ &= \epsilon \hat{\gamma} v. \end{aligned}$$

Daí os únicos autovalores de $D_p \tilde{g}^{\pi(p)}$ com módulo igual a 1 são λ_1 e λ_2 e $\tilde{g}$ satisfaz a afirmação. Isto conclui a demonstração da Afirmação 2.3.8 $\square$

Observe que que se existir um autovalor real λ podemos concluir que $Sp(D_p g^{\pi(p)}) \cap S^1 = \{\lambda\}$, pois neste caso, $\lambda = \overline{\lambda}$.

Denote por E_p^s o autoespaço correspondente aos autovalores com módulo inferior a 1, por E_p^c o autoespaço correspondente a λ, e por E_p^u o autoespaço correspondente aos valores próprios com módulo maior do que 1. Desta forma $T_pM = E_p^s \oplus E_p^c \oplus E_p^u$.

Dividimos a prova em dois casos: dim $E_p^c = 1$, isto é, o autovalor λ é real; ou dim $E_p^c = 2$, isto é, o autovalor λ é complexo.

Caso 1. dim $E_p^c = 1$, isto é, o autovalor λ é real com módulo igual a 1.

Neste caso, supõe-se, ainda, que $\lambda = 1$ para simplicidade (o outro caso é semelhante). Então, pelo Lema 2.3.6, existem $\epsilon_0 > 0$ e $\varphi \in \mathcal{U}(f)$ de tal modo que $\varphi^{\pi(p)}(p) = g^{\pi(p)}(p) = p$ e

$$\varphi(x) = \exp_{g^{i+1}(p)} \circ D_{g^i(p)}g \circ \exp^{-1}_{g^i(p)}(x)$$

se $x \in B_{\epsilon_0}(g^i(p))$ para $0 \leq i \leq \pi(p) - 2$, e

$$\varphi(x) = \exp_p \circ D_{g^{\pi(p)-1}(p)}g \circ \exp^{-1}_{g^{\pi(p)-1}(p)}(x)$$

se $x \in B_{\epsilon_0}(g^{\pi(p)-1}(p))$.

Visto que o autovalor λ de $D_p g^{\pi(p)}_{|E_p^c}$ é 1, existe um pequeno arco $\mathcal{I}_p \subset B_{\epsilon_0}(p) \cap \exp_p\big(E_p^c(\epsilon_0)\big)$ contendo p tal que $\varphi^{\pi(p)}(\mathcal{I}_p) = \mathcal{I}_p$. Aqui $E_p^c(\epsilon_0)$ denota a ϵ_0-bola em E_p^c com centro na origem 0_p (ver figura 2.3.4).

