



Universidade Federal da Bahia  
Escola Politécnica  
Departamento de Engenharia Elétrica  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica



---

# MODELAGEM DE ROBÔS MÓVEIS COM RODAS OMNIDIRECIONAIS INCLUINDO MODELOS ESTÁTICOS DE ATRITO.

**Autor:** Mariane Dourado Correia  
**Orientador:** Prof. Dr. André Gustavo Scolari Conceição - UFBA

Salvador-BA, Novembro de 2012.





Universidade Federal da Bahia  
Escola Politécnica  
Departamento de Engenharia Elétrica  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica



---

# MODELAGEM DE ROBÔS MÓVEIS COM RODAS OMNIDIRECIONAIS INCLUINDO MODELOS ESTÁTICOS DE ATRITO.

**Autor:** Mariane Dourado Correia  
**Orientador:** Prof. Dr. André Gustavo Scolari Conceição - UFBA

*Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Elétrica da Universidade Federal da Bahia,  
para preenchimento de requisitos parciais à obtenção do  
Título de*  
**MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

## **Banca Examinadora**

Dr. André Gustavo Scolari Conceição - UFBA (Orientador)  
Dr. Humberto Xavier de Araújo - UFBA  
Dr. Jês de Jesus Fiais Cerqueira - UFBA  
Dr. Pablo Javier Alsina - UFRN

Salvador-BA, Novembro de 2012.

---

C824 Correia, Mariane Dourado  
Modelagem de robôs móveis com rodas omnidirecionais incluindo modelos estáticos de atrito. Mariane Dourado Correia. –Salvador, 2012.

93 f. : il.color.

Orientador: Prof. Doutor André Gustavo Scolari Conceição.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal da Bahia.  
Escola Politécnica, Departamento de Engenharia Elétrica, 2012.

1. Robôs móveis. 2. Modelos de atrito. 3. Estimativa de parâmetros.  
I. André Gustavo Scolari Conceição. II. Universidade Federal da Bahia.  
Departamento de Engenharia Elétrica III. Título.

*CDD* : 629.892

---

MARIANE DOURADO CORREIA

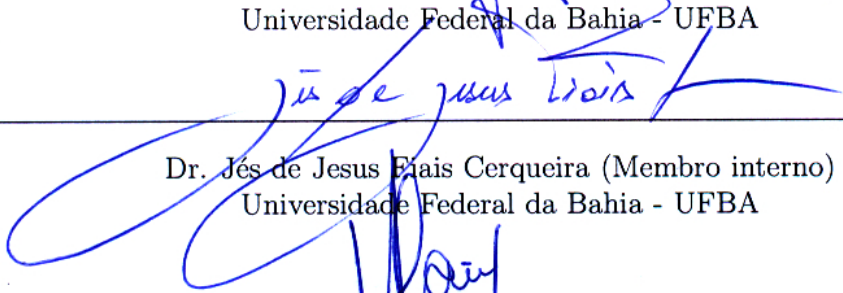
MODELAGEM DE ROBÔS MÓVEIS COM RODAS  
OMNIDIRECIONAIS INCLUINDO MODELOS ESTÁTICOS DE  
ATRITO.

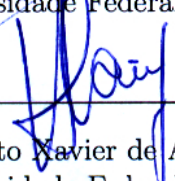
Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal da Bahia, como requisição parcial para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Aprovado em 10 de dezembro de 2012.

Comissão Examinadora

  
\_\_\_\_\_  
Dr. André Gustavo Scolari Conceição (Orientador)  
Universidade Federal da Bahia - UFBA

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Jês de Jesus Etais Cerqueira (Membro interno)  
Universidade Federal da Bahia - UFBA

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Humberto Xavier de Araújo (Membro interno)  
Universidade Federal da Bahia - UFBA

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Pablo Javier Alsina (Membro externo)  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN



# Resumo

Este trabalho propõe um estudo de modelos estáticos de atrito e as suas influências nos modelos de robôs móveis com rodas omnidirecionais em diferentes condições de operação. Será proposto um modelo para robôs móveis com rodas omnidirecionais que inclui a descrição de atritos estáticos na composição das forças do centro de massa do robô. Além da modelagem, são propostos métodos práticos de estimação para obter os coeficientes de atrito de Coulomb, Viscoso, *Stiction* e o efeito de *Stribeck* utilizando informações sensoriais de força e velocidade do centro de massa do robô. Na pesquisa, foram utilizados robôs móveis de diferentes tamanho de rodas assim como ambientes de navegação distintos. Dois modelos estáticos de atrito serão testados no modelo dinâmico do robô. O primeiro modelo considera as forças de atrito de Coulomb e de atrito Viscoso. O segundo modelo considera as forças de atrito de Coulomb, o Viscoso, o *Stiction* e o efeito *Stribeck*. Resultados experimentais com o robô e de simulação com o modelo proposto são comparados para demonstrar o desempenho da abordagem apresentada.

## Palavras Chave

Modelagem dinâmica, modelos de atrito, estimação de parâmetros, robôs móveis.





# Abstract

This work approaches the study of static friction models and their influence in modelling of omnidirectional mobile robots with wheels in different operation conditions. A model is proposed for mobile robots with omnidirectional wheels that includes friction static models in the composition of the forces of the center of mass of the robot. Besides the modeling, practical methods of estimation are proposed to get the Coulomb friction coefficients, Viscous, *Stiction* and the *Stribeck* effect using sensorial information of force and speed of the center of mass of the robot. In this research, mobile robots of different wheel sizes were used as well as different navigation environments. Two friction static models will be tested in the dynamic model of the robot. The first model considers the Coulomb friction forces and the Viscous friction. The second model considers the Coulomb friction forces, the Viscous, the *Stiction* and the *Stribeck* effect. The experiments results of the robot and the simulation with the proposed model are compared to show the performance of the presented approach.

## Key Words

Modeling dynamic, friction models, parameter of estimation, mobile robots.



# Agradecimentos

- A Deus e Nossa Senhora Aparecida por me conceder mais essa benção em minha vida.
- A CNPQ pela concessão de uma bolsa de estudos durante a realização do curso.
- Ao meu orientador Prof. Dr. André Gustavo Scolari Conceição pelos ensinamentos, confiança e compreensão dispensados durante todos os momentos e que me proporcionaram a conclusão dessa dissertação.
- Aos meus pais por terem acreditado e confiado que eu seria capaz de chegar até aqui. Pai, sei que onde estiver estará contente por mais está vitória. Mãe, meu poço de segurança, meu muito obrigado pelo carinho, amor, compreensão e incentivo de sempre.
- Corina, minha mãe preta, obrigada por ter me incentivado sempre, por me dar tanta força para lutar pelos meus idéais.
- Bel, minha irmã, obrigado por está sempre do meu lado, me dando força e palavras de carinho.
- A Júnior, obrigado por está sempre do meu lado, acreditando mesmo quando eu desistia, pelo companheirismo, dedicação e amor.
- Aos meus amigos Cesar Peña, Thiago e Wilton Lacerda por toda amizade.
- A todos os amigos e colegas do Laboratório de Robótica.

Muito Obrigada!



# Índice

Resumo	v
Abstract	vii
Agradecimentos	ix
Índice	xi
Projeto e publicações	xiii
Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xvii
Nomenclatura Matemática	xix
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Contexto . . . . .	1
1.2 Objetivos e contribuições . . . . .	7
1.3 Estrutura do Texto . . . . .	8
<b>2 Modelagem do robô</b>	<b>9</b>
2.1 Plataforma robótica . . . . .	9
2.2 Modelo cinemático . . . . .	10
2.3 Modelo dinâmico . . . . .	11
2.3.1 Modelo estático de atrito incluindo o atrito de Coulomb e o Viscoso . . . . .	13
2.3.2 Modelo estático de atrito incluindo o atrito de Coulomb, o Viscoso, o <i>Stiction</i> e o efeito <i>Stribeck</i> . . . . .	15
2.4 Modelo no espaço de estados . . . . .	17
2.4.1 Equações do modelo do robô considerando o atrito Coulomb e o Viscoso . . . . .	17
2.4.2 Equações do modelo do robô considerando o atrito de Coulomb, o Viscoso, o <i>Stiction</i> e o efeito <i>Stribeck</i> . . . . .	24

<b>3</b>	<b>Métodos de estimação dos parâmetros</b>	<b>29</b>
3.1	Introdução . . . . .	29
3.2	Método I-Velocidade em Regime Permanente . . . . .	31
3.2.1	Estimação dos parâmetros utilizando o robô com rodas pequenas	31
3.2.2	Estimação dos parâmetros utilizando robô com rodas grandes	36
3.3	Método II-Tração nula . . . . .	42
3.3.1	Estimação dos parâmetros utilizando o robô com rodas grandes	42
3.4	Método baseado em mínimos quadrados por combinação linear das funções . . . . .	44
3.4.1	Estimação dos parâmetros utilizando o robô com rodas grandes	46
<b>4</b>	<b>Validação do modelo</b>	<b>51</b>
4.1	Introdução . . . . .	51
4.1.1	Simulação com o modelo do robô de rodas pequenas . . . . .	51
4.1.2	Simulação com o modelo do robô de rodas grandes . . . . .	54
4.1.3	Simulação com o modelo do robô de rodas grandes na região da zona morta . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>63</b>
5.1	Sugestões de Futuros Trabalhos . . . . .	64
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>67</b>

# Projeto e publicações

Este trabalho faz parte da pesquisa do projeto "Estimação e Modelagem de Parâmetros Dinâmicos aplicado a Robôs Móveis com Rodas", Edital MCT/CNPq N. 70/2009 - Programa de Expansão da Pós-Graduação em Áreas Estratégicas - PGAEST, coordenado pelo Prof. André Gustavo Scolari Conceição.

Os resultados do projeto foram divulgados em documentação impressa e virtual (em forma de dissertação), além de serem expostos em eventos científicos da área. Até o momento, foram publicados 2 artigos sobre o estudo realizado:

- Conceição, A. G. S. ; Correia, M. D. ; Santos, J.T. ; Ribeiro, T.T. Modelagem de um robô móvel omnidirecional de três rodas incluindo compensação de atrito. In: X Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2011, São João Del-Rei. SBAI 2011, 2011. p. 1031-1036.
- Conceição, A. G. S. ; Correia, M. D. Modeling of a Three Wheeled Omnidirectional Robot Including Friction Models. In: 10th International IFAC Symposium on Robot Control, 2012, Dubrovnik-Croatia. SYROCO 2012, 2012. v. 10. p. 7-12.





# Lista de Figuras

1.1	Tipos de rodas. . . . .	2
1.2	Aplicações de robôs omnidirecionais. . . . .	3
2.1	Robôs com três rodas omnidirecionais. . . . .	10
2.2	Sistemas de coordenadas e parâmetros geométricos. . . . .	11
2.3	Exemplos de atritos estáticos: (a) atrito Viscoso; (b) atrito de Coulomb; (c) atrito de Coulomb + Viscoso. . . . .	14
2.4	Exemplos de atritos estáticos. (a) <i>Stiction</i> + Coulomb e atrito Viscoso; (b) <i>Stiction</i> + efeito <i>Stribeck</i> + Coulomb + Viscoso . . . . .	15
3.1	Rodas do robô em estudo. . . . .	30
3.2	Ambiente de navegação. . . . .	30
3.3	Curvas de velocidades e correntes. . . . .	33
3.4	Relação entre forças e torque com as velocidades. . . . .	34
3.5	Curvas de velocidades e correntes do robô no carpet. . . . .	38
3.6	Curvas de velocidades e correntes do robô na grama sintética. . . . .	39
3.7	Relação entre forças e torque com as velocidades do robô no carpet e na grama. . . . .	40
3.8	Velocidades segundo a direção de $w$ . . . . .	43
3.9	Atrito estático Coulomb, Viscoso, o efeito <i>Stribeck</i> e o <i>Stiction</i> . . . . .	44
3.10	Zona morta do robô no ambiente de navegação o carpet. . . . .	47
3.11	Zona morta do robô no ambiente de navegação a grama sintética. . . . .	48
4.1	Representação das tensões nas direções $v$ , $v_n$ e $w$ . . . . .	53
4.2	Curvas de velocidade do robô e do modelo no carpet. . . . .	53
4.3	Sinal de entrada dos motores . . . . .	54
4.4	Curvas de velocidade do robô e do modelo no carpet. . . . .	57
4.5	Curvas de velocidade do robô e do modelo na grama sintética. . . . .	58
4.6	Sinal de entrada dos motores. . . . .	59
4.7	Análise da zona morta. . . . .	60
4.8	Análise da zona morta na direção de $w$ na grama. . . . .	61



# Lista de Tabelas

3.1	Valores de tensões, velocidades, forças e torques. . . . .	32
3.2	Equações e coeficientes de atrito. . . . .	32
3.3	Parâmetros do modelo. . . . .	35
3.4	Valores de tensões, velocidades, forças e torques no carpet. . . . .	37
3.5	Valores de tensões, velocidades, forças e torques na grama sintética. . . . .	37
3.6	Equações e coeficientes de atrito no carpet. . . . .	37
3.7	Equações e coeficientes de atritos na grama sintética. . . . .	37
3.8	Parâmetros do modelo. . . . .	41
3.9	Momento de inércia. . . . .	43
3.10	Coefficientes de atrito estimados. . . . .	49
3.11	Resumo dos coeficientes de atrito estimados. . . . .	49
4.1	Tensões aplicadas. . . . .	52
4.2	Tensões aplicadas nos motores no carpet. . . . .	55
4.3	Tensões aplicadas nos motores, ambiente de navegação grama sintética. . . . .	56
4.4	Comparação entre velocidades e ambientes de navegação. . . . .	59
4.5	Erro médio quadrático. . . . .	62



# Nomenclatura Matemática

A menos que referência contrária seja fornecida, os símbolos matemáticos abaixo possuem os seguintes significados:

$x$	vetor de estados.
$u$	vetor de entrada.
$A; B; C; D; K; G$	matrizes da representação em espaço de estados.
$v[m/s]$	velocidade linear do centro de massa do robô na direção de $v$ do sistema de coordenadas do robô.
$v_n[m/s]$	velocidade linear do centro de massa do robô na direção de $v_n$ do sistema de coordenadas do robô.
$w[rad/s]$	velocidade angular do centro de massa do robô na direção de $w$ do sistema de coordenadas do robô.
$M[Kg]$	massa do robô.
$J[Kg \cdot m^2]$	momento de inércia do robô.
$B_v[N/(m/s)]$	coeficiente de atrito Viscoso com relação à direção de $v$ .
$B_{v_n}[N/(m/s)]$	coeficiente de atrito Viscoso com relação à direção de $v_n$ .
$B_w[N/(rad/s)]$	coeficientes de atrito Viscoso com relação à direção de $w$ .
$C_v[N]$	coeficiente de atrito Coulomb com relação à direção de $v$ .
$C_{v_n}[N]$	coeficiente de atrito Coulomb com relação à direção de $v_n$ .
$C_w[N \cdot m]$	coeficiente de atrito de Coulomb com relação à direção de $w$ .
$f_i(t)[N]$	forças de tração das rodas do robô para $i= 1, 2$ e $3$ .
$T_i[N \cdot m]$	torques rotacionais das rodas para $i= 1, 2$ e $3$ .
$r_i$	raios das rodas para $i= 1, 2$ e $3$ .
$l_i$	reduções nos motores para $i= 1, 2$ e $3$ .
$b[m]$	distância entre o centro do robô e as rodas.
$L_{a_i}[H]$	indutância de armadura para $i= 1, 2$ e $3$ .
$R_{a_i}[\Omega]$	resistência de armadura para $i= 1, 2$ e $3$ .
$l_i$	redução dos motores para $i= 1, 2$ e $3$ .
$i_{a_i}[A]$	corrente de armadura para $i= 1, 2$ e $3$ .
$K_{v_i}[volts/rad/s]$	constante EMF para $i= 1, 2$ e $3$ .
$K_{t_i}[N \cdot m/A]$	constante de torque para $i= 1, 2$ e $3$ .
$w_{m_i}[rad/s]$	velocidade de rotação dos motores para $i= 1, 2$ e $3$ .

$x_r[m]$	coordenada $x_r$ do centro de massa P do robô no sistema de coordenadas global.
$y_r[m]$	coordenada $y_r$ do centro de massa P do robô no sistema de coordenadas global.
$CC$	corrente contínua.
$\delta[rad]$	ângulo entre os eixos das rodas e os vetores de velocidades do sistema de coordenadas do robô.
$\theta[rad]$	posição angular do robô no sistema de coordenadas global.
$R(\theta)$	matriz de rotação entre o sistema de coordenadas global e o sistema de coordenadas do robô.
$u_i [V]$	tensão nos motores para $i= 1, 2$ e $3$ respectivamente.
$v_i [m/s]$	velocidade linear das rodas para $i=1, 2$ e $3$ .
$F_v[N]$	força de tração no robô segundo a direção de $v$ do sistema de coordenadas do robô.
$F_{v_n}[N]$	força na direção no robô segundo a direção de $v_n$ do sistema de coordenadas do robô.
$\Gamma [N.m]$	torque de rotação segundo a direção de $w$ do sistema de coordenadas do robô.

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Contexto

Os robôs podem ser divididos em quatro categorias: terrestres, aquáticos, aéreos e espaciais (Dudek and Jenkin, 2010). Na classe dos robôs terrestres com rodas, existem algumas configurações associadas a parte mecânica de locomoção, que é o mecanismo responsável pelo movimento do robô, como: Ackerman, triciclo, diferencial, omnidireccional (Bräunl, 2008). No caso dos robôs com rodas, o que define a sua locomoção são as diversas configurações das rodas. As mais comuns são: rodas padrão, castor, suecas e esféricas (Siegwart *et al.*, 2004).

As rodas padrão e castor, como mostra a Figura 1.1(a), têm eixo primário de rotação e são portanto direcionais. A diferença entre as rodas castor e a padrão está em um grau de liberdade adicional, que permite uma rotação no redor do eixo vertical que passa pelo centro da roda. A roda esférica é uma roda omnidireccional, muitas vezes projetada de modo que possa ser alimentada ativamente para girar em qualquer direção. Exemplo de implementação da roda esférica é o *mouse* do computador (não ativa) e o robô Ballbot (ativa), como ilustra a Figura 1.1(b) (Siegwart *et al.*, 2004). As rodas suecas ou omnidireccionais foram desenvolvidas por um sueco chamado *Bengt Ilon* em 1970, como se vê na Figura 1.1(c). A rotação da roda é realizada sobre seu eixo principal, mas pode mover-se com pouco atrito em todas as direções, devido a sua forma e às pequenas rodas que constituem a roda maior (Nagarajan *et al.*, 2009a; Nagarajan *et al.*, 2009b; Indiveri, 2009; Siegwart *et al.*, 2004).

Existem muitas aplicações que utilizam plataformas omnidireccionais, a exemplo

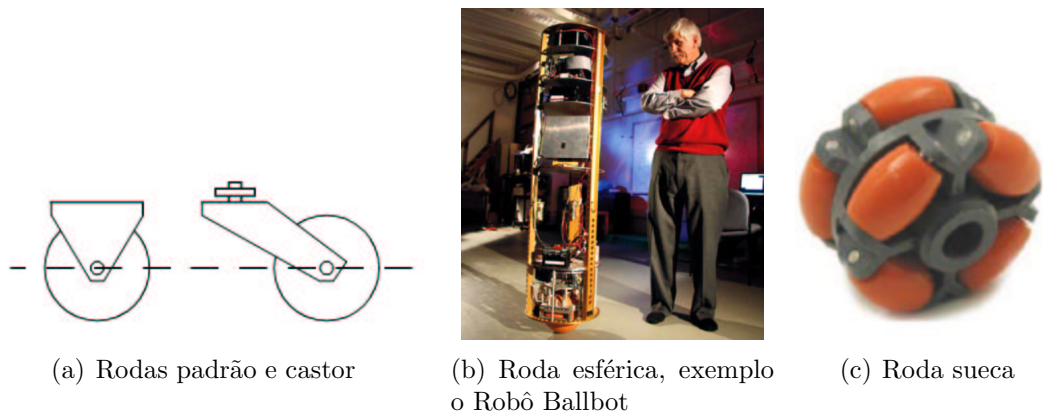


Figura 1.1: Tipos de rodas.

a cadeira de rodas omnidirecional (Figura 1.2(a)) que proporciona maior facilidade de deslocamento às pessoas com deficiência. Em 2009, a empresa Airtrax colocou no mercado industrial a empilhadeira *Sidewinder* (ver Figura 1.2(b)), que usa a tecnologia omnidirecional proporcionando o movimento em todas as direções e manobras em espaços pequenos. E na educação, através de competições nacionais e internacionais de futebol de robôs, como mostra a Figura 1.2(c). Tais robôs foram desenvolvidos pelo Centro Universitário da Fundação Educacional Inaciana (FEI), de São Paulo, que conquistou o título de campeão brasileiro e o primeiro lugar na competição latino-americana, durante disputas realizadas na FEI.





(a) Cadeira de rodas omnidirecional



(b) Sidewinder ATX-3000: Empilhadeira omnidirecional



(c) Robô do Centro Universitário da Fundação Educacional Inaciana (FEI)

Figura 1.2: Aplicações de robôs omnidirecionais.

Os modelos dinâmicos e cinemáticos dos robôs móveis são essenciais para o projeto de controladores, principalmente quando os robôs executam trajetórias com velocidades elevadas ou trajetórias com mudanças bruscas de direção e sentido, exigindo força máxima dos atuadores.

Uma consideração importante são os diferentes tipos de não-linearidades que podem ser encontrados em sistemas físicos, muitas delas inerentes ao sistema (Zhou *et al.*, 2005; Gokcek *et al.*, 2000; Ismail, 1998; Tao and Kokotovic, 1994; Tao and Kokotovic, 1995). As não-linearidades podem ser do tipo: saturação, zona morta, *backlash* ou folga, histerese, entre outras.

