UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

UMA EXTENSÃO DO CRITÉRIO DE KESTEN SOBRE AMENIDADE PARA CADEIAS DE MARKOV TOPOLÓGICAS

ELAINE FERREIRA ROCHA

Salvador-Bahia
Setembro de 2013

Uma extensão do critério de Kesten sobre amenidade para cadeias de Markov topológicas

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Manuel Stadlbauer.

Salvador-Bahia
Setembro de 2013

Rocha, Elaine Ferreira.
Uma extensão do critério de Kesten sobre amenidade para cadeias de Markov topológicas / Elaine Ferreira Rocha. – Salvador: UFBA, 2013.
Orientador: Prof. Dr. Manuel Stadlbauer.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2013.
Referências bibliográficas.
1. Sistemas dinâmicos. 2. Formalismo termodinâmico . I. Manuel Stadlbauer . II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.
CDU : 517.938

UMA EXTENSÃO DO CRITÉRIO DE KESTEN SOBRE AMENIDADE PARA CADEIAS DE MARKOV TOPOLÓGICAS

ELAINE FERREIRA ROCHA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 12 de setembro de 2013.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Manuel Stadlbauer (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Paulo César Rodrigues Pinto Varandas
UFBA

Prof. Dr. Albert Meads Fisher
USP

Aos meus pais e minha irmã.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Eliene e Floristano, e a minha irmã Laiane, pelo amor, apoio incondicional às minhas decisões e pela formação da pessoa que hoje sou.

Ao professor Manuel Stadlbauer pela orientação, disponibilidade e paciência. Aos professores Paulo Varandas e Albert Fisher por terem aceitado participar da comissão julgadora desta dissertação, em especial ao professor Paulo, pelo incentivo e ajuda prestada por todo o meu percurso durante o mestrado.

Agradeço aos meus amigos, pela ajuda prestada na elaboração deste ou de alguma forma no meu percurso nesses dois anos, dentre eles, Anderson, Andressa, Ângela, Alejandra, Edward, Felipe, Jacqueline, Kátia, Marcus, Mariana, Raimundo, Sara e aos meninos de Feira (Carol, Junilson e Diego). E de uma forma especial à Karina e Elen, pelo carinho, amizade, por sempre estarem junto, me ajudando e apoiando tanto com a matemática como com a vida, enfim, muitas vezes dando sentido ao meu sorriso.

Aos funcionários e professores do Departamento de Matemática da UFBA, pelo seu profissionalismo.

A todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão de mais esta etapa da minha vida.

Finalmente, a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos o teorema de Kesten sobre amenidade para caminhos aleatórios simétricos em grupos discretos e os resultados obtidos por Stadlbauer, que são uma extensão do Teorema de Kesten para extensão por grupo de Cadeias de Markov topológica. Vimos que sob hipóteses bem suaves sobre a continuidade e simetria do potencial associado, amenidade do grupo implica que a pressão de Gurevič da extensão e da base são iguais, por outro lado, basta que o potencial seja Hölder contínuo e a cadeia de Markov topológica tenha a propriedade de grandes imagens e pré-imagens para que a pressão de Gurevič e a base se coincidam impliquem na amenidade do grupo.

Palavras-chave: Amenidade; Cadeias de Markov topológica; Extensão por grupo; Formalismo termodinâmico; Operador de Ruelle; Pressão de Gurevič.

Abstract

In this work, we study Kesten's theorem on amenability for symmetric random walks on discrete groups and the results obtained by Stadlbauer, which are extension of Kesten's result to group extension of topological Markov chains. Under very mild assumptions about the continuity and symmetry of the potential, amenability of the group implies that the Gurevič pressure of the extension and the base are equal. On the other hand, if the potential is Hölder continuous, the topology of the Markov chain has the property of big images and pre-images and the Gurevič pressure coincide, then group is amenable.

Keywords: Amenability; Gurevič Pressure; Group extension; Thermodynamic formalism; Topological Markov chains; Ruelle operator.

Sumário

1 Introdução

Nesse trabalho serão estudados um teorema clássico da probabilidade, que é o teorema de Kesten que caracteriza grupos amenos, e os resultados obtidos por Stadlbauer [21] que são a extensão deste teorema para extensão por grupo de cadeias de Markov topológicas. O resultado obtido por Kesten [9] caracteriza amenidade em termos do raio espectral de um operador de Markov associado a um caminho aleatório simétrico. Mais precisamente, um grupo G enumerável é ameno se, e somente se, o raio espectral do operador agindo sobre $l^2(G)$ é igual a um.

Propriedades probabilísticas de caminhos aleatórios em grupos estão profundamente entrelaçadas com muitas características essencialmente algébricas, como exemplo, amenidade, crescimento exponencial, etc. A definição de grupo ameno surgiu aproximadamente em 1929, com Von Neumann, seguindo a qual G um grupo enumerável é ameno se existe uma probabilidade μ finitamente aditiva, tal que $\mu(G)$=1 e $\mu(Ag) = \mu(A)$, para cada $A \subset G$ e $g \in G$. Equivalentemente, Følner mostrou (ver [5]) que, para G enumerável, o grupo é ameno se existe uma sequência $(K_n : n \in \mathbb{N})$ de subconjuntos finitos de G com $\cup_{n=1}^{\infty} K_n = G$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} |gK_n \triangle K_n|/|K_n| = 0 \quad \forall g \in G,$$

onde $|.|$ refere-se a cardinalidade do conjunto e Δ a diferença simétrica.

Os principais resultados do artigo [21], objeto principal de estudo, foram estender o Teorema de Kesten para extensões por grupo, substituindo afirmações sobre o raio espectral por afirmações sobre a pressão de Gurevič.

Aqui, consideramos extensões por grupos de uma cadeia de Markov topológica para uma dada função potencial (ver capítulo 2), isto é, para uma cadeia de Markov topológica (Σ_A, θ), um potencial $\varphi : \Sigma_A \to (0,\infty)$ e uma aplicação $\psi : \Sigma_A \to H$ de Σ_A para um grupo discreto H. A extensão por grupo de $(\Sigma_A, \theta, \varphi)$ por ψ é definido por

$$T : \Sigma_A \times H \to \Sigma_A \times H, (x,g) \mapsto (\theta(x), g\psi(x)),$$

e o potencial elevado definido por $\hat{\varphi} : \Sigma_A \times H \to \mathbb{R}, (x,g) \mapsto \varphi(x)$, em que é assumido ao longo que ψ é constante nos estados I de Σ_A. Este, em seguida dá origem a uma noção natural de simetria através da existência de uma involução $\iota : I \to I$ tal que $\psi([\iota w]) = \psi([w])^{-1}$ para todo $w \in I$, onde $[w]$ refere-se ao cilindro associado a $w \in I$. Esta involução estende-se a palavras finitas, que leva ao conceito de um potencial simétrico fraco se existe uma sequência (D_n) com $\lim_n D_n^{1/n} = 1$ tal que

$$\sup_{x\in[w], y\in[\iota w]} \frac{\prod_{j=0}^{n-1}(\varphi \circ \theta^j(x))}{\prod_{j=0}^{n-1}(\varphi \circ \theta^j(y))} \le D_n,$$

para todo $w \in I^n$, com I^n referindo-se às palavras de comprimento n. Estes conceitos podem ser encontrados em [1],[14],[20],[12]. A definição de pressão de Gurevič foi definida por Sarig [18], como sendo

$$P_G(T) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{x\in[w],T^n(x,g)=(x,g)} \varphi(x)\cdot\varphi(\theta x)\cdots\varphi(\theta^{n-1}x).$$

O primeiro resultado, o Teorema 3.1, basicamente indica que, quando o potencial é fracamente simétrico e o grupo é ameno, então $P_G(T) = P_G(\theta)$. Este resultado é uma consequência do Teorema de Kesten, uma vez que as hipóteses dão origem a uma construção de operadores autoadjuntos P_n em $l^2(G)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, cujo raio espectral são igual a $e^{P_G(\theta)}$, como uma consequência do Teorema de Kesten e a amenidade de G. O segundo resultado, o Teorema 3.6, exige hipóteses mais complexas, que o potencial seja Hölder contínuo e somável e que θ tenha a propriedade de grandes imagens e pré-imagens, mas vale notar que a extensão não precisa ser simétrica. Daí, temos que $P_G(T) = P_G(\theta)$ implica que G é ameno. A prova é inspirada por um argumento de Day em [4] e se baseia numa análise cuidadosa da ação do operador de Ruelle sobre um mergulho de $l^2(G)$ em um determinado subespaço de $C(\Sigma_A \times G)$.

O presente trabalho foi dividido em duas partes. O capítulo 2, apresentamos alguns resultados introdutórios sobre à teoria da probabilidade, cadeias de Markov e em particular, caminhos aleatórios sobre grupos, para então enunciarmos e demonstrarmos o teorema clássico de Kesten. No capítulo 3, baseado no artigo [21], faremos algumas definições sobre cadeias de Markov topológicas e a extensão por grupo de cadeias de Markov topológicas, em seguida, a apresentação dos dois resultados que são a extensão do Teorema de Kesten. Por fim, estudamos uma outra versão do primeiro resultado do Teorema de Stadlbauer (teorema 3.1), baseado no artigo de Jaerisch [13].

2 Teorema de Kesten sobre amenidade

Nesse capítulo serão apresentados algumas definições e resultados com respeito à teoria da probabilidade, com o objetivo de definir um processo estocástico, para que dessa forma possamos definir uma cadeia de Markov e daí uma classe especial, que são os caminhos aleatórios sobre grupos. O objetivo principal deste capítulo é apresentar o clássico teorema de Kesten que caracteriza grupos ameno e demonstrá-lo.

2.1 Introdução à teoria da probabilidade

Nesta seção serão introduzidos os conceitos matemáticos necessários para definir um espaço de probabilidade, uma variável aleatória e então a definição de um processo estocástico.

Definição 2.1. Um *espaço mensurável* é um conjunto munido com uma σ-álgebra $\mathscr{F}$. Seja $A \in \mathscr{F}$, dizemos que $\mathscr{F}$ é uma σ-álgebra se satisfaz:

i) se $A \in \mathscr{F}$, então $A^c \in \mathscr{F}$

ii) se $A_i \in \mathscr{F}$, uma sequência de conjuntos enumeráveis, então $\cup_i A_i \in \mathscr{F}$.

Definição 2.2. Chamamos de *medida finitamente aditiva* qualquer função $\mu : S \to \mathbb{R}$ (ou na reta estendida $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) de uma σ-álgebra S tal que $\mu(\oslash) = 0$ e sempre que tenhamos $S_j \in S, 1 \leq j \leq n$ disjuntos tais que $\sum_{j=1}^{n} S_j$ também pertença a S, então vale

$$\mu\left(\sum_{j=1}^{n} S_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(S_j).$$

μ é dita *medida sigma-aditiva* se n acima puder ser ∞. Se temos $\mu : S \to [0, +\infty]$, μ é dita *medida positiva*.

Definição 2.3. Um *espaço de probabilidade* é uma tripla $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, onde Ω é o espaço qualquer, $\mathscr{F}$ é uma sigma-álgebra, e P é uma função que atribui probabilidades aos elementos de $\mathscr{F}$, isto é, P é uma medida positiva com $P(\Omega) = 1$.

Dizemos que dois eventos A e B são independentes quando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, ou seja, dois eventos são independentes entre si quando a probabilidade de que os dois aconteçam simultaneamente é igual ao produto das probabilidades de que cada um deles aconteça.

Definição 2.4. Dados dois eventos A e B, com $P(B) > 0$, definimos a *probabilidade condicional* de A dado B por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Note que se os eventos A e B são independentes, então $P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$. Ou seja, a ocorrência de B não altera a chance de ocorrência de A.

Uma *variável aleatória* é uma função mensurável $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Definição 2.5. Um *processo estocástico* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma coleção de variáveis aleatórias tal que $w \mapsto (X_n(w) : n \in \mathbb{N})$ é mensurável em relação a σ-álgebra $\mathscr{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

X_n representa o estado do processo no tempo n. Como $\mathbb{N}$ é um conjunto enumerável, então $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dito um processo estocástico discreto no tempo.

No presente trabalho, veremos somente um processo estocástico em tempo discreto. O espaço de estados de um processo estocástico é definido como o conjunto de todos os valores possíveis que a variável aleatória X_n pode assumir. O espaço de estados será representado por E.

Portanto, um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias que descreve a evolução de algum processo através do tempo.

Definição 2.6. Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um processo estocástico. Uma *distribuição marginal de* $X_1,\cdots,X_n$ se define como $P(X_1 \in A_1,\ldots,X_n \in A_n) = P(\cap_{i=1}^{n} X_i^{-1}(A_i))$.

Vamos definir uma medida μ por $\mu(B) := P(X_1 \in A_1,\ldots,X_{n-1} \in A_{n-1}, X_n \in B)$ com $B \in \mathscr{F}$. Uma pergunta natural a se fazer é se esta medida μ existe, e a resposta é sim se X_n é um processo estocástico, pois $\mu(B) = P(\cap_{i=1}^{n-1} X_i^{-1}(A_i) \cap X_n^{-1}B)$. Temos um teorema o qual afirma o inverso, ou seja, se a medida μ existe, então existe o processo estocástico.

Teorema 2.1 (Extensão de Tulcea)**.** *Seja X espaço discreto e $\mathscr{P}(X)$ as partes de X. Considere uma sequência arbitrária de espaços mensuráveis, o espaço $\Omega = \prod_{n=0}^{\infty} X_n$ e $\mathscr{F} = \otimes_{n=0}^{\infty} \mathscr{P}_n(X)$, $n \in \mathbb{N}$, o correspondente espaço produto e o produto direto de σ-álgebras. Seja $\mu(B) = P(\cap_{i=1}^{n-1} X_i^{-1}(A_i) \cap X_n^{-1}B)$ uma medida de probabilidade em $\mathscr{P}_n(X)$, então temos que existe e é único o processo estocástico.*

A demonstração pode ser encontrada em [2]. Este teorema é um caso especial onde o tempo é discreto, podemos ter um teorema ao qual generaliza este, que é o teorema da extensão de Kolmogorov, no qual pode ser encontrado na mesma referência [2].

2.2 Cadeias de Markov

Uma cadeia de Markov (ou processo de Markov) é um caso particular de processo estocástico com estados discretos e apresenta a propriedade Markoviana (ver equação 1), que é chamada assim em homenagem ao matemático Andrei Andreyevich Markov. Esta propriedade também é chamada de memória markoviana, pois os estados anteriores são irrelevantes para a predição dos estados seguintes, desde que o estado atual seja conhecido. Assim, vejamos a definição formal:

Definição 2.7. Uma *cadeia de Markov* é um processo estocástico $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com o tempo discreto, $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$, no qual o espaço de estados E é finito ou enumerável e que possui a propriedade de Markov (ou propriedade markoviana),

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i_n), \tag{1}$$

para todos os estados $i_0,\ldots,i_n, j$ e todo instante n. Se $X_n = i$ dizemos que o processo no instante n está no estado i.

Aqui, com o Teorema de extensão de Tulcea, podemos garantir que tal processo estocástico existe e é unicamente determinado.

Uma interpretação para a equação (1) é dizer que o estado futuro do processo, $X_{n+1} = j$ não depende do passado, $X_0 = i_0,\ldots,X_{n-1} = i_{n-1}$, e somente depende do presente, $X_n = i_n$. A probabilidade condicional (1) é chamada de probabilidade de transição. Vamos restringir o nosso estudo às cadeias de Markov homogêneas, isto é, aquelas cadeias nas quais a equação (1) não depende do tempo n, ou seja,

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_1 = j | X_0 = i) = P_{i,j}, \text{ com } i, j \in E.$$

Logo $P_{i,j}$ é a probabilidade de passar em qualquer instante, do estado i ao estado j. Uma maneira simples de visualizar um tipo específico de cadeia de Markov é através de um automato finito. Se estamos no estado i no tempo n, então a probabilidade de que nos movamos para o estado j no tempo $n+1$ não depende de n, e somente depende do estado atual i em que estamos. Assim, em qualquer tempo n, uma cadeia de Markov finita pode ser caracterizada por uma matriz de probabilidades cujo elemento (i,j) é dado por $P(X_{n+1} = j|X_n = i)$ e é independente do tempo n.