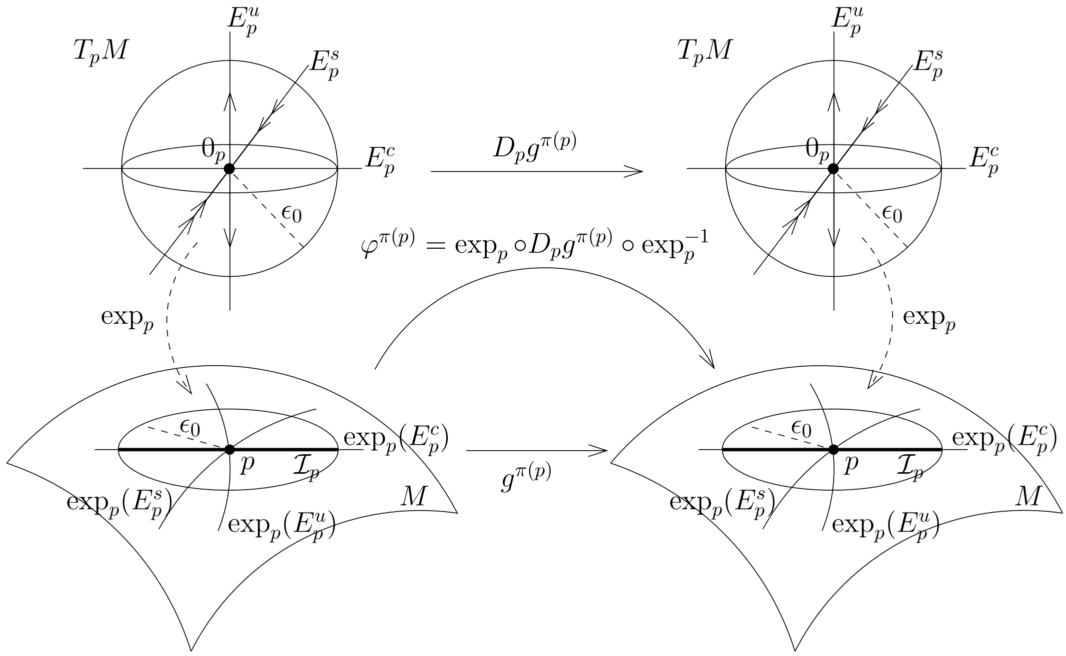

Figura 2.3.4: O intervalo $\mathcal{I}_p$ é deixado invariante por φ.

Podemos supor que $\mathcal{I}_p \subset \Lambda_\varphi(U)$, reduzindo tanto $\mathcal{U}(f)$ e ϵ_0, se necessário (observe que λ é localmente maximal). Denote por q_1 e q_2 os dois pontos extremos de $\mathcal{I}_p$. Observe que

$$D_{q_i}\varphi^{\pi(p)}_{|E_p^c} = D_p g^{\pi(p)}_{|E_p^c} = 1$$

para $i = 1, 2$. Assim, pelo Lema 2.3.6, com uma C^1-modificação do mapa φ nas extremidades, podemos ter que ambos os pontos são hiperbólicos com diferentes índices; isto é, $\mathrm{ind}(q_1) \neq \mathrm{ind}(q_2)$ em relação a φ.

Caso 2. $\dim E_p^c = 2$, e os autovalores correspondentes, são conjugados complexos, $\lambda, \overline{\lambda}$, com módulo igual a 1.

Afirmação 2.3.9. Com uma pequena modificação do mapa g, podemos supor que existe $l > 0$ (o número mínimo) tal que $D_p\left(g^{\pi(p)}\right)^l \cdot v = v$ para qualquer $v \in \exp_p^{-1}(B_{\epsilon_0}(p)) \cap E_p^c$.

Demonstração. (da Afirmação 2.3.9) De fato, seja $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal do subespaço $E(\lambda)$. Sabemos que existem $\tilde{\lambda}$ e l tais que, $\tilde{\lambda}^l = 1$ e o ângulo α entre λ e $\tilde{\lambda}$ na base base $\mathcal{B}$ é suficientemente pequeno de modo que, considerando a rotação R_α de ângulo α na direção do subespaço $E(\lambda)$ (estamos assumindo que $R_\alpha(\lambda) = \tilde{\lambda}$), temos que $\|D_{g^{\pi(p)-1}(p)}g - R_\alpha \cdot D_{g^{\pi(p)-1}(p)}g\| < d$, onde d é como no Lema 2.3.6 aplicado a g no ponto $g^{\pi(p)-1}(p)$. Assim aplicando o Lema 2.3.6 encontramos uma função $\tilde{g}$ próxima de g tal que $\tilde{g} = g$ fora de uma vizinhança U de $g^{\pi(p)-1}(p)$ (note que podemos tomar U de forma que $g^i(p) \notin U$ para $i \neq \pi(p) - 1$), $D_{g^{\pi(p)-1}(p)}\tilde{g} = R_\alpha \cdot D_{g^{\pi(p)-1}(p)}g$ e $\tilde{g}^{\pi(p)}(p) = p$. Assim temos que, dado v tal que $D_p g^{\pi(p)} \cdot v = \lambda v$,

