Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Dissertação de Mestrado

O Teorema de Decomposição de Hodge-de Rham e os Solitons de Ricci

Raimundo José Almeida Júnior

Salvador-Bahia
Março de 2013

O Teorema de Decomposição de Hodge-de Rham e os Solitons de Ricci

Raimundo José Almeida Júnior

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Nelson Bastos Barbosa.

Salvador-Bahia

Março de 2013

Almeida Júnior, Raimundo José.

O Teorema de Decomposição de Hodge-de Rham e os Solitons de Ricci / Raimundo José Almeida Júnior. – Salvador: UFBA, 2013.

56 f..

Orientador: Prof. Dr. José Nelson Bastos Barbosa.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2013.

Referências bibliográficas.

1. Fórmula de Bochner. 2.Teorema de Decomposição de Hodge-de Rham . 3. Solitons de Ricci. I. Barbosa, José Nelson Bastos. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 514.7

O Teorema de Decomposição de Hodge-de Rham e os Solitons de Ricci

Raimundo José Almeida Júnior

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 26 de março de 2013.

Banca examinadora:

Prof. Dr. José Nelson Bastos Barbosa (Orientador)
UFBA

Prof. Dra. Ana Lucia Pinheiro Lima
UFBA

Prof. Dr. Cícero Pedro de Aquino
UFPI

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço à minha família, especialmente aos meus pais, pelo apoio em todos os momentos, me ajudando a superar as dificuldades encontradas ao longo do caminho.

Aos amigos da "sala 18". Em especial, aqueles que diretamente contribuíram com meus trabalhos: Elaine, Elen e Julio César, pela amizade e disposição a me ajudar em tudo que precisei. Anderson, pelo exemplo de disciplina, dedicação e humildade. Ângela, pelas ajudas com o Latex e inglês. Andressa, pelo companheirismo e momentos de descontração.

Ao professor Dr. José Nelson Bastos, agradeço por me aceitar como orientando e por dedicar longos momentos de orientação e conversas. Sem dúvidas, a ele devo grande parte do conhecimento que o mestrado me deu.

Agradeço ao professor Dr. Cícero Aquino e à professora Dra. Ana Lucia Pinheiro por participar da minha banca e pelas dicas sugeridas para melhorar o meu trabalho.

Agradeço aos professores do Instituto de Matemática da UFBA, pela formação acadêmica. Em especial, agradeço aos professores Dr. Samuel Gomes e Dra. Rita de Cássia pelas preocupações e conselhos.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

"Não basta conquistar a sabedoria, é preciso usá-la".

Cícero

Resumo

A teoria dos solitons de Ricci desempenha um papel fundamental no estudo dos fluxos de Ricci Hamiltonianos. Tal estudo serviu de base para a demonstração da Conjectura de Poincaré, problema que durou muitos anos na Matemática e só foi solucionado por Gregori Perelman em 2002. Este trabalho tem como objetivo estudar a demonstração do Teorema de decomposição de Hodge-de Rham e apresentar resultados acerca dos solitons de Ricci obtidos a partir deste. Encontram-se estes resultados no artigo "Some applications of the Hodge-de Rham decomposition to Ricci solitons", de C. Aquino, A. Barros e E. Ribeiro Jr.

Palavras-chave: Fórmula de Bochner; Teorema de decomposição de Hodge-de Rham; Solitons de Ricci.

Abstract

The theory of Ricci solitons plays an essential role on the study of Hamilton's Ricci flow. This study has served as a basis to the proof of Poincaré conjecture, a problem that lasted for many years in mathematics and was proved by Gregori Perelman in 2002. The aim of this work is to prove the Hodge-de Rham decomposition Theorem and to present some results about Ricci solitons obtained from it. This results can be founded on the paper "Some applications of the Hodge-de Rham decomposition to Ricci solitons", due to C. Aquino, A. Barros and E. Ribeiro Jr.

Keywords: Bochner's Formula; Hodge-de Rham decomposition Theorem; Ricci solitons.

Sumário

Introdução

Um *soliton de Ricci* é uma variedade Riemanniana (M, g), onde g denota a métrica, dotada de um campo vetorial X que satisfaz

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g,$$

onde λ é uma constante e $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie da métrica g com respeito a X.

Quando X é um campo vetorial gradiente ∇f de uma função f em (M, g), tal variedade é chamada de *soliton de Ricci gradiente*. Neste caso, a equação acima pode ser escrita como

$$Ric + \nabla^2 f = \lambda g,$$

onde $\nabla^2 f$ é a Hessiana de f.

Para solitons de Ricci compactos, Perelman mostrou que eles são sempre solitons de Ricci gradientes. Mais precisamente, existe uma função diferenciável, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que o campo que define o soliton pode ser dado pelo gradiente de f. Esta função é chamada de *potencial de Perelman*.

Dado um campo de vetores X sobre uma variedade Riemanniana compacta orientada M, o Teorema de decomposição de Hodge-de Rham mostra que podemos decompor X como soma de um campo Y livre de divergência ($divY = 0$) e o gradiente de uma função h,

$$X = Y + \nabla h.$$

Tal função h é chamada de *potencial de Hodge-de Rham*.

Neste trabalho, apresentaremos resultados, contidos no artigo [1], acerca dos solitons de Ricci obtidos utilizando o Teorema de decomposição de Hodge-de Rham. O primeiro desses resultados é o que relaciona os potenciais de Perelman e de Hodge-de Rham.

Teorema 0.1. *Seja (M, g, X) um soliton de Ricci compacto. Então o potencial de Perelman é, a menos de uma constante, o potencial de Hodge-de Rham.*

Diremos que um soliton de Ricci compacto $(M^n, g, \nabla f)$ é *trivial* se o potencial de Perelman, f, é constante. Apresentaremos condições suficientes para garantir que um soliton de Ricci é trivial:

i. Se X é um campo de vetores de Killing, então o soliton é trivial.

ii. Se $\int_M \langle X, \nabla h\rangle \leq 0$, onde h é o potencial de Hodge-de Rham, então o soliton é trivial.

Mais ainda, apresentaremos a prova de dois Teoremas de classificação, a saber:

Teorema 0.2. *Seja (M^2, g, X) um soliton de Ricci compacto. Então, o soliton é trivial ou M^2 é conformemente equivalente a esfera $\mathbb{S}^2$.*

Teorema 0.3. *Para um soliton de Ricci conforme (M^n, g, X) com $n \geq 3$, vale o seguinte:*

i. *Se M é compacto, então X é um campo de vetores de Killing.*

ii. *Se M é um soliton gradiente não-compacto, então o soliton é Gaussiano ou X é um campo de vetores de Killing.*

Por fim, apresentaremos a demonstração de um resultado que nos fornece um limite inferior para o primeiro autovalor do laplaciano do potencial de Perelman de um soliton de Ricci conforme e compacto.

Teorema 0.4. *Seja (M^n, g, X) um soliton de Ricci conforme compacto. Se $n \geq 3$, então o primeiro autovalor do Laplaciano satisfaz*

$$\lambda_1 \geq \frac{n}{n-1}\lambda.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, M^n é isométrica à esfera euclideana canônica $\mathbb{S}^n(r)$.

Esta dissertação está dividida em três capítulos. No capítulo 1, apresentaremos alguns conceitos da Geometria Riemanniana que serão usados nos capítulos seguintes. Além disso, é apresentado o Teorema de E. Hopf e a fórmula de Bochner. Veremos, no capítulo 2, a demonstração de alguns resultados sobre formas em variedades, em particular, o Teorema de Decomposição de Hodge-de Rham, o qual é muito usado no capítulo 3. Por fim, no capítulo 3, definiremos e exemplificaremos a Teoria dos solitons de Ricci e provaremos os resultados citados acima.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos que serão importantes para a demonstração de alguns resultados acerca de Solitons de Ricci. Além disso, demonstraremos a fórmula de Bochner e o Teorema de Hopf. Para simplificar a linguagem, chamaremos as funções suaves de funções. As definições e resultados contidos neste capítulo são encontrados em [4] e [5].

1.1 Gradiente de uma função

Dada uma função, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$,o *gradiente de* f é definido como o campo de vetores, ∇f, definido em M dado por

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f),$$

para todo $X \in \mathcal{X}(M)$.

A existência do gradiente de uma função é garantida pela proposição a seguir. A sua unicidade segue do fato da definição de gradiente provir de um produto interno.

Proposição 1.1. *Seja* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função e* $\{e_1, ..., e_n\}$ *um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta* $\mathcal{U} \subset M$*. Então, em* $\mathcal{U}$*, temos*

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i.$$

Além disso,o segundo membro da igualdade acima independe do referencial escolhido.

Prova. Seja $X = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ um campo em $\mathcal{U}$. Com isso

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_{i=1}^{n} a_i e_i(f) \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i \right\rangle \\ &= \left\langle X, \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i \right\rangle. \end{aligned}$$

Daí, $\nabla f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i$. Para mostrar que ∇f não depende do referencial escolhido, considere $\{\widetilde{e}_1, ..., \widetilde{e}_n\}$ outro referencial ortonormal em $\mathcal{U}$ e suponha que $\widetilde{e}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$. Observe que $A = \big(a_{ij}(p)\big)_{nxn}$ é a matriz mudança de base entre dadas bases. Como as bases são ortonormais, segue que $A = \big(a_{ij}(p)\big)_{n\times n}$ é ortogonal em todo $p \in \mathcal{U}$. Daí,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \widetilde{e}_j(f) \widetilde{e}_j &= \sum_{i,k,l=1}^{n} a_{kj} a_{lj} e_k(f) e_l \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} \delta_{kl} e_k(f) e_l \\ &= \sum_{k=1}^{n} e_k(f) e_l \\ &= \nabla f. \end{aligned}$$

□

Exemplo 1.2. *Suponha $M = \mathbb{R}^n$. Tome, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, e_i como o i-ésimo campo canônico em $\mathbb{R}^n$. Assim,*

$$\begin{aligned} \nabla f &= \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right). \end{aligned}$$

Proposição 1.3. *Sejam $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ funções, então*

i. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$;

ii. $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

Prova. Seja $X \in \mathcal{X}(M)$.

i.
$$\begin{array}{rcl} \langle \nabla(f+g), X\rangle & = & X(f+g) \\ & = & X(f)+X(g) \\ & = & \langle \nabla f, X\rangle + \langle \nabla g, X\rangle \\ & = & \langle \nabla f + \nabla g, X\rangle. \end{array}$$

Como X foi tomado arbitrário em $\mathfrak{X}(M)$, segue que $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$.

ii.
$$\begin{array}{rcl} \langle \nabla(fg), X\rangle & = & X(fg) \\ & = & gX(f)+fX(g) \\ & = & g\langle \nabla f, X\rangle + f\langle \nabla g, X\rangle \\ & = & \langle g\nabla f + f\nabla g, X\rangle. \end{array}$$

Como X foi tomado arbitrário em $\mathcal{X}(M)$, segue que $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

$\square$

1.2 Divergente de um campo de vetores

Dado um campo de vetores suave,X, em M, definimos o *divergente de* X como a função suave, $divX : M \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$(div\ X)(p) := tr\big\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\big\},$$

onde $v \in T_pM$ e tr denota o traço do operador linear entre chaves.

Proposição 1.4. *Seja X um campo suave em M e $\{E_1, ..., E_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $\mathcal{U} \subset M$. Se $X = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ em $\mathcal{U}$, então*

$$div\ X = \sum_{i=1}^{n}\Big(e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X\rangle\Big).$$

Prova. Usando a definição de divergente de um campo e a compatibilidade da conexão com a métrica, temos que

$$\begin{array}{rcl} div\ X & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big\langle \nabla_{e_i} X, e_i\Big\rangle \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big(e_i\big\langle X, e_i\big\rangle - \big\langle \nabla_{e_i} e_i, X\big\rangle\Big) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big(e_i(a_i) - \big\langle \nabla_{e_i} e_i, X\big\rangle\Big). \end{array}$$

$\square$

Exemplo 1.5. *Suponha $M = \mathbb{R}^n$ e tome e_i como no exemplo 1.2. Então,*

$$\begin{aligned} div\ X &= \sum_{i=1}^{n} e_i(a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Proposição 1.6. *Sejam X e Y campos vetoriais suaves em M e $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, então*

i. $div\ (X+Y) = div\ X + div\ Y$;

ii. $div\ (fX) = f\ div\ X + \langle \nabla f, X \rangle$.

Prova.

i.

$$\begin{aligned} div\ (X+Y) &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{e_i}(X+Y), e_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{e_i}X + \nabla_{e_i}Y, e_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{e_i}X, e_i \right\rangle + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{e_i}Y, e_i \right\rangle \\ &= div\ X + div\ Y. \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} div\ (fX) &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{e_i}(fX), e_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle f\nabla_{e_i}X + e_i(f)X, e_i \right\rangle \\ &= f\sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{e_i}X, e_i \right\rangle + \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i(f)X, e_i \right\rangle \\ &= f\ div\ X + \sum_{i=1}^{n} e_i(f) \left\langle e_i, X \right\rangle \\ &= f\ div\ X + \left\langle \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i, X \right\rangle \\ &= f\ div\ X + \left\langle \nabla f, X \right\rangle. \end{aligned}$$

$\square$

1.3 Laplaciano de uma função

Dada uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, o *Laplaciano de* f é a função $\Delta f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\Delta f := div\ (\nabla f).$$

Proposição 1.7. *Seja* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função e* $\{e_1, ..., e_n\}$ *um referencial ortonormal em um aberto* $\mathcal{U} \subset M$*. Então,*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \Big(e_i\big(e_i(f)\big) - \big(\nabla_{e_i} e_i\big) f \Big).$$

Prova.

$$\begin{aligned}
\Delta f &= div\ (\nabla f) \\
&= div\ \left(\sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} div\ \big(e_i(f) e_i\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(e_i\big(e_i(f)\big) - \langle \nabla_{e_i} e_i, e_i(f) e_i \rangle \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(e_i\big(e_i(f)\big) - \langle \nabla_{e_i} e_i, \nabla f \rangle \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(e_i\big(e_i(f)\big) - (\nabla_{e_i} e_i) f \Big)
\end{aligned}$$

□

Exemplo 1.8. *Suponha que* $M = \mathbb{R}^n$ *e tome* e_i *como no exemplo 1.2. Então*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} e_i\big(e_i(f)\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Proposição 1.9. *Dadas* $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções, tem-se:*

i. $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$;

ii. $\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$.