Estas probabilidades de transição $P_{i,j}$ são normalmente agrupadas numa matriz P, que denominamos *matriz de transição*. Se E é finito, por exemplo, $E = \{0,1,\dots,N\}$, então:

$$P = \begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & \dots & P_{0,N} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & \dots & P_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{N,0} & \dots & \dots & P_{N,N} \end{pmatrix}$$

Se E é infinito, por exemplo, $E = \{0,1,2,\dots\}$, então a matriz P será infinita:

$$P = \begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & \dots \\ P_{1,0} & P_{1,1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Dizemos que uma matriz $P = (P_{i,j})_{i,j\in E}$ é uma *matriz estocástica* se $P_{i,j} \geq 0$, para todos $i,j \in E$ e para todo $i \in E$, $\sum_{j\in E} P_{i,j} = 1$. Ou seja, todas as entradas de uma matriz estocástica são não negativas e qualquer linha tem a soma um. Note que toda matriz de transição é uma matriz estocástica. De fato, a primeira condição corresponde que as entradas são valores de probabilidade e a segunda condição, que se o processo está no estado i no instante n então no próximo instante ele terá que estar em algum dos estados $j \in E$. Observe que uma matriz estocástica determina uma cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\geq 0}$. De fato, o primeiro estado pode ser sorteado de uma distribuição discreta qualquer em E e estando no estado i, para determinar o estado da cadeia no próximo instante, sorteamos um dos valores $j \in E$ de acordo com a distribuição dada por $P_{i,j}, j \in E$.

De forma geral, vale a probabilidade de transição em m passos de uma cadeia de Markov X,

$$P^{(m)}_{i,j} = P(X_{m+n} = j|X_n = i)$$

é a entrada (i,j) da m-ésima potência da matriz de transição P, isto é, $P^m = P \cdot P \cdots P$ onde há m termos no produto. Note que por construção a expressão anterior independe de n. Isto decorre do seguinte resultado.

Teorema 2.2 (Equações de Chapman-Kolmogorov). $P^{(m+n)}_{i,j} = \sum_{k\in E} P^{(m)}_{i,k} P^{(n)}_{k,j}$

Demonstração. Temos que

$$P(X_{n+m} = j|X_0 = i) = \sum_{k \in E} P(X_{n+m} = j, X_m = k|X_0 = i) \tag{2}$$

Usando a definição de probabilidade condicional, cada um dos somados pode ser escrito da forma,

$$\begin{aligned} P(X_{n+m} = j, X_m = k|X_0 = i) &= \frac{P(X_{n+m} = j, X_m = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\ &= \frac{P(X_{n+m} = j, X_m = k, X_0 = i)}{P(X_m = k, X_0 = i)} \cdot \frac{P(X_m = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\ &= P(X_{n+m} = j|X_m = k, X_0 = i) \cdot P(X_m = k|X_0 = i) \\ &= P(X_{n+m} = j|X_m = k)P(X_m = k|X_0 = i), \end{aligned}$$

onde na última linha usamos a propriedade de Markov. Substituindo em (2), obtemos o resultado desejado:

$$P(X_{n+m} = j|X_0 = i) = \sum_{k \in E} P(X_{n+m} = j|X_m = k)P(X_m = k|X_0 = i)$$

□

Note que se chamarmos de $P^{(m)} = (P_{i,j}^{(m)})$ à matriz de transição de ordem m, teremos que o teorema acima afirma que $P^{(m+n)} = P^{(m)} \cdot P^{(n)}$. Como $P^{(1)} = P$, temos então que $P^{(n+1)} = P \cdot P^{(n)}$ e usando um argumento indutivo, obtemos que $P^{(n)} = P^n$.

Um exemplo muito importante de cadeias de Markov com espaços de estados infinito é apresentado na seção seguinte.

2.3 Caminhos aleatórios sobre grupos

Caminhos aleatórios sobre grupos são considerados como uma classe especial de cadeias (processos) de Markov que fornecem exemplos simples de comportamento probabilístico não trivial. Por outro lado, problemas probabilísticos de caminhos aleatórios em grupos estão profundamente entrelaçadas com muitas características essencialmente algébricas de grupos e suas álgebras de grupos (amenidade, crescimento exponencial, etc.). Ambos estes aspectos tornam o assunto especialmente interessante e importante, como pode-se ver em artigos de Gouezel [6], Gerl- Woess [7], Pólya [16] e Furstenberg [22].

Vamos considerar aqui sempre G um grupo enumerável e μ uma medida de probabilidade sobre G. Vejamos a definição de caminhos aleatórios sobre grupos segundo o trabalho de Kaimanovich e Vershik (ver em [9]).

Notaremos G um *grupo discreto infinito* com o elemento identidade $\mathrm{id} \in G$, como o conjunto dotado de uma operação associativa $\cdot : G \times G \to G$ tal que para todo $g \in G$:

i) $\mathrm{id} \cdot g = g$ e $g \cdot \mathrm{id} = g$

ii) existe um elemento inverso $g^{-1} \in G$ para o qual $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = \mathrm{id}$

Dada uma medida de probabilidade μ em G, o par (G, μ) será chamado de um grupo com medida. O *suporte da medida* μ será denotado por $\operatorname{supp} \mu$:

$$\operatorname{supp} \mu = \{g \in G : \mu(g) > 0\}.$$

A medida μ será chamada não *degenerada* se o semigrupo gerado pelo suporte é todo o grupo G, *finitária* se $\operatorname{supp} \mu$ é finito, e *simétrica* se $\mu(g) = \mu(g^{-1})$. Em todo trabalho a condição de medida não degenerada será assumida, a não ser que seja especificado o contrário.

Definição 2.8. O *caminho aleatório* sobre G é definido por Ω espaço mensurável, $\{P_g : g \in G\}$ medidas de probabilidade sobre Ω e uma sequência $X_n : \Omega \to G$ com $n \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}, g_i \in G$,

$$P_g(X_1 = g_1, ..., X_n = g_n) = \prod_{i=1}^{n-1} \mu(g_i^{-1} g_{i+1})$$

Em outras palavras, a posição de um caminho aleatório pode ser obtido a partir do anterior, através da multiplicação à direita com o elemento aleatório independente do grupo que tem a distribuição μ. Note que a definição de caminhos aleatórios segue apenas pela sua probabilidade de transição (sem qualquer distribuição inicial fixada), assim o caminho aleatório pode ser identificado com o par (G, μ). O caminho aleatório esquerdo pode ser definido similarmente com a probabilidade de transição $P(g|h) = \mu(gh^{-1})$. Evidentemente, $P(g^{-1}|h^{-1}) = \mu(h^{-1}g)$ e substituindo a medida μ por uma reflexão reduz o estudo do caminho aleatório a esquerda ao estudo da direita somente.

Vejamos alguns exemplos:

1) O caminho aleatório simples (ou passeio aleatório simples) onde o espaço de estados são os números inteiros, isto é, $G = \mathbb{Z}$. As transições só ocorrem entre estados vizinhos, $P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1}$, com $0 \leq p \leq 1$. Se $p = 0$, as transições são somente a esquerda e se $p = 1$, elas são só para a direita.

   Quando $p = \frac{1}{2}$, as transições satisfazem,

$$P_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & j = i-1 \text{ ou } j = i+1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   e a cadeia vai de um estado para o da esquerda ou para o da direita com a mesma probabilidade. Por esta razão neste caso, a cadeia chama-se de cadeia aleatória simples simétrica.

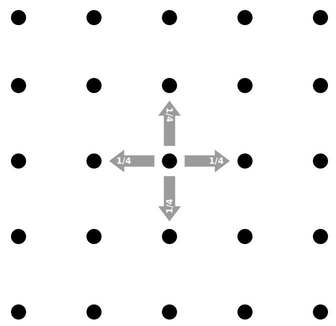


Figura 1: Caminho aleatório $\mathbb{Z}^2$

2) $G = \mathbb{Z}^2$, $P(X_{n+1} = z \pm e_i | X_n = z) = \frac{1}{4}$

3) $G = \mathbb{Z}^d$, temos um resultado fundamental, devido a Pólya, 1921 (ver [16]), no qual, se $p = \frac{1}{2d}$, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{id}(X_{2n} = id)}{c_d . n^{\frac{-d}{2}}} = 1$$

e

$$P_{id}(X_k = id \text{ infinitamente}) = \begin{cases} 1 \text{ se } d \leq 2 \\ 0 \text{ se } d > 2 \end{cases}.$$

Por outras palavras, a caminho aleatório simétrico em $\mathbb{Z}^d$ é recorrente se, e somente se, $d \leq 2$.
Seja $\mathscr{F}_d = \{e_1, e_1^{-1}, \ldots, e_d, e_d^{-1}\}$. O *grupo livre* $\mathbb{F}_d$ é definido por

$$\mathbb{F}_d := \cup_{m\in\mathbb{N}} \{(v_1, \ldots, v_m) \in \mathscr{F}_d^m : v_i \neq v_{i+1}^{-1}, \forall i = 1, \ldots, m-1\}.$$

A aplicação $\mathbb{F}_d \times \mathbb{F}_d \to \mathbb{F}_d$, onde $(v_1, \ldots, v_m).(w_1, \ldots, w_n) = (v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n)$, o qual pertence a $\mathbb{F}_d$ e é a palavra reduzida por $e_i e_i^{-1} = e_i^{-1} e_i = \oslash$.

4) $G = \mathbb{F}_2 =< e_1, e_2, e_1^{-1}, e_2^{-1} >$, grupo livre com dois geradores

5) $G = \mathbb{F}_d$, um resultado fundamental sobre os grupos livres é o Teorema de Gerl-Woess, em 1986 (ver [7]), que afirma que, se $p = \frac{1}{2d}$ e $\rho := \frac{\sqrt{2d-1}}{d}$. Então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{id}(X_n = id)}{c_d . n^{\frac{-3}{2}} \rho^n} = 1 \text{ e}$$

$$P_{id}(X_k = id \text{ infinitamente}) = 0$$

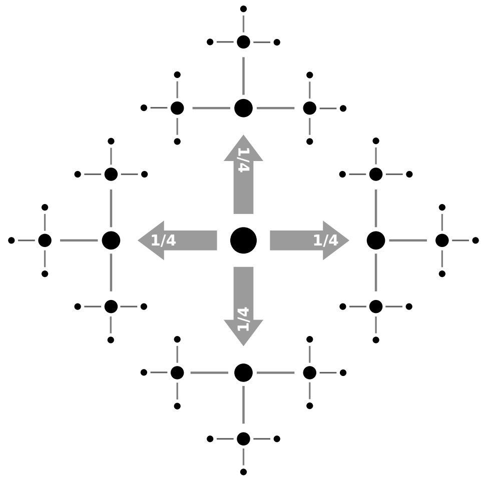


Figura 2: Caminho aleatório $\mathbb{F}^2$

Agora, vamos calcular o crescimento exponencial, ou seja, calcular o

$$\limsup_n \log \sqrt[n]{P_{id}(X_n = id)}$$

dos grupos dos exemplos 3) e 5).

3) Se $G = \mathbb{Z}^d$, então
$\limsup_n \log \sqrt[n]{C_d n^{\frac{-d}{2}}} = 0$

5) Se $G = \mathbb{F}_d$, então
$\limsup_n \log \rho \sqrt[n]{C_d n^{\frac{-3}{2}}} = \log \frac{\sqrt{2d-1}}{d} = \begin{cases} 0 \text{ se } d = 1 \\ < 0 \text{ se } d \geq 2 \end{cases}$

Na seção seguinte veremos uma caracterização de grupo ameno (veja 2.9) através do crescimento exponencial descrito acima.

2.4 O Teorema de Kesten

Enunciaremos e demonstraremos um importante teorema da probabilidade sobre amenidade de grupos discretos, que é o teorema clássico de Kesten (1959), o qual caracteriza grupos ameno com informações sobre o raio espectral. Dessa forma, enunciaremos o resultado, mas somente será demonstrado após serem apresentados algumas definições necessárias. Esta seção é baseada no artigo de Kaimanovich e Vershik (ver [9]).

Teorema 2.3 (Kesten, 1959)**.** *Se um grupo enumerável G é ameno, então o raio espectral é $\rho = 1$ para toda medida de probabilidade μ simétrica em G. Reciprocamente, se $\rho = 1$ para alguma medida simétrica μ cujo suporte gera G, então G é ameno.*

Uma definição importante para o trabalho é a definição de grupo ameno, pois os principais teoremas apresentados aqui, serão de certa maneira uma caracterização destes grupos. A definição surgiu aproximadamente em 1929, com Von Neumann, na qual um grupo enumerável G é ameno se existe uma medida de probabilidade μ finitamente aditiva, tal que $\mu(G) = 1$ e $\mu(Ag) = \mu(A)$, para cada $A \subset G$ e $g \in G$. Equivalente a esta definição, usaremos a condição de Følner para grupos enumeráveis que pode ser formulado como segue:

Definição 2.9. Um grupo enumerável G é *ameno* se, existe uma sequência (K_n) de subconjuntos finitos de G com $\cup_{n=1}^{\infty} K_n = G$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} |gK_n \triangle K_n|/|K_n| = 0 \quad \forall g \in G,$$

Definição 2.10. Dado um subconjunto finito $K \subset G$ e $\varepsilon > 0$, um subconjunto $A \subset G$ é chamado *conjunto Følner* para o par (K, ε) se $|Ag \triangle A| < \varepsilon |A|, \forall g \in K$.

Então, a existência de uma media invariante em G é equivalente à existência de um conjunto Følner para todo par (K, ε) (ver [5]). Onde $|\cdot|$ refere-se a cardinalidade do conjunto, Δ a diferença simétrica dos conjuntos Ag e A, e média invariante é um elemento φ em $(l^\infty)^*$ com $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(\cdot) = \varphi_g(\cdot)$, que em particular não é necessariamente uma medida.

Exemplos:

- Grupo ameno: Seja $G = \mathbb{Z}$, $K_n = \{-n, -n+1, ..., n\}$, temos que $\mathbb{Z}$ é ameno, pois $\lim_{n\to\infty} |(m + K_n) \triangle K_n|/|K_n| = \lim_{n\to\infty} 2m/2n + 1 = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}$.

- Grupo não ameno: $\mathbb{F}_2$ o grupo livre com dois geradores e_1 e e_2 não é ameno. Suponha por absurdo que $\mathbb{F}_2$ é ameno, então para qualquer $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um conjunto finito não vazio A tal que $x \cdot A$ difere de A, no máximo, em $\varepsilon |A|$ pontos para todo $x = e_1, e_2, e_1^{-1}, e_2^{-1}$. Seja $E_1, E_2, E_{-1}, E_{-2} \subset \mathbb{F}_2$ o conjunto de todas as palavras que começam com $e_1, e_2, e_1^{-1}, e_2^{-1}$ respectivamente. Temos $\mathbb{F}_2 = E_1 \cup E_2 \cup E_{-1} \cup E_{-2} \cup \{id\}$. O conjunto $e_1(A \cap (E_2 \cup E_{-1} \cup E_{-2}))$ está contido em $e_1 \cdot A$ e em E_1 e assim $e_1(A \backslash E_{-1}) = e_1 A \backslash e_1 E_{-1} \subset E_1$

  Então,

$$\begin{aligned} |e_1(A \backslash E_{-1})| &= |e_1 A \cap E_1| \\ &= |E_1 \cap ((e_1 A \cap A) \cup (e_1 A \cap A^c))| \\ &= |E_1 \cap (e_1 A \cap A)| + |E_1 \cap (e_1 A \cap A^c)| \\ &\leq |E_1 \cap A| + \varepsilon |A| \end{aligned}$$

Por outro lado, $|e_1B| = |B|$, para qualquer $B \subset \mathbb{F}_2$, daí, $|e_1(A \backslash E_{-1})| = |A \backslash E_{-1}| = |A| - |A \cap E_{-1}|$

Então, para todo $i \in \{e_1, e_2, e_1^{-1}, e_2^{-1}\}$

$$|A| - |A \cap E_{-i}| \leq |A \cap E_{-i}| + \varepsilon|A|$$

Da mesma maneira, fazendo isso para todos os $\{e_1, e_2, e_1^{-1}, e_2^{-1}\}$, obtemos

$$4|A| - \sum_{i \in \{e_1, e_2, e_1^{-1}, e_2^{-1}\}} |A \cap E_i| \leq \sum_{i \in \{e_1, e_2, e_1^{-1}, e_2^{-1}\}} |A \cap E_i| + 4\varepsilon|A|$$

onde $\sum_{i \in \{e_1, e_2, e_1^{-1}, e_2^{-1}\}} |A \cap E_i| = |A \backslash \{id\}|$. Dividiremos em dois casos,

caso 1: $\{id\} \notin A$:

$$4|A| - |A| \leq |A| + 4\varepsilon|A| \Rightarrow 2|A| \leq 4\varepsilon|A|$$

caso 2: $\{id\} \in A$:

$$4|A| - |A| + 1 \leq |A| - 1 + 4\varepsilon|A| \Rightarrow 2|A| + 2 \leq 4\varepsilon|A|.$$

Absurdo, pois para um ε suficientemente pequeno (por exemplo $\varepsilon < 1/2$) a desigualdade não vale.