$$\begin{aligned}
D_p\tilde{g}^{\pi(p)} \cdot v &= D_{\tilde{g}^{\pi(p)-1}(p)}\tilde{g} \cdot D_{\tilde{g}^{\pi(p)-2}(p)}\tilde{g} \cdot \ldots \cdot D_{\tilde{g}(p)}\tilde{g} \cdot D_p\tilde{g} \cdot v \\
&= R_\alpha \cdot D_{g^{\pi(p)-1}(p)}g \cdot D_{g^{\pi(p)-2}(p)}g \cdot \ldots \cdot D_{g(p)}g \cdot D_p g \cdot v \\
&= R_\alpha \cdot D_p g^{\pi(p)} \cdot v \\
&= R_\alpha \cdot \lambda v \\
&= \tilde{\lambda} v.
\end{aligned}$$

Dado $l \geq 0$ temos que $\left(\tilde{g}^{\pi(p)}\right)^l(p) = p$, daí

$$\begin{aligned}
D_p\left(\tilde{g}^{\pi(p)}\right)^l \cdot v &= D_{\left(\tilde{g}^{\pi(p)}\right)^{l-1}(p)}\tilde{g}^{\pi(p)} \cdot \ldots \cdot D_{\tilde{g}^{\pi(p)}(p)}\tilde{g}^{\pi(p)} \cdot D_p\tilde{g}^{\pi(p)} \cdot v \\
&= D_p\tilde{g}^{\pi(p)} \cdot \ldots \cdot D_p\tilde{g}^{\pi(p)} \cdot D_p\tilde{g}^{\pi(p)} \cdot v \\
&= \tilde{\lambda}^l v \\
&= v.
\end{aligned}$$

Assim podemos supor que existe $l > 0$ (o mínimo) tal que $D_p\left(g^{\pi(p)}\right)^l \cdot v = v$ para qualquer $v \in \exp_p^{-1}(B_{\epsilon_0}(p)) \cap E_p^c$. O que termina a demonstração da Afirmação 2.3.9. □

Note que se $\pi(p) > 1$, então p é um ponto fixo para $g^{\pi(p)}$. Portanto, na prova do segundo caso, para evitar complexidade notacional, consideramos apenas o caso $g(p) = p$. Tal como no primeiro caso, pelo Lema 2.3.6, existem $\epsilon_0 > 0$ e $\varphi \in \mathcal{U}(f)$ tais que $\varphi(p) = g(p) = p$ e

$$\varphi(x) = \exp_{g(p)} \circ D_p g \circ \exp_p^{-1}(x)$$

se $x \in B_{\epsilon_0}(p)$.

Tome $v_0 \in \exp_p^{-1}(B_{\epsilon_0}(p)) \cap E_p^c$ tal que $\|v_0\| = \dfrac{\epsilon_0}{4}$, e escreva

$$J_p = \exp_p\left(\{t \cdot v_0 : 1 \leq t \leq 1 + \frac{\epsilon_0}{4}\}\right).$$

Então, $J_p \subset \Lambda_\varphi(U)$ é um arco de tal modo que

- $\varphi^i(J_p) \cap \varphi^j(J_p) = \emptyset$ se $0 \leq i \neq j \leq l-1$ (ver figura 2.3.5),
- $\varphi^l(J_p) = J_p$ e $\varphi^l_{|J_p}$ é o mapa identidade.