Prova.

i.

$$\begin{aligned}
\Delta(f + g) &= div\ \big(\nabla(f + g)\big) \\
&= div\ (\nabla f + \nabla g) \\
&= div\ (\nabla f) + div\ (\nabla g) \\
&= \Delta(f) + \Delta(g).
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
\Delta(fg) &= div\,\big(\nabla(fg)\big)\\
&= div\,(g\nabla f + f\nabla g)\\
&= div\,(g\nabla f) + div\,(f\nabla g)\\
&= g\;div\,(\nabla f) + \langle \nabla g, \nabla f\rangle + f\;div\,(\nabla g) + \langle \nabla f, \nabla g\rangle\\
&= g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle.
\end{aligned}$$

□

1.4 Hessiano de uma função

Dada uma função, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, o **Hessiano de** f é o campo de operadores lineares $(\nabla^2 f)_p : T_pM \longrightarrow T_pM$, definido em $v \in T_pM$ por

$$\big(\nabla^2 f\big)_p(v) := \big(\nabla_v \nabla f\big)(p).$$

Proposição 1.10. *Se $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função e $p \in M$, então $(\nabla^2 f)_p : T_pM \longrightarrow T_pM$ é um operador linear auto-adjunto.*

Prova. Sejam $v, w \in T_pM$ e V, W extensões de v e w respectivamente, a campos definidos em uma vizinhança de $p \in M$. Então:

$$\begin{aligned}
\big\langle (\nabla^2 f)_p(v), w\big\rangle &= \big\langle \nabla_V \nabla f, W\big\rangle(p)\\
&= \big(V\big\langle \nabla f, W\big\rangle\big)(p) - \big\langle \nabla f, \nabla_V W\big\rangle(p)\\
&= \big(V(Wf)\big)(p) - \big\langle \nabla f, \nabla_W V + [V,W]\big\rangle(p)\\
&= \big(W(Vf)\big)(p) - \big([V,W]f\big)(p) - \big\langle \nabla f, \nabla_W V + [V,W]\big\rangle(p)\\
&= \big(W(Vf)\big)(p) - \big\langle \nabla f, \nabla_W V\big\rangle(p)\\
&= \big\langle \nabla_W \nabla f, V\big\rangle(p)\\
&= \big\langle (\nabla^2 f)_p(w), v\big\rangle.
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.11. *Se $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função, então*

$$\Delta f := tr(\nabla^2 f).$$

Prova. Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ um referencial em $\mathcal{U}$ (vizinhança de p).

$$\begin{aligned} tr\big(\nabla^2 f\big)_p &= \sum_{i=1}^{n} \Big\langle \big(\nabla^2 f\big)_p e_i, e_i \Big\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big\langle \nabla_{e_i} \nabla f(p), e_i \Big\rangle_p \\ &= div\ \big(\nabla f\big)(p) \\ &= \Delta f(p). \end{aligned}$$

□

Uma outra maneira de definir o Hessiano de uma função é definindo

$$\begin{array}{llllll} \nabla^2 f: & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) & & \\ & (X, Y) & \mapsto & \Big\langle \nabla^2 f(X), Y \Big\rangle : M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & p & \mapsto & \Big\langle \big(\nabla^2 f\big)_p \big(X(p)\big), Y(p) \Big\rangle. \end{array}$$

Dessa forma, $\nabla^2 f$ é uma forma bilinear simétrica. De fato, a bilinearidade segue das linearidades do produto interno e da conexão. Para mostrar a simetria, considere a base $\{\partial_1, ..., \partial_n\}$ de $\mathcal{X}(M)$. Assim,

$$\begin{aligned} \big\langle \nabla^2 f(\partial_i), \partial_j \big\rangle &= \big\langle \nabla_{\partial_i} \nabla f, \partial_j \big\rangle \\ &= \partial_i \big\langle \nabla f, \partial_j \big\rangle - \big\langle \nabla f, \nabla_{\partial_i} \partial_j \big\rangle \\ &= \partial_i \big(\partial_j(f)\big) - \big\langle \nabla f, \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k \big\rangle \\ &= \partial_i \big(\partial_j(f)\big) - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \big\langle \nabla f, \partial_k \big\rangle \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k(f). \end{aligned}$$

Como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ e $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, $\forall\ i, j \in \{1, ..., n\}$, segue que $\langle \nabla^2 f(\partial_i), \partial_j \rangle = \langle \nabla^2 f(\partial_j), \partial_i \rangle$. Portanto, $\nabla^2 f(\partial_i, \partial_j) = \nabla^2 f(\partial_j, \partial_i)$.

Exemplo 1.12. *Quando $M = \mathbb{R}^n$, é imediato verificar que $\Gamma_{ij}^k = 0$, para todos $i, j, k \in \{1, ..., n\}$. Portanto*

$$\begin{aligned} \big\langle \nabla^2 f(\partial_i), \partial_j \big\rangle &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial_k} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Daí, concluímos que a matriz de $\nabla^2 f$ na base $\{\partial_1, ..., \partial_n\}$ coincide com a matriz Hessiana definida no Cálculo Diferencial e Integral.

1.5 Um produto interno no espaço dos operadores lineares

Dados $S, T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ operadores lineares definidos sobre um espaço vetorial, $\mathbb{V}$, de dimensão finita, definimos o *produto interno de Hilbert-Schmidt entre S e T* como

$$\langle S, T \rangle = tr(ST^*),$$

onde tr e T^* denotam, respectivamente, o traço e o operador adjunto de T.

Para verificar que tal produto é, de fato, um produto interno, podemos considerar, para cada operador linear S, a sua representação matricial $S = (a_{ij})_{i,j}$. Assim, valem

i. $\langle\ ,\ \rangle$ é positivo-definido:

Supondo $S = (a_{ij})_{i,j}$, temos que $SS^* = (b_{ij})_{i,j}$, onde $b_{ij} = \sum_k a_{ik}a_{jk}$. Daí,

$$\begin{aligned}
\langle S, S \rangle &= tr(S \cdot S^*) \\
&= tr\big((b_{ij})_{i,j}\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} \\
&= \sum_{i,k=1}^{n} (a_{ik})^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned}
\langle S, S \rangle = 0 &\iff \sum_{i,k=1}^{n} (a_{ik})^2 = 0 \\
&\iff a_{ik} = 0, \forall i, k \\
&\iff S = 0.
\end{aligned}$$

ii. $\langle\ ,\ \rangle$ é bilinear:

Sejam $S, T, Q : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ operadores e $a \in \mathbb{R}$. Então:

$$\begin{aligned}
\langle S + T, Q \rangle &= tr\big((S + T)Q^*\big) \\
&= tr\big(SQ^* + TQ^*\big) \\
&= tr(SQ^*) + tr(TQ^*) \\
&= \langle S, T \rangle + \langle T, Q \rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle aS, T\rangle &= tr\big((aS)T^*\big)\\
&= tr\big(aST^*\big)\\
&= a\cdot tr(ST^*)\\
&= a\langle S, T\rangle.
\end{aligned}$$

iii. $\langle\ ,\ \rangle$ é simétrico:

Sejam $S, T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ operadores. Então,

$$\begin{aligned}
\langle S, T\rangle &= tr\big(ST^*\big)\\
&= tr\big((ST^*)^*\big)\\
&= tr((T^*)^*S^*)\\
&= tr(TS^*)\\
&= \langle T, S\rangle.
\end{aligned}$$

De **i.**,**ii.** e **iii.** segue o desejado.

Dado um operador linear $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$, definimos a *parte de traço-nulo do operador* T como

$$T^\circ = T - \frac{trT}{n}I.$$

Lema 1.13. *Dado um operador* $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$*, temos que*

$$|T^\circ|^2 = |T|^2 - \frac{(trT)^2}{n}.$$

Prova.

$$\begin{aligned}
|T^\circ|^2 &= \left|T - \frac{trT}{n}I\right|^2\\
&= \left\langle T - \frac{trT}{n}I, T - \frac{trT}{n}I\right\rangle\\
&= |T|^2 - 2\frac{trT}{n}tr(TI^*) + \frac{(trT)^2}{n^2}tr(I)\\
&= |T|^2 - 2\frac{(trT)^2}{n} + \frac{(trT)^2}{n}\\
&= |T|^2 - \frac{(trT)^2}{n}.
\end{aligned}$$

□

Dada uma função diferenciável $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida em uma variedade Riemanniana M, o traço-nulo da hessiana de f, denotado por Φ_f, é dado por

$$\Phi_f = \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g. \tag{1.1}$$

Dessa forma,

$$|\Phi_f|^2 = |\nabla^2 f|^2 - \frac{(\Delta f)^2}{n}. \tag{1.2}$$

1.6 Teorema de E. Hopf

Sejam ν a forma de volume e $X \in \mathcal{X}(M)$ um campo, definimos o produto interior de X por ν, $i(X)\nu$, como a $(n-1)$-forma dada por

$$i(X)\nu(Y_2, ..., Y_n) = \nu(X, Y_2, ..., Y_n), \quad \forall\, Y_1, ..., Y_n \in \mathcal{X}(M). \tag{1.3}$$

Lema 1.14. *Dado $X \in \mathcal{X}(M)$,*

$$d(i(X)\nu) = divX\nu.$$

Prova. Sejam $p \in M$ e $\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial geodésico em p definidos em uma vizinhança $\mathcal{U} \subset M$ de p. Suponha, sem perda de generalidade, que $\{E_i(q)\}_{i=1}^n$ é uma base positiva de T_qM.

Defina, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, a $1-$forma dada por

$$w_i(E_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j \in \{1, ..., n\}.$$

Observe que, em $\mathcal{U}$, $w_1 \wedge ... \wedge w_n = \nu$.

Defina, agora, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, a $(n-1)$-forma

$$\theta_i = w_1 \wedge ... \wedge \hat{w}_i \wedge ... \wedge w_n.$$

Sendo assim, se $X = \displaystyle\sum_{i=1}^n f_i E_i$, então

$$i(X)\nu = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i \theta_i.$$

De fato, dados $Y_2, ..., Y_n \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned}
i(X)\nu\big(Y_2, ..., Y_n\big) &= \nu\big(X, Y_2, ..., Y_n\big) \\
&= \nu\bigg(\sum_{i=1}^{n} f_i E_i, Y_2, ..., Y_n\bigg) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i \nu\big(E_i, Y_2, ..., Y_n\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i w_1 \wedge ... \wedge w_n\big(E_i, Y_2, ..., Y_n\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i (-1)^{i+1} det\big(w_k(Y_j)\big)_{k=1,...,n, \quad k\neq i, \quad j=2,...,n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f_i \big(w_1 \wedge ... \wedge \hat{w}_i \wedge ... \wedge w_n\big)\big(Y_2, ..., Y_n\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f_i \theta_i \big(Y_2, ..., Y_n\big).
\end{aligned}$$

Portanto

$$i(X)\nu = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f_i \theta_i.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
d\big(i(X)\nu\big) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} d(f_i \theta_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} df_i \wedge \theta_i + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f_i \wedge d\theta_i.
\end{aligned}$$

Mas, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $d\theta_i = 0$ em p, pois $dw_k = 0$ em p. De fato,

$$\begin{aligned}
dw_k(E_i, E_j) &= E_i\big[w_k(E_j)\big] - E_j\big[w_k(E_i)\big] - w_k\big([E_i, E_j]\big) \\
&= w_k\big(\nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i\big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
d\big(i(X)\nu\big) &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}df_i\wedge\theta_i\\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\Bigg(\sum_{j=1}^{n}E_j(f_i)w_j\Bigg)\wedge\theta_i\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}(-1)^{i+1}E_j(f_i)w_j\wedge\theta_i\\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}E_i(f_i)w_i\wedge\theta_i\\
&= \sum_{i=1}^{n}E_i(f_i)w_1\wedge\ldots\wedge w_n\\
&= \sum_{i=1}^{n}E_i(f_i)\nu.
\end{aligned}
$$

Com isso obtemos

$$
d\big(i(X)\nu\big)(p) = divX(p)\nu.
$$

□

Teorema 1.15. *(Teorema de E. Hopf) Seja M uma variedade Riemanniana orientável compacta e conexa. Seja f uma função diferenciável em M com $\Delta f\geq 0$ (ou $\Delta f\leq 0$). Então, f é constante.*

Prova. Seja $X=\nabla f$. Então

$$
\begin{aligned}
\int_M \Delta f\cdot\nu &= \int_M div(\nabla f)\cdot\nu\\
&= \int_M divX\cdot\nu\\
&= \int_M d\big(i(X)\nu\big)\\
&= \int_{\partial M} i(X)\nu\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

onde a última igualdade é dada porque $\partial M=\emptyset$. Logo, $\displaystyle\int_M\Delta f\nu=0$. Como $\Delta f\geq 0$, temos que $\Delta f\equiv 0$.

De forma análoga,

$$
\begin{aligned}
\Delta(f^2) &= \Delta(f\cdot f)\\
&= 2\cdot f\Delta f+2\langle\nabla f,\nabla f\rangle\\
&= 2f\Delta f+2|\nabla f|^2\\
&= 2|\nabla f|^2\\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

Logo, $\Delta(f^2) \geq 0$ e, portanto, aplicando o raciocínio acima novamente, temos $\Delta(f^2) = 0$. Sendo assim, $2|\nabla f|^2 \equiv 0$. E daí, $\nabla f = 0$. Como M é conexa, segue que f é constante. □

1.7 A Fórmula de Bochner

O Teorema a seguir será utilizado no capítulo 3. Uma referência para a sua demonstração é o artigo [2].

Teorema 1.16. *Seja M uma variedade Riemanniana e $f \in C^\infty(M)$. Então, em cada ponto de M, tem-se:*

$$\frac{1}{2}\Delta\big(|\nabla f|^2\big) = |\nabla^2 f|^2 + \big\langle \nabla(\Delta f), \nabla f \big\rangle + Ric(\nabla f).$$

Prova. Sejam $p \in M$ e $\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial goedésico em p. Como $\{E_i\}_{i=1}^n$ é geodésico, pela Proposição 1.7, temos que

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n E_i\big(E_i(f)\big)(p).$$

Sendo Assim,

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\Delta\big(|\nabla f|^2\big) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n E_i\big(E_i(|\nabla f|^2)\big) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n E_i\big(E_i(\langle \nabla f, \nabla f\rangle)\big) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n E_i\big(\langle \nabla_{E_i}\nabla f, \nabla f\rangle + \langle \nabla f, \nabla_{E_i}\nabla f\rangle\big) \\
&= \sum_{i=1}^n E_i\big(\langle \nabla_{E_i}\nabla f, \nabla f\rangle\big) \\
&= \sum_{i=1}^n \big(\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\nabla f, \nabla f\rangle + \langle \nabla_{E_i}\nabla f, \nabla_{E_i}\nabla f\rangle\big).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\Delta\big(|\nabla f|^2\big) = \sum_{i=1}^n \big\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\nabla f, \nabla f\big\rangle + \sum_{i=1}^n \big\langle \nabla_{E_i}\nabla f, \nabla_{E_i}\nabla f\big\rangle. \tag{1.4}$$

Mas, fixado $i \in \{1, ..., n\}$, temos que

$$\begin{aligned}\big\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\nabla f, \nabla f\big\rangle &= \Big\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\nabla f, \sum_{j=1}^{n} E_j(f)E_j\Big\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} E_j(f)\big\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\nabla f, E_j\big\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \big\langle \nabla f, E_j\big\rangle\big\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\nabla f, E_j\big\rangle.\end{aligned}$$

Além disso, fixados $i, j \in \{1, ..., n\}$, é fácil verificar que

$$\begin{aligned}\big\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\nabla f, E_j\big\rangle &= E_i\big(\big\langle \nabla_{E_i}\nabla f, E_j\big\rangle\big) \\ &= E_i\big(\nabla^2 f(E_i, E_j)\big) \\ &= E_i\big(\nabla^2 f(E_j, E_i)\big) \\ &= E_i\big(\big\langle \nabla_{E_j}\nabla f, E_i\big\rangle\big) \\ &= \big\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j}\nabla f, E_i\big\rangle.\end{aligned}$$

Dessa forma, (1.4) fica escrita como

$$\frac{1}{2}\Delta\big(|\nabla f|^2\big) = \sum_{i,j=1}^{n} \big\langle \nabla f, E_j\big\rangle\big\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j}\nabla f, E_i\big\rangle + \sum_{i=1}^{n} \big\langle \nabla_{E_i}\nabla f, \nabla_{E_i}\nabla f\big\rangle. \tag{1.5}$$

Usando a definição de curvatura, temos que

$$\begin{aligned}\big\langle R(E_i, E_j)\nabla f, E_i\big\rangle &= \big\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j}\nabla f - \nabla_{E_j}\nabla_{E_i}\nabla f - \nabla_{[E_i,E_j]}\nabla f, E_i\big\rangle \\ &= \big\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j}\nabla f - \nabla_{E_j}\nabla_{E_i}\nabla f, E_i\big\rangle.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\big\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j}\nabla f, E_i\big\rangle &= \big\langle R(E_i, E_j)\nabla f, E_i\big\rangle + \big\langle \nabla_{E_j}\nabla_{E_i}\nabla f, E_i\big\rangle \\ &= \big\langle R(E_j, E_i)E_i, \nabla f\big\rangle + \big\langle \nabla_{E_j}\nabla_{E_i}\nabla f, E_i\big\rangle.\end{aligned}$$

Portanto, (1.5) fica escrita como

$$\frac{1}{2}\Delta\big(|\nabla f|^2\big) = \sum_{i,j=1}^{n} \big\langle \nabla f, E_j\big\rangle\big\langle R(E_j, E_i)E_i, \nabla f\big\rangle + \sum_{i,j=1}^{n} \big\langle \nabla f, E_j\big\rangle\big\langle \nabla_{E_j}\nabla_{E_i}\nabla f, E_i\big\rangle +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \big\langle \nabla_{E_i}\nabla f, \nabla_{E_i}\nabla f\big\rangle.$$

Resta mostrar as seguintes igualdades:

1.