Definição 2.11. Um *espaço de Hilbert* é um espaço munido com um produto interno que é completo (toda sequência de Cauchy converge) em relação com a norma induzida pelo produto interno.

Definição 2.12. Dados G um grupo enumerável, $l^2(G) = \{f : G \to \mathbb{R} : \sqrt{\sum f(g)^2} < \infty\}$ um espaço de Hilbert, e μ uma probabilidade simétrica ($\mu(g) = \mu(g^{-1})$) sobre G, podemos definir um operador $P_\mu : l^2(G) \to l^2(G)$ por

$$P_\mu(f)(g) := \sum_{h \in G} \mu(h) f(gh^{-1}).$$

Visto que se $f \geq 0$ então $P_\mu(f) \geq 0$ e $P_\mu(1) = 1$, o operador é um *operador autoadjunto de Markov*.

O operador adjunto P^* é o único operador tal que $P^*f(g) := f(P(g))$ e $f(P(g)) := \langle f, P(g) \rangle$. E P autoadjunto se $\langle f, P(g) \rangle = \langle Pf, g \rangle$ para todo $g, f \in l^2(G)$.

Para definirmos o raio espectral, necessitamos de mais duas definições, a de conjunto resolvente e a de espectro. Seja $T : B \to B$ operador linear num espaço de Banach complexo $B \neq \{0\}$. O *conjunto resolvente* de T, denotado por $\upsilon(T)$, é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o operador resolvente de T em λ tal que $R_\lambda(T) : B \to domT, R_\lambda(T) := (T - \lambda id)^{-1}$, existe e é limitado. O *espectro de* T é o conjunto $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \upsilon(T)$.

Definição 2.13. O *raio espectral* do operador $T : B \to B$ é

$$\rho_\sigma(T) := \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

Utiliza-se no trabalho a definição de raio espectral para operadores autoadjuntos. No nosso caso o operador de Markov é um operador autoadjunto no espaço $l^2(G)$. O teorema de Gelfand (ver por exemplo em [17]) sobre o raio espectral nos permite definir o raio espectral de P_μ agindo em $l^2(G)$ como:

$$\rho := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{P^n_\mu(\chi_{\{id\}})(id)},$$

em que $P^n_\mu(\chi_{\{id\}})(id)$ é a probabilidade de voltar a identidade em tempo n. Podemos obter esta equivalência da definição do raio espectral usual com esta em [9].

Uma observação importante a se fazer é que o raio espectral do operador de Markov é menor ou igual a 1.

Definição 2.14. Uma função f é dita *ε-invariante para o operador P em $l^2(G)$* se para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $\|P(f) - f\|_2 \leq \varepsilon \|f\|_2$.

Agora vejamos a demonstração do teorema de Kesten [11], seguiremos a prova mais acessível de [9].

Demonstração. a) Seja G um grupo ameno, mostraremos que $\rho = 1$ para toda μ simétrica. Se o suporte de μ é finito, então pela condição de Følner, existe uma função ε-invariante diferente de zero para P em $l^2(G)$, no qual $\forall \varepsilon > 0$, tomemos a função característica χ_A de um conjunto Følner para o suporte μ, que assume valores 1 se $g \in A$ e 0 se $g \notin A$. Então,

$$\begin{aligned}
\|P\chi_A - \chi_A\|_2^2 &= \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in \operatorname{supp}\mu} \mu(h)\chi_A(gh^{-1}) - \chi_A(g)\right)^2 \\
&= \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in \operatorname{supp}\mu} \mu(h)\chi_A(gh^{-1}) - \sum_{h\in \operatorname{supp}\mu} \mu(h)\chi_A(g)\right)^2, \text{pois} \sum_{h\in \operatorname{supp}\mu} \mu(h) = 1 \\
&= \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in \operatorname{supp}\mu} \mu(h)(\chi_A(gh^{-1}) - \chi_A(g))\right)^2 \\
&= \|g \longmapsto \sum_{h\in \operatorname{supp}\mu} \mu(h)(\chi_A(gh^{-1}) - \chi_A(g))\|_2^2 \\
&\leq \sum_{h\in \operatorname{supp}\mu} \mu(h)\|\chi_A(gh^{-1}) - \chi_A(g))\|_2^2 \\
&\leq \sum_{h\in \operatorname{supp}\mu} \mu(h)\|\chi_{Ah}(g) - \chi_A(g))\|_2^2 \leq \sum_{h\in \operatorname{supp}\mu} \mu(h)\|\chi_{Ah\triangle A}\|_2^2 \\
&= \sum_{h\in \operatorname{supp}\mu} \mu(h)|Ah\triangle A| \leq \sum_{h\in \operatorname{supp}\mu} \mu(h)\varepsilon\|\chi_A\|_2^2 = \varepsilon\|\chi_A\|_2^2
\end{aligned}$$

Usou-se que $\chi_A(gh^{-1}) = 1 \Leftrightarrow gh^{-1} \in A \Leftrightarrow g \in Ah \Leftrightarrow \chi_{Ah}(g) = 1$, e portanto

$$(\chi_A(gh^{-1}) - \chi_A(g)) = (\chi_{Ah}(g) - \chi_A(g)) = \begin{cases} 1 & \text{se } g \in Ah \backslash A \\ 0 & \text{se } g \in Ah \cap A \\ -1 & \text{se } g \in A \backslash Ah \end{cases}$$

Daí, $|\chi_{Ah}(g) - \chi_A(g)| = \chi_{Ah\triangle A}(g)$. Além disso, $\|\chi_A\|_2^2 = \sum_{g\in G}(\chi_A(g))^2 = \sum_{g\in G}\chi_A(g) = \sum_{g\in A} 1 = |A|$, implica que, $\|\chi_{Ah\triangle A}\|_2^2 = |Ah\triangle A|$.

Então, $\|P\chi_A - \chi_A\|_2^2 \le \varepsilon\|\chi_A\|_2^2$. Daí, $\|P\| = 1$, isto é, $\rho = 1$. Isto provém do seguinte resultado da Análise Funcional (ver [17]):

Proposição 2.4. *Se para todo $\varepsilon > 0$, existe f tal que $\|P(f) - \lambda f\| < \varepsilon\|f\|$, então $\lambda \in \sigma(P)$(espectro de P).Valendo a recíproca.*

Daí, temos que $1 \in \sigma(P)$. Então, como $\rho := \sup\{\lambda \in \sigma(P)\}$ e para qualquer operador de Markov, $\rho \le 1$, temos que $\rho = 1$.

Se o suporte de μ é infinito, tome para cada $\delta > 0$, um subconjunto finito $T_\delta \subset \operatorname{supp}\mu$ tal que $\mu(T_\delta) > 1-\delta$ (ou $\mu(T_\delta)^c < \delta$). Então, pela condição de Følner, temos para todo $\varepsilon > 0$, que existe conjunto A que é (T_δ, ε)-Følner, isto é,

$$|Ah\triangle A|/|A| < \varepsilon \ \forall h \in T_\delta.$$

Dado $\varepsilon > 0$ afirmamos que existe uma função ε-invariante χ_A (diferente de zero) para P em $l^2(G)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\|P\chi_A - \chi_A\|_2 &\le \sum_{h\in G}\mu(h)\|\chi_{Ah\triangle A}\|_2 \\
&= \sum_{h\in T_\delta}\mu(h)\|\chi_{Ah\triangle A}\|_2 + \sum_{h\notin T_\delta}\mu(h)\|\chi_{Ah\triangle A}\|_2 \\
&\le \sum_{h\in T_\delta}\mu(h)\sqrt{\varepsilon}\|\chi_A\|_2 + \sum_{h\notin T_\delta}\mu(h)\|\chi_{Ah} + \chi_A\|_2 \\
&\le \sqrt{\varepsilon}\|\chi_A\|_2 + 2\delta\|\chi_A\|_2
\end{aligned}$$

Então, $\|P\chi_A - \chi_A\|_2 \le (\sqrt{\varepsilon} + 2\delta)\|\chi_A\|_2$. Como $\delta, \varepsilon > 0$ foram arbitrários deduzimos pela proposição 2.4 que $\|P\| = 1$, isto é, $\rho = 1$.

b) Reciprocamente, suponhamos $\rho = 1$ para uma medida μ não degenerada simétrica em G (ou seja, considera-se $\mu(id) \neq 1$), mostraremos que G é um grupo ameno.

Fixe um subconjunto finito $K \subset G$. Passando (se necessário) a uma convolução n-vezes da medida μ, podemos supor que $\operatorname{supp}\mu$ contém K. Considere uma decomposição da medida μ em uma combinação convexa de duas medidas de probabilidade simétricas $\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$. Daí, $P_\mu = \alpha P_{\mu_1} + (1-\alpha)P_{\mu_2}$, onde P_i são operadores autoadjuntos e $\|P_i\| \leq 1$. Então,

$$\begin{aligned} \|P_\mu\| &= \alpha\|P_{\mu_1}\| + (1-\alpha)\|P_{\mu_2}\| \\ 1 &\leq \alpha\|P_{\mu_1}\| + (1-\alpha)\|P_{\mu_2}\|, \text{ logo } \|P_i\| = 1, i = \mu_1, \mu_2 \end{aligned}$$

Assim, pode-se supor que $\operatorname{supp}\mu$ é finita e $\operatorname{supp}\mu$ contém K. Agora, existe uma função quase ε-invariante $f \in l^2(G)$, isto é, $\|f - Pf\| \leq \varepsilon\|f\|$. Podemos tomar para f a função característica de um subconjunto finito $A \subset G$ (ver teorema 3.6 passagem (11)). Pela finitude do $\operatorname{supp}\mu$, $\min\{\mu(g) : g \in \operatorname{supp}\mu\} = \delta > 0$, portanto, temos $P\chi_A(g) = 1$ ou $P\chi_A(g) \leq 1-\delta$ para todo $g \in G$, vejamos:

$$\begin{aligned} P\chi_A(g) &= \sum_{h \in \operatorname{supp}\mu} \mu(h)\chi_A(gh^{-1}) \\ &= \sum_{h \in \operatorname{supp}\mu} \mu(h)\chi_{Ah}(g) = \begin{cases} 1, & \text{se } g \in Ah; \forall h \in \operatorname{supp}\mu \\ \leq 1-\delta, & \text{se } g \notin Ah; \exists h \in \operatorname{supp}\mu \end{cases} \end{aligned}$$

Observe que se $g \notin Ah_0$, então

$$\sum_{h \in \operatorname{supp}\mu} \mu(h)\chi_{Ah}(g) \leq \sum_{h \neq h_0, h \in \operatorname{supp}\mu} \mu(h)\chi_{Ah}(g) \leq \sum_{h \neq h_0} \mu(h) = 1 - \mu(h_0).$$

Voltando, então temos,

$$\|\chi_A(g) - P\chi_A(g)\| \begin{cases} = 0 & \text{se } g \in A; g \in Ah; \forall h \in \operatorname{supp}\mu \\ = 1 & \text{se } g \notin A; g \in Ah; \forall h \in \operatorname{supp}\mu \\ \geq \delta & \text{se } g \in A; g \notin Ah; \exists h \in \operatorname{supp}\mu \longrightarrow \{g \in \cup_{h \in \operatorname{supp}\mu} A \backslash Ah\} \\ \leq 1-\delta & \text{se } g \notin A; g \notin Ah; \exists h \in \operatorname{supp}\mu \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \|\chi_A - P\chi_A\| &\geq \delta\chi_{\cup_{h \in \operatorname{supp}\mu} A \backslash Ah} \\ &\geq \delta\chi_{A \backslash Ah}, \forall h \in \operatorname{supp}\mu \\ &\geq \delta\sqrt{|A \backslash Ah|} \end{aligned}$$

Mas, $|A \triangle Ag| = |A \backslash Ag| + |Ag \backslash A| = 2|A \backslash Ag|$. Daí, $|A \triangle Ag|/2 = |A \backslash Ag|$ e portanto obtemos $\sqrt{|A \triangle Ag|/2} = \sqrt{|A \backslash Ag|}$.

Logo, $\delta\sqrt{|A \triangle Ag|/2} = \delta\sqrt{|A \backslash Ag|} \leq \|\chi_A - P\chi_A\| \leq \varepsilon\|\chi_A\|, g \in K$ onde a última passagem utiliza a hipótese do teorema.

Obtemos $\delta^2\sqrt{|A \triangle Ag|/2} \leq \varepsilon^2\|\chi_A\|$, e portanto,

$$\frac{|A \triangle Ag|}{|A|} \leq \frac{2\varepsilon^2}{\delta^2}, \text{ para todo } g \in K$$

no qual pela condição de Følner, G é ameno se e somente se $|A \triangle Ag|/|A| \leq \varepsilon$, para um subconjunto finito $A \subset G$, A é ε-Følner para K. Portanto, A é um $(\frac{2\varepsilon^2}{\delta^2})$-Følner para K. □

3 Extensão do critério de Kesten sobre amenidade para cadeias de Markov topológicas

Essa seção é baseada no artigo [21], no qual vamos estudar algumas definições sobre cadeias de Markov topológica, e posteriormente para compreendermos os teoremas principais do artigo 3.1 e 3.6, vamos estudar a extensão por grupo que é uma generalização para caminhos aleatórios. Daí, teremos duas seções separadamente para apresentar cada um desses teoremas.

3.1 Cadeias de Markov Topológicas

Sejam I um conjunto enumerável (alfabeto) e $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ uma matriz tal que $a_{ij} \in \{0,1\}$ para todo $i, j \in I$ e $\sum_j a_{ij} > 0$ para todo $i \in J$, ou seja, que a matriz de transição A não contenha linhas ou colunas com todos os elementos iguais a 0. Vamos denotar o par (Σ_A, θ) correspondendo a cadeia de Markov topológicas (ou, espaço shift), o qual

$$\Sigma_A := \{(w_k)_{k=0,1,...} : w_k \in I \text{ e } a_{w_k w_{k+1}} = 1, \forall i = 0,1,...\},$$

$$\theta : \Sigma_A \to \Sigma_A, \theta : (w_k : \ k = 1,2,\ldots) \mapsto (w_k : \ k = 2,3,\ldots).$$

Uma sequência finita $w = (w_1...w_n)$ com $n \in \mathbb{N}, w_k \in I$ para $k = 1,2,...,n$ e $a_{w_k w_{k+1}} = 1$ para $k = 1,2,...,n-1$ é chamado como sendo uma *palavra de comprimento n*, e o conjunto

$$[w] := \{(v_k) \in \Sigma_A : \text{ com } w_k = v_k \ \forall k = 1,2,\ldots,n\}$$

como sendo um *cilindro de comprimento n*. Denotamos como o conjunto de palavras admissíveis de comprimento n o conjunto W^n, o comprimento de $w \in W^n$ por $|w|$ e o conjunto de todas as palavras admissíveis por $W^\infty = \bigcup_n W^n$. Além disso, $\theta^n : [w] \to \theta^n([w])$ é um homeomorfismo (aplicação contínua e invertível, com inversa contínua), a inversa existe e denotaremos por $\tau_w : \theta^n([w]) \to [w]$, a qual está bem definida. Para $a, b \in W^\infty$ e $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq |a|$, definimos

$$W^n_{a,b} = \{(w_1 \cdots w_n) \in W^n \text{com}(w_1 \ldots w_{|a|}) = a, \ w_n b \text{ admissível}\}.$$

Temos que Σ_A é um espaço Polonês, ou seja, espaço metrizável, separável e completo, com respeito à topologia gerada por cilindros. Mais ainda, Σ_A é compacto e localmente compacto com respeito a esta topologia se, e somente se, I é um conjunto finito. Além disso, diremos que Σ_A é *topologicamente transitivo* se para todo $a, b \in I$, existe $n_{a,b} \in \mathbb{N}$ tal que $W_{a,b}^{n_{a,b}} \neq \emptyset$, ou equivalentemente, podemos dizer que $\theta^{n_{a,b}}([a]) \cap [b] \neq \emptyset$. Σ_A é chamado de *topologicamente misturadora* se para todo $a, b \in I$, existe $N_{a,b} \in \mathbb{N}$ tal que $W_n^{n_{a,b}} \neq \emptyset$ para todo $n \geq N_{a,b}$, equivalentemente, podemos notar por $\theta^n([a]) \cap [b] \neq \emptyset$ para todo $n \geq N_{a,b}$. Além disso, uma cadeia de Markov topológica é dita que possui *grandes imagens e pré-imagens*, se existe um conjunto finito $I_{g.i.p.} \subset W$ tal que para todo $v \in W$, existe $\beta \in I_{g.i.p}$ tal que $(v\beta) \in W^2$ ou $(\beta v) \in W^2$, respectivamente. Finalmente, uma cadeia de Markov topológica é dita que possui a *propriedade (g.i.p.)* se a cadeia é topologicamente misturadora e tem grandes imagens e pré-imagens.