A não-linearidade do tipo saturação é considerada como o valor máximo permitido para a variável, sendo portanto uma saturação em amplitude (Ogata, 2003). As vezes esta não linearidade é ignorada, o que pode, em alguns casos, degradar o desempenho dos motores, conseqüentemente comprometendo o desempenho do robô, mais precisamente quando este está em aceleração. Em alguns casos, a saturação do atuador deve ser explicitamente levada em consideração para assegurar o desempenho desejado (Gokcek *et al.*, 2000).

Em um sistema, a não linearidade do tipo zona morta é considerada como a faixa operacional de entrada que não produz resposta na dinâmica na saída do sistema, podendo esta ser variante no tempo, características comuns em todos os tipos de atuadores (Lewis *et al.*, 1999; Deng *et al.*, 2001; Laura, 2006; Voros, 2003). Em um veículo com rodas acionadas por atuadores elétricos, a não linearidade do tipo zona morta é em geral decorrente de forças de reação inerentes causadas pelos componentes do atrito nos eixos de movimento. O atrito é um fenômeno muito complexo, causado por não linearidades tais como: *stiction*, histerese, efeito de *stirbeck*, escorregamento (*slip* em literatura inglesa) e viscosidade (Bona and Indri, 2005; Barreto Sb., 2010). Todas estas não linearidades são particularmente notáveis quando os movimentos são realizados em baixas velocidades, especialmente quando interceptam por zero.

Os parâmetros das equações da dinâmica do robô, como os coeficientes de atrito relacionados às velocidades lineares e de rotação, variam de acordo com os atuadores, sensores, e a superfície em que o robô se movimenta (Chung *et al.*, 2003). A determinação destes parâmetros se faz necessária, pois o robô geralmente se movimenta por superfícies de diferentes características de rugosidade, como por exemplo: su-

perfícies mais lisas como lajotas, mais aderentes como o carpete e a grama sintética, e em terrenos acidentados, onde se requer mais tração para evitar a patinagem das rodas e a perda de mobilidade (Iagnemma and Dubowsky, 2008; Iagnemma *et al.*, 2000; Iagnemma *et al.*, 2004). Isto implica na mudança dos parâmetros, como o coeficiente de atrito, assim como na força necessária empregada pelos atuadores para executar o trajeto.

As estratégias de controle de robôs omnidirecionais baseiam-se na dinâmica do robô para obter um desempenho melhor (Araújo *et al.*, 2011; Watanabe *et al.*, 1998; Albagul and Wahyudi, 2004; Wang and Tsai, 2004; Park and Minor, 2004; Hamerlain *et al.*, 2005). (Canudas de Wit and Tsiotras, 1999) desenvolveu um modelo contendo a força dos atritos para o contato entre os pneus e o chão. O modelo baseou-se em um modelo dinâmico de atrito para pontos de contato, chamado modelo de Lugre. O modelo Lugre é muito popular no domínio do tempo para controle e simulação de atrito devido à integração dos regimes de pré-escorregamento e escorregamento, dentro de uma equação de estado. O modelo Lugre é a extensão do modelo Dahl, onde o atrito é modelado como a força média da deflexão das cerdas elásticas (Canudas de Wit and Tsiotras, 1999).

Em (Williams *et al.*, 2002), foi desenvolvido um modelo dinâmico para robôs móveis omnidirecionais, incluindo as derrapagens das rodas. Os coeficientes de atrito foram experimentalmente medidos, assim como as forças que causam as derrapagens. Em (Chung *et al.*, 2003), apresenta-se o modelo dinâmico completo de um robô omnidirecional incluindo a dinâmica das rodas. (Golda *et al.*, 2004), (Iagnemma and Dubowsky, 2008), (Iagnemma *et al.*, 2000) e (Iagnemma *et al.*, 2004) desenvolveram métodos para obter características de terrenos irregulares, que são usados em algoritmos de controle de tração dos robôs espaciais. (Venture *et al.*, 2003) usou o modelo dinâmico inverso para identificar os parâmetros dinâmicos da suspensão e chassis de um veículo, através do método dos mínimos quadrados.

Em (Conceicao *et al.*, 2006) é apresentado o modelo cinemático e dinâmico de um robô de quatro rodas, incluindo a estimação de parâmetros, baseados no método dos mínimos quadrados para obter os coeficientes de atrito. E estes métodos foram validados através de resultados experimentais. Este modelo também foi utilizado em (Barreto Sb., 2010) para projetos de Controladores Preditivos, onde o problema de segmento de trajetória de um robô omnidirecional de quatro rodas foi abor-

dado. Já em (Conceição *et al.*, 2005a), utiliza-se o método dos mínimos quadrados e variáveis instrumentais para a identificação do modelo dinâmico e de controle do motor, junto com o *encoder* e a caixa de redução, considerando um sistema multivariável e por fim apresenta um algoritmo para rastreamento de trajetória. (Conceição *et al.*, 2009b) apresenta uma modelagem não-linear para robôs móveis omnidirecionais, onde três métodos experimentais de estimação de parâmetros relacionados com equações dinâmicas do modelo do robô são desenvolvidos. Os métodos para estimar os coeficientes de atrito de Coulomb, o Viscoso e o momento de inércia do robô são baseados no método dos mínimos quadrados. Os resultados da simulação e os resultados experimentais do robô são fornecidos para demonstrar o desempenho da proposta e a validação dos parâmetros estimados. (Conceição *et al.*, 2009a) descreve o comportamento não-linear de um robô móvel omnidirecional, que faz uma abordagem dinâmica, considerando elementos não lineares no modelo como a saturação e o atrito (atrito Viscoso e o de Coulomb), para prever o comportamento do robô em um controlador baseado em modelos. (Fernández and Cerqueira, 2009a) usou a Norma-L2 para identificar a dinâmica do sistema, utilizou redes neurais para ajuste dos parâmetros do modelo. Em (Fernández and Cerqueira, 2009b) descreve um sistema multivariável para incluir comportamento do escorregamento para obter a dinâmica do robô e utiliza o MQR (mínimos quadrados recursivo) para ajustar o modelo paramétrico Narmax polinômial. (Mendes, 2012) propõe um procedimento de identificação paramétrica do modelo de um robô móvel com acionamento diferencial, no qual são consideradas as não-linearidades do tipo zona-morta presente nos atuadores do robô.

Estas abordagens da literatura reforçam a importância de se obter um modelo realístico e com capacidade de se adaptar as condições de navegação, este é o principal ponto a ser abordado neste trabalho. Com a evolução de sensores e atuadores dos robôs, e com a busca de desempenhos mais satisfatórios, revelou-se como uma nova tendência a utilização de modelos com capacidade de se adaptar ao ambiente de navegação. Tais modelos são essenciais para técnicas de controle, principalmente nas técnicas baseadas em modelos, por exemplo, os controladores preditivos e controladores adaptativos. Assim, o estudo de modelos dinâmicos justifica-se devido à sua necessidade em projetos de sistemas de controle e simuladores.

Esta dissertação propõe um modelo fenomenológico dinâmico para robôs com ro-

das omnidirecionais, incluindo modelos estáticos de atrito, mais especificamente o atrito de Coulomb, o Viscoso, o efeito *Stribeck* e o *Stiction*. Como base bibliográfica foram utilizados trabalhos realizados pelos pesquisadores e alunos do Laboratório de Robótica do Departamento de Engenharia Elétrica da UFBA e artigos da literatura especializada (Conceição *et al.*, 2009b; Nascimento *et al.*, 2009; Ribeiro, 2010; Canudas de Wit and Tsiotras, 1999; Bona and Indri, 2005) e na tese de doutorado (Conceição, 2007). Esta dissertação dá continuidade à pesquisa realizado em (Conceição *et al.*, 2009b), que propôs o uso de um modelo estático de atrito simplificado (atrito de Coulomb + atrito Viscoso) no modelo dinâmico de um robô móvel de 4 rodas. Tal modelo apresentou certas limitações, principalmente nas regiões da zona morta dos atuadores. O diferencial do modelo proposto nesta dissertação está na inclusão de um modelo estático de atrito mais complexo, que além do atrito de Coulomb e o atrito Viscoso, considera o efeito *Stribeck* e o *Stiction*. Outra peculiaridade do modelo é o fato de utilizar os modelos de atrito na composição das forças do centro de massa do robô e não nas forças dos atuadores (motores), como é usual na literatura. Este detalhe simplifica o modelo e ao mesmo tempo corrige imperfeições como diferenças nas rodas e atuadores, possíveis desequilíbrios no projeto mecânico, entre outras.

## 1.2 Objetivos e contribuições

O objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de um modelo não-linear que represente de forma mais realística o comportamento do robô e também os efeitos da interação com o terreno de navegação.

Os objetivos secundários e as contribuições propostas para esta dissertação são:

- desenvolvimento de um método de estimação para os coeficientes dos modelos de atrito;
- desenvolvimento de um modelo com representação no espaço de estados, em versão simplificada e completa;
- análise dos efeitos do atrito com robôs e em ambientes de diferentes características;

- obter um modelo simplificado quando comparado com os modelos dinâmicos de atrito, possibilitando o uso de sistemas de controle mais simples;
- obter um modelo e método de estimação úteis para estimação em tempo-real.

### **1.3 Estrutura do Texto**

O restante deste documento está dividido como descrito a seguir. O capítulo 2 descreve a plataforma robótica e a modelagem cinemática e dinâmica dos robôs em estudo. O capítulo 3 apresenta os métodos utilizados para a determinação dos coeficientes de atrito. O capítulo 4 apresenta a análise de resultados de simulação com os modelos quando comparado com dados experimentais dos robôs. Finalmente, no capítulo 5, são feitas considerações sobre as conclusões do trabalho e são apresentadas sugestões para possíveis trabalhos futuros.

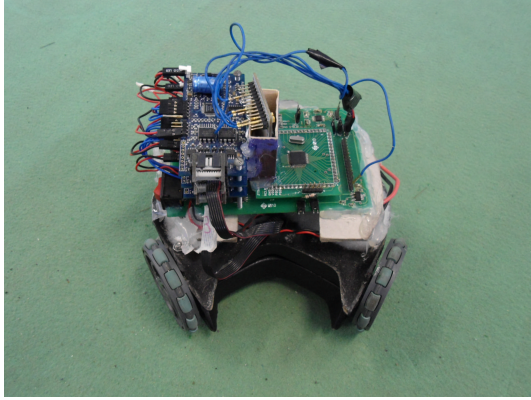
# Capítulo 2

## Modelagem do robô

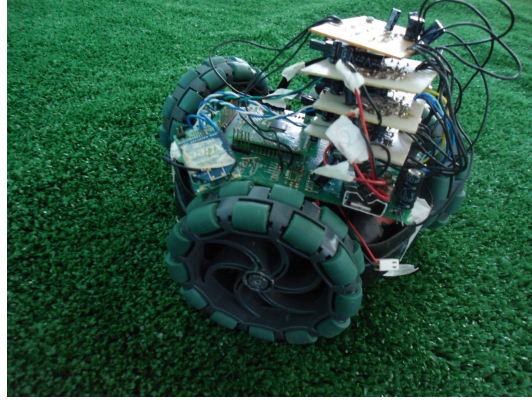
*Neste capítulo, descrevem-se as modelagens cinemática e dinâmica dos robôs utilizados na dissertação. Serão apresentados os modelos de atrito utilizados, assim como a modelagem em espaço de estados.*

### 2.1 Plataforma robótica

O robô utilizado no estudo é o Axebot, desenvolvido no Laboratório de Robótica da Universidade Federal da Bahia. Sua estrutura é feita de fibra de vidro, formado por duas partes principais que se encaixam permitindo acomodar os motores. Possui três rodas omnidirecionais, do tipo suecas, dispostas a um ângulo de  $120^\circ$  entre si, que permite o movimento desta base em qualquer direção sem a necessidade de re-orientação (Nascimento *et al.*, 2009). Foram utilizados dois robôs para o desenvolvimento deste trabalho, que diferem apenas nas rodas, conforme mostrado nas Figuras 2.1(a) e 2.1(b).



(a) Robô móvel omnidirecional com rodas pequenas no carpet



(b) Robô móvel omnidirecional com rodas grandes na grama sintética

Figura 2.1: Robôs com três rodas omnidirecionais.

## 2.2 Modelo cinemático

A partir da geometria do robô e dos sistemas de coordenadas, conforme Figura 2.2, as equações cinemáticas do movimento do robô podem ser obtidas:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_r(t)}{dt} \\ \frac{dy_r(t)}{dt} \\ \frac{d\theta(t)}{dt} \end{bmatrix} = R^T(\theta(t)) \begin{bmatrix} v(t) \\ v_n(t) \\ w(t) \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

e  $x_r(t)$  e  $y_r(t)$  descrevem a localização do robô no sistema de coordenadas do mundo e  $\theta(t)$  a diferença angular entre o sistema de coordenada do mundo e o sistema de coordenada do robô.  $[v(t) \ v_n(t) \ w(t)]^T$  é o vetor de velocidade no sistema de coordenada do robô e descreve a velocidade linear e angular do robô no ponto  $P$ , representado pelas componentes ortogonais  $v$  e  $v_n$ , e a velocidade angular do corpo do robô  $w$ .

A matriz ortogonal de rotação  $R(\theta(t))$  é definida para mapear o sistema de coordenadas do mundo no sistema de coordenadas do robô:

$$R(\theta(t)) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & \sin(\theta(t)) & 0 \\ -\sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

A relação entre as velocidades angulares das rodas do robô ( $w_{m_i}$ , para  $i = 1, 2, 3$ )



e as velocidades do robô ( $v$ ,  $v_n$ ,  $w$ ) é dada por:

$$\begin{bmatrix} v(t) \\ v_n(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = (B^T)^{-1} \frac{r_{1...3}}{l_{1...3}} \begin{bmatrix} w_{m_1}(t) \\ w_{m_2}(t) \\ w_{m_3}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

sendo  $b$  a distância entre o centro de massa do robô e as rodas,  $r_{1...3}$  o raio das rodas,  $l_{1...3}$  a redução dos motores,  $w_{m_i}$  a velocidade de rotação dos motores e  $B$  é a matriz dada por:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \cos(\frac{\pi}{6}) & -\cos(\frac{\pi}{6}) \\ -1 & \sin(\frac{\pi}{6}) & \sin(\frac{\pi}{6}) \\ b & b & b \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

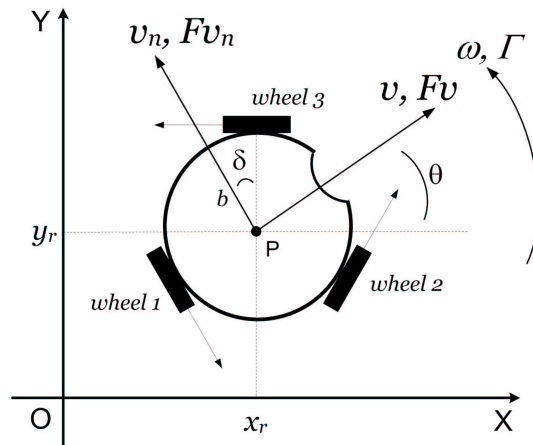


Figura 2.2: Sistemas de coordenadas e parâmetros geométricos.

## 2.3 Modelo dinâmico

A modelagem do atrito é extremamente importante para descrever o comportamento dinâmico e projeto de controlador de sistemas mecatrônicos. Em razão disso, para fins de análise do comportamento do atrito e compreensão de alguns efeitos que o constituem, é essencial observar as características e os resultados de simulações produzidas por este fenômeno.

As equações que descrevem as forças de tração do centro de massa do robô jun-

tamente com as forças de atrito são descritas a seguir:

$$F_v(t) - F_{a_v}(t) = M \frac{dv(t)}{dt}, \quad (2.5)$$

$$F_{v_n}(t) - F_{a_{v_n}}(t) = M \frac{dv_n(t)}{dt}, \quad (2.6)$$

$$\Gamma(t) - \Gamma_a(t) = J \frac{dw(t)}{dt}, \quad (2.7)$$

onde  $F = [F_v(t) \ F_{v_n}(t) \ \Gamma(t)]^T$  contém os vetores das forças  $F_v(t)$  e  $F_{v_n}(t)$  no sistema de coordenadas do robô, e  $\Gamma(t)$  é o momento de inércia ao redor do centro de gravidade do robô (ponto  $P$ ).  $M$  é a massa do robô e  $J$  o momento de inércia do robô.  $F_a = [F_{a_v}(t) \ F_{a_{v_n}}(t) \ \Gamma_a(t)]^T$  representa o vetor referente ao modelo de atrito utilizado para as direções de  $v$ ,  $v_n$  e  $w$  e será definido nas próximas subseções. A relação entre as forças de tração do robô e as forças de tração das rodas  $f_i = 1, 2, 3$  é dada por:

$$F_v(t) = \cos(\delta(t))(f_2(t) - f_3(t)), \quad (2.8)$$

$$F_{v_n}(t) = -f_1(t) + (f_2(t) + f_3(t)) \sin(\delta(t)), \quad (2.9)$$

$$\Gamma(t) = [f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)] b. \quad (2.10)$$

A força de tração em cada roda  $i$  (para  $i = 1, 2, 3$ ) é dada por:

$$f_i(t) = \frac{T_i(t)}{r_i}, \quad (2.11)$$

sendo  $T_i$  o torque de rotação da roda.

A dinâmica de cada motor CC  $i$  (para  $i = 1, 2, 3$ ) pode ser descrita pelas equações:

$$u_i(t) = L_{a_i} \frac{di_{a_i}(t)}{dt} + R_{a_i} i_{a_i}(t) + k_{v_i} w_{m_i}(t), \quad (2.12)$$

$$T_i(t) = l_i K_{t_i} i_{a_i}(t), \quad (2.13)$$

onde  $u_i$  são as tensões aplicadas aos motores,  $L_{a_i}$  são as indutâncias e  $R_{a_i}$  as resistências de armadura,  $w_{m_i}$  é a velocidade de rotação dos motores,  $l_i$  as reduções de cada motor e  $i_{a_i}$  as correntes de armadura. No sistema SI, os valores de  $k_t$  (constante do torque) e  $k_v$  (constante emf) são idênticos, conforme (Kuo, 1995):  $k_t(N.m/A) = k_v(Volts/(rad/sec))$ .

### 2.3.1 Modelo estático de atrito incluindo o atrito de Coulomb e o Viscoso

Nesta subseção, será descrito o modelo estático de atrito considerando as forças de atrito de Coulomb e Viscoso.

O atrito Viscoso é força com uma relação linear entre a força aplicada e a velocidade (Kuo, 1995). Esta componente surge quando há deslocamento entre duas superfícies lubrificadas, e a sua magnitude aumenta linearmente com a velocidade, conforme Figura 2.3(a).

O atrito de coulomb é uma força que tem uma amplitude constante com respeito à mudança da velocidade, como mostra a Figura 2.3(b), mas o sentido da força de atrito muda com a inversão do sentido da velocidade (Kuo, 1995). O atrito Viscoso é frequentemente combinado com o atrito de Coulomb, conforme ilustrado na Figura 2.3(c)(Olsson, 1998).

O modelo do robô móvel omnidirecional foi desenvolvido com base na dinâmica e cinemática da base do robô e na dinâmica dos motores CC do robô.

O modelo que considera os atritos de Coulomb e Viscoso é descrito pelas seguintes equações:

$$F_{a_v}(t) = B_v v(t) + C_v \text{sgn}(v(t)), \quad (2.14)$$

$$F_{a_{v_n}}(t) = B_{v_n} v_n(t) + C_{v_n} \text{sgn}(v_n(t)), \quad (2.15)$$

$$\Gamma_a(t) = B_w w(t) + C_w \text{sgn}(w(t)), \quad (2.16)$$

$$\text{sgn}(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha > 0, \\ 0, & \alpha = 0, \\ -1, & \alpha < 0, \end{cases}$$

onde  $B_v, B_{v_n}$  e  $B_w$  são os coeficientes de atrito de Coulomb,  $C_v, C_{v_n}$  e  $C_w$  são os coeficientes de atrito Viscoso,  $B_v v(t)$ ,  $B_{v_n} v_n(t)$  e  $B_w w(t)$  são as forças de atrito Viscoso segundo as direções de  $v$ ,  $v_n$  e  $w$ ,  $C_v \text{sgn}(v(t))$ ,  $C_{v_n} \text{sgn}(v_n(t))$  e  $C_w \text{sgn}(w(t))$  são as forças de atrito de Coulomb segundo as direções de  $v$ ,  $v_n$  e  $w$ . Trata-se de um modelo não-linear devido à função  $\text{sgn}()$ .