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n}\big\langle\nabla f,E_j\big\rangle\big\langle R(E_j,E_i)E_i,\nabla f\big\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle R\left(\sum_{j=1}^{n}\langle\nabla f,E_j\rangle E_j,E_i\right)E_i,\nabla f\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\langle R\left(\sum_{j=1}^{n}E_j(f)E_j,E_i\right)E_i,\nabla f\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle R(\nabla f,E_i)E_i,\nabla f\rangle \\
&= Ric(\nabla f).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n}\big\langle\nabla f,E_j\big\rangle\big\langle\nabla_{E_j}\nabla_{E_i}\nabla f,E_i\big\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n}E_j(f)\big\langle\nabla_{E_j}\nabla_{E_i}\nabla f,E_i\big\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\big\langle\nabla_{E_j(f)E_j}\nabla_{E_i}\nabla f,E_i\big\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\big\langle\nabla_{\nabla f}\nabla_{E_i}\nabla f,E_i\big\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\nabla f\big\langle\nabla_{E_i}\nabla f,E_i\big\rangle \\
&= \nabla f\sum_{i=1}^{n}\big\langle\nabla_{E_i}\nabla f,E_i\big\rangle \\
&= \nabla f(\Delta f) \\
&= \big\langle\nabla(\Delta f),\nabla f\big\rangle.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\big\langle\nabla_{E_i}\nabla f,\nabla_{E_i}\nabla f\big\rangle &= \sum_{i,j,k=1}^{n}\big\langle\nabla_{E_i}E_j(f)E_j,\nabla_{E_i}E_k(f)E_k\big\rangle \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n}\big\langle E_j(f)\nabla_{E_i}E_j+E_i\big(E_j(f)\big)E_j,E_k(f)\nabla_{E_i}E_k+E_i\big(E_k(f)\big)E_k\big\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\big\langle E_i\big(E_j(f)\big)E_j,E_i\big(E_k(f)\big)E_k\big\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\big|E_i\big(E_j(f)\big)\big|^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\big|E_i\big\langle\nabla f,E_j\big\rangle\big|^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\big|\big\langle\nabla_{E_i}\nabla f,E_j\big\rangle\big|^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\big|\nabla^2 f(E_i,E_j)\big|^2 \\
&= \big|\nabla^2(f)\big|^2.
\end{aligned}$$

□

Capítulo 2

O Teorema de decomposição de Hodge-de Rham

O objetivo desse capítulo é demonstrar o Teorema de decomposição de Hodge-de Rham. Para isto, utilizamos as referências [8] e [13].

2.1 Formas sobre espaços vetoriais

Uma aplicação k-linear $\varphi : \mathbb{V} \times ... \times \mathbb{V} = \mathbb{V}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita *alternada* se

$$\varphi(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) = -\varphi(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k),$$

$\forall v_1, ..., v_k \in \mathbb{V}$. Denotaremos por $\Lambda^k(\mathbb{V})$ o conjunto das aplicações k-lineares alternadas. Um elemento de $\Lambda^k(\mathbb{V})$ é chamado de *k-forma sobre* $\mathbb{V}$.

Dada $B = \{b_1, ..., b_n\}$ uma base ordenada de $\mathbb{V}$, denotaremos por $B^* = \{b^1, ..., b^n\}$ a correspondente base ordenada dual de $\mathbb{V}$, que é uma base para o espaço dual $\mathbb{V}^*$. Tal base é dada por

$$b^i(b_j) := \delta_{ij}, \forall \ \ i, j \in \{1, ..., n\}.$$

Dados $\varphi_1, ..., \varphi_k : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ funcionais lineares, denotaremos por $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_k \in \Lambda^k(\mathbb{V})$ a função k-linear alternada dada por

$$(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_k)(v_1, ..., v_k) := det(\varphi_i(v_j)).$$

Proposição 2.1. *Fixada uma base ordenada $B = \{b_1, ..., b_n\}$ de $\mathbb{V}$, o conjunto*

$$\Lambda^k(B) := \left\{b^{i_1} \wedge ... \wedge b^{i_k}; i_1 < ... < i_k, \ \ onde \ i_j \in \{1, ..., n\}\right\}$$

forma uma base de $\Lambda^k(\mathbb{V})$.E, portanto, $dim \Lambda^k(\mathbb{V}) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$

Prova. Inicialmente, mostraremos que $\Lambda^k(B)$ é um conjunto de vetores linearmente independentes em $\Lambda^k(\mathbb{V})$. Para isso, suponha que

$$\sum_{i_1<...<i_k} a_{i_1...i_k} b^{i_1} \wedge ... \wedge b^{i_k} = 0$$

é uma combinação linear nula dos elementos de $\Lambda^k(B)$, assim

$$\left(\sum_{i_1<...<i_k} a_{i_1...i_k} b^{i_1} \wedge ... \wedge b^{i_k}\right)(b_{j_1}, ..., b_{j_k}) = 0,$$

$\forall \;\; j_1, ..., j_k \in \{1, ..., n\}$. Em particular, para cada $j_1 < ... < j_k$ fixados, obtemos

$$\left(\sum_{i_1<...<i_k} a_{i_1...i_k} b^{i_1} \wedge ... \wedge b^{i_k}\right)(b_{j_1}, ..., b_{j_k}) = a_{j_1...j_k} = 0.$$

Resta mostrar que $\Lambda^k(B)$ gera $\Lambda^k(\mathbb{V})$. Para isso, tome $\varphi \in \Lambda^k(\mathbb{V})$ e vamos mostrar que φ é da forma

$$\sum_{i_1<...<i_k} a_{i_1...i_k} b^{i_1} \wedge ... \wedge b^{i_k}.$$

Com efeito, defina

$$\psi = \sum_{i_1<...<i_k} \varphi(b_{i_1}, ..., b_{i_k}) b^{i_1} \wedge ... \wedge b^{i_k}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \psi(b_{j_1}, ..., b_{j_k}) &= \left(\sum_{i_1<...<i_k} \varphi(b_{i_1}, ..., b_{i_k}) b^{i_1} \wedge ... \wedge b^{i_k}\right)(b_{j_1}, ..., b_{j_k}) \\ &= \varphi(b_{j_1}, ..., b_{j_k}), \end{aligned}$$

$\forall j_1 < ... < j_k$. Logo, ψ coincide com φ numa base de $\mathbb{V}^k$ e, portanto, $\psi = \varphi$. Com isso, fazendo $a_{i_1...i_k} = \varphi(b_{i_1}, ..., b_{i_k})$, temos que φ assume a forma desejada. □

Usando a proposição 2.1, concluímos que dada ω uma k-forma sobre $\mathbb{V}$, ω pode ser escrita na forma

$$\omega = \sum_{i_1<...<i_k} a_{i_1...i_k} b^{i_1} \wedge ... \wedge b^{i_k}, \quad i_j \in \{1, ..., n\}, \tag{2.1}$$

em que, $a_{i_1...i_k}$ são aplicações de $\mathbb{V}$ em $\mathbb{R}$.

Uma k-forma ω sobre $\mathbb{V}$, dada por (2.1) é chamada de *k-forma diferencial sobre* $\mathbb{V}$ se as funções $a_{i_1...i_k}$ forem diferenciáveis. A partir de agora, o termo k-forma indicará k-forma diferencial sobre $\mathbb{V}$ e a k-upla $(i_1, ..., i_k)$, $i_1 < ... < i_k$, será indicada por I. Assim, (2.1) será expressada como

$$\omega = \sum_I a_I b^I.$$

Por convenção, consideraremos que uma 0-forma é uma função diferenciável $f : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$.

Dados $\omega = \sum_I a_I b^I$, $\varphi = \sum_I c_I b^I$ k-formas e $\psi = \sum_J d_J b^J$ s-forma. definimos a *soma* entre ω e φ como a k-forma

$$\omega + \varphi := \sum_I (a_I + c_I) b^I$$

e o *produto exterior* entre ω e ψ como a $(k+s)$-forma

$$\omega \wedge \varphi := \sum_{I,J} a_I d_J b^I \wedge b^J.$$

Proposição 2.2. *(Propriedades da soma e do produto exterior de formas)*

Sejam ω uma k-forma, φ uma s-forma e ψ uma r-forma. Então:

i. $(\omega \wedge \varphi) \wedge \psi = \omega \wedge (\varphi \wedge \psi)$;

ii. $\omega \wedge \varphi = (-1)^{ks} \varphi \wedge \omega$;

iii. $\omega \wedge (\varphi + \psi) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \psi$, *quando $r = s$.*

Prova. Suponha $\omega = \sum\limits_I a_I b^I$, $\varphi = \sum\limits_J c_J b^J$ e $\psi = \sum\limits_K d_K b^K$.

i.

$$\begin{aligned}
(\omega \wedge \varphi) \wedge \psi &= \Big(\big(\sum_I a_I b^I \big) \wedge \big(\sum_J c_J b^J \big) \Big) \wedge \Big(\sum_K d_K b^K \Big) \\
&= \Big(\sum_{I,J} a_I c_J b^I \wedge b^J \Big) \wedge \Big(\sum_K d_K b^K \Big) \\
&= \sum_{I,J,K} (a_I c_J) d_K (b^I \wedge b^J) \wedge b^K \\
&= \sum_{I,J,K} a_I (c_J d_K) b^I \wedge (b^J \wedge b^k) \\
&= \Big(\sum_I a_I b^I \Big) \wedge \Big(\sum_{J,K} c_J d_K b^J \wedge b^K \Big) \\
&= \Big(\sum_I a_I b^I \Big) \wedge \Big(\big(\sum_J c_J b^J \big) \wedge \big(\sum_K d_K b^K \big) \Big) \\
&= \omega \wedge (\varphi \wedge \psi).
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \varphi &= \sum_{I,J} a_I c_J b^{i_1} \wedge ... \wedge b^{i_k} \wedge b^{j_1} \wedge ... \wedge b^{j_s} \\
&= \sum_{I,J} c_J a_I (-1) b^{i_1} \wedge ... \wedge b^{i_{k-1}} \wedge b^{j_1} \wedge b^{i_k} \wedge ... \wedge b^{j_s} \\
&= ... \\
&= \sum_{I,J} c_J a_I (-1)^k b^{j_1} \wedge b^{i_1} \wedge ... \wedge b^{i_k} \wedge b^{j_2} \wedge ... \wedge b^{j_s},
\end{aligned}$$

onde as ultimas igualdades são justificadas pelas propriedades de determinante. Repetindo o processo para cada b^{j_l}, obtemos que

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \varphi &= \sum_{I,J} c_J a_I (-1)^{ks} b^{j_1} \wedge ... \wedge b^{j_s} \wedge b^{i_1} \wedge b^{i_k} \\
&= (-1)^{ks} \varphi \wedge \omega.
\end{aligned}$$

iii. Suponha $r = s$.

$$\begin{aligned}
\omega \wedge (\varphi + \psi) &= \left(\sum_I a_I b^I\right) \wedge \left(\sum_J c_J b^J + \sum_J d_J b^J\right) \\
&= \left(\sum_I a_I b^I\right) \wedge \left(\sum_J (c_J + d_J) b^J\right) \\
&= \sum_{I,J} a_I (c_J + d_J) b^I \wedge b^J \\
&= \sum_{I,J} a_I c_J b^I \wedge b^J + \sum_{I,J} a_I d_J b^I \wedge b^J \\
&= \left(\sum_I a_I b^I\right) \wedge \left(\sum_J c_J b^J\right) + \left(\sum_I a_I b^I\right) \wedge \left(\sum_J d_J b^J\right) \\
&= \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \psi.
\end{aligned}$$

□

2.1.1 Orientação de espaços vetoriais

Dadas B e C duas bases de $\mathbb{V}$. Dizemos que B e C tem *orientação compatível* se a matriz de mudança de base de B para C, a qual denotaremos por $T = T(B, C)$, satisfizer

$$det(T) > 0.$$

Nesse caso, diremos que B é equivalente a C e escrevemos $B \sim C$. Observe que a relação $\sim$ é uma relação de equivalência. De fato, se B, C e D são bases de $\mathbb{V}$, mostraremos que $\sim$ satisfaz as propriedades de relação de equivalência:

i. Reflexividade:

$$T(B, B) = I \Rightarrow det(T) = 1 > 0 \Rightarrow B \sim B.$$

ii. Simetria:

Suponha que $det(T(B,C)) > 0$. Então,

$$\begin{aligned} det(T(C,B)) &= det\big(T(B,C)^{-1}\big) \\ &= \big(det(T(B,C))\big)^{-1} \\ &> 0. \end{aligned}$$

iii. Transitividade:

Suponha $det(T(B,C)) > 0$ e $det(T(C,D)) > 0$. Então,

$$\begin{aligned} det(T(B,D)) &= det(T(B,C) \cdot T(C,D)) \\ &= det(T(B,C)) \cdot det(T(C,D)) \\ &> 0. \end{aligned}$$

De **i.**, **ii.** e **iii.** segue o desejado.

Dada uma base B de $\mathbb{V}$, a classe de equivalência $[B]$, obtida pela relação $\sim$, é dita uma *orientação* de $\mathbb{V}$. Fixada uma orientação, uma base C de $\mathbb{V}$ é *positiva* se $C \in [B]$ e *negativa* no caso contrário. A dupla $(\mathbb{V},[B])$ é dita um *espaço vetorial orientado.*

O Teorema a seguir nos fornece uma maneira de orientar um espaço vetorial.