Visto que estamos interessados na relação entre aspectos do formalismo termodinâmico e a amenidade do grupo G, considere o par (Σ_A, φ), onde $\varphi : \Sigma_A \to \mathbb{R}$ é uma função estritamente positiva ao qual nos referimos como um *potencial*. Para $n \in \mathbb{N}$ e $w \in W^n$, definimos

$$\Phi_n := \prod_{k=0}^{n-1} \varphi \circ \theta^k \text{ e } C_w := \sup_{x,y \in [w]} \Phi_n(x)/\Phi_n(y). \tag{3}$$

O potencial φ é dito que tem *variação localmente limitada* se φ é contínua e existe $C > 0$ tal que $C_w \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $w \in W^n$, e é chamado potencial de *variação média* se φ é contínua e, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $C_n > 0$ com $C_w \leq C_n$ para todo $w \in W^n$ e $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{C_n} = 1$. Para sequências positivas $(a_n), (b_n)$, frequentemente escreveremos $a_n \ll b_n$ se existe $C > 0$ com $a_n \leq Cb_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e $a_n \asymp b_n$ se $a_n \ll b_n \ll a_n$. Uma nova hipótese, mais forte sobre a variação é relacionada com ser localmente Hölder contínua. Portanto, definimos a n-ésima variação de uma função $f : \Sigma_A \to \mathbb{R}$ por

$$V_n(f) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x_i = y_i,\, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

A função f é referida como uma função *localmente Hölder contínua no sentido simbólico*, se existe $0 < r < 1$ e $C \geq 1$ tal que $V_n(f) \ll r^n$ para todo $n \geq 1$. Podemos ver aqui a equivalência da notação mais conhecida sobre funções Hölder contínua: $|s(x) - s(y)| \leq c|x - y|$. Para definir uma métrica e escrever como $|s(x) - s(y)| \leq cd(x,y)^\alpha$, basta tomar o conjunto Σ_A e a métrica $d_{1/2}$ e s tal que $V_n(s) \leq cr^n$, temos que $r = (1/2)^t$, então, $t = \frac{log(r)}{log(1/2)}$. Então, para x e y no mesmo cilíndro $[w]$, $w \in W^n$,

$$\begin{aligned} |s(x) - s(y)| &\leq cr^n \\ &= c(1/2)^{tn} \\ &= c((1/2)^n)^t \\ &\leq c \cdot d(x,y)^t \end{aligned}$$

Generalizando, podemos ver a métrica como $d_r((x_i), (y_i)) := r^{min\{f : x_j \neq y_j\}}$ e temos

$$\frac{|s(x) - s(y)|}{d_r((x_i), (y_i))} \leq c,$$

no qual notamos que é uma função Lipschitz. A uma função localmente Hölder contínua com $\|f\|_\infty < \infty$ chamamos de *função Hölder contínua*.

Agora, vejamos a seguinte estimativa bem conhecida (ver em [18]). Para $n \le m$, $x, y \in [w]$ para algum $w \in \mathscr{W}^m$, e f função localmente Hölder contínua,

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{k=0}^{n-1} f\circ\theta^k(x) - f\circ\theta^k(y)\Big| &\le \sum_{k=0}^{n-1}\left|f\circ\theta^k(x) - f\circ\theta^k(y)\right| \\
&\le c\cdot\sum_{k=0}^{n-1} d(\theta^k(x),\theta^k(y)) = c\sum_{k=0}^{n-1} 1/(r^k)d(x,y) \\
&= c\sum_{k=0}^{n} 1/(r^k)\cdot r^m = c\sum_{k=1}^{n} r^{m-k} \\
&= c\cdot r^{m-n}\sum_{k=0}^{n-1} r^k \le c\cdot r^{m-n}\frac{1}{1-r}
\end{aligned}$$

Então,

$$\Big|\sum_{k=0}^{n-1} f\circ\theta^k(x) - f\circ\theta^k(y)\Big| \ll \frac{1}{1-r}r^{m-n}.$$

Observação: temos $d_r(\theta(x),\theta(y)) = \frac{1}{r}d(x,y)$, temos $r^2 = d((x_1,x_2,...),(x_1,x_2,...))$ e $r = d((\theta(x_1,x_2,...)),(\theta(x_1,x_2,...)))$.

Em particular, a função $\exp f$ ou (e^f) é um potencial de variação limitada. Para um dado potencial φ, o objeto básico do formalismo termodinâmico são as funções de partição. Uma vez que o espaço de estados pode ser contável, considere a função partição Z_a^n para um fixado $a \in I$ que são definidos por

$$Z_a^n := \sum_{\theta^n(x)=x,\ x\in[a]} \Phi_n(x).$$

Além disso, referimos a taxa de crescimento exponencial de Z_a^n, por

$$P_G(\theta,\varphi) := \limsup_{n\to\infty} \log\sqrt[n]{Z_a^n} = \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Z_a^n,$$

como a *pressão de Gurevič* de $(\Sigma_A,\theta,\varphi)$. Essa noção foi introduzida em [18] para cadeias topologicamente misturadora e φ potencial localmente log-Holder contínua, isto é, $\log\varphi$ é localmente Holder contínua. No qual apresenta que se $(\Sigma_A,\theta,\varphi)$ é transitiva e φ é uma variação média, argumentos em que combinamos com a decomposição de θ^p em componentes misturadoras, onde p representa o período de (Σ_A,θ), mostra que $P_G(\theta,\varphi)$ é independente da escolha de a e que

$$P_G(\theta,\varphi) = \lim_{n\to\infty,\ W_{a,a}^n\neq\emptyset}\frac{1}{n}\log Z_a^n.$$

Além disso, é fácil ver que $P_G(\theta,\varphi)$ permanece inalterado substituindo $a \in W^1$ com algum $a \in \mathscr{W}^n$. Temos também que, se $\log\varphi$ é Hölder contínua e o sistema é topologicamente misturadora, então possui um princípio variacional.

Dois objetos básicos para nossa análise são a concepção de medida conforme e medida Gibbs relacionadas com um potencial φ. Devido ao fato que a construção canonicamente conduzirá a medidas σ-finitas, faremos uso do seguinte: uma medida de probabilidade boreliana μ σ-finita é chamada *φ-conforme* se

$$\mu(\theta(A)) = \int_A \frac{1}{\varphi} d\mu$$

para todo conjunto boreliano A tal que $\theta|_A$ é injetiva. Para $(w_1 \cdots w_{n+1}) \in W^{n+1}$ e um potencial de variação média, então imediatamente segue que

$$\mu([w]) \asymp \Phi_n(x) C_n^{\pm 1} \mu(\theta([w_n])), \forall x \in [w]$$

ou

$$C_n^{-1}\mu(\theta([w_{n+1}])) \leq \frac{\mu([w_1 \dots w_{n+1}])}{\Phi_n(x)} \leq C_n \mu(\theta([w_{n+1}])) \tag{4}$$

para todo $x \in [w_1 \cdots w_{n+1}]$. Note que essa estimativa implica que $P_G(\theta,\varphi) = 0$ é uma condição necessária para a existência de uma medida conforme com respeito a um potencial de variação média. Além disso, a estimativa acima motiva as seguintes definições: se $\mu(\theta([w])) \asymp 1$ (isto é, se μ é finita e θ possui g.i.p) obtemos que $\mu([w]) \asymp \Phi_n(x)$, se adicionarmos que μ é medida de probabilidade, então μ é φ-Gibbs. Ou ainda, assuma que existe uma sequência $(B_n : n \in \mathbb{N})$ com $B_n \geq 1$ tal que

$$B_n^{-1} \leq \frac{\mu([w])}{\Phi_n(x)} < B_n \tag{5}$$

para todo $n \in \mathbf{N}, w \in W^n$ e $x \in [w]$. Se $\sup B_n < \infty$, então μ é chamada *medida φ-Gibbs*, e se $\lim B_n^{1/n} = 1$, então μ é chamada *medida φ-Gibbs fraca*. A fim de introduzir um novo objeto básico, o operador de Ruelle, definimos a ação do ramo inverso de τ_v nas funções da seguinte forma. Para $v \in W^n$ e $f : \Sigma_A \to \mathbb{R}$, a aplicação

$$f \circ \tau_v : \Sigma_A \to \mathbb{R}; x \mapsto \chi_{\theta^n([v])}(x) f(\tau_v(x)),$$

que é $f \circ \tau_v(x) := f(\tau_v(x))$ para $x \in \theta^n([v])$ e $f \circ \tau_v(x) := 0$ para $x \notin \theta^n([v])$. O *operador de Ruelle*, então é definido por

$$L_\varphi(f) = \sum_{v \in W} \varphi \circ \tau_v \cdot f \circ \tau_v,$$

onde $f : \Sigma_A \to \mathbb{C}$ é um elemento de um espaço funcional apropriado tal que a soma infinita possivelmente no lado direito está bem definida.

3.2 Extensão por grupo de cadeias de Markov Topológicas

Para introduzir o objeto básico da nossa análise, fixe um grupo enumerável discreto G e uma aplicação $\psi : \Sigma_A \to G$ tal que ψ é constante em $[w]$ para todo $w \in W^1$. Em seguida, com $X := \Sigma_A \times G$ equipado com a topologia de produto, a *extensão por grupo ou G-extensão* (X,T) de (Σ_A, θ) é definida por

$$T : X \to X, (x,g) \mapsto (\theta x, g\psi(x)).$$

Observe que (X,T) também é uma cadeia de Markov topológica e os conjuntos de cilíndros são dados por $[w,g] := [w] \times \{g\}$, para $w \in W^\infty$ e $g \in G$. Portanto, o conjunto X_g é definido como $X_g := \Sigma_A \times \{g\}$ e

$$\psi_n(x) := \psi(x)\psi(\theta x)\cdots\psi(\theta^{n-1}x)$$

para $n \in \mathbf{N}$ e $x \in \Sigma_A$. Observe que $\psi_n : \Sigma_A \to G$ é constante em cilindros de comprimento n e, em particular, que $\psi(w) := \psi_n(x)$, para algum $x \in [w]$ e $w \in W^n$, está bem definida. Além disso, para $a,b \in W^1$ e $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto

$$G_n(a,b) := \{\psi(w) : n \in \mathbb{N}, w \in W^n, [a] \supset [w], \theta^n([w]) \supset [b]\}.$$

De outro modo, $G_n(a,b)$ consiste nos elementos do grupo associado a palavras de comprimento n que começam pela letra a e terminam com a letra b. Note que (X,T) é topologicamente transitivo se, e somente se, para $a,b \in W^1, g \in G$, existe $n \in \mathbb{N}$ com $g \in G_n(a,b)$, e que (X,T) é topologicamente misturadora se, e somente se, para $a,b \in W^1$ e $g \in G$, existe $N \in \mathbb{N}$ (dependendo de a,b,g) tal que $g \in G_n(a,b)$ para todo $n > N$. Note que a transformação da base (Σ_A, θ) de um grupo por extensão topologicamente transitivo tem que ser topologicamente transitiva, e topologicamente misturadora se a extensão é topologicamente misturadora, respectivamente. Portanto, se (X,T) é topologicamente transitivo, então $\{\psi(a) : a \in W^1\}$ é um conjunto gerador para G. Agora, fixe uma cadeia de Markov topológica topologicamente misturadora (Σ_A, θ), e G-extensão topologicamente transitiva (X,T). Fixe um potencial (positivo) $\varphi : \Sigma_A \to \mathbb{R}$ com $P_G(\theta, \varphi) = 0$. Note que φ eleva para um potencial $\hat{\varphi}$ em X definindo $\hat{\varphi}(x,g) := \varphi(x)$. Para facilitar a notação, não será feito distinção entre $\hat{\varphi}$ e φ. Além disso, para $v \in \mathscr{W}^\infty$, o ramo inverso dado por $[v,\cdot]$ será denotado por τ_v, que é $\tau_v(x,g) := (\tau_v(x), g\psi(v)^{-1})$. A fim de distinguir entre o operador de Ruelle e as funções de partição que diz respeito a θ e a T, estes objetos para extensão por grupo serão escritos em letras caligráficas, isto é, para $a \in W$, $\xi \in [a] \times \{\mathrm{id}\}$, $(\eta, g) \in X$, e $n \in \mathbb{N}$

$$\mathscr{L}(f)(\xi,g) := \sum_{v \in W} \varphi(\tau_v(\xi)) f \circ \tau_v(\xi, g),$$

e

$$\mathscr{Z}^n_{[a,g]} := \sum_{T^n(x,g)=(x,g), x \in [a]} \Phi_n(x)$$

3.3 Extensões por grupos amenos

Nesta seção, vamos mostrar que a Pressão de Gurevič permanece inalterada em extensão por um grupo ameno. Em particular, será verificado que esta afirmação é verdadeira em condições muito fracas. Iremos utilizar a definição de amenidade como visto no primeiro capítulo, pela condição de Følner (ver 2.9).

Estamos interessados na caracterização da amenidade em termos da Pressão de Gurevič de uma extensão por grupo, esta será uma extensão do Teorema 2.3. A fim de obter uma extensão deste resultado para espaços de shift, temos que considerar a extensão por grupo como uma simetria. Diremos que (Σ_A, θ, ψ) é simétrica se existe uma aplicação de $W^1 \to W^1$, $w \mapsto w^p$ com as seguintes propriedades:

1) para $w \in W^1, (w^p)^p = w$

2) para $v, w \in W^1$, a palavra (vw) é admissível se, e somente se $(w^p v^p)$ é admissível

3) $\psi(v^p) = \psi(v)^{-1}$ para todo $v \in W^1$.

Observe que esta noção de simetria pode ser estendido para uma involução de W^∞ definindo $(w_1 ... w_n)^p := (w_n^p ... w_1^p)$.

Referimos φ como um potencial fracamente simétrico se φ é contínua e existe uma sequência (D_n) com $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{D_n} = 1$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $w \in W^n$,

$$\sup_{x\in[w], y\in[w^p]} \frac{\Phi_n(x)}{\Phi_n(y)} \leq D_n.$$

Se $\sup D_n < \infty$, então φ é referido como um potencial simétrico. Observe que um potencial fracamente simétrico ou simétrico é necessariamente de variação média com respeito a $C_n := D_n^2$ ou de variação limitada, respectivamente.

Como um corolário imediato do teorema de Kesten para o raio espectral do operador de Markov associado a um passeio aleatório simétrico (ver [10] e [9] teorema 5), obtemos o seguinte teorema para extensões por grupo.

Teorema 3.1 (Stadlbauer, 2013). *Seja T uma extensão por grupo simétrica topologicamente transitiva de uma cadeia de Markov topológica (Σ_A, θ) topologicamente misturadora, potencial φ fracamente simétrica e $P_G(\theta)$ finita. Então, $P_G(T) = P_G(\theta)$, se G é um grupo ameno.*

Demonstração. Iremos provar que a amenidade de G implica que $P_G(T) = P_G(\theta)$. Para tal, vamos construir uma família de operadores autoadjuntos em $l^2(G)$ por extensão por grupo simétrico da seguinte maneira. Por transitividade:

1) existe $a \in W^\infty$ com $\psi(a) = id$

2) para $v \in W^\infty$, temos que ava^p é admissível se, e somente se, $(ava^p)^p = av^pa^p$ é admissível

3) $\psi((ava^p)^p) = \psi(ava^p)^{-1}$.

Assim, para $n > |a|$, vamos definir uma involução (função que é inversa de si própria) $\iota : W^n_{a,a^p} \to W^n_{a,a^p}$, $\iota(av) := av^p$. Desde que $\psi(a) = id$, segue que $\psi(v) = \psi(\iota v)^{-1}$ para todo $v \in W^n_{a,a^p}$.

Dessa forma, assuma que $P_G(\theta)$ é finito e fixe $\xi \in [a^p]$. Para $n \in \mathbb{N}$ e $v \in W^n_{a,a^p}$, definiremos

$$\pi(\xi, v) := \frac{1}{2}(\phi_n(\tau_v(\xi)) + \phi_n(\tau_{\iota v}(\xi))).$$

Daí, este dá origem a um operador $P_n : l^2(G) \to l^2(G)$ em um espaço de Hilbert complexo $l^2(G)$ por:

$$P_n(f)(\gamma) := \sum_{v \in W^n_{a,a^p}} \pi(\xi, v) f(\gamma\psi(v)^{-1}),$$

onde, para facilitar a notação, o fato que o operador P_n depende de ξ é omitido. Note que $P_n(1) = L^n_\varphi(\chi_{[a]})(\xi) < \infty$ e, com $\langle f, g\rangle = \sum \overline{f(\gamma)} g(\gamma)$ referindo ao produto interno padrão, temos $\langle \chi_\gamma, P_n(\chi_{\gamma*})\rangle = \langle P_n(\chi_\gamma), \chi_{\gamma*}\rangle$, para $\gamma, \gamma* \in G$. Em particular, isto implica que P_n é um operador autoadjunto.