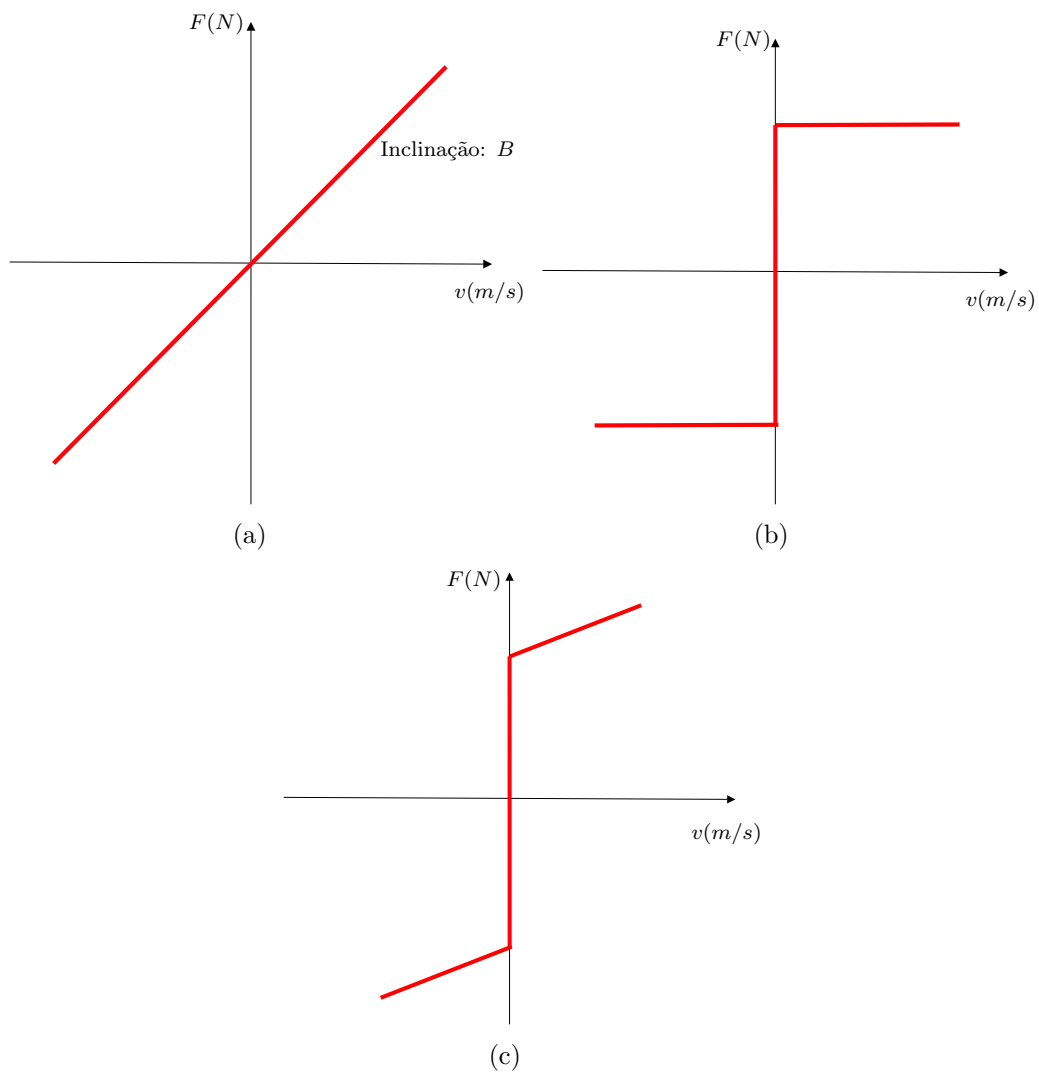


Figura 2.3: Exemplos de atritos estáticos: (a) atrito Viscoso; (b) atrito de Coulomb; (c) atrito de Coulomb + Viscoso.

### 2.3.2 Modelo estático de atrito incluindo o atrito de Coulomb, o Viscoso, o *Stiction* e o efeito *Stribeck*

Nesta subseção, será descrito o modelo do robô considerando o atrito de Coulomb, o Viscoso, o *Stiction* e o efeito de *Stribeck*.

O *stiction* é uma força denotada por  $F_s$ , que descreve o atrito em repouso e seu valor é superior ao do nível de Coulomb. Assim,  $F_s$  equivale à força máxima necessária para iniciar o movimento do robô, representada graficamente na Figura 2.4(a).

Tendo como base as considerações acima e a modelagem da subseção 2.3.1, acrescenta-se o efeito *Stribeck* às equações. Tal fenômeno demonstra que, para velocidades baixas, o atrito logo após o início do movimento diminui com o aumento da velocidade e a força de atrito estático não decresce de maneira descontínua, mas sim em função da velocidade, conforme ilustra a Figura 2.4(b)(Olsson, 1998).

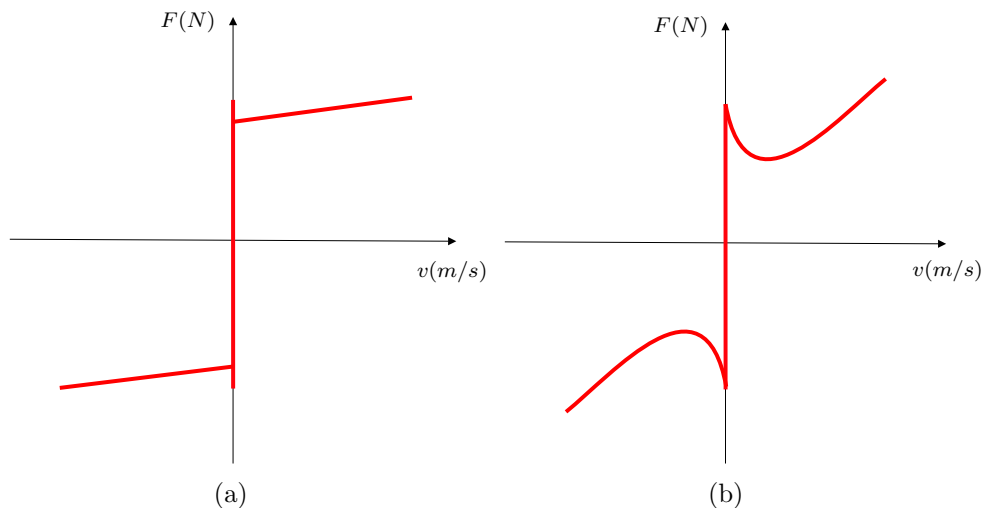


Figura 2.4: Exemplos de atritos estáticos. (a) *Stiction* + Coulomb e atrito Viscoso; (b) *Stiction* + efeito *Stribeck* + Coulomb + Viscoso .

As relações não-lineares que descrevem o efeito *Stribeck* junto as forças de atrito de Coulomb, Viscoso e o *Stiction*, segundo as orientações de  $v$ ,  $v_n$  e  $w$ , são descritas pelas equações seguintes:

$$F_{a_v}(t) = B_v v(t) + \left[ C_v + (F_{s_v} - C_v) \left( e^{-\left| \frac{v(t)}{v_{s_v}} \right|^{\delta_{s_v}}} \right) \right] \text{sgn}(v(t)) \quad (2.17)$$

$$F_{a_{v_n}}(t) = B_{v_n} v_n(t) + \left[ C_{v_n} + (F_{s_{v_n}} - C_{v_n}) \left( e^{-\left| \frac{v_n(t)}{v_{s_{v_n}}} \right|^{\delta_{s_{v_n}}}} \right) \right] \text{sgn}(v_n(t)) \quad (2.18)$$

$$\Gamma_a(t) = B_w w(t) + \left[ C_w + (F_{s_w} - C_w) \left( e^{-\left| \frac{w(t)}{v_{s_w}} \right|^{\delta_{s_w}}} \right) \right] \text{sgn}(w(t)) \quad (2.19)$$

onde  $v_s$  é a velocidade *Stribeck* nas direções  $v, v_n, w$  ( $v_{s_v}, v_{s_{v_n}}, v_{s_w}$ ) que representa a curva decrescente após ter vencido o atrito *Stiction* e  $\delta_s$  é o parâmetro que descreve a passagem do atrito estático para o atrito de Coulomb nas direções de  $v, v_n$  e  $w$  ( $\delta_{s_v}, \delta_{s_{v_n}}, \delta_{s_w}$ ), e pode assumir valores de acordo com a aplicação (Canudas de Wit and Tsiotras, 1999).

## 2.4 Modelo no espaço de estados

Nesta seção é apresentado o modelo descrito no espaço de estados, primeiramente considerando as forças de atrito Viscoso e de Coulomb na subseção 2.4.1, e na seção 2.4.2 além destes componentes, serão adicionados o *Stiction* e o efeito *Stribeck*.

### 2.4.1 Equações do modelo do robô considerando o atrito Coulomb e o Viscoso

A partir do estudo das equações expostas na seção anterior, é possível mostrar que as equações do modelo podem ser escritas no espaço de estados da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + Ksgn(x(t)) \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (2.20)$$

onde  $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ u_3(t)]^T$  é o vetor de entrada e  $x(t) = y(t) = [v(t) \ v_n(t) \ w(t)]^T$  são os vetores de estado e saída respectivamente. Observando-se a equação (2.20), pode-se notar que a não-linearidade reside no termo  $Ksgn(x(t))$ .

A indutância é simplificada por possuir uma dinâmica muito mais rápida, comparada ao resto do sistema, por isso o termo  $L_{a_i} \frac{di_{a_i}(t)}{dt}$  é desprezado, reescrevendo a equação (2.12) :

$$u_i(t) = R_{a_i} i_{a_i}(t) + k_{v_i} w_{m_i}(t). \quad (2.21)$$

Reorganizando a equação (2.21), tem-se:

$$i_{a_i}(t) = \frac{u_i(t) - k_{v_i} w_{m_i}(t)}{R_{a_i}}, \quad (2.22)$$

em que:

$$w_{m_i}(t) = \frac{v_{l_i}(t) l_i}{r_i}, \quad (2.23)$$

onde  $v_{l_i}$  é a velocidade linear de cada roda (para  $i=1,2,3$ ).

A força de tração para cada roda é dada na equação (2.11). Ao substituir as equações (2.13), (2.22) e (2.23) na equação (2.11), obtém-se:

$$f_i(t) = \frac{l_i k_{t_i}}{r_i} \left( \frac{u_i(t)}{R_{a_i}} - \frac{K_{t_i} w_{m_i}(t)}{R_{a_i}} \right) \rightarrow f_i(t) = \frac{l_i k_{t_i}}{r_i R_{a_i}} u_i(t) - \frac{l_i^2 k_{t_i}^2}{r_i^2 R_{a_i}} v_{l_i}(t) \quad (2.24)$$

Substituindo-se as equações (2.8), (2.9), (2.10), (2.14), (2.15), (2.16) nas equações (2.5), (2.6), (2.7) e reorganizando os termos, tem-se:

- direção  $v$ :

$$\frac{dv(t)}{dt} = [F_v(t) - B_v v(t) - C_v \operatorname{sgn}(v(t))] \frac{1}{M},$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = [f_2(t) \cos(\delta(t)) - f_3(t) \cos(\delta(t)) - B_v v(t) - C_v \operatorname{sgn}(v(t))] \frac{1}{M}. \quad (2.25)$$

Adicionando-se a equação da força de tração das rodas 2 e 3 na equação (2.25), obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} = & \left[ \left( \frac{l_2 k_{t_2}}{r_2 R_{a_2}} u_2(t) - \frac{l_2^2 k_{t_2}^2}{r_2^2 R_{a_2}} v_{l_2}(t) \right) \cos(\delta(t)) \right. \\ & - \left( \frac{l_3 k_{t_3}}{r_3 R_{a_3}} u_3(t) - \frac{l_3^2 k_{t_3}^2}{r_3^2 R_{a_3}} v_{l_3}(t) \right) \cos(\delta(t)) \\ & \left. - B_v v(t) - C_v \operatorname{sgn}(v(t)) \right] \frac{1}{M}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Sendo que as velocidades lineares  $v_{l_1}$ ,  $v_{l_2}$  e  $v_{l_3}$  são dadas por:

$$\begin{aligned} v_{l_1} &= -v_n + wb, \\ v_{l_2} &= v \cos \delta + v_n \sin \delta + wb, \\ v_{l_3} &= -v \cos \delta + v_n \sin \delta + wb, \end{aligned} \quad (2.27)$$

e substituindo  $v_{l_2}$  e  $v_{l_3}$  na equação (2.26), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} = & \left[ \left( \frac{l_2 k_{t_2}}{r_2 R_{a_2}} u_2(t) \right) \cos(\delta(t)) \right. \\ & - \left( \frac{l_2^2 k_{t_2}^2}{r_2^2 R_{a_2}} (v(t) \cos(\delta(t)) + v_n(t) \sin(\delta(t)) + w(t)b) \right) \cos(\delta(t)) \\ & - \left( \frac{l_3 k_{t_3}}{r_3 R_{a_3}} u_3(t) \right) \cos(\delta(t)) \\ & - \left( \frac{l_3^2 k_{t_3}^2}{r_3^2 R_{a_3}} (-v(t) \cos(\delta(t)) + v_n(t) \sin(\delta(t)) + w(t)b) \right) \cos(\delta(t)) \\ & \left. - B_v v(t) - C_v \operatorname{sgn}(v(t)) \right] \frac{1}{M}. \end{aligned} \quad (2.28)$$



Organizando-se os termos:

$$\begin{aligned}
\frac{dv(t)}{dt} = & \left[ u_2(t) \left( \frac{l_2 k_{t_2}}{r_2 R_{a_2}} \cos(\delta(t)) \right) - u_3(t) \left( \frac{l_3 k_{t_3}}{r_3 R_{a_3}} \cos(\delta(t)) \right) \right. \\
& + v(t) \left( -\frac{l_2^2 k_{t_2}^2}{r_2^2 R_{a_2}} \cos(\delta(t))^2 - \frac{l_3^2 k_{t_3}^2}{r_3^2 R_{a_3}} \cos(\delta(t))^2 - B_v \right) \\
& + v_n(t) \left( -\frac{l_2^2 k_{t_2}^2}{r_2^2 R_{a_2}} \sin(\delta(t)) \cos(\delta(t)) + \frac{l_3^2 k_{t_3}^2}{r_3^2 R_{a_3}} \sin(\delta(t)) \cos(\delta(t)) \right) \\
& + w(t) \left( -\frac{l_2^2 k_{t_2}^2}{r_2^2 R_{a_2}} b \cos(\delta(t)) + \frac{l_3^2 k_{t_3}^2}{r_3^2 R_{a_3}} b \cos(\delta(t)) \right) \\
& \left. - C_v \operatorname{sgn}(v(t)) \right] \frac{1}{M}. \tag{2.29}
\end{aligned}$$

Considerando-se  $l_i$ ,  $k_{t_i}$ ,  $r_i$  e  $R_{a_i}$  iguais para os três motores. Os termos de  $v_n(t)$  e  $w(t)$  se anulam, restando apenas o termo de  $v(t)$ , logo a aceleração na direção de  $v(t)$  depende apenas da velocidade linear  $v(t)$  e das tensões  $u_2(t)$  e  $u_3(t)$ :

$$\begin{aligned}
\frac{dv(t)}{dt} = & \left[ u_2(t) \left( \frac{l_2 k_{t_2}}{r_2 R_{a_2}} \cos(\theta(t)) \right) - u_3(t) \left( \frac{l_3 k_{t_3}}{r_3 R_{a_3}} \cos(\theta(t)) \right) \right. \\
& + v(t) \left( -\frac{l_2^2 k_{t_2}^2}{r_2^2 R_{a_2}} \cos(\theta(t))^2 - \frac{l_3^2 k_{t_3}^2}{r_3^2 R_{a_3}} \cos(\theta(t))^2 - B_v(t) \right) \\
& \left. - C_v(t) \operatorname{sgn}(v(t)) \right] \frac{1}{M} \tag{2.30}
\end{aligned}$$

- direção  $v_n$ :

$$\begin{aligned}
\frac{dv_n(t)}{dt} = & [F_{v_n}(t) - B_{v_n} v_n(t) - C_{v_n} \operatorname{sgn}(v_n(t))] \frac{1}{M}, \\
\frac{dv_n(t)}{dt} = & [(-f_1(t) + f_2(t) \sin(\delta(t)) + f_3(t) \sin(\delta(t))) - B_{v_n} v_n(t) \\
& - C_{v_n} \operatorname{sgn}(v_n(t))] \frac{1}{M}. \tag{2.31}
\end{aligned}$$

Adicionando-se a equação da força de tração das rodas 1, 2 e 3 na equação (2.31), obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \frac{dv_n(t)}{dt} = & \left[ - \left( \frac{l_1 k_{t1}}{r_1 R_{a1}} u_1(t) - \frac{l_1^2 k_{t1}^2}{r_1^2 R_{a1}} v_{l1}(t) \right) \right. \\ & + \left( \frac{l_2 k_{t2}}{r_2 R_{a2}} u_2(t) - \frac{l_2^2 k_{t2}^2}{r_2^2 R_{a2}} v_{l2}(t) \right) \sin(\delta(t)) \\ & + \left( \frac{l_3 k_{t3}}{r_3 R_{a3}} u_3(t) - \frac{l_3^2 k_{t3}^2}{r_3^2 R_{a3}} v_{l3}(t) \right) \sin(\delta(t)) \\ & \left. - B_{v_n} v_n(t) - C_{v_n} \operatorname{sgn}(v_n(t)) \right] \frac{1}{M}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Substituindo-se os valores das velocidades lineares ( $v_{l1}(t)$ ,  $v_{l2}(t)$  e  $v_{l3}(t)$ ) na equação (2.32), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{dv_n(t)}{dt} = & \left[ - \left( \frac{l_1 k_{t1}}{r_1 R_{a1}} u_1(t) - \frac{l_1^2 k_{t1}^2}{r_1^2 R_{a1}} (-v_n(t) + w(t)b) \right) \right. \\ & + \left( \frac{l_2 k_{t2}}{r_2 R_{a2}} u_2(t) \right) \sin(\delta(t)) \\ & - \left( \frac{l_2^2 k_{t2}^2}{r_2^2 R_{a2}} (v(t) \cos(\delta(t)) + v_n(t) \sin(\delta(t)) + w(t)b) \right) \sin(\delta(t)) \\ & + \left( \frac{l_3 k_{t3}}{r_3 R_{a3}} u_3(t) \right) \sin(\delta(t)) \\ & - \left( \frac{l_3^2 k_{t3}^2}{r_3^2 R_{a3}} (-v(t) \cos(\delta(t)) + v_n(t) \sin(\delta(t)) + w(t)b) \right) \sin(\delta(t)) \\ & \left. - B_{v_n} v_n(t) - C_{v_n} \operatorname{sgn}(v_n(t)) \right] \frac{1}{M}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Organizando-se os termos:

$$\begin{aligned} \frac{dv_n(t)}{dt} = & \left[ -u_1(t) \left( \frac{l_1 k_{t1}}{r_1 R_{a1}} \right) + u_2(t) \left( \frac{l_2 k_{t2}}{r_2 R_{a2}} \right) \sin(\delta(t)) + u_3(t) \left( \frac{l_3 k_{t3}}{r_3 R_{a3}} \right) \sin(\delta(t)) \right. \\ & + v(t) \left( -\frac{l_2^2 k_{t2}^2}{r_2^2 R_{a2}^2} \cos(\delta(t)) \sin(\delta(t)) + \frac{l_3^2 k_{t3}^2}{r_3^2 R_{a3}^2} \cos(\delta(t)) \sin(\delta(t)) \right) \\ & + v_n(t) \left( -\frac{l_1^2 k_{t1}^2}{r_1^2 R_{a1}} - \frac{l_2^2 k_{t2}^2}{r_2^2 R_{a2}} \sin(\delta(t))^2 - \frac{l_3^2 k_{t3}^2}{r_3^2 R_{a3}} \sin(\delta(t))^2 - B_{v_n} \right) \\ & + w(t) \left( \frac{l_1^2 k_{t1}^2}{r_1^2 R_{a1}^2} - \frac{l_2^2 k_{t2}^2}{r_2^2 R_{a2}^2} \sin(\delta(t)) - \frac{l_3^2 k_{t3}^2}{r_3^2 R_{a3}^2} \sin(\delta(t)) \right) b \\ & \left. - C_{v_n} \operatorname{sgn}(v_n(t)) \right] \frac{1}{M}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Considerando-se  $l_i$ ,  $k_{t_i}$ ,  $r_i$  e  $R_{a_i}$  iguais para os três motores, o termo de  $v$  se anula e o termo de  $w$  resulta em uma equação da forma:  $b - 2b \sin(\delta(t))$ , sendo  $\delta(t) = \sin(\Pi/6) = 0.5$ , o termo se anula. Logo a aceleração na direção de  $v_n$  depende apenas da velocidade linear  $v_n$  e das tensões  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ :

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} = & \left[ -u_1(t) \left( \frac{l_1 k_{t_1}}{r_1 R_{a_1}} \right) + u_2(t) \left( \frac{l_2 k_{t_2}}{r_2 R_{a_2}} \sin(\delta(t)) \right) + u_3(t) \left( \frac{l_3 k_{t_3}}{r_3 R_{a_3}} \sin(\delta(t)) \right) \right. \\ & + v_n(t) \left( -\frac{l_1^2 k_{t_1}^2}{r_1^2 R_{a_1}^2} - \frac{l_2^2 k_{t_2}^2}{r_2^2 R_{a_2}^2} \sin^2(\delta(t)) - \frac{l_3^2 k_{t_3}^2}{r_3^2 R_{a_3}^2} \sin^2(\delta(t)) - B_{v_n} \right) \\ & \left. - C_{v_n} \operatorname{sgn}(v_n(t)) \right] \frac{1}{M}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

- direção  $w$ :

$$\frac{dw(t)}{dt} = [\Gamma(t) - B_w w(t) - C_w \operatorname{sgn}(w(t))] \frac{1}{J},$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = [(f_1(t) + f_2(t) + f_3(t))b - B_w w(t) - C_w \operatorname{sgn}(w(t))] \frac{1}{J}. \quad (2.36)$$