Teorema 2.3. *(Caracterização de Orientações) Seja $0 \neq \omega \in \Lambda^n(\mathbb{V})$. Então, o conjunto*

$$\mathcal{O}_\omega := \big\{B = \{b_1, ..., b_n\} \text{ base de } \mathbb{V} : \omega(\mathrm{b_1, ..., b_n}) > 0\big\}$$

é uma orientação em $\mathbb{V}$. Reciprocamente, dada uma orientação $[B]$ de $\mathbb{V}$, existe $0 \neq \omega \in \Lambda^n(\mathbb{V})$ tal que $\mathcal{O}_\omega = [B]$.

Prova. Sejam $B = \{b_1, ..., b_n\}$ e $C = \{c_1, ..., c_n\}$ bases de $\mathbb{V}$ e seja $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ a tranformação de mudança da base B para C. Daí,

$$\begin{aligned} \omega(c_1, ..., c_n) &= \omega(T(b_1), ..., T(b_n)) \\ &= det(T) \cdot \omega(b_1, ..., b_n). \end{aligned}$$

Logo,

$$det(T) = \frac{\omega(c_1, ..., c_n)}{\omega(b_1, ..., b_n)}.$$

Seja $B \in \mathcal{O}_\omega$, então

$$\begin{aligned} C \in \mathcal{O}_\omega &\Leftrightarrow \omega(c_1, ..., c_n) > 0 \\ &\Leftrightarrow det(T) > 0 \\ &\Leftrightarrow B \sim C. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $B \in [B]$ é uma base positiva, defina $\omega : \mathbb{V}^n \to \mathbb{R}$ como a aplicação multilinear alternada dada por $\omega(b_1, ..., b_n) := 1$. Vamos mostrar que $\mathcal{O}_\omega = [B]$.

$$\begin{array}{rcl} C \in \mathcal{O}_\omega & \Leftrightarrow \omega(c_1, ..., c_n) > 0 & \\ & \Leftrightarrow & detT = \frac{1}{\omega(c_1,...,c_n)} > 0 \\ & \Leftrightarrow & detT > 0 \\ & \Leftrightarrow & B \sim C \\ & \Leftrightarrow & C \in [B]. \end{array}$$

$\square$

Dado $(\mathbb{V}, [B])$ um espaço vetorial orientado, a forma $0 \neq \omega \in \Lambda^n(\mathbb{V})$ satisfazendo $\mathcal{O}_\omega = [B]$ é chamado de *forma da orientação.*

Lema 2.4. *(Elemento de volume) Dado* $\big(\mathbb{V}, \langle\ ,\ \rangle, [B]\big)$ *um espaço vetorial orientado com produto interno. Então, existe exatamente uma forma* $d\mathbb{V} \in \Lambda^n(\mathbb{V})$ *satisfazendo*

$$d\mathbb{V}(b_1, ..., b_n) = 1,$$

para toda base positiva ortonormal $B = \{b_1, ..., b_n\}$*. Para uma tal base* B*,*

$$d\mathbb{V} = b^1 \wedge ... \wedge b^n.$$

Prova. Pelo Teorema de Gram-Schimidt, existe uma base ortonormal $\{b'_1, ..., b'_n\}$ de $\mathbb{V}$. Se esta base é positiva, nada há a fazer. Caso contrário, basta trocar a ordem dos dois primeiros vetores que obtemos uma base positiva.

Defina $d\mathbb{V} := b^1 \wedge ... \wedge b^n$. Assim,

$$\begin{array}{rcl} d\mathbb{V}(b_1, ..., b_n) & = & (b^1 \wedge ... \wedge b^n)(b_1, ..., b_n) \\ & = & det(b^i(b_j)) \\ & = & det(I) \\ & = & 1. \end{array}$$

Seja agora, $C = \{c_1, ..., c_n\}$ outra base ortonormal positiva, então $det\big(T(B, C)\big) = 1$ ou $det(T(B, C)) = -1$, pois B e C são ortonormais. Como B e C são positivas, então $det\big(T(B, C)\big) = 1$. Daí,

$$\begin{array}{rcl} d\mathbb{V}(c_1, ..., c_n) & = & d\mathbb{V}(T(b_1), ..., T(b_n)) \\ & = & det(T) \cdot d\mathbb{V}(b_1, ..., b_n) \\ & = & 1. \end{array}$$

Resta mostrar a unicidade. Como $dim\Lambda^n(\mathbb{V}) = 1$, temos que dado $d\mathbb{V}' \in \Lambda^n(\mathbb{V})$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $d\mathbb{V}' = \lambda d\mathbb{V}$. Daí, supondo que $d\mathbb{V}'(b_1, ..., b_n) = 1$, temos

$$\begin{aligned} 1 &= d\mathbb{V}'(b_1, ..., b_n) \\ &= \lambda d\mathbb{V}(b_1, ..., b_n) \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Portanto, $d\mathbb{V} = d\mathbb{V}'$. $\square$

Dado um espaço vetorial orientado com produto interno, $\big(\mathbb{V}, \langle\ ,\ \rangle, [B]\big)$ a forma $d\mathbb{V} \in \Lambda^n(\mathbb{V})$ satisfazendo

$$d\mathbb{V}(b_1, ..., b_n) = 1,$$

para toda base positiva ortonormal $B = \{b_1, ..., b_n\}$ é chamada de *forma de volume.*

2.1.2 Extensão do produto interno

Agora, temos como objetivo definir um produto interno em $\Lambda^n(\mathbb{V})$ a partir de um produto interno em $\mathbb{V}$. Para isso, utilizaremos um importante teorema da Álgebra Linear, o Teorema do Isomorfismo Canônico, que será enunciado e provado a seguir.

Uma aplicação bilinear $\beta : \mathbb{V} \times \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita *regular* se,

$$\forall v \in \mathbb{V} \Rightarrow \Big(\beta(v, w) = 0, \forall w \in \mathbb{W} \Rightarrow v = 0\Big)$$

ou,

$$\forall w \in \mathbb{W} \Rightarrow \Big(\beta(v, w) = 0, \forall v \in \mathbb{V} \Rightarrow w = 0\Big).$$

Teorema 2.5. *(Isomorfismo canônico) Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ espaços vetoriais reais com $dim\mathbb{V} = dim\mathbb{W} < \infty$ e seja $\beta : \mathbb{V} \times \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear regular. Então, a aplicação induzida*

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathbb{V} & \to & \mathbb{W}^* \\ & v & \mapsto & \beta(v, \_) \end{array},$$

onde,

$$\begin{array}{rccc} \beta(v, \_): & \mathbb{W} & \to & \mathbb{R} \\ & w & \mapsto & \beta(v, w) \end{array}$$

é o isomorfismo canônico entre $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}^*$.

Prova. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ e $w \in \mathbb{W}$, então

$$\begin{aligned} \psi(\alpha v_1 + v_2)(w) &= \beta(\alpha v_1 + v_2, w) \\ &= \alpha\beta(v_1, w) + \beta(v_2, w) \\ &= \alpha\psi(v_1)(w) + \psi(v_2)(w) \\ &= (\alpha\psi(v_1) + \psi(v_2))(w). \end{aligned}$$

Como w foi tomado arbitrário em $\mathbb{W}$, temos que $\psi(\alpha v_1 + v_2) = \alpha\psi(v_1) + \psi(v_2)$. Observe que, como $dim\mathbb{W}^* = dim\mathbb{W} = dim\mathbb{V}$, é suficiente mostrar que ψ é injetivo. Para isso, suponha que $\psi(v) = 0$. Então, $\beta(v, \_) \equiv 0$. Daí, $\forall w \in \mathbb{W}$, $\beta(v, w) = 0$. Como β é regular, temos que $v = 0$, o que mostra que ψ é injetivo. $\square$

Dado $\big(\mathbb{V}, \langle\ ,\ \rangle\big)$ um espaço vetorial com produto interno, pelo teorema do Isomorfismo Canônico, existe unicamente um isomorfismo $\psi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$ determinado por $\langle\ ,\ \rangle$. Com tal isomorfismo, podemos definir um produto interno em $\mathbb{V}^*$ dado por:

$$\langle \omega, \eta \rangle_{\mathbb{V}^*} = \langle \psi^{-1}(\omega), \psi^{-1}(\eta) \rangle_{\mathbb{V}},\ \forall \omega, \eta \in \mathbb{V}^*.$$

Estenderemos, agora, o produto interno dado em $\mathbb{V}^*$ para um produto interno em $\Lambda^k(\mathbb{V})$. Este produto interno em $\Lambda^k(\mathbb{V})$ será usado para definir o operador estrela de Hodge na seção seguinte. Tal extensão é dada pelo teorema a seguir:

Teorema 2.6. *(Extensão do Produto Interno) Seja* $\big(\mathbb{V}, \langle\ ,\ \rangle\big)$ *um espaço vetorial real com produto interno. Dado* $0 \le k \le n$, *existe exatamente um produto interno* $\langle\ ,\ \rangle_{\Lambda^k} : \Lambda^k(\mathbb{V}) \times \Lambda^k(\mathbb{V}) \to \mathbb{R}$ *tal que para uma base ortonormal* $C = \{c_1, ..., c_n\}$ *com respeito a* $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{V}}$, *a base* $\Lambda^k C$ *é uma base ortonormal com respeito a* $\langle\ ,\ \rangle_{\Lambda^k}$. *Este produto escalar é dado como a única extensão bi-aditiva de*

$$\langle v^1 \wedge ... \wedge v^k, w^1 \wedge, ..., \wedge w^k \rangle_{\Lambda^k} = det\big(\langle v^i, w^j \rangle_{\mathbb{V}^*}\big),$$

onde $v^1, ..., v^k, w^1, ..., w^k \in \mathbb{V}^*$.

Prova. A demonstração está dividida em duas partes: existência e unicidade.

- Existência

  Tome $B = (b_1, ..., b_n)$ uma base ortonormal de $\mathbb{V}$. Considere $\Lambda^k B$ a base correspondente de $\Lambda^k(\mathbb{V})$, $\{b^{i_1} \wedge ... \wedge b^{i_k}, i_1 < ... < i_k\}$. Defina

  $$\langle b^{i_1} \wedge ... \wedge b^{i_k}, b^{j_1} \wedge ... \wedge b^{j_k} \rangle_{\Lambda^k} := det\big(\langle b^{i_r}, b^{j_s} \rangle_{V^*}\big)$$

  e estenda este bi-aditivamente para $\Lambda^k(\mathbb{V}) \times \Lambda^k(\mathbb{V})$.

  i. $\langle\ ,\ \rangle_{\Lambda^k}$ está bem definido:

  Seja C outra base ortonormal de $\mathbb{V}$. Então, existe uma transformação linear ortogonal $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ tal que $C = TB$. Daí,

  $$\begin{aligned} det\big(\langle c^{i_r}, c^{j_s} \rangle_{\mathbb{V}^*}\big) &= det\big(\langle Tb^{i_r}, Tb^{j_s} \rangle_{\mathbb{V}^*}\big) \\ &= det\big(\langle b^{i_r}, b^{j_s} \rangle_{\mathbb{V}^*}\big), \end{aligned}$$

  onde a ultima igualdade segue do fato de T ser ortogonal.

ii. $\langle\ ,\ \rangle_{\Lambda^k}$ é bilinear:

Observe que a bi-aditividade segue da construção acima. Para a multiplicação por escalar, temos:

$$\begin{aligned} \langle \lambda b^{i_1} \wedge ... \wedge b^{i_k}, b^{j_1} \wedge ... \wedge b^{j_k} \rangle_{\Lambda^k} &= \big\langle (\lambda b^{i_1}) \wedge ... \wedge b^{i_k}, b^{j_1} \wedge ... \wedge b^{j_k} \big\rangle_{\Lambda^k} \\ &= \lambda det\big(\langle b^{i_r}, b^{j_s} \rangle_{\mathbb{V}^*}\big) \\ &= \lambda \langle b^{i_1} \wedge ... \wedge b^{i_k}, b^{j_1} \wedge ... \wedge b^{j_k} \rangle_{\Lambda^k}. \end{aligned}$$

iii. A simetria de $\langle\ ,\ \rangle_{\Lambda^k}$ segue diretamente da construção.

iv. $\langle\ ,\ \rangle_{\Lambda^k}$ é positivo definido:

$$\begin{aligned} \langle b^{i_1} \wedge ... \wedge b^{i_k}, b^{j_1} \wedge ... \wedge b^{j_k} \rangle_{\Lambda^k} &= det\big(\langle b^{i_r}, b^{i_s} \rangle_{\mathbb{V}^*}\big) \\ &= det(\delta_{i_r, i_s}) \\ &= 1 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Então, $\langle w, w \rangle_{\Lambda^k} \geq 0$. Além disso, $\langle w, w \rangle = 0$ se, e somente se, $w = 0$.

- Unicidade:

  Seja $g : \Lambda^k(\mathbb{V}) \times \Lambda^k(\mathbb{V}) \to \mathbb{R}$ um outro produto interno satisfazendo a propriedade desejada. Seja B uma base ortonormal de $\mathbb{V}$, então $\Lambda^k B$ é uma base ortonormal de $\Lambda^k \mathbb{V}$ segundo g. Daí, g e $\langle\ ,\ \rangle_{\Lambda^k}$ coincidem numa base de $\Lambda^k \mathbb{V}$, logo são iguais em $\Lambda^k \mathbb{V}$.

□

2.1.3 O operador Estrela de Hodge em variedades

Como $dim \Lambda^k(\mathbb{V}) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} = dim \Lambda^{n-k}(\mathbb{V})$, temos que existem isomorfismos entre $\Lambda^k(\mathbb{V})$ e $\Lambda^{n-k}(\mathbb{V})$.

O Teorema 2.8 garante a existência de um isomorfismo particular (a estrela de Hodge) entre todos os isomorfismos possíveis entre $\Lambda^k(\mathbb{V})$ e $\Lambda^{n-k}(\mathbb{V})$. Antes disso, provaremos um lema que será usado na demonstração deste teorema.

Lema 2.7. *Fixado $0 \leq k \leq n$, a aplicação*

$$\begin{aligned} \beta_k :\ \Lambda^{n-k}(\mathbb{V}) \times \Lambda^k(\mathbb{V}) &\to \mathbb{R} \\ (\eta, \omega) &\mapsto \langle \omega \wedge \eta, d\mathbb{V} \rangle_{\Lambda^n} \end{aligned}$$

é uma forma bilinear regular.