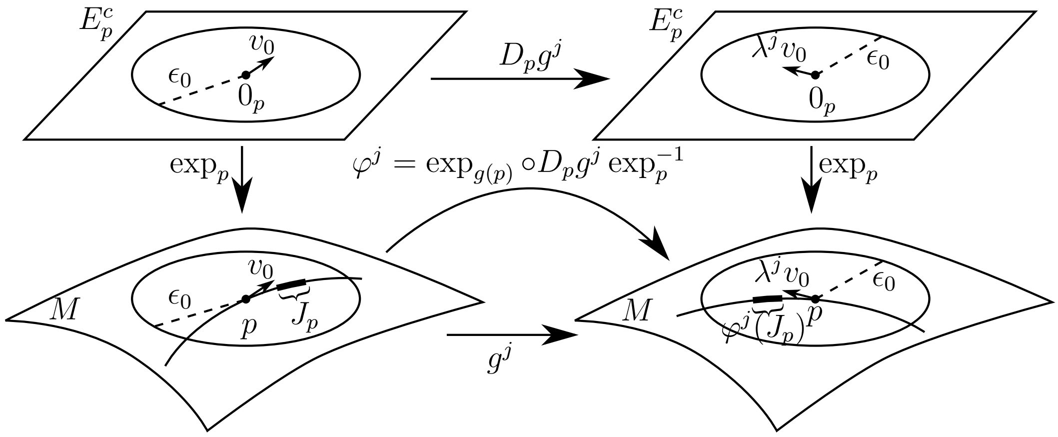

Figura 2.3.5: $\varphi^i(J_p) \cap \varphi^j(J_p) = \emptyset$ se $0 \leq i \neq j \leq l-1$.

Tal como no primeiro caso, com uma C^1-modificação do mapa nos pontos de extremidade q_1 e q_2 de J_p, temos que ambos os pontos são hiperbólicos com diferentes índices. Isto termina a demonstração do Lema 2.3.7 $\square$

Fim da prova da Proposição 2.3.3.

Seja $f|_{\Lambda_f(U)}$ satisfazendo a propriedade de especificação C^1-estável, e seja $\mathcal{U}(f)$ como em tal propriedade. Pelo Lema 2.3.5, para chegar à conclusão, é suficiente mostrar que todo $p \in \Lambda_g(U) \cap Per(g)$ $(g \in \mathcal{U}(f))$ é hiperbólico.

Por contradição, suponha que $p \in \Lambda_g(U) \cap Per(g)$ $(g \in \mathcal{U}(f))$ não é hiperbólico. Então, pelo Lema 2.3.7, existe $\varphi \in \mathcal{U}(f)$ possuindo pontos periódicos, hiperbólicos q_1 e q_2 em $\Lambda_\varphi(U)$ com diferentes índices, ou seja, $\text{ind}(q_1) \neq \text{ind}(q_2)$. Esta é uma contradição novamente por Lema 2.3.5 visto que $f|_{\Lambda_f(U)}$ satisfaz a propriedade de especificação C^1-estável.

Portanto todos os pontos periódicos são do mesmo índice. Isto finaliza a prova da proposição.

Capítulo 3

Resultados Recentes e Perspectivas Futuras

Neste capítulo comentamos a extensão do Teorema A para o caso não invertível e falamos sobre uma versão da propriedade de especificação sobre o ponto de vista da Teoria da Medida. Aqui utilizamos [10] e [13] como referências.

3.1 Caso Não Invertível

Em [10] é provado que o Teorema A também é válido para transformações C^1-regulares (transformações diferenciáveis não invertíveis cujas derivadas são sobrejetivas). Entretanto para transformações não invertíveis não podemos aplicar a mesma definição de hiperbolicidade que usamos para difeomorfismos. A exigência de subespaços estáveis e instáveis invariantes é muito forte. Mais precisamente, não se pode esperar que os subespaços instáveis se sejam transformados de maneira invariante, visto que pode haver vários pontos com mesma imagem. Desta forma estudando apenas difeomorfismos conseguimos entender bem a relação entre hiperbolicidade e propriedade de especificação.

Em [10] também é provado que existe um subconjunto residual $\mathcal{R}$ no espaço das transformações C^1-regulares munido da topologia C^1 tal que para $f \in \mathcal{R}$, $f|_\Lambda$ satisfaz a propriedade de especificação se e somente se Λ é um conjunto elementar hiperbólico.