Adicionando-se a equação da força de tração das rodas 1, 2 e 3 na equação (2.36), obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \frac{dw(t)}{dt} = & \left[ \left( \frac{l_1 k_{t_1}}{r_1 R_{a_1}} u_1(t) - \frac{l_1^2 k_{t_1}^2}{r_1^2 R_{a_1}^2} v_{l_1}(t) \right) b \right. \\ & + \left( \frac{l_2 k_{t_2}}{r_2 R_{a_2}} u_2(t) - \frac{l_2^2 k_{t_2}^2}{R_2^2 R_{a_2}^2} v_{l_2}(t) \right) b \\ & + \left( \frac{l_3 k_{t_3}}{r_3 R_{a_3}} u_3(t) - \frac{l_3^2 k_{t_3}^2}{R_3^2 R_{a_3}^2} v_{l_3}(t) \right) b \\ & \left. - B_w w(t) - C_w \operatorname{sgn}(w(t)) \right] \frac{1}{J}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Substituindo-se os valores das velocidades lineares ( $v_{l_1}(t)$ ,  $v_{l_2}(t)$  e  $v_{l_3}(t)$ ) na equação (2.37), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{dw(t)}{dt} = & \left[ \left( \frac{l_1 k_{t_1}}{r_1 R_{a_1}} u_1(t) - \frac{l_1^2 k_{t_1}^2}{r_1^2 R_{a_1}^2} (-v_n(t) + w(t)b) \right) b \right. \\ & + \left( \frac{l_2 k_{t_2}}{r_2 R_{a_2}} u_2(t) - \frac{l_2^2 k_{t_2}^2}{R_2^2 R_{a_2}^2} (v(t) \cos(\delta(t)) + v_n(t) \sin(\delta(t)) + w(t)b) \right) b \\ & + \left( \frac{l_3 k_{t_3}}{r_3 R_{a_3}} u_3(t) - \frac{l_3^2 k_{t_3}^2}{r_3^2 R_{a_3}^2} (-v(t) \cos(\delta(t)) + v_n(t) \sin(\delta(t)) + w(t)b) \right) b \\ & \left. - B_w w(t) - C_w \operatorname{sgn}(w(t)) \right] \frac{1}{J}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Organizando-se os termos:

$$\begin{aligned}
\frac{dw(t)}{dt} = & \left[ u_1(t) \left( \frac{l_1 k_{t_1}}{r_1 R_{a_1}} b \right) + u_2(t) \left( \frac{l_2 k_{t_2}}{r_2 R_{a_2}} b \right) + u_3(t) \left( \frac{l_3 k_{t_3}}{r_3 R_{a_3}} b \right) \right. \\
& + v(t) \left( -\frac{l_2^2 k_{t_2}^2}{r_2^2 R_{a_2}^2} \cos(\delta(t)) + \frac{l_3^2 k_{t_3}^2}{r_3^2 R_{a_3}^2} \cos(\delta(t)) \right) b \\
& + v_n(t) \left( \frac{l_1^2 k_{t_1}^2}{r_1^2 R_{a_1}^2} - \frac{l_2^2 k_{t_2}^2}{r_2^2 R_{a_2}^2} \sin(\delta(t)) - \frac{l_3^2 k_{t_3}^2}{r_3^2 R_{a_3}^2} \sin(\delta(t)) \right) b \\
& + w(t) \left( -\frac{l_1^2 k_{t_1}^2}{r_1^2 R_{a_1}^2} b^2 - \frac{l_2^2 k_{t_2}^2}{r_2^2 R_{a_2}^2} b^2 - \frac{l_3^2 k_{t_3}^2}{r_3^2 R_{a_3}^2} b^2 - B_w \right) \\
& \left. - C_w \operatorname{sgn}(w(t)) \right] \frac{1}{J}. \tag{2.39}
\end{aligned}$$

Considerando-se  $l_i$ ,  $k_{t_i}$ ,  $r_i$  e  $R_{a_i}$  iguais para os três motores. O termo de  $v$  se anula e o termo de  $v_n$  resulta em uma equação da forma:  $b - 2b \sin(\delta(t))$ , sendo  $\delta(t) = \sin(\Pi/6) = 0.5$ , o termo se anula. Logo a aceleração na direção de  $w$  depende apenas da velocidade angular  $w$  e das tensões  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ :

$$\begin{aligned}
\frac{dw(t)}{dt} = & \left[ u_1(t) \left( \frac{l_1 k_{t_1}}{r_1 R_{a_1}} b \right) + u_2(t) \left( \frac{l_2 k_{t_2}}{r_2 R_{a_2}} b \right) + u_3(t) \left( \frac{l_3 k_{t_3}}{r_3 R_{a_3}} b \right) \right. \\
& + w(t) \left( -\frac{l_1^2 k_{t_1}^2}{r_1^2 R_{a_1}^2} b^2 - \frac{l_2^2 k_{t_2}^2}{r_2^2 R_{a_2}^2} b^2 - \frac{l_3^2 k_{t_3}^2}{r_3^2 R_{a_3}^2} b^2 - B_w \right) \\
& \left. - C_w \operatorname{sgn}(w(t)) \right] \frac{1}{J}. \tag{2.40}
\end{aligned}$$

Para efeito de simplificação considera-se as reduções dos motores ( $l = l_{1\dots 3}$ ), o raio de cada roda ( $r = r_{1\dots 3}$ ), as resistências ( $R_a = R_{a1\dots}$ ) e as constantes do torque ( $k_t = k_{t1\dots 3}$ ). Sendo  $\delta(t) = \Pi/6$ , chegam-se nas equações finais que definem o modelo no espaço de estados:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \left[ \left( \frac{-3l^2 k_t^2}{2r^2 R_a M} - \frac{B_v}{M} \right) v(t) + \frac{\sqrt{3} l k_t}{2r R_a M} (u_2(t) - u_3(t)) - \frac{C_v \operatorname{sgn}(v(t))}{M} \right] \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dv_n(t)}{dt} = & \left[ \left( \frac{-3l^2 k_t^2}{2r^2 R_a M} - \frac{B_{v_n}}{M} \right) v_n(t) - \frac{l k_t}{r R_a M} u_1(t) + \frac{l k_t}{r R_a M} (u_2(t) + u_3(t)) \right. \\
& \left. - \frac{C_{v_n} \operatorname{sgn}(v_n(t))}{M} \right] \tag{2.42}
\end{aligned}$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = \left[ \left( \frac{-3l^2 k_t^2 b^2}{r^2 R_a J} - \frac{B_w}{J} \right) w(t) + \frac{l k_t b}{r R_a J} (u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)) - \frac{C_w \operatorname{sgn}(w(t))}{J} \right] \tag{2.43}$$

As matrizes que definem a representação no espaço de estados são:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-3l^2 k_t^2}{2r^2 R_a M} - \frac{B_v}{M} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3l^2 k_t^2}{2r^2 R_a M} - \frac{B_{v_n}}{M} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3l^2 k_t^2 b^2}{r^2 R_a J} - \frac{B_w}{J} \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

$$B = \frac{l k_t}{r R_a} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2M} & -\frac{\sqrt{3}}{2M} \\ -\frac{1}{M} & \frac{1}{2M} & \frac{1}{2M} \\ \frac{1}{J} & \frac{1}{J} & \frac{1}{J} \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = 0_{3 \times 3}, \quad (2.46)$$

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{C_v}{M} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{C_{v_n}}{M} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{C_w}{J} \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

## 2.4.2 Equações do modelo do robô considerando o atrito de Coulomb, o Viscoso, o *Stiction* e o efeito *Stribeck*

A representação no espaço de estados considerando o atrito de Coulomb, o Viscoso, o *Stiction* e o efeito de *Stribeck* é definida a seguir:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + K \operatorname{sgn}(x(t)) + G \left( e^{-\left| \frac{x(t)}{v_s} \right|^{\delta_s}} \right) \operatorname{sgn}(x(t)) \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (2.48)$$

onde  $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ u_3(t)]^T$  é o vetor de entrada e  $x(t) = y(t) = [v(t) \ v_n(t) \ w(t)]^T$  são os vetores de estados e saída, respectivamente.

Segundo o mesmo procedimento da seção anterior chegam-se às seguintes equações:

- direção  $v$ :

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} &= \left[ F_v(t) - B_v v(t) - \left[ C_v + (F_{s_v} - C_v) \left( e^{-\left| \frac{v(t)}{v_{sv}} \right|^{\delta_{sv}}} \right) \right] \operatorname{sgn}(v(t)) \right] \frac{1}{M}, \\ \frac{dv(t)}{dt} &= \left[ (f_2(t) \cos(\delta(t)) - f_3(t) \cos(\delta(t))) - B_v v(t) \right. \\ &\quad \left. - \left[ C_v + (F_{s_v} - C_v) \left( e^{-\left| \frac{v(t)}{v_{sv}} \right|^{\delta_{sv}}} \right) \right] \operatorname{sgn}(v(t)) \right] \frac{1}{M}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Organizando-se os termos e fazendo as substituições devidas:

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} &= \left[ u_2(t) \left( \frac{l_2 k_{t_2}}{r_2 R_{a_2}} \cos(\delta(t)) \right) - u_3(t) \left( \frac{l_3 k_{t_3}}{r_3 R_{a_3}} \cos(\delta(t)) \right) \right. \\ &\quad + v(t) \left( -\frac{l_2^2 k_{t_2}^2}{r_2^2 R_{a_2}} \cos(\delta(t))^2 - \frac{l_3^2 k_{t_3}^2}{r_3^2 R_{a_3}} \cos(\delta(t))^2 - B_v \right) \\ &\quad + v_n(t) \left( -\frac{l_2 k_{t_2}}{r_2 R_{a_2}} \sin(\delta(t)) \cos(\delta(t)) + \frac{l_3 k_{t_3}}{r_3 R_{a_3}} \sin(\delta(t)) \cos(\delta(t)) \right) \\ &\quad + w(t) \left( -\frac{l_2^2 k_{t_2}^2}{r_2^2 R_{a_2}} b \cos(\delta(t)) + \frac{l_3^2 k_{t_3}^2}{r_3^2 R_{a_3}} b \cos(\delta(t)) \right) \\ &\quad \left. - \left[ C_v + (F_{s_v} - C_v) \left( e^{-\left| \frac{v(t)}{v_{sv}} \right|^{\delta_{sv}}} \right) \right] \operatorname{sgn}(v(t)) \right] \frac{1}{M}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Considerando-se  $l_i$ ,  $k_{t_i}$ ,  $r_i$  e  $R_{a_i}$  iguais para os três motores.

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} = & \left[ u_2(t) \left( \frac{l_2 k_{t_2}}{r_2 R_{a_2}} \cos(\delta(t)) \right) - u_3(t) \left( \frac{l_3 k_{t_3}}{r_3 R_{a_3}} \cos(\delta(t)) \right) \right. \\ & + v(t) \left( -\frac{l_2^2 k_{t_2}^2}{r_2^2 R_{a_2}} \cos(\delta(t))^2 - \frac{l_3^2 k_{t_3}^2}{r_3^2 R_{a_3}} \cos(\delta(t))^2 - B_v \right) \\ & \left. - \left[ C_v + (F_{s_v} - C_v) \left( e^{-\left| \frac{v(t)}{v_{s_v}} \right|^{\delta_{s_v}}} \right) \right] \operatorname{sgn}(v(t)) \right] \frac{1}{M}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

• direção  $v_n$ :

$$\begin{aligned} \frac{dv_n(t)}{dt} = & \left[ F_{v_n}(t) - B_{v_n} v_n(t) \right. \\ & \left. - \left[ C_{v_n} + (F_{s_{v_n}} - C_{v_n}) \left( e^{-\left| \frac{v_n(t)}{v_{s_{v_n}}} \right|^{\delta_{s_{v_n}}}} \right) \right] \operatorname{sgn}(v_n(t)) \right] \frac{1}{M}, \\ \frac{dv_n(t)}{dt} = & \left[ (-f_1(t) + f_2(t) \sin(\delta(t)) + f_3(t) \sin(\delta(t))) - B_{v_n} \right. \\ & \left. - \left[ C_{v_n} + (F_{s_{v_n}} - C_{v_n}) \left( e^{-\left| \frac{v_n(t)}{v_{s_{v_n}}} \right|^{\delta_{s_{v_n}}}} \right) \right] \operatorname{sgn}(v_n(t)) \right] \frac{1}{M}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Organizando-se os termos e fazendo as substituições devidas:

$$\begin{aligned} \frac{dv_n(t)}{dt} = & \left[ -u_1(t) \left( \frac{l_1 k_{t_1}}{r_1 R_{a_1}} \right) + u_2(t) \left( \frac{l_2 k_{t_2}}{r_2 R_{a_2}} \right) \sin(\delta(t)) + u_3(t) \left( \frac{l_3 k_{t_3}}{r_3 R_{a_3}} \right) \sin(\delta(t)) \right. \\ & + v(t) \left( -\frac{l_2^2 k_{t_2}^2}{r_2^2 R_{a_2}^2} \cos(\delta(t)) \sin(\delta(t)) + \frac{l_3^2 k_{t_3}^2}{r_3^2 R_{a_3}^2} \cos(\delta(t)) \sin(\delta(t)) \right) \\ & + v_n(t) \left( -\frac{l_1^2 k_{t_1}^2}{r_1^2 R_{a_1}} - \frac{l_2^2 k_{t_2}^2}{r_2^2 R_{a_2}} \sin(\delta(t))^2 - \frac{l_3^2 k_{t_3}^2}{r_3^2 R_{a_3}} \sin(\delta(t))^2 - B_{v_n} \right) \\ & + w(t) \left( \frac{l_1^2 k_{t_1}^2}{r_1^2 R_{a_1}^2} - \frac{l_2^2 k_{t_2}^2}{r_2^2 R_{a_2}^2} \sin(\delta(t)) - \frac{l_3^2 k_{t_3}^2}{r_3^2 R_{a_3}^2} \sin(\delta(t)) \right) b \\ & \left. - \left[ C_{v_n} + (F_{s_{v_n}} - C_{v_n}) \left( e^{-\left| \frac{v_n(t)}{v_{s_{v_n}}} \right|^{\delta_{s_{v_n}}}} \right) \right] \operatorname{sgn}(v_n(t)) \right] \frac{1}{M}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Considerando-se  $l_i$ ,  $k_{t_i}$ ,  $r_i$  e  $R_{a_i}$  iguais para os três motores.

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} = & \left[ -u_1(t) \left( \frac{l_1 k_{t_1}}{r_1 R_{a_1}} \right) + u_2(t) \left( \frac{l_2 k_{t_2}}{r_2 R_{a_2}} \sin \theta \right) + u_3(t) \left( \frac{l_3 k_{t_3}}{r_3 R_{a_3}} \sin(\delta(t)) \right) \right. \\ & + v_n(t) \left( -\frac{l_1^2 k_{t_1}^2}{r_1^2 R_{a_1}^2} - \frac{l_2^2 k_{t_2}^2}{r_2^2 R_{a_2}^2} \sin(\delta(t))^2 - \frac{l_3^2 k_{t_3}^2}{r_3^2 R_{a_3}^2} \sin(\delta(t))^2 - B_{v_n} \right) \\ & \left. - \left[ C_{v_n} + (F_{s_{v_n}} - C_{v_n}) \left[ e^{-\left| \frac{v_n(t)}{v_{s_{v_n}}} \right|^{\delta_{s_{v_n}}}} \right] \right] \operatorname{sgn}(v_n(t)) \right] \frac{1}{M}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

• direção  $w$ :

$$\begin{aligned} \frac{dw(t)}{dt} = & \left[ \Gamma(t) - B_w w(t) \right. \\ & \left. - \left[ C_w + (F_{s_w} - C_w) \left( e^{-\left| \frac{w(t)}{v_{s_w}} \right|^{\delta_{s_w}}} \right) \right] \operatorname{sgn}(w(t)) \right] \frac{1}{J}, \\ \\ \frac{dw(t)}{dt} = & \left[ (f_1(t) + f_2(t) + f_3(t))b - B_w w(t) \right. \\ & \left. - \left[ C_w + (F_{s_w} - C_w) \left( e^{-\left| \frac{w(t)}{v_{s_w}} \right|^{\delta_{s_w}}} \right) \right] \operatorname{sgn}(w(t)) \right] \frac{1}{J}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Organizando-se os termos e fazendo as substituições devidas :

$$\begin{aligned} \frac{dw(t)}{dt} = & \left[ u_1(t) \left( \frac{l_1 k_{t_1}}{r_1 R_{a_1}} b \right) + u_2(t) \left( \frac{l_2 k_{t_2}}{r_2 R_{a_2}} b \right) + u_3(t) \left( \frac{l_3 k_{t_3}}{r_3 R_{a_3}} b \right) \right. \\ & + v(t) \left( -\frac{l_2^2 k_{t_2}^2}{r_2^2 R_{a_2}^2} \cos(\delta(t)) + \frac{l_3^2 k_{t_3}^2}{r_3^2 R_{a_3}^2} \cos(\delta(t)) \right) b \\ & + v_n(t) \left( \frac{l_1^2 k_{t_1}^2}{r_1^2 R_{a_1}^2} - \frac{l_2^2 k_{t_2}^2}{r_2^2 R_{a_2}^2} \sin(\delta(t)) - \frac{l_3^2 k_{t_3}^2}{r_3^2 R_{a_3}^2} \sin(\delta(t)) \right) b \\ & + w(t) \left( -\frac{l_1^2 k_{t_1}^2}{r_1^2 R_{a_1}^2} b^2 - \frac{l_2^2 k_{t_2}^2}{r_2^2 R_{a_2}^2} b^2 - \frac{l_3^2 k_{t_3}^2}{r_3^2 R_{a_3}^2} b^2 - B_w \right) \\ & \left. - \left[ C_w + (F_{s_w} - C_w) \left( e^{-\left| \frac{w(t)}{v_{s_w}} \right|^{\delta_{s_w}}} \right) \right] \operatorname{sgn}(w(t)) \right] \frac{1}{J}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Considerando-se  $l_i$ ,  $k_{t_i}$ ,  $r_i$  e  $R_{a_i}$  iguais para os três motores.

$$\begin{aligned} \frac{dw(t)}{dt} = & \left[ u_1(t) \left( \frac{l_1 k_{t_1}}{r_1 R_{a_1}} b \right) + u_2(t) \left( \frac{l_2 k_{t_2}}{r_2 R_{a_2}} b \right) + u_3(t) \left( \frac{l_3 k_{t_3}}{r_3 R_{a_3}} b \right) \right. \\ & + w(t) \left( -\frac{l_1^2 k_{t_1}^2}{r_1^2 R_{a_1}^2} b^2 - \frac{l_2^2 k_{t_2}^2}{r_2^2 R_{a_2}^2} b^2 - \frac{l_3^2 k_{t_3}^2}{r_3^2 R_{a_3}^2} b^2 - B_w \right) \\ & \left. - \left[ C_w + (F_{s_w} - C_w) \left( e^{-\left| \frac{w(t)}{v_{s_w}} \right|^{\delta_{s_w}}} \right) \right] \operatorname{sgn}(w(t)) \right] \frac{1}{J}. \end{aligned} \quad (2.57)$$



Para efeito de simplificação considera-se as reduções dos motores ( $l = l_{1\dots3}$ ), o raio de cada roda ( $r = r_{1\dots3}$ ), as resistências ( $R_a = R_{a1\dots}$ ) e as constantes do torque ( $k_t = k_{t1\dots3}$ ). Sendo  $\delta(t) = \Pi/6$ , chegam-se nas equações finais que definem o modelo em espaço de estados:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \left[ \begin{aligned} &\left( \frac{-3l^2 k_t^2}{2r^2 R_a M} - \frac{B_v}{M} \right) v(t) + \frac{\sqrt{3} l k_t}{2r R_a M} (u_2(t) - u_3(t)) \\ &- \frac{\left[ C_v + (F_{s_v} - C_v) \left( e^{-\left| \frac{v(t)}{v_{sv}} \right|^{\delta_{sv}}} \right) \right] \text{sgn}(v(t))}{M} \end{aligned} \right] \quad (2.58)$$

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = \left[ \begin{aligned} &\left( \frac{-3l^2 k_t^2}{2r^2 R_a M} - \frac{B_{v_n}}{M} \right) v_n(t) - \frac{l k_t}{r R_a M} u_1(t) + \frac{l k_t}{r R_a M} (u_2(t) + u_3(t)) \\ &- \frac{\left[ C_{v_n} + (F_{s_{v_n}} - C_{v_n}) \left( e^{-\left| \frac{v_n(t)}{v_{sv_n}} \right|^{\delta_{sv_n}}} \right) \right] \text{sgn}(v_n(t))}{M} \end{aligned} \right] \quad (2.59)$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = \left[ \begin{aligned} &\left( \frac{-3l^2 k_t^2 b^2}{r^2 R_a J} - \frac{B_w}{J} \right) w(t) + \frac{l k_t b}{r R_a J} (u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)) \\ &- \frac{\left[ C_w + (F_{s_w} - C_w) \left( e^{-\left| \frac{w(t)}{v_{sw}} \right|^{\delta_{sw}}} \right) \right] \text{sgn}(w(t))}{J} \end{aligned} \right] \quad (2.60)$$

As matrizes que definem a representação no espaço de estados são:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-3l^2 k_t^2}{2r^2 R_a M} - \frac{B_v}{M} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3l^2 k_t^2}{2r^2 R_a M} - \frac{B_{v_n}}{M} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3l^2 k_t^2 b^2}{r^2 R_a J} - \frac{B_w}{J} \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

$$B = \frac{l k_t}{r R_a} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2M} & -\frac{\sqrt{3}}{2M} \\ -\frac{1}{M} & \frac{1}{2M} & \frac{1}{2M} \\ \frac{b}{J} & \frac{b}{J} & \frac{b}{J} \end{bmatrix}, \quad (2.62)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = 0_{3 \times 3}, \quad (2.63)$$

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{C_v}{M} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{C_{v_n}}{M} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{C_w}{J} \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

$$G = \begin{bmatrix} \frac{(-F_{s_v} + C_v)}{M} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(-F_{s_{v_n}} + C_{v_n})}{M} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(-F_{s_w} + C_w)}{J} \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

# Capítulo 3

## Métodos de estimação dos parâmetros

*Neste capítulo, são apresentados os métodos utilizados para a estimação dos parâmetros do modelo e os resultados dos ensaios experimentais.*

### 3.1 Introdução

A metodologia proposta para a estimação dos parâmetros do modelo do robô é baseada na integração das propostas de (Conceição *et al.*, 2005a; Conceição *et al.*, 2005b; Conceicao *et al.*, 2006; Conceição *et al.*, 2009a; Conceição *et al.*, 2009b; Bona and Indri, 2005), que desenvolveram modelos dinâmicos incluindo elementos não-lineares e de restrições como atritos e saturações nos atuadores, e métodos de estimação de parâmetros utilizando o método dos mínimos quadrados.

Foram utilizados 3 métodos para a estimação dos parâmetros. O primeiro proposto por (Conceição *et al.*, 2009b), é baseado em análise das velocidades lineares e angulares do robô em regime permanente de funcionamento. O segundo proposto por (Conceição *et al.*, 2009b), estima o momento de inercia, e o terceiro é um novo método proposto neste trabalho que estima o atrito *Stiction*, o efeito *Stribeck*, o atrito de Coulomb e o atrito Viscoso através do método dos mínimos quadrados por uma combinação linear de funções.