Prova. As linearidades seguem das linearidades do produto wedge e da aplicação $\langle\ ,\ \rangle_{\Lambda^n}$. Resta mostrar a regularidade. Para isso, considere $\eta \in \Lambda^{n-k}(\mathbb{V})$ e suponha que para todo $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{V})$ tem-se que $\beta_k(\eta, \omega) = \langle \omega \wedge \eta, d\mathbb{V}\rangle_{\Lambda^n} = 0$. Como $\langle\ ,\ \rangle_{\Lambda^n}$ é regular e $d\mathbb{V} \neq 0$, segue que para todo $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{V})$ tem-se que $\omega \wedge \eta = 0$. Suponha que $\eta = b^{i_1} \wedge ... \wedge b^{i_{n-k}}$ $(i_1 < ... < i_{n-k})$. Denomine de $j_1 < ... < j_k$ os índices complementares e defina

$$\omega := b^{j_1} \wedge ... \wedge b^{j_k} \neq 0.$$

Daí,

$$\omega \wedge \eta = b^{j_1} \wedge ... \wedge b^{j_k} \wedge b^{i_1} \wedge ... \wedge b^{i_{n-k}} = \pm b^1 \wedge ... \wedge b^n \neq 0.$$

Absurdo. Logo $\eta = 0$ e, portanto, β_k é regular. $\square$

Teorema 2.8. *(Existência do operador estrela de Hodge) Seja* $\big(\mathbb{V}, \langle\ ,\ \rangle, [B]\big)$ *um espaço vetorial orientado e com produto interno. Seja* $d\mathbb{V}$ *o elemento de volume associado. Então, para* $0 \leq k \leq n$*, existe precisamente um isomorfismo*

$$\begin{array}{rccc} * = *_k : & \Lambda^k(\mathbb{V}) & \to & \Lambda^{n-k}(\mathbb{V}) \\ & w & \mapsto & *w \end{array}$$

tal que

i. $\forall \omega, \eta \in \Lambda^k(\mathbb{V}) : \omega \wedge *\eta = \langle \omega, \eta\rangle_{\Lambda^k} d\mathbb{V}.$

Ou, equivalentemente,

ii. $\forall \omega, \eta \in \Lambda^k(\mathbb{V}) : \langle \omega \wedge *\eta, d\mathbb{V}\rangle_{\Lambda^n} = \langle \omega, \eta\rangle_{\Lambda^k}.$

Prova. Fixado $0 \leq k \leq n$, defina o isomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \varphi_k : & \Lambda^k(\mathbb{V}) & \to & (\Lambda^k(\mathbb{V}))^* \ , \\ & w & \mapsto & \langle \omega, \_ \rangle_{\Lambda^k} \end{array}$$

cuja existência é garantida pelo teorema do isomorfismo canônico usando a aplicação bilinear $\langle\ ,\ \rangle_{\Lambda^k}$ (observe que, como $\langle\ ,\ \rangle_{\Lambda^k}$ é produto interno, segue que ele é regular).

De forma análoga, defina o isomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \psi_k : & \Lambda^{n-k}(\mathbb{V}) & \to & (\Lambda^k(\mathbb{V}))^* \ , \\ & \eta & \mapsto & \langle \_ \wedge \eta, d\mathbb{V}\rangle_{\Lambda^n} \end{array}$$

cuja existência é garantida pelo teorema do isomorfismo canônico usando a aplicação bilinear regular β_k dada pelo lema acima.

Defina a aplicação

$$* = *_k : \ \Lambda^k(\mathbb{V}) \ \to \ \Lambda^{n-k}(\mathbb{V})$$

$$* := \psi_k^{-1} \circ \varphi_k.$$

Observe que $*$ é uma composição de isomorfismos, logo é um isomorfismo.

Sejam $\omega, \eta \in \Lambda^k(\mathbb{V})$. Observe que

$$\begin{aligned} \langle \omega \wedge *\eta, d\mathbb{V}\rangle &= \psi_k(*\eta)(\omega) \\ &= \psi_k((\psi_k^{-1} \circ \varphi_k)(\eta))(\omega) \\ &= \varphi_k(\eta)(\omega) \\ &= \langle \eta, \omega\rangle_{\Lambda^k} \\ &= \langle \omega, \eta\rangle. \end{aligned}$$

Logo, $*$ satisfaz ii..

Resta mostrar que i. equivale a ii.. Para isto sejam $\omega, \eta \in \Lambda^k(\mathbb{V})$. Suponha que $\omega \wedge *\eta = \langle \omega, \eta\rangle_{\Lambda^k} d\mathbb{V}$. Então, $\langle \omega \wedge *\eta, d\mathbb{V}\rangle_{\Lambda^n} = \langle \omega, \eta\rangle_{\Lambda^k}\langle d\mathbb{V}, d\mathbb{V}\rangle_{\Lambda^n} = \langle \omega, \eta\rangle_{\Lambda^k}$. Como $dim\Lambda^n(\mathbb{V}) = 1$ e $d\mathbb{V} \neq 0$, segue que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\omega \wedge *\eta = \lambda d\mathbb{V}$. Vamos mostrar, usando (2), que $\lambda = \langle \omega, \eta\rangle_{\Lambda^k}$. De fato, veja que

$$\lambda = \lambda\langle d\mathbb{V}, d\mathbb{V}\rangle_{\Lambda^n} = \langle \lambda d\mathbb{V}, d\mathbb{V}\rangle_{\Lambda^n} = \langle \omega \wedge *\eta, d\mathbb{V}\rangle_{\Lambda^n} = \langle \omega, \eta\rangle_{\Lambda^k}.$$

□

O operador $*$ dado no Teorema anterior é chamado de *operador estrela de Hodge*. No teorema a seguir, seguem algumas propriedades deste operador que serão usadas posteriormente em outros resultados. A demonstração de tais propriedades podem ser encontradas em [9].

Teorema 2.9. *Seja* $\big(\mathbb{V}, \langle\ ,\ \rangle, [B]\big)$ *um espaço vetorial com produto interno. O operador estrela de Hodge satisfaz:*

i. $\forall \omega, \eta \in \Lambda^k(\mathbb{V}) : \eta \wedge *\omega = \omega \wedge *\eta;$

ii. *Seja* $\sigma \in S_n$ *uma permutação satisfazendo* $\sigma(1) < ... < \sigma(k)$ *e* $\sigma(k+1) < ... < \sigma(n)$. *Então*

$$*(b^{\sigma(1)} \wedge ... \wedge b^{(\sigma(k))}),$$

onde $B = (b_1, ..., b_n)$ *é uma base ortonormal positiva de* $\mathbb{V}$. *Em particular,*

$$*(b^1 \wedge ... \wedge b^k) = b^{k+1} \wedge ... \wedge b^n;$$

iii. $*1 = d\mathbb{V}$ *e* $*d\mathbb{V} = 1$;

iv. $\forall \omega \in \Lambda^k(\mathbb{V}) : *_{n-k}*_k = (-1)^{k(n-k)}\omega$;

v. $\forall \omega, \eta \in \Lambda^k(\mathbb{V}) : \langle \omega, \eta\rangle = \langle *\omega, *\eta\rangle$;

vi. $\forall \omega, \eta \in \Lambda^k(\mathbb{V}) : \langle \omega, \eta \rangle = *(\omega \wedge *\eta) = *(\eta \wedge *\omega)$.

Seja M uma variedade, denotaremos por $\Omega^k(M)$ o *espaço das k-formas sobre M* definido pontualmente como $\Omega^k_p(M) := \Lambda^k(T_pM)$. Denotaremos por $\Omega(M)$ o *espaço das formas sobre M* que é o conjunto de todas as k-formas sobre M.

Dada uma variedade M, e fixado $0 \leq k \leq n = dimM$, definimos $*_k : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{n-k}(M)$ pontualmente como $*^k_p : \Lambda^k(T_pM) \longrightarrow \Lambda^{n-k}(T_pM)$, $\forall p \in M$. Assim,

$$* : \Omega(M) \longrightarrow \Omega(M)$$

é o *operador estrela de Hodge em M.*

2.2 O Laplaciano em variedades

Dado $k \geq 1$, definimos

$$\delta_k : \ \Omega^k(M) \ \rightarrow \ \Omega^{k-1}(M)$$

$$\delta_k := (-1)^{n(k+1)+1} *_{n-k+1} \circ d_{n-k} \circ *_k$$

e $\delta_0 := 0$. A extensão

$$\delta : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$$

é chamado de *Operador de Beltrami.*

Lema 2.10. *O Operador de Beltrami satisfaz* $\delta \circ \delta = 0$.

Prova. Para facilitar a notação, considere $\overline{\delta} : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$,

$$\overline{\delta} = (-1)^{n(k+1)+1} *_{n-k+1} \circ d_{n-k} \circ *_k$$

e $\delta : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^{k-2}(M)$,

$$\delta = (-1)^{nk+1} *_{n-k+2} \circ d_{n-k+1} \circ *_{k-1}$$

. Vamos mostrar que $\delta \circ \overline{\delta} = 0$.

$$\begin{aligned} \delta \circ \overline{\delta} &= (-1)^{2nk+n+2} *_{n-k+2} \circ d_{n-k+1} \circ *_{k-1} \circ *_{n-k+1} \circ d_{n-k} \circ *_k \\ &= (-1)^{2nk+n+2}(-1)^{(k-1)(n-k+1)} *_{n-k+2} \circ d^2 \circ *_k \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde a primeira igualdade segue de 2.9 iv. e a última segue do fato de $d^2 = 0$. $\square$

Defina $\Delta_k : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^k(M)$ por

$$\Delta_k := \delta_{k+1} \circ d_k + d_{k-1} \circ \delta_k,$$

onde $d_{-1} := 0$. A extensão dessa aplicação $\Delta : \Omega(M) \to \Omega(M)$ é chamada de *Operador de Laplace-Beltrami* ou *Laplaciano*

Lema 2.11. *Para $M = \mathbb{R}^n$ e $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$,*

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Prova. Pela definição do operador de Beltrami segue que

$$\begin{aligned}
\Delta_0(f) &= \delta_1\big(d_0(f)\big) + d_{-1}\big(\delta_0(f)\big) \\
&= \delta_1\Bigg(\sum_{i-1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\Bigg) \\
&= (-1)^{2n+1} *_n \circ d_{n-1} \circ *_1\Bigg(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\Bigg) \\
&= (-1)^{2n+1} *_n \sum_{i=1}^{n} *_n\Bigg(d_{n-1}\big(\frac{\partial f}{\partial x_i} * (dx_i)\big)\Bigg) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} *_n\Bigg(d_{n-1}\big(\frac{\partial f}{\partial x_i}(-1)^i dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n\big)\Bigg) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} *_n\Bigg(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(-1)^i dx_j \wedge dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n)\Bigg) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(-1)^i * \big(dx_i \wedge dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n\big) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} * \big((-1)^i dx_1 \wedge dx_1 \wedge ... \wedge dx_n\big) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} * (d\mathbb{V}) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.12. *O Laplaciano comuta com a estrela de Hodge, isto é,*

$$* \circ \Delta = \Delta \circ *.$$

Prova. Fixe $0 \leq k \leq n$.

$$\begin{array}{rcl} *_k \circ \Delta_k & = & *_k \circ \delta_{k+1} \circ d_k + *_k \circ d_{k-1} \circ \delta_k \\ & = & (-1)^{n(k+2)+1} *_k \circ *_{n-k} \circ d_{n-k-1} \circ *_{k+1} \circ d_k \\ +(-1)^{n(k+1)+1} *_k \circ d_{k-1} \circ *_{n-k+1} \circ d_{n-k} \circ *_k & & \\ & = & (-1)^{n(k+2)+1}(-1)^{k(n-k)} d_{n-k-1} \circ *_{k+1} \circ d_k \\ +(-1)^{n(k+1)+1} *_k \circ d_{k-1} \circ *_{n-k+1} \circ d_{n-k} \circ *_k & & \\ & = & (-1)^{n(k+1)+1} *_k \circ d_{k-1} \circ *_{n-k+1} \circ d_{n-k} \circ *_k \\ +(-1)^{n(k+2)+1} d_{n-k-1} \circ *_{k+1} \circ d_k \circ *_{n-k} \circ *_k & & \\ & = & \delta_{n-k+1} d_{n-k} \circ *_k + d_{n-k-1} \circ \delta_{n-k} \circ *_k \\ & = & \Delta_{n-k} \circ *_k. \end{array}$$

Na penúltima igualdade acima foi usado o fato de que $n(k+1)+1$ tem a mesma paridade de $n(n-k+2)+1$ e que $n(k+2)+1$ tem a mesma paridade de $n(n-k+1)+1$. De fato:

i.

$$\begin{array}{rcl} \big(n(n-k+2)+1\big)(\mod 2) & = & (n^2 - nk + 2n + 1)(\mod 2) \\ & = & \big((n+1)^2 - nk\big)(\mod 2) \\ & = & (n + 1 + nk)(\mod 2) \\ & = & \big(n(k+1)+1\big)(\mod 2). \end{array}$$

ii.

$$\begin{array}{rcl} \big(n(n-k+1)+1\big)(\mod 2) & = & (n^2 - nk + n + 1)(\mod 2) \\ & = & (n + nk + n + 1)(\mod 2) \\ & = & (nk + 2n + 1)(\mod 2) \\ & = & \big(n(k+2)+1\big)(\mod 2). \end{array}$$

□

2.3 O produto escalar L^2

Dado $k \in \mathbb{N}$, a forma bilinear $\langle\ ,\ \rangle_{L^2} : \Omega^k(M) \times \Omega^k(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{L^2(M)} := \int_M \alpha \wedge *\beta$$

é o *produto escalar* L^2 *em* $\Omega^k(M)$. A extensão

$$\langle\ ,\ \rangle_{L^2} : \Omega(M) \times \Omega(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

é o *produto escalar* L^2. Este induz uma norma

$$\| \cdot \|_{L^2} := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}}$$

em $\Omega^*(M)$. Denotaremos por $L^2(M)$ (ou L^2) o espaço $\Omega(M)$ com o produto escalar L^2.

O Lema a seguir será usado na demostração da proposição seguinte.

Lema 2.13.

$$*_{k-1} \circ \delta_k = (-1)^k d_{n-k} \circ *_k.$$

Prova.

$$\begin{aligned}
*_{k-1} \circ \delta_k &= (-1)^{n(k+1)+1} *_{k-1} \circ *_{n-k+1} \circ d_{n-k} \circ *_k \\
&= (-1)^{n(k+1)+1+(n-k+1)(n-(n-k+1))} d_{n-k} \circ *_k \\
&= (-1)^{nk+n+1+(n-k+1)(k-1)} d_{n-k} \circ *_k \\
&= (-1)^{nk+n+1+nk-k^2+k-n+k-1} d_{n-k} \circ *_k \\
&= (-1)^{2nk-k^2+2k} d_{n-k} \circ *_k \\
&= (-1)^{-k^2} d_{n-k} \circ *_k \\
&= (-1)^k d_{n-k} \circ *_k.
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.14. *O Operador de Beltrami δ é o adjunto da derivada exterior com respeito ao produto escaalr L^2, isto é,*

$$\forall \alpha, \beta \in \Omega^*(M): \ \langle d\alpha, \beta \rangle_{L^2(M)} = \langle \alpha, \delta\beta \rangle_{L^2(M)}.$$

Prova. Sejam $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ e $\beta \in \Omega^k(M)$, então

$$\begin{aligned}
d(\alpha \wedge *\beta) &= d\alpha \wedge *\beta + (-1)^{k-1} \alpha \wedge \big(d(*\beta)\big) \\
&= d\alpha \wedge *\beta - \alpha \wedge \big((-1)^k d * \beta\big) \\
&= d\alpha \wedge *\beta - \alpha \wedge (*\delta\beta),
\end{aligned}$$

onde na última igualdade foi usado o Lema 2.13.