3.2 Especificação Não-Uniforme

Sob o ponto de vista da Teoria da Medida, temos uma outra noção de especificação. Para X espaço métrico e $f : X \to X$, utilizaremos a seguinte notação

$$B_f(x, n, \epsilon) = \{y \in X : d(f^k(x), f^k(y)) < \epsilon \text{ com } 0 \leq k \leq n\}.$$

Definição 3.2.1. Dizemos que (f, μ) satisfaz a *propriedade de especificação não-uniforme* se existe δ tal que para μ-quase todo ponto x e todo $0 < \epsilon < \delta$ existe um inteiro $p(x, n, \epsilon) \geq 1$ satisfazendo

$$\lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{p(x, n, \epsilon)}{n} = 0$$

e assim vale o seguinte: dados pontos $x_1, \ldots, x_k$ em um conjunto de μ-medida total e inteiros positivos $n_1, \ldots, n_k$, se $p_i \geq p(x_i, n, \epsilon)$ então existe z que ϵ-sombreia as órbitas de cada x_i durante n_i iterados com um salto de tempo de $p(x_i, n, \epsilon)$ entre $f^{n_i}(x_i)$ e x_{i+1}, isto é

$$z \in B(x_1, n_1, \epsilon) \text{ e } f^{n_1+p_1+\cdots+n_{i-1}+p_{i-1}}(z) \in B(x_i, n_i, \epsilon)$$

para todo $2 \leq i \leq k$.

Em outras palavras, esta noção significa que quase todo pedaço finito de órbitas é aproximado por uma órbita tal que o intervalo de tempo entre dois pedaços consecutivos é uma proporção pequena do tamanho do pedaço de órbita sendo sombreado.

Um estudo da propriedade de especificação não-uniforme é feito em [13] para a obtenção de limites de grandes desvios superiores e inferiores.

Dizemos que f satisfaz a *propriedade de especificação C^1-robusta* se existe uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ de f tal que para todo $g \in \mathcal{U}$, toda medida de probabilidade g-invariante satisfaz a propriedade de especificação não-uniforme.

Neste contexto, a seguinte questão continua em aberto:

Questão. Se (f, μ) satisfaz a propriedade de especificação não-uniforme para toda medida μ f-invariante, então f satisfaz a propriedade de especificação?

Referências Bibliográficas

[1] A. M. Blokh. *The "spectral" decomposition for one-dimensional maps.* In Dynamics Reported, Dynam. Report. Expositions Dynam. Systems (N. S.), n^o. 4, (1995) 1-59. Springer, Berlin.

[2] R. Bowen, Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms, Trans. Amer. Math. Soc. 154 (1971), 377-397.

[3] J. Buzzi, *Specification on the interval*, Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), 2737-2754.

[4] M. Denker, C. Grillenberger and K. Sigmund, *Ergodic Theory on Compact Spaces*, Lecture Notes in Math. 527 (Springer-Verlag, Berlin, 1976).

[5] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*,AddisonWesley Studies in Nonlinearity, second edn, Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Redwood City, CA (1989)

[6] J. Franks, *Necessary conditions for stability of diffeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. 158 (1971), 301-308.

[7] A. B. Katok, B. Hasselblatt: *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press, 1995

[8] D. A. Lind, *Ergodic group automorphisms and specification*, Ergodic Theory (Proc. Conf., Math. Forschungsinst., Oberwolfach, 1978), 93-104, Lecture Notes in Math. 729 (Springer- Verlag, Berlin, 1979).

[9] R. Mañé, An ergodic closing lemma, *Annals of Math. (2)* 116 (1982), 503-540.

[10] K. Moriyasu, K. Sakai and K. Yamamoto, *Regular maps with the specification property*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 33 (2013), 2991-3009.

[11] C. Robinson, *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, 2nd ed., Studies in Advanced Mathematics (CRC Press, Boca Raton, FL, 1999).

[12] K. Sakai, N. Sumi and K. Yamamoto, *Difeomorphisms satisfying the specification property*, Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), 315-321.

[13] P. Varandas, *Non-uniform specification and large deviations for weak Gibbs measures*, Journal of Statistical Physics, 146 (2012), 330-358 .

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170 - 110
<http://www.pgmat.ufba.br>