Foram usadas rodas omnidirecionais de dois tamanhos nos robôs. Na Figura 3.1, apresentam-se de forma mais detalhada as rodas utilizadas. O robô com rodas

pequenas não foi usado na grama sintética, pois o mesmo apenas patinava e não saía do lugar, por isso a roda do robô foi substituída por uma maior. A roda menor possui um raio de 3,5 cm (ver Figura 3.1(a)) e a roda maior, um raio de 5,05 cm (ver Figura 3.1(b)). Verifica-se na Figura 3.1(b) que a roda maior possui duas filas de rodinhas, o que diminuiu consideravelmente o atrito. Como ambiente de navegação, foram utilizados dois tipos de solos, um carpet normal e uma grama sintética de 10 mm de altura, como mostra a Figura 3.2.



(a) Roda omnidirecional com raio de 3,5cm.

(b) Roda omnidirecional com raio de 5,05cm.

Figura 3.1: Rodas do robô em estudo.



(a) Carpet e grama sintética.

Figura 3.2: Ambiente de navegação.

## 3.2 Método I-Velocidade em Regime Permanente

Esse método foi proposto por (Conceição *et al.*, 2009b), e tem como objetivo estimar os parâmetros dos modelos de atrito. O método é baseado em medidas de corrente dos motores e das velocidades do centro de massa do robô em regime permanente, possibilitando estimar os coeficientes Viscosos ( $B_v$ ,  $B_{v_n}$  e  $B_w$ ) e de Coulomb ( $C_v$ ,  $C_{v_n}$  e  $C_w$ ).

Uma vez que a velocidade do robô entre em regime permanente de funcionamento (derivadas nulas) e para velocidades positivas, a partir das equações :

$$F_v(t) - B_v v(t) - C_v \text{sgn}(v(t)) = M \frac{dv(t)}{dt}, \quad (3.1)$$

$$F_{v_n}(t) - B_{v_n} v_n(t) - C_{v_n} \text{sgn}(v_n(t)) = M \frac{dv_n(t)}{dt}, \quad (3.2)$$

$$\Gamma(t) - B_w w(t) - C_w \text{sgn}(w(t)) = J \frac{dw(t)}{dt}, \quad (3.3)$$

onde  $t = T$ , para  $T \rightarrow \infty$ , obtêm-se as seguintes equações:

$$F_v(T) = B_v v(T) + C_v \quad (3.4)$$

$$F_{v_n}(T) = B_{v_n} v_n(T) + C_{v_n} \quad (3.5)$$

$$\Gamma(T) = B_w w(T) + C_w. \quad (3.6)$$

Uma vez que as forças de tração do robô são calculadas a partir das correntes dos motores e as velocidades do robo são obtidas pelo sistema odométrico, pode-se estimar os parâmetros com relativa facilidade. A seguir serão apresentados os experimentos utilizando o método *I* aplicado aos 2 robôs.

### 3.2.1 Estimação dos parâmetros utilizando o robô com rodas pequenas

A partir das equações (3.4), (3.5) e (3.6), verifica-se que para facilitar a estimação é interessante gerar velocidades  $v$ ,  $v_n$  e  $w$  uma de cada vez. Os experimentos foram realizados aplicando simultaneamente tensões nos motores que provocaram velocidades nas direções de  $v$ ,  $v_n$  e  $w$ . Isso foi repetido para 4 níveis de tensão para cada velocidade.

A tabela 3.1 apresenta os valores das tensões aplicadas e as velocidades e forças resultantes de cada experimento nas direções  $v$ ,  $v_n$  e  $w$ . A primeira linha da Tabela 3.1 apresenta as tensões  $u=(0 ;1.2;-1.2)$  aplicadas aos motores mas a base está em repouso ( $v \cong 0$ ), já para a segunda linha da Tabela a base está em movimento. O mesmo acontece para as velocidades  $v_n$  e  $w$ . Na Figura 3.3 apresentam-se algumas curvas de velocidade, e as respectivas correntes utilizadas para obter as forças. Pode-se verificar na Figura 3.3(a) que aplicando-se a tensão de 3 V no motor 2,  $-3$  V no motor 3 e zero V no motor 1, gerou-se uma velocidade de aproximadamente  $0,74$   $m/s$  na direção da velocidade  $v$ . As respectivas correntes são apresentadas no gráfico 3.3(b). A mesma análise pode ser feita para os outros gráficos da Figura 3.3.

Tabela 3.1: Valores de tensões, velocidades, forças e torques.

Velocidade $v$			Velocidade $v_n$			Velocidade $w$		
$u_i(V)$	$v(m/s)$	$F_v(N)$	$u_i(V)$	$v_n(m/s)$	$F_{v_n}(N)$	$u_i(V)$	$w(rad/s)$	$\tau(N.m)$
0;1.2;-1.2	0	2.25	-1.5;0.75;0.75	0	1.47	0.3;0.3;0.3	0	0.10
0;2;-2	0.37	2.48	-3;1.5;1.5	0.42	1.97	1.5;1.5;1.5	5.84	0.14
0;3;-3	0.74	2.79	-4;2;2	0.75	2.33	2;2;2	8.04	0.18
0;4;-4	1.08	3.28	-5;2.5;2.5	1.08	2.49	2.5;2.5;2.5	10.02	0.21

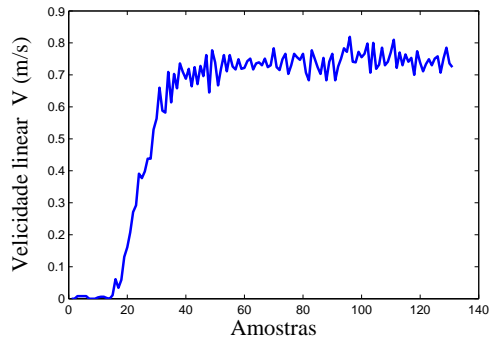
A partir dos valores da Tabela 3.1 geram-se os gráficos das velocidades *versus* forças, verifica-se uma relação linear permitindo obter a melhor reta que se ajusta aos dados, conforme a Figura 3.4. As equações (3.4), (3.5) e (3.6) são idênticas a equação de uma reta ( $y = ax + b$ ), desta forma pode-se obter os parâmetros dos coeficientes de atrito de forma direta a partir das equações das retas. As equações resultantes com os coeficientes de atrito estimados são apresentados na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Equações e coeficientes de atrito.

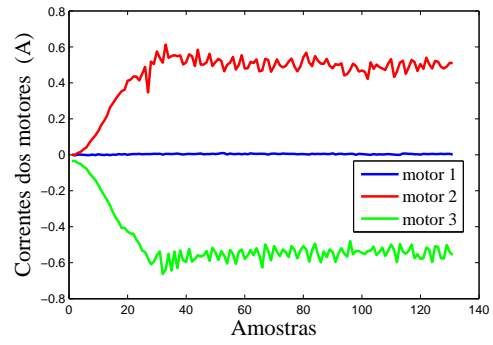
Direções	Equações	Coefficientes de atrito de Coulomb	Coefficientes de atrito Viscoso
$v$	$F_v(t) = 0,94v(t) + 2,2$	$B_v=0,94$	$C_v=2,2$
$v_n$	$F_{v_n}(t) = 0,96v_n(t) + 1,5$	$B_{v_n}= 0,96$	$C_{v_n}=1,5$
$w$	$\Gamma(t) = 0,01w(t) + 0,099$	$B_w= 0,01$	$C_w=0,099$

Para obter a massa do robô utilizou-se uma balança, enquanto que para o momento de inércia usou-se o momento de inércia de um cilindro com a mesma massa e dimensões (raio e altura) do robô, tais valores estão na Tabela 3.3.

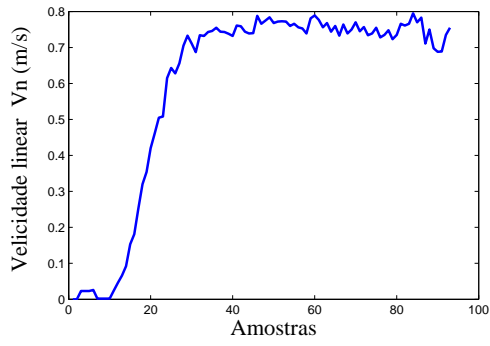
Resumindo, os parâmetros dos motores foram retirados do trabalho (Ribeiro, 2010), e os parâmetros geométricos e os parâmetros estimados são apresentados na



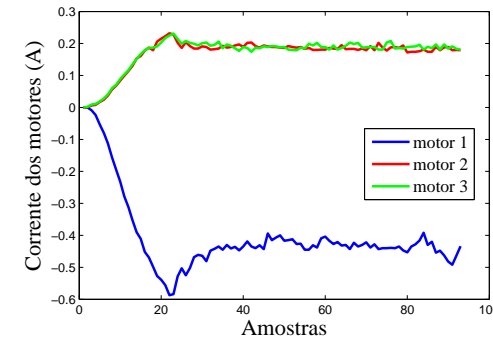
(a)  $u = (0, 3, -3)$ .



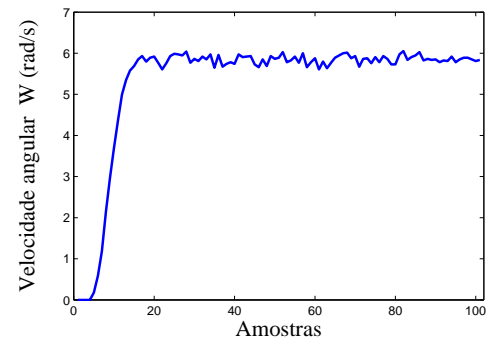
(b)  $i_{a_1}, i_{a_2}, i_{a_3}$ .



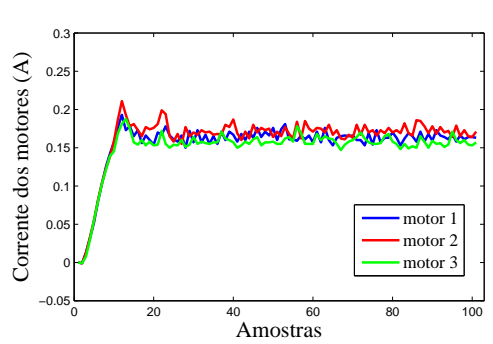
(c)  $u = (-4, 2, 2)$ .



(d)  $i_{a_1}, i_{a_2}, i_{a_3}$ .

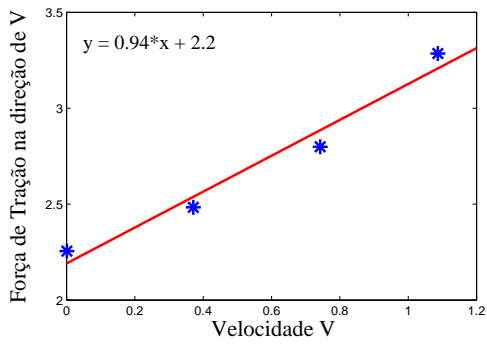


(e)  $u = (1.5, 1.5, 1.5)$ .

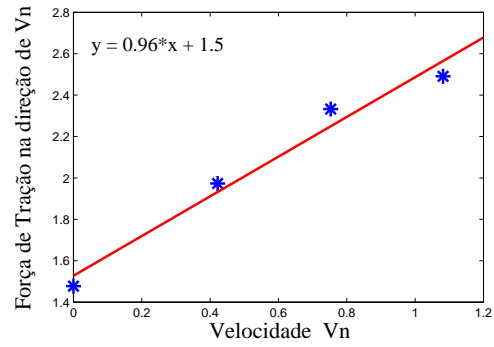


(f)  $i_{a_1}, i_{a_2}, i_{a_3}$ .

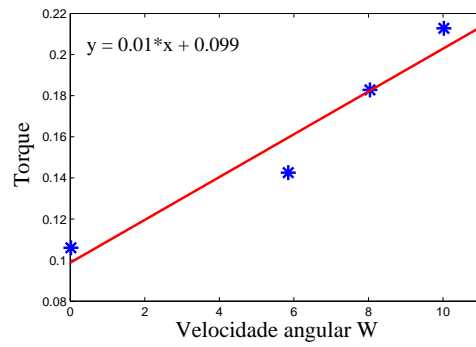
Figura 3.3: Curvas de velocidades e correntes.



(a)  $F_v$  versus  $v$ .



(b)  $F_{v_n}$  versus  $v_n$ .



(c)  $\Gamma$  versus  $w$ .

Figura 3.4: Relação entre forças e torque com as velocidades.



Tabela 3.3.

Tabela 3.3: Parâmetros do modelo.

<i>Símbolo</i>	<i>Descrição</i>	<i>Valor</i>
$B_v(N/m/s)$	atrito viscoso para $v$	0,94
$B_{v_n}(N/m/s)$	atrito viscoso para $v_n$	0,96
$B_\omega(N/rad/s)$	atrito viscoso para $\omega$	0,01
$C_v(N)$	atrito de coulomb para $v$	2,2
$C_{v_n}(N)$	atrito de coulomb para $v_n$	1,5
$C_\omega(N.m)$	atrito de coulomb para $\omega$	0,099
$b(m)$	raio do robô	0,1
$M(kg)$	massa do robô	1,5
$J(kg.m^2)$	momento de inércia do robô	0,025
$r_1, r_2, r_3(m)$	raio das rodas	0,035
$l_{1..3}$	redução dos motores	19
$L_{a1..3}(H)$	indutância de armadura	0,00011
$R_{a1..3}(\Omega)$	resistência de armadura	1,69
$K_{v1..3}(Volts/rad/s)$	constantes emf	0,0059
$K_{t1..3}(N.m/A)$	constantes de torque	0,0059

### 3.2.2 Estimação dos parâmetros utilizando robô com rodas grandes

A estimação dos coeficientes de atrito nesta sub-secção foram realizados em 2 ambientes distintos de navegação: o carpet e a grama sintética. Utilizou-se o robô de rodas grandes, conforme a Figura 3.1(b).

Repetiu-se o procedimento da sub-secção 3.2.1 e as Tabelas 3.4 e 3.5 apresentam os valores das tensões aplicadas nos motores e as velocidades e forças resultantes de cada experimento. Para cada velocidade  $v$ ,  $v_n$  e  $w$ , foram feitos vários experimentos.

A Tabela 3.4 refere-se ao experimento no carpet, onde apresenta na sua primeira linha as tensões  $u=(0 ;1.5;-1.5)$  aplicadas aos motores, que indica o instante em que a base começa a se movimentar na direção de  $v$ . A mesma análise pode ser feita nas direções de  $v_n$  e  $w$ . Na Figura 3.5, apresentam-se algumas curvas de velocidade e as respectivas correntes utilizadas para obter as forças. Pode-se verificar no gráfico 3.5(a) que aplicando-se a tensão de 2 V no motor 2,  $-2$  V no motor 3 e zero V no motor 1, gerou-se uma velocidade de aproximadamente  $0,90$  m/s na direção da velocidade  $v$ . As respectivas correntes são apresentadas no gráfico 3.5(b). A mesma análise pode ser feita para os outros gráficos da Figura 3.5.

A Tabela 3.5 refere-se ao experimento na grama sintética. A primeira linha da tabela apresenta as tensões  $u=(0 ;2;-2)$  aplicadas aos motores quando a base começa a se movimentar na direção de  $v$ , mesma análise pode ser feita para as direções de  $v_n$  e  $w$ . Na Figura 3.6 apresentam-se algumas curvas de velocidade e as respectivas correntes utilizadas para obter as forças. Pode-se verificar no gráfico 3.6(c) que aplicando a combinação de tensões  $u : (-3.5; 1.75; 1.75)$  nos motores, gerou-se uma velocidade de aproximadamente  $1,10$  m/s na direção da velocidade  $v_n$ . As respectivas correntes são apresentadas na Figura 3.6(d). A mesma análise pode ser feita para os outros gráficos da Figura 3.6.

A partir dos valores das Tabelas 3.4 e 3.5 geram-se os gráficos das velocidades *versus* forças no carpet e na grama sintética. Verificam-se relações lineares permitindo obter a melhor reta que se ajusta aos dados, conforme a Figura 3.7. As equações resultantes com os atritos estimados são apresentados nas Tabelas 3.6 e 3.7.

Tabela 3.4: Valores de tensões, velocidades, forças e torques no carpet.

Velocidade $v$			Velocidade $v_n$			Velocidade $w$		
$u_i(V)$	$v(m/s)$	$F_v(N)$	$u_i(V)$	$v_n(m/s)$	$F_{v_n}(N)$	$u_i(V)$	$w(rad/s)$	$\tau(N.m)$
0;1.5;-1,5	0,65	0,59	-	-	-	1;1;1	3,76	0,05
0;2;-2	0,90	0,94	-2;1;1	0,76	0,66	1.5;1.5;1.5	6,81	0,09
0;2.5;-2.5	1,18	1,21	-2.5;1.25;1.25	1,03	0,85	2;2;2	9,65	0,12
0;3;-3	1,50	1,43	-3;1.5;1.5	1,29	1,07	2.5;2.5;2.5	12,40	0,15
0;3.5;-3.5	1,82	1,57	-3.5;1.75;1.75	1,55	1,23	3;3;3	15,25	0,17
0;4;-4	2,14	1,69	-4;2;2	1,79	1,38	-	-	-
0;4.5;-4.5	2,37	1,92	-4.5;4.25;4.25	2,02	1,54	-	-	-

Tabela 3.5: Valores de tensões, velocidades, forças e torques na grama sintética.

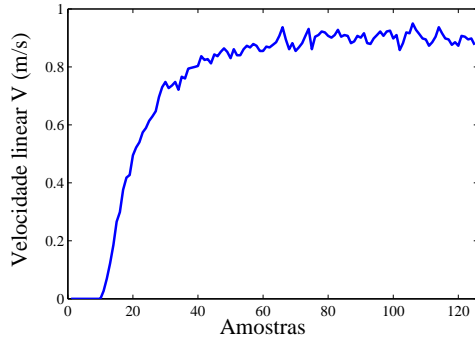
Velocidade $v$			Velocidade $v_n$			Velocidade $w$		
$u_i(V)$	$v(m/s)$	$F_v(N)$	$u_i(V)$	$v_n(m/s)$	$F_{v_n}(N)$	$u_i(V)$	$w(rad/s)$	$\tau(N.m)$
0;2;-2	0,32	1,89	-	-	-	1;1;1	1,71	0,08
0;2.5;-2.5	0,61	2,30	-2.5;1.25;1.25	0,54	1,67	1.5;1.5;1.5	5,06	0,13
0;3;-3	0,94	2,66	-3;1.5;1.5	0,83	1,98	2;2;2	8,16	0,17
0;3.5;-3.5	1,28	2,97	-3.5;1.75;1.75	1,10	2,25	2.5;2.5;2.5	11,11	0,21
0;4;-4	1,56	3,36	-4;2;2	1,34	2,49	3;3;3	14,04	0,24
0;4.5;-4.5	1,81	3,82	-4.5;2.25;2.25	1,56	2,82	3.5;3.5;3.5	16,71	0,26
0;5;-5	2,10	4,06	-5;2.5;2.5	1,81	3,04	4;4;4	19,27	0,28

Tabela 3.6: Equações e coeficientes de atrito no carpet.

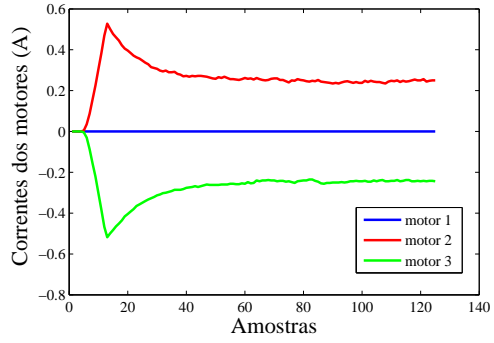
Direções	Equações	Coefficiente de atrito de Coulomb	Coefficiente de atrito Viscoso
$v$	$F_v(t) = 0,7v(t) + 0,28$	$B_v=0,7$	$C_v=0,28$
$v_n$	$F_{v_n}(t) = 0,7v_n(t) + 0,14$	$B_{v_n}=0,7$	$C_{v_n}=0,14$
$w$	$\Gamma(t) = 0,011w(t) + 0,0086$	$C_{v_n}=0,011$	$C_w=0,0086$

Tabela 3.7: Equações e coeficientes de atritos na grama sintética.

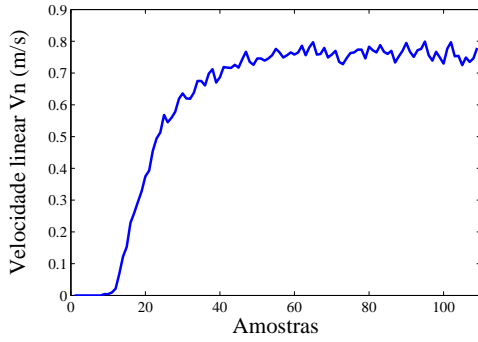
Direções	Equações	Coefficiente de atrito de Coulomb	Coefficiente de atrito Viscoso
$v$	$F_v(t) = 1,2v(t) + 1,5$	$B_v=1,2$	$C_v=1,5$
$v_n$	$F_{v_n}(t) = 1,1v_n(t) + 1,1$	$B_{v_n}=1,1$	$C_{v_n}=1,1$
$w$	$\Gamma(t) = 0,012w(t) + 0,07$	$B_w=0,012$	$C_w=0,07$



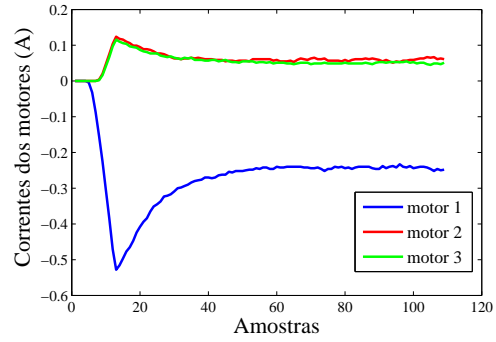
(a)  $u = (0, 2, -2)$ .