Sendo assim, $d(\alpha \wedge *\beta) = d\alpha \wedge *\beta - \alpha \wedge (*\delta\beta)$. Integrando esta equação, temos

$$\begin{aligned}
\int_M d(\alpha \wedge *\beta) &= \int_M (d\alpha \wedge *\beta - \alpha \wedge (*\delta\beta)) \\
&= \int_M d\alpha \wedge *\beta - \int_M \alpha \wedge (*\delta\beta) \\
&= \langle d\alpha, \beta \rangle_{L^2} - \langle \alpha, \delta\beta \rangle_{L^2}.
\end{aligned}$$

Usando o Teorema de Stokes, $\int_M d(\alpha \wedge *\beta) = \int_{\partial M} \alpha \wedge *\beta = 0$. Portanto, $\langle d\alpha, \beta \rangle_{L^2} = \langle \alpha, \delta\beta \rangle_{L^2}$. □

Corolário 2.15. *O Operador de Laplace-Beltrami é auto-adjunto, isto é,*

$$\langle \Delta\alpha, \beta \rangle_{L^2} = \langle \alpha, \Delta\beta \rangle_{L^2}.$$

Prova.

$$
\begin{aligned}
\langle \Delta\alpha, \beta \rangle_{L^2} &= \big\langle (\delta d + d\delta)\alpha, \beta \big\rangle_{L^2} \\
&= \langle \delta d\alpha, \beta \rangle_{L^2} + \langle d\delta\alpha, \beta \rangle_{L^2} \\
&= \langle d\alpha, d\beta \rangle_{L^2} + \langle \delta\alpha, \delta\beta \rangle_{L^2} \\
&= \langle \alpha, \delta d\beta \rangle_{L^2} + \langle \alpha, d\delta\beta \rangle_{L^2} \\
&= \big\langle \alpha, (\delta d + d\delta)\beta \big\rangle_{L^2} \\
&= \langle \alpha, \Delta\beta \rangle_{L^2}.
\end{aligned}
$$

□

Lema 2.16. *Dado $\alpha \in \Omega^k(M)$, temos que $\Delta\alpha = 0$ se, e somente se $d\alpha = 0$ e $\delta\alpha = 0$.*

Prova. Se $d\alpha = \delta\alpha = 0$, então, $\Delta\alpha = d\delta\alpha + \delta d\alpha = 0$. Reciprocamente, suponha $\Delta\alpha = 0$. Então,

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle \Delta\alpha, \alpha \rangle_{L^2} \\
&= \big\langle (d\delta + \delta d)\alpha, \alpha \big\rangle_{L^2} \\
&= \langle d\delta\alpha, \alpha \rangle_{L^2} + \langle \delta d\alpha, \alpha \rangle_{L^2} \\
&= \langle \delta\alpha, \delta\alpha \rangle_{L^2} + \langle d\alpha, d\alpha \rangle_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Sendo assim, $\langle \delta\alpha, \delta\alpha \rangle_{L^2} = 0$ e $\langle d\alpha, d\alpha \rangle_{L^2} = 0$. Logo, $\delta\alpha = d\alpha = 0$. □

Chamaremos o conjunto

$$\mathcal{H}^k := \{\omega \in \Omega^k(M) : \Delta_k\omega = 0\} = ker\Delta_k$$

de *conjunto das k-formas harmônicas sobre M*. Um elemento de $\mathcal{H}^k$ é chamado de *k-forma harmônica.*

2.3.1 A equação $\Delta x = \alpha$

Dada $\alpha \in \Omega^k(M)$, uma forma $\omega \in \Omega^k(M)$ tal que

$$\Delta\omega = \alpha$$

é chamada de *solução forte de $\Delta\omega = \alpha$.* Um funcional linear contínuo

$$l : (\Omega^k(M), \|\cdot\|_{L^2}) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$$

é uma *solução fraca de $\Delta\omega = \alpha$*, se

$$\forall \eta \in \Omega^k(M) : \; l(\Delta\eta) = \langle \alpha, \eta \rangle.$$

Os resultados a seguir servem para obter uma solução fraca a partir de uma forte (Proposição 2.17) e uma solução forte a partir de uma solução fraca (Teorema 2.18).

Proposição 2.17. *Seja $\alpha, \omega \in \Omega^k(M)$ tal que (w é uma solução forte para $\Delta x = \alpha$). Então,*

$$\begin{array}{cccc} l: & \Omega^k(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \eta & \mapsto & \langle \omega, \eta \rangle \end{array}$$

é uma solução fraca.

Prova. Observe que l, da forma que foi definido, é linear. Seja $\eta \in \Omega^k(M)$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\mid l(\eta) \mid = \mid \langle \omega, \eta \rangle \mid \leq \parallel \omega \parallel \parallel \eta \parallel .$$

Logo, l é contínuo. Além disso,

$$l(\Delta \eta) = \langle \omega, \Delta \eta \rangle = \langle \Delta \omega, \eta \rangle = \langle \alpha, \eta \rangle.$$

Portanto, l é uma solução fraca de $\Delta x = \alpha$. $\square$

A demonstração do Teorema a seguir pode ser encontrada em [13].

Teorema 2.18. *Seja $\alpha \in \Omega^k(M)$ e seja l uma solução fraca de $\Delta x = \alpha$. Então, existe $\omega \in \Omega^k(M)$ tal que*

$$\forall \beta \in \Omega^k(M): \ l(\beta) = \langle \omega, \beta \rangle.$$

Segue do Teorema 2.18 que, se l é uma solução fraca de $\Delta x = \alpha$, temos que $\forall \eta \in \Omega^k(M): \ \langle \Delta \omega, \eta \rangle = \langle \omega, \Delta \eta \rangle = l(\Delta \eta) = \langle \alpha, \eta \rangle$. Então, $\Delta \omega = \alpha$. Portanto, ω é uma solução forte de $\Delta x = \alpha$.

2.3.2 Mergulho Compacto

O Teorema a seguir será usado na demonstração do Lema 2.20. Sua demonstração pode ser encontrada em [13].

Teorema 2.19. *Seja $\{\alpha_n\}$ uma sequência em $\Omega^k(M)$, tal que existe $c > 0$ tal que $\|\alpha_n\| \leq c$ e $\parallel \Delta \alpha_n \parallel \leq c$. Então, existe uma subsequência de $\{\alpha_n\}$ que é de Cauchy.*

Lema 2.20. *Dado $0 \leq k \leq n$, temos que*

$$\exists c > 0 : \ \forall \beta \in \mathcal{H}^k(M)^{\perp}, \ \parallel \beta \parallel \leq c \parallel \Delta \beta \parallel .$$

Prova. Suponha o contrário. Então, dado $j \in \mathbb{N}$, existe $\widetilde{\beta_j} \in \mathcal{H}^k(M)^{\perp}$ tal que $\|\widetilde{\beta_j}\| > j\|\Delta \widetilde{\beta_j}\|$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, defina $\beta_j := \dfrac{\widetilde{\beta_j}}{\|\widetilde{\beta_j}\|}$. Observe que a sequência $\{\beta_j\}$ satisfaz:

- $\forall j \in \mathbb{N}: \ \|\beta_j\| = \frac{\|\widetilde{\beta_j}\|}{\|\widetilde{\beta_j}\|} = 1;$

- $\lim_{j\to\infty} \|\Delta\beta_j\| = \lim_{j\to\infty} \left\| \Delta\left(\frac{\widetilde{\beta}_j}{\|\widetilde{\beta}_j\|} \right) \right\| = \lim_{j\to\infty} \frac{\|\Delta(\widetilde{\beta}_j)\|}{\|\widetilde{\beta}_j\|} \leq \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j} = 0.$

  Daí, $\lim_{j\to\infty} \|\Delta\beta_j\| = 0$. Então, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $k > j \Rightarrow \|\Delta\beta_k\| \leq 1$.

Sendo assim, fazendo $c = 1$ e usando a sequência $(\beta_k)_{k>j}$, temos que $\|\beta_k\| \leq c$ e $\|\Delta\beta_k\| \leq c$. Logo, pelo Teorema 2.19, existe uma subsequência de $\{\beta_k\}$ que é de Cauchy. Para simplificar a notação, assuma que tal subsequência é a própria $(\beta_k)_{k>j}$.

Dado $\psi \in \Omega^k(M)$, observe que

$$|\langle \beta_m, \psi\rangle - \langle \beta_n, \psi\rangle| = |\langle \beta_m - \beta_n, \psi\rangle| \leq \|\beta_m - \beta_n\| \cdot \|\psi\|.$$

Como (β_k) é de Cauchy, segue que $\{\langle \beta_k, \psi\rangle\}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Consequentemente,

$$\begin{array}{rccc} l: & \Omega^k(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \psi & \mapsto & \lim_{j\to\infty} \langle \beta_j, \psi\rangle \end{array}$$

está bem definido e é linear. Além disso, l é limitado (e, consequentemente, contínuo). De fato:

$$\|\psi\| \leq 1 \Rightarrow \|l(\psi)\| = \left\| \lim_{j\to\infty} \langle \beta_j, \psi\rangle \right\| = \lim_{j\to\infty} \left\| \langle \beta_j, \psi\rangle \right\| \leq \lim_{j\to\infty} \|\beta_j\| \cdot \|\psi\| \leq 1.$$

Portanto, $\forall \varphi \in \Omega^k(M): \lim_{j\to\infty} \left|\langle \Delta\beta_j, \varphi\rangle\right| \leq \lim_{j\to\infty} \|\Delta\beta_j\| \cdot \|\varphi\| = 0$. Daí, $\forall \varphi \in \Omega^k(M)$,

$$\begin{aligned} l(\Delta\varphi) &= \lim_{j\to\infty} \langle \beta_j, \Delta\varphi\rangle \\ &= \lim_{j\to\infty} \langle \Delta\beta_j, \varphi\rangle \\ &= 0 \\ &= \langle 0, \varphi\rangle. \end{aligned}$$

Logo, l é uma solução fraca de $\Delta x = 0$. Pelo Teorema 2.18, existe $\beta \in \Omega^k(M): \forall \psi \in \Omega^k(M),\ l(\psi) = \langle \beta, \psi\rangle$ e $\Delta\beta = 0$. Como $\{\beta_j\}$ é de Cauchy, esta converge para γ. Então, $\forall \psi \in \Omega^k(M)$, temos

$$\begin{aligned} \langle \gamma - \beta, \psi\rangle_{L^2} &= \langle \gamma, \psi\rangle_{L^2} + \langle \beta, \psi\rangle_{L^2} \\ &= \langle \gamma, \psi\rangle_{L^2} + l(\psi) \\ &= \left\langle \lim_{j\to\infty} \beta_j, \psi \right\rangle_{L^2} - \lim_{j\to\infty} \langle \beta_j, \psi\rangle_{L^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\forall \psi \in \Omega^k(M) := \left\langle \lim_{j\to\infty} \beta_k, \psi \right\rangle - \langle \beta_j, \psi\rangle = 0.$$

Então, como $\forall \psi \in \Omega^k(M)$, $\langle \gamma - \beta, \psi\rangle = 0$, segue que $\gamma = \beta$. Logo $\beta_j \to \beta$, o que implica (também por continuidade) que $\|\beta\| = 1$ e $\beta \in \mathcal{H}^k(M)^\perp$. Por outro lado,

$$\Delta\beta = 0 \Rightarrow \beta \in \mathcal{H}^k(M)^\perp \cap \mathcal{H}^k(M) = \{0\}.$$

Logo, $\beta = 0$, o que é um absurdo, pois $|\beta| = 1$.

□

2.4 O Teorema de Decomposição de Hodge-de Rham

Teorema 2.21. *Dado $0 \leq k \leq n$, o espaço $\mathcal{H}^k := \mathcal{H}^k(M)$ é de dimensão finita e a decomposição abaixo é L^2-ortogonal:*

$$\begin{aligned} \Omega^k(M) &= im\Delta_k \oplus ker\Delta_k \\ &= \Delta(\Omega^k(M)) \oplus \mathcal{H}^k \\ &= d\delta(\Omega^k(M)) \oplus \delta d(\Omega^k(M)) \oplus \mathcal{H}^k \\ &= d(\Omega^{k-1}(M)) \oplus \delta(\Omega^{k+1}(M)) \oplus \mathcal{H}^k. \end{aligned}$$

E, portanto, dado $\alpha \in \Omega^k(M)$, existe $\omega \in \Omega^k(M)$ tal que $\Delta\omega = \alpha$ se, e somente se $\alpha \perp \mathcal{H}^k$.

Prova. Faremos essa demonstração em três etapas:

1. Finitude da dimensão de $\mathcal{H}^k$:

   Suponha que $\mathcal{H}^k$ tem dimensão infinita. Então, $\mathcal{H}^k$ contém uma sequência infinita ortonormal $\{\alpha_n\}$. Observe que $\|\Delta\alpha_n\| = \|0\| = 0$. Daí, pelo Teorema 2.19, tal sequência admite uma subsequência de Cauchy. Absurdo, pois uma sequência ortogonal não pode convergir.

2. Decomposição:

   Considere a decomposição

   $$\Omega^k(M) = (\mathcal{H}^k)^\perp \oplus \mathcal{H}^k.$$

   Temos que mostrar que $(\mathcal{H}^k)^\perp = im\Delta_k$.

   i. $(\mathcal{H}^k)^\perp \supset im\Delta_k$:

   Considere $\Delta\varphi \in im\Delta_k$. Então $\forall \omega \in \mathcal{H}^k$, $\langle \Delta\varphi, \omega\rangle = \langle \varphi, \Delta\omega\rangle = 0$. Logo, $\Delta\varphi \in (\mathcal{H}^k)^\perp$.

   ii. $(\mathcal{H}^k)^\perp \subset im\Delta_k$. Seja $\alpha \in (\mathcal{H}^k)^\perp$. Defina

   $$\begin{array}{rccc} l: & im(\Delta_k) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \Delta\varphi & \mapsto & \langle \alpha, \varphi\rangle. \end{array}$$

Observe que l está bem definido. De fato: Suponha que $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2$. Então, $\varphi_1 - \varphi_2 \in \mathcal{H}^k$. Logo, $\langle \varphi_1 - \varphi_2, \alpha \rangle = 0$. Portanto, $\langle \varphi_1, \alpha \rangle = \langle \varphi_2, \alpha \rangle$.

Observe que l é, claramente, linear e l é contínuo. De fato: Denote por $h : \Omega^k(M) \to \mathcal{H}^k$ a projeção canônica. Seja $\varphi \in \Omega^k(M)$ e $\psi := \varphi - h(\varphi)$. Daí,

$$\begin{aligned}
|l(\Delta\varphi)| &= |l(\Delta(\psi + h(\varphi)))| \\
&= |l(\Delta\psi + \Delta(h(\varphi)))| \\
&= |l(\Delta\psi) + l(\Delta(h(\varphi)))| \\
&= |l(\Delta\psi) + \langle \alpha, h(\varphi) \rangle| \\
&= |l(\Delta\psi)| \\
&= |\langle \alpha, \psi \rangle|
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned}
|l(\Delta\varphi)| &\leq \|\alpha\| \cdot \|\psi\| \\
&\leq c\|\alpha\| \cdot \|\Delta\psi\| \\
&= c\|\alpha\| \cdot \|\Delta\varphi\|,
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade é dada pelo Lema 2.20. Logo, l é contínuo.

Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe uma extensão contínua de $\bar{l}$ em $\Omega^k(M)$. Daí, $\bar{l}$ é uma solução fraca de $\Delta x = \alpha$. Pelo Teorema 2.18, existe uma solução forte $\omega \in \Omega^k(M)$, isto é, $\alpha = \Delta\omega \in im(\Delta_k)$.