Combinando $\langle \chi_\gamma, P_n(\chi_\gamma)\rangle = \langle \chi_{id}, P_n(\chi_{id})\rangle$ para todo $\gamma \in G$ com P_n sendo autoadjunto, então dado que o raio espectral ρ_n de P_n satisfaz (ver, por exemplo [9])

$$\rho_n = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\langle \chi_{id}, P_n^k(\chi_{id})\rangle},$$

e que, se P_n é um operador positivo, então temos que o $\limsup$ acima é um limite.

É fácil ver que $P_G(T) \leq P_G(\theta)$, pois temos $\mathscr{Z}^n_{a,g} \leq Z^n_a$, ou seja,

$$\sum_{T^n(x,g)=(x,g), x\in[a,g]} \phi_n(x) \leq \sum_{\theta^n(x)=x, x\in[a]} \phi_n(x),$$

já que $T^n(x,g) = (x,g), x \in [a,g]$ pode ser visto como $\theta^n(x) = x, x \in [a], \psi_n(x) = id$. Resta mostrar a desigualdade inversa, $P_G(\theta) \leq P_G(T)$. Vamos definir uma medida de probabilidade simétrica em G (ou seja, $m_n(g) = m_n(g^{-1})$) do seguinte modo:

$$m_n(g) = \frac{1}{P_n(1)} \sum_{v\in W^n_{a,a^p} : \psi(v)=g} \pi(\xi, v).$$

A probabilidade está bem definida desde que $|P_G(\theta)| < \infty$. Observe que o grupo gerado pelo suporte de m_n é um subgrupo de G, e como por hipótese, G é ameno, consequentemente $\langle \operatorname{supp} m_n \rangle$ é ameno. Além disso, quando o operador de Markov associado

com o caminho aleatório simétrico dado por m_n for igual a $\frac{P_n(\cdot)}{P_n(1)}$, teremos pelo teorema de Kesten que $\rho(\frac{P_n(\cdot)}{P_n(1)}) = 1$, daí, $\rho(P_n(\cdot)) = P_n(1)$ e então $\rho_n = P_n(1)$. Dessa forma, para provarmos a afirmação ($P_G(T) = P_G(\theta)$, se G é ameno), é suficiente mostrar que $\limsup \log(\rho_n)/n = P_G(\theta)$ e depois $\limsup \log(\rho_n)/n \leq P_G(T)$.
Passo 1: Para $n \geq |a|$, temos $\iota w \in W^n_{a,a^p}$ se, e somente se, $w \in W^n_{a,a^p}$. Por isso,

$$\rho_n = P_n(1) = \sum_{w \in W^n_{a,a^p}} \pi(\xi, w) = \sum_{w \in W^n_{a,a^p}} \frac{1}{2}(\Phi_n(\tau_w(\xi)) + \Phi_n(\tau_{\iota w}(\xi))) = \sum_{w \in W^n_{a,a^p}} \Phi_n(\tau_w(\xi)).$$

Escolha $k \geq |a|$ e $v \in W^k_{a,a^p}$. Para $n \geq k$, a propriedade de variação média de φ é dada por

$$\begin{aligned} \rho_n &= \sum_{w \in W^n_{a,a^p}} \Phi_n(\tau_w(\xi)) \\ &\geq \sum_{w \in W^n_{a,a^p} : (w_{n-k} \cdots w_n) = v} \Phi_n(\tau_w(\xi)) \\ &\geq C_k^{-1} \cdot Z_b^{n-k} \cdot \Phi_k(\tau_v(\xi)) \cdot C_{n-k}^{-1} \end{aligned}$$

onde $b := (a_{|a|})^p$ para $a = (a_1 \cdots a_{|a|})$. Então,

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \rho_n &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(C_k^{-1} \cdot Z_b^{n-k} \cdot \Phi_k(\tau_v(\xi)) \cdot C_{n-k}^{-1}) \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} (\log C_k^{-1} + \log Z_b^{n-k} + \log \Phi_k(\tau_v(\xi)) + \log C_{n-k}^{-1}) \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Z_b^{n-k} \end{aligned}$$

pois temos que $\limsup_n \frac{1}{n} \log C_n = 0$ se, e somente se, $\sqrt[n]{C_n} \to 1$. Portanto,

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log \rho_n = P_G(\theta).$$

Passo 2: Para $w \in W^n_{a,a^p}$, um potencial simétrico fraco implica que

$$\Phi_n(\tau_w(\xi)) = \frac{\Phi_{n+|a|}(\tau_w(\xi))}{\Phi_{|a|}(\xi)} = (C_n \cdot D_{n+|a|})^{\pm 1} \phi_n(\tau_{\iota w}(\xi)).$$

Por isso, existe uma sequência $(\hat{D_n})$, com $\pi(\xi, v) = \Phi_n(\tau_w(\xi)) \cdot \hat{D_n}^{\pm 1}$ e $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\hat{D_n}} = 1$. Por tansitividade, existe $l \in \mathbb{N}$ e $v \in W^l_{a^p a}$ com $\psi(v) = id$. Consequêntemente, por $w_1, w_2, ..., w_k \in W^n_{a,a^p}$, temos $w* := (w_1 v w_2 v ... w_k v) \in W^{k(n+1)}_{aa}$ e, para $x \in [w*]$,

$$\Phi_{k(n+1)}(x) \geq (\hat{D_n}^{-1} \cdot \inf\{\Phi_l(y) : y \in [va]\})^k \cdot \prod_{i=1}^k \pi(x, w_i)$$

Isso dá origem a seguinte estimativa $\langle\chi_{(id)}, P_n^k(\chi_{(id)})\rangle$ em termos da função partição $\mathscr{Z}_{a,id}^{k(n+1)}$ com respeito a T como definido acima.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k}\log\langle\chi_{(id)}, P_n^k(\chi_{id})\rangle &= \frac{1}{k}\log \sum_{g_1,\cdots,g_k\in G:\psi(g_1),\cdots\psi(g_k)=id} \pi(g_1)\cdots\pi(g_k) \\
&\leq \frac{1}{k}\log \sum_{v\in W^l_{a p_a}:\psi(g_1),\cdots\psi(g_k)=id} \Phi_n(\tau_v(g_1))\cdots\Phi_n(\tau_v(g_k))\cdot C_n^{\pm k}\cdot \hat{D_n}^{\pm k} \\
&= \frac{1}{k}\log(\mathscr{Z}_{[a,id]}^{nk+kl}) \pm \frac{1}{k}\log C_n \pm \frac{1}{k}\log D_n \\
&= \frac{n}{kn}\log\mathscr{Z}_{[a,id]}^{nk+kl}
\end{aligned}$$

Então,

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\langle\chi_{id}, P_n^k(\chi_{id})\rangle \leq \limsup_k \frac{n}{nk}\log\mathscr{Z}_{[a,id]}^{nk+kl}.$$

Daí,

$$\log(\rho_n) \leq \limsup_k \frac{n}{nk}\log\mathscr{Z}_{[a,id]}^{nk+kl},$$

logo,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(\rho_n) \leq \limsup_n \frac{1}{n}\log\mathscr{Z}_{[a,id]}^{nk+kl} = P_G(T)$$

Pois, como P_n^2 é um operador positivo ($\langle\chi_{id}, P_n^2(\chi_{id})\rangle \leq 0$) com $\|P_n^2\| = \rho_n^2$, obtemos tomando o limite para $k\to\infty, k\in 2\mathbb{N}$ e então para $n\to\infty$ temos o que desejamos

$$\limsup_n \frac{1}{n}\log\rho_n \leq P_G(T).$$

Portanto, provamos que se G é um grupo ameno, então $P_G(\theta) = P_G(T)$. □

3.4 O Teorema de Kesten para extensão por grupo

O ingrediente essencial da prova do Teorema 3.1 foi o fato de que uma medida de probabilidade simétrica define um operador simétrico $l^2(G)$. Assim, a fim de provar o resultado análogo do resultado de Kesten para extensões por grupos de cadeias de Markov topológicas, resta mostrar que $P_G(\theta) = P_G(T)$ implica amenidade, onde é invetigado o uso da fórmula do raio espectral aplicado a operadores simétricos em $l^2(G)$ como, por exemplo, em [9]. No entanto, o passo fundamental aqui é cuidadosamente analisar um mergulho em $l^2(G)$ e usar um argumento baseado na rotundidade uniforme para mostrar que no caso de grupos amenos, quase autofunções são funções indicadoras. Os argumentos da prova contam com fortes propriedades da base ser topologicamente misturadora. Ou seja, teremos que assumir que a base tem a propriedade g.i.p (grandes imagens e pré-imagens). Como uma primeira consequência da propriedade, obtemos a existencia de um subconjunto finito de W^∞ com as seguintes propriedades:

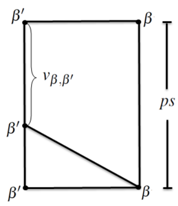
Lema 3.2. *Seja (X,T) uma extensão por grupo topologicamente transitiva de (Σ_A,θ), donde (Σ_A,θ) tem a propriedade de grandes imagens e pré-imagens (g.i.p). Então, existe $n\in\mathbb{N}$ e um subconjunto finito J de W^n tal que para cada par (β,β') com $\beta,\beta'\in I_{g.i.p}$ existe $w_{\beta,\beta'}\in J$ tal que $(w_{\beta,\beta'})\in W^n$ e $\psi_n(w_{\beta,\beta'})=$ id.*

Demonstração. Como T é topologicamente transitiva, temos que existe $p\in\mathbb{N}$, p o período de (X,T) e $B_1,B_2,...,B_p$ tal que $B_1\dot\cup...\dot\cup B_p=\Sigma_A$ e $T^p|_{B_i}$ é topologicamente misturadora com $i=1,...,p$ (ver [1] proposição 4.2.2). Então, para cada $a\in W$, $\exists N_a\in\mathbb{N}$ tal que

$$T^{ps}([a,g])\supset[a,g], \text{para todo } s\geq N_a \text{ e } g\in G.$$

Por isso, para cada par $(\beta,\beta')\in I^2_{g.i.p}\subset W^2$ com (β',β) admissível, temos $N_{\beta,\beta'}$ tal que para cada $s\geq N_{\beta,\beta'}$ existe $v_{\beta,\beta'}\in W^{ps-2}$ tal que $(\beta'\beta v_{\beta,\beta'}\beta')$ é admissível e

$$\begin{aligned}\psi_{ps}(\beta'\beta v_{\beta,\beta'}) =& id\\ &\Rightarrow id=\psi_1(\beta').\psi_{ps-1}(\beta v_{\beta,\beta'})\\ &\Rightarrow id=\psi_{ps-1}(\beta v_{\beta,\beta'}).\psi_1(\beta')\\ &\Rightarrow id=\psi_{ps}(\beta v_{\beta,\beta'}\beta').\end{aligned}$$



Dado que $I_{g.i.p}$ é finito, segue que existe $k:=max\{pN_{\beta,\beta'}:(\beta,\beta'\in I_{g.i.p})\}$ tal que $v_{\beta,\beta'}$ pode ser escolhido para ser um elemento de W^{k-2}. Pela possível inclusão de um número finito de estados, podemos assumir sem perda de generalidade que o subsistema de Σ_A com $I_{g.i.p}$ é topologicamente misturadora. Segue-se daí que existe algum $l\in\mathbb{N}$ tal que cada par $(\beta_0,\beta_l)\in I_{g.i.p}$ podem ser conectados por uma palavra admissível da forma

$$w_{\beta_0,\beta_l}:=(\beta_0 v_{\beta_0,\beta_1}\beta_1\beta_2 v_{\beta_2,\beta_3}\beta_3\beta_4...v_{\beta_{l-1},\beta_l}\beta_l).$$

A afirmação segue com $J:=\{w_{\beta,\beta'}:\beta,\beta'\in I_{g.i.p}\}$

□

Uma consequência da propriedade de grandes imagens e pré-imagens é a existência de uma medida invariante Gibbs. Isto é, se (Σ_A, θ) tem a propriedade de grandes imagens e pré-imagens e o $\log\varphi$ é Hölder contínua e somável ($\|L_\varphi(1)\|_\infty < \infty$), então existe a $\exp(-P_G(\theta,\varphi)).\varphi$ (μ medida Gibbs) e uma autofunção h Hölder-contínua tal que $hd\mu$ é uma medida de probabilidade invariante. Nota-se que (Σ_A, θ) tem a propriedade de Gibbs-Markov (ou seja, $\mu(A) = 0 \Leftrightarrow \mu(\theta^{-1}(A)) = 0$) e $\log\frac{d\mu\circ\theta}{d\mu}$ Hölder). A função $\log h$ é uniformemente limitada por cima e por baixo, assumiremos a partir de agora, sem perda de generalidade, que $P_G(\theta,\varphi) = 0$ e $L_\varphi(1) = 1$, no qual pode ser verificada facilmente a partir do teorema abaixo de Sarig (ver [19]).

Teorema 3.3. *Seja (Σ_A, θ) a cadeia de Markov topológica com a propriedade (g.i.p) e o potencial φ somável, então existe $h \geq 0$ tal que $L_\varphi(h) = e^{P_G(\theta)} \cdot h$ e $\log h$ é Hölder contínua.*

Vamos verificar que $L_\varphi(1)(x) = 1$, onde $\varphi^* = e^{-P_G(\theta)}\varphi\frac{h}{h\circ\theta}$ e pela proposição $L_\varphi(h) = e^{P_G(\theta)} \cdot h$. Então,

$$\begin{aligned}
L_{\varphi^*}(1)(x) = \sum_{\theta y = x} e^{-P_G(\theta)}\varphi(y)\frac{h(y)}{h(\theta y)}.1 &= e^{-P_G(\theta)}\sum_{\theta y=x}\varphi(y)\frac{h(y)}{h(x)} \\
&= e^{-P_G(\theta)}\frac{1}{h(x)}\sum_{\theta y=x}\varphi(y)h(y) \\
&= e^{-P_G(\theta)}\frac{1}{h(x)}L_\varphi(h)(x) \\
&= e^{-P_G(\theta)}\frac{1}{h(x)}e^{P_G(\theta)}h(x) = 1
\end{aligned}$$

Agora, verifiquemos que $P_G(\theta) = 0$.

Seja $Z_{n,\varphi} = \displaystyle\sum_{\theta^n x = x, x\in[a]} \varphi_n(x) = \sum_{\theta^n x = x, x\in[a]} e^{-nP_G(\theta)}\varphi_n(x)\frac{h(x)}{h(\theta^n(x))}$. Então, para $C := \sup_{x\in\Sigma_A} h(x)$

$$\begin{aligned}
P_G(\theta,\varphi) = \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(Z_{n,\varphi}) &= \limsup\frac{1}{n}(-nP_G(\theta) + \log\sum_{\theta^n x=x, x\in[a]}\varphi_n(x)\frac{h(x)}{h\circ(\theta^n(x))}) \\
&= \limsup\frac{1}{n}(-P_G(\theta) + \log(\sum_{\theta^n x=x, x\in[a]}\varphi_n(x).C^{\pm 2})) \\
&= \limsup\frac{1}{n}(-nP_G(\theta) + \log\sum\varphi_n(x) \pm 2\log C) \\
&= -P_G(\theta) + \limsup\frac{1}{n}\log\sum\varphi_n(x) \pm \limsup\frac{1}{n}2C
\end{aligned}$$

Temos que $\limsup \frac{1}{n} \log \sum \varphi_n(x) = P_G(\theta)$ e $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} 2C = 0$. Logo

$$P_G(\theta,\varphi) = -P_G(\theta,\varphi) + P_G(\theta,\varphi) = 0,$$

como queríamos.