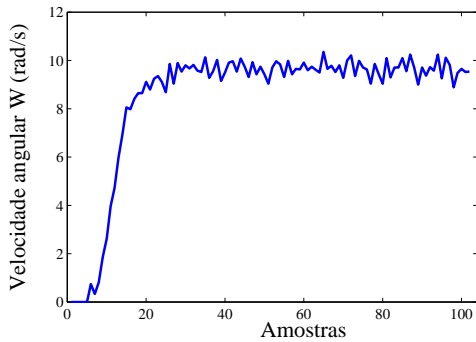
(b)  $i_{a_1}, i_{a_2}, i_{a_3}$ .



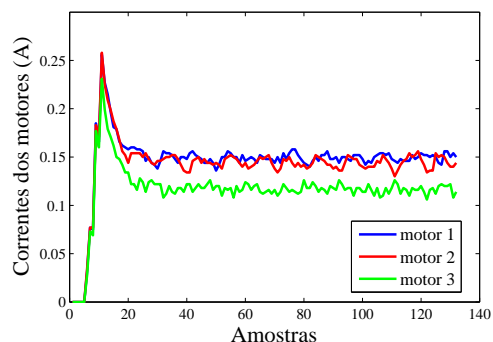
(c)  $u = (-2, 1, 1)$ .



(d)  $i_{a_1}, i_{a_2}, i_{a_3}$ .

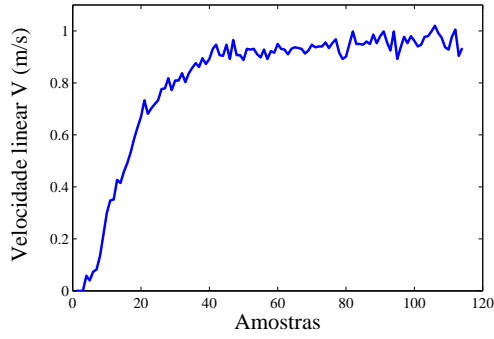


(e)  $u = (2, 2, 2)$ .

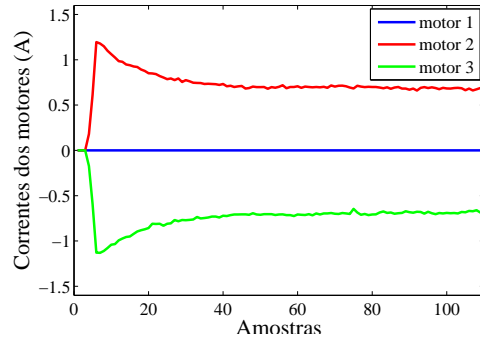


(f)  $i_{a_1}, i_{a_2}, i_{a_3}$ .

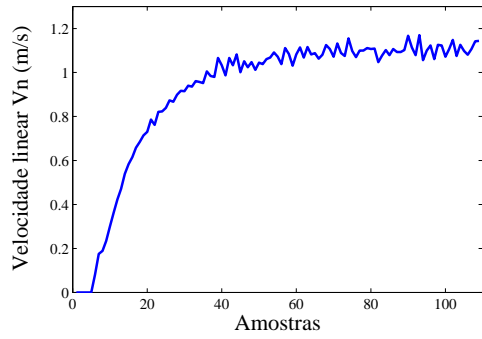
Figura 3.5: Curvas de velocidades e correntes do robô no carpet.



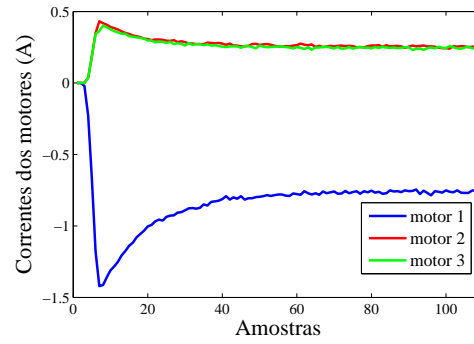
(a)  $u = (0, 3, -3)$ .



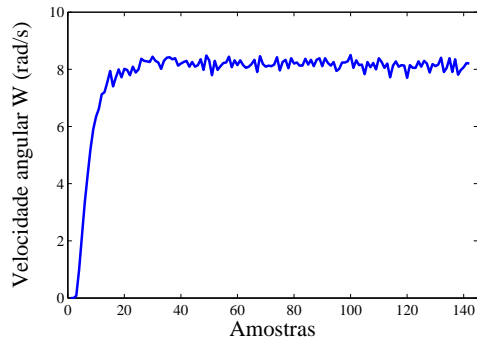
(b)  $i_{a_1}, i_{a_2}, i_{a_3}$ .



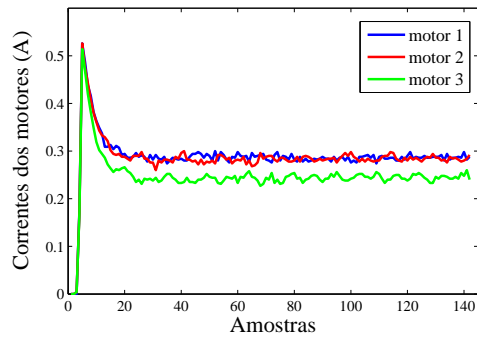
(c)  $u = (-3.5, 1.75, 1.75)$ .



(d)  $i_{a_1}, i_{a_2}, i_{a_3}$ .

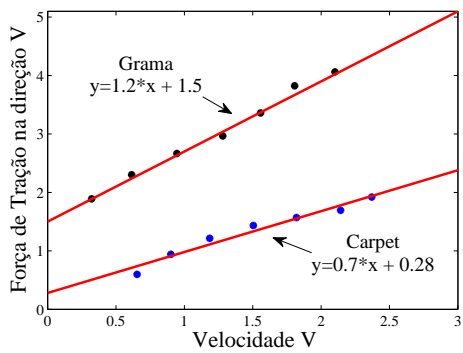


(e)  $u = (2, 2, 2)$ .

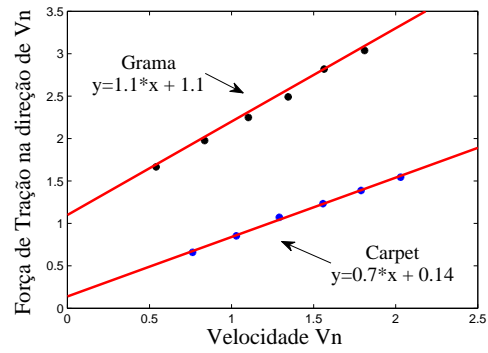


(f)  $i_{a_1}, i_{a_2}, i_{a_3}$ .

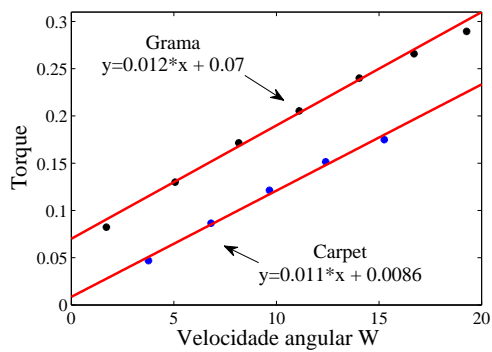
Figura 3.6: Curvas de velocidades e correntes do robô na grama sintética.



(a)  $F_v$  versus  $v$ .



(b)  $F_{vn}$  versus  $v_n$ .



(c)  $\Gamma$  versus  $w$ .

Figura 3.7: Relação entre forças e torque com as velocidades do robô no carpet e na grama.

Os experimentos realizados para gerar os gráficos da Figura 3.7 utilizaram os ambientes de navegação grama sintética e o carpet. Analisando a Figura 3.7(a) na direção de  $v$ , nota-se que para o robô ter a mesma velocidade na grama sintética quando comparado com o carpet, necessita-se de mais força de tração. Por exemplo, aplicando a combinação de tensões (0; 2; -2) nos motores tem-se uma velocidade de  $0.32 \text{ m/s}$  e uma força de  $1.89 \text{ N}$  na grama e uma velocidade de  $0,90 \text{ m/s}$  e uma força de  $0.94 \text{ N}$  no carpet. Na grama sintética exige mais força nos atuadores devido às irregularidades da superfície de contato entre os dois corpos (ambiente de navegação e o robô). Os coeficientes de atrito de Coulomb e o Viscoso também são maiores na grama do que no carpet, como mostram as equações da Figura 3.7(a).

Resumindo, os parâmetros geométricos e os parâmetros estimados nos dois ambientes de navegação são apresentados na Tabela 3.8.

Tabela 3.8: Parâmetros do modelo.

<b><i>Símbolo</i></b>	<b><i>Descrição</i></b>	<b><i>Valor</i></b>
$B_v(N/m/s)$	atrito viscoso para $v$ no carpet	0,7
$B_v(N/m/s)$	atrito viscoso para $v$ na grama sintética	1,2
$B_{v_n}(N/m/s)$	atrito viscoso para $v_n$ no carpet	0,7
$B_{v_n}(N/m/s)$	atrito viscoso para $v_n$ na grama sintética	1,1
$B_\omega(N/rad/s)$	atrito viscoso para $\omega$ no carpet	0,011
$B_\omega(N/rad/s)$	atrito viscoso para $\omega$ na grama sintética	0,012
$C_v(N)$	atrito de coulomb para $v$ no carpet	0,28
$C_v(N)$	atrito de coulomb para $v$ na grama sintética	1,5
$C_{v_n}(N)$	atrito de coulomb para $v_n$ no carpet	0,14
$C_{v_n}(N)$	atrito de coulomb para $v_n$ na grama sintética	1,1
$C_\omega(N.m)$	atrito de coulomb para $\omega$ no carpet	0,0086
$C_\omega(N.m)$	atrito de coulomb para $\omega$ na grama sintética	0,07
$b(m)$	raio do robô	0,1
$M(kg)$	massa do robô	1,252
$J(kg.m^2)$	momento de inércia do robô	0,0062
$r_1, r_2, r_3(m)$	raio das rodas	0,0505
$l_{1...3}$	redução dos motores	19
$L_{a_{1...3}}(H)$	indutância de armadura	0,00011
$R_{a_{1...3}}(\Omega)$	resistência de armadura	1,69
$K_{v_{1...3}}(Volts/rad/s)$	constantes emf	0,0059
$K_{t_{1...3}}(N.m/A)$	constantes de torque	0,0059

### 3.3 Método II-Tração nula

O método proposto por (Conceição *et al.*, 2009b) consiste em medir a aceleração e a velocidade do robô quando este não se encontra sujeito a forças de tração. Permite identificar o momento de inércia do robô utilizando os coeficientes de atrito Viscoso e o de Coulomb estimados no método anterior.

Os experimentos foram realizados com os motores do robô desligados e apenas o sistema odométrico ligado. Gerou-se uma força de tração manual (com as mãos) por um instante de tempo, após isso soltou-se a base deixando-a entrar em repouso.

A partir da equação:

$$\Gamma(t) - B_w w(t) - C_w \text{sgn}(w(t)) = J \frac{dw(t)}{dt}, \quad (3.7)$$

com o binário ( $\Gamma$ ) nulo e reorganizando a equação, tem-se a seguinte equação diferencial para velocidade positiva:

$$J \frac{dw(t)}{dt} = -\frac{B_w}{J} w(t) - \frac{C_w}{J} \quad (3.8)$$

Para obter o momento de inércia  $J$ , utilizam-se os coeficientes de atrito estimados na sub-seção 3.2.2, conjugados com os dados referentes a este método. Para isto basta reorganizar a equação (3.8) de modo a isolar  $J$ , resultando na seguinte equação:

$$J = -\frac{w(t)}{\frac{dw(t)}{dt}} B_w - \frac{1}{\frac{dw(t)}{dt}} C_w. \quad (3.9)$$

As acelerações  $\frac{dv(t)}{dt}$ ,  $\frac{dv_n(t)}{dt}$ ,  $\frac{dw(t)}{dt}$  foram calculadas a partir das velocidades lineares ( $v$  e  $v_n$ ) e de rotação do robô ( $w$ ). A ferramenta utilizada para calcular as derivadas foram as funções existentes no software Matlab.

#### 3.3.1 Estimação dos parâmetros utilizando o robô com rodas grandes

O método descrito na seção 3.3 foi aplicado nos dois ambientes de navegação: o carpet e a grama sintética.

Foram realizados 5 experimentos, tanto na grama sintética quanto no carpet, como mostra a Figura 3.8.



A partir da equação (3.9), com os valores das velocidades, as acelerações obtidas dos experimentos e os valores dos coeficientes, obtêm-se os valores do momento de inércia ( $J$ ). Na Tabela 3.9, são apresentados os valores de  $J$  de cada ensaio, sendo o valor utilizado nos robôs a média entre eles.

Nota-se que a Figura 3.8(a) possui mais amostras que a Figura 3.8(b), isso acontece devido à influência dos atritos. Observa-se também que o robô na grama desacelera mais rápido quando comparado com o robô no carpet, como pode ser observado nas figuras abaixo.

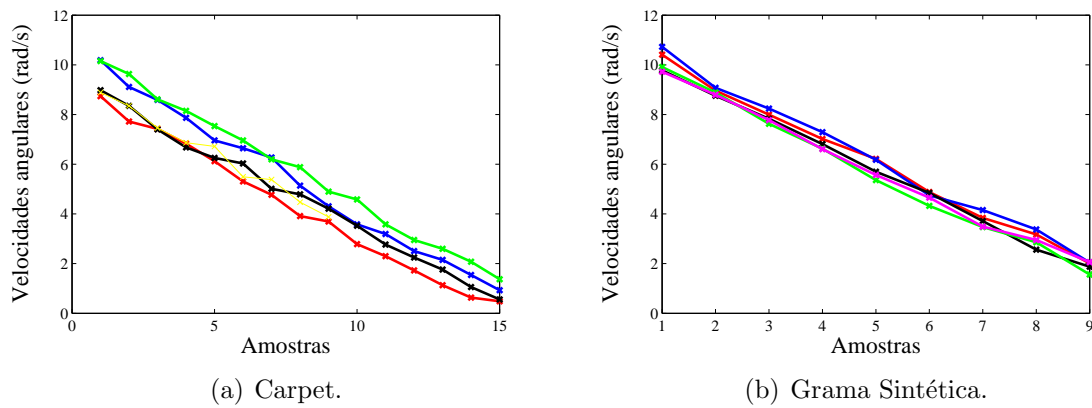


Figura 3.8: Velocidades segundo a direção de  $w$ .

Tabela 3.9: Momento de inércia.

<b><i>Ensaio</i></b>	<b><i>J (carpet)</i></b>	<b><i>J (grama sintética)</i></b>
1	0,0063	0,0070
2	0,0062	0,0073
3	0,0061	0,0069
4	0,0062	0,0073
5	0,0063	0,0075
<b><i>Média</i></b>	0.00622	0.0072

### 3.4 Método baseado em mínimos quadrados por combinação linear das funções

Este método consiste em medir a velocidade do robô e as forças de tração em cada roda nas direções de  $v$ ,  $v_n$  e  $w$ . Para determinar os coeficientes de atrito foi utilizado o algoritmo dos mínimos quadrados por combinação linear de funções.

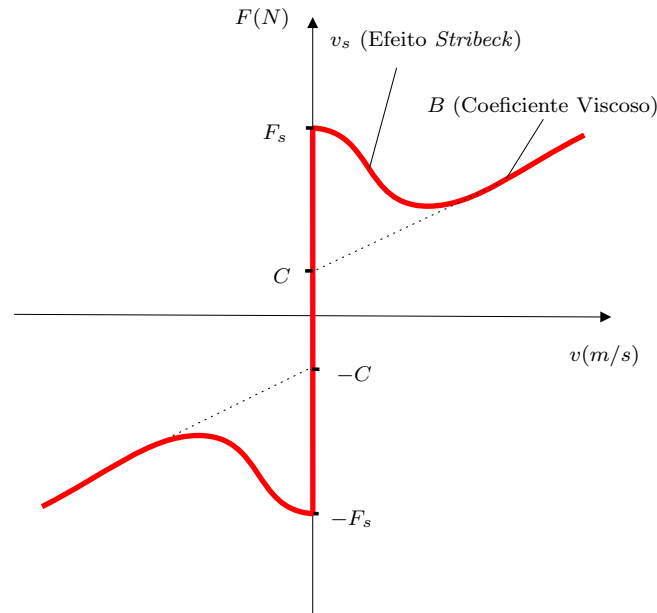


Figura 3.9: Atrito estático Coulomb, Viscoso, o efeito *Stribeck* e o *Stiction*.

Para um melhor entendimento, analisaremos a Figura 3.9. O gráfico é desenhado tendo em seus eixos a força aplicada no sistema e a velocidade do centro de massa para uma dada direção.  $F_s$  no gráfico indica a força máxima para iniciar o movimento, que é o efeito *Stiction* e o  $C$  indica o coeficiente de atrito de Coulomb. A inclinação da reta é devido ao coeficiente de atrito Viscoso ( $B$ ). A partir da observação da Figura 3.9, é evidente que a passagem do atrito estático  $F_s$  para o atrito de Coulomb durante o movimento não acontece de forma brusca, devido a influência da velocidade de *Stribeck* ( $v_s$ ).

Segundo (Cunha, 2000), a maneira através da qual determinamos o ajuste de mínimos quadrados por um polinômio pode ser imediatamente generalizada para o caso da combinação linear de um conjunto de funções conhecidas  $\varphi_i(x)_i$ . Pode-se

verificar prontamente que o polinômio  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$  é um caso particular da combinação linear de  $m$  distintas funções  $\varphi_j(x)$

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^m a_j \varphi_j(x), \quad (3.10)$$

no caso em que  $\varphi(x) = x^j$ .

A utilização do método dos mínimos quadrados por uma combinação linear de funções é encontrar estimativas dos valores dos coeficientes  $a_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$ , tal que soma quadrática dos resíduos  $Q(f, \varphi)$ , dada por:

$$Q(f, \varphi) = \sum_{i=1}^n (f_i - \varphi(x_i))^2 = \sum_{i=1}^n \left( f_i - \sum_{j=1}^m a_j \varphi_j(x_i) \right)^2 \quad (3.11)$$

seja minimizada.

De maneira análoga ao caso do ajuste para polinômios, o conjunto de coeficientes que minimizam  $Q(f, \varphi)$  é determinado pela solução do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial a_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial a_m} = 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

que é equivalente ao sistema de equações normais:

$$\Phi^T \Phi \mathbf{a} = \Phi^T f \quad (3.13)$$

onde,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_m(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_3) & \varphi_2(x_3) & \dots & \varphi_m(x_3) \end{pmatrix}_{n \times m}, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \text{ e } f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

A partir da equação da força na direção de  $v$ :

$$F_{av} = C_v + (F_{sv} - C_v) e^{-|\frac{v}{v_{sv}}|^{\delta_{sv}}} + B_v v(t) \quad (3.15)$$

substituindo  $C_v$  por  $a_0$ ,  $F_s$  por  $a_1$  e  $B_v$  por  $a_2$  temos:

$$F_{a_v} = a_0 + (a_1 - a_0)e^{-|\frac{v}{v_{sv}}|^{\delta_{sv}}} + a_2v. \quad (3.16)$$

Colocando os termos  $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$  em evidência, tem-se:  $\varphi_0 = 1 - e^{-|\frac{v}{v_{sv}}|^{\delta_{sv}}}$ ,  $\varphi_1 = e^{-|\frac{v}{v_{sv}}|^{\delta_{sv}}}$  e  $\varphi_2 = v$ , sendo que a mesma análise pode ser feita para  $v_n$  e  $w$ .

Desta forma, o problema de calcular os parâmetros  $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$  da aproximação é reduzido ao cálculo do vetor  $\mathbf{a}$  na equação seguinte:

$$\Phi^T \Phi \mathbf{a} = \Phi^T f \quad (3.17)$$

onde  $\Phi$  é definida por:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 - e^{-|\frac{v_1}{v_{sv}}|^{\delta_{sv}}} & e^{-|\frac{v_1}{v_{sv}}|^{\delta_{sv}}} & v_1 \\ 1 - e^{-|\frac{v_2}{v_{sv}}|^{\delta_{sv}}} & e^{-|\frac{v_2}{v_{sv}}|^{\delta_{sv}}} & v_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 - e^{-|\frac{v_m}{v_{sv}}|^{\delta_{sv}}} & e^{-|\frac{v_m}{v_{sv}}|^{\delta_{sv}}} & v_m \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{m \times 3}, \quad (3.18)$$

sendo  $v = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m]^T$  o vetor de amostras da velocidade na direção de  $v$ ,  $f = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ \dots \ f_m]^T$  o vetor de amostras da força de tração no centro de massa do robô na direção de  $v$ ,  $\mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \ a_2]^T$  o vetor de parâmetros da aproximação a ser determinado e  $m$  é o número de amostras.

Dado que a matriz  $\Phi$  não é uma matriz quadrada, então pelo uso da pseudo-inversa associada tem-se que:

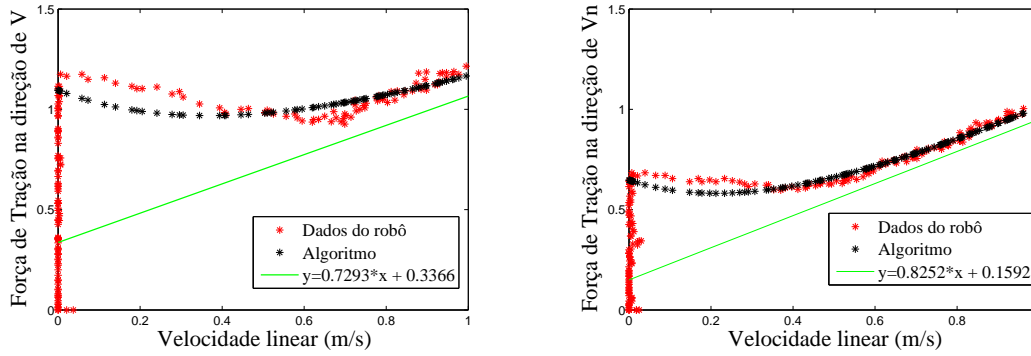
$$\mathbf{a} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T f. \quad (3.19)$$

### 3.4.1 Estimação dos parâmetros utilizando o robô com rodas grandes

Os experimentos foram realizados no carpet e na grama sintética. Aplicando rampas de tensões nos motores de 0 à 2,5 V, com acréscimos de 0,01 V.