3. Formulações Equivalentes:

$$\begin{aligned}
\Omega^k(M) &= \Delta(\Omega^k(M)) \oplus \mathcal{H}^k \\
&= (d\delta + \delta d)(\Omega^k(M)) \oplus \mathcal{H}^k \\
&\subset ((d\delta(\Omega^k(M))) + (\delta d(\Omega^k(M)))) \oplus \mathcal{H}^k \\
&\subset d(\Omega^{k-1}(M)) + \delta(\Omega^{k+1}(M)) \oplus \mathcal{H}^k \\
&\subset \Omega^k(M).
\end{aligned}$$

- Sejam ω, $\eta \in \Omega^k(M)$. Então, $\langle d\delta\omega, \delta d\eta \rangle = \langle dd\delta\omega, d\eta \rangle = 0$. Logo,

$$d\delta(\Omega^k(M)) \perp \delta d(\Omega^k(M)).$$

Sejam, agora, ω, $\eta \in \Omega^k(M)$ e $\alpha \in \mathcal{H}^k$. Pelo Lema 2.16, temos que $d\alpha = \delta\alpha = 0$. Então, $\langle d\delta\omega + \delta d\eta, \alpha \rangle = \langle \delta\omega, \delta\alpha \rangle + \langle d\eta, d\alpha \rangle = 0$. Logo, $(d\delta(\Omega^k(M)) \oplus \delta d(\Omega^k(M)) \perp \mathcal{H}^k$. Portanto,

$$\Omega^k(M) = d\delta(\Omega^k(M)) \oplus \delta d(\Omega^k(M)) \oplus \mathcal{H}^k.$$

- Similarmente, como $\forall \omega \in \Omega^{k-1}(M)$ e $\forall \eta \in \Omega^{k+1}(M)$, $\langle d\omega, \delta\eta \rangle = \langle dd\omega, \eta \rangle = 0$, então
$$d(\Omega^{k-1}(M)) \perp \delta(\Omega^{k+1}(M)).$$
Finalmente, como $\forall \omega \in \Omega^{k-1}(M)$ e $\forall \eta \in \Omega^{k+1}(M)$, $\forall \alpha \in \mathcal{H}^k : \langle d\omega + \delta\eta, \alpha \rangle = \langle \omega, \delta\alpha \rangle + \langle \eta, d\alpha \rangle = 0$, então
$$d(\Omega^{k-1}(M)) \oplus \delta(\Omega^{k+1}(M)) \perp \mathcal{H}^k.$$

$\square$

Capítulo 3

Solitons de Ricci

Neste capítulo estudaremos uma classe especial de variedades Riemannianas: os solitons de Ricci gradientes. Apresentaremos a demonstração de alguns resultados dados a partir do Teorema de Decomposição de Hodge-de Rham, obtidos no artigo principal deste trabalho, [1].

3.1 Solitons de Ricci

Definição 3.1. Um *soliton de Ricci* é uma variedade Riemanniana (M^n, g), sendo g a sua métrica, dotada de um campo de vetores X que satisfaz a equação

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g, \tag{3.1}$$

onde λ é uma constante e $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie da métrica g com respeito ao campo X. Denotaremos o soliton pela tripla (M^n, g, X). A equação (3.1) é chamada de *equação fundamental dos solitons de Ricci*.

Vale lembrar que a derivada de Lie da métrica g com respeito ao campo X, $\mathcal{L}_X g$, é dada por $\mathcal{L}_X g(Y, Z) = \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle, \ \ \forall \ \ Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, onde ∇ é a conexão de Levi-Civita associada a g.

Se (M, g, X) é um soliton de Ricci e existir uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(M)$, tal que $\nabla f = X$, então (M, g, X) é chamado de *soliton de Ricci gradiente*. Neste caso, a equação (3.1) se reduz a

$$Ric + \nabla^2 f = \lambda g, \tag{3.2}$$

onde λ é uma constante. Com efeito, dados Y_1 e Y_2 dois campos arbitrários em M, temos

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X g)(Y_1,Y_2) &= (\mathcal{L}_{\nabla f} g)(Y_1,Y_2)\\ &= \langle \nabla_{Y_1}(\nabla f), Y_2\rangle + \langle Y_1, \nabla_{Y_2}(\nabla f)\rangle\\ &= \nabla^2 f(Y_1,Y_2) + \nabla^2 f(Y_2,Y_1)\\ &= 2\nabla^2 f(Y_1,Y_2).\end{aligned}$$

Logo, como Y_1 e Y_2 foram tomados arbitrários, segue que

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \nabla^2 f.$$

Um campo de vetores é chamado de *campo de vetores de conforme* se existe uma função diferenciável $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L}_X g = 2\psi g$. Quando $\psi = 0$ o campo é dito de *Killing*. Observe que se $\{E_1, ..., E_n\}$ é um referencial ortonormal em M é fácil ver que $divX = n\psi$.

Seja (M, g, X) um soliton de Ricci. Dizemos que (M, g, X) é

- *expansivo*, se $\lambda < 0$;
- *estável*, de $\lambda = 0$;
- *contrátil*, se $\lambda > 0$.

Perelmam mostrou em [11], que todo soliton de Ricci compacto deve ser gradiente. Sendo assim, sempre que estivermos tratando de solitons (M, g, X) em variedades compactas, já assumiremos a existência de uma função $f \in C^\infty(M)$ tal que $\nabla f = X$. Nestas condições, a função f é chamada de *potencial de Perelman.* Se a função f for constante, o soliton é dito *trivial.*

Exemplo 3.2. *(Solitons de Einstein). Uma variedade Riemanniana M é chamada de variedade de Einstein se,*

$$Ric(X,Y) = \lambda\langle X,Y\rangle, \quad \forall X,Y \in \mathcal{X}(M),$$

onde $\lambda : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função real chamada de função de Einstein.

Dada M uma variedade de Einstein com a função de Einstein constante e escolha uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ constante. Assim, $\nabla^2 f = 0$ e, trivialmente, temos

$$\begin{aligned}Ric(X,Y) + \nabla^2 f(X,Y) &= Ric(X,Y)\\ &= \lambda\langle X,Y\rangle, \quad \forall X,Y \in \mathcal{X}(M),\end{aligned}$$

e, portanto, $(M, g, \nabla f)$ é um soliton de Ricci gradiente. Além disso, $(M, g, \nabla f)$ é um soliton trivial.

Exemplo 3.3. *(Soliton Gaussiano). Considere $M = \mathbb{R}^n$, g a métrica canônica em $\mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ fixado e $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \frac{\lambda}{2}|x|^2$. Considerando-se o* *referencial ortonormal canônico* $\{E_1, ..., E_n\}$*, é fácil verificar que*

$$\nabla^2 f(E_i, E_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \lambda, & i = j \end{cases}$$

Além disso, como o tensor de curvatura de M *é nulo, segue que*

$$Ric(E_i, E_j) + \nabla^2 f(E_i, E_j) = \lambda g(E_i, E_j), \quad \forall i, j \in \{1, ..., n\}.$$

Logo, $(\mathbb{R}^n, g, \nabla f)$ *é um soliton gradiente.*

3.2 Potencial de Hodge-de Rham

Dado um campo de vetores X sobre uma variedade Riemanniana compacta orientada M, o teorema de decomposição de Hodge-de Rham mostra que podemos decompor X como a soma de um campo de vetores Y de divergente nulo e o gradiente de uma função h, isto é,

$$X = Y + \nabla h,$$

onde $divY = 0$. De fato, considerando-se a 1-forma X, podemos aplicar o Teorema de decomposição de Hodge-de Rham para decompor X como

$$X = d\alpha + \delta\beta + \gamma,$$

onde γ é uma 1-forma harmônica, α é uma 0-forma e β é uma 2-forma. Para isso, considere $Y = \delta\beta + \gamma$ e $d\alpha = \nabla h$.

Dado um soliton de Ricci compacto (M, g, X), a função h dada pelo Teorema de decomposição de Hodge-de Rham é chamada de *potencial de Hodge-de Rham.*

Lema 3.4. *Se* (M, g, X) *é um soliton de Ricci gradiente e* f *é o seu potencial de Perelmam, então*

$$R + divX = \lambda n,$$

onde R *é a curvatura escalar de* M*. Daí,*

$$R + \Delta f = \lambda n.$$

Prova. Sejam $p \in M$ e $\{z_1, ..., z_n\}$ uma base ortonormal de T_pM. Então, sendo Z_j uma extensão local de z_j, tem-se que

$$\begin{aligned} R(p) &= \sum_{j=1}^{n} Ric_p(z_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} Ric(Z_j, Z_j)(p) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \big(\lambda g(Z_j, Z_j)(p) - (\nabla^2 f)(Z_j, Z_j)\big)(p) \\ &= \lambda n - tr\nabla^2 f \\ &= \lambda n - \Delta f. \end{aligned}$$

□

O Teorema a seguir relaciona os dois potenciais definidos até aqui. Este é o primeiro resultado obtido no artigo principal deste trabalho.

Teorema 3.5. *Seja (M, g, X) um soliton de Ricci compacto tal que $X = \nabla f$. Então o potencial de Perelman é, a menos de uma constante, o potencial de Hodge-de Rham.*

Prova. Pelo Teorema de Decomposição de Hodge-de Rham, temos que

$$X = Y + \nabla h,$$

onde $divY = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \Delta f &= div\nabla f \\ &= divX \\ &= div(Y + \nabla h) \\ &= divY + div\nabla h \\ &= div\nabla h \\ &= \Delta h. \end{aligned}$$

Sendo assim, temos que

$$\Delta(h - f) = 0.$$

Pelo Teorema de Hopf, concluimos que $h - f$ é constante. □

Observação 3.6. *Se X é um campo de vetores de Killing, então o soliton é trivial.*

De fato, se X é um campo de vetores de Killing, então

$$\begin{aligned} divX &= tr\{Y \longmapsto \nabla_Y X\} \\ &= \sum_i \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle \\ &= -\sum_i \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle \\ &= -divX. \end{aligned}$$

Logo, $divX = 0$. Desta forma,

$$\begin{aligned} \Delta f &= div\nabla f \\ &= divX \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema de Hopf, f é constante.

Levando em consideração o Teorema de decomposição de Hodge-de Rham e o Teorema 3.5, obtemos o seguinte corolário:

Corolário 3.7. *Seja (M, g, X) um soliton de Ricci compacto. Se $\int_M \langle X, \nabla h\rangle dM \leq 0$, então o soliton é trivial.*

Prova. Como a Decomposição de Hodge-de Rham é L^2-ortogonal, temos que

$$\begin{aligned} \langle X, \nabla h\rangle &= \langle \nabla h + Y, \nabla h\rangle \\ &= \langle \nabla h, \nabla h\rangle + \langle Y, \nabla h\rangle \\ &= \langle \nabla h, \nabla h\rangle \\ &= \langle \nabla f, \nabla f\rangle. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_M \langle X, \nabla h\rangle dM &= \int_M \langle \nabla f, \nabla f\rangle dM \\ &= \int_M |\nabla f|^2 dM \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Sendo assim, $|\nabla f|^2 = 0$. Logo, $\nabla f = 0$, e daí, f é constante. Portanto, o soliton é trivial. $\square$

3.3 Algumas Relações Importantes

Agora, provaremos algumas equações que serão importantes nas demonstrações de alguns resultados contidos no artigo principal deste trabalho. Vale lembrar que, nas equações abaixo, graças ao Teorema 3.5, o potencial de Perelman pode ser trocado pelo potencial de Hodge-de Rham.

Proposição 3.8. *Sejam $(M, g, \nabla f)$ um soliton de Ricci gradiente, R a curvatura de escalar de M e $Z \in \mathcal{X}(M)$, valem*

i. $Z(R) + 2\langle \nabla_Z \nabla f, \nabla f\rangle = 2\lambda Z(f)$

ii. $\langle \nabla R, Z\rangle + 2\langle \nabla_{\nabla f} \nabla f, Z\rangle = 2\lambda \langle \nabla f, Z\rangle$

iii. $Ric(\nabla f, Z) = \dfrac{1}{2}\langle \nabla R, Z\rangle$

iv. $Ric(\nabla f, \nabla f) = \dfrac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f\rangle$

v. $Ric(\nabla f, \nabla R) = \dfrac{1}{2}|\nabla R|^2$

vi. $\nabla R = 2\lambda\Delta f + \langle \nabla f, \nabla R\rangle - 2|\nabla^2 f|^2$

vii. $\Delta R + 2\left|\nabla^2 f - \dfrac{\Delta f}{n} g\right|^2 = \langle \nabla f, \nabla R\rangle + \dfrac{2}{n} R\Delta f.$

Prova.

i. Usando a equação fundamental de solitons de Ricci gradientes e a desigualdade de Bianchi, Hamilton mostrou, em [6], que, para solitons de Ricci gradientes, vale

$$R + |\nabla f|^2 - 2\lambda f = c, \tag{3.3}$$

onde c é uma constante. Em particular, dado $Z \in \mathcal{X}(M)$,

$$Z(R) + 2\langle \nabla_Z \nabla f, \nabla f\rangle = 2\lambda Z(f). \tag{3.4}$$

ii. Usando a simetria da Hessiana, temos:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_Z \nabla f, \nabla f\rangle &= \langle \nabla^2 f(Z), \nabla f\rangle \\
&= \nabla^2 f(Z, \nabla f) \\
&= \nabla^2 f(\nabla f, Z) \\
&= \langle \nabla^2 f(\nabla f), Z\rangle \\
&= \langle \nabla_{\nabla f} \nabla f, Z\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, a equação (3.3) fica dada por

$$\langle \nabla R, Z\rangle + 2\langle \nabla_{\nabla f}\nabla f, Z\rangle = 2\lambda\langle \nabla f, Z\rangle.$$

iii. Dado $Z \in \mathcal{X}(M)$, temos que

$$Ric(\nabla f, Z) + \nabla^2 f(\nabla f, Z) = \lambda\langle \nabla f, Z\rangle.$$

Mas, pelo ítem (ii.) acima,

$$\lambda\langle \nabla f, Z\rangle = \frac{1}{2}\langle \nabla R, Z\rangle + \langle \nabla_{\nabla f}\nabla f, Z\rangle.$$

Logo,

$$Ric(\nabla f, Z) + \nabla^2 f(\nabla f, Z) = \frac{1}{2}\langle \nabla R, Z\rangle + \langle \nabla_{\nabla f}\nabla f, Z\rangle.$$

Portanto,

$$Ric(\nabla f, Z) = \frac{1}{2}\langle \nabla R, Z\rangle.$$

iv. Se $Z = \nabla f$ no ítem (iii.) acima, temos

$$Ric(\nabla f, \nabla f) = \frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f\rangle.$$

Dado [v.] $Z = \nabla R$ no ítem (3.) acima, temos

$$Ric(\nabla f, \nabla R) = \frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla R\rangle = \frac{1}{2}|\nabla R|^2.$$

vi. Do Lema 3.4, temos que

$$R + \Delta f = \lambda n.$$

Então,

$$\nabla R = -\nabla(\Delta f).$$

Sendo assim, usando a fórmula de Bochner e o ítem (iv.),

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= Ric(\nabla f, \nabla f) + |\nabla^2 f|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f\rangle + |\nabla^2 f|^2 - \langle \nabla f, \nabla R\rangle \\
&= |\nabla^2 f|^2 - \frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f\rangle.
\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3),

$$\Delta R + \Delta|\nabla f|^2 - 2\lambda\Delta f = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Delta R &= 2\lambda\Delta f - \Delta|\nabla f|^2 \\
&= 2\lambda\Delta f - \big(2|\nabla^2 f|^2 - \langle \nabla R, \nabla f\rangle\big) \\
&= 2\lambda\Delta f - 2|\nabla^2 f|^2 + \langle \nabla f, \nabla R\rangle.
\end{aligned}$$

vii. Usando o ítem (vi.), temos

$$\begin{aligned}
\Delta R &= 2\lambda\Delta f + \langle \nabla f, \nabla R\rangle - 2|\nabla^2 f|^2 \\
&= 2\lambda\Delta f + \langle \nabla f, \nabla R\rangle - 2\big(|\Phi_f|^2 + \tfrac{(\Delta f)^2}{n}\big) \\
&= 2\lambda\Delta f + \langle \nabla R, \nabla f\rangle - 2\big(|\nabla^2 f - \tfrac{\Delta f}{n} g|^2 + \tfrac{(\Delta f)^2}{n}\big) \\
&= 2\lambda\Delta f + \langle \nabla R, \nabla f\rangle - 2\big|\nabla^2 f - \tfrac{\Delta f}{n} g\big|^2 - 2\tfrac{(\Delta f)^2}{n} \\
&= 2\Delta f(\lambda - \tfrac{\Delta f}{n}) - 2|\nabla^2 f - \tfrac{\Delta f}{n} g|^2 + \langle \nabla R, \nabla f\rangle \\
&= \tfrac{2}{n} R\Delta f - 2|\nabla^2 f - \tfrac{\Delta f}{n} g|^2 + \langle \nabla R, \nabla f\rangle,
\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue de 3.4. Finalmente,

$$\nabla R + 2\left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 = \frac{2}{n} R\Delta f + \langle \nabla R, \nabla f\rangle,$$

o que conclui a demonstração da proposição.