A existência da medida μ dá origem à seguinte definição de $\mathscr{H}_1$ e $\mathscr{H}_\infty$. Dada uma função mensurável $f : X \to \mathbb{R}$, $g \in G$ e $p = 1$ ou $p = \infty$, definimos a norma $\|f\|_p^g := \|f(.,g)\|_p$

$$[\![f]\!]_p := \sqrt{\sum_{g\in G} (\|f\|_p^g)^2} \text{ e } \mathscr{H}_p := \{f : X \to \mathbb{R}; [\![f]\!]_p < \infty\}.$$

Portanto, temos o conjunto $\mathscr{H}_c := \{f \in \mathscr{H} : f$ é constante em $X_g, \forall g \in G\}$ e $\rho := \exp(P_G(T,\varphi))$

Proposição 3.4. *Os espaços de funções* $(\mathscr{H}_1, [\![\cdot]\!]_1)$ *e* $(\mathscr{H}_\infty, [\![\cdot]\!]_\infty)$ *são espaços de Banach, os operadores* $\mathscr{L}_\varphi^k := \mathscr{H}_\infty \to \mathscr{H}_\infty$ *são limitados e existe* $c \geq 1$ *tal que* $[\![\mathscr{L}_\varphi^k]\!]_\infty \leq c$, $\forall k \in \mathbb{N}$. *Portanto,* $\Lambda_k := \sup(\{\frac{[\![\mathscr{L}_\varphi^k(f)]\!]_1}{[\![f]\!]_1}; f \geq 0, f \in \mathscr{H}_c\}) \leq 1$ *e* $\limsup_{k\to\infty}(\Lambda_k)^{\frac{1}{k}} \geq \rho$

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar que os espaços de funções $(\mathscr{H}_p, [\![.]\!]_p)$ são espaços de Banach lembrando que $\mathscr{H}_p := \{f : X \to \mathbb{R} : [\![f]\!]_p < \infty\}$.

i) $\mathscr{H}_p$ é um espaço vetorial:

- **a)** $0 \in \mathscr{H}_p$
- **b)** $[\![\lambda f]\!]_p = \sqrt{\sum_{g\in G}(\|\lambda f\|_p^g)^2} = \sqrt{|\lambda|^2 \sum_{g\in G}(\|f\|_p^g)^2} = |\lambda|\sqrt{\sum_{g\in G}(\|f\|_p^g)^2} < \infty$ com $f \in \mathscr{H}_p$
- **c)** $[\![f+h]\!]_p = \sqrt{\sum_{g\in G}(\|f+h\|_p^g)^2} \leq \sqrt{\sum_{g\in G}(\|f\|_p^g + \|h\|_p^g)^2} < \infty$ com $f,h \in \mathscr{H}_p$

ii) $\mathscr{H}_p$ é normado:

- **a)** $[\![\lambda f]\!]_p = 0 \Rightarrow \|\|f\|_p^g\|_{l^2(G)} = 0 \Rightarrow \|f\|_p^g = 0 \forall g \in G$, por $l^2(G)$ ser normado $\Rightarrow f|_{X_g} = 0$ quase todo ponto (q.t.p), por $L^p(\mu)$
- **b)** $[\![\lambda f]\!]_p = |\lambda| [\![f]\!]_p$
- **c)** $[\![f+h]\!]_p = \|\|f+h\|_p^g\|_{l^2(G)} \leq \|\|f\|_p^g + \|h\|_p^g\|_{l^2(G)} \leq [\![f]\!]_p + [\![h]\!]_p$

iii) $\mathscr{H}_p$ é completo: Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $\mathscr{H}_p$, então como $l^2(G)$ é um espaço de Banach, faz-se um mergulho desta norma em $l^2(G)$, e então temos que $\|f_n\|_p^g$ converge.

Agora, mostremos que os operadores $\mathscr{L}_\varphi^k := \mathscr{H}_\infty \to \mathscr{H}_\infty$ são limitados e existe $c \geq 1$ tal que $[\![\mathscr{L}_\varphi^k]\!]_\infty \leq c$. Seja $f \in \mathscr{H}_\infty$ e $k \in \mathbb{N}$, usando a desigualdade de Jensen (ver [17]) e a conformalidade de μ, então:

$$\begin{aligned}
[\![\mathscr{L}_\varphi^k(f)]\!]_\infty^2 &\leq \sum_{g\in G} \|\mathscr{L}_\varphi^k(f)(g)\|_\infty^2 \\
&= \sum_{g\in G} \left| \sup_x \sum_{v\in W^k} \varphi_k \circ \tau_v(x) f(g\psi_k(v)^{-1}) \right|^2 \\
&\leq \sum_{g\in G} \sup_x \sum_{v\in W^k} |\varphi_k \circ \tau_v(x) f(g\psi_k(v)^{-1})|^2 \\
&= \sum_{g\in G} \sup_x \sum_{v\in W^k} \varphi_k \circ \tau_v(x) |f(g\psi_k(v)^{-1})|^2 \\
&\leq c \cdot \sum_{v\in W^k} \mu([v]) [\![f]\!]_\infty^2 \\
&= c \cdot [\![f]\!]_\infty^2
\end{aligned}$$

onde c é dado pela propriedade da medida de Gibbs μ em Σ_A. Daí, c é um limite superior para $[\![\mathscr{L}_\varphi^k]\!]_\infty$, independente de k.

Finalmente veremos que $\Lambda_k := \sup(\{\frac{[\![\mathscr{L}_\varphi^k(f)]\!]_1}{[\![f]\!]_1}; f \geq 0, f \in \mathscr{H}_c\}) \leq 1$ e $\limsup_{k\to\infty}(\Lambda_k)^{\frac{1}{k}} \geq \rho$.

Seja $f \in \mathscr{H}_c$. Segue a partir da conformalidade de μ que

$$\begin{aligned}
[\![\mathscr{L}_\varphi^k(f)]\!]_1 &\leq \sum_{v\in W^k} [\![\varphi_k \circ \tau_v . f \circ \tau_v]\!]_1 \\
&= \sum_{v\in W^k} \left(\sum_{g\in G} \left(\int |\varphi_k \circ \tau_v f \circ \tau_v(\cdot, g)| d\mu\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{v\in W^k} \left(\sum_{g\in G} \mu([v])^2 f(x, g\psi_k(v)^{-1})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= [\![f]\!]_1,
\end{aligned}$$

onde $x \in \Sigma_A$ é arbitrário. Portanto, $\Lambda_k \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Observe que a propriedade de Gibbs para μ implica que

$$[\![\mathscr{L}_\varphi^n(\chi_{X_{id}})]\!]_1 \geq \|\mathscr{L}_\varphi^n(\chi_{X_{id}})\|_1^{id} = \sum_{v:\psi_n(v)=id} \mu([v]) \gg \sum_{x:T^n(x,id)=(x,id)} \varphi_n(x) \geq Z_{a,id}^n$$

para todo $a \in W^1$. Portanto, $\limsup_{n\to\infty}(\Lambda_n)^{\frac{1}{n}} \geq \rho$.

$\square$

A prova do resultado seguinte é inspirada por um argumento de Day (ver [4], Lema 4) que se baseia na rotundidade de $l^2(G)$. Recordemos que um espaço de Banach $(B, \|\cdot\|)$ é uniformemente rotundo (ou estritamente convexo) se para todo $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo f, g com $\|f - g\| \geq \delta$ e $\|f\| = \|g\| = 1$, então $\|f + g\| \leq 2 - \varepsilon$. Note que o espaço $\mathscr{H}$ não tem esta propriedade, mas o subespaço fechado $\mathscr{H}_c$ é isomorfo a $l^2(G)$. Uma vez que o $l^2(G)$ é uniformemente rotundo, segue-se que $\mathscr{H}_c$ tem esta boa propriedade.

Este lema é de grande importância para a demostração do teorema [3.6], será enunciado e demonstrado em duas etapas. Inicialmente vamos fazer uma prova mais simples, onde vamos considerar Σ_A como o shift completo, o potencial constante ($\varphi|_{[a]}$ constante para todo $a \in W^1$) e $|W^1| < \infty$. Daí comentaremos sobre as hipóteses caso fossem retiradas e então faremos a prova com as hipóteses pedidas no lema e no Teorema 3.6.

Lema 3.5. *Seja $\rho = 1$. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, dado $\varepsilon > 0$ existe $f \in \mathscr{H}_c$ com $f \geq 0$ e $[\![\mathscr{L}_\varphi^n(f) - f]\!]_1 \leq \varepsilon [\![f]\!]_1$.*

Demonstração. (Assumindo que Σ_A é um shift completo, o potencial é constante e $|W^1| < \infty$). Por hipótese temos que $\rho = 1$, ou seja, $P_G(T) = P_G(\theta) = 0$, daí $e^{P_G(T)} = 1$. Afirmamos que,

$$\inf\{[\![\mathscr{L}^k(f) - f]\!]_1 : f \in \mathscr{H}_c, [\![f]\!]_1 = 1\} = 0$$

A estratégia da prova é supor $\delta_1 := \inf\{[\![\mathscr{L}^k(f) - f]\!]_1 : f \in \mathscr{H}_c, [\![f]\!]_1 = 1\} > 0$, com k dado tal que $J \subset W^k$ subconjunto finito dado pelo Lema 3.2, então vamos obter a contradição $\rho \neq 1$. Para facilitar a notação, vamos notar $\varphi_v = \varphi \circ \tau_v$ e $f_v = f \circ \tau_v$.

Suponha, para todo $f \in \mathscr{H}_c, [\![f]\!] = 1, [\![\mathscr{L}^k(f) - f]\!]_1 \geq \delta_1$. Usando $\mathbb{L}_\varphi(1) = 1$, a desigualdade triangular e que o potencial é constante, obtemos

$$\begin{aligned}\delta_1 \leq [\![\mathscr{L}^k(f) - f]\!]_1 &= [\![\mathscr{L}^k(f) - 1.f]\!]_1 = [\![\mathscr{L}^k(f) - \mathscr{L}^k(1)f]\!]_1 \\ &= [\![\sum_{v \in W^k} \varphi_v (f_v - f)]\!]_1 \leq \sum_{v \in W^k} \varphi_v [\![f_v - f]\!]_1\end{aligned}$$

A partir de um argumento de soma convexa, temos que existe $w \equiv w_f$ (pois depende de f) tal que $\delta_1 \leq [\![f_w - f]\!]_1$. Então,

$$\begin{aligned}[\![f_w - f]\!]_1^2 &= \sum_{g \in G} \left(\int |f_w(x,g) - f(x,g)| \chi_{\theta^k([w]) \times G} d\mu(x)\right)^2 \\ &= \sum_{g \in G} (|f_w(x, g\psi_w^{-1}) - f(x,g)|)^2 \\ &= \|\widehat{f}_w - \widehat{f}\|_{l^2(G)}^2\end{aligned}$$

Na última passagem referimos $\widehat{f}(g\psi_w^{-1}) = f_w(x, g\psi_w^{-1})$ e $\widehat{f}(g) = f(x,g)$. Como o espaço $\mathscr{H}_c$ é uniformemente rotundo, então temos que existe uma constante uniforme

$\delta_2 > 0$ tal que $\frac{1}{2}\|\widehat{f_w}+\widehat{f}\|_{l^2(G)} < 1-\delta_2$, e pelo Lema 3.2, existe u tal que $\psi_n(u) = id$. Então, como f é constante e $f_u = f$ obtemos ainda que

$$\frac{1}{2}\|\widehat{f_w}+\widehat{f_u}\|_{l^2(G)} < 1-\delta_2,$$

e daí, $\frac{1}{2}[\![f_w(x,\cdot)+f_u(x,\cdot)]\!]_1 < 1-\delta_2$
Portanto,

$$\begin{aligned}
[\![\mathscr{L}^k(f)]\!] &\leq \sum_{v\neq w,u} [\![\varphi_v.f_v]\!] + [\![\varphi_w.f_w+\varphi_u.f_u]\!] \\
&\leq \sum_{v\neq w,u} \varphi_v[\![f_v]\!] + [\![(\varphi_w-\alpha)f_w+(\varphi_u-\alpha)f_u]\!] + \alpha[\![f_w+f_u]\!] \\
&\leq \sum_{v\in W^k} \varphi_v - 2\alpha + 2\alpha(1-\delta_2) \\
&= 1-2\alpha\delta_2
\end{aligned}$$

onde $2\alpha := \inf\{\varphi_v : v\in W^k\} > 0$ e usamos também acima que $[\![f_v]\!] = 1$.

Logo, $\sup \frac{[\![\mathscr{L}^{kn}(f)]\!]}{[\![f]\!]} =: \rho^n \leq (1-2\alpha\delta_2)^n$. Chegando num absurdo. Provando o lema 3.5 no caso mais simples.

$\square$

Comentários: A demonstração da versão deste lema, ao qual são utilizadas hipóteses como o conjunto de palavras $|W^1| < \infty$, o potencial φ constante e a aplicação shift sendo completa, torna-o mais fácil e interessante para entender todo o processo da demonstração. Vale agora fazer algumas observações, no qual, tirando estas hipóteses acima sitadas, o que mudaria na demostração e como seria solucionado. Daí, depois faremos a prova completa do lema.

1) Se $|W^1| = \infty$;

   Supomos na prova acima que $2\alpha := inf\{\varphi_v : v\in W^k\} > 0$, mas se $|W^1| = \infty$, não poderiamos garantir esta desigualdade. Uma solução para isso, é tomar um subconjunto W^p finito (é possível) e $w \equiv w_f \in W^p \subset W^k$.

2) Se o potencial φ é considerado não constante;

   Temos $\sum_{v\in W^k}[\![\varphi_v(f_v-f)]\!] \ll \sum_{v\in W^k}\mu([v])[\![f_v-f]\!]$, por um argumento da medida μ ser φ-conforme, onde $\sum_{v\in W^k}\varphi_v \ll \sum_{v\in W^k}\mu([v])$. Daí a solução, seria fazer esta troca em toda a demonstração.

3) Se a aplicação shift não é completa.

   Temos que $\chi_{\theta^k([w_f])\times G}$ não tem valor sempre 1. Daí, na passagem da prova acima da equação $\frac{1}{2}[\![f_w(x,\cdot)+f_u(x,\cdot)]\!] \leq 1-\delta_2$ temos que substituir $f_w(x,\cdot)$ por

$f \circ \tau_w \chi_{\theta^k([w]) \times G}$ e $f_u(x,\cdot)$ por $f \circ \tau_u \chi_{\theta^k([u]) \times G}$. Além disso, na passagem $f_u = f$, temos $f_u = f \circ \tau_u \chi_{\theta^k([u]) \times G}$. Faremos uma modificação $[\![\mathscr{L}^k(f)]\!]_1 \leq 1 - 2\alpha\delta_2$ por $\|\mathscr{L}^k f(x,\cdot)\|_{l^2(G)} \leq 1 - 2\alpha\delta_2$ e a solução é obter uma estimativa $\|\mathscr{L}^{kn}(f)(x,\cdot)\|_{l^2(G)} \leq (1-2\alpha\delta_2)^n$.

4) Faremos também uma construção iterada (decaimento exponencial) para encontrar o desejado.

Agora, estamos em condições de fazer a demostração do lema.

Demonstração. (Caso geral) É equivalente escrever o resultado, se $\rho = 1$, então existe $n \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathscr{H}_c$ com $f \geq 0$ tal que $\inf\{\frac{[\![\mathscr{L}_\varphi^n(f) - f]\!]_1}{[\![f]\!]_1}\} = 0$. Faremos uma prova por contra positiva. Seja k dado tal que $J \subset W^k$ subconjunto finito (dado pelo Lema [3.2]) e seja $\delta_1 := \inf\{\frac{[\![\mathscr{L}_\varphi^k(f) - f]\!]_1}{[\![f]\!]_1} : f \in \mathscr{H}_c, f \geq 0, f \neq 0\} > 0$

Passo 1: Começamos mostrando que $\delta_1 > 0$ implica que existe um conjunto finito de palavras tal que, para todo $x \in \Sigma_A$ e $f \in \mathscr{H}_c$, a estimativa (6) abaixo vale e duas palavras arbitrárias podem ser unidas por elementos deste conjunto finito.

Escolha um conjunto finito $W^* \subset W^k$ com $\sum_{v \in W^k \setminus W^*} \mu([v]) \leq \delta/4$. Para $f \in \mathscr{H}_c$, tem-se que

$$[\![\sum_{v \in W^k \setminus W^*} \varphi_k \circ \tau_v . f \circ \tau_v]\!]_1 \leq \sum_{v \in W^k \setminus W^*} [\![\varphi_k \circ \tau_v . f \circ \tau_v]\!]_1 \leq \sum_{v \in W^k \setminus W^*} \mu([v])[\![f]\!]_1 \leq \delta_1 [\![f]\!]_1/4$$

Usando $L_\varphi(1) = 1$ e a desigualdade triangular, em seguida temos:

$$\begin{aligned}
\delta_1 [\![f]\!]_1 &\leq [\![\mathscr{L}_\varphi^k(f) - f]\!]_1 = [\![\mathscr{L}_\varphi^k(f) - 1.f]\!]_1 \\
&= [\![\mathscr{L}_\varphi^k(f) - \mathscr{L}_\varphi^k(1) f]\!]_1 \\
&= [\![\sum_{v \in W^k} \varphi_k \circ \tau_v (f \circ \tau_v - f)]\!]_1 \\
&\leq \sum_{v \in W^*} [\![\varphi_k \circ \tau_v (f \circ \tau_v - f)]\!]_1 + [\![\sum_{v \notin W^*} \varphi_k \circ \tau_v (f \circ \tau_v - f)]\!]_1 \\
&= \sum_{v \in W^*} [\![\varphi_k \circ \tau_v (f \circ \tau_v - f)]\!]_1 + [\![\sum_{v \notin W^*} \varphi_k \circ \tau_v . f \circ \tau_v)]\!]_1 + [\![\sum_{v \notin W^*} \varphi_k \circ \tau_v . f]\!]_1 \\
&\leq \sum_{v \in W^*} \mu([v]) [\![(f \circ \tau_v - f)\chi_{\theta^k([v]) \times G}]\!]_1 + 2\delta_1 [\![f]\!]_1/4
\end{aligned}$$

Então,

$$\delta_1 [\![f]\!]_1 \leq \sum_{v \in W^*} \mu([v]) [\![(f \circ \tau_v - f)\chi_{\theta^k([v]) \times G}]\!]_1 + \delta_1 [\![f]\!]_1/2.$$

A partir de um argumento de soma convexa, temos que existe $w \equiv w_f \in W^*$ tal que $[\![(f \circ \tau_{w_f})\chi_{\theta^k([v]) \times G}]\!]_1 \geq \delta_1 [\![f]\!]_1/2$. Note que a propriedade de grandes imagens e pré-imagens implica que $\mu(\theta^k([v]))$ é uniformemente limitada inferiormente para todo $v \in$

W^k. De fato, pela propriedade g.i.p temos que existe $\beta \in I_{g.i.p}$ tal que $v\beta$ é admissível, então $\theta^k([v]) \supset [\beta]$ o que garante que $\mu(\theta^k([v])) \geq \mu([\beta]) \geq \min\{\mu([\beta]); \beta \in I_{g.i.p}\}$.