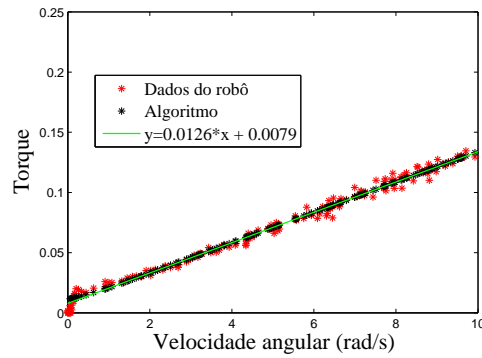
As Figuras 3.10 e 3.11 mostram as zonas mortas do robô no carpet e na grama sintética, nas direções  $v$ ,  $v_n$  e  $w$ . Verifica-se que as curvas das Figuras 3.10(a), 3.10(b), 3.11(a) e 3.11(b) tendem a aproximar das retas dadas pelos valores dos coeficientes de atrito, isso só não acontece porque o robô não alcança velocidades maiores. Os coeficientes de atrito Viscoso  $B_v$ ,  $B_{v_n}$  e  $B_w$ , de Coulomb  $C_v$ ,  $C_{v_n}$  e

$C_w$ , e a força de atrito estático ( $F_s$ ) são estimados utilizando o ajuste por mínimos quadrados. A velocidade de *Stribeck* é determinada empiricamente, para o caso em estudo.



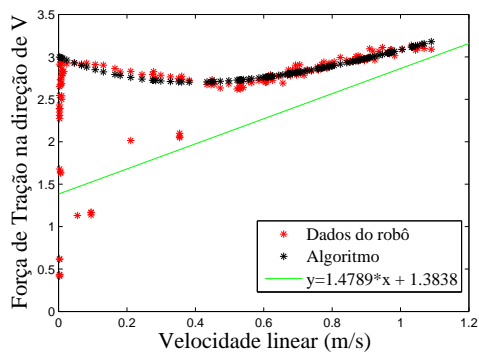
(a)  $F_v$  versus  $v$ .

(b)  $F_{vn}$  versus  $v_n$ .

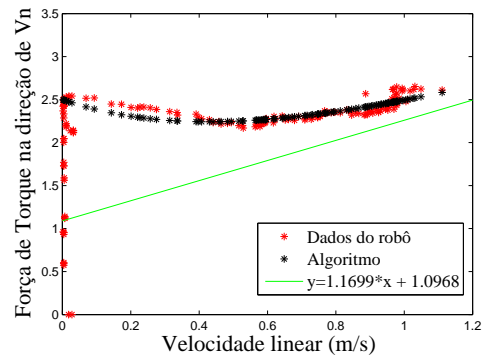


(c)  $\Gamma$  versus  $w$ .

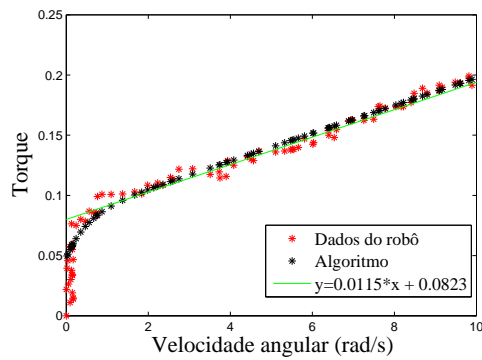
Figura 3.10: Zona morta do robô no ambiente de navegação o carpet.



(a)  $F_v$  versus  $v$ .



(b)  $F_{v_n}$  versus  $v_n$ .



(c)  $\Gamma$  versus  $w$ .

Figura 3.11: Zona morta do robô no ambiente de navegação a grama sintética.

Os valores obtidos estão na Tabela 3.10 e são bastantes próximos dos valores encontrados utilizando o método de regime permanente. Portanto, os dois métodos convergiram a valores semelhantes para a estimação dos parâmetros.

Tabela 3.10: Coeficientes de atrito estimados.

Ambiente de navegação	Coefficiente de atrito Viscoso	Coefficiente de atrito Coulomb	Stiction	velocidade Stribeck
Carpet	$B_v=0,7293$	$C_v=0,3366$	$F_{s_v}=1,1$	$v_{s_v}=0,5$
	$B_{v_n}=0,8252$	$C_{v_n}=0,1592$	$F_{s_{v_n}}=0,65$	$v_{s_{v_n}}=0,5$
	$B_w=0,0126$	$C_w=0,0079$	$F_{s_w}=0,02$	$v_{s_w}=0,5$
Grama sintética	$B_v=1,4789$	$C_v=1,3838$	$F_{s_v}=3,0$	$v_{s_v}=0,5$
	$B_{v_n}=1,1699$	$C_{v_n}=1,0968$	$F_{s_{v_n}}=2,5$	$v_{s_{v_n}}=0,5$
	$B_w=0,0115$	$C_w=0,0823$	$F_{s_w}=0,07$	$v_{s_w}=0,5$

Na Tabela 3.11 são apresentados os resultados obtidos dos coeficientes de atrito nos métodos da sub-seção 3.2.2 e 3.4.1.

Tabela 3.11: Resumo dos coeficientes de atrito estimados.

<b>Método regime permanente de funcionamento</b>			
Ambiente de navegação	Direção $v$	Direção $v_n$	Direção $w$
<b>Carpet</b>	$B_v=0,7$	$B_{v_n}=0,7$	$B_w=0,011$
	$C_v=0,28$	$C_{v_n}=0,14$	$C_w=0,0086$
<b>Grama sintética</b>	$B_v=1,2$	$B_{v_n}=1,1$	$B_w=0,012$
	$C_v=1,5$	$C_{v_n}=1,1$	$B_w=0,07$
<b>Estimação baseada em mínimos quadrados</b>			
Ambiente de navegação	Direção $v$	Direção $v_n$	Direção $w$
<b>Carpet</b>	$B_v=0,7293$	$B_{v_n}=0,8252$	$B_w=0,0126$
	$C_v=0,3366$	$C_{v_n}=0,1592$	$C_w=0,0079$
	$F_{s_v}=1,1$	$F_{s_{v_n}}=0,65$	$F_{s_w}=0,02$
	$v_{s_v}=0,5$	$v_{s_{v_n}}=0,5$	$v_{s_w}=0,5$
<b>Grama sintética</b>	$B_v=1,4789$	$B_{v_n}=1,1699$	$B_w=0,0115$
	$C_v=1,3838$	$C_{v_n}=1,0968$	$C_w=0,0823$
	$F_{s_v}=3,0$	$F_{s_{v_n}}=2,5$	$F_{s_w}=0,07$
	$v_{s_v}=0,5$	$v_{s_{v_n}}=0,5$	$v_{s_w}=0,5$

Os coeficientes de atrito na grama sintética são maiores do que no carpet, devido à influência do atrito. Na Tabela 3.11, apresentam-se os coeficientes dos atritos estimados com os dois métodos, verifica-se que houve uma pequena diferença entre os valores estimados dos parâmetros, considerada aceitável, levando-se em conta que é uma estimação experimental. Sendo assim, os valores dos coeficientes de atrito utilizados no modelo do robô para a próxima seção são os valores estimados no método I para o robô com rodas pequenas e rodas grandes considerando os atritos Coulomb e o Viscoso e no método baseado em mínimos quadrados para o robô com rodas grandes na validação do modelo do robô considerando os coeficientes de atrito de Coulomb, o Viscoso, o *Stiction* e o efeito *Stribeck*.



# Capítulo 4

## Validação do modelo

*Neste capítulo serão apresentados os resultados de simulações com o modelo.*

### 4.1 Introdução

Nesta seção serão apresentadas simulações com o modelo proposto e comparações com dados experimentais dos robôs. Foram utilizados os robôs de rodas grandes e pequenas nos ambientes de navegação carpet e grama sintética. Utilizou-se o software Matlab/Simulink para implementar e realizar as simulações com o modelo.

#### 4.1.1 Simulação com o modelo do robô de rodas pequenas

Foram realizados experimentos no carpet para o robô com rodas pequenas, aplicando diferentes conjuntos de tensões nos motores e no modelo estimado, conforme a Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Tensões aplicadas.

Velocidade $v$		
<b>Motor 1</b> $u_1(volts)$	<b>Motor 2</b> $u_2(volts)$	<b>Motor 3</b> $u_3(volts)$
0	2	-2
0	3	-3
0	4	-4
Velocidade $v_n$		
<b>Motor 1</b> $u_1(volts)$	<b>Motor 2</b> $u_2(volts)$	<b>Motor 3</b> $u_3(volts)$
-3	1.5	1.5
-4	2	2
-5	2.5	2.5
Velocidade $w$		
<b>Motor 1</b> $u_1(volts)$	<b>Motor 2</b> $u_2(volts)$	<b>Motor 3</b> $u_3(volts)$
1	1	1
1.5	1.5	1.5
2	2	2

Os resultados de simulação e velocidades do robô são apresentados na Figura 4.2. Verifica-se que o modelo obteve um bom desempenho tanto em regime permanente como no transitório. Para os casos em que o robô tem uma velocidade na direção de  $v$  e  $v_n$  verifica-se a presença de mais ruído quando comparado com velocidades  $w$ . Este fato é facilmente explicado devido a geometria do robô, que para gerar velocidades na direção  $v$  apenas duas das três rodas giram e com mesma velocidade (ver Figura 4.1(a)), além disso as rodas estão com um ângulo  $\delta$  igual a 60 graus em relação ao vetor de velocidade  $v$  (ver Figura 2.2). Para gerar velocidade na direção de  $v_n$ , a roda 1 tem que girar com o dobro da velocidade e sentido oposto quando comparado as rodas 2 e 3, como mostra a Figura 4.1(b). No caso de  $w$ , os três motores giram no mesmo sentido e com a mesma velocidade (ver Figura 4.1(c)), gerando velocidades com menos ruídos. É importante salientar, que nos experimentos o sistema está em malha aberta, então qualquer ondulação no solo, trepidação ou qualquer outra perturbação provocará uma pequena diferença na resposta transitória e de regime permanente.

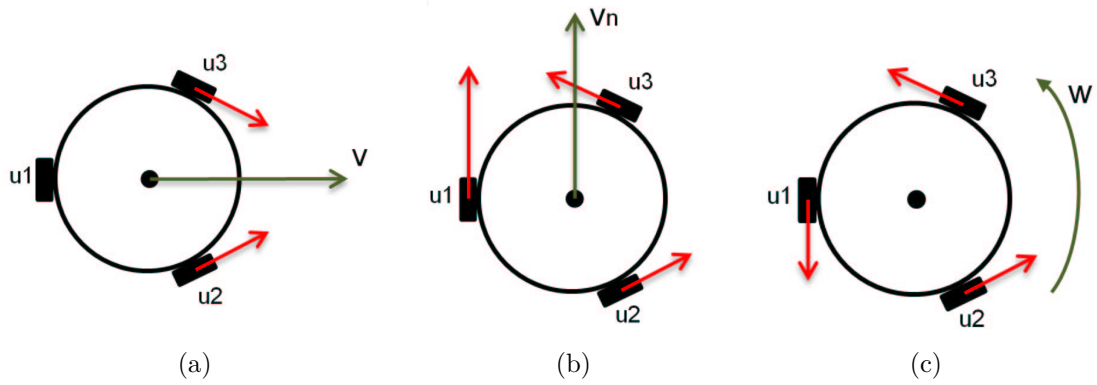
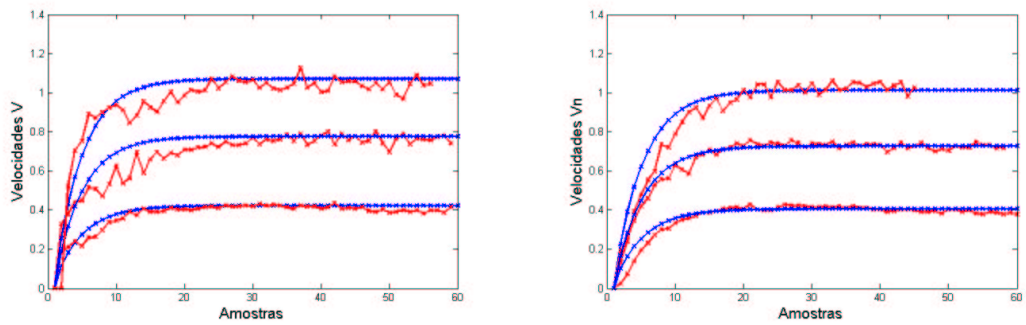
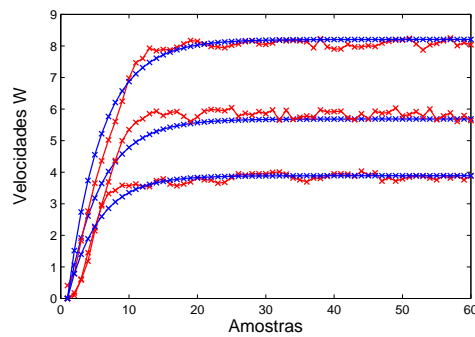


Figura 4.1: Representação das tensões nas direções  $v$ ,  $v_n$  e  $w$ .



(a) Entradas  $u: (0; 2; -2), (0; 3; -3)$  e  $(0; 4; -4)$ . (b) Entradas  $u: (-3; 1.5; 1.5), (-4; 2; 2)$  e  $(-5; 2.5; 2.5)$ .



(c) Entradas  $u: (1; 1; 1), (1.5; 1.5; 1.5)$  e  $(2; 2; 2)$ .

Figura 4.2: Curvas de velocidade do robô e do modelo no carpet.

### 4.1.2 Simulação com o modelo do robô de rodas grandes

Os experimentos apresentados nesta sub-seção foram realizados no carpet e na grama sintética. Utilizou-se uma rampa nos motores para preservar o robô, como mostra a Figura 4.3.

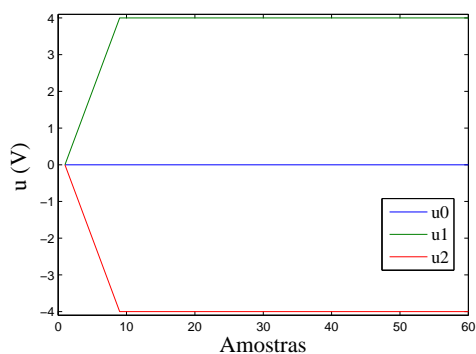


Figura 4.3: Sinal de entrada dos motores

Aplicou-se diferentes conjuntos de tensões nos motores e no modelo estimado, conforme as Tabelas 4.2 e 4.3.

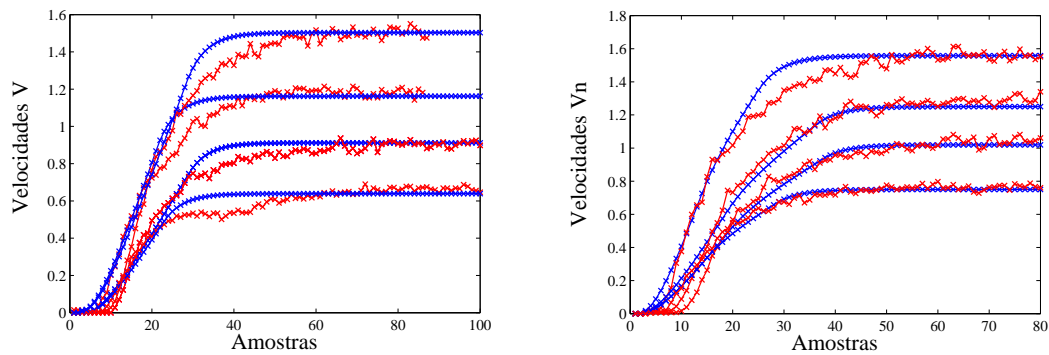
Tabela 4.2: Tensões aplicadas nos motores no carpet.

Velocidade $v$		
<b>Motor 1</b> $u_1(\text{volts})$	<b>Motor 2</b> $u_2(\text{volts})$	<b>Motor 3</b> $u_3(\text{volts})$
0	1.5	-1.5
0	2	-2
0	2.5	-2.5
0	3	-3
Velocidade $v_n$		
<b>Motor 1</b> $u_1(\text{volts})$	<b>Motor 2</b> $u_2(\text{volts})$	<b>Motor 3</b> $u_3(\text{volts})$
-2	1	1
-2.5	1.25	1.25
-3	1.5	1.5
-3.5	1.75	1.75
Velocidade $w$		
<b>Motor 1</b> $u_1(\text{volts})$	<b>Motor 2</b> $u_2(\text{volts})$	<b>Motor 3</b> $u_3(\text{volts})$
1	1	1
1.5	1.5	1.5
2	2	2
2.5	2.5	2.5
3	3	3

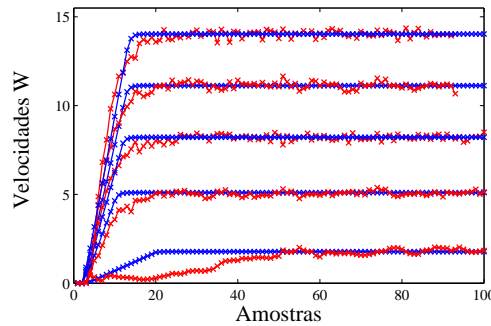
Tabela 4.3: Tensões aplicadas nos motores, ambiente de navegação grama sintética.

Velocidade $v$		
<b>Motor 1</b> $u_1(volts)$	<b>Motor 2</b> $u_2(volts)$	<b>Motor 3</b> $u_3(volts)$
0	2	-2
0	2.5	-2.5
0	3	-3
0	3.5	-3.5
Velocidade $v_n$		
<b>Motor 1</b> $u_1(volts)$	<b>Motor 2</b> $u_2(volts)$	<b>Motor 3</b> $u_3(volts)$
-2.5	1.25	1.25
-3	1.5	1.5
-3.5	1.75	1.75
-4	2	2
Velocidade $w$		
<b>Motor 1</b> $u_1(volts)$	<b>Motor 2</b> $u_2(volts)$	<b>Motor 3</b> $u_3(volts)$
1	1	1
1.5	1.5	1.5
2	2	2
2.5	2.5	2.5
3	3	3

Os resultados de simulação e velocidades do robô no carpet são apresentados nas Figuras 4.4 e 4.5. Verifica-se que o modelo obteve um bom desempenho tanto em regime permanente como no transitório. Como notado com os experimentos com o robô de rodas pequenas, os gráficos obtidos nos experimentos com o robô com rodas grandes também possuem mais ruídos nas direções de  $v$  e  $v_n$  do que os gráficos na direção de  $w$ . Nas Figuras 4.4(c) e 4.5(c), a primeira curva de baixo para cima, contém mais ruído do que as demais, porque a tensão aplicada de 1 volts está muito próxima do limiar entre o robô iniciar o movimento ou ficar parado.

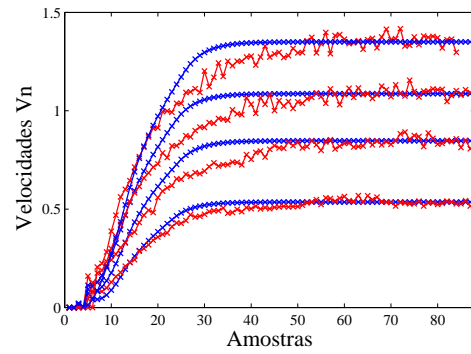
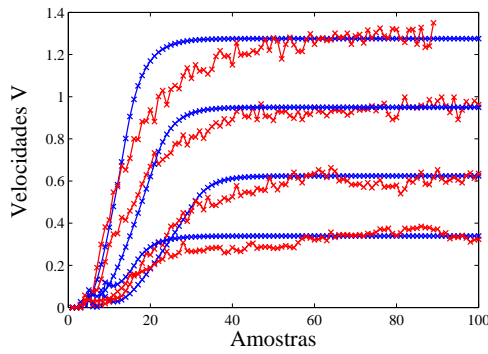


(a) Entradas  $u: (0; 1.5; -1.5), (0; 2; -2), (0; 2.5; -2.5)$  e  $(0; 3; -3)$ . (b) Entradas  $u: (-2; 1; 1), (-2.5; 1.25; 1.25), (-3; 1.5; 1.5)$  e  $(-3.5; 1.75; 1.75)$ .

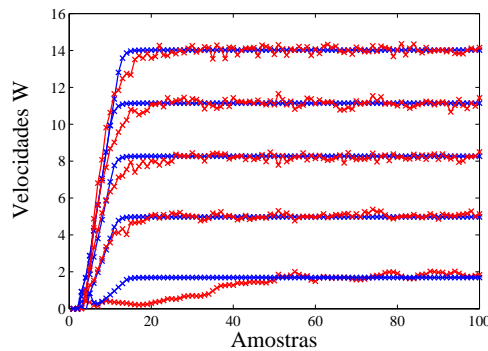


(c) Entradas  $u: (1; 1; 1), (1.5; 1.5; 1.5), (2; 2; 2), (2.5; 2.5; 2.5)$  e  $(3; 3; 3)$ .

Figura 4.4: Curvas de velocidade do robô e do modelo no carpet.



(a) Entradas  $u:(0; 2; -2), (0;2.5; -2.5), (0;3;-3)$  e (b) Entradas  $u:(-2.5;1.25;1.25), (-3;1.5;1.5), (-0;3.5;-3.5)$  e  $(-4;2;2)$ .



(c) Entradas  $u: (1;1;1), (1.5;1.5;1.5), (2;2;2), (2.5;2.5;2.5)$  e  $(3;3;3)$ .

Figura 4.5: Curvas de velocidade do robô e do modelo na grama sintética.