□

3.4 Resultados Principais

Teorema 3.9. *Seja* (M, g, X) *um soliton de Ricci compacto. Então*

$$\int_M \left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 dM = \frac{n-2}{2n} \int_M (\Delta f)^2 dM.$$

Prova. Do item (vii.) da Proposição 3.8 vii., segue que

$$\Delta R + 2\left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 = \langle \nabla f, \nabla R\rangle + \frac{2}{n} R\Delta f.$$

Integrando ambos os membros desta equação, obtém-se

$$\int_M \Delta R dM + 2\int_M \left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 dM = \int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle dM + \frac{2}{n}\int_M R\Delta f dM.$$

Como $\int_M \Delta R dM = 0$, temos que

$$2\int_M \left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 dM = \int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle dM + \frac{2}{n}\int_M R\Delta f dM. \tag{3.5}$$

Pelo Lema 1.14,

$$\begin{aligned} \int_M div(R\nabla f) dM &= \int_M d\big(i(R\nabla f)\big) dM \\ &= \int_{\partial M} i\big(R\nabla f\big) dM \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_M div(R\nabla f) dM &= \int_M R div(\nabla f) dM + \int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle dM \\ &= \int_M R\Delta f dM + \int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle dM. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_M R\Delta f dM = -\int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle dM.$$

Assim, podemos escrever a equação (3.5) como

$$\begin{aligned} 2\int_M \left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 dM &= \int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle dM - \frac{2}{n}\int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle dM \\ &= \frac{n-2}{n}\int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle dM. \end{aligned}$$

Mas, visto que $R + \Delta f = n\lambda$, temos que $\nabla R = -\nabla(\Delta f)$. Desta forma,

$$2\int_M \left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 dM = -\frac{n-2}{n}\int_M \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle dM. \tag{3.6}$$

Analogamente, pelo Lema 1.14,

$$\begin{aligned} \int_M div(\Delta f \nabla f) dM &= \int_M d\big(i(\Delta f \nabla f)\big) dM \\ &= \int_{\partial M} i\big(\Delta f \nabla f\big) dM \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_M div(\Delta f \nabla f) dM &= \int_M \Delta f div(\nabla f) dM + \int_M \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle dM \\ &= \int_M (\Delta f)^2 dM + \int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle dM. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_M (\Delta f)^2 dM = -\int_M \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle dM.$$

E, portanto, a equação 3.6 fica dada por

$$2\int_M \left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 dM = \frac{n-2}{n}\int_M (\Delta f)^2 dM.$$

□

Corolário 3.10. *Para um soliton de Ricci compacto (M, g, X) valem:*

i. *Se* $\int_M Ric(\nabla h, \nabla h) dM \leq 0$, *então o soliton é também trivial.*

ii. *Se* $\int_M Ric(\nabla h, \nabla R) dM \leq 0$, *então o soliton é trivial.*

iii. $\lambda(n+2)\int_M |\nabla h|^2 dM = \int_M (\Delta h)^2 dM + \int_M R|\nabla h|^2 dM.$

Prova.

i. Supondo $\int_M Ric(\nabla h, \nabla h) dM \leq 0$ temos, pelo item (iv.) da Proposição 3.8, que $\int_M \langle \nabla R, \nabla f \rangle dM \leq 0$. Como $R + \Delta f = \lambda n$, segue que $\int_M \langle \nabla(\Delta f), \nabla f \rangle dM \geq 0$. Usando um raciocínio análogo ao feito na prova do Teorema anterior, concluímos que $\int_M (\Delta f)^2 dM \leq 0$. Logo, $\Delta f = 0$ e, pelo Teorema de H. Hopf, concluímos que f é constante e, portanto, o soliton é trivial.

ii. Supondo $\int_M Ric(\nabla h, \nabla R) dM \leq 0$ temos, pela Proposição 3.8, que $\int_M |\nabla R|^2 dM \leq 0$. Logo, R é constante. Assim, pelo item (iv.) da Proposição 3.8, temos $\int_M Ric(\nabla h, \nabla h) dM \leq 0$. Do ítem acima, segue o resultado.

iii. Sendo $\phi_h = \nabla^2 h - \dfrac{\Delta h}{n} g$, a equação dada na Proposição 3.8 vii. fica escrita como

$$\Delta R + 2|\phi_h|^2 = \langle \nabla h, \nabla R \rangle + \frac{2}{n} R \Delta h.$$

Integrando, ambos os membros desta equação e usando que $\int_M \Delta R dM = 0$, obtemos que

$$2 \int_M |\phi_h|^2 dM = \int_M \langle \nabla R, \nabla h \rangle dM + \frac{2}{n} \int_M R \Delta h dM. \tag{3.7}$$

Usando, como na demonstração do Teorema anterior, o Lema 1.14, temos que

$$\int_M \langle \nabla R, \nabla h \rangle dM = \int_M (\Delta h)^2 dM$$

e

$$\int_M R \Delta h dM = - \int_M \langle \nabla R, \nabla h \rangle dM = \int_M h \Delta R dM.$$

Assim, a equação (3.7) fica escrita como

$$2 \int_M |\phi_h|^2 dM = \int_M (\Delta h)^2 dM + \frac{2}{n} \int_M h \Delta R dM. \tag{3.8}$$

Usando e equação (3.3), temos que $\Delta R = 2\lambda \Delta h - \Delta |\nabla h|^2$ e, daí,

$$\begin{aligned} 2 \int_M |\phi_h|^2 dM &= \int_M (\Delta h)^2 dM + \frac{2}{n} \int_M h(2\lambda \Delta h - \Delta |\nabla h|^2) dM \\ &= \int_M (\Delta h)^2 dM + \frac{4\lambda}{n} \int_M h \Delta h dM - \frac{2}{n} \int_M h \Delta |\nabla h|^2 dM. \end{aligned}$$

Mas, novamente, aplicando o Lema 1.14,

$$\int_M h \Delta |\nabla h|^2 dM = \int_M |\nabla h|^2 \Delta h dM$$

e

$$\int_M h\Delta h dM = -\int_M \langle \nabla h, \nabla h\rangle dM = -\int_M |\nabla h|^2 dM.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
2\int_M |\phi_h|^2 dM &= \int_M (\Delta h)^2 dM - \frac{4\lambda}{n}\int_M |\nabla h|^2 dM - \frac{2}{n}\int_M |\nabla h|^2 \Delta h dM \\
&= \int_M (\Delta h)^2 dM - \frac{4\lambda}{n}\int_M |\nabla h|^2 dM - \frac{2}{n}\int_M |\nabla h|^2 (\lambda n - R) dM \\
&= \int_M (\Delta h)^2 dM - \big(2\lambda + \frac{4\lambda}{n}\big)\int_M |\nabla h|^2 dM + \frac{2}{n}\int_M R|\nabla h|^2 dM.
\end{aligned}$$

Usando o Teorema 3.9,

$$\frac{n-2}{n}\int_M (\Delta h)^2 dM = \int_M (\Delta h)^2 dM - \big(2\lambda + \frac{4\lambda}{n}\big)\int_M |\nabla h|^2 dM + \frac{2}{n}\int_M R|\nabla h|^2 dM.$$

Daí,

$$-2\int_M (\Delta h)^2 dM = -(2\lambda n + 4\lambda)\int_M |\nabla h|^2 dM + 2\int_M R|\nabla h|^2 dM.$$

Portanto,

$$\lambda(n+2)\int_M |\nabla h|^2 dM = \int_M (\Delta h)^2 dM + \int_M R|\nabla h|^2 dM.$$

□

Duas variedades, M e N, são ditas conformemente equivalentes se existe um difeomorfismo conforme $f : M \longrightarrow N$. Ishihara e Tashiro, em [7], mostraram que uma variedade Riemanniana completa (M, g) é conformemente equivalente à esfera euclideana $\mathbb{S}^n$ se existe uma função não-trivial, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\nabla^2 f = \frac{\Delta f}{n} g$. Usaremos este fato para provar o corolário a seguir.

Corolário 3.11. *Seja (M^2, g, X) um soliton de Ricci compacto. Então, ou o soliton é trivial ou é conformemente equivalente à esfera $\mathbb{S}^2$.*

Prova. Se $n = 2$ no Teorema 3.9, temos que

$$\int_M \big|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{2} g\big|^2 = 0.$$

Logo, $\nabla^2 f = \frac{\Delta f}{2} g$. Se o soliton não é trivial, temos que f não é constante. Daí, pelo Teorema dado por Ishihara e Tashiro, concluímos que M^2 é conformemente equivalente à esfera $\mathbb{S}^2$. □

Tashiro, em [12], mostrou que uma variedade Riemanniana completa (M, g) é isométrica ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ quando existe uma função diferenciável $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ não-constante satisfazendo $\nabla^2 f = \nu g$, para alguma constante $\nu \neq 0$. Aplicando este resultado, provaremos o seguinte Teorema:

Teorema 3.12. *Para um soliton de Ricci conforme (M^n, g, X), com $n \geq 3$, vale:*

i. *Se M é compacta, então X é um campo de vetores de Killing e M é um soliton trivial.*

ii. *Se M é um soliton gradiente não-compacto, então ou o soliton é Gaussiano ou X é um campo de Killing.*

Prova. Como X é um campo de vetores conforme, temos que existe $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L}_X g = 2\psi g$. Daí, a equação 3.1 escreve-se como

$$Ric = (\lambda - \psi)g,$$

o que mostra que M^n é uma variedade de Einstein. Como $n \geq 3$, temos que $\lambda - \psi$ é constante. Daí, como λ é constante, segue que ψ também é.

i. Suponha que M é compacta. Dado um referencial ortonormal $\{E_1, ..., E_n\}$,

$$divX = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_X g(E_i, E_i) = n\psi.$$

Pelo Lema 1.14 e o pelo Teorema de Stokes,

$$0 = \int_M divX = n\psi vol(M).$$

Daí, $\psi = 0$. Logo, $\mathcal{L}_X g = 0$. Portanto, X é de Killing.

ii. Suponha que $X = \nabla f$. Então, $\mathcal{L}_{\nabla f} g = 2\nabla^2 f$. Logo, $\nabla^2 f = \psi g$. Se $\psi = 0$, segue que X é um campo de vetores de Killing. Se $\psi \neq 0$, podemos aplicar o resultado de Tashiro para concluir que M é isométrica ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, implicando que o soliton é Gaussiano.

□

Finalmente, para um soliton de Ricci compacto conforme, o Teorema a seguir nos oferece um limite inferior para o primeiro autovalor do Laplaciano. Para sua demonstração utilizaremos dois resultados clássicos que serão enunciados a seguir e podem ser obtidos na referência [3].

Teorema 3.13. *(Lichnerowicz) Seja M^n uma variedade Riemanniana fechada e orientada, com a métrica g e tensor de Ricci satisfazendo $Ric \geq \alpha g$, onde $\alpha > 0$ é uma constante real. Se λ denota o primeiro autovalor não-nulo do Laplaciano de M, então*

$$\lambda \geq \frac{n\alpha}{n-1}.$$

Teorema 3.14. *(Obata) Seja M^n uma variedade Riemanniana fechada e orientada, com métrica g e tensor de Ricci satisfazendo $Ric \geq \alpha g$, onde $\alpha \geq 0$ é uma constante. Se $\lambda = \dfrac{n\alpha}{n-1}$ é o primeiro aultovalor não-nulo do Laplaciano de M, então M é isométrica à esfera canônica $\mathbb{S}^n\left(\sqrt{\dfrac{n-1}{\alpha}}\right)$.*

Teorema 3.15. *Seja (M^n, g, X) um soliton de Ricci conforme compacto. Se $n \geq 3$, então o primeiro autovalor do Laplaciano satisfaz $\lambda_1 \geq \frac{n}{n-1}\lambda$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, M^n é isométrica à esfera euclideana canônica $\mathbb{S}^n(r)$.*

Prova. Como M é compacto, temos que X é um campo de vetores de Killing. Então, $Ric = \lambda g$. Daí, aplicando-se o resultado clássico de Lichnerowicz que vale se a curvatura de Ricci é maior ou igual a k, então o primeiro autovalor do Laplaciano λ_1 satisfaz $\lambda_1 \geq \frac{k}{n-1}n$. Então, temos que

$$\lambda_1 \geq \frac{\lambda}{n-1}n.$$

Aplicando o Teorema de Obata, [10], a igualdade ocorre se, e somente se M^n é isométrica à esfera canônica $\mathbb{S}^n(r)$.

□

Referências Bibliográficas

[1] C. Aquino, A. Barros, and E. Ribeiro. Some applications of the Hodge-de Rham decomposition to Ricci solitons. *Results in Mathematics*, 60(1):245–254, 2011.

[2] S. Bochner. Vector fields and ricci curvature. *Bull. American Math. Soc.*, 52:776–797, 1946.

[3] A. Caminha. *Notas de Geometria Diferencial.* Notas de aula. Maio de 2010.

[4] M.P. do Carmo. *Geometria diferencial de curvas e superfícies.* Textos Universitários. Sociedade Brasileira de Matemática, 2008.

[5] M.P. do Carmo. *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008.

[6] R. S. Hamilton. The formation of singularities in the Ricci flow. *Surveys in differential geometry*, 2:7–136, 1995.

[7] S. Ishihara and Y. Tashiro. On Riemannian manifolds admitting a concircular transformation. *Math. J. Okayama Univ.*, 9:19–47, 1959.

[8] J.M. Lee. *Introduction to smooth manifolds.* Graduate texts in mathematics. Springer, 2002.

[9] Nikolai Nowaczyk. *The Hodge decomposition.* Notas de aula. Janeiro de 2010.

[10] M. Obata. Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 14(3):333–340, 1962.

[11] G. Perelman. The entropy formula for the ricci flow and its geometric applications. *arXiv preprint math/0211159*, 2002.

[12] Y. Tashiro. Complete Riemannian manifolds and some vector fields. *Trans. Amer. Math. Soc*, 117(5):251–275, 1965.

[13] F.W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag, 1983.