Seja $\widehat{f}(g)$ referindo a $f(x,g)$. Obtemos que:

$$\begin{aligned}[\![(f \circ \tau_{w_f} - f)\chi_{\theta^k([w]) \times G}]\!]_1 &= \left(\sum_{g \in G} (\int |f \circ \tau_{w_f} - f| \chi_{\theta^k([w])} d\mu(x,g))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \mu(\theta^k([w_f])) \|\widehat{f} - \widehat{f}(\cdot \psi_{w_f}^{-1})\|_{l^2(G)} \ll \|\widehat{f} - \widehat{f}(\cdot \psi_{w_f}^{-1})\|_{l^2(G)}\end{aligned}$$

Para $x \in \Sigma_A$ e $a \in I_{g.i.p}$ com $[a] \subset \theta^k([w_f])$, escolha $w_a, w_x \in J$ tal que $x \in \theta^k([w_x])$, $(w_a a)$ é admissível, e $u := (w_a w_x), v := (w_f w_x)$ em W^{2k}. Uma vez que $\psi_k(w_a) = \psi_k(w_x) = id$ e $f \in \mathscr{H}_c$, temos $\psi_{2k}(u) = \psi_{2k}(w_a w_x) = \psi_k(w_a)\psi_k(w_x) = id$ e $\psi_{2k}(v) = \psi_{2k}(w_f w_x) = \psi_k(w_f)\psi_k(w_x) = \psi_k(w_f)$. A rotundidade uniforme de $\mathscr{H}_c$ (pois $\mathscr{H}_c$ é isomorfo $l^2(G)$) implica que existe uma constante uniforme $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|f \circ \tau_u(x,\cdot) + f \circ \tau_v(x,\cdot)\|_{l^2(G)} \leq 2(1-\delta_2)[\![f]\!]_1, \forall x \in [a]. \tag{6}$$

Então, podemos escolher $w_a \in J$ tal que existe $\beta \in I_{g.i.p}$ com $[w_a] \cup [w_f] \subset \theta([\beta])$. Substituindo u e v com (wu) e (wv), respectivamente, para alguma palavra admissível $w \in J^{m-2}$ e $m \in \mathbb{N}$ (será definido mais adiante), pode-se assumir que existe um subconjunto finito $W^p \subset W^{mk}$ com a seguinte propriedade: Para todo $w_i \in W^{n_i}, i = 1,2$ e $f \in \mathscr{H}_c$, existe $u(w_1, f, w_2)$ e $v(w_1, f, w_2)$ em W^p tal que:

1) a estimativa (6) vale para $u := u(w_1, f, w_2)$ e $v := v(w_1, f, w_2)$ com $x \in [w_2]$;

2) as primeiras $k(m-2)$ letras de $u(w_1, f, w_2)$ e $v(w_1, f, w_2)$ coincidem;

3) $w_1 u(w_1, f, w_2) w_2$ e $w_1 v(w_1, f, w_2) w_2$ são admissíveis.

Passo 2: A fim de obter a estimativa (8) abaixo, provamos que as "oscilações"do potencial φ pode ser absorvido pelo fator uniforme de (6). Observe que por $\log \varphi$ ser Hölder contínua, podemos escolher m tal que, dado $\tau_u(x)$ e $\tau_v(x) \in W^p$, temos

$$|\log \Phi_n \circ \tau_{w_1}(\tau_u(x)) - \log \Phi_n \circ \tau_{w_1}(\tau_v(x))| \leq cr^n$$

$$|\log \frac{\Phi_n \circ \tau_{w_1}(\tau_u(x))}{\Phi_n \circ \tau_{w_1}(\tau_v(x))}| \leq \sqrt{1-\delta_2}$$

$$\sqrt{1-\delta_2} \leq \frac{\Phi_n \circ \tau_{w_1}(\tau_u(x))}{\Phi_n \circ \tau_{w_1}(\tau_v(x))} \leq (\sqrt{1-\delta_2})^{-1} \tag{7}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $w_1 \in W^n$. Além disso, como $|W^p| < \infty$, temos:

$$2\alpha := \inf(\{\Phi_{mk}(\tau_u(x)) : x \in \theta^{mk}([u]), u \in W^p\}) > 0.$$

Dividindo cada $u \in W^p$ em duas palavras u_1 e u_2 e definindo $\Phi_{mk}(\tau_{u_2}(x)) := \Phi_{mk}(\tau_u(x)) - \alpha$ e $\Phi_{mk}(\tau_{u_1}(x)) := \alpha$ para cada $x \in \theta^{mk}([u])$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\Phi_{mk}(\tau_u(x)) = \alpha, \forall x \in \theta^{mk}([u])$ e $u \in W^p$.

Combinando as considerações acima, temos condições de provar a estimativa principal com respeito a W^p, para uma dada função $f \in \mathscr{H}_c$ e $(k+1)$ palavras finitas $w_i \in W^{n_i}$, para $i = 0, 1, ..., k$. Para uma palavra finita w, o conjunto $f_w(x, g) := f(\tau_w(x), g\psi_w^{-1})$, e defina por indução, para $j = 1, 2, \ldots, k$,

$$f_j := \sum_{(i_1,\ldots,i_{j-1})\in\{1,2\}^{j-1}} f_{w_0 u_1^{(i_1)} w_1 \ldots u_{j-1}^{(i_{j-1})} w_{j-1}},$$

onde $u_j^{(1)} := u(w_{j-1}, f, w_j), u_j^{(2)} := v(w_{j-1}, f, w_j)$ Então temos, onde $N := n_0 + n_1 + \ldots + n_n + nmk$,

$$\begin{aligned}
&\| \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,2\}^n} \phi_N(\tau_{w_0 u_1^{(i_1)} w_1 \ldots u_n^{(i_n)} w_n}(x)).f(\tau_{w_0 u_1^{(i_1)} w_1 \ldots u_n^{(i_n)} w_n})(x,\cdot)\|_{l^2(G)} \\
&\leq \left(\max_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,2\}^n} \phi_N(\tau_{w_0 u_1^{(i_1)} \ldots u_n^{(i_n)} w_n})(x) \right) \| \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,2\}^n} \widehat{f}_{w_0 u_1^{(i_1)} \ldots w_{n-1}}(\cdot \psi_{w_n}^{-1} \psi_{u_n^{(i_n)}}^{-1}) \|_{l^2(G)} \\
&= \left(\max_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,2\}^n} \phi_N(\tau_{w_0 u_1^{(i_1)} \ldots u_n^{(i_n)} w_n})(x) \right) \| \sum_{i_n\in\{1,2\}} \widehat{f}_n(\cdot \psi_{u_n^{(i_n)}}^{-1}) \|_{l^2(G)} \\
&\leq \left(\max_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,2\}^n} \phi_N(\tau_{w_0 u_1^{(i_1)} \ldots u_n^{(i_n)} w_n})(x) \right) (2(1-\delta_2)) \| \sum_{i_{n-1}\in\{1,2\}} \widehat{f}_{n-1}(\cdot \psi_{u_{n-1}^{(i_{n-1})}}^{-1}) \|_{l^2(G)}
\end{aligned}$$

Combinando (7) com $\varphi_{mk}|_{[u]} = \alpha, \forall u \in W^p$, obtemos que, com $\delta_3 := 1 - \sqrt{1-\delta_2}$,

$$\begin{aligned}
&\| \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,2\}^n} \phi_N(\tau_{w_0 u_1^{(i_1)} w_1 \ldots u_n^{(i_n)} w_n}(x)).f(\tau_{w_0 u_1^{(i_1)} w_1 \ldots u_n^{(i_n)} w_n})(x,\cdot)\|_{l^2(G)} \\
&\leq \left(\max_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,2\}^n} \phi_N(\tau_{w_0 u_1^{(i_1)} \ldots u_n^{(i_n)} w_n})(x) \right) (2(1-\delta_2))^n [\![f]\!]_1 \\
&\leq \left(\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,2\}^n} \phi_N(\tau_{w_0 u_1^{(i_1)} \ldots u_n^{(i_n)} w_n})(x) \right) (1-\delta_3)^n [\![f]\!]_1 \qquad (8)
\end{aligned}$$

Passo 3: Provemos que $\delta_1 > 0$ implica que $\|\mathscr{L}_\varphi^{nmk}(f)(x,\cdot)\|_{l^2(G)}$ decai exponencialmente e mostremos que esta é uma contradição para a afirmação da Proposicão 3.4. Fixe $f \in \mathscr{H}_c$ e $x \in \Sigma_A$. Para $n \in \mathbb{N}$, referimos a $\mathscr{F}$ como o conjunto de todos os subconjuntos {1,2,...n} e defina, para cada $\omega := \{k_1, k_2, \ldots, k_d\} \in \mathscr{F}$, um subconjunto $\mathscr{V}_\omega \in W^{nmk}$ como segue. A palavra $w = (w_1 \ldots w_n) \in W^{nmk}$ é um elemento de $\mathscr{V}_\omega$ se, e somente se, existe $w_{k_j}^{(i_j)} \in W^p$, para $i_j = 1, 2$ e $j = 1, \ldots, d$ tal que $w_{k_j} = w_{k_j}^{(1)}$ e

$$\| \sum_{*} \phi_{nmk}(\tau_v(x)) f(\tau_v(x,\cdot)) \|_{l^2(G)} \leq \left(\sum_{*} \phi_{nmk}(\tau_v(x)) \right) (1-\delta_3)^{|\omega|} [\![f]\!]_1,$$

onde * representa o somatório sobre todo $v = (v_1 ... v_n)$ com $v_i = w_i$, para $i \notin \omega$ e $v_i \in \{w_i^{(1)}, w_i^{(2)}\}$ para $i \in \omega$. Podemos observar que a construção de $u_i^{(1)}$ e $u_i^{(2)}$ acima e a estimativa (8) implica que $\{\mathscr{V}_\omega : \omega \in \mathscr{F}\}$ é uma cobertura de W^{nmk}. Portanto,

$$\mathscr{V}_\omega^* := \mathscr{V}_\omega \backslash \left(\cup_{\omega \subset \omega', \omega \neq \omega'} \mathscr{V}_{\omega'} \right)$$

define uma partição de W^{nmk}. Portanto, para $\omega := \{k_1, k_2, ..., k_d\}, j \in \{1, ..., d\}$ tal que $k_j - 1 \notin \omega$ e $w_1 ... w_n \in \mathscr{V}_\omega^*$, temos:

$$\sum_{v_1 ... v_{k_j - 1} w_{k_j} ... w_n \in \mathscr{V}_\omega^*} \phi_{mk}(\tau_{v_{k_j-1} w_{k_j} ... w_n}(x)) \leq 1 - 2\alpha,$$

desde que exista pelo menos um par de elementos $w^{(i)} (i = 1, 2) \in W^p$ tal que

$$w_1 ... w^{(1)} w_{k_j} ... w_n \in \mathscr{V}_\omega^* \text{ com } \omega' = \omega \cup \{k_j - 1\}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{L}_\phi^{nmk}(f)(x, \cdot)\|_{l^2(G)} &= \| \sum_{\omega \in \mathscr{F}} \sum_{w \in \mathscr{V}_\omega^*} \phi_{nmk}(\tau_w(x)) \widehat{f}(\cdot \psi_w^{-1}) \|_{l^2(G)} \\
&\leq \sum_{\omega \in \mathscr{F}} (1 - 2\alpha)^{n - |\omega|} (2\alpha)^{|\omega|} (1 - \delta_3)^{|\omega|} [\![f]\!]_1 \\
&= \sum_{j=0}^{n} (1 - 2\alpha\delta)^{n-k} (2\alpha(1 - \delta_3))^k [\![f]\!]_1 \\
&= (1 - 2\alpha\delta)^n [\![f]\!]_1.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Jensen, obtemos

$$[\![\mathscr{L}_\phi^{nmk}(f)]\!]_1 \leq (1 - 2\alpha\delta)^n [\![f]\!]_1.$$

Pela proposição anterior, temos $\limsup_{k \to \infty} \left(\frac{[\![\mathscr{L}_\phi^{nmk}(f)]\!]_1}{[\![f]\!]_1} \right)^{\frac{1}{nmk}} \geq \rho = e^{P_G(T)}$. Como $P_G(T) = P_G(\theta)$ e, sem perda de generalidade, $P_G(T) = 0$, logo $\rho = 1$. Mas,

$$1 \leq \limsup_{k \to \infty} \left(\frac{[\![\mathscr{L}_\phi^{nmk}(f)]\!]_1}{[\![f]\!]_1} \right)^{\frac{1}{nmk}} \leq (1 - 2\alpha\delta)^{\frac{1}{mk}} < 1$$

onde obtemos uma contradição para $\rho = 1$. Portanto, $\delta_1 = 0$.

□

Dessa forma, estamos em posição de provar a recíproca do Teorema 3.6.

Teorema 3.6 (Stadlbauer,2013)**.** *Seja* (Σ_A, θ) *uma cadeia de Markov topológica com a propriedade g.i.p.,* (X,T) *uma G-extensão topologicamente transitiva e o potencial* φ *Hölder contínua e somável* ($\|\mathbb{L}_\varphi(1)\|_\infty < \infty$)*. Então,* $P_G(T,\varphi) = P_G(\theta,\varphi)$ *implica que o grupo G é ameno.*

Demonstração. Assuma, sem perda de generalidade, que $P_G(\theta,\varphi) = 0$ e escolha um subconjunto finito $K \subset G$. Como T é topologicamente transitiva, segue de uma decomposição de T em componentes misturadoras, que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que m é um múltiplo de n visto no Lema 3.5 e $K \subset \{\psi(v) : v \in W^m\}$. Em particular, existe um subconjunto finito $W_K \subset W^m$ com $K = \{\psi(v) : v \in W_K\}$.