Analisando as velocidades do robô nos dois ambientes de navegação, nota-se que para a base entrar em movimento no carpet necessita-se de uma tensão de 1.5 volts na direção  $v$ , tendo uma velocidade de  $0.65 \text{ m/s}$ . Já na grama sintética, a tensão necessária para a base móvel começar a se mover foi de 2 volts, gerando uma velocidade de  $0.32 \text{ m/s}$ . Logo, na grama sintética há mais influência do atrito, exigindo mais tração nas rodas para o robô vencer o efeito da zona-morta e começar a se movimentar. Para evidenciar a diferença de velocidades com uma mesma entrada para os terrenos diferentes, a Tabela 4.4 mostra uma comparação de velocidades nos dois ambientes de navegação para uma mesma entrada.



Tabela 4.4: Comparação entre velocidades e ambientes de navegação.

Ambiente de navegação	$u$ (Volts)	$v$ (m/s)	$v_n$ (m/s)	$w$ (rad/s)
Carpet	2	0.90	0.76	9.65
Grama sintética	2	0.32	0.54	8.16

### 4.1.3 Simulação com o modelo do robô de rodas grandes na região da zona morta

Nesta seção, serão apresentados os resultados de simulação e velocidades do robô na região da zona morta. Os experimentos foram realizados no carpet e na grama sintética para o robô com rodas grandes, utilizou-se rampa de tensões nos motores (ver Figura 4.6) para poder visualizar com clareza o efeito da zona morta, além do efeito *Stribeck* e o *Stiction*.

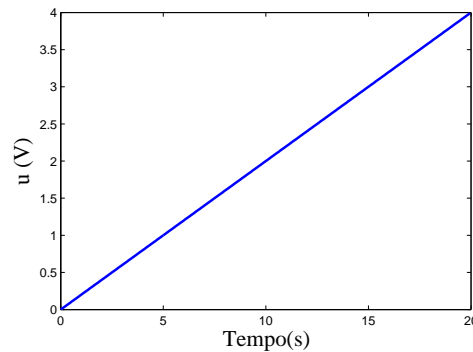


Figura 4.6: Sinal de entrada dos motores.

O modelo desenvolvido considera as forças de atrito de Coulomb e o Viscoso na primeira parte da validação. Na segunda parte, o modelo considera as forças de atrito de Coulomb, o Viscoso, o efeito *Stribeck* e o *Stiction*, com isso a resposta em malha aberta deve representar a zona morta, como mostra a Figura 4.7. Tanto para a velocidade linear  $v$  na grama sintética quanto a velocidade linear  $v$  no carpet o modelo representou fielmente o efeito da zona morta, considerando os atritos Coulomb, o Viscoso, *Stiction* e o efeito *Stribeck* quando comparado com o robô. Para a simulação do modelo considerando o atrito Coulomb e o Viscoso, nota-se uma diferença do ponto de início do movimento da base móvel quando comparado com a velocidade do robô e isso acontece nos dois ambientes de navegação. Tal diferença é

devido ao efeito *Stribeck* e o *Stiction* que nesta abordagem não é considerada. Para a velocidade  $w$ , Figura 4.8, o modelo obteve também um bom desempenho, como pode ser visto na Figura 4.8. É possível analisar que para as velocidades lineares de  $v$  na grama as tensões necessárias para a base entrar em movimento são maiores do que no carpet, devido a maior presença do atrito em relação ao contato da base com o chão. Logo, para vencer esta inércia em  $v$ , necessita-se de uma tensão em torno de 0.5 volts para a base no carpet e de 2.5 volts na grama sintética, como pode ser observado na Figura 4.7. A mesma análise pode ser realizada na direção de  $w$ , conforme a Figura 4.8. Os ruídos presentes no início das curvas pretas das Figuras 4.7(a), 4.7(b) e 4.8 são referentes á aproximações numéricas do simulador.

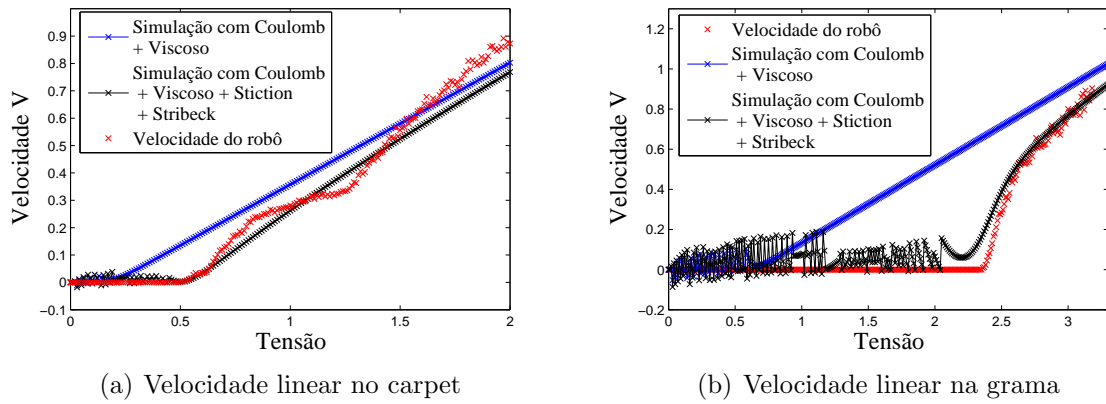
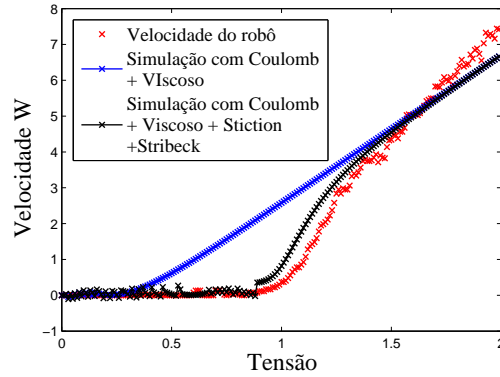


Figura 4.7: Análise da zona morta.



(a) Velocidade angular na grama

Figura 4.8: Análise da zona morta na direção de  $w$  na grama.

Para uma análise quantitativa, foi calculado o erro médio quadrático nos resultados das simulações com o robô com rodas grandes na sua região da zona morta, nos ambientes de navegação o carpet e a grama sintética. Utilizou-se a ferramenta Matlab, mas especificamente à função MSE (*Mean squared error*), que é uma forma de avaliar a diferença entre um estimador e o verdadeiro valor da quantidade estimada, retornando o valor do erro médio quadrático.

A primeira análise realizada foram com os dados da velocidade do robô e os dados da simulação considerando os atritos de Coulomb e Viscoso na direção de  $v$  no ambiente de navegação o carpet (Figura 4.7(a)), tendo o erro médio quadrático de 0,0181. Considerando a simulação com os atritos de Coulomb, Viscoso, *Stiction* e o efeito *Stribeck* o erro médio quadrático foi de 0.0075. A mesma análise pode ser feita nas direções de  $v$  e  $w$  no ambiente de navegação grama sintética, como mostra a Tabela 4.5 contendo todos os valores. Logo, os valores encontrados dos erros considerando os atritos de Coulomb, Viscoso, *Stiction* e o efeito *Stribeck* são menores nos dois ambientes de navegação, quando comparados com os valores encontrados com as simulações considerando o atrito de Coulomb e Viscoso, reforçando mais a importância de se obter um modelo estático de atrito mais completo, pois representa de forma mais realística o comportamento do robô.

Tabela 4.5: Erro médio quadrático.

<b>Direção <math>v</math>:</b>	<b>Simulação com os atritos de Coulomb + Viscoso</b>	<b>Simulação com os atritos de Coulomb + Viscoso + <i>Stiction</i> + efeito <i>Stribeck</i></b>
<b>Carpet</b>	0,0181	0,0075
<b>Grama</b>	0,0914	0,0067
<b>Direção <math>w</math>:</b>	<b>Simulação com os atritos de Coulomb + Viscoso</b>	<b>Simulação com os atritos de Coulomb + Viscoso + <i>Stiction</i> + efeito <i>Stribeck</i></b>
<b>Grama</b>	1,1389	0,1468

Portanto, a principal contribuição da dissertação foi o desenvolvimento de um modelo dinâmico do robô que inclui os efeitos de atrito estáticos mais completo, que considera os atritos de Coulomb, o Viscoso, o *Stiction* e o efeito *Stribeck*. Quando comparado com o modelo que considera apenas os atritos de Coulomb e o Viscoso, possui um melhor desempenho e menor erro médio quadrático, como pode ser observado na Figura 4.7 e na Tabela 4.5.

# Capítulo 5

## Considerações Finais

O objetivo principal deste trabalho foi obter um modelo não-linear que represente de forma mais realística o comportamento do robô e também represente os efeitos da interação com o terreno de navegação. De modo a cumprir este objetivo, foram estudadas várias particularidades da robótica móvel, focando sempre nos robôs com rodas omnidirecionais.

A principal contribuição e inovação do trabalho é a inclusão de um modelo estático de atrito, mais completo quando comparado a outros trabalhos, na composição de forças do centro de massa do robô. Para esse novo modelo, desenvolveu-se um método de estimação, utilizando-se o algoritmo de mínimos quadrados por combinação linear das funções. Esse novo método pode ser usado na estimação de parâmetros em tempo-real para modelos estáticos, e quando comparado com outros métodos consolidados da literatura (como o método do regime permanente), apresentou desempenho semelhante. Trata-se de um modelo simplificado quando comparado aos modelos dinâmicos de atrito existentes na literatura como exemplo o modelo de Lugre e o de Dahl ((Canudas de Wit and Tsiotras, 1999)), diminuindo a complexidade das leis de controle com o seu uso. A utilização de duas bases móveis de tamanho de rodas diferentes e ambientes de navegação diferentes proporcionou uma análise em diferentes condições de operação.

Todas as etapas projetadas do trabalho foram finalizadas, o sucesso em cada etapa foi essencial para o desenvolvimento da seguinte, tendo alcançado todos os objetivos propostos. É importante salientar que se trata de um trabalho experimental, utilizando mais de um robô em diversas condições de operação. A nova abordagem

para a determinação do modelo obteve uma representação mais fiel do comportamento do robô, principalmente na região da zona morta. O método de estimação proposto mostrou-se mais prático de ser utilizado, pois não necessita das velocidades do robô em diversas regiões de regime permanente de funcionamento. Além disso, faz a estimação de 3 coeficientes (Viscoso, Coulomb e *Stiction*), com um custo computacional praticamente nulo.

Os modelos estimados neste trabalho estão sendo utilizados em trabalhos que abordam sistemas de controle para robôs com rodas, justificando assim seu desenvolvimento e o projeto no qual foi inserido. Esta integração já rendeu algumas publicações importantes, listadas a seguir:

- Pitanga, J. ; Araujo, H. X. ; Oliveira, G. H. C. ; Conceição, A. G. S. . Controle preditivo aplicado a um robô móvel omnidirecional. In: XIX Congresso Brasileiro de Automática, 2012, Campina Grande. CBA 2012, 2012.
- Barreto Sb. , J.C.L. ; Dórea, C. E. T. ; Pieri, E. R. ; Conceição, A. G. S. . Projeto e Implementação de Controle Preditivo com Compensação de Atrito de um Robô Móvel Omnidirecional. In: X Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2011, São João Del-Rei. SBAI 2011, 2011. p. 809-814.
- Araujo, H. X. ; Pitanga, J. ; Oliveira, G. H. C. ; Conceição, A. G. S. . Model Predictive Control Based on LMIs Applied to an Omni-Directional Mobile Robot. In: 18th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC), 2011, Milan. IFAC 2011, 2011. v. 18. p. 8171-8176.
- Barreto Sb. , J.C.L. ; Dórea, C. E. T. ; Martinez, L. ; Pieri, E. R. ; Conceição, A. G. S. . Design and Implementation of Model Predictive Control with Friction Compensation on an Omnidirectional Mobile Robot. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, (artigo aceito para publicação).

## 5.1 Sugestões de Futuros Trabalhos

São propostos como trabalhos futuros:

- (i) Uso dos modelos e métodos propostos para estimação em tempo-real;

- (ii) Aplicabilidade desses modelos no robô para estimação em tempo-real dos coeficientes de atrito;
- (iii) Análise de compensação de atrito para robôs móveis com rodas em ambientes de navegação não-controlados;
- (iv) Análise de outros fenômenos não-lineares como: folgas mecânicas, ciclos limites e escorregamento;
- (v) Instrumentação para estimação de forças e velocidades de robôs móveis (acelerômetro, sensor inercial, compasso digital).





# Referências Bibliográficas

- Albagul, A. and Wahyudi (2004). Dynamic modeling and adaptive traction control for mobile robots. Em: *Industrial Electronics Society, 2004. IECON 2004. 30th Annual Conference of IEEE*. Vol. 1. pp. 614 – 620 Vol. 1.
- Araújo, H. X., J. Pitanga, G. H. C. Oliveira and A. G. S. Conceição (2011). Model predictive control based on lmis applied to an omni-directional mobile robot. Em: *18th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC)*.. Vol. 18. Milan. pp. 8171 – 8176.
- Barreto Sb., J.C.L.; Conceição, A. G. S.; Dórea C.E.T. (2010). Controle preditivo de um robô móvel omnidirecional com compensação de atrito. *XVIII Congresso Brasileiro de Automática- CBA* pp. 1129–1135.
- Bona, B. and M. Indri (2005). Friction compensation in robotics: an overview. Em: *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05. 44th IEEE Conference on*. pp. 4360 – 4367.
- Bräunl, T. (2008). *Embedded Robotics: Mobile Robot Design and Applications with Embedded Systems*. 3 ed.. Springer-Verlag.
- Canudas de Wit, C. and P. Tsiotras (1999). Dynamic tire friction models for vehicle traction control. Em: *Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on*. Vol. 4. pp. 3746 –3751 vol.4.
- Chung, J. H., Y. Byung-Ju, K. K. Whee and H. Lee (2003). The dynamic modeling and analysis for an omnidirectional mobile robot with three caster wheels. Em: *Robotics and Automation, 2003. Proceedings. ICRA '03. IEEE International Conference on*. Vol. 1. pp. 521 – 527 vol.1.

- Conceicao, A.G.S., A.P. Moreira and P.J. Costa (2006). Model identification of a four wheeled omni-directional mobile robot. *Proceedings of the IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation - ETFA* pp. 227–234.
- Conceição, A. G. S. (2007). Controle e Cooperação de robôs móveis autónomos omnidirecionais. Tese de Doutorado. universidade do Porto-Faculdade de Engenharia.
- Conceição, A. G. S., A. P. Moreira and J. P. Costa (2009a). A nonlinear mobile robot modeling applied to a model predictive controller. Em: *Symposium on Applied Computing - SAC*. Hawaii-Honolulu. pp. 1186–1187.
- Conceição, A. G. S., P. J. Costa and A. P. Moreira (2009b). Practical approach of modeling and parameters estimation for omnidirectional mobile robots. *IEEE Transactions on Mechatronics* **14**(3), 377–381.
- Conceição, A.G.S., A.P. Moreira and P.J. Costa (2005a). Architecture control and model identification of a omni-directional mobile robot. Em: *Conference Portuguese on Artificial Intelligence*. Porto-Portugal. pp. 247–251.
- Conceição, A.G.S., A.P. Moreira and P.J. Costa (2005b). Control and model identification of a mobile robot's motors based in least squares and instrumental variable methods. Em: *11th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics*. Miedzydroje-Polônia. pp. 227–234.
- Cunha, Cristina (2000). *Métodos numéricos*. 2 ed.
- Deng, Mingcong, Hongnian Yu and Zenta Iwai (2001). Simple robust adaptive control for structured uncertainty plants with unknown dead-zone. Em: *Decision and Control, 2001. Proceedings of the 40th IEEE Conference on*. Vol. 2. pp. 1621–1626 vol.2.
- Dudek, G. and M. Jenkin (2010). *Computational principles of mobile robotics*. Cambridge Univ Pr.
- Fernández, César A. P. and JÉS J. F. Cerqueira (2009a). Control de velocidad con compensación de deslizamiento en las ruedas de una base holonómica usando un

- neurocontrolador baseado en el modelo narmax-12. Em: *Anais do IX Congresso Brasileiro de Redes Neurais-CBRN*. pp. 1–6.
- Fernández, César A. P. and JÉS J. F. Cerqueira (2009b). Identificação de uma base holonômica para robôs móveis com escorregamento nas rodas usando um modelo narmax polinomial. Em: *IX Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente-SBAI*.
- Gokcek, C., P.T. Kabamba and S.M. Meerkov (2000). Slqr/slqg: an lqr/lqg theory for systems with saturating actuators. Em: *Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on*. Vol. 4. pp. 3236 –3241 vol.4.
- Golda, D., K. Iagnemma and S. Dubowsky (2004). Probabilistic modeling and analysis of high-speed rough-terrain mobile robots. Em: *Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04. 2004 IEEE International Conference on*. Vol. 1. pp. 914 – 919 Vol.1.
- Hamerlain, F., K. Achour, T. Floquet and W. Perruquetti (2005). Higher order sliding mode control of wheeled mobile robots in the presence of sliding effects. Em: *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05. 44th IEEE Conference on*. pp. 1959 – 1963.
- Iagnemma, K., A. Rzepniewski, S. Dubowsky, P. Pirjanian, T. Huntsberger and P. Schenker (2000). Mobile robot kinematic reconfigurability for rough-terrain.
- Iagnemma, K. and S. Dubowsky (2008). *Mobile Robots in Rough Terrain: Estimation, Motion Planning, and Control with application to Planetary Rovers*. 3 ed.. Springer-Verlag.
- Iagnemma, K., Shinwoo Kang, H. Shibly and S. Dubowsky (2004). Online terrain parameter estimation for wheeled mobile robots with application to planetary rovers. *Robotics, IEEE Transactions on* **20**(5), 921 – 927.
- Indiveri, G. (2009). Swedish wheeled omnidirectional mobile robots: Kinematics analysis and control. *Robotics, IEEE Transactions on* **25**(1), 164 –171.
- Ismail, J.S. (1998). *Fixed and Adaptive Mechanical Backlash Control*. University of California, Santa Barbara.

- Kuo, B. C. (1995). *Automatic Control Systems*. John Wiley & Sons Ltd.
- Laura, T. L. (2006). Modelagem dinâmica da estrutura da base móvel de robôs manipuladores com inclusão das não linearidades de entrada. Tese de Doutorado. UFBA-Engenharia Elétrica.
- Lewis, F. L., Woo Kam Tim, Li-Zin Wang and Z.X. Li (1999). Deadzone compensation in motion control systems using adaptive fuzzy logic control. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on* **7**(6), 731 –742.
- Mendes, Ellon Paiva (2012). Identificação em tempo real de modelo dinâmico de robô móvel com acionamento diferencial e zona morta. Tese de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte- UFRN.
- Nagarajan, U., G. Kantor and R. L. Hollis (2009a). Trajectory planning and control of an underactuated dynamically stable single spherical wheeled mobile robot. Em: *Robotics and Automation, 2009. ICRA '09. IEEE International Conference on*. pp. 3743 –3748.
- Nagarajan, Umashankar, Anish Mampetta, George A. Kantor and Ralph L. Hollis (2009b). State transition, balancing, station keeping, and yaw control for a dynamically stable single spherical wheel mobile robot. Em: *Robotics and Automation, 2009. ICRA '09. IEEE International Conference on*. pp. 998 –1003.
- Nascimento, T. P., A.L. da Costa and C. C. Paim (2009). Axebot robot the mechanical design for an autonomous omnidirectional mobile robot. Em: *Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference, 2009. CERMA '09..* pp. 187 –192.
- Ogata, Katsuhiko (2003). *Engenharia de Controle Moderno*.
- Olsson, K. J. Astrom, C. C. de Wit M. Gafvert P. Lischinsky (1998). Friction models and friction compensation. *European Journal of Control* **4**, 176–195.
- Park, Sungyong and M. A. Minor (2004). Modeling and dynamic control of compliant framed wheeled modular mobile robots. Em: *Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04. 2004 IEEE International Conference on*. Vol. 4. pp. 3937 – 3943 Vol.4.

- Ribeiro, T. T. (2010). *Sistema de controle em tempo real aplicado a robótica móvel, Trabalho de Conclusão de Curso*. Salvador.
- Siegwart, R., I.R. Nourbakhsh and D. Scaramuzza (2004). *Introduction to Autonomous Mobile Robots*. Intelligent Robotics and Autonomous Agents. Mit Press.
- Tao, G. and P. V. Kokotovic (1995). Adaptive control of plants with unknown hystereses. *Automatic Control, IEEE Transactions on* **40**(2), 200 –212.
- Tao, Gang and P. V. Kokotovic (1994). Adaptive control of plants with unknown dead-zones. *Automatic Control, IEEE Transactions on* **39**(1), 59 –68.
- Venture, G., W. Khalil, M. Gautier and P. Bodson (2003). Identification of the dynamic parameters of a car : Simulation and experimental results. Em: *Proc. of the IFAC International Conference on Transportation Systems*. Tokyo, Japan.
- Voros, J. (2003). Recursive identification of hammerstein systems with discontinuous nonlinearities containing dead-zones. *Automatic Control, IEEE Transactions on* **48**(12), 2203 – 2206.
- Wang, Tai-Yu and Ching-Chih Tsai (2004). Adaptive trajectory tracking control of a wheeled mobile robot via lyapunov techniques. Em: *Industrial Electronics Society, 2004. IECON 2004. 30th Annual Conference of IEEE*. Vol. 1. pp. 389 – 394 Vol. 1.
- Watanabe, Keigo, Yamato Shiraishi, Spyros G. Tzafestas, Jun Tang and Toshio Fukuda (1998). Feedback control of an omnidirectional autonomous platform for mobile service robots. *Journal of Intelligent and Robotic Systems* pp. 315–330.
- Williams, R. L., II, B. E. Carter, P. Gallina and G. Rosati (2002). Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on* **18**(3), 285 –293.
- Zhou, Jing, Meng Joo Er and Changyun Wen (2005). Adaptive control of nonlinear systems with uncertain dead-zone nonlinearity. Em: *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05. 44th IEEE Conference on*. pp. 796 – 801.