Pelo Lema 3.5, temos que existe uma sequência de funções positivas $(f_k) \in \mathscr{H}_c$ com $\lim_{k\to\infty}[\![\mathscr{L}^m(f_k) - f_k]\!] = 0$, com $f_k \geq 0$ e $[\![f_k]\!] = 1, \forall k \in \mathbb{N}$. Note que, em particular, esta igualdade implica também que $\lim_{k\to\infty}[\![\mathscr{L}^m(f_k)]\!] = 1$ .Queremos mostrar inicialmente que

$$[\![(f_k \circ \tau_v - f_k)\chi_{\theta^m([v]\times G)}]\!]_1 \longrightarrow 0, \forall v \in W_k.$$

Suponha que existe $v \in W_K$ com $\liminf[\![(f_k \circ \tau_v - f_k)\chi_{\theta^m([v]\times G)}]\!]_1 > 0$. Pelo mesmo argumento feito no primeiro passo da prova do lema anterior, a rotundidade uniforme implica que $\lim_{k\to\infty}[\![\mathscr{L}^m(f_k)]\!]_1 \leq c$, o qual $c > 1$. Assim chegamos a uma contradição, já que $[\![\mathscr{L}^m(f_k)]\!]_1 = 1$. Por isso, $\liminf_{k\to\infty}[\![(f_k \circ \tau_v - f_k)\chi_{\theta^m([v]\times G)}]\!]_1 = 0, \forall v \in W_K$ e tomando uma subsequência, podemos assumir, sem perda de generalidade, que

$$\lim_{k\to\infty}[\![(f_k \circ \tau_v - f_k)\chi_{\theta^m([v]\times G)}]\!]_1 = 0, \forall v \in W_K. \tag{9}$$

Vamos denotar, como no lema anterior, $\widehat{f_k}(g) := f_k(x,g)$, e obter uma estimativa com as normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$. Usando a desigualdade de Hölder e $h \in G$, temos que

$$\begin{aligned}
\|\widehat{f_k^2}(\cdot) - \widehat{f_k^2}(\cdot h)\|_1 &= \sum_{g\in G} |\widehat{f_k^2}(g) - \widehat{f_k^2}(gh)| \\
&= \sum_{g\in G} |\widehat{f_k}(g) - \widehat{f_k}(gh)| \cdot |\widehat{f_k}(g) + \widehat{f_k}(gh)| \\
&\leq \|\widehat{f_k}(\cdot) - \widehat{f_k}(\cdot h)\|_2 \|\widehat{f_k}(\cdot) - \widehat{f_k}(\cdot h)\|_2 \\
&\leq 2\|\widehat{f_k}(\cdot) - \widehat{f_k}(\cdot h)\|_2. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Por outro lado, agora fixe k (onde definiremos depois) e utilize a seguinte representação de $\widehat{f_k^2}$. Existe $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ e $\lambda_i > 0$ e tome $A_i \subset G$ com $A_i \subset A_{i+1}$, para $1 \leq i < p$, tal que $\widehat{f_k^2} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \chi_{A_i}$, pois $\widehat{f_k} \in \mathscr{H}_c$ e sendo escrita como $\widehat{f_k} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \chi_{A_i}$, o quadrado de $\widehat{f_k}$ ainda assim não muda. Em particular, observe que $\sum_{i=1}^p \lambda_i |A_i| = 1$ e que $(A_i h \backslash A_i) \cap$

$(A_j \backslash A_j h) = \oslash$ por monotocidade de (A_i). Por isso,

$$\begin{aligned}
\|\widehat{f_k^2}(\cdot) - \widehat{f_k^2}(\cdot h)\|_1 &= \sum_{g\in G} |\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \chi_{A_i}(g) - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \chi_{A_i}(gh)| \\
&= \sum_{g\in G} |\sum_{i=1}^{p} \lambda_i (\chi_{A_i}(g) - \chi_{A_i h^{-1}}(g))| \\
&= \sum_{g\in G} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \chi_{A_i \triangle A_i h^{-1}}(g) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i |A_i \triangle A_i h^{-1}| \qquad (11)
\end{aligned}$$

Observando que estas passagens acima utilizou-se argumentos similares à prova do Teorema de Kesten, estamos em condições de provar a amenidade de G. Para $\varepsilon > 0$, escolha k tal que,

$$[\![(f_k \circ \tau_v - f_k)\chi_{\theta^m([v]\times G)}]\!]_1 = \|\widehat{f}_k(\cdot \psi_m(v)^{-1}) - \widehat{f}_k(\cdot)\|_2.$$

Por (9), vamos obter a igualdade

$$\|\widehat{f}_k(\cdot) - \widehat{f}_k(\cdot \psi_m(v)^{-1})\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{|K|}, \forall v \in W_K.$$

Tomamos na estimativa anterior a cardinalidade de K, $|K|$, pois queremos o resultado para todo $v \in W_K$ e não visto somente para h pontualmente, mas para todo $h \in K$.

Daí, combinando a estimativa (10) e a identidade (11), isso implica que

$$\begin{aligned}
\|\widehat{f}_k(\cdot) - \widehat{f}_k(\cdot \psi_m(v)^{-1})\|_2 &\geq \frac{1}{2}\|\widehat{f_k^2}(\cdot) - \widehat{f_k^2}(\cdot \psi_m(v)^{-1})\|_1 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} \lambda_i |A_i \triangle A_i h^{-1}|
\end{aligned}$$

Então,

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} \lambda_i |A_i \triangle A_i h^{-1}| \leq \frac{\varepsilon}{|K|}$$

Daí, existe i tal que

$$\sum_{h\in K} |A_i h \triangle A_i| \leq 2\varepsilon.$$

De fato, suponha que $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \sum_{h\in K} |A_i \triangle A_i h^{-1}| > \varepsilon$. Daí $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} \lambda_i |A_i| \sum_{h\in K} \frac{|A_i \triangle A_i h^{-1}|}{|A_i|} > \varepsilon$, $\forall 1 \leq i \leq p$. Mas $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i |A_i| = 1$, então existe $1 \leq i \leq p$ tal que $\sum_{h\in K} |A_i \triangle A_i h^{-1}| \leq 2|A_i|$. Por propriedade elementar de grupo, onde a função é bijetiva, então temos

$|A_i \triangle A_i h^{-1}|.h = |A_i h \triangle A_i|$. Aqui temos o argumento no qual podemos escolher a autofunção como a função indicadora.

Note que o argumento acima, mostra que para cada conjunto finito K e $\varepsilon > 0$, existe um conjunto A, (K,ε)-Følner, onde A é finito e

$$\sum_{h \in K} |Ah \triangle A| \leq \varepsilon |A|.$$

Observe que para a definição de amenidade, falta mostrar que uma sequência (A_n) Følner, $(A_n \nearrow G)$ e $\cup_n A_n = G$. Logo, faremos a construção, escolhendo uma sequência de conjuntos finitos (K_n) com $K_n \nearrow G$ e assuma, por indução, que A_{n+1} é um conjunto $(K_n \cup A_n, 1/n)$-Følner. Então, é fácil ver que

$$lim_{n\to\infty} \frac{|gA_n \triangle A_n|}{A_n} = 0, \forall g \in G, \text{ pois } \forall g, \ \exists N \text{ tal que } g \in K_n, \ \forall n \geq N.$$

Portanto, conseguimos mostrar que G é ameno.

$\square$

Agora, vamos mostrar uma versão dos teoremas acima, baseada no artigo de Jaerisch (ver [13]). A demonstração de uma implicação do teorema foi baseada no teorema de Stadlbauer e a outra implicação diferencia da apresentada anteriormente, por não precisar de noções de simetria. Vamos enunciar o teorema e antes de demonstrá-lo, definiremos dois operadores e apresentaremos um lema que será utilizado na demonstração do teorema que se segue:

Teorema 3.7. *Seja (Σ_A, θ) a cadeia de Markov topológica topologicamente misturadora com a propriedade g.i.p e seja T uma extensão por grupo associada. Seja φ potencial Hölder contínuo com $P_G(\theta,\varphi) < \infty$. Então, temos que* $\log \rho(\mathscr{L}_\varphi) = P_G(\theta,\varphi)$ *se, e somente se, G é ameno.*

Definição 3.1. Definimos os operadores lineares $A : \mathscr{H}_\infty \to \mathscr{H}_c$ e $T_n : \mathscr{H}_c \to \mathscr{H}_c$, para $f \in \mathscr{H}_\infty$ e $n \in \mathbb{N}$ dado por

$$A(f) := \sum_{g \in G} \left(\int f(\cdot, g) d\mu \right) \chi_{\Sigma \times \{g\}} \text{ e } T_n := A\mathscr{L}_\varphi^n|_{\mathscr{H}_c}.$$

Claramente, os operadores lineares A e T_n são positivos e limitados com $\|A\| = 1$ e $\|T_n\| \leq \|A\| \|\mathscr{L}^n\| = \|\mathscr{L}^n\|$, para cada $n \in \mathbb{N}$. O lema apresentado em seguida e sua prova é muito parecida com a Proposição 3.4, porém vamos fazê-lo pois agora utilizaremos os dois operadores lineares da Definição (3.1).

Lema 3.8. *Assuma as hipóteses do teorema acima e suponha ainda que $L_\varphi(1) = 1$. Então, temos que*

1) $\|T_n\| = \Lambda_n, n \in \mathbb{N}$.

2) $\|T_n\| \leq \|\mathscr{L}_\varphi^n\| \leq C\|T_n\|, n \in \mathbb{N}$.

3) $\lim_{n\to\infty} \|T_n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_n (\Lambda_n)^{\frac{1}{n}} = \rho(\mathscr{L}_\varphi)$.

Demonstração. 1) Seja $n \in \mathbb{N}$. Como T_n é positivo e $[\![T_n(f)]\!]_\infty = \sup_{[\![f]\!]=1} [\![T_n(f)]\!]_1 = \sup [\![A\mathscr{L}_\varphi^n(f)]\!]_1 = \sup [\![\mathscr{L}_\varphi^n(f)]\!]_1 = \Lambda_n$ para cada $f \in \mathscr{H}_c$.

2) Como $\|A\| = 1$, temos $\|T_n\| \leq \|A\|\|\mathscr{L}_\varphi^n\| = \|\mathscr{L}_\varphi^n\|$ provando a primeira desigualdade. Para provar a segunda desigualdade mostramos que

$$\|\mathscr{L}_\varphi^n\| = \sup\{[\![\mathscr{L}_\varphi^n(f)]\!]_\infty : f \in \mathscr{H}_c, [\![f]\!]_\infty = 1\}.$$

Para cada $f \in \mathscr{H}_\infty$, existe $\hat{f} \in \mathscr{H}_c$, dado por $\hat{f}(x,g) := \|f(\cdot,g)\|$, $(x,g) \in \Sigma_A \times G$, satisfazendo $[\![\hat{f}]\!]_\infty = [\![f]\!]_\infty$ e $[\![\mathscr{L}_\varphi^n(f)]\!]_\infty \leq [\![\mathscr{L}_\varphi^n(\hat{f})]\!]_\infty$. Para provar $\|\mathscr{L}_\varphi^n\| \leq C\|T_n\|$, seja $f \in \mathscr{H}_c$. Pela propriedade de Gibbs (4) para μ, existe $C \geq 1$ tal que, para cada $g \in G$ e $x_0 \in \Sigma_A$,

$$\|\mathscr{L}_\varphi^n(f)(\cdot,g)\|_\infty \leq \sum_{w\in W^n} \sup \phi_n \circ \tau_w f(x_0, g\psi_w^{-1}) \leq C \sum_{w\in W^n} \mu([w]) f(x_0, g\psi_w^{-1}).$$

Como a medida μ é conforme temos $\mu([w]) = \int \mathscr{L}_\varphi^n(\chi_{[w]})d\mu$, para cada $w \in W^n$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{w\in W^n} \mu([w]) f(x_0, g\psi_w^{-1}) &= \sum_{w\in W^n} \int \mathscr{L}_\varphi^n(\chi_{[w]}) f(x_0, g\psi_w^{-1}) d\mu \\
&= \sum_{w\in W^n} \int \mathscr{L}_\varphi^n(\chi_{[w]\times G}(f))(\cdot,g) d\mu \\
&= \int \mathscr{L}_\varphi^n(f)(\cdot,g) d\mu \\
&= \|\mathscr{L}_\varphi^n(f)(\cdot,g)\|_1.
\end{aligned}$$

3) Combinando (1), (2) e a fórmula de Gelfand para o raio espectral temos $\lim_{n\to\infty} \|T_n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (\Lambda_n)^{\frac{1}{n}}$ por (1) e $\lim_{n\to\infty} \|T_n\|^{\frac{1}{n}} \leq lim_n \|\mathscr{L}_\varphi^n\|^{\frac{1}{n}} \leq C \lim \|T_n\|^{\frac{1}{n}}$ por (2). Pela fórmula de Gelfand $\rho(\mathscr{L}_\varphi) = \lim \|\mathscr{L}_\varphi^n\|^{\frac{1}{n}}$, portanto,

$$lim_{n\to\infty} \|T_n\|^{\frac{1}{n}} = \lim (\Lambda_n)^{\frac{1}{n}} = \rho(\mathscr{L}_\varphi).$$

$\square$

Agora, vejamos a demostração do Teorema 3.7.

Demonstração. Sem perda de generalidade, temos $P_G(\theta) = 0$ e $\mathscr{L}_\varphi(1) = 1$. Vamos mostrar que $\log \rho(\mathscr{L}_\varphi) = P_G(\theta, \varphi)$ implica G é ameno. Como $P_G(\theta) = 0$, então $\rho(\mathscr{L}_\varphi) = 1$. Supondo que $\rho(\mathscr{L}_\varphi) = 1$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe uma função $f \in \mathscr{H}_c$ com $f \geq 0$ tal que $[\![\mathscr{L}_\varphi(f) - f]\!] \leq \varepsilon [\![f]\!]$, daí pelo Lema 3.5 temos a função indicadora satisfazendo. E portanto, pelo Teorema 3.6 que o grupo G é ameno.

Agora, para provar a implicação recíproca, suponha que G é ameno. Segue a partir das definições dos operadores lineares A e T_n que

$$
\begin{aligned}
T_n(f)(g) &= A(\mathscr{L}_\varphi^n(f)(g)) \\
&= A\left(\sum_{v \in W^n} \phi_n \circ \tau_v(\xi) f \circ \tau_v(\xi, g)\right) \\
&= \sum_{g \in G}\left(\int \sum_{v \in W^n} \phi_n \circ_v(\xi) d\mu f \circ \tau_v(\xi, g)\right)\chi X_g \\
&= \sum_{g \in G}\left(\sum_{v \in W^n} \mu([v]) f(x_0, g\psi_v^{-1})\right)\chi X_g
\end{aligned}
$$

Usando na última passagem a conformalidade. Aqui, temos que T_n é um operador de convolução com respeito a probabilidade de densidade em G dado por $\mu(\{x \in \Sigma_A : \psi(x_1, ..., x_n) = g\})$ para cada $g \in G$.

Daí, por um resultado bem conhecido de Day (ver [4], teorema 1) segue que $\|T_n\| = 1$. Portanto, segue do Lema 3.8 que

$$\lim_{n \to \infty} \|T_n\|^{\frac{1}{n}} = \rho(\mathscr{L}_\varphi) = 1$$

como queríamos.

$\square$

Referências

[1] J.Aaronson e M.Denker; The Poincaré series of $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, 19(1):1–20, 1999.

[2] R.M. Bhattachaya e E.C Waymire; *Stochastic Processes with Applications*, Classics, in applied mathematics, Siam, 61.

[3] A. Castro; *Curso de Teoria da Medida*, Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

[4] M.M. Day; Convolutions, means, and spectra. *Illinois J. Math.*, 8:100–111, 1964.

[5] E. Følner, On groups with full banach mean value, Math.Scand. 3(1955)243-254.

[6] S. Gouezel; Martin boundary of measures with infinite support in hyperbolic groups (Preprint, 2013)

[7] P. Gerl e W. Woess. Local limits and harmonic functions for nonisotropic random walks on free groups.*Probab. Theory Relat. Fields*, 71(3):341–355, 1986.

[8] B. James; *Probabilidade: Um curso em nível intermediário*, Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 1981.

[9] V.A. Kaimanovich e A.M. Vershik; Random walks on discrete groups: boundary and entropy.*Ann. Probab.*, 11(3):457–490, 1983.

[10] H.Kesten; Full Banach mean values on countable groups. *Math. Scand.*, 7:146–156, 1959.

[11] H. Kesten; Symmetric random walks on groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 92 (1959) 336-354.

[12] J. Jaerisch; *Fractal models for normal subgroups of Schottky groups* (2011) .arXiv:1106.0026v1.

[13] J. Jaerisch; Group extended Markov Systems, amenability,and the Perron-Frobenius operator. Procedings of the AMS.

[14] F.Ledrappier e O. Sarig; Fluctuations of ergodic sums for horocycle flows on $\mathbb{Z}^d$-covers of finite volume surfaces. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 22(1-2):247–325, 2008.

[15] R.D. Mauldin e M.Urbański; Gibbs states on the symbolic space over an infinite alphabet.*Israel J. Math.*, 125:93–130, 2001.

[16] G. Pólya. Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz.*Math. Ann.*, 84(1-2):149–160, 1921.

[17] C.R. Oliveira; *Introdução à análise funcional*, Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

[18] O. Sarig; *Lecture notes on Thermodynamic Formalism for Topological Markov shifts*. Penn States,spring 2009.

[19] O.M. Sarig; Existence of Gibbs measures for countable Markov shifts. *Proc. Am. Math. Soc.*, 131(6):1751–1758, 2003.

[20] O.M. Sarig; Invariant Radon measures for horocycle flows on Abelian covers. *Invent. Math.*, 157(3):519–551, 2004.

[21] M. Stadlbauer; An extension of Kesten's criterion for amenability to topological Markov chains. *Advances in Mathematics* 235 (2013) 450-468.2011.

[22] W. Woess; Random walks on infinite graphs and groups, *Cambridge Tracts in Mathematics* 138. Cambridge University Press 2000.

[23] http://terrytao.wordpress.com/2009/04/14/some-notes-on-amenability/ Acessado em 21/08/2013 às 20:00.

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170 -110
<http://www.pgmat.ufba.br>